



UNIVERSIDAD DE LA FRONTERA
FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y ESTADÍSTICA

La resolución de problemas como una propuesta metodológica
para el aprendizaje de la matemática orientado al
Primer año Medio

Tesis para optar al grado de
MAGÍSTER EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

DAVID OLCAY CAQUEO

Profesor Guía: HERME SOTO SEGURA

TEMUCO 2017

Agradecimientos

En esta última etapa del Magíster, quiero agradecer a mi esposa Claudia e hijo Fabián por el apoyo incondicional que me dieron para lograr alcanzar este anhelado deseo de terminar lo que empecé hace dos años atrás con mucho esfuerzo y sacrificio.

Terminar el programa de Magíster era, en un comienzo, un gran desafío. Porque trabajar y estudiar requiere de un esfuerzo adicional y también es sumamente importante el apoyo de la familia.

También quiero agradecer a todos los profesores que formaron parte de este programa de Magíster, quienes compartieron con nosotros su experiencia y nos dieron las herramientas que nos permitirán mejorar nuestra enseñanza y metodología para el beneficio de nuestros alumnos y para ayudar a mejorar la enseñanza de la matemática en nuestro país.

Sinceramente

David Olcay Caqueo.

Índice

1.- Introducción	Pág. 1, 2
2.- Objetivos	Pág. 2
3.- Marco Teórico	Pág. 3 – 10
3.1.- ¿Qué es un problema?.....	Pág. 11, 12
3.2.- La enseñanza por resolución de problemas	Pág. 12
3.2.1.-Las ventajas de la resolución de problemas.....	Pág. 13
3.3.- Factores que dificultan la resolución de problemas.....	Pág. 14
3.4.- La Metodología de Pólya.....	Pág. 15 – 20
4.- Metodología.....	Pág. 20 – 22
5.- Lenguaje Algebraico.....	Pág. 22 – 25
5.1.- Actividades de lenguaje algebraico.....	Pág. 25 – 31
5.2.- Ejercicios propuestos.....	Pág. 32 – 37
6.- Ejemplos de problemas usando la metodología de Pólya.....	Pág. 38
6.1.- Eje de Números.....	Pág. 38 – 51
6.2.- Eje de Álgebra	Pág. 51 – 68
7.- Actividades para usar la metodología de Pólya.....	Pág. 68 – 85
8.- Problemas propuestos	Pág. 85
8.1.- Eje de Números	Pág. 85 – 90
8.2.- Eje de Álgebra	Pág. 90 – 94
9.- Conclusión	Pág. 95, 96
10.- Bibliografía	Pág. 96, 97

1.- Introducción

La resolución de problemas matemáticos ha llegado a ser uno de los temas más relevantes e importantes en la educación y en la vida diaria, el cual exige que las personas se adapten permanentemente a variadas situaciones, respondiendo de forma estratégica, y con cierto grado de pertinencia a la situación planteada.

Teniendo en cuenta la importancia que tiene la resolución de problemas como herramienta educativa, debemos tener presente los fundamentos, justificaciones, alcances y perspectivas asociadas a este tema, con el objetivo de poder reconocer los beneficios de su desarrollo.

En nuestros días, la enseñanza de la matemática enfrenta serias dificultades con relación a la falta de éxito que presentan los estudiantes en la resolución de problemas matemáticos. Esta situación se ve reflejada en las evaluaciones internas, como controles, pruebas, exámenes y evaluaciones externas, como SIMCE , PSU, PISA.

La escasa capacidad para enfrenar los problemas escolares y sociales, la falta de competencias genéricas como trabajar en equipo, la poca capacidad creativa, la poca habilidad para trasladar la solución de un problema conocido a otra situación nueva. Es por lo anterior que a nivel regional existe una preocupación por trabajar y estimular a los alumnos en el desarrollo de capacidades en el ámbito matemático.

Este trabajo tiene como fin motivar a los alumnos de Primer año Medio, para que se sientan capacitados en el desafío de resolver problemas matemáticos y de esa manera alcanzar un aprendizaje significativo.

Hoy en día los profesores de matemática no han tomado la iniciativa para formalizar un proceso de análisis de la manera cómo los alumnos deben enfrentar los problemas y qué pasos deben seguir para resolverlos.

Por lo tanto, esta tesis me ayudará a implementar una metodología a seguir para que los profesores del área tengan una herramienta para crear en los alumnos el hábito de la resolución de problemas matemáticos de una manera práctica.

Entonces, la presente tesis se focalizará en el área de la matemática, específicamente en la resolución de problemas, relacionándola con los procesos de enseñanza - aprendizaje.

2.- Objetivos

Objetivo General : Elaborar un manual de actividades, que permita incrementar los niveles cognitivos de análisis, pensamiento lógico y reflexivo en los estudiantes de Primero Medio, aumentando su habilidad para resolver problemas en el área Matemática.

Objetivos Específicos :

- a) Identificar las mayores dificultades que presentan los alumnos de Primer Año Medio para resolver problemas de números y álgebra.
- b) Proporcionar herramientas de modo que los alumnos adquieran la capacidad de resolver problemas matemáticos mediante las cuatro fases del modelo de Pólya..
- c) Diseñar batería de problemas matemáticos, para ser incorporado en la rutina diaria de la clase de matemática en 1°Medio.

3.- Marco Teórico

La resolución de problemas es un tema de gran importancia dentro del ámbito escolar, tanto a nivel regional, nacional e internacional. Aunque en general se considera que la capacidad para resolver problemas es un tema más bien matemático, hay plena conciencia entre los docentes que estas habilidades permiten a los estudiantes una formación integral que los capacita para enfrentar situaciones de diversa índole. Existen concepciones erróneas sobre lo que significa resolver un problema. La mayor parte de las veces se piensa que es equivalente a resolver ejercicios ya discutidos en clase, reproduciendo los algoritmos y explicaciones entregadas en el aula; sin embargo, implica un tipo de actividad mental de mayor exigencia. La resolución de problemas ha sido un tema ampliamente debatido a lo largo de la historia de la pedagogía, que además goza de una permanente renovación, acorde con los vaivenes de la actualidad social, ya que representa un área importante dentro de los planes y programas educativos, y que no siempre está claramente expuesto.

El aprendizaje por competencias es el enfoque que está en el centro de la política educativa en todos los niveles y concuerda con diversos proyectos internacionales como ejemplo "*Tuning*". Además, constituyen la base fundamental para orientar el currículo, la docencia, el aprendizaje y la evaluación, desde un marco de calidad (Cuenca, 2006).

Por lo anterior se propone la Teoría de Resolución de Problemas (TRP) planteadas por Pólya (1965), Shoenfield (1985) y Brousseau (1986), como una estrategia metodológica creadora de conocimiento y que potencia el desarrollo de competencias en los estudiantes preuniversitarios.

En el año 2006 fue publicado el Informe del Progreso Educativo en América Latina (PREAL) que analizó la participación de países latinoamericanos como Brasil, México y Uruguay en las evaluaciones del “*Programme for International Student Assessment*” (PISA) del 2003.

Los resultados obtenidos demostraron que muchos estudiantes no pueden aplicar en forma ordenada las habilidades matemáticas básicas para comprender y explorar situaciones contextualizadas.

En otro contexto, el autor Schoenfeld (1985) define la resolución de problemas como: “*el uso de problemas o proyectos difíciles por medio de los cuales los/las alumnas aprenden a pensar matemáticamente*”.¹

El término “difícil” hace referencia a que es una situación en la que su solución no es inmediata, por lo cual el éxito depende de los conocimientos y habilidades previas que posea el estudiante.

Por lo tanto, en la perspectiva internacional, los problemas no se ven solamente como una práctica al finalizar la explicación del docente, sino que constituyen lo medular en el proceso y será lo que va a permitir al estudiante construir sus conocimientos matemáticos. Esta metodología, plantea un cambio en los roles del saber, del estudiantado y del educador de manera que ninguno tiene mayor importancia que el otro.

1 Schoenfeld, A. (1985a). Sugerencias para la enseñanza de la Resolución de Problemas Matemáticos. En Separata del libro “La enseñanza de la matemática a debate”. (13-47). Ministerio de Educación y Ciencia. Madrid.

Respecto al trabajo intelectual del alumno/a el cambio es importante. Para el autor Brousseau (1986), éste no debe basarse en solo aprender definiciones y teoremas para reconocer su aplicación a ciertos ejercicios, más bien debe ser semejante al realizado por el investigador dentro de una comunidad científica: debe descubrir los resultados por sí mismo mediante la elaboración de conjeturas, construcción de lenguajes y modelos, llevar a cabo un proceso de comprobación, refutación y luego intercambiarlos con otros.

Asimismo, el trabajo del profesor/a es esencial dentro del proceso de enseñanza, ya que éste guía al estudiante hacia el conocimiento. Según el autor Chevallard (1991), el docente es el encargado de promover que en su lección los/las estudiantes conformen algo semejante a una micro- sociedad científica, en donde descubran el conocimiento mediante las situaciones-problemas planteadas con este fin. Lo anterior está de acuerdo con lo que plantea Brousseau (1986) quién afirma que: “el profesor debe simular en su clase una micro-sociedad científica, si quiere que los conocimientos sean medios económicos para plantear buenos problemas y para solucionar debates, simulación que por supuesto no es la verdadera actividad científica”.

Según el autor Farstad (2004), *“Las competencias básicas son cimientos del aprendizaje y son independientes de las materias que se enseñan, pero que se desarrollan en el proceso de las mismas. Además, se vuelven condiciones necesarias para adquirir otras competencias”*.²

2 Farstad, H. (2004). Las competencias para la vida y sus repercusiones en la educación. 47ª Reunión de la Conferencia Internacional de Educación de la UNESCO. Ginebra

Al aplicar la resolución de problemas como estrategia metodológica en el aula, se ha observado que los/las estudiantes desarrollan habilidades como la comprensión lectora, ya que deben leer repetidas veces los diversos textos para lograr identificar la problemática inmersa en la redacción del problema, que en ocasiones puede alcanzar una página de extensión. Luego de identificar la problemática, tienen que analizar y sintetizar las ideas aportadas por cada miembro del subgrupo de trabajo y seleccionar la mejor estrategia de solución al problema (Zumbado *et al*, 2008).

La resolución de problemas también potencia las competencias genéricas o fundamentales como por ejemplo la capacidad de la participación en equipo. Otra de las competencias genéricas potenciadas, es la capacidad de organizar y planificar su trabajo y de este modo su propio aprendizaje, ya que desarrollan una metodología de trabajo que incluye la planificación de las fases de resolución del problema y la distribución de tareas en el equipo, resaltando la formación de líderes y el espíritu emprendedor de los estudiantes. Las competencias específicas son propias de una materia, y la resolución de problemas permite su desarrollo. Además, promueve las heurísticas que según el autor Schoenfeld (1985) son " *las estrategias y técnicas que permiten progresar en la solución de un problema no conocido (no estándar) como son la exploración de problemas relacionados, trabajo hacia atrás y la verificación de procedimientos*".³

3 Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Academic Press, Inc. US

En general, el sistema de educación en América del Sur se fundamenta en la enseñanza tradicional, donde el profesor explica los conceptos a enseñar, expone algunos ejercicios resueltos, y para terminar, asigna una lista de ejercicios a los estudiantes, quienes se encargan de reproducirlos y resolverlos, esto provoca que alumno/s adopten actitudes negativas hacia las matemáticas y piensen que están hechas para personas más inteligentes que ellos, que no pueden ser aplicables a la vida real o que son muy difíciles.

Además, con el método tradicional de enseñanza, la estrategia más recurrente se basaría en memorizar los conceptos, y en el mejor de los casos la comprensión de dichos conceptos, dejando de lado la formación integral de los estudiantes. Por lo anterior, se propone la teoría de resolución de problemas como una estrategia creadora de conocimiento y que potencia el desarrollo de competencias en los/las estudiantes, fomentando la participación activa y la formación de micro-sociedades científicas dentro del aula, para que las actuales generaciones desarrollen habilidades que les permitan prepararse para la vida (Farstad, 2004). Además, la resolución de problemas centra el aprendizaje en los/las estudiantes, dando autonomía para aprender a aprender. De igual forma acerca a los/las estudiantes a la aplicación de conocimientos y por ende a encontrar en la matemática su verdadera función en la vida real.

Con respecto a lo que plantea el currículo de la educación chilena, la resolución de problemas constituye el núcleo central de la actividad matemática y debe, por tanto, ocupar un lugar relevante, desde los niveles más elementales, tanto como medio para el aprendizaje de los contenidos matemáticos del nivel, como con la finalidad de desarrollar la habilidad de resolución de problemas.

La resolución de problemas es una actividad compleja que pone en juego un amplio conjunto de habilidades y que incluye elementos de creación, debido a que la persona carece de procedimientos pre-aprendidos para ese efecto. Por esta razón, el desarrollo de la capacidad para resolver problemas es un proceso de largo aliento que requiere de una orientación persistente de parte del educador.

Lo que se busca al resolver problemas es poner en práctica o aplicar los algoritmos que se enseñan en cada unidad. El principal “problema” en educación es que los docentes no se atreven a salir de los procedimientos tradicionales, que claramente son mucho más rápidos, pero extremadamente mecánicos y repetitivos, que no dan pie a “ir más allá”.

Es así que el autor G.Pólya menciona que *“Resolver un problema es hacer un descubrimiento. Un gran problema significa un gran descubrimiento, pero hay una partícula de descubrimiento en la solución de cualquier problema. El suyo puede ser modesto, pero si pone a prueba la curiosidad que induce a poner en juego las facultades inventivas, y si lo resuelve por medios propios, puede experimentar la tensión y el encanto del descubrimiento y el goce del triunfo”*.⁴

4 Pólya, G.(1965). ¿Cómo plantear y resolver problemas? Editorial Trillas. México.

En los últimos años, todos los informes y estudios sobre la enseñanza y aprendizaje de la matemática, destacan la importancia que cumplen en ella, la resolución de problemas. Las diversas miradas a la Resolución de Problemas, en general, incluyen al menos, uno de los siguientes aspectos: matemático, propiamente tal; pedagógico, cognitivo y sociológico.

- ❖ En el primero, interesa conocer al problema como estructura, así como también establecer el papel que han desempeñado los problemas en el desarrollo de la matemática.
- ❖ En el segundo, preocupa definir cómo a través de la resolución de problemas, se logran los objetivos que se definen a alcanzar con la enseñanza de la matemática. En esta mirada, se ha propuesto esencialmente, poner atención a tres aspectos: enseñar para resolver problemas (proponer más problemas a los alumnos, emplear aplicaciones de los problemas a la vida diaria y a las ciencias), enseñar sobre la resolución de problemas (heurística), y enseñar vía la resolución de problemas.
- ❖ En el tercero, los problemas son estudiados considerando las condiciones internas, subjetivas y afectivas, de la persona que se enfrenta a su resolución.
- ❖ En la última, se estudia la situación social en la cual se aborda la solución de problemas: lugar (sala de clases), actores (profesor - alumnos) y actividades desarrolladas.

Junto a Pólya, diversos matemáticos y educadores han propuesto (antes y después de Pólya) variadas sugerencias de estrategia para enfrentar organizadamente la resolución de problemas. A continuación se presentan resumidamente, las propuestas más relevantes en este aspecto :

- **Dewey (1910).** Este pensador y educador, esbozó cinco etapas en la secuencia de acontecimientos en la resolución de problemas: 1) la presentación del problema , 2) la definición del problema en términos de, por ejemplo, los rasgos esenciales característicos, 3) la formulación de una hipótesis , 4) el ensayo de la hipótesis y 5) la comprobación de la hipótesis.
- **J. Hadamard (1945).** En la resolución de un problema intervienen cuatro etapas: 1) preparación , 2) incubación , 3) iluminación y 4) comprobación. Si bien, estas etapas se referían a la creación en matemática, también ellas están presente en el proceso de resolución de problemas a nivel escolar.
- **J. Mason, L. Burton y K. Stacey (1982).** Estos autores, dividen el proceso de resolución de problemas en las fases: 1) Hacer los primeros contactos , 2) Entrar en materia , 3) Fermentar , 4) Seguir avanzando , 5) Intuir , 6) Mostrarse escéptico y 7) Contemplar
- **Miguel de Guzmán (1991) :** Este modelo tiene cuatro fases : 1) Familiarización con el problema, 2) Búsqueda de estrategias, 3) Llevar adelante la estrategia, 4) Revisar el proceso y sacar conclusiones de él.

Posteriormente analizaremos en detalle el aporte de George Pólya, cuya metodología es la que usaremos para la resolución de problemas.

3.1- ¿Qué es un Problema?

Tener un problema significa buscar de forma conciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido pero no alcanzable de forma inmediata.(Pólya, en García Cruz, Juan A. 2001).

Otra definición parecida a la de Pólya es la de (Krulik y Rudnik, 1980): un problema es una situación, cuantitativa o de otra clase , a la que se enfrenta un individuo o un grupo, que requiere solución y para la cual no se vislumbra un medio o camino aparente y obvio que conduzca a la misma.

Según (García Cruz, Juan) de ambas definiciones anteriores un problema debe satisfacer los tres requisitos siguientes:

1. **Aceptación:** El individuo o grupo debe aceptar el problema, debe existir un compromiso formal, que puede ser debido a motivaciones tanto externas como internas.
2. **Bloqueo:** Los intentos iniciales no dan fruto, las técnicas habituales de abordar el problema no funcionan.
3. **Exploración:** El compromiso personal o del grupo fuerzan la exploración de nuevos métodos para atacar el problema.

Según el ministerio de educación: resolver problemas implica encontrar un camino que no se conoce de antemano, es decir una estrategia para encontrar una solución. Para ello se requiere de conocimientos previos y capacidades. A través de ello muchas veces se construyen nuevos conocimientos matemáticos.

A través de la resolución de problemas , se crean ambientes de aprendizaje que permiten la formación de sujetos autónomos, críticos además adquieren formas de pensar, hábitos de perseverancia, curiosidad y confianza en situaciones no familiares que les sirvan fuera de la clase.

El concepto que plantea (De Guzmán, Miguel. 1991) es sobre los **verdaderos problemas** en matemática; es cuando me encuentro en una situación desde la que quiero llegar a otra, unas veces bien conocida, otras un tanto confusamente perfiladas, y no conozco el camino que me puede llevar de una a otra situación.

3.2.- La enseñanza por Resolución de Problemas.

Pone énfasis en considerar como lo más importante lo siguiente:

- Que el alumno manipule los objetos matemáticos.
- Que active su propia capacidad mental.
- Que ejercite su creatividad.
- Que reflexione sobre su propio proceso de pensamiento a fin de mejorarlo concientemente.
- Que, a ser posible, haga transferencias de estas actividades a otros aspectos de su trabajo mental.
- Que adquiera confianza en sí mismo.
- Que se divierta con su propia actividad mental.
- Que se prepare así para otros problemas de la ciencia y, posiblemente, de su vida cotidiana.
- Que se prepare para los nuevos retos de la tecnología y de la ciencia.

3.2.1.- Las ventajas de la Resolución de Problemas.

- Por que es lo mejor que podemos proporcionar a nuestros jóvenes: capacidad autónoma para resolver sus propios problemas.
- Porque el mundo evoluciona muy rápidamente : los procesos efectivos de adaptación a los cambios de nuestra ciencia y de nuestra cultura no se hacen obsoletos .
- Por que el trabajo se puede hacer atrayente, divertido, satisfactorio, autorealizador y creativo.
- Porque muchos de los hábitos que así se consolidan tienen un valor universal, no limitado al mundo de las matemáticas.
- Porque es aplicable a todas las edades.

El aprendizaje de la matemática mediante la resolución de problemas pretende alcanzar los siguientes objetivos :

- Entender los propósitos y el uso del conocimiento que están aprendiendo.
- Aprender activamente utilizando un conocimiento y no pasivamente solo recibéndolo.
- Aprender las diferentes condiciones bajo las cuales sus conocimientos pueden ser aplicados.
- Aprender cuando utilizar cierta estrategia y cuando no utilizarla.
- Aprender en contextos múltiples. Esto induce una abstracción de los conocimientos ligada a sus usos, ayuda a que los estudiantes enfoquen su atención a la estructura profunda del problema.

3.3.- Factores que dificultan la Resolución de Problemas.

En el trabajo frecuente con los alumnos se pueden observar algunos factores comunes que dificultan la resolución de problemas. Ellos son:

Comprensión Lectora: El estudiante no lee bien el problema, no sabe de qué se está hablando. Le cuesta saber qué información se está dando y qué se pide encontrar o resolver.

Habilidades: El alumno presenta poco dominio sobre las actividades de cálculo básicas o sencillas que le permitan resolver un problema.

Motivación (de los alumnos): Es un factor esencial y determinante en el proceso de enseñanza-aprendizaje, porque la actitud del estudiante será clave para que se interese en resolver un problema.

Miedo : Temor a no poder resolver un problema o tener el sentimiento que la matemática es una signatura complicada y difícil de entender. Puede ser que el alumno tenga miedo a que otros compañeros se burlen por no poder resolver o comprender un problema.

Estimulación (de los alumnos): Pueden ser estimulados por su entorno familiar que promueven la lectura y el debate de temas y conflictos de la vida cotidiana. Esta actitud se reflejará en la conducta del estudiante al momento de enfrentar un problema matemático.

3.4.- La Metodología de Pólya.

En 1945 el insigne matemático y educador George Pólya (1887 – 1985) publicó un libro que rápidamente se convertiría en un clásico: How to solve it. En el mismo propone una metodología en cuatro etapas para resolver problemas.

Pólya (1976) establece que “resolver un problema es hallar una vía allí donde no se conocía camino alguno, buscar la forma de salir de un aprieto, de sortear un obstáculo, conseguir el fin anhelado que no es conseguible de forma inmediata utilizando los medios adecuados”. (Pólya, G. 1981, p. 1)

Los cuatro pasos que establece George Pólya en la resolución de problemas son los siguientes:

- a) **Comprender el Problema:** Es en el cual se debe establecer la o las incógnitas, los datos principales, las condiciones de los datos, en otras palabras determinar qué datos son aptos, no reiterados ni contradictorios.
- b) **Concebir un Plan:** Implica hallar alguna estrategia que proporcione la resolución del problema, por ejemplo el uso de tablas, diagramas, listas, etc.
- c) **Ejecución del Plan:** Consiste en comprobar cada uno de los pasos efectuados con anterioridad y verificar que estén correctos.
- d) **Examinar la solución:** Etapa de reflexión de la resolución del problema, verificar el resultado y el razonamiento utilizado.

A cada etapa se le asocia una serie de preguntas y sugerencias que aplicadas adecuadamente ayudarían a resolver el problema. Las cuatro etapas y las preguntas a ellas asociadas se detallan a continuación:

Etapas 1 : Comprensión del problema.

- ❖ ¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos? ¿Cuál es la condición?
- ❖ ¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita?
- ❖ ¿Es insuficiente? ¿Redundante? ¿Contradictoria?

Etapas 2 : Concepción de un Plan.

- ❖ ¿Se ha encontrado con un problema semejante? ¿Ha visto el mismo problema planteado en forma ligeramente diferente?
- ❖ ¿Conoce un problema relacionado con éste? ¿Conoce algún teorema que le pueda ser útil? Mire atentamente la incógnita y trate de recordar un problema que le sea familiar y que tenga la misma incógnita o una incógnita similar.
- ❖ ¿Conoce un problema relacionado con éste? ¿Conoce algún teorema que le pueda ser útil? Mire atentamente la incógnita y trate de recordar un problema que le sea familiar y que tenga la misma incógnita o una incógnita similar.
- ❖ He aquí un problema relacionado con el suyo y que se ha resuelto ya. ¿Podría utilizarlo?, ¿Podría emplear su resultado? ¿Podría utilizar su método? ¿Podría utilizarlo introduciendo algún elemento auxiliar?
- ❖ ¿Podría enunciar el problema en otra forma? ¿Podría plantearlo en forma diferente nuevamente? Refiérase a las definiciones.

- ❖ Si no puede resolver el problema propuesto, trate de resolver primero algún problema similar. ¿Podría imaginarse un problema análogo un tanto más accesible? ¿un problema más general? ¿Un problema más particular? ¿Un problema análogo? ¿Puede resolver una parte del problema? Considere sólo una parte de la condición; descarte la otra parte; ¿en qué medida la incógnita queda ahora determinada? ¿en qué forma puede variar? ¿Puede usted deducir algún elemento útil de los datos? ¿Puede pensar en algunos otros datos apropiados para determinar la incógnita? ¿Puede cambiar la incógnita? ¿Puede cambiar la incógnita o los datos, o ambos si es necesario, de tal forma que la nueva incógnita y los nuevos datos estén más cercanos entre sí?
- ❖ ¿Ha empleado todos los datos? ¿Ha empleado toda la condición? ¿Ha considerado usted todas las nociones esenciales concernientes al problema?

Etapa III : Ejecución del plan.

- ❖ Al ejecutar el plan, compruebe cada uno de los pasos.
- ❖ ¿Puede ver claramente que el paso es correcto? ¿Puede demostrarlo?

Etapa IV : Visión retrospectiva.

- ❖ ¿Puede usted verificar el resultado? ¿Puede verificar el razonamiento?
¿Puede obtener el resultado en forma diferente? ¿Puede verlo de golpe?
- ❖ ¿Puede emplear el resultado o el método en algún otro problema?

Comentario sobre los pasos de Pólya

Como conclusión del análisis del método de Pólya, podemos decir que la primera etapa es obviamente indispensable: es imposible resolver un problema del cual no se comprende el enunciado. Sin embargo en nuestra práctica como docentes hemos visto a muchos estudiantes lanzarse a efectuar operaciones y aplicar fórmulas sin reflexionar siquiera un instante sobre lo que se les pide. En realidad, lo que hacen es un trabajo puramente mecánico y repetitivo.

La segunda etapa es la más sutil y delicada, ya que no solamente está relacionada con los conocimientos y la esfera de lo racional, sino también con la imaginación y la creatividad.

Observemos que las preguntas que Pólya asocia a esta etapa están dirigidas a llevar el problema hacia un terreno conocido. Con todo lo útiles que estas indicaciones son, sobre todo para el tipo de problemas que suele presentarse en los cursos ordinarios, dejan planteada una interrogante: ¿qué hacer cuando no es posible relacionar el problema con algo conocido? En este caso no hay recetas infalibles, hay que trabajar duro y confiar en nuestra propia creatividad e inspiración.

La tercera etapa es de carácter más técnico. Si el plan está bien concebido, su realización es factible y poseemos los conocimientos y el entrenamiento necesarios, debería ser posible llevarlo a cabo sin contratiempos.

Sin embargo por lo general en esta etapa se encontrarían dificultades que nos obligarían a regresar a la etapa anterior para realizar ajustes al plan o incluso para modificarlo por completo. Este proceso puede repetirse varias veces.

La cuarta etapa es muchas veces omitida, incluso por solucionistas expertos. Pólya insiste mucho en su importancia, no solamente porque comprobar los pasos realizados y verificar su corrección nos puede ahorrar muchas sorpresas desagradables, sino porque la visión retrospectiva nos puede conducir a nuevos resultados que generalicen, amplíen o fortalezcan el que acabamos de hallar.

Algunas sugerencias hechas por quienes tienen éxito en resolver problemas:

Además del Método de Cuatro Pasos de Pólya nos parece oportuno presentar una lista de sugerencias hechas por estudiantes exitosos en la solución de problemas:

- 1) Acepta el reto de resolver el problema
- 2) Reescribe el problema en tus propias palabras.
- 3) Tómate tiempo para explorar, reflexionar, pensar...
- 4) Habla contigo mismo. Hazte cuantas preguntas creas necesarias.
- 5) Si es apropiado, trata el problema con números simples.
- 6) Muchos problemas requieren de un período de incubación. Si te sientes frustrado, no dudes en tomarte un descanso -el subconsciente se hará cargo-. Después inténtalo de nuevo.
- 7) Analiza el problema desde varios ángulos.
- 8) Revisa tu lista de estrategias para ver si una (o más) te pueden ayudar a empezar
- 9) Muchos problemas se pueden de resolver de distintas formas: solo se necesita encontrar una para tener éxito.
- 10) No tenga miedo de hacer cambios en las estrategias.

- 11) La experiencia en la solución de problemas es valiosísima. Trabaje con montones de ellos , su confianza crecerá.
- 12) Si no estás progresando mucho, no vaciles en volver al principio y asegurarte de que realmente entendiste el problema. Este proceso de revisión es a veces necesario hacerlo dos o tres veces ya que la comprensión del problema aumenta a medida que se avanza en el trabajo de solución.
- 13) Siempre, siempre mira hacia atrás: Trata de establecer con precisión cuál fue el paso clave en tu solución.
- 14) Ten cuidado en dejar tu solución escrita con suficiente claridad de tal modo puedas entenderla si la lees 10 años después.
- 15) Ayudar a que otros desarrollen habilidades en la solución de problemas es una gran ayuda para uno mismo: No les des soluciones; en su lugar provéelos con sugerencias significativas.
- 16) ¡Disfrútalo! Resolver un problema es una experiencia significativa.

4.- Metodología

El trabajo de tesis que se presenta se circunscribe en una investigación documental, apoyada en la revisión de fuentes bibliográficas, relacionadas con el tema Resolución de problemas matemáticos, a partir de las cuales se realizará un análisis cualitativo de la información con la finalidad de identificar los aportes que diferentes autores han realizado como producto de sus investigaciones en el área.

Este estudio tendrá como propósito identificar las mayores dificultades que presentan los alumnos de Primer año Medio para resolver problemas, así también las estrategias de enseñanza propuestas por diversos autores para la resolución de problemas matemáticos, sus fundamentos teóricos y metodológicos, conceptualización del término problema, etapas de resolución de problemas planteada por Pólya, considerándola una estrategia de aprendizaje adecuada para ser aplicada por los alumnos.

A partir de esta recopilación teórica se pretende diseñar un manual de actividades innovadoras que potencie la habilidad de resolución de problemas, tomando como base las cuatro fases del modelo de Pólya, las que serán incorporadas al trabajo metodológico como una estrategia de enseñanza, que los alumnos deberán desarrollar y aplicar en la resolución de diversos problemas relacionados con los ejes Números y Álgebra.

La tesis tiene la intención de proponer un diseño pedagógico, el cual será incorporado por el profesor en su rutina semanal de enseñanza. Para alcanzar ese objetivo se diseñará una serie de actividades que serán trabajadas en talleres semanales de una hora de duración. En estos talleres se reforzarán los contenidos vistos, como también se puede motivar a los alumnos para los contenidos que se verán.

El profesor puede propiciar el intercambio entre estudiantes a la hora de resolver problemas en clase. Esto es con la finalidad de discutir la destreza y deficiencias mostradas por los estudiantes en el proceso de resolver problemas.

También puede actuar como moderador mientras discuten problemas en las clases. Aún cuando los estudiantes son motivados a seleccionar y tratar ideas que ellos consideren plausible, el profesor debe proveer algunas direcciones que son de valor par la discusión.

Otra sugerencia es dividir la clase en pequeños grupos que discutan problemas matemáticos. El papel de coordinador del profesor, es elaborar preguntas que ayuden a los estudiantes a reflexionar en lo que están haciendo.

5.- Lenguaje Algebraico

No hay duda que para resolver problemas de forma eficaz el alumno debe tener claro cómo transformar expresiones verbales a un lenguaje simbólico que le permita solucionar un problema.

¿Qué es el lenguaje algebraico?

El lenguaje algebraico es una forma de traducir a símbolos y números lo que normalmente conocemos como, lenguaje natural. De esta forma se pueden manipular cantidades desconocidas con símbolos fáciles de escribir lo que permite simplificar expresiones, formular ecuaciones e inecuaciones y el estudio de cómo resolverlas. Este lenguaje nos ayuda a resolver problemas matemáticos mostrando generalidades. El lenguaje algebraico nace en la civilización musulmana en el periodo de AL-Khwarizimi durante la edad media. Su función principal es establecer y estructurar un idioma que ayuda a generalizar las distintas operaciones que se desarrollen dentro de la aritmética donde solo ocurren los números y sus operaciones aritméticas elementales.

¿Para qué sirve el lenguaje algebraico?

El **lenguaje algebraico** es utilizado para la representación de valores desconocidos, la principal función es estructurar un idioma que ayude a **generalizar** las diferentes operaciones que se desarrollan dentro de la aritmética. Ejemplo: si queremos sumar dos números cualesquiera basta con decir $x + y$.

Algunas de sus características son :

- El lenguaje algebraico es más preciso que el lenguaje numérico: podemos expresar enunciados de una forma más breve.
- El lenguaje algebraico permite expresar relaciones y propiedades numéricas de carácter general.
- Con el lenguaje algebraico expresamos números desconocidos y realizamos operaciones aritméticas con ellos.

Ejemplos de traducción de lenguaje verbal a lenguaje simbólico

1. Aumentado, incrementado, más, suma : +
2. Disminuido, menos, diferencia, restado : -
3. Producto, por, multiplicado, de : •
4. Cociente, dividido, partido : :
5. Igual, equivalente, es, resulta : =

6. Un número cualquiera : x
7. La suma de dos números diferentes : $x + y$
8. La diferencia de dos números : $x - y$
9. El producto de dos números : $x \bullet y$
10. Tres números pares consecutivos : $2x, 2x + 2, 2x + 4$
11. Tres números impares consecutivos : $2x + 1, 2x + 3, 2x + 5$
12. Tres número enteros consecutivos : $x, x + 1, x + 2$
13. El cociente de dos números : $\frac{x}{y}$
14. El cubo de un número : x^3
15. El triple del cuadrado de un número : $3x^2$
16. La suma de los cuadrados de dos números : $x^2 + y^2$
17. La quinta parte un número : $\frac{x}{5}$
18. El doble de un número : $2x$
19. Los $\frac{2}{3}$ de un número : $\frac{2}{3}x$ o $\frac{2x}{3}$
20. Los $\frac{4}{5}$ de la suma de x e y : $\frac{4}{5}(x + y)$
21. La tercera parte de un número : $\frac{x}{3}$
22. El cuádruple de un número : $4x$
23. La mitad de un número : $\frac{x}{2}$ o $\frac{1}{2}x$

24. El quíntuple de la suma de x e y : $4(x + y)$
25. La octava parte de la diferencia de x e y : $\frac{x - y}{8}$
26. Un número de dos cifras : $10x + y$
27. Un número de tres cifras : $100x + 10y + z$
28. x excede a y en 14 : $y = x - 14$
29. x es 7 unidades menor que y : $y = x - 7$
30. El antecesor de un número : $x - 1$
31. El sucesor de un número : $x + 1$
32. T es 8 menos que R : $T = R - 8$

5.1.- Actividades de Lenguaje Algebraico.

Ahora plantearemos ejercicios que nos permitirán escribir con símbolos matemáticos las expresiones verbales, para luego resolver los problemas planteados. Se puede resolver en el taller semanal algunos de estos ejercicios y luego resolver un problema. También se puede realizar un taller de lenguaje simbólico para que el alumno se familiarice con la simbología matemática

ACTIVIDAD 1

I.- Escribir simbólicamente las siguientes expresiones verbales:

- 1) El cubo de la quinta parte de un número : _____
- 2) La suma de dos números dividida entre su diferencia: _____
- 3) La suma de dos números enteros consecutivos: _____
- 4) El triple de un número disminuido de 20 : _____
- 5) Las tres quintas partes de un número aumentado en un cuarto: _____
- 6) La diferencia entre un número y su anterior: _____
- 7) La suma entre un número par y el triple del siguiente par: _____
- 8) El producto entre el doble de un número y la tercera parte de su consecutivo: _____
- 9) El cociente entre un número y su mitad: _____
- 10) La mitad de la suma de dos números : _____
- 11) La raíz cúbica del cuadrado de la suma de dos números:
- 12) La tercera parte de un número aumentado en 10: _____
- 13) Las dos terceras partes de la suma de dos números: _____
- 14) El triple del cuadrado de un número: _____
- 15) La quinta parte del cubo de un número : _____
- 16) El cubo de la quinta parte de un número : _____
- 17) El doble de a aumentado en b . : _____
- 18) La mitad de a más el triple de b . : _____
- 19) El cuadrado del doble de a . : _____
- 20) La cuarta parte del triple del cuadrado de b . : _____
- 21) El triple de la cuarta parte del cuadrado de b . : _____
- 22) El cuadrado de la cuarta parte del triple de b . : _____
- 23) La diferencia entre el quíntuple de x y la mitad de y . : _____

- 24) La semisuma entre a y b . _____
- 25) El producto entre un número y su antecesor : _____
- 26) El producto entre un número y su sucesor : _____

II.- Escribir una ecuación que simbolice la expresión verbal :

- 1) El doble de un número incrementado en 6 equivale a la quinta parte del número disminuida en 7. : _____
- 2) Carlos es 10 años es menor que Pablo : _____
- 3) Dentro de 7 años, la edad de Ana será la mitad de la edad de Beatriz : _____
- 4) A es 15 unidades mayor que B: _____
- 5) ¿Cuál es el número que agregado a 3 suma 8? : _____
- 6) Carlos es 10 años es menor que Pablo : _____
- 7) El producto de un número positivo con su antecesor equivalen a 30 : _____
- 8) Las tres quintas partes de un número más la mitad de su consecutivo equivalen a tres. : _____
- 9) Los tres quintos de un número equivalen a 7 : _____
- 10) El quíntuple de un número es igual al triple del número menos 10 : _____

ACTIVIDAD 2

Hallar la alternativa correcta en las siguientes ejercicios:

1. Los años de Sofía dentro de 12 años.

- A) $12 + 12$ B) $12 \cdot x$ C) $x + 12$ D) $x + x$ E) $x - 12$

2. El doble de un número menos quince.

- A) $15 - 2x$ B) $2x - 15$ C) $2x$ D) $15x + 2$ E) $2x - 12$

3. Años de Margot hace tres años.

- A) $3x$ B) $3 - x$ C) 25 D) $2x + 1$ E) $x - 3$

4. Un número más el siguiente.

- A) $x + x + 1$ B) $3x$ C) $x + x + x$ D) $1 + 1 + x$ E) $2x$

5. Perímetro de un cuadrado.

- A) $4 + x$ B) $4x + 4$ C) $4x$ D) $x - 4$ E) $4 - x$

6. Un múltiplo de 7.

- A) $7x$ B) $7x^2$ C) $7+x$ D) $7+7$ E) $7-x$

7. Dos números cuya suma es 3.

- A) $3x y$ B) $x+y=3$ C) $x y = 3$ D) $3x+y$ E) $x+y$

8. El doble de un número menos su mitad.

- A) $2x + y$ B) $2x + x/2$ C) $2x - x/2$ D) $2x - 1/2$ E) $x/2 - 2x$

9. El quíntuple de un número.

- A) $2x + 5$ B) $x - 5$ C) $5x + 4$ D) $5x$ E) $x + 5$

10. Dos números se diferencian en 15 unidades.

- A) $x = 15$ B) $15 + 15 = x$ C) $x + y = 15$ D) $15 = x + y$ E) $x - y = 15$

11. Un número impar.

- A) $x + 1$ B) $2(x + 1)$ C) $2x + 1$ D) $3x$ E) $x + x + x$

12. Un número es diez veces otro número.

- A) $x = y$ B) $y = 10x$ C) $x - x - x = 10$ D) 10 E) $x = 10 + x$

13. La cuarta parte de un número más su tercera parte.

- A) $4x - 4y$ B) $x/4 + x/3$ C) $x/4 + y/3$ D) $3x + 4y$ E) $x + x/4$

14. Un número es igual a otro número aumentado en 10.

- A) $x = 10 + x$ B) $x = y - 10$ C) $x = 10$ D) $x = 10 + y$ E) $2x + x = 23$

15. El producto de dos números.

- A) x/y B) $x y$ C) x^2 D) y^2 E) $x + x$

16. Área de un rectángulo.

- A) $2x + 2y$ B) $x^2 y^2$ C) $x y$ D) $x - y$ E) x^2

17. Un número par.

- A) $x \cdot x$ B) $3x$ C) $2x$ D) x^2 E) $x+x+x$

18. El cuadrado de un número más dicho número.

- A) $x^2 + y$ B) $4x - 4y$ C) x^2+x D) x^2+4x E) $4x+y$

19. Un número aumentado en su opuesto.

- A) $x + x$ B) $x + 1/x$ C) $x x$ D) $x + -x$ E) $x - x$

20. Un número disminuido en su inverso.

- A) $x \cdot x$ B) $x+x$ C) $x - 1/x$ D) $x ; -x$ E) $x - x$

21. La suma de un número y el cubo del mismo número.

- A) $3x - x$ B) $x^3 + y$ C) x^3+x D) $x + y^3$ E) $3x + x$

22. El cociente entre un número y 32.

- A) $x + 32$ B) $32/x$ C) $x/32$ D) $32+x$ E) $x - 32$

23. La suma de dos números al cuadrado.

- A) $(x + y)^2$ B) $x^2 + y^2$ C) $2x + 2y$ D) $x^2 + 2y$ E) $2x + y^2$

24. El cuadrado de un número más el cuadrado de otro número.

A) $x^2 + 2y$ B) $x^2 + y^2$ C) $x + y$ D) $(x + y)^2$ E) $x^2 + y$

25. La suma de los cuadrados de dos números distintos.

A) $x + y^2$ B) $(x^2 + y)^2$ C) $x^2 + y^2$ D) $x^2 + y^2$ E) $(x + y)^2$

26. Triple de un número elevado al cuadrado.

A) x^2 B) $x (2/3)$ C) $3x$ D) $3x^2$ E) $(3x)^2$

27. El cuadrado del triple de un número.

A) $x^2/3$ B) $x^2/3$ C) x^2 D) $(3x)^2$ E) $3x^2$

28. La suma de dos números impares consecutivos.

A) $x + x + 1$ B) $x + x + x$ C) $x + 1 + x + 3$ D) $2x + 1 + 2x + 3$ E) $2x + 3$

29. El cuadrado de un número más el triple de otro.

A) $x^2 + 3y$ B) $2x + y^2$ C) $x^2 + y^2$ D) $2x + 3y$ E) $x^2 + 3x$

CLAVES

1.C 2.B 3.E 4.A 5.C 6.A 7.B 8.C 9.D 10.E 11.C 12.B 13.B 14.D 15.B

16.C 17.C 18.C 19.D 20.C 21.C 22.C 23.A 24.B 25.C 26.D 27.D 28.D 29.A

5.2.- Ejercicios Propuestos

Ejercicio 1

Si n es un número impar, entonces el sucesor impar del sucesor de $n+1$ se representa por:

- A) $2n$ B) $n + 3$ C) $3n + 4$ D) $n + 4$

Ejercicio 2

"La semidiferencia entre a y b , disminuido en el triple de a ", se expresa por :

- A) $(a - b)/2 - 3a$
B) $(a - b) - 3b$
C) $(a - b) - 3$
D) $(a - b)/2 - 3$

Ejercicio 3

Al escribir en lenguaje algebraico "el cuadrado de la diferencia entre el triple de a y el doble de b " resulta:

- A) $3a - 2b^2$ B) $(3a - b^2)$ C) $(3a - 2b)^2$ D) $b^2 - 3a$

Ejercicio 4

El cubo del doble de la diferencia de p y q ", se representa por:

- A) $2(p^3 - q^3)$
B) $2(p - q)^3$
C) $(2p - 2q)^3$
D) $[2(p - q)]^3$

Ejercicio 5

Si al cuádruplo del antecesor de w se le suma el sucesor del sucesor de w y al resultado se le resta el triple de w , resulta :

- A) $2(w + 1)$ B) $2(w - 1)$ C) $(w - 6)$ D) $2(w + 6)$

Ejercicio 6

Si m es un número entero impar, el número impar antecesor de $3m + 6$ es:

- A) $3m$
B) $3m + 8$
C) $3m + 7$
D) $3m + 5$

Ejercicio 7

El enunciado: “el cuadrado de la suma de dos números x y y es igual al doble de la diferencia de los cuadrados de esos números”, se expresa:

- A) $x^2 + y^2 = 2(x - y)^2$
B) $x^2 + y^2 = 2(x^2 - y^2)$
C) $(x + y)^2 = 2(x - y)^2$
D) $(x + y)^2 = 2(x^2 - y^2)$

Ejercicio 8

El sueldo mensual de una persona es \$ M . Si gasta las tres cuartas partes y el resto lo ahorra, ¿cuál de las siguientes expresiones representa el ahorro trimestral de dicha persona?

- A) $M - 1/4$
- B) $(M - 3/4 M)$
- C) $3M - 1/4$
- D) $3(M - 3/4 M)$

Ejercicio 9

Carlos compra un DVD a crédito en **5B** dólares, pagando un tercio al contado y el resto en seis cuotas iguales. ¿Cuál es el valor en dólares de cada cuota?

- A) $(10/3) B$
- B) $5B - 2/3$
- C) $(5/9) B$
- D) $5/6 B - 2/3 B$

Ejercicio 10

Si la edad de una persona en y años más será x años, ¿cuántos años tiene?

- A) y
- B) $x + y$
- C) $x - y$
- D) x

Ejercicio 11

Durante la evaluación de un examen cada pregunta se debe contestar en un tiempo máximo de m minutos; si el examen consta de n preguntas, ¿cuál debería ser la duración máxima del examen medida en horas?

- A) $60(m \cdot n)$
- B) $60(m + n)$
- C) $(m \cdot n)/60$
- D) $60/(m + n)$

Ejercicio 12

Un rollo de listón de $m-1$ metros se va a dividir en $n+1$ tramos iguales, ¿qué fracción de metro medirá cada uno de los tramos?

- A) m/n
- B) $(m+1)/(n+1)$
- C) $(n+1)/(m-1)$
- D) $(m-1)/(n+1)$

Ejercicio 13

La edad de Juanito hace b años fue c años, ¿cuántos años tendrá dentro de d años?

- A) $c - b + d$
- B) $b - c + d$
- C) $b - c - d$
- D) $b + c + d$

Ejercicio 14

¿Cuántos segundos hay en m minutos y s segundos ?

A) $60m + s$

B) $m + 60s$

C) $60(m + s)$

D) $(m + s)/60$

Ejercicio 15

Si en la granja M hay 8 vacas más que en la granja H, y a su vez la granja P tiene 12 vacas mas que la H. Si x representa la cantidad de vacas en la granja H, ¿cuál es la expresión algebraica que representa la cantidad total de vacas en las tres granjas?

A) $20 + x$ B) $3x + 12$ C) $20 + 3x$ D) $3x + 8$

Ejercicio 16

Un padre reparte $\$k$ entre sus tres hijos. Si al mayor le corresponde $2/5$ del dinero y al segundo los $2/3$ del resto, ¿cuánto le corresponde al menor?

A) $\$ 6/15k$

B) $\$ 2/3k$

C) $\$ 3/5k$

D) $\$ k/5$

Ejercicio 17

Una persona gana \$ m mensual y gasta \$ s semestral. ¿Cuánto logra ahorrar en un trimestre?

- A) $3m + s/2$ B) $(3m + s)/2$ C) $3m - s/2$ D) $(3m - s)/2$

Ejercicio 18

Antonio es menor que Lucía por 3 años, Lucía es mayor que Judith por 7 años. Si x representa la edad de Antonio en años. ¿Cuál es la edad de Judith?

- A) $x + 3$
B) $x - 3$
C) $x - 4$
D) $x - 7$

Ejercicio 19

Un edificio tiene 4 pisos. En cada piso hay n departamentos con n ventanas que dan a la calle en cada uno. Si cada ventana tiene n vidrios, ¿cuántos vidrios hay en total en el edificio?

- A) $4n$ B) $4 + 3n$ C) $4 \cdot 3n$ D) $4 \cdot n$

Ejercicio 20

Alberto realiza una tarea en m días y Bruno realiza la misma tarea en n días. ¿Cuánto demorarán si trabajan juntos?

- A) $(m + n)/mn$
B) m/n
C) $mn/(m + n)$
D) $m + n$

6.- Ejemplos de Problemas usando la Metodología de Pólya.

La educación actual promueve el desarrollo integral del estudiante y por ende el aprendizaje activo de las matemáticas, la misma que se ha llegado a constituir en uno de los grandes logros de la inteligencia humana ya que requiere un alto nivel de abstracción por parte del estudiante y que le es potencialmente útil no sólo en el campo académico sino también en su vida cotidiana. El aprendizaje de esta área es de suma importancia; por ello, se hace necesario aplicar estrategias metodológicas que permitan presentar el área de matemática de manera atractiva, de fácil comprensión, que sea significativa y funcional, tal como lo constituye la aplicación del método de George Pólya, con el cual se pretende mejorar el talento en la resolución de problemas matemáticos de los estudiantes del primer año medio.

Por lo tanto, ahora pasaremos a dar varios ejemplos de cómo se aplica la metodología de George Pólya en la resolución de problemas en los ejes de Números y Álgebra.

6.1.- Eje Números

PROBLEMA 1 : Javier y Matilde tienen un canasto de mandarinas. Javier se comió $\frac{2}{3}$ de ellas y Matilde $\frac{1}{30}$. ¿Qué fracción de mandarinas quedan sin comer?

a) **Comprensión del Problema**

¿Qué entendiste del problema?

Se quiere determinar la fracción de mandarinas que no se han comido.

b) Concepción de un Plan

¿Qué harías para resolver el problema?

- Sumar las fracciones de mandarinas que se comieron los amigos. Para ello se debe obtener el mínimo común múltiplo de los denominadores y amplificar las fracciones para igualar los denominadores, luego se suman los numeradores.
- Restar al entero la fracción obtenida en el paso anterior.

c) Ejecución del Plan

¿Cómo ejecutarías la estrategia?

- El mínimo común múltiplo entre 3 y 30 es 30.

Se amplifica la primera fracción por 10 y la segunda queda igual.

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{30} = \frac{20}{30} + \frac{1}{30} = \frac{21}{30} = \frac{7}{10}$$

La fracción de fruta que se comieron fue de $\frac{7}{10}$.

- El entero en este caso sería $\frac{10}{10}$. Al restarle la fracción de fruta comida quedaría:

$$\frac{10}{10} - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}$$

d) Comprobación :

¿Cómo saber que es correcto el resultado?

Comprobamos el resultado sumando las fracciones. Debe ser equivalente a la unidad.

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{30} + \frac{3}{10} = \frac{20+1+9}{30} = \frac{30}{30} = 1$$

PROBLEMA 2 : Un estudiante debe leer un libro con 300 páginas. Si el día lunes lee la tercera parte del total de las páginas, el martes, la quinta parte de lo que le quedaba y el miércoles lee el resto, ¿cuántas páginas lee el día miércoles?

a) Comprensión del Problema

¿Qué entendiste del problema?

Se tienen los siguientes datos:

- Se deben leer 300 páginas de un libro
- El lunes lee la tercera parte de 300 páginas.
- El martes lee la quinta parte de lo que le quedaba.
- El miércoles el resto

Se debe determinar cuántas páginas lee el miércoles.

b) Concepción de un Plan

¿Qué harías para resolver el problema?

- Calcular la tercera parte de 300 y luego la quinta parte de lo que queda.
- Sumamos los resultados anteriores y lo restamos a 300..

c) Ejecución del Plan

¿Cómo ejecutarías la estrategia?

- La tercera parte de 300 es $\Rightarrow \frac{300}{3} = 100$, entonces queda : $300 - 100 = 200$
- La quinta parte de 200 es $\Rightarrow \frac{200}{5} = 40$

- Sumamos : $100 + 40 = 140$, luego $300 - 140 = 160$

Entonces el estudiante debe leer el miércoles 160 páginas.

d) Comprobación :

¿Cómo saber que es correcto el resultado?

Comprobamos el resultado sumando lo que lee cada día y nos debe dar 300.

Lunes lee : 100 páginas.

Martes lee : 40 páginas.

Miércoles lee : 160 páginas

TOTAL : 300 páginas

PROBLEMA 3 : La masa de la Tierra es $5,98 \cdot 10^{24}$ kg, y la masa de la Luna, $7,34 \cdot 10^{22}$

Kg. ¿Cuántas Lunas se podrían formar con la masa de la Tierra?

a) Comprensión del Problema

¿Qué entendiste del problema?

Tenemos como datos la masa de la Tierra y la masa de la Luna.

Se pide saber cuántas Lunas se pueden formar con la masa de la Tierra..

b) Concepción de un Plan

¿Qué harías para resolver el problema?

- Dividir la masa de la Tierra por la masa de la Luna.

c) Ejecución del Plan

¿Cómo ejecutarías la estrategia?

$$\blacksquare \frac{5,98 \cdot 10^{24}}{7,34 \cdot 10^{22}} = 0,81147 \cdot 10^2 \approx 81,471 \approx 81$$

Con la masa de la Tierra se pueden formar aproximadamente 81 Lunas.

d) Comprobación :

¿Cómo saber que es correcto el resultado?

Comprobamos el resultado multiplicando la masa de la Luna por 81 y debe darnos aproximadamente la masa de la Tierra.

$$7,34 \cdot 10^{22} \cdot 81 = 5,95 \cdot 10^{24}$$

PROBLEMA 4 : Si con tres vasos de $\frac{1}{5}$ L y dos de $\frac{1}{4}$ L se llena una botella hasta la mitad, ¿cuál es la capacidad de la botella?

a) Comprensión del Problema

¿Qué entendiste del problema?

Se sabe que un botella se llena hasta la mitad con 3 vasos de $\frac{1}{5}$ L y dos de $\frac{1}{4}$ L .

Se desea saber la capacidad de la botella.

b) Concepción de un Plan

¿Qué harías para resolver el problema?

- Se debe determinar qué capacidad tiene la mitad de la botella. Luego se multiplica por 2 para saber la capacidad total de la botella..
- Para ello se tiene que multiplicar 3 por $\frac{1}{5}$ L y dos por $\frac{1}{4}$ L. Seguidamente se deben sumar estos productos y finalmente multiplicar por 2.

c) Ejecución del Plan

¿Cómo ejecutarías la estrategia?

$$\diamond 3 \cdot \frac{1}{5} + 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{5} + \frac{2}{4} = \frac{11}{10} \text{L es la mitad de la capacidad de la botella.}$$

$$\diamond 2 \cdot \frac{11}{10} = \frac{11}{5} = 2,2 \text{ Litros.}$$

La capacidad de la botella es de 2,2 Litros..

d) Comprobación :

¿Cómo saber que es correcto el resultado?

Podemos restar a la capacidad total de la botella los 3 vasos de $\frac{1}{5}$ L y dos vasos de $\frac{1}{4}$ L.

Debemos obtener la mitad de la capacidad de la botella.

$$2,2 - \frac{3}{5} - \frac{2}{4} = \frac{11}{5} - \frac{3}{5} - \frac{2}{4} = \frac{44 - 12 - 10}{20} = \frac{22}{20} = \frac{11}{10} \text{L es la mitad de la botella.}$$

PROBLEMA 5 : Una empresa a comprado una parcela rectangular en un polígono industrial. El edificio de la empresa ocupa los $\frac{2}{5}$ del largo por $\frac{1}{4}$ del ancho, y tiene 300 metros cuadrados de planta. **¿Cuántos metros cuadrados tiene la parcela?**

a) Comprensión del Problema

¿Qué entendiste del problema?

Se sabe que un edificio ocupa un terreno rectangular de 300 metros cuadrados.

Además, el terreno ocupa los $\frac{2}{5}$ del Largo dela parcela y $\frac{1}{4}$ del Ancho dela parcela.

Se desea saber cuántos metros cuadrados tiene la parcela.

b) Concepción de un Plan

¿Qué harías para resolver el problema?

- Si relacionamos el largo del terreno por el ancho del terreno con los 300 m², podemos hallar el largo por el ancho de la parcela, es decir los m² de la parcela.

c) Ejecución del Plan

¿Cómo ejecutarías la estrategia?

$$\diamond \frac{2}{5} \text{ Largo de la parcela} \bullet \frac{1}{4} \text{ Ancho de la parcela} = 300 \text{ m}^2$$

$$\frac{2}{20} \text{ del Largo de la parcela} \bullet \text{ el Ancho de la parcela} = 300 \text{ m}^2$$

$$\frac{1}{10} \text{ del Largo de la parcela } \bullet \text{ el Ancho de la parcela} = 300 \text{ m}^2$$

$$\Rightarrow \text{Largo de la parcela } \bullet \text{ Ancho de la parcela} = 10 \bullet 300 \text{ m}^2$$

$$= 3.000 \text{ m}^2$$

Entonces la parcela tiene 3.000 metros cuadrados.

d) Comprobación :

¿Cómo saber que es correcto el resultado?

Podemos hallar el área del terreno que circunda al edificio y luego sumarla al área del terreno. Debería obtenerse es el área de la parcela. Usaremos una regla de tres simple.

$$\frac{1}{10} \text{ del área del terreno corresponde } \dots\dots\dots 300 \text{ m}^2$$

$$\frac{9}{10} \text{ del área circundante al terreno } \dots\dots\dots x$$

$$\text{Entonces } x = \frac{\frac{9}{10} \bullet 300}{\frac{1}{10}} = 2.700 \text{ m}^2 \text{ área terreno circundante.}$$

Finalmente , $300 + 2700 = 3.000 \text{ m}^2$ área de la parcela.

PROBLEMA 6 : El piso de una casa tiene una superficie cuadrada de 256 m^2 . Si se quiere colocar guardapolvos alrededor de esta, ¿cuántos metros de guardapolvo se necesitará

a) Comprensión del Problema

¿Qué entendiste del problema?

El piso cuadrado que se desea bordear con guardapolvo tiene una superficie de 256 m^2 .

Se pide saber cuántos metros de guardapolvo se necesitarán..

b) Concepción de un Plan

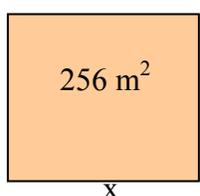
¿Qué harías para resolver el problema?

- Determinar cuánto mide el lado del terreno cuadrado y luego hallar el perímetro del cuadrado.

c) Ejecución del Plan

¿Cómo ejecutarías la estrategia?

Para hallar el lado del cuadrado debemos sacra la raíz cuadrada de 256 m^2 :



$$\Rightarrow x^2 = \sqrt{256} \Rightarrow x = 16 \text{ metros}$$

$$\text{Perímetro} = 4 \bullet 16 = 64 \text{ metros}$$

Se necesitarán 64 metros de guardapolvo para bordear el piso cuadrado.

d) Comprobación :

¿Cómo saber que es correcto el resultado?

Podemos determinar el área del cuadrado con el lado encontrado y debe coincidir con el área del piso cuadrado.

$$\text{Área} = 16^2 = 16 \cdot 16 = 256 \text{ m}^2$$

PROBLEMA 7 : Un hombre desea cubrir de cerámica su patio rectangular de 6 metros de largo por 3 metros de ancho. Se sabe que la cerámica que eligió cuesta \$7000 la caja que contiene 10 cerámicas cuadradas de 30 cm de lado. ¿Cuánto dinero gastará en este arreglo del patio?

a) Comprensión del Problema

¿Qué entendiste del problema?

Se desea cubrir de cerámica un piso rectangular de 6 m por 3 m.

También se sabe que la caja de cerámica cuadrada cuesta \$ 7.000.

Por último que cada caja tiene 10 cerámicas cuadradas de 30 cm.

b) Concepción de un Plan

¿Qué harías para resolver el problema?

- Determinar cuál es el área del piso rectangular.
- Calcular el área de una cerámica y ver cuántas se necesitan para cubrir el piso.
- Calcular el costo total de las cerámicas (se compran por cajas)

c) Ejecución del Plan

¿Cómo ejecutarías la estrategia?

Primero encontramos el área del piso rectangular :



3 m. \Rightarrow $\text{Área rectángulo} = 6 \text{ m.} \cdot 3 \text{ m.}$

6 m. $\text{Área rectángulo} = 600 \text{ cm} \cdot 300 \text{ cm.}$

$= 180.000 \text{ cm}^2$

Ahora sacamos el área de una cerámica cuadrada de 30 cm de lado :

$$\text{Área cuadrado} = 30^2 = 900 \text{ cm}^2$$

Para saber cuántas cerámicas se necesitan para cubrir el piso, efectuamos la división :

$$180.000 : 900 = 200 \text{ cerámicas.}$$

Pero como se venden por cajas, y cada caja tiene 10 cerámicas, efectuamos :

$$200 : 10 = 20 \text{ cajas de cerámica.}$$

Finalmente multiplicamos : $\$ 7.000 \cdot 20 = \$ 140.000$

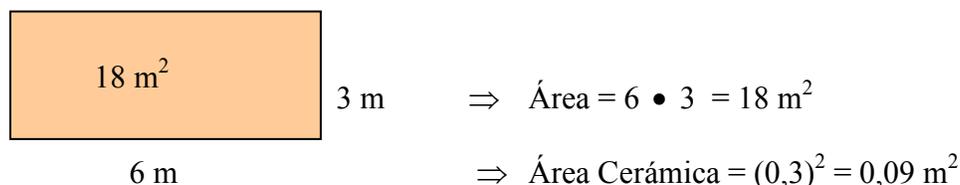
Entonces el costo de la compra de cerámica para el piso es de \$ 140.000.

d) Comprobación :

¿Cómo saber que es correcto el resultado?

Podemos mantener el área del piso en metros cuadrados y hallar el costo para cubrir el

piso. Significaría que debemos pasar 30 cm a metros $\rightarrow 30 \text{ cm} = \frac{30}{100} = 0,3 \text{ m}$



¿Cuántas cerámicas cubren el piso? ⇒ 18 : 0,09 = 200 cerámicas.

¿Cuántas cajas se deben comprar? ⇒ $\frac{200}{10} = 20$ cajas de cerámicas.

¿Cuál es el costo de la compra? ⇒ \$ 7.000 • 20 = \$ 140.000

PROBLEMA 8 : Un bosque de 80 hectáreas que actualmente se está reforestando tiene 50.000 m³ de madera y se sabe que la madera del bosque crece cada año $\frac{5}{4}$ de lo que se tenía anteriormente. ¿Cuánta madera tendrá el bosque al cabo de 4 años?

a) Comprensión del Problema

¿Qué entendiste del problema?

Se debe determinar la cantidad de madera que habrá en el bosque en 4 años más.

b) Concepción de un Plan

¿Qué harías para resolver el problema?

Aplicar la estrategia “hacer una tabla” que represente la cantidad de madera que tiene el bosque a medida que transcurren los años, hasta llegar al año cuatro.

c) Ejecución del Plan

¿Cómo ejecutarías la estrategia?

La siguiente tabla muestra la cantidad de madera que tiene el bosque a medida que transcurren los años:

Años	Cantidad de madera (m ³)
0	50.000
1	$50.000 \cdot \frac{5}{4}$
2	$50.000 \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{4}$
3	$50.000 \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{4}$
4	$50.000 \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{4}$

Años	Potencias	Cantidad de madera (m ³)
0	$50.000 \left(\frac{5}{4}\right)^0$	50.000
1	$50.000 \left(\frac{5}{4}\right)^1$	62.500
2	$50.000 \left(\frac{5}{4}\right)^2$	78.125
3	$50.000 \left(\frac{5}{4}\right)^3$	97.656,25
4	$50.000 \left(\frac{5}{4}\right)^4$	122.070,3125

d) Comprobación :

¿Cómo saber que es correcto el resultado?

Al calcular $50.000 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^4$ se tiene que :

$$\begin{aligned} 50.000 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^4 &= 50.000 \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{4} = \frac{50.000 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{31.250.000}{256} \\ &= 122.070,31 \\ &= 122.070 \end{aligned}$$

Respuesta: Al cabo de 4 años, el bosque tendrá, aproximadamente, 122.070 m³ de madera.

6.2.- Eje Álgebra.

PROBLEMA 1 : Tres recipientes contienen agua. Si se vierte $\frac{1}{3}$ del contenido del primer recipiente en el segundo, y a continuación $\frac{1}{4}$ del contenido del segundo en el tercero, y por último $\frac{1}{10}$ del contenido del tercero en el primero, entonces cada recipiente queda con 9 litros de agua. ¿Qué cantidad de agua había originalmente en cada recipiente?

Solución :

a) Comprensión del Problema

El problema consiste en determinar que cantidad de agua tiene originalmente cada recipiente. Como dato se nos indica la cantidad de agua que se saca a cada recipiente para verterla en cada uno. Podemos asignar una variable a cada uno de los recipientes : x , y , z . Cada variable representa la cantidad de agua que contiene cada recipiente originalmente.



b) Concepción de un Plan

El plan es formar expresiones algebraicas que representen el contenido de cada recipiente después de hacer los traspasos de agua correspondientes. Luego formaremos ecuaciones debido a que cada recipiente debe contener 9 litros de agua después de hacer todos los traspasos de agua a cada recipiente.

c) Ejecución del Plan

Las expresiones algebraicas que se pueden plantear son las siguientes :

- Después de la primera operación el 1° recipiente queda : $x - \frac{1}{3}x = \frac{2x}{3}$

El 2° recipiente queda con : $y + \frac{x}{3}$ de agua

- Después de la segunda operación el 2° recipiente queda : $y + \frac{x}{3} - \frac{1}{4}\left(y + \frac{x}{3}\right)$

$$: \frac{3}{4}\left(y + \frac{x}{3}\right)$$

- Después de la tercera operación el 3° recipiente queda : $z + \frac{1}{4}\left(y + \frac{x}{3}\right)$

- Después de la cuarta operación el 3° recipiente queda:

$$z + \frac{1}{4}\left(y + \frac{x}{3}\right) - \frac{1}{10}\left[z + \frac{1}{4}\left(y + \frac{x}{3}\right)\right]$$

$$\frac{9}{10}\left[z + \frac{1}{4}\left(y + \frac{x}{3}\right)\right]$$

El primer recipiente quedará con : $\frac{2x}{3} + \frac{1}{10}\left[z + \frac{1}{4}\left(y + \frac{x}{3}\right)\right]$ de agua.

Formemos ahora las ecuaciones, sabiendo que cada recipiente quedó con 9 litros de agua cada uno:

$$\mathbf{2^\circ \text{ Recipiente : }} \quad \frac{3}{4}\left(y + \frac{x}{3}\right) = 9$$

$$\mathbf{3^\circ \text{ Recipiente : }} \quad \frac{9}{10}\left[z + \frac{1}{4}\left(y + \frac{x}{3}\right)\right] = 9$$

$$\left(y + \frac{x}{3}\right) = 9 \cdot \frac{4}{3}$$

$$\frac{9}{10}\left[z + \frac{1}{4}(12)\right] = 9$$

$$\left(y + \frac{x}{3}\right) = 12 \quad (*)$$

$$z + 3 = 9 \cdot \frac{10}{9}$$

$$z + 3 = 10$$

$$\mathbf{z = 7}$$

$$\mathbf{1^\circ \text{ Recipiente : }} \quad \frac{2x}{3} + \frac{1}{10}\left[z + \frac{1}{4}\left(y + \frac{x}{3}\right)\right] = 9$$

$$\frac{2x}{3} + \frac{1}{10}\left[7 + \frac{1}{4}(12)\right] = 9$$

$$\frac{2x}{3} + \frac{1}{10}[10] = 9$$

$$\frac{2x}{3} + 1 = 9$$

$$\frac{2x}{3} = 8$$

$$\mathbf{x = 12}$$

$$\text{De (*) : } \left(y + \frac{x}{3} \right) = 12$$

$$y + \frac{12}{3} = 12$$

$$y + 4 = 12$$

$$\mathbf{y = 8}$$

d) Comprobación :

No cabe duda de que el método anterior, aunque infalible, es proclive a errores numéricos. ¿No habrá otra forma de proceder más apropiada para este tipo de problema? Sí la hay, y consiste en sustituir el análisis hacia adelante que realizamos, partiendo de la configuración inicial y estudiando la evolución del contenido de los recipientes con cada operación, por un análisis retrospectivo.

Este tipo de análisis consiste en partir de la configuración final y estudiar cómo se llegó a ella. En nuestro caso los tres recipientes finalizan con 9 litros, y la última operación consistió en traspasar 1/10 del contenido del tercer recipiente al primero.

Pero si el tercer recipiente, luego de perder la décima parte de su contenido, quedó con 9 litros, es obvio que debía contener diez litros. Y el primero, como quedó con 9 luego de ganar un litro, antes contenía 8 litros. En otras palabras, después de la segunda operación y antes de la tercera el contenido de los recipientes era 8, 9 y 10 litros, en ese orden.

Del mismo modo se ve que antes de la segunda operación el segundo recipiente contenía 12 litros, para poder quedar en 9 al perder la cuarta parte de su contenido. Y el tercero, por consiguiente, tenía 7 litros. Los contenidos antes de la segunda operación eran entonces 8, 12 y 7. Razonando de igual forma llegamos a que inicialmente los recipientes contenían 12, 8 y 7 litros de agua. Este análisis retrospectivo se resume en la siguiente tabla:

1°	2°	3°
9	9	9
8	9	10
8	12	7
12	8	7

PROBLEMA 2 : La edad de Marcos es el triple de la edad de sus hermano Juan y hace 4 años la suma de ambas edades era igual a la que tendría Juan dentro de 16 años. ¿Cuál es la edad actual de Marcos y de Juan?

a) Comprensión del Problema

¿Distingues cuáles son los datos?

La edad de Marcos es el triple de la edad de Juan.

Hace 4 años la suma de ambas edades era igual a la que tendrá Juan dentro de 16 años.

Se quiere encontrar la edad de actual de Marcos y de Juan.

b) Concepción de un Plan

¿Se puede usar alguna estrategia para resolver el problema?

- Usar una variable:

La edad actual de Juan : x

La edad actual de Marcos : $3x$

Por otro lado :

- Hace 4 años la edad de Marcos era : $3x - 4$.

Hace 4 años la edad de Juan era : $x - 4$

- La edad que tendrá Juan dentro de 16 años será : $x + 16$

La suma de ambas edades es : $(3x - 4) + (x - 4)$ era igual a $(x + 16)$

c) Ejecución del Plan

¿Cómo ejecutarías la estrategia?

Estableciendo una ecuación de primer grado: $(3x - 4) + (x - 4) = (x + 16)$

$$4x - 8 = x + 16$$

$$3x = 24$$

$$x = 8$$

Por lo tanto Juan tiene 8 años y Marcos tiene 24 años.

d) Comprobación :

¿Es tu solución correcta? ¿Tu respuesta satisface lo establecido en el problema?

La cantidad obtenida parece razonable ya que la suma de ambas edades hace 4 años era:

$20 + 4 = 24$ años es exactamente la edad que tendrá Juan dentro de 16 años.

PROBLEMA 3 : En un parque de diversiones cada socio debe pagar \$2.000 por el ingreso más \$400 por cada juego en el que participe. Si una persona no es socio del parque, debe cancelar \$1.500 por el acceso más \$700 por cada juego en el que participe. Si una persona participa en cinco juegos, ¿le conviene ser socio del parque de diversiones?

a) Comprensión del Problema

¿Distingues cuáles son los datos?

- Si una persona es socio de un parque de diversiones debe pagar \$2.000 por el ingreso más \$400 por cada juego en el que participe.
- Si una persona no es socio debe pagar \$1.500 por el ingreso y \$700 por cada juego en el que participe.
- ¿A una persona que participa en cinco juegos le conviene ser socio del parque de diversiones?

b) Concepción de un Plan

¿Se puede usar alguna estrategia para resolver el problema?

- Se modelará la situación con una función y luego se evaluará para determinar si es conveniente ser socio del parque si se participa en cinco juegos.

c) Ejecución del Plan

¿Cómo ejecutarías la estrategia?

Si x representa la cantidad de juegos del parque de diversiones en los que se participa y f el valor que se debe pagar :

- Si es socio del parque, la función que modela el valor a pagar es :

$$f(x) = 400 \cdot x + 2.000 \quad \Rightarrow \quad f(5) = 400 \cdot 5 + 2.000 = 2.000 + 2.000 = 4.000$$

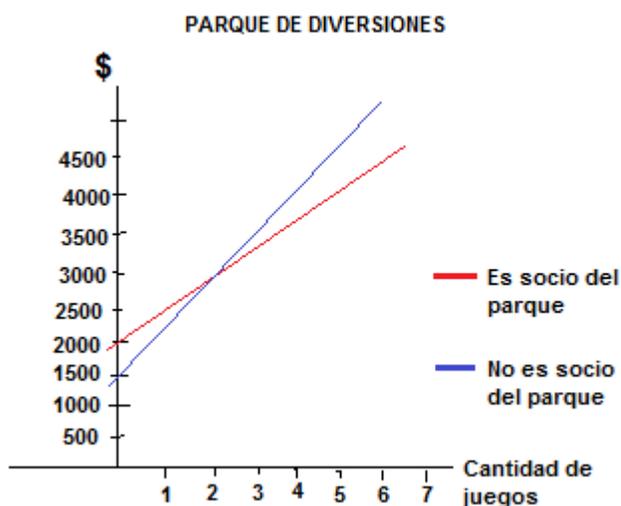
- Si no es socio del parque, la función que modela el valor a pagar es :

$$f(x) = 700 \cdot x + 1.500 \quad \Rightarrow \quad f(5) = 700 \cdot 5 + 1.500 = 3.500 + 1.500 = 5.000$$

d) Comprobación :

¿Es tu solución correcta? ¿Tu respuesta satisface lo establecido en el problema?

Para comprobar lo obtenido se graficarán ambas funciones y se compararán sus valores para $x = 5$ juegos.



Respuesta: Si una persona participa en cinco juegos le conviene ser socio del parque.

PROBLEMA 4 : Alberto quiere contratar los servicios de una compañía telefónica y cuenta con los datos de dos de ellas. Las tarifas de cada compañía se presentan en la tabla. ¿Cuál es la empresa más conveniente para Alberto si habla 300 minutos al mes?

a) Comprensión del Problema

Identifica los datos y la pregunta del problema.

La compañía **A** cobra un cargo fijo de \$ 5.000 y \$ 100 el minuto.

La compañía **B** cobra un cargo fijo de \$ 4.000 y \$ 150 el minuto

Alberto habla 300 minutos en el mes.

Se debe responder la pregunta ¿Cuál es la empresa más conveniente para Alberto si habla 300 minutos en el mes?

b) Concepción de un Plan

Elige una estrategia para resolver el problema.

Se modelará la situación con una función y luego se evaluará para determinar qué compañía es más conveniente al hablar 300 minutos.

c) Ejecución del Plan

¿Cómo ejecutarías la estrategia?

Si x representa la cantidad de minutos y f el valor que se debe pagar:

$$\text{Compañía A : } f(x) = 100 \cdot x + 5.000 \quad \Rightarrow \quad f(300) = 100 \cdot 300 + 5.000 = 35.000$$

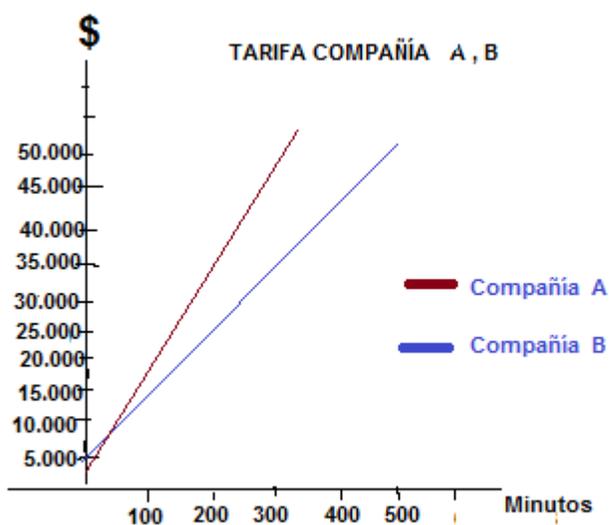
$$\text{Compañía B : } f(x) = 150 \cdot x + 4.000 \quad \Rightarrow \quad f(300) = 150 \cdot 300 + 4.000 = 49.000$$

Entonces, la empresa **A** es la más conveniente para Alberto.

d) Comprobación :

¿Es tu solución correcta? ¿Tu respuesta satisface lo establecido en el problema?

La estrategia que se utilizará para comprobar lo obtenido es un gráfico.



Se observa que la compañía A es la más conveniente.

PROBLEMA 5 : Un vendedor despacha por la mañana las $\frac{3}{4}$ partes de las naranjas que

tenía. Por la tarde vende $\frac{4}{5}$ de las que le quedaban. Si al terminar el día aún le quedan 100

kilogramos de naranjas. ¿Cuántos kilogramos tenía?

a) Comprensión del Problema

¿Distingues cuáles son los datos?

Venta de naranjas: Mañana $\frac{3}{4}$ de lo que tenía y en la tarde $\frac{4}{5}$ (de lo que quedaba)

Le quedan : 100 kg de naranjas.

Pregunta : ¿Cuántos kilogramos tenía?

b) Concepción de un Plan

¿Se puede usar alguna estrategia para resolver el problema?

Calculemos la fracción que corresponde con los $\frac{4}{5}$ del resto.

Luego sumamos las ventas y analizamos con que fracción del total se queda.

c) Ejecución del Plan

¿Cómo ejecutarías la estrategia?

Supongamos que x representa los kilogramos que tenía al principio.

Si primero vende $\frac{3}{4}x$ le quedará por vender : $x - \frac{3}{4}x = \frac{1}{4}x$ es el resto.

Por la tarde vende : $\frac{4}{5}$ de $\frac{1}{4}x = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4}x = \frac{1}{5}x$

Sumamos lo que ha vendido en total: $\frac{3}{4}x + \frac{1}{5}x = \frac{15x + 4x}{20} = \frac{19}{20}x$

Calculamos la fracción de naranjas que le queda por vender, esta fracción se corresponde con los 100 kg que quedan.

$$\frac{20}{20}x - \frac{19}{20}x = \frac{1}{20}x \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{20}x = 100 \text{ kg} \quad \Rightarrow \quad x = 20 \cdot 100 = 2000 \text{ kg.}$$

El vendedor tenía al empezar el día 2000 kilogramos de naranjas.

d) Comprobación :

¿Es tu solución correcta? ¿Tu respuesta satisface lo establecido en el problema?

Por la mañana vende $\frac{3}{4}$ de 2000 = 1500 Kg

Le quedan por vender $2000 - 1500 = 500$ kg.

Por la Tarde vende $\frac{4}{5}$ de 500 = 400 kg

Sumamos las ventas $1500 + 400 = 1900$ kg.

Cantidad que le queda por vender al final del día : $2000 - 1900 = 100$ kg.

Que es lo que nos dice el problema.

PROBLEMA 6 : En un terreno de forma rectangular la medida del largo es el doble de la medida del ancho. Si la medida del largo disminuye en 5 m y la medida del ancho aumenta en 3 m, el área del terreno no cambia. ¿Cuál es el perímetro del terreno?

a) Comprensión del Problema

¿Distingues cuáles son los datos?

- La medida del largo del terreno es el doble de la medida del ancho.
- Si la medida del largo disminuye en 5 m y la medida del ancho aumenta en 3 m, el área del terreno no cambia.
- Lo que se pide es el perímetro del terreno.

b) Concepción de un Plan

¿Se puede usar alguna estrategia para resolver el problema?

Se planteará una ecuación para determinar las medidas del terreno y así poder calcular su perímetro.

c) Ejecución del Plan

¿Cómo ejecutarías la estrategia?

Primero simbolizaremos la situación :

x : medida del ancho del terreno.

$2x$: medida del largo del terreno.

$x + 3$: medida del ancho aumentada en 3 m.

$2x - 5$: medida del largo disminuida en 5 m.

Como las áreas son iguales: $x \cdot 2x = (x + 3) \cdot (2x - 5)$

$$2x^2 = 2x^2 - 5x + 6x - 15 \quad / -2x^2$$

$$0 = x - 15$$

$$x = 15$$

Entonces, $P = (15 + 15 + 2 \cdot 15 + 2 \cdot 15) \text{ m} = (15 + 15 + 30 + 30) \text{ m} = 90 \text{ m}$.

d) Comprobación :

¿Es tu solución correcta? ¿Tu respuesta satisface lo establecido en el problema?

Para comprobar lo obtenido se utilizará la estrategia del **ensayo y error**. Se otorgarán valores a la medida del ancho del terreno (x) y se verificará si se cumplen las condiciones dadas:

Ancho x m	Largo $2x$ m	Área $2x^2$ m ²	Ancho $(x + 3)$ m	Largo $(2x - 5)$ m	Área $(x+3) \cdot (2x-5)$ m ²	V o F
12 m	24 m	288 m ²	15 m	19 m	285 m ²	F
15 m	30 m	450 m ²	18 m	25 m	450 m ²	V
18 m	36 m	648 m ²	21 m	31 m	651 m ²	F

Las áreas coinciden cuando el ancho es 15 m y el largo es de 30 m. Por lo tanto el perímetro del terreno es de 90 m.

PROBLEMA 7 : Un estanque se llena con la llave A en 4 horas y con la llave B en 8 horas. ¿Cuánto tardará en llenarse si se abren simultáneamente las dos llaves?

a) Comprensión del Problema

¿Distingues cuáles son los datos?

Con la llave A tarda 4 horas en llenarse el estanque.

Con la llave B tarda 8 horas en llenarse el estanque.

Se pide saber cuánto tiempo se demorarían en llenar el estanque si se abren las dos llaves simultáneamente.

b) Concepción de un Plan

¿Se puede usar alguna estrategia para resolver el problema?

Formaremos una ecuación de primer grado con incógnita en el denominador.

c) Ejecución del Plan

¿Cómo ejecutarías la estrategia?

Si con la llave **A** tarda 4 horas en llenarse el estanque, en 1 hora se habrá llenado sólo

$\frac{1}{4}$ de estanque.

Si con la llave **B** tarda 8 horas en llenarse el estanque, en 1 hora se habrá llenado sólo $\frac{1}{8}$

de estanque.

Llamaremos x al tiempo que tarda en llenarse con ambas llaves abiertas, entonces en 1 hora se habrá llenado sólo $\frac{1}{x}$ de estanque.

Podemos plantear la siguiente ecuación: $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{1}{x}$

$$2x + x = 8$$

$$3x = 8$$

$$x = \frac{8}{3}$$

Entonces, demora $2\frac{2}{3}$ horas en llenarse el estanque con las dos llaves abiertas, es decir, 2 horas 40 minutos.

d) Comprobación :

¿Es tu solución correcta? ¿Tu respuesta satisface lo establecido en el problema?

Primero sumamos : $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

Para comprobar usaremos la regla de tres simple:

En 1 hora (los grifos A y B llenan) ----- $\frac{3}{8}$ (de la Capacidad)

Se emplean x horas (en llenar) ----- $\frac{10}{10}$ (Capacidad Total)

Entonces: $x = \frac{10/\frac{10}{10}}{3/\frac{3}{8}} = \frac{8}{3}$ horas.

PROBLEMA 8 : Se repartirán 6.210 hectáreas en 3 sectores. El primer sector será las dos terceras partes del segundo sector y el tercero será un cuarto del segundo sector. ¿Cuántas hectáreas corresponden a cada sector?

a) Comprensión del Problema

¿Distingues cuáles son los datos?

Total de hectáreas a repartir : 6.210

Se mencionan tres sectores que se identificarán por A , B , C.

Se establece una relación entre los tres sectores. Asignaremos al segundo sector la variable x que significará el número de hectáreas de ese sector. Entonces :

$$\text{Sector A} = \frac{2}{3}x$$

$$\text{Sector B} = x$$

$$\text{Sector C} = \frac{1}{4}x$$

b) Concepción de un Plan

¿Se puede usar alguna estrategia para resolver el problema?

Usaremos una ecuación de primer grado con variable x .

c) Ejecución del Plan

¿Cómo ejecutarías la estrategia?

Podemos plantear la ecuación siguiente donde x es número de hectáreas del Sector B.

$$x + \frac{2}{3}x + \frac{1}{4}x = 6.210 \quad / \bullet 12$$

$$12x + 8x + 3x = 74.520$$

$$23x = 74.520$$

$$x = \frac{74.520}{23}$$

$$x = 3.240$$

Por último, con el valor de x se obtiene cuántas hectáreas corresponde a cada sector:

$$\text{Sector A} = \frac{2}{3}x = \frac{2}{3} \bullet 3.240 = 2.160 \text{ hectáreas.}$$

$$\text{Sector B} = 3.240 \text{ hectáreas.}$$

$$\text{Sector C} = \frac{1}{4}x = \frac{1}{4} \bullet 3.240 = 810 \text{ hectáreas.}$$

d) Comprobación :

¿Es tu solución correcta? ¿Tu respuesta satisface lo establecido en el problema?

La suma de las hectáreas de los tres sectores deben dar 6.210:

$$2.160 + 3.240 + 810 = 6.210 \text{ hectáreas.}$$

7.- Actividades para usar la metodología de Pólya.

Ahora pasaremos a proponer algunas actividades en las cuales los alumnos pueden completar la resolución de un problema mediante el procedimiento de Pólya.

ACTIVIDAD 1 (Eje Números)

Problema : Se quiere poner una reja alrededor de un terreno de forma rectangular que mide 38,3 m de largo y 22,18 m de ancho. ¿Cuántos metros de reja serán necesarios para cercar el terreno?

Datos : El terreno rectangular mide m de largo y m de ancho.

Pregunta : _____

PASO 2 : Elige una estrategia para resolver el problema.

Se usarán _____ para determinar los metros de la reja necesarios para _____ el terreno .

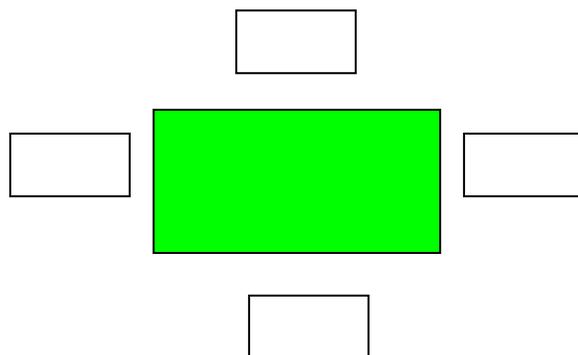
PASO 3 : Resuelve.

$$2 \cdot \boxed{} + 2 \cdot \boxed{}$$

$$= \boxed{} + \boxed{} = \boxed{}$$

PASO 4 : Comprueba.

La estrategia que se utilizará para comprobar lo obtenido es _____



$$\boxed{} + \boxed{} + \boxed{} + \boxed{} = \boxed{}$$

Respuesta : _____

ACTIVIDAD 2 (Eje Números)

Problema : Pablo corre alrededor de un parque que tiene una superficie con forma cuadrada, cuya área es de 8.100 m^2 . ¿Cuántos metros corre Pablo si da 3 vueltas completas?

PASO 1 : Identifica los datos y la pregunta del problema.

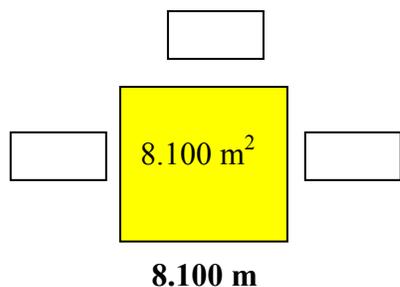
Datos : El parque tiene forma cuadrada _____ y su área es _____.

Pregunta : _____

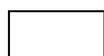
PASO 2 : Elige una estrategia para resolver el problema.

Se hará un dibujo para determinar _____

PASO 3 : Resuelve.



$$\boxed{} \text{ m} \cdot \boxed{} \text{ m} = 8.100 \text{ m}^2$$



$$3 \cdot 4 \cdot \boxed{} \text{ m} = \boxed{} \text{ m}.$$

PASO 4 : Comprueba.

La estrategia que se utilizará para comprobar lo obtenido es _____

$$\sqrt{\quad} = \quad$$

$$3 \bullet 4 \bullet \quad \text{m} = \quad \text{m.}$$

Respuesta : _____

ACTIVIDAD 3 (Eje Álgebra)

Problema : Alberto quiere contratar los servicios de una compañía telefónica y cuenta con los datos de dos de ellas. Las tarifas de cada compañía se presentan en la tabla.

Compañía	Cargo Fijo	Valor de 1 minuto
A	\$ 8.000	\$ 150
B	\$ 7.000	\$ 200

¿Cuál es la empresa más conveniente para Alberto si habla 200 minutos en un mes?

PASO 1 : Identifica los datos y la pregunta del problema.

Datos: La compañía **A** cobra un cargo fijo de _____ y _____ por minuto.

La compañía **B** cobra un cargo fijo de _____ y _____ por minuto.

Alberto habla _____ minutos al mes.

Pregunta: _____

PASO 2 : Elige una estrategia para resolver el problema.

Se modelará la situación con una _____ y luego se evaluará para determinar qué compañía es más conveniente al hablar _____ minutos.

PASO 3 : Resuelve.

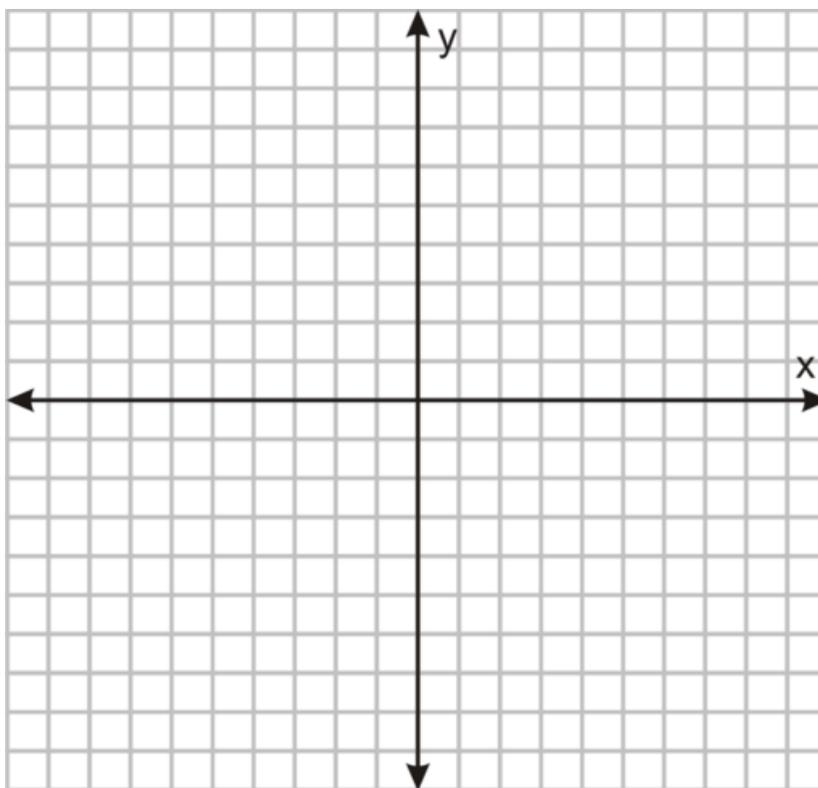
Si **x** representa la cantidad de minutos y **f** el valor que se debe pagar:

$$\text{Compañía A : } f(x) = \boxed{} \cdot x + \boxed{} \Rightarrow f(300) = \boxed{}$$

$$\text{Compañía B : } f(x) = \boxed{} \cdot x + \boxed{} \Rightarrow f(300) = \boxed{}$$

PASO 4 : Comprueba.

La estrategia que se utilizará para comprobar lo obtenido es _____



ACTIVIDAD 4 (Eje Números)

Problema : Dos aviones despegan de un aeropuerto al mismo tiempo y con direcciones perpendiculares. El primero lleva una velocidad de 600 km/h y el segundo de 800 km/h. Si el alcance de su radio es de 500 km, ¿podrán ponerse en contacto al cabo de media hora?

PASO 1 : Identifica los datos y la pregunta del problema.

Datos : Dos aviones despegan de un aeropuerto al mismo tiempo y con direcciones Perpendiculares.

El primer avión lleva una velocidad de _____ km/h.

El segundo avión lleva una velocidad de _____ km/h.

El alcance de la radio de los aviones es de _____ km.

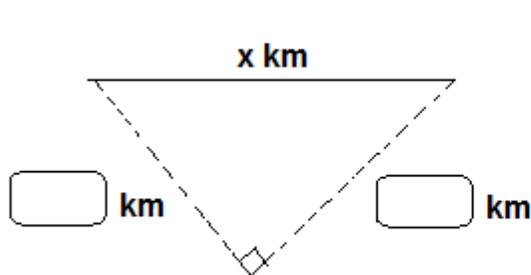
Pregunta: _____

PASO 2 : Elige una estrategia para resolver el problema.

Se planteará una _____ para determinar si los aviones podrán ponerse en contacto al cabo de media hora.

PASO 3 : Resuelve.

La distancia que separa ambos aviones se representa por x . Se calcula la distancia recorrida por cada avión en media hora. Luego se aplica el Teorema de Pitágoras, finalmente se plantea y resuelve una ecuación para determinar la medida de la hipotenusa del triángulo rectángulo formado.



$$x^2 = \boxed{}^2 + \boxed{}^2$$

$$x^2 = \boxed{} + \boxed{}$$

$$x^2 = \boxed{}$$

$$x = \underline{} \text{ km}$$

Luego, x km = km.

PASO 4 : Comprueba.

La estrategia que se utilizará para comprobar es _____

$$\text{Km} = 100 \bullet \text{ km}$$

Luego $x = 100 \bullet$ km = km

Respuesta : _____

ACTIVIDAD 5 (Eje Álgebra)

Problema : Una juguetería vende 10.000 juguetes al año. Si quiere aumentar sus ventas a razón de 1.250 unidades más por año, hasta vender 25.000 juguetes anualmente. ¿En cuánto tiempo alcanzará su meta?

PASO 1 : Identifica los datos y la pregunta del problema.

Datos : Una juguetería vende _____ juguetes al año.

Se quieren aumentar las ventas a razón de _____ unidades más por año,

hasta vender _____ juguetes anualmente.

Pregunta: _____

PASO 2 : Elige una estrategia para resolver el problema.

Se planteará una _____ para determinar la cantidad de años que deben transcurrir para que la juguetería pueda vender _____ unidades anualmente.

PASO 3 : Resuelve.

La cantidad de años se puede representar por t .

$$\boxed{} + \boxed{} t = \boxed{}$$

$$\boxed{} t = \boxed{} - \boxed{}$$

$$\boxed{} t = \boxed{}$$

$$t = \boxed{} \text{ años}$$

PASO 4 : Comprueba

La estrategia para comprobar lo obtenido es _____

t años	Cantidad de juguetes vendidos anualmente <input type="text"/> + <input type="text"/> t	V o F

Respuesta : _____

ACTIVIDADES

Ahora el alumno tendrá la oportunidad de resolver en forma individual los siguientes problemas siguiendo los pasos de Pólya.

ACTIVIDAD 1 (Eje Álgebra)

Problema : Se reparten \$ 270.000 entre tres personas de modo que a la primera le corresponde la mitad de la cantidad de dinero recibido por la segunda y un tercio de lo recibido por la tercera. ¿Cuánto dinero recibió la segunda persona?

PASO 1 : Identifica los datos y comprende el problema.

PASO 2 : Elige una estrategia para resolver el problema.

PASO 3 : Resuelve usando la estrategia elegida.



PASO 4 : Comprueba el resultado obtenido.



ACTIVIDAD 2 (Eje Álgebra)

Problema : Dos compañías privadas de correo tienen las siguientes tarifas:

- Compañía La Veloz : \$150 por kg más \$320 de cargo fijo.
- Compañía La Segura : \$120 por kg más \$380 de cargo fijo.

Si tuvieras que recomendar la compañía más económica, ¿Cuál sería?

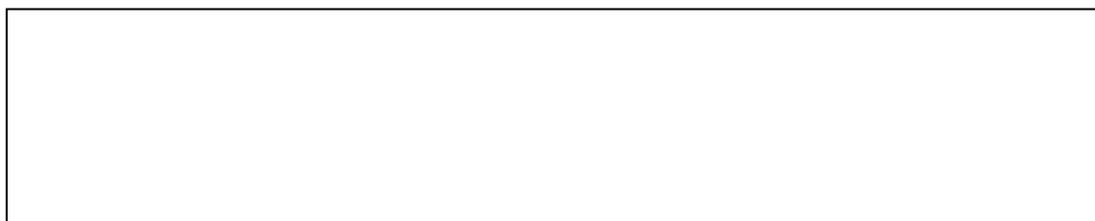
PASO 1 : Identifica los datos y comprende el problema.

A large, empty rectangular box with a thin black border, intended for the student to identify data and understand the problem.

PASO 2 : Elige una estrategia para resolver el problema.

A large, empty rectangular box with a thin black border, intended for the student to choose a strategy for solving the problem.

PASO 3 : Resuelve usando la estrategia elegida.

A large, empty rectangular box with a thin black border, intended for the student to solve the problem using the chosen strategy.

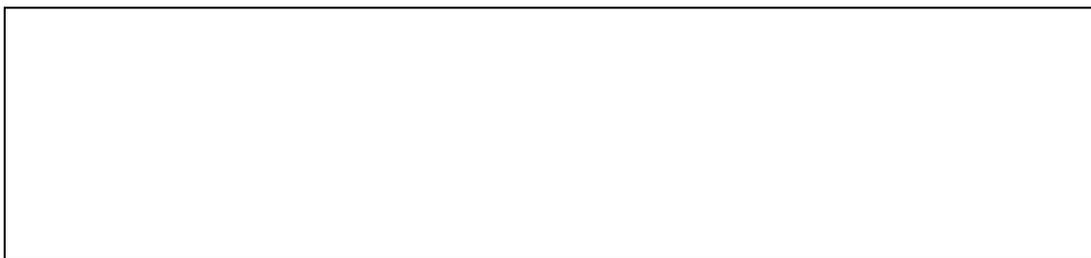
PASO 4 : Comprueba el resultado obtenido.

A large, empty rectangular box with a thin black border, intended for the student to check the result obtained.

ACTIVIDAD 3 (Eje Números)

Problema : Un alimento se considera contaminado si tiene más de 16.000 bacterias por centímetro cúbico de alimento. Una bacteria se reproduce de tal manera que su número se duplica cada media hora. Si inicialmente el alimento tiene 1.000 bacterias, ¿después de cuánto tiempo se considera contaminado?

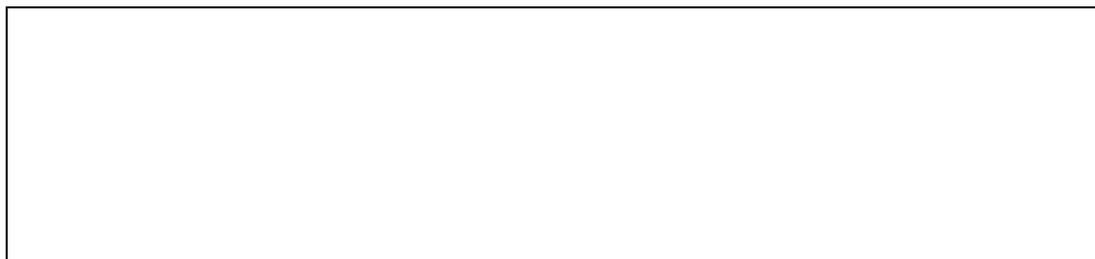
PASO 1 : Identifica los datos y comprende el problema.

A large, empty rectangular box with a thin black border, intended for the student to write their response to the first step of the problem.

PASO 2 : Elige una estrategia para resolver el problema.

A large, empty rectangular box with a thin black border, intended for the student to write their response to the second step of the problem.

PASO 3 : Resuelve usando la estrategia elegida.



PASO 4 : Comprueba el resultado obtenido.



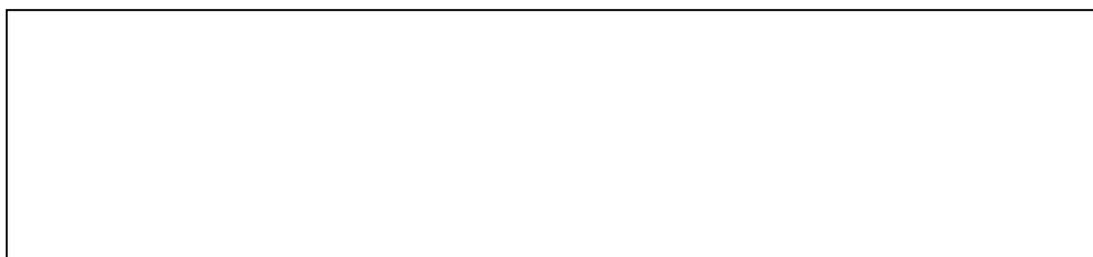
ACTIVIDAD 4 (Eje Números)

Problema : El patio de la casa de Juan es rectangular y tiene 6 metros de largo y 4 metros de ancho. En una ferretería se venden cajas de cerámicas a \$7.500. Cada caja trae 10 cerámicas cuadradas de 35 cm. Calcular cuántas cajas de cerámicas debe comprar Juan para que pueda cubrir su patio rectangular y cuánto dinero debe tener para comprar la cerámica..

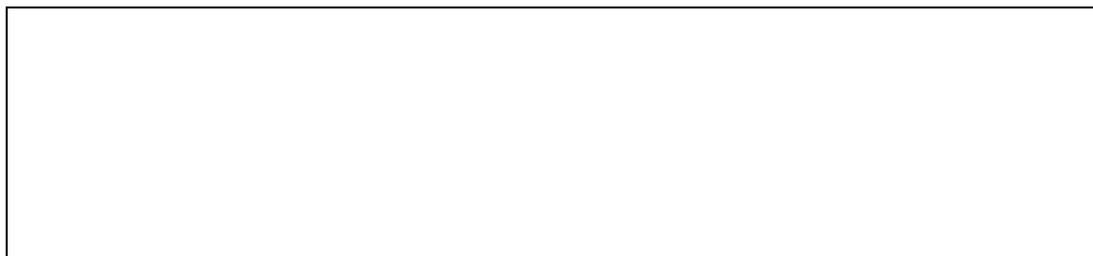
PASO 1 : Identifica los datos y comprende el problema.

A large, empty rectangular box with a thin black border, intended for the student to identify data and understand the problem.

PASO 2 : Elige una estrategia para resolver el problema.

A large, empty rectangular box with a thin black border, intended for the student to choose a strategy to solve the problem.

PASO 3 : Resuelve usando la estrategia elegida.

A large, empty rectangular box with a thin black border, intended for the student to solve the problem using the chosen strategy.

PASO 4 : Comprueba el resultado obtenido.

A large, empty rectangular box with a thin black border, intended for the student to check the result obtained.

ACTIVIDAD 5 (Eje Álgebra)

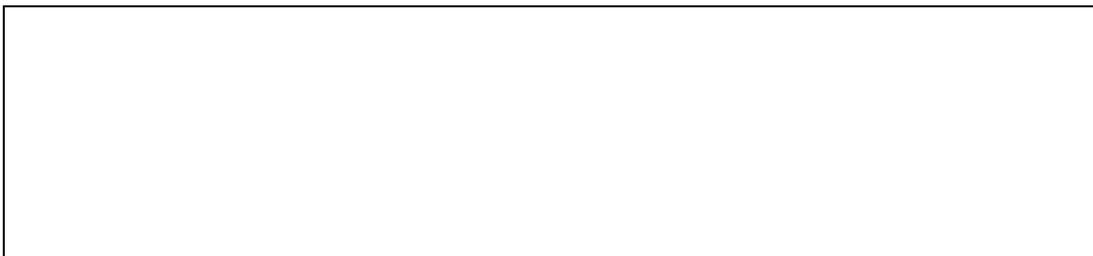
Problema : Con dos camiones cuyas capacidades de carga son respectivamente de 3 y 4 toneladas, se hicieron en total 23 viajes para transportar 80 toneladas de madera. ¿Cuántos viajes realizó cada camión?

PASO 1 : Identifica los datos y comprende el problema.

PASO 2 : Elige una estrategia para resolver el problema.

PASO 3 : Resuelve usando la estrategia elegida.

PASO 4 : Comprueba el resultado obtenido.



8.- Problemas Propuestos.

8.1.- Eje Números

1) Para cubrir un patio rectangular, se han usado 540 baldosas de 600 cm^2 cada una. ¿Cuántas baldosas cuadradas de 20 cm de lado serán necesarias para cubrir el patio, idéntico, de la casa vecina? (R: 810)

2) Un salón rectangular tiene 5 metros de ancho y 10 metros de largo. Hemos de embaldosarlo con baldosas cuadradas de 25 cm de lado. ¿Cuántas baldosas son necesarias?
(R: 800)

3) Un estanque de agua completamente lleno comienza a vaciarse a un ritmo constante. Tras 13 minutos de iniciado el vaciado queda la mitad del agua y luego de 25 minutos, sólo quedan 7 minutos. ¿Cuál es su capacidad total? (R : 182 Litros)

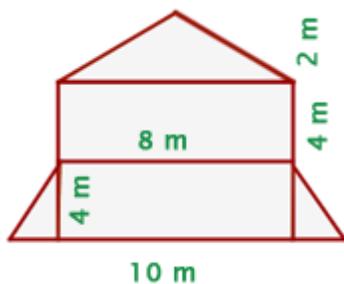
4) Una población de bacterias se triplica cada 30 minutos. Además se estima que cierto alimento debe tener al menos 1.968.300 de estas bacterias para que se determine como contaminado.

a) ¿Cuántas bacterias habrá al cabo de 3 horas si inicialmente habían 100? (R: 72.900)

b) Si inicialmente el alimento tiene 100 bacterias, ¿cuánto tiempo debió pasar para que estuviera contaminado? (R: 4 horas y media)

5) Un tipo de bacteria se reproduce de acuerdo con la expresión 2^t , siendo t el tiempo expresado en horas. ¿En cuánto tiempo se tendrán 1.024 bacterias? (R:10 hrs)

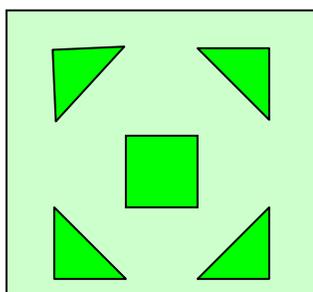
6) Calcula la cantidad de pintura necesaria para pintar la fachada de este edificio sabiendo que se gastan 0.5 Litro de pintura por m^2 . (R: 38 L.)



7) Los $\frac{3}{4}$ de un tanque, con capacidad de 1200 cm^3 , permanecen llenos durante el invierno, pero el volumen de agua disminuye $\frac{2}{3}$ durante el verano. Si se espera que el tanque recupere la ocupación que tuvo en el invierno, en 30 días, ¿con cuántos cm^3 cada día debería llenarse el tanque? (R: 20 cm^3)

8) Una pista circular para ciclistas tiene un diámetro de 54 m. Si se considera que las ruedas de una bicicleta tienen un diámetro de 60 cm, ¿cuántas vueltas completas dan las ruedas por cada recorrido al borde de la pista? Considere $\pi \approx 3,14$ (R: 90 vueltas)

9) La plaza de un pueblo tendrá la forma de un cuadrado de lado 50 m. En su interior, tal como se aprecia en la figura, se colocará pasto en cinco lugares; cuatro de ellos tendrán la forma de un triángulo rectángulo isósceles de catetos 10 m y el otro será un cuadrado de lado 10 m, el resto será baldosas. Si el m^2 de pasto cuesta \$ 2.000 y el m^2 de baldosas cuesta \$ 6.500, ¿cuánto dinero se gastará en pasto y en baldosas? (R: \$14.900.000)



10) Se tiene una herencia a repartir entre sus herederos y la instrucción es que el mayor debe recibir $\frac{1}{4}$ de ella, el segundo $\frac{3}{8}$ de ella y el tercero $\frac{1}{2}$ de lo que queda, entregando la otra mitad a una institución de beneficencia. Si esta institución recibe \$815.625, hallar el monto de la herencia y cuánto recibe cada heredero.

(R: Herencia = \$4.350.000 , 1° = \$1.087.500 , 2° = \$1.631.250 , 3° = \$815.625)

11) Para colocar el contenido de 9 bidones de 12,5 litros en jarrones de 2,25 litros, ¿cuántos jarrones hacen falta? (R: 50 jarrones)

12) La distancia entre Santiago y Puerto Montt es de aproximadamente 1.025 km. Si María Isabel ha recorrido las $\frac{3}{5}$ partes de ese trayecto, ¿cuántos kilómetros le faltan por recorrer?

(R: 410 Km.)

13) Un camión transporta al sur 8 bloques de mármol de 1,56 toneladas cada uno y 4 vigas de hierro de 0,64 toneladas cada una. Si su carga máxima es 16 toneladas, ¿cuánta carga más puede soportar? (R: 0,96 toneladas)

14) Un medicamento se elimina del organismo a través de la orina. La dosis inicial es de 10 mg y la cantidad en el cuerpo t horas después está dada por $A(t) = 10 \cdot 0,8^t$. Para que el fármaco haga efecto debe haber por lo menos 2 mg en el cuerpo. ¿Cuál es la cantidad de fármaco restante en el organismo 2 horas después de la ingestión inicial? (R: 6,4 mg)

15) Un grupo de 78.125 bacterias decrece exponencialmente a un quinto de su población cada día. ¿Cuántas bacterias quedarán al cabo de 5 días? (R: 5^2)

16) En una población de 4.000 conejos se detectó una epidemia que los está exterminando a razón de $4.000 \cdot 2^{-t}$, en la que t es el tiempo expresado en meses. Después de 5 meses, ¿cuántos conejos hay? (R: 125 conejos)

17) Un tipo de bacteria se duplica cada 6 minutos. ¿Cuántas habrá luego de una hora si en un comienzo había 3 bacterias? (R: 125 conejos).

18) Un tipo de bacteria se duplica cada 6 minutos. ¿Cuántas habrá luego de una hora si en un comienzo había 3 bacterias? (R: 3072)

19) Un cubito de hielo de 8 cm³ se introduce en un vaso de agua. Al derretirse, cada minuto que pasa pierde el 20% de su volumen, ya que se transforma en agua líquida. ¿Cuál es el volumen del cubito 4 minutos después? (R: 0,0128 cm³)

20) Un libro de tapas dura cuesta \$25.000, el mismo libro, pero en versión de tapas blandas cuesta \$17.000 . ¿Cuántos libros de tapas duras se deben vender para llegar a la misma cantidad de dinero que si se venden 30 libros de tapa blanda?

(R: 21 libros)

21) Un estudiante debe leer un libro con 300 páginas. Si el día lunes lee la tercera parte del total de páginas, el martes, la quinta parte de lo que le quedaba y el miércoles lee el resto, ¿cuántas páginas lee el día miércoles?(R: 160 páginas)

22) Un caminante realiza las $\frac{2}{3}$ partes de un viaje en bicicleta, $\frac{1}{4}$ del resto en autobús y los 10 km restantes andando. ¿Cuántos kilómetros ha recorrido? (R : 40 km.)

8.2.- Eje Álgebra

1) Las edades de una pareja de casados suman 62 años. Si se casaron hace 10 años y la edad de la novia era $\frac{3}{4}$ de la edad del novio, ¿qué edad tienen actualmente? (R: 34 , 28)

2) La suma de las edades de un padre y de sus dos hijos es 48. Dentro de diez años el doble de la suma de las edades de los hijos excederá en 6 años a la edad del padre. Cuando nació el pequeño, la edad del padre excedía 26 unidades al triple de la edad que tenía el hijo mayor. Calcula la edad de los tres. (R : 2 , 6 , 40)

3) En una pastelería venden pasteles de chocolate, de canela y manjar. El de canela cuesta \$100 más que el de chocolate, y el de manjar, \$130 más que el de canela. ¿Cuánto cuesta cada pastel si el precio de los tres es de \$3.000? (R: Chocolate \$890 ; Canela \$990 ; Manjar \$ 1.120)

4) La edad de Antonio es el doble de la que tenía Víctor cuando Antonio tenía la edad actual de Carlos; si en aquel entonces Carlos tenía 3 años menos que la séptima parte de la edad actual de Víctor, y actualmente sus edades suman 90 años, ¿cuántos años tiene Antonio?

(R: 36)

5) La edad de Enrique es la mitad de la de Pedro; la de Juan el triplo de la de Enrique y la de Eugenio el doble de la de Juan. Si las 4 edades suman 132 años, ¿Qué edad tiene cada uno?

(R : 11, 22, 33, 66)

6) La medida del ancho de un sitio rectangular es igual a la medida de su largo disminuido en sus $\frac{2}{5}$ partes. Para cercar el terreno se necesitan 160 metros de alambre. ¿Cuál es la medida

del largo y del ancho del sitio? (R : Largo 50 m , ancho 30 m)

7) Laura juntó agua de lluvia en un frasco. Con la primera lluvia llenó la mitad del frasco ; con la segunda lluvia el nivel del agua subió un cuarto más; con la tercera lluvia subió un sexto más; y con la cuarta completó los 3 mm que faltaban para llenar el frasco. ¿Cuántos milímetros de agua recolectó en cada lluvia? (R: 18 mm, 9 mm, 6 mm.)

8) Elissa comió una bolsa de bombones en 3 días. El segundo día comió 4 bombones más que el primero, y el tercer día 8 bombones más que el segundo. Si todos los días hubiera comido la misma cantidad de bombones que el primer día, la bolsa de bombones hubiese durado 5 días. ¿Cuántos bombones comió cada día? (R: 8 , 12, 20)

9) El entrenador de fútbol femenino de un colegio realizó una prueba para seleccionar a las mejores quince jugadoras. En el primer entrenamiento se eliminó a ocho jugadoras, en el segundo, se eliminó a los dos tercios partes de las jugadoras que quedaban y en el tercer entrenamiento se eliminó a la mitad de las jugadoras que quedaban. ¿Cuántas personas postularon al equipo? (R: 98 personas)

10) El total cancelado por un trozo de queso, una mantequilla y un kilogramo de pan es de \$1.800. El queso cuesta $\frac{1}{4}$ menos que la mantequilla, y el kilogramo de pan cuesta $\frac{1}{4}$ más que esta. ¿Cuánto cuesta cada producto? (R: Mantequilla \$600, queso \$450, pan \$750)

11) Por el alquiler de un auto cobran una cuota fija de 20.000 pesos y adicionalmente 3.000 pesos por kilómetro recorrido. Escribe la función que representa esta situación, ¿cuánto dinero hay que pagar para hacer un recorrido de 125 Km? y si pagué un valor de 65.000 pesos ¿cuántos kilómetros recorrí? (R: $f(x) = 3.000x + 2.000$, \$395.000 por 125 km , 15 km)

12) Doña María es una señora proveniente de Pomaire, la cual se gana la vida vendiendo artesanías. El costo total de fabricar 20 piezas de cerámica a la semana es de \$60.250, pero si ella pudiera contar con \$111.400 semanales podría fabricar 42 piezas de cerámica. Suponiendo un modelo de costo lineal :

- a) Represente mediante una función costo total semanal que tiene doña María al producir sus artesanías de cerámica (R: $C(x) = 2.325 x + 13.750$)

b) Si doña María dispusiera de \$ 288.100 a la semana, ¿Cuántas piezas de cerámica podría confeccionar? (R: 118 piezas)

13) Al producir jaulas para canarios el precio por cada una es de \$7.000 y los costos mensuales de la fábrica son de \$190.000. Supongamos que el costo total tiene un comportamiento lineal.

a) Determine la función afín que representa la situación.

(R: $C(x) = 7.000x + 190.000$)

b) Determine el costo de producir 110 jaulas en un mes. (R: \$ 960.000)

c) Determine el número de jaulas producidas si el costo fue de \$ 3.690.000. (R: 500)

14) Un estacionamiento cobra \$1.200 como cargo fijo más una cierta cantidad por minuto que permanezca el automóvil. Marisa deja su automóvil por 45 minutos y debe pagar \$3.450, mientras que Héctor lo deja 60 minutos y debe pagar \$4.200. ¿Cuánto debe pagar José si deja su automóvil durante una hora y media? (\$5.700)

15) La cabeza de un pez corresponde al tercio de su peso total, la cola a un cuarto del peso y el resto del cuerpo pesa 4 kg. 600 gramos. ¿Cuánto pesa el pez? (R:11.040 grs)

16) Los dos últimos fines de semana Jorge llevó a sus nietos al cine. La primera vez pagó \$ 15.000 por dos adultos y dos niños, y la segunda vez pagó \$ 13.500 por un adulto y tres niños. ¿Cuánto pagó Jorge por cada entrada de adulto y niño?

(R: \$ 4.500 adulto, \$ 3.000 niño)

17) Hace 6 años un padre tenía el cuádruplo de la edad de su hijo. En 10 años más tendrá sólo el doble. Hallar la edad actual del padre e hijo. (R: 14 y 38 años)

18) Antonia tiene la mitad de la edad de Emilia. En 15 años, Emilia será 6 años mayor que Antonia. ¿Cuál es la edad de cada una? (R: A = 6 , E = 12)

19) La tercera parte de un huerto se ocupa para el cultivo de lechugas y la mitad, para zanahorias. El resto, de 80 m^2 , aún está sin cultivar. ¿Cuál es la superficie del huerto?
(R: 480 m^2)

20) El monto total a pagar por un pantalón, una camisa y unos zapatos en una tienda es de \$44.000. El precio de la camisa es cuatro veces el del pantalón menos \$1.500 y, a su vez, el de los zapatos es cinco veces el del pantalón más \$500. ¿Cuál es el precio de cada uno de los artículos? (R: Pantalón \$4.500 ; Camisa \$16.500 ; Zapatos \$23.000)

21) El curso de Angélica participará en una feria gastronómica, por lo que deciden gastar un cuarto de los ahorros del curso en insumos básicos de cocina, \$10.000 en una cocinilla y \$2.000 en afiches publicitarios. ¿Cuál era la cantidad que tenían ahorrada si al final les queda la sexta parte de ella? (R: \$20.571 aproximadamente)

22) La edad actual de Pedro es igual a la mitad de la edad actual de Luis. Hace 12 años la edad de Pedro era la cuarta parte de la edad de Luis. ¿Hace cuántos años la edad de Pedro era la tercera parte de la edad de Luis? (R : 9)

9.- Conclusión

El trabajo realizado me ha permitido establecer que la metodología de Pólya es muy conveniente y práctica, ya que didácticamente el alumno logrará resolver un problema de la vida real.

Uno de los objetivos de la matemática es analizar e interpretar los resultados del planteamiento de un problema. Con el apoyo del método de Pólya se puede lograr ese objetivo de forma más eficaz. También se logra que el alumno tenga la capacidad de razonar, que no sea repetitivo o mecánico al enfrentar un problema, y además que sea capaz de descubrir el camino que lo conducirá a resolver dicho problema.

Esperamos que esta tesis sea de gran ayuda para los docentes de matemática de Primer año de Enseñanza Media, porque le entrega una serie de actividades que le facilitará la enseñanza. Por supuesto, también da una idea estructural para abordar la resolución de problemas en otros niveles de la enseñanza de la matemática.

Las variadas actividades que están presentadas en esta Tesis, apoyarán la labor docente. También debemos tener presente que para que el alumno enfrente con éxito la resolución de un problema, tiene que tener un dominio aceptable del lenguaje verbal a simbólico. Por tal razón, se incluyeron actividades para que el alumno las realice con el fin de que le sea fácil transformar el lenguaje verbal a simbólico.

Hoy en día vemos que la resolución de problemas presenta un desafío al docente de matemática y más aún la manera de enfrentarlos usando una metodología. Por ello, espero que este trabajo de Tesis sirva como una humilde contribución para que el profesor tenga un apoyo y pueda lograr un aprendizaje significativo de la matemática en sus alumnos.

10.- Bibliografía

- Brousseau 1986. Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques. Publicado por revista Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 7, n. 2, pp. 33-115, 1986 Traducido por Julia Centeno Pérez.
- Chevallard, Y. (1991) La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado . Bs.As. Aique, 1998.
- De Guzmán, Miguel (Labor, Barcelona, 1991). Proyecto ALDA EDUCA. Material de apoyo, elaborado en base el libro “Para pensar mejor”, para docentes de escuelas, beneficiarias 2007.
- Farstad, H. (2004). Las competencias para la vida y sus repercusiones en la educación. 47ª Reunión de la Conferencia Internacional de Educación de la UNESCO. Ginebra.
- Pólya, G.(1965). ¿Cómo plantear y resolver problemas? Editorial Trillas. México.

- Schoenfeld, A. (1985a). Sugerencias para la enseñanza de la Resolución de Problemas Matemáticos. En Separata del libro “La enseñanza de la matemática a debate”. (13-47). Ministerio de Educación y Ciencia. Madrid.

- Zumbado, M., Espinoza, J., González, M., & Ramírez, I. (2008). “La Resolución de problemas en la Enseñanza de las Matemáticas: una experiencia con la función exponencial, polígonos y Estadística” Tesis de licenciatura no publicada. Universidad Nacional, Heredia, Costa Rica. Figueroa, E: *Estrategias en la Resolución de*. Educare. Volumen 10 (1)

- Zumbado, M. y Espinoza, J. (2010). Resolución de problemas: una estrategia metodológica potenciadora de competencias en Educación Matemática. En: I Encuentro de Didáctica, de la Estadística, la Probabilidad y el Análisis de Datos, CIEMAC, Escuela de Matemática, Instituto Tecnológico de Costa Rica.

Página de internet v/o sitios web

- <http://www.gobiernodecanarias.org/educacion/rtee/didmat.htm>. García Cruz, Juan (2001). La Didáctica de las Matemáticas: una visión general.(¿Qué es un problema?).

- www.uv.es/gil/documentos_enlazados/1992_Res_Prob.doc. Krulik y Rudnik, 1980 La didáctica de la resolución de problemas en cuestión : elaboración de un modelo alternativo.