



UNIVERSIDAD DE LA FRONTERA
FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y ESTADÍSTICA

**La invención-resolución de problemas y ejercicios en la
Evaluación Diagnóstica de estudiantes de undécimo año**

Tesis para optar al grado de
MAGÍSTER EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ERIC MATA DELGADO
Profesor Guía: **RICARDO LEAL SANHUEZA**

TEMUCO 2017

A mi esposa Milena
y a mis hijas Paulette y Anneliese,
por quitarles tiempo de familia
para realizar este trabajo.

Un agradecimiento muy especial a la Organización de los Estados Americanos por la asignación de la beca para Estudios Académicos de Postgrado.

I. Índice

II. Introducción	4
III. Problema de investigación	4
III.1. Definición de problema.....	4
III.2. Interrogante de investigación	5
III.3. Objetivos	5
IV. Marco teórico	6
IV. 1. Desde la investigación en educación matemática.....	6
IV. 2. Desde el punto de vista curricular	15
V. Metodología.....	24
V. 1. Diseño	24
V. 2. Muestra.....	27
V. 3. Proceso de recogida de datos	27
V. 4. Proceso de análisis de datos.....	28
VI. Resultados	34
VII. Discusión.....	37
VIII. Referencias	39
IX. Anexos.....	41
X. Índice de tablas	49
Índice de figuras.....	50

II. Introducción

El propósito de esta investigación es fundamentar y proponer la invención-resolución de problemas y de ejercicios como instrumento de evaluación diagnóstica en educación secundaria, específicamente para undécimo nivel, este instrumento cumple perfectamente con los requerimientos que solicita el Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (MEP).

En el siguiente apartado describimos nuestras interrogantes de investigación que formulamos, después brindaremos la fundamentación teórica, luego explicaremos la metodología utilizada para mostrar los resultados obtenidos y por último discutiremos los mismos.

III. Problema de investigación

III.1. Definición de problema

Al inicio de cada curso lectivo (durante el mes de febrero) el MEP solicita a los profesores que brindemos un informe diagnóstico de algunos conocimientos vistos en el curso anterior, elegidos a conveniencia por cada profesor y después se brinda un reporte de los resultados de la prueba diagnóstica por sección (se acostumbra aplicar una prueba escrita). En muchas oportunidades hemos notado que los estudiantes no toman en serio esta evaluación y muestran desinterés durante su aplicación, por tal motivo queríamos buscar una manera diferente y atractiva de evaluación, que se sintieran a gusto y se comprometieran con la misma, activando así algunas de tantas habilidades específicas desarrolladas en décimo nivel, dejándolas a su libre elección, esperábamos por supuesto que en diferentes grupos (incluso en diferentes secciones) algunas fuesen coincidentes.

III.2. Interrogante de investigación

Como pregunta de investigación planteamos: ¿La invención-resolución de problemas y ejercicios cumple con los requisitos que solicita el MEP en evaluación diagnóstica y es capaz de activar una variedad de habilidades específicas en los estudiantes de undécimo nivel del Liceo Unesco?

III.3. Objetivos

El objetivo general de este trabajo de investigación consiste en: Proponer la invención-resolución de problemas y ejercicios como un instrumento de evaluación diagnóstica. Para poder lograr dicho objetivo es necesario definir los siguientes objetivos específicos:

- Implementar la invención-resolución de problemas y ejercicios como instrumento de evaluación diagnóstica en los estudiantes de undécimo nivel en el curso lectivo 2017.
- Mostrar las habilidades específicas que se activaron con la implementación del instrumento propuesto.

IV. Marco teórico

Para fundamentar nuestra investigación consideramos conveniente analizar los aspectos teóricos sobre invención-resolución de problemas y la evaluación diagnóstica desde dos puntos de vista, desde la investigación en educación matemática y por otra parte desde el punto de vista curricular.

IV. 1. Desde la investigación en educación matemática

Se ha difundido ampliamente por los investigadores en educación matemática, que la resolución de problemas permite construir conocimiento matemático significativo en los estudiantes, como lo destaca Ayllón (2012) en su tesis doctoral, así lo consideran autores de reconocido prestigio como Polya (1965), Freudenthal (1973) y Kilpatrick (1987), apoyándose en diferentes argumentos. Se resalta el potencial de la resolución de problemas tanto como metodología de enseñanza como contenido de aprendizaje en sí mismo, reconociéndosele diferentes funciones en el aprendizaje de las matemáticas. En cuanto a la invención de problemas se señala que cuando un individuo inventa un problema ha alcanzado niveles de reflexión complejos, por tanto, ha llegado a una etapa de razonamiento que hace posible la construcción de conocimiento matemático. Este hecho hace que la formulación de problemas aporte grandes beneficios a la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Todo ello lleva a proponer que se potencie su trabajo en el aula. “El planteamiento y la resolución de problemas ha sido y es uno de los objetivos prioritarios de la Matemática. La resolución de problemas es un tema central en la construcción del conocimiento matemático y constituye una actividad cognitiva básica, que ha sido reconocida como esencial por la teoría y la práctica educativa” (Noda, 2000, p. 1). Lin (2004) también justifica que:

La invención de problemas por los estudiantes cubre un amplio rango de actividades con significados variables en diferentes disciplinas que conllevan resolución de problemas que comprenden desde los bien definidos a los ambiguos, en un contexto simulador de laboratorio o en situaciones de la vida real. Esto obliga a que la evaluación de la capacidad de inventar problemas deba de ser un proceso, más que producto, mostrando evidencias del pensamiento individual sobre tareas ligadas a la resolución de problemas.

Adoptaremos la definición de invención de problemas dada por Malaspina (2013) como “un proceso mediante el cual se obtiene un nuevo problema a partir de un problema conocido (variación de un problema dado) o a partir de una situación dada (elaboración de un problema)”.

Podemos considerar ocho aspectos positivos o bondades de la invención de problemas para la educación matemática, Ayllón (2012) aporta algunos en su investigación:

- Incremento del conocimiento matemático. Ya que la tarea exige establecer conexiones entre conocimientos que se poseen separadamente, así como realizar una serie de acciones propias del aprendizaje.
- La motivación. Autores como Akay y Boz (2010), English (1997b) y Silver (1994) proponen como instrumento de motivación la invención de problemas. Esta actividad, junto a la resolución de problemas, favorece una actitud positiva en clase de matemáticas ya que, como señala Polya (1965), el trabajo con problemas ayuda a despertar la curiosidad de los alumnos y, por añadidura, la motivación. Para este autor, la experiencia de un alumno en matemáticas será incompleta si no tiene ocasión de resolver problemas que él mismo haya inventado. Despierta interés y curiosidad (Ayllón y Gómez, 2014).

- Disminuye la ansiedad hacia las matemáticas. En la medida en que la tarea de formular problemas fomente una disposición más favorable y responsable hacia las matemáticas contribuirá a rebajar la ansiedad de los estudiantes hacia las mismas. En los trabajos de Brown y Walter (1993), Burçin (2005), English (1997b), Moses, Bjork y Goldenberg (1990), Silver (1994), y Song, Yim, Shin y Lee (2007), estos autores sostienen que la invención de problemas reduce el miedo y preocupación por las matemáticas que en muchos casos padecen los alumnos.
- Superación de errores. Hace alusión a la superación de errores matemáticos habituales que los estudiantes cometen. Así lo indican Brown y Walter (1993), English (1997b) y Silver, Mamona-Downs, Leung y Kenney (1996). Los autores señalados argumentan que esta actuación induce al alumno a elegir la información que ha de utilizar en la resolución del problema y a seleccionar los datos con los que ha de operar, haciendo que los errores resolutivos disminuyan.
- Desarrollo de la creatividad. Se ha determinado que formular problemas ayuda positivamente al desarrollo de la creatividad del alumnado. Silver (1994) estudia la creatividad de los estudiantes atendiendo a lo que denomina fluidez, flexibilidad y grado de originalidad, asocian la fluidez con el número de problemas generados, la flexibilidad con el número de categorías diferentes de los problemas propuestos y la originalidad con el número de soluciones que admiten los problemas propuestos.
- Herramienta de evaluación. Se refiere a la posibilidad de utilizar la invención de problemas para evaluar ciertas capacidades matemáticas de los estudiantes. Una tarea de invención de problemas permitirá al profesor conocer las habilidades que tienen sus alumnos para usar su conocimiento matemático (Ayllón, 2005;

Cázares, 2000; Lin, 2004; Mestre, 2002; Sheikhzade, 2008), así mismo permitirá analizar los procesos de pensamiento matemático de los sujetos investigados. Se destaca que la invención de problemas permite evaluar, en los estudiantes, su conocimiento, su forma de razonar y su desarrollo conceptual.

- Mejora los procesos de Resolución de Problemas. Kilpatrick (1987) detalla que los estudiantes que son capaces de inventar problemas matemáticos son buenos resolutores de problemas. Silver (1994) proporciona evidencia de que el planteamiento de problemas tiene una influencia positiva en la capacidad de los estudiantes para resolver problemas. Asegura que la tarea de formular problemas es fundamental dentro de la disciplina de las matemáticas y expone varias razones por las que la invención de problemas es beneficiosa tanto para los alumnos como para los profesores: 1) está relacionada con la creatividad del individuo, 2) es un instrumento que hace que los estudiantes sean mejores resolutores de problemas, 3) ayuda a que los estudiantes comprendan mejor los conceptos y procesos matemáticos, 4) mejora la disposición de los estudiantes hacia las matemáticas y 5) ayuda a los alumnos a convertirse en aprendices autónomos.
- Estudiar el talento matemático. Estudios como los de Ellerton (1986) y Krutetskii (1969) en los que intervienen dos grupos de alumnos con diferente nivel de habilidad matemática y se comparan sus producciones sobre la generación de nuevos problemas, determinan que los alumnos con talento matemático proponen buenos y abundantes problemas. Los autores referidos ponen de manifiesto una relación entre la habilidad para proponer nuevos problemas y el grado de creatividad y competencia matemática.

Ayllón y Gómez (2014) manifiestan que Mestre (2002) utiliza la invención de problemas para el estudio de procesos cognitivos. A través de esta tarea analiza el razonamiento, el desarrollo conceptual y la transferencia de conceptos en diferentes contextos para identificar el conocimiento de los estudiantes. Concluye que la invención de problemas posee una alta capacidad de transferencia de conocimientos y constituye un instrumento evaluador de la comprensión de los conceptos físicos que tienen los alumnos. Estas autoras recomiendan a los profesores que incluyan la invención de problemas en las tareas que proponen a sus escolares.

Fernández (2001) describe cuidadosamente el programa de intervención sobre invención-reconstrucción de situaciones problemáticas, incluye seis metamodelos de aplicación: Generativos, Estructuraciones, Enlaces, Transformaciones, Composiciones e Interconexiones, y así aparecen cuarenta nueve modelos de situaciones problemáticas, especificamos con mayor detalle el primer metamodelo por los intereses de nuestra investigación.

Modelos Generativos:

Deberían ser las primeras situaciones a las que se enfrentase el alumno, aunque no deban ocupar únicamente esos primeros lugares. Desarrollan la confianza y seguridad de los alumnos en sí mismos. Ayudan a generar ideas y a utilizar el razonamiento lógico. La operación queda subordinada al pensamiento, del que se desprende divergencia y flexibilidad. Ayudan a percibir la estrategia como vía de solución y a buscar, a posteriori, la operación válida para dar cuerpo al proceso de resolución. El número es algo secundario. Permiten retener el desafío central a partir del cual se reflexiona. Se percibe la importancia de la ausencia de arbitrariedad en los problemas. Se desarrolla la atención,

la actitud crítica, la capacidad de tolerancia, colaboración y solidaridad respecto a las ideas de los demás.

1. Situaciones sin número. Se presenta un problema en cuyo enunciado y pregunta no aparecen datos numéricos. Para llegar a la solución no se necesita operación alguna.
2. Informaciones de las que se puede deducir algo. Se presentan informaciones, sin pregunta alguna: Puede ser una frase, una portada de un libro, un cartel publicitario, una lista de precios, ... La realización de la actividad consiste en deducir ideas y clasificarlas en: lógicas (aquellas que son verdad o mentira para todos) y no lógicas; así como, posibles - muy posibles, poco posibles - e imposibles.
3. Situaciones cualitativas. Se presenta un enunciado y una pregunta con sentido lógico, pero de forma incompleta para llegar a la solución. Se va completando todo lo que se necesite en la medida en que el alumno lo vaya pidiendo.
4. Enunciados abiertos. Se le da al alumno una información: A partir de una frase, de una foto, de un dibujo, de un esquema, de un titular de un periódico, un prospecto, una programación de televisión... Su labor consiste en inventar una situación problemática en la que utilice esa idea.
5. Problemas de lógica. No interviene el algoritmo. Utilización del razonamiento por deducción, inducción y analogía.

Modelos de Estructuración:

Ayudan a estructurar mentalmente las partes que componen el problema: Enunciado, pregunta, resolución, solución. Se percibe la importancia de cada una, la relación que tienen y la no-arbitrariedad entre ellas. Al implicar al alumno en la construcción del

problema interpreta mentalmente la situación problemática, utilizando las operaciones matemáticas como instrumentos para la resolución de las estrategias elegidas; distingue la solución del problema de la resolución de éste y es capaz de estimar con razonamiento lógico la validez del resultado debido a que ha utilizado la reversibilidad de los procesos operativos como técnica de verificación. Se es consciente de que un mismo resultado se puede corresponder con diferentes situaciones planteadas; donde un alumno suma, otro resta. Del mismo modo se es consciente de que una misma operación o conjunto de operaciones da lugar a la creación de una amplia diversidad de situaciones. Se observan interesantes razones para respetar las ideas de los demás.

Modelos de Enlaces:

Ayudan a encontrar la concordancia lógica entre enunciado-preguntasolución; se trabaja con variables de relación entre estas partes: variables sintácticas, lógicas, matemáticas, creencias sociales, experiencias propias. Desarrollan la atención y la prudencia en el trabajo. Evitan la dependencia de la asociación de formas lingüísticas con la aplicación de operaciones. No interviene el azar en la utilización de los datos; se percibe el significado de éstos dentro de la situación problemática. Se comprende que no todos los problemas presentan datos numéricos y que no todos los datos de un problema son numéricos.

Modelos de Transformación:

Utilización de una diversidad de enfoques y pluralidad de alternativas. Hay un dinamismo de relaciones mentales que implican el desarrollo de un pensamiento matemático. Se consolidan conceptos. Se provoca la atención a los elementos con que se representan las magnitudes que intervienen en las situaciones. Utilización de método de Análisis y

método de síntesis. Ayudan a la autocorrección y a establecer relaciones de semejanza y diferencia entre las estrategias de resolución de situaciones problemáticas.

Modelos de composición:

Ayudan a ver el problema como un todo. Emisión de juicios a partir de relaciones múltiples. Desarrollan la memoria, la observación y la capacidad de demostración; ir hacia atrás y pensamiento reversible. Permiten la autocorrección. Consciencia de la necesidad de lectura tantas veces como sea necesaria. Utilización de método de Análisis, de síntesis y de análisis-síntesis.

Modelos de Interconexión:

Extensión de las ideas. Apertura mental en la aplicación de los conceptos y operaciones. Desarrollo de la originalidad, imaginación y creatividad. Aportan componentes de interdisciplinariedad y transversalidad. Ayudan a reflexionar sobre la lógica que ha operado en el razonamiento del proceso de resolución de un problema y a distinguir entre lo necesario y lo suficiente.

Utilizaremos la definición de evaluación dada por Caraballo (2014), como “el proceso de recoger y analizar sistemáticamente información procedente de unas actuaciones de determinados sujetos o instituciones, que conduzca a determinar el grado de logro de unos objetivos previamente planteados”. Esta definición gira en torno a la idea de usar la evaluación para un propósito definido. Mas adelante en su investigación menciona que Bell, Burkhardt y Swan (1992, pp. 127-133) argumentan que las tareas de evaluación deben cumplir con las características siguientes:

- Relevancia práctica. Que las tareas se presenten en situaciones de la vida real y planteen un significado práctico para el estudiante.
- Coherencia. Que las tareas no estén fragmentadas en una secuencia de pasos cerrados o inconexos. Es necesario que las tareas permitan al estudiante aplicar su capacidad para tomar decisiones, seleccionar su propia compilación de técnicas, recorrer una cadena de razonamientos y comparar métodos alternativos.
- Amplio rango de respuestas posibles. Que las tareas ofrezcan al estudiante la oportunidad de trabajar con un amplio rango de capacidades y destrezas y que sea el estudiante y no el profesor quien determine el abanico de respuestas posibles.
- Extensión y valor. Generalmente, el pensamiento de orden superior se manifiesta mejor en tareas largas que en tareas cortas. Sin embargo, es necesario incluir tareas de distinta extensión (desde cálculos mentales rápidos hasta problemas prácticos de mayor extensión) y que constituyan por sí mismas experiencias de aprendizaje válidas y aceptables.
- Autonomía y flexibilidad. Que las tareas que se presenten al estudiante no solo reflejen aquellas que el profesor ha usado para desarrollar un contenido, sino que le permitan usar su comprensión y sus capacidades con autonomía y flexibilidad. Asimismo, que le permitan explorar diferentes maneras de trabajarlas, bien de manera cooperativa o utilizando diversas formas de comunicación oral y prácticas en un ambiente natural de trabajo.
- Adaptabilidad. Que las tareas se alejen de la familiaridad y la rutina de manera que desarrollen la habilidad del estudiante para adaptar y extender sus conocimientos

matemáticos. Los problemas no rutinarios se asocian estrechamente con la autonomía del estudiante. Es necesario que estos problemas exijan más estrategia que técnica.

IV. 2. Desde el punto de vista curricular

Espinoza, Lupiañez y Segovia (2014) aseguran que el interés sobre la invención de problemas también se ve reflejado en reportes curriculares como los “Estándares sobre el currículo y evaluación para las matemáticas escolares” (NCTM,1989); en proyectos de evaluación internacionales como PISA 2012 (OECD, 2013); y en propuestas que establecen perfiles profesionales para la enseñanza de la matemática (NCTM, 1991 y 2000), que sugieren un incremento en el uso de dicha actividad en las clases de matemáticas.

Los nuevos programas de estudio de matemáticas en Costa Rica aprobados en 2012 por el Consejo Superior de Educación y puestos en marcha paulatinamente a partir del año siguiente consideran que plantear y resolver problemas es uno de los cinco procesos matemáticos básicos para poder lograr la construcción de aprendizajes en las Matemáticas. Aprender a plantear y resolver problemas y especialmente usarlos en la organización de las lecciones se adopta como la estrategia central para generar capacidades cognoscitivas para abordar los retos de una sociedad moderna. Se busca potenciar capacidades para identificar, formular y resolver problemas en diversos contextos personales, comunitarios o científicos, dentro y fuera de las Matemáticas. Se trata de capacidades para determinar entonces las estrategias y métodos más adecuados al enfrentar un problema, para valorar la pertinencia y adecuación de los métodos disponibles y los resultados matemáticos obtenidos originalmente, además de la capacidad para evaluar y controlar el desarrollo de su trabajo en la resolución de problemas. En MEP (2012) se recalca que uno de los aspectos que se desea subrayar es la importancia de descubrir, plantear y diseñar problemas (y no sólo resolverlos), pues en su vida las personas se verán más expuestas

a circunstancias en las que los problemas no están formulados o las Matemáticas posibles que pueden intervenir no son visibles o evidentes. Además, en el glosario (MEP, 2012, p. 477) aparece la definición de resolución de problemas como:

el conjunto de estrategias pedagógicas cuyo sustrato es el planteamiento y resolución de problemas. Se identifican al menos las siguientes dimensiones:

Colocada ya en contexto educativo, la resolución de problemas debe integrar al menos dos propósitos:

- aprendizaje de los métodos o estrategias para plantear y resolver problemas,
- aprendizaje de los contenidos matemáticos (conceptos y procedimientos) a través de la resolución de problemas.

En el primer propósito se enfatizan los medios (estrategias, heurísticas, métodos) que requiere un problema (una acción matemática). El aprendizaje de técnicas de resolución de problemas no garantiza que un estudiante pueda resolver problemas nuevos y distintos, sin embargo, el entrenamiento en las mismas favorece el desarrollo de esa capacidad. Sin embargo, no sería apropiado concebir el papel de la resolución de problemas reducido a entrenar y lograr destrezas en esas técnicas y métodos, por más ricos que éstos puedan ser. En el segundo propósito lo que se plantea es una acción de aula que permita generar aprendizajes matemáticos en un contexto específico; esto apela al diseño de tareas que sirvan para la construcción de aprendizajes dentro de una lección (o una secuencia de ellas) y promueve la realización de los procesos matemáticos. En este currículo se plantea como un eje disciplinar.

Dentro de las habilidades específicas que propone el programa de estudio desde educación primaria hasta la secundaria, en cada nivel existe al menos alguna que solicita plantear y resolver problemas en alguna situación dada:

Primer ciclo (primer, segundo y tercer nivel):

- Resolver y plantear problemas en los que se utilicen las operaciones: suma, resta, multiplicación y división.
- Plantear y resolver problemas que involucren los conceptos de lado, vértice, ángulo recto, ángulo obtuso, ángulo agudo.
- Plantear problemas con base en imágenes de cuerpos sólidos.
- Plantear y resolver problemas que involucren diferentes medidas.
- Plantear y resolver problemas contextualizados aplicando la representación de cantidades.
- Plantear y resolver problemas aplicando sucesiones y patrones.
- Plantear y resolver problemas que involucren valores faltantes en una tabla o expresión matemática.
- Plantear problemas del contexto estudiantil que puedan abordarse por medio de recolección y análisis de datos.

Segundo ciclo (cuarto, quinto y sexto nivel):

- Plantear y resolver problemas que involucren fracciones propias.
- Resolver y plantear problemas donde se requiera el uso de la suma, la resta, la multiplicación y la división de números naturales.

- Resolver y plantear problemas donde se requiera el uso de la suma, la resta y la multiplicación de números con decimales.
- Plantear y resolver problemas utilizando la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma.
- Resolver y plantear problemas donde se requiera el uso de la suma, la resta, la multiplicación y división de números naturales y con decimales.
- Resolver y plantear problemas donde se requiera el uso de la suma, la resta, la multiplicación y la división de fracciones y números con decimales.
- Plantear problemas utilizando los conocimientos adquiridos de áreas y perímetros de figuras.
- Plantear problemas referidos a la simetría de figuras y a su reproducción.
- Plantear problemas contextualizados que involucren, para su solución, diversos tipos de medidas y sus respectivas conversiones.
- Plantear y resolver problemas formulados verbalmente.
- Plantear y resolver problemas aplicando porcentajes y regla de tres.
- Plantear y resolver problemas aplicando proporcionalidad directa.
- Plantear y resolver problemas aplicando sucesiones y patrones.
- Plantear y resolver problemas aplicando ecuaciones de primer grado.
- Plantear y resolver problemas aplicando inecuaciones de primer grado.
- Plantear y resolver problemas vinculados con diferentes contextos utilizando análisis estadísticos.

Tercer ciclo (séptimo, octavo y noveno nivel):

- Plantear y resolver problemas donde se utilice el Mínimo Común Múltiplo y el Máximo Común Divisor.
- Plantear y resolver operaciones y problemas utilizando las relaciones de orden en los números enteros.
- Plantear y resolver problemas en los que se requiera de la aplicación de operaciones con números racionales.
- Plantear problemas contextualizados que utilicen razones trigonométricas para su solución.
- Plantear y resolver problemas relacionados con sucesiones y patrones.
- Plantear y resolver problemas en contextos reales, utilizando ecuaciones de primer grado con una incógnita.
- Plantear y resolver problemas utilizando ecuaciones de segundo grado con una incógnita.
- Plantear y resolver problemas vinculados con el cálculo de probabilidades.

Ciclo diversificado (décimo y undécimo nivel):

- Plantear y resolver problemas en contextos reales utilizando las funciones estudiadas.
- Plantear y resolver problemas en contextos reales, utilizando sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.
- Plantear ejercicios o problemas que involucren alguna transformación o transformaciones de figuras en el plano.
- Plantear y resolver problemas que involucren secciones de un cono mediante planos paralelos a la base.

- Plantear y resolver problemas en contextos reales utilizando ecuaciones exponenciales.
- Utilizar las funciones estudiadas para plantear y resolver problemas a partir de una situación dada.

Esto muestra el gran interés por parte del Ministerio de Educación Pública para que los estudiantes desarrollen este proceso matemático (ver Anexo 1 para mayores detalles).

Dentro del marco de la evaluación en MEP (2012) se brindan los principios generales para el desarrollo de una evaluación efectiva en la enseñanza de las Matemáticas:

- Es parte integral del proceso de enseñanza y aprendizaje. La evaluación no debe considerarse un proceso separado de la mediación pedagógica, o como un conjunto de pruebas aplicadas al finalizar una unidad o un tema. Debe constituirse en parte natural del proceso de aprendizaje, que tiene lugar durante las actividades que se plantean en la clase, cuando cada estudiante participa, escucha, analiza situaciones del entorno y propone estrategias para su solución considerando los diferentes niveles de complejidad.
- Constituye un proceso colaborativo. Cada estudiante aprende de sus compañeros y del docente y éste aprende de y con sus estudiantes. La formulación de actividades que impliquen la puesta en práctica de las habilidades, destrezas y competencias de estudiantes favorece el desarrollo de su autoestima, valores y actitudes, así como la promoción de creencias positivas respecto de la asignatura.
- Pertinencia con las actividades de mediación. Durante el desarrollo de las actividades de mediación, es necesario recopilar información cualitativa y cuantitativa acerca del desempeño estudiantil en las distintas áreas matemáticas. La información recopilada

mediante instrumentos técnicamente elaborados le permitirá evaluar sus habilidades, destrezas y competencias y la toma de decisiones.

- Congruencia de las técnicas e instrumentos. Las técnicas e instrumentos que se utilicen en el proceso de evaluación deben ser variados y adecuados al nivel que pretende evaluar, deben servir para reflejar el nivel de conocimiento y las habilidades específicas logradas.
- Permite la toma de decisiones. El análisis de la información recopilada permite la reflexión sobre la práctica pedagógica y la toma de decisiones orientadas a la realimentación o reorientación de la misma. Además, permite identificar las fortalezas en el aprendizaje de cada estudiante y sugerir cómo desarrollarlas aún más, con claridad y actitud constructiva respecto a eventuales debilidades y las formas como podrían enfrentarlas. A cada estudiante, por su parte, le permite reflexionar en torno a su desempeño y autoevaluarse, con el fin de que a través del tiempo sea responsable de su propio aprendizaje, y solicitar, en caso necesario, los apoyos que le faciliten el desarrollo de las habilidades y destrezas propuestas en estos programas.
- Promueve el compromiso hacia el aprendizaje. Para garantizar un aprendizaje efectivo debe existir comprensión estudiantil sobre lo que son los objetivos de aprendizaje y además el deseo de realizarlos. Esta comprensión y compromiso hacia su propio aprendizaje surge cuando tienen conocimiento de los objetivos y los criterios que se utilizarán para evaluar su progreso. La comunicación clara de estos criterios implica formularlos de manera que se pueda entender lo que se espera del desempeño estudiantil.

El concepto de evaluación en MEP (2016) en el artículo 3 del Reglamento de Evaluación de los Aprendizajes menciona que “La evaluación de los aprendizajes es un proceso de emisión de

juicios de valor que realiza el docente, con base en mediciones y descripciones cualitativas y cuantitativas, para mejorar los procesos de enseñanza y de aprendizaje, y adjudicar las calificaciones de los aprendizajes alcanzados por los estudiantes” y en artículo 4 se refiere a sus funciones básicas:

- a) La función diagnóstica: detecta el estado inicial de los estudiantes en las áreas de desarrollo humano: cognoscitiva, socio afectiva y psicomotriz con el fin de facilitar, con base en la información que de ella se deriva, la aplicación de las estrategias pedagógicas correspondientes.
- b) La función formativa: brinda la información necesaria y oportuna para tomar decisiones que reorienten los procesos de aprendizaje de los estudiantes y las estrategias didácticas utilizadas.
- c) La función sumativa: fundamenta la calificación y la certificación de los aprendizajes alcanzados por los estudiantes.

Desde esta perspectiva, el diagnóstico cumple un papel fundamental como período organizado y coherente con objetivos, etapas y tareas claramente definidas, con el fin de obtener información cualitativa y cuantitativa relevante sobre la situación integral del estudiante.

El Ministerio de Educación Pública identifica algunas características de la evaluación diagnóstica en MEP (2013):

- No se les asigna una nota a los resultados obtenidos, esto tendería a sancionar a los estudiantes, cuando en realidad lo que se busca es dar cuenta de las habilidades, competencias, conocimientos y actitudes que poseen.

- Puede ser una actividad programada, una observación, una entrevista, un cuestionario, una prueba u otros instrumentos o técnicas. Lo importante es que se tenga muy claro el objetivo de la evaluación, porque sin este no se puede sistematizar la información obtenida.
- Puede ser individual o grupal, dependiendo de las necesidades, o si se desea tener una visión global o particular de los estudiantes.
- La información obtenida no es exclusiva del docente, sino que puede ser devuelta a los estudiantes con las respectivas observaciones, para que se den cuenta de su estado ante los nuevos conocimientos y reflexionen al respecto.
- Tiene carácter técnico y científico (objetivo, ordenado y procesual), que implica la puesta en práctica de determinadas técnicas de recolección y análisis de la información.
- Tiene carácter preventivo, ya que permite conocer las posibles dificultades que presentan los estudiantes, cuando se inicia un curso, un periodo o tema de estudio. A la vez, identifica el nivel de adquisición de los conocimientos, habilidades y destrezas, a partir de esto se establecen medidas o programaciones específicas para reforzar y hacer el seguimiento durante el desarrollo del proceso educativo.
- Tiene como finalidad aportar conocimientos para mejorar la práctica educativa, lo que implica que en el proceso de diagnóstico se incluyan actividades de valoración que faciliten la toma de decisiones.
- Se puede aplicar en los distintos ámbitos de intervención pedagógica: académica, socioafectiva, psicomotora, y no de forma exclusiva en uno de ellos.

A modo de síntesis, tanto el Ministerio de Educación Pública como investigadores mencionados por Ayllón (2012), como Sheikhzade (2010), “ indica que tanto la resolución como la invención

de problemas son herramientas potentes para evaluar la comprensión de los estudiantes y su habilidad para transferir conocimiento de unos contextos a otros”, Alexander y Ambrose (2010) “animan a los profesores a utilizar la invención de problemas como herramienta de evaluación”, Lin (2004) destaca que “se observó que cuando los profesores proponen a los estudiantes tareas de invención de problemas, éstas se convierten en instrumentos útiles para la construcción y comprensión de las matemáticas así como una herramienta de evaluación” y Espinoza, Lupiañez y Segovia (2014) recomiendan que la invención de problemas “se podría emplearse como evaluación diagnóstica al iniciar un año lectivo o tema, o simplemente como actividad de clase que permite al estudiante valorar su propio aprendizaje y profundizar en los conceptos aprendidos”.

En este trabajo utilizaremos el infinitivo inventar como sinónimo de plantear, crear, formular y confeccionar, pues consideramos que se ajusta mejor al lenguaje utilizado por los estudiantes que participaron en la investigación.

V. Metodología

V. 1. Diseño

Esta investigación es de corte cualitativo interpretativo ya que permite un acercamiento al fenómeno de una manera más descriptiva y participativa y se centra en la metodología de investigación evaluativa, que para Lukas y Santiago (citado en Zapatero, González y Campos, 2017) es el proceso de identificación, recogida y análisis de información relevante, que podría ser cuantitativa o cualitativa, de manera sistemática, rigurosa, planificada, dirigida, objetiva, creíble, fiable y válida para emitir juicios de valor basados en criterios y referencias

preestablecidos para determinar el valor y el mérito del objeto educativo en cuestión a fin de tomar decisiones que ayuden a optimizar el mencionado objeto. En nuestro caso queremos evaluar la invención-resolución de problemas y ejercicios como instrumento de evaluación diagnóstica, desarrollada mediante cuatro fases entrelazadas: preliminar, desarrollo, continuidad y valoración.

En la fase Preliminar realizamos una revisión documental sobre la invención – resolución de problemas y sobre la evaluación diagnóstica tanto a nivel nacional (lo que propone el MEP en los programas de estudios y en documentos oficiales) como lo que se ha investigado en otros países, esto nos motivó a continuar pues no encontramos algún estudio similar al que queríamos ejecutar, entonces este trabajo se tornó innovador.

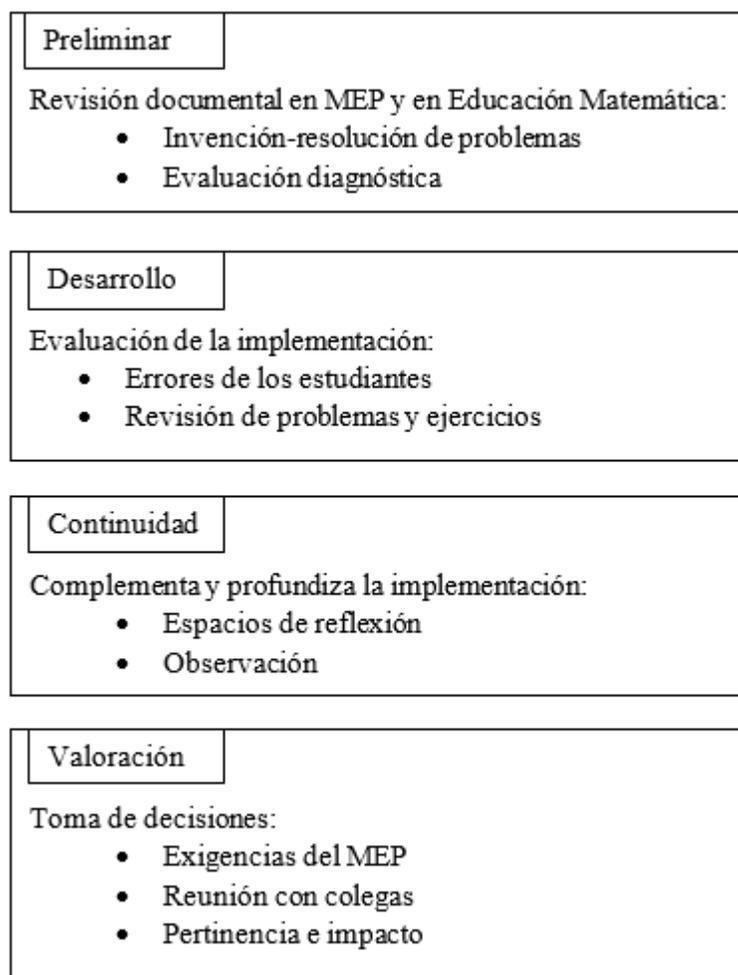
La fase Desarrollo constituye una evaluación de la implementación del instrumento, pretende descubrir los errores que cometieron los estudiantes a la hora de inventar y resolver los problemas y ejercicios, evidenciados cuando realizaron la comunicación a sus compañeros y cuando el profesor brindó el informe de los resultados de dominio de los conocimientos de la evaluación diagnóstica.

La fase Continuidad complementa y profundiza la evaluación de la implementación, los estudiantes tuvieron el espacio de reflexión sobre las ventajas y desventajas de la actividad realizada, el profesor también muestra sus anotaciones sobre su observación. Además, identificamos en esta etapa las habilidades específicas de décimo nivel que los estudiantes activaron.

En la fase Valoración se brindan los informes finales, si la actividad cumple con lo exigido por el MEP en cuanto a la evaluación diagnóstica, sobre las debilidades de los estudiantes en ciertas

áreas matemáticas, análisis de los resultados para la toma de decisiones con colegas del departamento de Matemática del Liceo Unesco y las mejoras de la actividad para aplicarla a otros estudiantes.

Figura V.1. Fases de la Investigación Evaluativa



V. 2. Muestra

El liceo Unesco es un colegio público de secundaria, modalidad académica diurna, ubicado en el cantón de Pérez Zeledón, en la provincia de San José, a unos 135 km de la capital de Costa Rica. Constituido por diez secciones en cada nivel, cada una de ellas está conformada por cerca de 20 estudiantes (en undécimo nivel). Seleccionamos a las cuatro secciones que les impartía Matemáticas en el curso lectivo 2017 (11-1, 11-2, 11-3 y 11-4), para un total de 75 estudiantes, debido a la facilidad de la recolección de datos en mis lecciones y escogimos estudiantes de undécimo nivel ya que es la primera generación que ha trabajado durante los cinco años de educación secundaria con los nuevos programas de estudio que incentivan el proceso de plantear y resolver problemas. Semanalmente estos estudiantes reciben matemáticas en dos oportunidades, una durante dos lecciones (80 minutos) y otra durante tres lecciones.

V. 3. Proceso de recogida de datos

Durante la tercera semana del mes de febrero del 2017 a los estudiantes de las mencionadas secciones se les dio la indicación que se formaran en grupos de 3 o 4 estudiantes, y a partir de ese momento tenían un plazo máximo de dos lecciones para inventar y resolver 5 problemas o ejercicios por grupo, sobre los conocimientos obtenidos durante el curso lectivo anterior. Al final de esa clase tomé fotografías de un cuaderno de cada grupo sobre el trabajo realizado. En la próxima clase los estudiantes expusieron a sus compañeros los problemas y ejercicios que inventaron y en otro momento les brindé la información sobre el rendimiento en esta prueba diagnóstica, así como las debilidades y fortalezas detectadas. En esa misma sesión los estudiantes hicieron algunas reflexiones sobre las ventajas y desventajas de la actividad realizada.

Con base a los datos recopilados tabulamos las habilidades específicas que se activaron en cada sección y luego de revisar la resolución de cada problema y ejercicio inventado se registra el dominio de cada habilidad por grupo y se generaliza por sección.

V. 4. Proceso de análisis de datos

A continuación, brindaremos los informes del dominio de los conocimientos por parte de los estudiantes en las habilidades detectadas en los problemas y ejercicios que inventaron y resolvieron, esto por cada sección.

Tabla V.1: Informe de la Prueba Diagnóstica Sección 11-1

Habilidad Específica	Dominio		Estrategias Remediales	Cronograma
	SI	NO		
1. Analizar gráfica y algebraicamente la función cuadrática con criterio $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$.	x			
2. Determinar la ecuación de una recta utilizando datos relacionados con ella.	x			
3. Resumir un grupo de datos mediante el uso de la moda, la media aritmética, la mediana, los cuartiles, el máximo y el mínimo, e interpretar la información que proporcionan dichas medidas.	x			
4. Calcular la composición de dos funciones.	x			
5. Analizar una función a partir de sus representaciones.	x			
6. Determinar la medida de perímetros y áreas de polígonos en diferentes contextos.	x			
7. Plantear y resolver problemas en contextos reales, utilizando sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.	x			
8. Determinar la pendiente, la intersección con el eje de las ordenadas y de las abscisas de una recta dada, en forma gráfica o algebraica.		x	Se brindará un repaso	Octubre
9. Identificar el radio y el diámetro de una esfera.		x		

Tabla V.2: Informe de la Prueba Diagnóstica Sección 11-2

Habilidad Específica	Dominio		Estrategias Remediales	Cronograma
	SI	NO		
1. Analizar gráfica y algebraicamente la función cuadrática con criterio $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$.	x			
2. Determinar la ecuación de una recta utilizando datos relacionados con ella.	x			

3. Resumir un grupo de datos mediante el uso de la moda, la media aritmética, la mediana, los cuartiles, el máximo y el mínimo, e interpretar la información que proporcionan dichas medidas.	x			
4. Calcular la composición de dos funciones.	x			
5. Plantear y resolver problemas en contextos reales utilizando las funciones estudiadas.	x			
6. Analizar una función a partir de sus representaciones.	x			
7. Determinar la medida de perímetros y áreas de polígonos en diferentes contextos.	x			
8. Plantear y resolver problemas en contextos reales, utilizando sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.	x			
9. Calcular perímetros y áreas de polígonos no regulares utilizando un sistema de coordenadas rectangulares.	x			
10. Identificar si una relación dada en forma tabular, simbólica o gráfica corresponde a una función.	x			
11. Representar intervalos numéricos en forma gráfica, simbólica y por comprensión.	x			
12. Identificar el radio y el diámetro de una esfera.	x			
13. Identificar la superficie lateral, las bases, la altura, el radio y el diámetro de un cilindro circular recto.		x	Se brindará un repaso	Octubre
14. Utilizar correctamente los símbolos de pertenencia y de subconjunto.	x			

Tabla V.3: Informe de la Prueba Diagnóstica Sección 11-3

Habilidad Específica	Dominio		Estrategias Remediales	Cronograma
	SI	NO		
1. Analizar gráfica y algebraicamente la función cuadrática con criterio $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$.	x			
2. Determinar la ecuación de una recta utilizando datos relacionados con ella.	x			
3. Resumir un grupo de datos mediante el uso de la moda, la media aritmética, la mediana, los cuartiles, el máximo y el mínimo, e interpretar la información que proporcionan dichas medidas.	x			
4. Calcular la composición de dos funciones.	x			
5. Plantear y resolver problemas en contextos reales utilizando las funciones estudiadas.	x			
6. Representar algebraicamente una circunferencia dado su centro y su radio.	x			
7. Analizar una función a partir de sus representaciones.	x			
8. Determinar la medida de perímetros y áreas de polígonos en diferentes contextos.	x			
9. Plantear y resolver problemas en contextos reales, utilizando sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.	x			
10. Analizar sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.	x			

11. Calcular perímetros y áreas de polígonos no regulares utilizando un sistema de coordenadas rectangulares.	x			
12. Identificar si una relación dada en forma tabular, simbólica o gráfica corresponde a una función.	x			
13. Determinar si una recta dada es secante, tangente o exterior a una circunferencia.	x			

Tabla V.4: Informe de la Prueba Diagnóstica Sección 11-4

Habilidad Específica	Dominio		Estrategias Remediales	Cronograma
	SI	NO		
1. Determinar la ecuación de una recta utilizando datos relacionados con ella.	x			
2. Resumir un grupo de datos mediante el uso de la moda, la media aritmética, la mediana, los cuartiles, el máximo y el mínimo, e interpretar la información que proporcionan dichas medidas.	x			
3. Plantear y resolver problemas en contextos reales utilizando las funciones estudiadas.	x			
4. Determinar la medida de perímetros y áreas de polígonos en diferentes contextos.	x			
5. Identificar si una relación dada en forma tabular, simbólica o gráfica corresponde a una función.		x	Se brindará un repaso.	Octubre
6. Representar intervalos numéricos en forma gráfica, simbólica y por comprensión.	x			
7. Determinar qué figuras se obtienen mediante secciones planas de una esfera o un cilindro y características métricas de ellas.	x			

Luego de una manera general, mostramos todas las habilidades específicas que utilizaron los 75 estudiantes de undécimo nivel, distribuidos en 20 grupos.

Tabla V.5: Informe de la Prueba Diagnóstica Secciones 11-1, 11-2, 11-3, 11-4

Habilidad Específica	# Grupos	Sección			
		11-1	11-2	11-3	11-4
Analizar gráfica y algebraicamente la función cuadrática con criterio $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$.	8	3	2	3(1x)	
Determinar la ecuación de una recta utilizando datos relacionados con ella.	10	2(1x)	3(1x)	2(1x)	3
Resumir un grupo de datos mediante el uso de la moda, la media aritmética, la mediana, los cuartiles, el máximo y el mínimo, e interpretar la información que proporcionan dichas medidas.	15	5	5	1	4
Calcular la composición de dos funciones.	5	2	1	2	

Plantear y resolver problemas en contextos reales utilizando las funciones estudiadas.	5		1	2	2
Representar algebraicamente una circunferencia dado su centro y su radio.	1			1	
Analizar una función a partir de sus representaciones.	7	2	2(1x)	3	
Determinar la medida de perímetros y áreas de polígonos en diferentes contextos.	6	2	1	2	1
Plantear y resolver problemas en contextos reales, utilizando sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.	6	2	2(1x)	2	
Analizar sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.	1			1	
Calcular perímetros y áreas de polígonos no regulares utilizando un sistema de coordenadas rectangulares.	4		2	2	
Identificar si una relación dada en forma tabular, simbólica o gráfica corresponde a una función.	4		1	2	1(1x)
Determinar si una recta dada es secante, tangente o exterior a una circunferencia.	1			1	
Representar intervalos numéricos en forma gráfica, simbólica y por comprensión.	2		1		1
Determinar qué figuras se obtienen mediante secciones planas de una esfera o un cilindro y características métricas de ellas.	2				2
Determinar la pendiente, la intersección con el eje de las ordenadas y de las abscisas de una recta dada, en forma gráfica o algebraica	2	2(2x)			
Identificar el radio y el diámetro de una esfera.	2	1(1x)	1		
Identificar la superficie lateral, las bases, la altura, el radio y el diámetro de un cilindro circular recto.	1		1(1x)		
Utilizar correctamente los símbolos de pertenencia y de subconjunto.	1		1		

Por cada área matemática ofrecemos un ejemplo de problema o ejercicio que confeccionaron los estudiantes.

Figura V.2: Ejemplo de Problema de Relaciones y Álgebra

① En una granja se crían gallinas y conejos. Si se cuentan las cabezas, son 50 y si se cuentan las patas son 134. ¿Cuántos animales de cada clase hay?

$$\begin{array}{r} x+y=50 \\ 2x+4y=134 \end{array} \quad \begin{array}{r} -4 \\ 1 \end{array} \left| \begin{array}{r} x+y=50 \\ 2x+4y=134 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r} -4x-4y=-200 \\ 2x+4y=134 \\ \hline 2x=-66 \\ \hline x=-33 \end{array} \quad \begin{array}{r} x+y=50 \\ 33+50=17 \end{array}$$

R/= Hay 33 gallinas y 17 conejos

$$\begin{array}{r} -66 = 33 \\ -2 \end{array}$$

Figura V.3: Ejemplo de Ejercicio de Geometría

Determine el área total del siguiente polígono irregular

2.

Julieth Zuñiga Mena
Nikole Orozco Ch.
Emilia Ponce Méndez
Samantha Talavera M.
11-3

$$\begin{array}{l} A_{\square} = l \cdot a \\ A_{\square} = 10 \cdot 8 \\ A_{\square} = 80 \text{ cm} \end{array} \quad \begin{array}{l} A_{\Delta 1} = b \cdot h \\ A_{\Delta 1} = \frac{5 \cdot 8}{2} \\ A_{\Delta 1} = 20 \text{ cm} \end{array} \quad \begin{array}{l} A_{\Delta 2} = \frac{b \cdot h}{2} \\ A_{\Delta 2} = \frac{9,4 \cdot 6}{2} \\ A_{\Delta 2} = 28,2 \text{ cm} \end{array}$$

Área total
 $80 \text{ cm} + 20 \text{ cm} + 28,2 \text{ cm} = 128,2 \text{ cm}$

Figura V.4: Ejemplo de Problema de Estadística y Probabilidad

Maria y Ericka están llevando un curso el cual tiene 4 materias. Si Maria sacó 97 en matemáticas, 80 en español, 90 en estudios sociales y un 50 en química, y Ericka sacó 40 en matemáticas, 87 en español, 92 en estudios y un 100 en química. Cual tiene mayor promedio?

	Maria	Ericka
Matemática	97	40
Español	80	87
Estudios Sociales	90	92
Química	50	100
	<u>79,25</u>	<u>79,75</u>

R: Ericka tiene mayor promedio que Maria

VI. Resultados

La actividad realizada cumple con las características de un metamodelo Generativo que explicamos en el capítulo IV según Fernández (2001), específicamente como una situación de enunciado abierto, ya que le ofrecimos a los estudiantes la única información de utilizar los conocimientos adquiridos en el curso anterior y a partir de ellos inventar - resolver problemas y ejercicios. Este proceso satisface tanto la definición de evaluación de Caraballo (2014) como la de MEP (2016) ya que pudimos recopilar y analizar la información que brindaron los estudiantes sobre los conocimientos adquiridos y mostrar el logro de los mismos para tomar medidas remediales durante el proceso de enseñanza y aprendizaje en el curso lectivo 2017. Como tarea de evaluación cumplió lo referido a la relevancia práctica (pues los estudiantes eligieron los contextos de su vida real a su gusto), coherencia (ya que tuvieron que tomar decisiones en la redacción, seleccionar su propia compilación de técnicas de resolución), amplio rango de respuestas posibles (al ser una actividad de enunciado abierto se le ofreció al estudiante la oportunidad de trabajar con un amplio abanico de capacidades y destrezas, no fue el profesor quien los limitó), extensión y valor (algunos problemas y ejercicios fueron extensos, otros mucho más cortos, pero con valioso significado, hay diferentes niveles de complejidad según MEP 2012, p. 32), autonomía y flexibilidad (trabajaron en grupos de una forma autónoma y cooperativa en un ambiente natural de trabajo, además tuvieron la oportunidad de expresar sus resultados de manera escrita y verbal) y por último adaptabilidad (los estudiantes nunca habían aplicado este proceso matemático en la evaluación diagnóstica, tuvieron que adaptar las únicas dos habilidades específicas vistas el año anterior de plantear y resolver problemas a otros conocimientos de ese curso lectivo). También satisface lo solicitado en MEP (2012) referente a procesos de evaluación efectiva, algunos que ya explicamos anteriormente: es parte integral del

proceso de enseñanza y aprendizaje, constituye un proceso colaborativo, pertinencia con las actividades de mediación, congruencia de las técnicas e instrumentos, permite la toma de decisiones y promueve el compromiso hacia el aprendizaje.

La invención-resolución de problemas y ejercicios cumple con las características de la evaluación diagnóstica según lo establecido en MEP (2013):

- No se les asignó una nota a los resultados obtenidos, fue una calificación cualitativa sobre el dominio de los conocimientos (ver tablas V.1, V.2, V.3 y V.4).
- Fue una actividad programada con carácter técnico y científico, con tiempos, indicaciones y objetivos bien establecidos.
- La desarrollamos de manera grupal, para tener una visión global de los estudiantes.
- La información obtenida no fue exclusiva del profesor, sino que la mostramos a los estudiantes con las respectivas observaciones para que pudieran reflexionar al respecto.
- Tiene carácter preventivo, ya que permitió conocer las debilidades que presentaron los estudiantes cuando se inició el curso lectivo 2017, evidenciando la ausencia de habilidades específicas sobre probabilidad.
- Aportó conocimientos para mejorar la práctica educativa, pues facilitó la toma de decisiones en los planes remediales.

Por otro lado, queríamos detectar si aparecerían habilidades específicas coincidentes en los diferentes grupos o hasta en las diferentes secciones, que es lo que sucede cuando el profesor confecciona la prueba escrita de diagnóstico, él elige cierta cantidad de habilidades y las mismas se las aplica a todos los estudiantes. En la tabla V.5 se puede observar que los estudiantes de undécimo nivel activaron en total 19 habilidades específicas dentro de las tres diferentes áreas

matemáticas que se estudian en décimo nivel: Geometría, Relaciones y Álgebra, y Estadística y Probabilidad.

Las habilidades específicas que fueron coincidentes en las cuatro secciones fueron:

- Determinar la ecuación de una recta utilizando datos relacionados con ella.
- Resumir un grupo de datos mediante el uso de la moda, la media aritmética, la mediana, los cuartiles, el máximo y el mínimo, e interpretar la información que proporcionan dichas medidas.
- Determinar la medida de perímetros y áreas de polígonos en diferentes contextos.

Las habilidades específicas que fueron más frecuentes según por grupos fueron:

Tabla VII.1: Habilidades específicas más frecuentes por grupos

Habilidades específicas de décimo nivel	Grupos
Resumir un grupo de datos mediante el uso de la moda, la media aritmética, la mediana, los cuartiles, el máximo y el mínimo, e interpretar la información que proporcionan dichas medidas.	15
Determinar la ecuación de una recta utilizando datos relacionados con ella.	10
Analizar gráfica y algebraicamente la función cuadrática con criterio $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$.	8
Analizar una función a partir de sus representaciones.	7
Determinar la medida de perímetros y áreas de polígonos en diferentes contextos.	6
Plantear y resolver problemas en contextos reales, utilizando sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.	6

VII. Discusión

Concluimos que efectivamente la actividad de la invención-resolución de problemas y ejercicios cumple con los requisitos que solicita el Ministerio de Educación Pública de Costa Rica en cuanto a evaluación diagnóstica y mediante la observación del profesor y en espacios de reflexión con los estudiantes expresaron el disfrute y compromiso con la actividad, ratificado en que 20 grupos de estudiantes generaron 94 problemas y ejercicios de los 100 que se esperaban.

Este proceso fue capaz de activar una variedad de habilidades específicas (19 en total) en los estudiantes de undécimo nivel del Liceo Unesco, tradicionalmente el profesor confecciona la prueba escrita de diagnóstico basado en 5 habilidades específicas, y los resultados obtenidos los generaliza por cada sección, como pudimos observar en la tabla V.1 la sección 11-1 activó 9 habilidades, la sección 11-2 utilizó 14 habilidades, 13 para la sección 11-3 y 7 para la 11-4.

Al comienzo de la actividad teníamos la expectativa de que todos los problemas y ejercicios inventados por los estudiantes los pudieran resolver correctamente, pero a la hora de revisar su resolución nos dimos cuenta que no necesariamente, los estudiantes de la sección 11-1 no dominaron los conocimientos de 2 habilidades, los de la sección 11-1 no dominaron 1, al igual que los estudiantes de la sección 11-4.

Los estudiantes de décimo nivel en el primer periodo desarrollan los conocimientos de Geometría, durante el segundo periodo los referidos a Relaciones y Álgebra, mientras que Estadística y Probabilidad lo deben abarcar en el tercer periodo. Esperábamos que la gran mayoría de los estudiantes se acordaran de los conocimientos vistos más recientemente (tercer periodo), pero no sucedió así, 7 habilidades específicas son de Geometría, 11 de Relaciones y

Álgebra, y solo una de Estadística, pero ninguna de Probabilidad, en la reunión con colegas aceptaron que en el curso anterior no se desarrollaron los conocimientos de Probabilidad.

Como dato curioso, algunos grupos utilizaron el nombre del profesor o su femenino en los contextos de sus problemas, esto debido a que el profesor acostumbra utilizar algunos nombres de los mismos cuando les brinda los problemas a trabajar en la clase.

Uno de los beneficios que generó esta actividad para la institución educativa fue el ahorro económico por el no uso de papel para fotocopiar los exámenes diagnósticos, simplemente fue necesario obtener las fotografías del cuaderno de uno de los integrantes de cada grupo.

Para futuras investigaciones sería interesante analizar a profundidad el tipo de problema y ejercicio confeccionados por los estudiantes para detectar estudiantes con talento matemático.

VIII. Referencias

Ayllón, M. F. (2012). Invención-resolución de problemas por alumnos de educación primaria. Granada, España: Editorial de la Universidad de Granada.

Ayllón, M. F. y Gómez, I. A. (2014). La invención de problemas como tarea escolar. Escuela Abierta, 17, 29-40.

Carballo, R. M. (2014). Diseño de pruebas para la evaluación diagnóstica en matemáticas. Una experiencia con profesores. Granada, España: Editorial de la Universidad de Granada.

Espinoza, J., Lupiañez, J. L. y Segovia, I. (2014). La invención de problemas y sus ámbitos de investigación en educación matemática. Revista digital Matemática, Educación e Internet, 14(2).

Fernández, J. A. (2001). Investigación sobre los efectos de la invención - reconstrucción de situaciones problemáticas, en el rendimiento de los alumnos para la resolución de problemas matemáticos. Educación y futuro: revista de investigación aplicada y experiencias educativas, 5, 21-30.

Malaspina, U. (2013). La creación de problemas de matemáticas en la formación de profesores. Acta VII CIBEM, 129-140. Montevideo: CIBEM.

Ministerio de Educación Pública-MEP (2012). Programas de estudio de matemáticas. I, II y III ciclos de Educación General Básica y ciclo diversificado. San José, Costa Rica.

Ministerio de Educación Pública-MEP (2013). Evaluación diagnóstica. San José, Costa Rica.

Ministerio de Educación Pública-MEP (2016). Reglamento de Evaluación de los Aprendizajes. San José, Costa Rica.

Zapatero, J. A., González, M. D. & Campos, A. (2017). Diseño y valoración de una investigación evaluativa. La enseñanza por competencias en Educación Física. Revista Electrónica Interuniversitaria de Formación del Profesorado, 20(1), 19-34.

IX. Anexos

Anexo 1: Habilidades específicas de Plantear y Resolver problemas

Del Programa de Estudio de Matemáticas

Nivel	Área	Conocimientos	Habilidades Específicas
3er	Números	Cálculos y estimaciones: Suma, Resta, Multiplicación y División.	Resolver y plantear problemas en los que se utilicen las operaciones: suma, resta, multiplicación y división.
3er	Geometría	Ángulos: Lado, Vértice, Agudo, Recto y Obtuso.	Plantear y resolver problemas que involucren los conceptos de lado, vértice, ángulo recto, ángulo obtuso, ángulo agudo.
3er	Geometría	Cuerpos sólidos Esfera: Radio y Diámetro Caja, y Cubo: Arista y Cara.	Plantear problemas con base en imágenes de cuerpos sólidos.
2do	Medidas	Capacidad: Litro, Estimación y Comparación.	Plantear y resolver problemas que involucren diferentes medidas.
3er	Medidas	Medidas: Longitud, Moneda, Masa, Tiempo y Capacidad.	Plantear problemas que utilicen diferentes tipos de medidas.
1er	Relaciones y Álgebra	Expresiones matemáticas: Signo de Igualdad y Representación de cantidades.	Plantear y resolver problemas contextualizados aplicando la representación de cantidades.
3er	Relaciones y Álgebra	Sucesiones: Patrones, Sucesiones ascendentes y Sucesiones descendentes.	Plantear y resolver problemas aplicando sucesiones y patrones
3er	Relaciones y Álgebra	Relaciones: Tablas y Valor faltante.	Plantear y resolver problemas que involucren valores faltantes en una tabla o expresión matemática
3er	Estadística y Probabilidad	Recolección de información: Observación e Interrogación.	Plantear problemas del contexto estudiantil que puedan abordarse por medio de recolección y análisis de datos.
4to	Números	Fracciones: Concepto, Escritura, Lectura, Fracción propia y Representaciones.	Plantear y resolver problemas que involucren fracciones propias.
4to	Números	Cálculos y estimaciones: Sumas, Restas, Multiplicaciones y Divisiones.	Resolver y plantear problemas donde se requiera el uso de la suma, la resta, la multiplicación y la división de números naturales.

4to	Números	Cálculos y estimaciones: Sumas, Restas, Multiplicaciones y Divisiones.	Resolver y plantear problemas donde se requiera el uso de la suma, la resta y la multiplicación de números con decimales
5to	Números	Operaciones: Propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma.	Plantear y resolver problemas utilizando la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma.
5to	Números	Cálculos y estimaciones: Sumas, Restas, Multiplicaciones y Divisiones.	Resolver y plantear problemas donde se requiera el uso de la suma, la resta, la multiplicación y división de números naturales y con decimales.
6to	Números	Cálculos y estimaciones: Sumas, Restas, Multiplicaciones, Divisiones y Potencias.	Resolver y plantear problemas donde se requiera el uso de la suma, la resta, la multiplicación y la división de fracciones y números con decimales.
5to	Geometría	Perímetro: Triángulos, Cuadrados, Rectángulos, Paralelogramos y Trapecios. Área: Triángulos, Paralelogramos y Trapecios.	Plantear problemas utilizando los conocimientos adquiridos de áreas y perímetros de figuras.
6to	Geometría	Simetría	Plantear problemas referidos a la simetría de figuras y a su reproducción.
6to	Medidas	Diversas medidas: Longitud - Nanómetro, Masa, Capacidad, Superficie, Tiempo, Temperatura, Moneda: colones, dólares, euros.	Plantear problemas contextualizados que involucren, para su solución, diversos tipos de medidas y sus respectivas conversiones
4to	Relaciones y Álgebra	Representaciones	Plantear y resolver problemas formulados verbalmente.
6to	Relaciones y Álgebra	Relaciones: Razón, Proporción directa, Porcentaje y Regla de tres	Plantear y resolver problemas aplicando porcentajes y regla de tres.
6to	Relaciones y Álgebra	Relaciones: Razón, Proporción directa, Porcentaje y Regla de tres	Plantear y resolver problemas aplicando proporcionalidad directa.
6to	Relaciones y Álgebra	Sucesiones	Plantear y resolver problemas aplicando sucesiones y patrones.
6to	Relaciones y Álgebra	Ecuaciones: Ecuaciones de primer grado	Plantear y resolver problemas aplicando ecuaciones de primer grado.
6to	Relaciones y Álgebra	Inecuación de primer grado	Plantear y resolver problemas aplicando inecuaciones de primer grado.

6to	Estadística y Probabilidad	Planteamiento y resolución de problemas	Plantear y resolver problemas vinculados con diferentes contextos utilizando análisis estadísticos.
7mo	Números	Mínimo Común Múltiplo y el Máximo Común Divisor.	Plantear y resolver problemas donde se utilice el Mínimo Común Múltiplo y el Máximo Común Divisor.
7mo	Números	Números enteros: Relaciones de orden	Plantear y resolver operaciones y problemas utilizando las relaciones de orden en los números enteros.
8vo	Números	Números racionales: operaciones.	Plantear y resolver problemas en los que se requiera de la aplicación de operaciones con números racionales.
9no	Geometría	Trigonometría: Radianes, Seno, Coseno, Tangente, Razones trigonométricas de ángulos complementarios, Ángulos de elevación y depresión, Ley de Senos.	Plantear problemas contextualizados que utilicen razones trigonométricas para su solución.
7mo	Relaciones y Álgebra	Sucesiones: Ley de formación y Patrones.	Plantear y resolver problemas relacionados con sucesiones y patrones.
8vo	Relaciones y Álgebra	Ecuaciones del primer grado con una incógnita.	Plantear y resolver problemas en contextos reales, utilizando ecuaciones de primer grado con una incógnita
9no	Relaciones y Álgebra	Ecuaciones de segundo grado con una incógnita.	Plantear y resolver problemas utilizando ecuaciones de segundo grado con una incógnita
9no	Relaciones y Álgebra	Función cuadrática.	Plantear y resolver problemas utilizando ecuaciones de segundo grado con una incógnita
8vo	Estadística y Probabilidad	Reglas básicas de probabilidad: La probabilidad de cualquier evento es un valor numérico entre 0 y 1. La probabilidad de un evento seguro es 1 y de un evento imposible es 0.	Plantear y resolver problemas vinculados con el cálculo de probabilidades.
11mo	Geometría	Transformaciones en el plano: Traslaciones, Reflexiones, Homotecias y Rotaciones.	Plantear ejercicios o problemas que involucren alguna transformación o transformaciones de figuras en el plano.
11mo	Geometría	Visualización espacial: Cono circular recto, Vértice, Base, Superficie	Plantear y resolver problemas que involucren secciones de un cono mediante planos paralelos a la base.

		lateral, Radio, Diámetro, Sección plana, Elipse, Parábola e Hipérbola.	
10mo	Relaciones y Álgebra	Función lineal y Función cuadrática.	Plantear y resolver problemas en contextos reales utilizando las funciones estudiadas
10mo	Relaciones y Álgebra	Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas	Plantear y resolver problemas en contextos reales, utilizando sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.
11mo	Relaciones y Álgebra	Funciones exponenciales: La función a^x , Ecuaciones exponenciales.	Plantear y resolver problemas en contextos reales utilizando ecuaciones exponenciales.
11mo	Relaciones y Álgebra	Funciones y modelización	Utilizar las funciones estudiadas para plantear y resolver problemas a partir de una situación dada.

Anexo 2. Habilidades Específicas de Décimo Nivel de Geometría

1. Representar gráficamente una circunferencia dado su centro y su radio.
2. Representar algebraicamente una circunferencia dado su centro y su radio.
3. Aplicar traslaciones a una circunferencia.
4. Resolver problemas relacionados con la circunferencia y sus representaciones.
5. Determinar gráfica y algebraicamente si un punto se ubica en el interior o en el exterior de una circunferencia.
6. Determinar si una recta dada es secante, tangente o exterior a una circunferencia.
7. Representar gráfica y algebraicamente rectas secantes, tangentes y exteriores a una circunferencia
8. Analizar geométrica y algebraicamente la posición relativa entre rectas en el plano desde el punto de vista del paralelismo y la perpendicularidad.

9. Aplicar la propiedad que establece que una recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio de la circunferencia en el punto de tangencia.
10. Utilizar software para representar circunferencias con condiciones dadas, representar traslaciones de circunferencias y clasificar rectas en secantes, tangentes y exteriores a la circunferencia.
11. Determinar la medida de perímetros y áreas de polígonos en diferentes contextos.
12. Determinar las medidas de los ángulos internos y externos de polígonos en diversos contextos.
13. Determinar la medida de la apotema y el radio de polígonos regulares y aplicarlo en diferentes contextos.
14. Calcular perímetros y áreas de polígonos no regulares utilizando un sistema de coordenadas rectangulares.
15. Resolver problemas que involucren polígonos y sus diversos elementos.
16. Estimar perímetros y áreas de figuras planas no poligonales utilizando un sistema de coordenadas rectangulares.
17. Utilizar software de geometría dinámica para estudiar propiedades y realizar conjeturas sobre las figuras geométricas.
18. Identificar el radio y el diámetro de una esfera.
19. Identificar la superficie lateral, las bases, la altura, el radio y el diámetro de un cilindro circular recto.
20. Determinar qué figuras se obtienen mediante secciones planas de una esfera o un cilindro y características métricas de ellas.
21. Reconocer elipses en diferentes contextos.

Anexo 3. Habilidades Específicas de Décimo Nivel de Relaciones y Álgebra

1. Analizar subconjuntos de los números reales.
2. Utilizar correctamente los símbolos de pertenencia y de subconjunto.
3. Representar intervalos numéricos en forma gráfica, simbólica y por comprensión.
4. Determinar la unión y la intersección de conjuntos numéricos.
5. Determinar el complemento de un conjunto numérico dado.
6. Identificar si una relación dada en forma tabular, simbólica o gráfica corresponde a una función.
7. Evaluar el valor de una función dada en forma gráfica o algebraica, en distintos puntos de su dominio.
8. Analizar una función a partir de sus representaciones.
9. Calcular la composición de dos funciones.
10. Representar gráficamente una función lineal.
11. Determinar la pendiente, la intersección con el eje de las ordenadas y de las abscisas de una recta dada, en forma gráfica o algebraica
12. Determinar la ecuación de una recta utilizando datos relacionados con ella.
13. Analizar gráfica y algebraicamente la función cuadrática con criterio $f(x) = ax^2 + bx + c$.
14. Plantear y resolver problemas en contextos reales utilizando las funciones estudiadas.
15. Relacionar la representación gráfica con la algebraica.
16. Analizar sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

17. Plantear y resolver problemas en contextos reales, utilizando sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Anexo 4. Habilidades Específicas de Décimo Nivel de Estadística y Probabilidad

1. Utilizar diferentes tipos de representaciones gráficas o tabulares para el análisis de datos cualitativos y favorecer la resolución de problemas vinculados con diversas áreas.
2. Resumir un grupo de datos mediante el uso de la moda, la media aritmética, la mediana, los cuartiles, el máximo y el mínimo, e interpretar la información que proporcionan dichas medidas.
3. Identificar la ubicación aproximada de las medidas de posición de acuerdo con el tipo de asimetría de la distribución de los datos.
4. Utilizar la calculadora o la computadora para calcular las medidas estadísticas correspondientes de un grupo de datos.
5. Determinar la media aritmética en grupos de datos que tienen pesos relativos (o ponderación) diferentes entre sí.

6. Utilizar la media aritmética ponderada para determinar el promedio cuando los datos se encuentran agrupados en una distribución de frecuencias.
7. Describir relaciones entre dos o más eventos de acuerdo con sus puntos muestrales, utilizando para ello las operaciones: unión “ \cup ”, intersección “ \cap ” y “complemento” e interpretar el significado dentro de una situación o experimento aleatorio.
8. Representar mediante diagramas de Venn las operaciones entre eventos.
9. Reconocer eventos mutuamente excluyentes en situaciones aleatorias particulares.
10. Deducir mediante situaciones concretas las reglas básicas (axiomas) de las probabilidades.
11. Deducir las propiedades relacionadas con la probabilidad de la unión y del complemento.
12. Aplicar los axiomas y propiedades básicas de probabilidades en la resolución de problemas e interpretar los resultados generados.
13. Utilizar probabilidades para favorecer la toma de decisiones en problemas vinculados con fenómenos aleatorios.

X. Índice de tablas

Tabla V.1: Informe de la Prueba Diagnóstica Sección 11-1.....	28
Tabla V.2: Informe de la Prueba Diagnóstica Sección 11-2.....	28
Tabla V.3: Informe de la Prueba Diagnóstica Sección 11-3.....	29
Tabla V.4: Informe de la Prueba Diagnóstica Sección 11-4.....	30
Tabla V.5: Informe de la Prueba Diagnóstica Secciones 11-1, 11-2, 11-3, 11-4.....	30
Tabla VII.1: Habilidades específicas más frecuentes por grupos.....	36
Anexo 1: Habilidades específicas de Plantear y Resolver problemas del Programa de Estudio de Matemáticas.....	41
Anexo 2. Habilidades Específicas de Décimo Nivel de Geometría.....	44
Anexo 3. Habilidades Específicas de Décimo Nivel de Relaciones y Álgebra.....	46
Anexo 4. Habilidades Específicas de Décimo Nivel de Estadística y Probabilidad.....	47

Índice de Figuras

Figura V.1: Fases de la Investigación Evaluativa.....	26
Figura V.2: Ejemplo de Problema de Relaciones y Álgebra	31
Figura V.3: Ejemplo de Ejercicio de Geometría	32
Figura V.3: Ejemplo de Problema de Estadística y Probabilidad.....	33