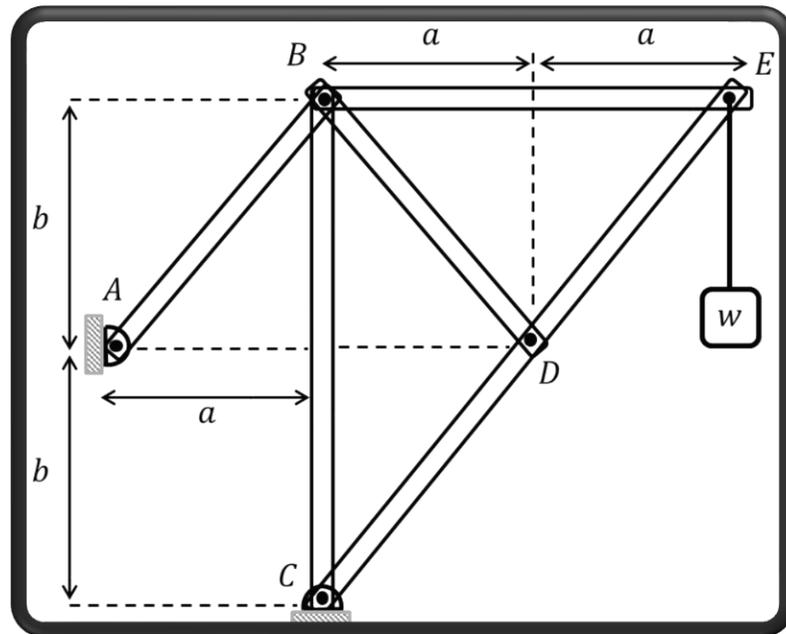


APUNTES DE ESTÁTICA

PARA INGENIEROS CONSTRUCTORES

Problemas Resueltos y Propuestos



Autor: Walter Lebrecht D-P.

Departamento de Ciencias Físicas, Facultad de Ingeniería y Ciencias
Universidad de La Frontera, 2022

CONTENIDOS

NOTA EDITORIAL	4
ATANDO CONCEPTOS	5
PARTE I. INTRODUCCION	
1.- Vectores y sus propiedades. Representación 2D y 3D.	6
2.- Definición de Fuerza.	17
3.- Definición de Torque y Sistemas Equivalentes.	28
Resultados de Aprendizaje	
a.- Aplicar el álgebra vectorial a magnitudes físicas que tienen esta característica.	
b.- Utilizar el álgebra vectorial para aplicarlos en los conceptos de fuerza y torque.	
c.- Analizar las fuerzas concurrentes sobre una partícula y determinar si está en reposo.	
PARTE II. EQUILIBRIO, PARTE UNO	
4.- Equilibrio de un cuerpo.	41
5.- Armaduras o estructuras. Método de los nudos y método de las secciones.	57
6.- Armazones simples.	72
Resultados de Aprendizaje	
d.- Determinar el equilibrio de fuerzas no concurrentes con y sin fricción en el cuerpo rígido.	
e.- Emplear el equilibrio de un cuerpo rígido en el problema de armaduras (estructuras) y armazones.	
f.- Calcular fuerzas externas e internas en armaduras usando método de los nudos y secciones.	
g.- Determinar fuerzas internas de tensión o compresión en el problema de armaduras.	
PARTE III. EQUILIBRIO, PARTE DOS	
7.- Fuerzas lineales distribuidas en vigas.	87
8.- Fuerzas y torques internos. Diagramas.	105
Resultados de Aprendizaje	
h.-Aplicar el equilibrio de un cuerpo rígido en el problema de vigas con fuerzas distribuidas lineales simples.	
i.- Determinar fuerzas axial, cortante y torque flector en el problema de fuerzas no concurrentes aplicadas a vigas.	
j.- Realizar diagramas de fuerza cortante y torque flector en vigas sometidas a fuerzas no concurrentes.	
PARTE IV. OTROS PROBLEMAS RELACIONADOS	
9.- Problemas propuestos suplementarios.	127

Este apunte de clases está dirigido a los estudiantes de la carrera de Ingeniería en Construcción de la Universidad de La Frontera que rinden la asignatura Física III o ICF 273. Este curso, lo ofrece el Departamento de Ciencias Físicas, está en el cuarto semestre de la carrera y los estudiantes no tienen como requisito el curso anterior de Física. La asignatura de Física III, aporta al perfil del Ingeniero Constructor a través de una formación básica en la estática de cuerpos rígidos, para iniciarlos más adelante, en la formación más especializada del **estudio de estructuras**.

El material docente que se presente a continuación, reúne un set de problemas resueltos y propuestos que han sido elegidos de libros clásicos de estática* para ingeniería, modificados por el autor y presentando nuevas versiones. Este trabajo ha sido un compromiso del autor con las distintas generaciones de estudiantes de la carrera, en beneficio de fortalecer, complementar y darle **mayor valor agregado a mejorar sus prácticas en el aula**. Contiene nueve temas, los cuales han sido estructurados en cuatro bloques. Básicamente, los tres primeros, están determinados por los contenidos esenciales de cada prueba parcial de la asignatura en condiciones normales. El último bloque, es una colección de problemas propuestos suplementarios, tipo examen y se identifica como noveno tema.

Este curso fue rediseñado el año 2014 por el autor, usando la idea de un **desarrollo progresivo de contenidos esenciales** que destacan los conceptos claves del equilibrio, usándolos en situaciones-problema y aplicaciones. En el apunte, se consideran estas ideas, incorporando un *super resumen* de los contenidos más fundamentales en cada tema y que el estudiante no puede olvidar y dejar pasar. Estos mismos elementos se aprovechan para resolver cada problema planteado en este material, donde se indica cuáles son los **conceptos previos** necesarios y su **resultado de aprendizaje** asociado.

El material docente en lo específico se puede describir de la siguiente manera. El primer bloque, llamado **Introducción**, contiene tres temas. El primer tema, es una caracterización de vectores en el plano y en tres dimensiones, el segundo tema está asociado al concepto de fuerza y finaliza el tercer tema con el concepto de torque y sistemas equivalentes. Se incluye una colección de **38 problemas** resueltos y propuestos que permiten al estudiante tener una idea de los contenidos esenciales para la primera evaluación parcial. Se incluyen acá, las situaciones-problema con cuerpos en reposo o equilibrio de fuerzas concurrentes.

El segundo bloque, llamado **Equilibrio, Parte Uno**, contiene tres temas. El primer tema desarrolla la idea de cuerpos en equilibrio estático o equilibrio de fuerzas no concurrentes, el segundo tema apunta a tratar de manera simple algunas estructuras o armaduras usando el método de los nudos y secciones y finalmente el tema tres incluye el desarrollo de armazones simples. Para reforzar estos contenidos, se incluye una colección de **34 problemas** resueltos y propuestos enfatizando los conceptos de la física usados en cada uno de ellos. Hasta acá llega la segunda evaluación parcial.

El tercer y último bloque, llamado **Equilibrio, Parte Dos**, contiene dos temas. El primero de ellos está relacionado con fuerzas distribuidas lineales simples en vigas, esto es, fuerzas que varían en función de la posición de manera constante, lineal o parabólica. Usando el concepto de sistema equivalente simple se puede tratar estas fuerzas como una fuerza puntual. El último tema de la asignatura y de este apunte, es el estudio de las fuerzas y torques internos, incorporando también los diagramas asociados. En total hay **32 problemas** resueltos y propuestos y con esto se completa la tercera evaluación parcial del curso.

Al final del curso, el estudiante debe mostrar la capacidad de identificar, entender, organizar conceptos de la física relacionados a elementos estructurales. De manera complementaria, adquiere la capacidad de calcular magnitudes físicas implicadas en situaciones de **equilibrio estático** fundamentalmente en estructuras, armazones y vigas. Los problemas suplementarios del bloque cuatro, permiten al estudiante realizar procesos de autoevaluación de los contenidos esenciales para garantizar su aprendizaje.

El autor

* R. C. Hibbeler, Bedford-Fowler, Beer-Johnston, Riley-Leroy, Meriam-Kraige, todos ellos de Estática.

El presente libro de apuntes está destinado a complementar los materiales de enseñanza de la asignatura de Física III de la carrera de Ingeniería en Construcción de la UFRO. El propósito central es disponer de un instrumento facilitador de aprendizaje significativo de los conocimientos conceptuales y metodológicos de estática de cuerpos rígidos, necesarios y esenciales para el estudio y formación profesional en estructuras mecánicas. El libro define un itinerario de aprendizaje progresivo, que combina una presentación conceptual sucinta de los contenidos de física con orientaciones metodológicas y estrategias de resolución problemas de estática, en coherencia con los resultados de aprendizaje declarados de la asignatura, y en la perspectiva del logro de los atributos del perfil de egreso, en el área de las estructuras.

(Auspicio)

Dirección de Carrera Ingeniería en Construcción
Dirección de Departamento de Ciencias Físicas
Facultad de Ingeniería y Ciencias
Gabinete de Rectoría

(Patrocinio)

Coordinación de desarrollo docente e innovación metodológica con TIC, VIPRE

(Colabora)

Dirección de Vinculación con el Medio, FICA
Imprenta Universitaria

(Revisores)

Profesores Francisco Peña Campos y Alfonso Llancaqueo Henríquez

NOTA EDITORIAL (2020)

Como Dirección de Carrera de Ingeniería en Construcción hemos tenido la oportunidad de acceder a un primer ejemplar del texto “Apuntes de Estática para Ingenieros Constructores, Problemas resueltos y propuestos” de autoría del Profesor Walter Lebrecht Díaz-Pinto. Este texto está basado **en las clases de Física III** del Departamento de Ciencias Físicas de la Universidad de La Frontera e impartidas por el Profesor Lebrecht para la carrera de Ingeniería en Construcción desde el año 2013.

En el transcurso de aproximadamente **siete años** el curso ha mejorado sus implementaciones metodológicas, adecuado contenidos y el material pedagógico para **facilitar el aprendizaje** y hacerlo más **pertinente a la profesión de la Ingeniería en Construcción**. El texto “Apuntes de Estática para Ingenieros Constructores, Problemas resueltos y propuestos” recoge las mejoras implementadas en el proceso de formación a través de una **metodología progresiva que parte de contenidos esenciales de la estática** para finalizar en un estado de mayor integración que permite a los estudiantes cumplir con el análisis estructural de cursos superiores.

El texto aporta una **gran cantidad de problemas resueltos** que permiten aumentar la capacidad del estudiante para identificar, comprender y organizar los conceptos de la estática de elementos rígidos en forma eficiente. Ciertamente este es un **texto hecho a la medida del proceso formativo y siguiendo la tendencia de innovación de carrera de Ingeniería en Construcción**; sin embargo, los conceptos abordados y la metodología implementada puede ser replicable en cualquier carrera del área de ingeniería que busque un dominio en el ámbito de la estática de sólidos y elementos estructurales.

En particular, el texto propuesto por el profesor Lebrecht, **es un aporte sustancial al desarrollo pedagógico de la carrera**, agrupando en un solo texto los contenidos esenciales y desarrollándolos a través de 116 problemas resueltos de complejidad progresiva de acuerdo a un avance semestral. De esta manera, las 134 páginas del texto serán un material de consulta indispensable para nuestros estudiantes durante su plan de estudios.

Dr. Leonardo Sierra Varela
Director Carrera Ing. en Construcción
Universidad de La Frontera

ATANDO CONCEPTOS

- **Vectores**, otra forma de realizar operaciones básicas de suma, resta y producto de magnitudes físicas.
- **Fuerza**, definición basado en la primera y tercera ley de Newton. El reposo se describe por la primera ley de Newton (equilibrio de fuerzas concurrentes). Se requieren conceptos de las Leyes de Newton.
- **Torque**, medida rotacional de la fuerza a través de un producto vectorial. Se requieren conceptos de fuerza y producto vectorial.
- **Sistema equivalente**, es la representación a través de una fuerza puntual de un sistema de fuerzas. Se requieren los conceptos de fuerza y torque.
- **Equilibrio estático**, se trata de equilibrio de fuerzas no concurrentes. Se requieren conceptos de fuerza, torque y resultante nula de un sistema de fuerzas.
- **Armaduras (estructuras)**, cuerpo rígido sometido a fuerzas externas en los nudos. El método de los nudos está basado en fuerzas concurrentes (tercera ley de Newton). El método de las secciones está basado en fuerzas no concurrentes. Se requiere el concepto de equilibrio estático.
- **Armazones**, cuerpo rígido sometido a fuerzas externas. Se requieren conceptos de equilibrio estático y tercera ley para analizar las fuerzas internas en las juntas o nudos.
- **Fuerzas distribuidas lineales**, se define a través del concepto de sistema equivalente más simple y aplicado a vigas y armazones. Se requiere conceptos de cálculo integral, ecuación de la recta, ecuación de la parábola y equilibrio estático en vigas y armazones.
- **Fuerzas y torques internos**, aplicado a vigas y armazones y usando la tercera ley de Newton se interpretan las fuerzas internas en el corte virtual. Se muestra un esquema gráfico del comportamiento a través de la viga. Se requiere equilibrio estático, armazones y fuerzas distribuidas lineales.

De acuerdo a lo anterior, queda demostrado que el curso se centra en dos conceptos claves que son **Fuerza y Torque**. Estos conceptos están definidos para entender el **equilibrio de un cuerpo rígido**. Un cuerpo rígido puede ser una varilla, una viga, un conjunto de varillas que conforman un cuerpo rígido o sólido. A este cuerpo rígido se le aplican cargas o fuerzas externas que lo mantienen en equilibrio estático a través de pasadores o soportes. El curso no desarrolla un tema relacionado a centros de gravedad y se asume que el estudiante lo conoce y puede aplicarlo a cuerpos regulares que se utilizan en este curso.

PARTE I. INTRODUCCIÓN.

El estudiante que inscribe esta asignatura, en la primera clase debe tener claro que es necesario entender y utilizar dos conceptos esenciales que son **Fuerza y Torque** y todo lo que ello significa desde el punto de vista de la **Física**. Por un lado, está todo lo relacionado a sus características vectoriales, como también su relación con el equilibrio de una partícula o de un cuerpo rígido.

Todo el curso estará girando en torno de estos conceptos y por lo tanto son claves en el desarrollo de esta asignatura. Para comenzar a estructurar tales conceptos, iniciemos con algunos contenidos **esenciales de vectores**.

1.- Vectores y sus propiedades. Representación 2D y 3D.

Un vector \vec{F} es una **representación gráfica o analítica** de una magnitud física y mantiene sus unidades de medida. Como es bien sabido tiene tres elementos, tamaño o módulo, dirección y sentido. Usando coordenadas ortogonales cartesianas, la representación analítica de un vector 2D (dos dimensiones) se puede expresar como la combinación lineal de sus **componentes canónicas** f_x y f_y en función de sus vectores unitarios \hat{i} , \hat{j} asociados al sistema coordenado cartesiano de la siguiente manera:

$$\vec{F} = f_x \hat{i} + f_y \hat{j}$$

$$\|\vec{F}\| = F = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} \rightarrow \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{f_y}{f_x}\right),$$

donde F es el módulo del vector (acá se incorpora la unidad de medida) y α es el ángulo que indica la dirección y sentido del vector asociado al eje x . En una representación 3D, esta última idea se puede redefinir en términos del **vector unitario** asociado a cada vector, expresado como sigue:

$$\hat{u} = \frac{\vec{F}}{F}$$

siendo un vector sin dimensiones y relacionado con la **dirección y sentido medido respecto de sus ejes coordenados** (x, y, z) como se muestra a continuación.

$$\hat{u} = \frac{\vec{F}}{F} = \frac{f_x \hat{i} + f_y \hat{j} + f_z \hat{k}}{F} = \frac{f_x}{F} \hat{i} + \frac{f_y}{F} \hat{j} + \frac{f_z}{F} \hat{k} = \cos\alpha \hat{i} + \cos\beta \hat{j} + \cos\gamma \hat{k}$$

$$\rightarrow \cos\alpha = \frac{f_x}{F}, \rightarrow \cos\beta = \frac{f_y}{F}, \rightarrow \cos\gamma = \frac{f_z}{F}$$

Se debe entender que los ángulos α, β, γ se miden respecto de cada eje coordenado x, y, z respectivamente y elevando al cuadrado el módulo del vector unitario se obtiene la **ley de cosenos directores**.

$$\hat{u} = \cos\alpha \hat{i} + \cos\beta \hat{j} + \cos\gamma \hat{k} \rightarrow \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Cuando $\gamma = 90^\circ$, es decir, el vector es 2D, se obtiene la fórmula básica trigonométrica $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Un vector unitario, además de caracterizar la dirección y sentido de un vector 3D, permite **determinar la recta que une dos puntos**. Para ello, sea un vector cuyo punto de inicio es $A(x_1, y_1, z_1)$ y su punto final es $B(x_2, y_2, z_2)$ lo cual determina un vector de posición \vec{A} cuya representación vectorial es.

$$\vec{A} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

De este modo, el vector unitario orientado en la recta que representa la recta corresponde a:

$$\hat{A} = \frac{(x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}$$

Es interesante recordar el producto de dos vectores en este apunte, dado que el **producto escalar** se asocia con la **proyección** de un vector sobre otro o con una recta (eje). Por otro lado, el **producto vectorial** tiene que ver con el cálculo directo de **torques** como se verá más adelante.

Recordemos que el producto de dos vectores \vec{A} y \vec{B} cualquiera puede ser un escalar o bien un vector. En el primer caso, se define **producto escalar** conocidos los módulos de los vectores y el ángulo entre ellos, como:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \alpha$$

y cuando son conocidos sus componentes, es simple demostrar que es un **producto directo** entre ellos.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}) \cdot (b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Para entender el concepto de **proyección** utilizando el **producto escalar**, veamos la Fig. 1. En ésta existen tres rectas y cuatro puntos en el espacio indicados por las letras A, B, C y D . Las líneas segmentadas son perpendiculares a las rectas respectivas. La proyección es el valor de la **distancia** desde A hasta el punto de corte en la recta por las líneas segmentadas. Usualmente este valor se define como el valor absoluto, para definirlo como **positivo**.

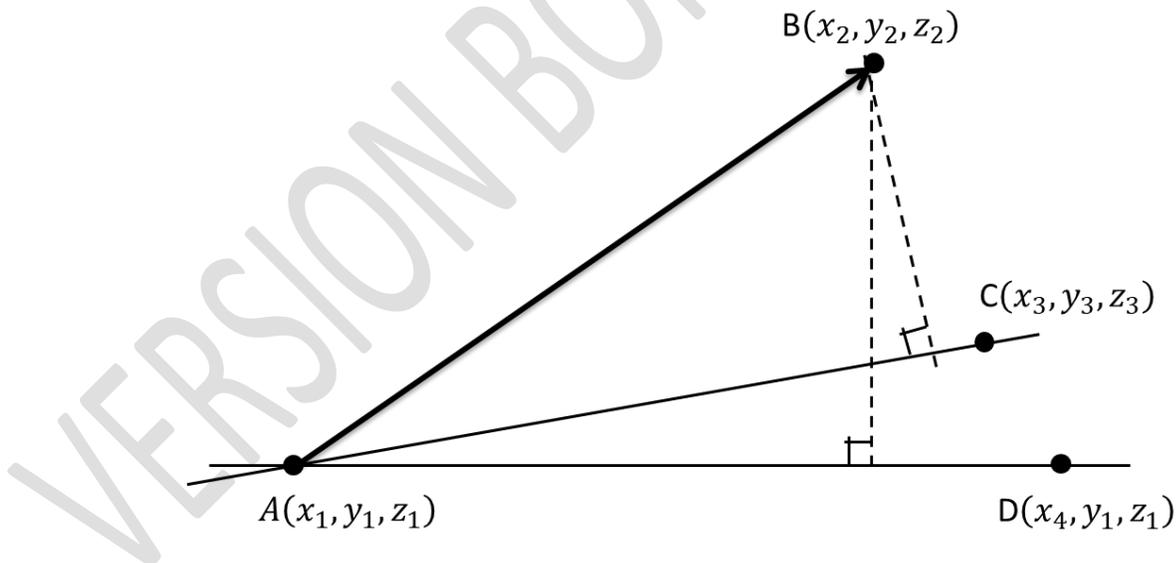


Fig.1: A, B, C y D representan 4 puntos del espacio y definen las rectas \overline{AB} , \overline{AC} y \overline{AD} que es unidimensional respecto de A .

Sea el vector \vec{A} que une los puntos desde A hasta B , como fue definido anteriormente:

$$\vec{A} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

Para determinar la proyección del vector \vec{A} sobre cada recta \overline{AC} y \overline{AD} es necesario **determinar** un vector unitario que **represente** las rectas. Este vector unitario se calcula como:

$$\text{Recta } \overline{AD} \rightarrow \hat{\mu}_{AD} = \frac{\overline{AD}}{\|\overline{AD}\|} = \frac{(x_4 - x_1)}{\sqrt{(x_4 - x_1)^2}} \hat{i} = \hat{i}$$

$$\text{Recta } \overline{AC} \rightarrow \hat{\mu}_{AC} = \frac{(x_3 - x_1)\hat{i} + (y_3 - y_1)\hat{j} + (z_3 - z_1)\hat{k}}{\sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2}}$$

De este modo, la proyección sobre las rectas es:

$$\text{Recta } \overline{AD} \rightarrow \text{proy}_{\hat{\mu}_{AD}} = |\vec{A} \cdot \hat{\mu}_{AD}| = \vec{A} \cdot \hat{i} = (x_2 - x_1)$$

$$\text{Recta } \overline{AC} \rightarrow \text{proy}_{\hat{\mu}_{AC}} = |\vec{A} \cdot \hat{\mu}_{AC}| = \frac{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1) + (y_2 - y_1)(y_3 - y_1) + (z_2 - z_1)(z_3 - z_1)}{\sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2}}$$

Esto es, la proyección representa un valor **positivo de la componente de un vector** a lo largo de una dirección determinada por la recta, dirección que a su vez está determinado por un vector unitario. Así, por ejemplo, si un vector es $\vec{F} = -3\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ (N) entonces la proyección sobre el *eje x* es 3.

Siguiendo con el producto de vectores, corresponde recordar el segundo caso, el **producto vectorial**. Acá, el **módulo del vector resultante** se define en términos de los módulos de los vectores producto y el ángulo entre ellos. Así:

$$\|\vec{A} \times \vec{B}\| = \|\vec{C}\| = AB \text{sen} \alpha$$

donde el módulo del vector resultante representa el **área del paralelogramo** formado por los vectores. Sin embargo, para complementar la definición anterior y determinar el vector resultante se debe considerar: a) que la dirección del vector resultante es **perpendicular al plano** que generan los vectores producto y b) que el sentido del vector resultante es **cíclico** considerando que $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$.

Cuando se conocen las componentes de los vectores, se tiene:

$$\vec{A} \times \vec{B} = (a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}) \times (b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k})$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = (a_y b_z - a_z b_y) \hat{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \hat{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \hat{k} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Para cerrar las ideas anteriores respecto de la representación vectorial, el estudiante debe **operar** el álgebra vectorial en sus funciones básicas de suma, resta y producto. Además, debe ser capaz de calcular proyecciones y ángulos utilizando los conceptos desarrollados anteriormente.

Problemas Resueltos de Vectores.

1.1.- Determinar el vector de posición que va desde el punto $A(2,1,0)$ (m) hasta el punto $B(0,3,2)$ (m).

Resolución del problema

Conceptos previos.

a) Vector 3D y b) Diferencia de dos vectores 3D.

Resultado de aprendizaje.

Usar la operación resta para representar un vector 3D en sus componentes canónicas.

De acuerdo con lo anterior se tiene.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= (0\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}) - (2\hat{i} + \hat{j} + 0\hat{k}) \\ \overrightarrow{AB} &= -2\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k} \text{ (m)}\end{aligned}$$

----- Fin del problema -----

1.2.- Determinar la representación vectorial de la fuerza de módulo 100 (N) aplicada en el punto B de la Fig. 1.1.

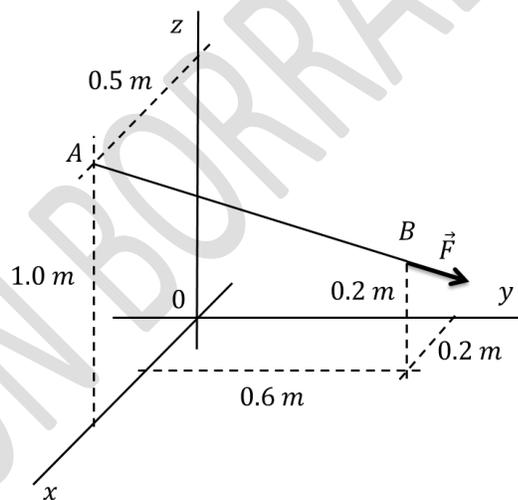


Fig. 1.1.

Resolución del problema

Conceptos previos.

a) vector unitario y b) a-dimensionalidad del vector unitario.

Resultado de aprendizaje.

Determinar la representación de un vector 3D usando el concepto de vector unitario.

De acuerdo con estos conceptos previos, se puede escribir que $\vec{F} = \|\vec{F}\|\hat{u} = 100\hat{u}$ (N). Por otro lado, como la fuerza tiene la misma dirección y sentido que el vector de posición \overrightarrow{AB} , entonces:

$$\overrightarrow{AB} = (0.2\hat{i} + 0.6\hat{j} + 0.2\hat{k}) - (0.5\hat{i} + 0.0\hat{j} + 1.0\hat{k}) = -0.3\hat{i} + 0.6\hat{j} - 0.8\hat{k} \text{ (m)}$$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{0.3^2 + 0.6^2 + 0.8^2} = 1.04 \text{ (m)}$$

Y el vector unitario asociado a este es:

$$\hat{\mu} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{-0.3\hat{i} + 0.6\hat{j} - 0.8\hat{k}}{1.04} = -0.29\hat{i} + 0.58\hat{j} - 0.77\hat{k}$$

Por lo tanto, $\vec{F} = \|\vec{F}\|\hat{\mu} = 100(-0.29\hat{i} + 0.58\hat{j} - 0.77\hat{k}) \rightarrow \vec{F} = -29\hat{i} + 58\hat{j} - 77\hat{k} \text{ (N)}$

----- Fin del problema -----

1.3.- Determinar la representación vectorial de los vectores \vec{F}_1 y \vec{F}_2 mostrados en la Fig. 1.2 y luego realice la operación suma de ellos. Considere que el módulo de los vectores es 150 (N) y 120 (N) respectivamente.

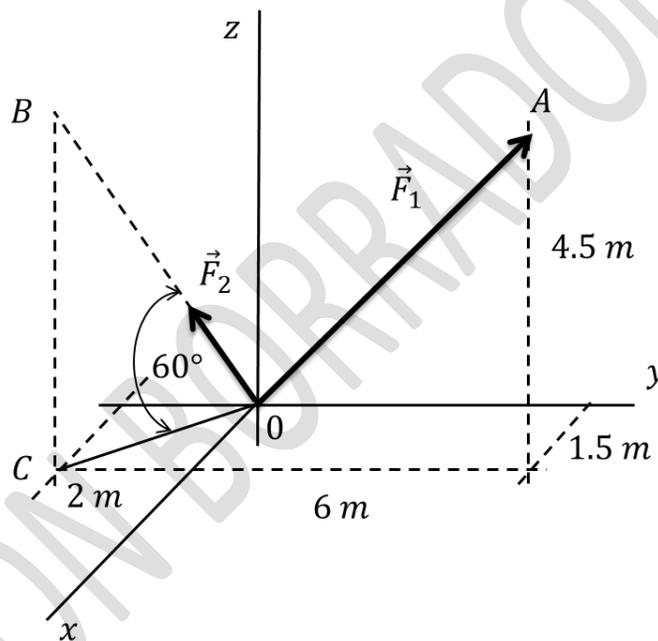


Fig. 1.2.

Resolución del problema

Conceptos previos.

a) Diferencia de vectores, b) vector unitario y c) Funciones trigonométricas.

Resultado de aprendizaje.

Calcular la representación 3D de vectores usando el vector unitario.

La representación vectorial de \vec{F}_1 se puede realizar usando el vector unitario asociado a la recta \overline{OA} de la siguiente manera:

$$\vec{F}_1 = \|\vec{F}_1\|\hat{\mu}_1 \rightarrow \overline{OA} = 1.5\hat{i} + 6\hat{j} + 4.5\hat{k} \text{ (m)} \rightarrow \|\overline{OA}\| = 7.65 \text{ (m)}$$

$$\hat{\mu}_1 = \frac{\vec{OA}}{\|\vec{OA}\|} \rightarrow \hat{\mu}_1 = 0.20\hat{i} + 0.78\hat{j} + 0.59\hat{k} \rightarrow \vec{F}_1 = 30\hat{i} + 117\hat{j} + 89\hat{k} \text{ (N)}$$

Para determinar la representación vectorial de \vec{F}_2 , se debe calcular la coordenada del punto B y determinar el vector unitario asociado a la recta \overline{OB} utilizando el procedimiento descrito antes. Para determinar la coordenada de B se usan las funciones trigonométricas en el triángulo OCB que es rectángulo en C . Por lo tanto:

$$(\overline{OC})^2 = 2^2 + (1.5)^2 \rightarrow \overline{OC} = 2.5 \text{ (m)}$$

Por otro lado,

$$\tan 60^\circ = \frac{\overline{BC}}{2.5} \rightarrow \overline{BC} = 4.3 \text{ (m)}$$

Así:

$$\vec{F}_2 = \|\vec{F}_2\|\hat{\mu}_2 \rightarrow \overline{OB} = 1.5\hat{i} - 2\hat{j} + 4.3\hat{k} \text{ (m)} \rightarrow \|\overline{OB}\| = 5 \text{ (m)}$$

$$\hat{\mu}_2 = \frac{\overline{OB}}{\|\overline{OB}\|} \rightarrow \hat{\mu}_2 = 0.30\hat{i} - 0.40\hat{j} + 0.86\hat{k} \rightarrow \vec{F}_2 = 36\hat{i} - 48\hat{j} + 103\hat{k} \text{ (N)}$$

Finalmente, la suma es:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 66\hat{i} + 69\hat{j} + 192\hat{k} \text{ (N)}$$

----- Fin del problema -----

1.4.- Una recta pasa por los puntos $A(-1,1)$ (m) y $B(2,2)$ (m) del plano cartesiano con origen en 0 como muestra la Fig. 1.3.

- Calcular la proyección del vector \vec{r}_B sobre la recta.
- Determinar la distancia más corta entre el origen 0 y la recta.

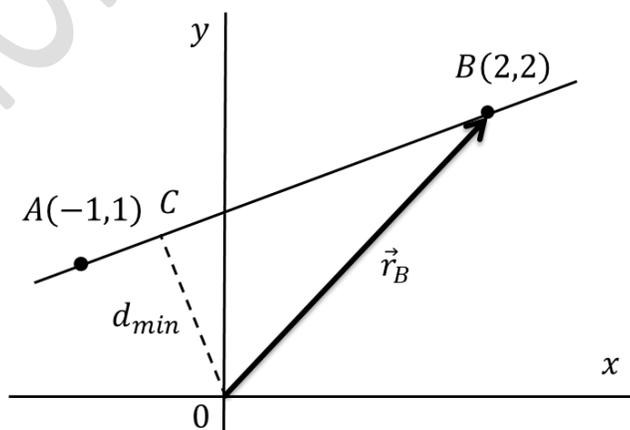


Fig. 1.3.

Resolución del problema

Conceptos previos.

a) Diferencia de vectores, b) vector unitario y c) Teorema de Pitágoras.

Resultado de aprendizaje.

Calcular la proyección de un vector sobre una recta utilizando un vector unitario.

a) Se parte por obtener un vector unitario que represente la recta que pasa por los puntos AB, esto es:

$$\vec{AB} = (2\hat{i} + 2\hat{j}) - (-\hat{i} + \hat{j}) = 3\hat{i} + \hat{j} \text{ (m)} \quad \rightarrow \|\vec{AB}\| = \sqrt{10} \text{ (m)} \quad \rightarrow \hat{\mu}_{AB} = \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|} = \frac{3\hat{i} + \hat{j}}{\sqrt{10}}$$

A continuación, se realiza la representación vectorial del punto B respecto del origen, siendo $\vec{r}_B = 2\hat{i} + 2\hat{j} \text{ (m)}$. Ahora se realiza la proyección del vector en la recta de acuerdo a las definiciones anteriores, esto es:

$$\text{proy}_{\vec{r}_{B(AD)}} = |\vec{r}_B \cdot \hat{\mu}_{AB}| = (2\hat{i} + 2\hat{j}) \cdot \left(\frac{3\hat{i} + \hat{j}}{\sqrt{10}}\right) = \frac{8}{\sqrt{10}} \text{ (m)}$$

b) Dado que la distancia \overline{CB} representa la proyección del vector \vec{r}_B obtenida anteriormente y usando su módulo, entonces de acuerdo al teorema de Pitágoras se tiene:

$$\left(\text{proy}_{\vec{r}_{B(AD)}}\right)^2 + d_{min}^2 = \|\vec{r}_B\|^2 \quad \rightarrow d_{min}^2 = 8 - \frac{64}{10} = \frac{16}{10} \quad \rightarrow d_{min} = \frac{4}{\sqrt{10}} \text{ (m)}$$

----- Fin del problema -----

1.5.- Una fuerza de módulo $F = 10\sqrt{29} \text{ (N)}$ se aplica a lo largo de la diagonal de un paralelepípedo de lados $(2,4,3) \text{ (m)}$, como lo muestra la Fig. 1.4. Los puntos a y b son puntos medios de sus respectivos lados. Calcular:

- a) Representación vectorial de la fuerza.
- b) Proyección de la fuerza en la recta que une los puntos a y b .

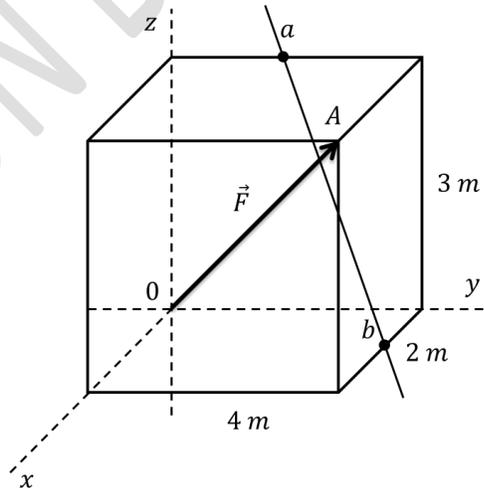


Fig. 1.4.

Resolución del problema

Conceptos previos.

- a) Vector unitario, b) a-dimensionalidad del vector unitario y c) proyección de un vector.

Resultado de aprendizaje.

Calcular la proyección de un vector sobre una recta utilizando un vector unitario y la representación vectorial.

a) Dado que se puede escribir $\vec{F} = \|\vec{F}\|\hat{\mu} = 10\sqrt{29}\hat{\mu} (N)$, entonces se puede establecer que la dirección y sentido de este vector, está en el vector unitario. Una forma de calcular el vector unitario es a través del vector de posición que va desde el origen $O(0,0,0)$ hasta el punto $A(2,4,3)(m)$. Como el vector unitario tiene la característica de ser a-dimensional, se tiene:

$$\vec{OA} = (2\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}) - (0\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k}) = 2\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}(m) \rightarrow \|\vec{OA}\| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 3^2} = \sqrt{29} (m)$$

$$\hat{\mu} = \frac{\vec{OA}}{\|\vec{OA}\|} = \frac{2\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}}{\sqrt{29}} \rightarrow \vec{F} = 10\sqrt{29} \left(\frac{2\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}}{\sqrt{29}} \right) (N)$$

De esta forma, la representación vectorial de la fuerza \vec{F} es:

$$\vec{F} = 20\hat{i} + 40\hat{j} + 30\hat{k} (N)$$

b) Para determinar la proyección del vector \vec{F} sobre la recta ab , se necesita un vector unitario que la represente, por lo tanto:

$$\vec{ab} = (\hat{i} + 4\hat{j} + 0\hat{k}) - (0\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k} (m) \rightarrow \|\vec{ab}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14} (m)$$

$$\hat{\mu}_{ab} = \frac{\vec{ab}}{\|\vec{ab}\|} = \frac{\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}}{\sqrt{14}}$$

De esta forma, se tiene:

$$proy_{\vec{F}(\vec{ab})} = |\vec{F} \cdot \hat{\mu}_{ab}| = (20\hat{i} + 40\hat{j} + 30\hat{k}) \cdot \left(\frac{\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}}{\sqrt{14}} \right) = \frac{20 + 80 - 90}{\sqrt{14}} = \frac{10}{\sqrt{14}} (N)$$

----- Fin del problema -----

1.6.- Considere los siguientes vectores $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k} (m)$ y $\vec{b} = 5\hat{i} - 2\hat{j} (m)$. En estas condiciones calcule:

- Proyección respecto del eje y del vector \vec{a} .
- Componente x del vector \vec{b} .
- Producto escalar.
- Producto vectorial.
- Ángulo entre los vectores.
- Ángulo respecto de los ejes coordenados del vector perpendicular al plano que genera \vec{a} y \vec{b} .

Resolución del problema

Conceptos previos.

a) Proyección de un vector sobre una recta, b) producto de vectores y c) vector unitario en función de los cosenos.

Resultado de aprendizaje.

Determinar ángulos entre vectores y respecto de ejes coordenados usando álgebra vectorial.

a) La proyección se puede leer directamente del vector \vec{a} , dado que corresponde a la *componente y* del vector y corresponde al valor **3 (m)**.

b) Del mismo modo, la *componente x* del vector \vec{b} , corresponde a la proyección respecto de ese eje cuyo valor es **5 (m)**.

c) De acuerdo a la definición (cuando los vectores están en componentes), se tiene:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (2\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}) \cdot (5\hat{i} - 2\hat{j} + 0\hat{k}) = 10 - 6 + 0 = \mathbf{4 \text{ (m}^2\text{)}}$$

d) De acuerdo a la definición (cuando los vectores están en componentes), se tiene:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & -2 \\ 5 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -4\hat{i} - 10\hat{j} - 19\hat{k} \text{ (m}^2\text{)}$$

e) En función del producto escalar, se tiene:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \alpha \quad \rightarrow 4 = \sqrt{17} \sqrt{29} \cos \alpha \quad \therefore \alpha = \mathbf{79.6^\circ}$$

Si se quisiera usar la función producto vectorial, se tiene:

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = ab \sin \alpha \quad \rightarrow 21.8 = \sqrt{17} \sqrt{29} \sin \alpha \quad \therefore \alpha = \mathbf{79.1^\circ}$$

f) De acuerdo a la definición de producto vectorial, el vector $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ es perpendicular al plano que generan los vectores \vec{a} y \vec{b} , por lo tanto $\vec{c} = -4\hat{i} - 10\hat{j} - 19\hat{k}$. Por otro lado, para determinar los ángulos que este vector posee respecto de los ejes coordenados se usa el vector unitario asociado a este, es decir:

$$\hat{c} = \frac{\vec{c}}{\|\vec{c}\|} = \frac{-4\hat{i} - 10\hat{j} - 19\hat{k}}{\sqrt{477}} = -\frac{4}{\sqrt{477}}\hat{i} - \frac{10}{\sqrt{477}}\hat{j} - \frac{19}{\sqrt{477}}\hat{k}$$

Comparando con:

$$\hat{u} = \cos \alpha \hat{i} + \cos \beta \hat{j} + \cos \gamma \hat{k}$$

Se tiene finalmente que,

$$\cos \alpha = -\frac{4}{\sqrt{477}} \quad \therefore \alpha = \mathbf{100.6^\circ} \quad \rightarrow \cos \beta = -\frac{10}{\sqrt{477}} \quad \therefore \beta = \mathbf{117.2^\circ} \quad \rightarrow \cos \gamma = -\frac{19}{\sqrt{477}} \quad \therefore \gamma = \mathbf{150.5^\circ}$$

----- Fin del problema -----

Problemas Propuestos de Vectores.

1.7.- Dos rectas \overline{AB} y \overline{CD} medidas en (m) están definidas por cuatro puntos $A(0,2,1)$, $B(2,1,3)$, $C(-1,0,0)$ y $D(2,2,2)$. Determinar la proyección del vector \overline{AB} sobre la recta \overline{CD} y la proyección del vector \overline{CD} sobre la recta \overline{AB} .

Respuestas: **Evaluación concepto de representación vectorial, vector unitario y proyección**

$$proy_{\overline{AB}(\overline{AC})} = 1.94 \text{ (m)} \quad \rightarrow \quad proy_{\overline{AC}(\overline{AB})} = 2.67 \text{ (m)}$$

1.8. El alambre de una torre está anclado en el punto A por medio de un perno. La tensión del alambre es 2.5 (kN) . Calcular:

- El vector tensión aplicado en el punto B de la torre en términos de los vectores unitarios.
- Los ángulos que definen el sentido y la dirección de la tensión aplicada en el perno A , respecto de los ejes coordenados definidos en la Fig. 1.5.

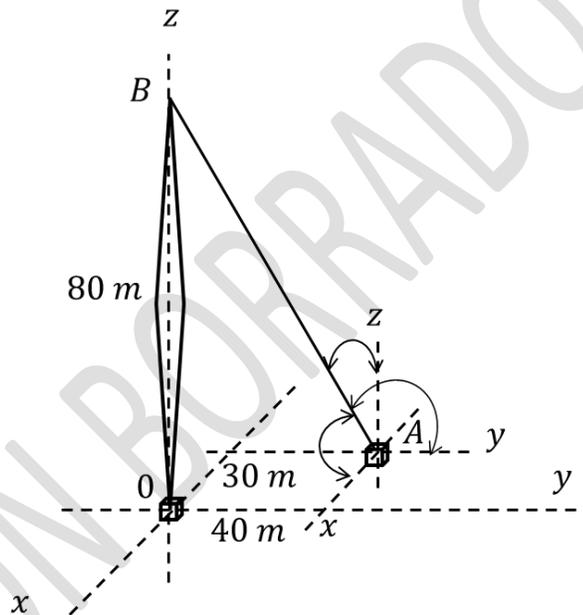


Fig. 1.5.

Respuestas: **Evaluación concepto de vector unitario**

$$\vec{T}_B = -795\hat{i} + 1060\hat{j} - 2120\hat{k} \text{ (N)} \quad \rightarrow \quad \alpha = 72^\circ, \beta = 115^\circ, \gamma = 32^\circ$$

- 1.9.- El cable AB de la Fig. 1.6 tiene una tensión de 2 (kN), siendo $\overline{OC} = \overline{CD} = 0.6$ (m). Determinar:
 a) La representación vectorial de la tensión aplicada en el punto A en términos de los vectores unitarios.
 b) La proyección de la tensión sobre la recta \overline{BC} .

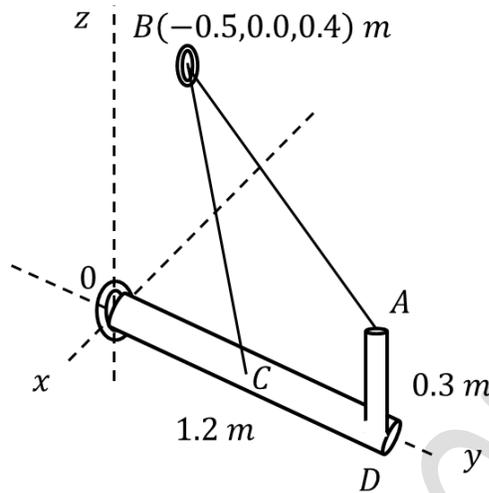


Fig. 1.6.

Respuestas: **Evaluación concepto de vector unitario y proyección**

$$\vec{T}_A = -0.76\hat{i} - 1.84\hat{j} + 0.16\hat{k} \text{ (kN)} \rightarrow \text{proy}_{T_{A(\overline{BC})}} = 1.75 \text{ (kN)}$$

- 1.10.- El cable BC de la Fig. 1.7 tiene una tensión de 750 (N).
 a) Determine la representación vectorial de la tensión aplicada en el punto B en términos de los vectores unitarios.
 b) Calcule la proyección de la tensión sobre la recta \overline{AC} , no indicada en la figura.

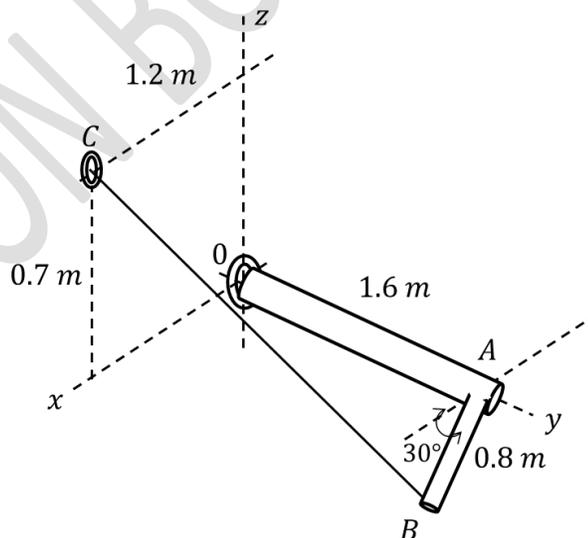


Fig. 1.7.

Respuestas: **Evaluación concepto de vector unitario y proyección.**

$$\vec{T}_B = 195\hat{i} - 600\hat{j} + 413\hat{k} \text{ (N)} \rightarrow \text{proy}_{T_{B(\overline{AC})}} = 700 \text{ (kN)}$$

2.- Definición de Fuerza.

“Que la fuerza te acompañe siempre, para que tu vida esté siempre en equilibrio”

El concepto de fuerza es el resultado de una **interacción** y para exista, se debe pensar en que este proceso se lleva a cabo entre dos cuerpos u objetos. Como es bien sabido, el estudio de las fuerzas, fue realizado por Isaac Newton que culminó con sus tres leyes. En este apunte, sólo es necesario mencionar la primera y tercera ley, dado que no estamos interesados en el movimiento de cuerpos y sólo se estudiará el **equilibrio** de ellos. Para entender las leyes de Newton es necesario poner en claro que significa **fuerza neta**, dado que cada ley la menciona. En la práctica, fuerza neta es **sumatoria vectorial** de fuerzas aplicadas sobre un cuerpo, dado que en esencia la fuerza es un vector.

La **primera ley** de Newton (ley de la inercia) menciona que ocurre cuando la fuerza neta es nula sobre un cuerpo, en este caso, el cuerpo puede estar en reposo o con movimiento uniforme rectilíneo. Es decir:

$$\vec{F}_N = \sum \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_i = \vec{0} \begin{cases} \vec{v} = \vec{0} \\ \vec{v} = cte \end{cases}$$

La **tercera ley** de Newton (ley de acción y reacción) a juicio del autor es la definición conceptual de la fuerza, incluyendo el concepto de interacción mencionado más arriba. Esto permite predecir el comportamiento dual de la fuerza o que aparecen de a pares (El lado de la luz y el lado oscuro).

Una definición estratégica tiene que ver con que las **fuerzas** pueden ser **concurrentes** cuando son aplicadas sobre un cuerpo. En este caso, el objeto no es capaz de rotar y por lo tanto basta aplicar la primera ley de Newton para determinar el estado de equilibrio de este. Sin embargo, cuando las fuerzas **no son concurrentes**, el cuerpo puede girar y es necesario un nuevo concepto para determinar el equilibrio como se verá más adelante.

Quizás vale la pena recordar la definición operativa de la fuerza de roce estático. Lo más significativo en este caso es que se trata de una fuerza variable por su definición en términos de su desigualdad y varía en forma lineal hasta un máximo. Es proporcional con el coeficiente de roce estático μ_e y la fuerza normal \vec{N} .

$$\|\vec{F}_r\| \leq \mu_e \|\vec{N}\|$$

En la ecuación anterior, la fuerza de roce estática máxima es $\|\vec{F}_{rm}\| = \mu_e \|\vec{N}\|$ y ocurre para un tiempo justo antes de que el cuerpo comienza a moverse, pasando a una fuerza de roce dinámica cuyo valor es menor que la anterior y es constante. La Fig. 2 representa esquemáticamente esta situación.

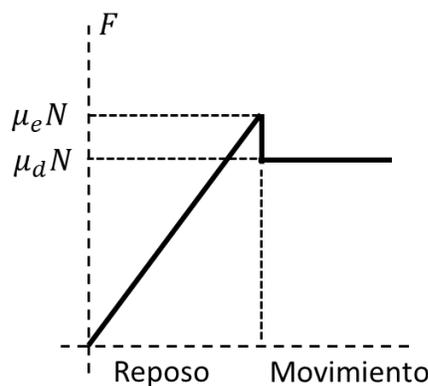


Fig. 2. Representación esquemática de la fuerza de roce estático y dinámico sobre un cuerpo.

Problemas Resueltos de Fuerzas Concurrentes.

2.1.- Un cilindro homogéneo que pesa 50 (N) se apoya sobre dos planos lisos como muestra la Fig. 2.1. Determinar las fuerzas que estos planos ejercen sobre el cilindro en los puntos de contacto A y B cuando está en reposo.

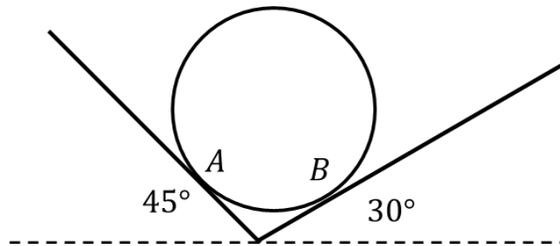


Fig. 2.1.

Resolución del problema

Conceptos previos.

a) Esquematización de vectores fuerza, b) Representación de vectores y c) Primera ley de Newton.

Resultado de aprendizaje.

Determinar el valor de fuerzas concurrentes aplicadas a un cuerpo usando la primera ley de Newton.

Un esquema de las fuerzas aplicadas en el cilindro homogéneo está representado en la Fig. 2.2 (izquierda), donde se ilustra el peso \vec{P} y las reacciones de los apoyos \vec{N}_A y \vec{N}_B en los planos inclinados. También se ilustra una representación vectorial de las fuerzas en el plano cartesiano (derecho) incorporando los ángulos respecto de los ejes coordenados. Este último diagrama permite aplicar directamente la primera ley de Newton y calcular.

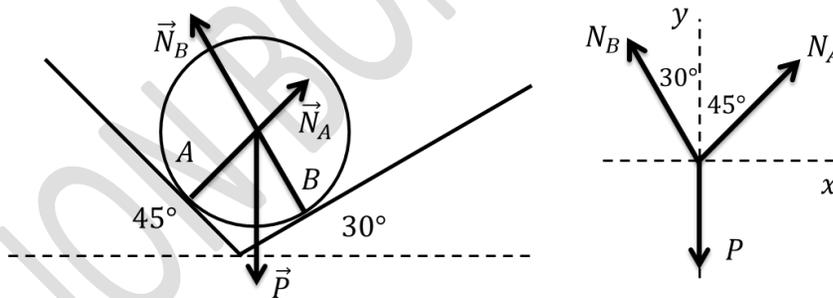


Fig. 2.2.

Así:

$$\sum F_x = N_A \sen 45 - N_B \sen 30 = 0 \quad \rightarrow N_A \frac{\sqrt{2}}{2} = N_B \frac{1}{2} \quad \rightarrow N_B = \sqrt{2} N_A$$

$$\sum F_y = N_A \cos 45 + N_B \cos 30 - P = 0 \quad \rightarrow N_A \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} N_A \frac{\sqrt{3}}{2} = P$$

Resolviendo, $N_A = 25.9$ (N) y $N_B = 36.6$ (N).

----- Fin del problema -----

2.2.- Un péndulo de masa m y largo ℓ toca un hemisferio de radio R , como lo muestra la Fig. 2.3. Calcular la tensión del hilo del péndulo. Cuando éste permanece en reposo.

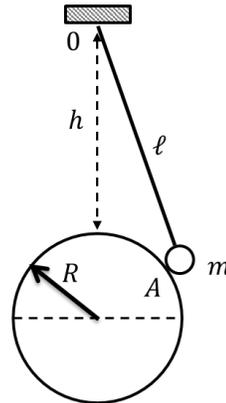


Fig. 2.3.

Resolución del problema

Conceptos previos.

a) Representación de vectores fuerza, b) Elementos de trigonometría y c) Primera ley de Newton.

Resultado de aprendizaje.

Determinar el valor de fuerzas concurrentes aplicadas a un cuerpo usando la primera ley de Newton.

La Fig. 2.4 representa una esquematización de los vectores aplicados a la masa (lado izquierdo) y el diagrama de fuerzas a la derecha de la figura. En la parte central una esquematización de los ángulos y como se relacionan. Se aplica directamente la primera ley de Newton.

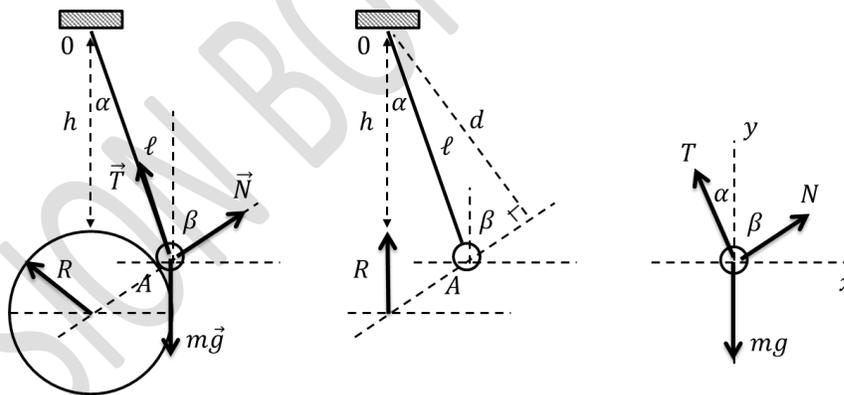


Fig. 2.4.

$$\sum F_x = T \operatorname{sen} \alpha - N \operatorname{sen} \beta = 0, \quad \rightarrow \quad \sum F_y = T \operatorname{cos} \alpha + N \operatorname{cos} \beta - mg = 0$$

$$N = \frac{T \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \beta}, \quad \rightarrow T \operatorname{cos} \alpha \operatorname{sen} \beta + T \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \beta = mg \operatorname{sen} \beta \quad \rightarrow T \operatorname{sen}(\alpha + \beta) = mg \operatorname{sen} \beta$$

Además, se cumple que:

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{d}{h + R} \quad \rightarrow \quad \operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \frac{d}{\ell}$$

Finalmente, combinando las ecuaciones se encuentra que la tensión del hilo es:

$$T = \frac{mg\ell}{h + R}$$

----- Fin del problema -----

2.3.- Una fuerza $\|\vec{F}\| = 20 \text{ (N)}$ empuja un cajón de 3 (kg) de masa sobre una superficie horizontal rugosa tal como lo muestra la Fig. 2.5. Cuando el ángulo es 30° , el bloque aún no se mueve.

- Determinar la fuerza de roce.
- Calcular el coeficiente de roce cuando el bloque está a punto de moverse.

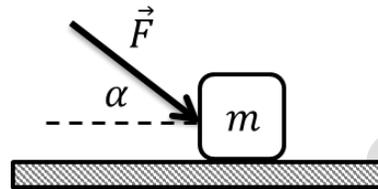


Fig. 2.5.

Resolución del problema

Conceptos previos.

a) Representación de vectores fuerza, b) Fuerza de roce estático y c) Primera ley de Newton.

Resultado de aprendizaje.

Determinar el valor de la fuerza de roce ejercida por una superficie horizontal sobre un cuerpo en reposo.

La Fig. 2.6 representa las fuerzas aplicadas sobre el bloque. Para el caso a) se observa directamente que:

$$\sum F_x = F \cos \alpha - f_R = 0, \quad \rightarrow f_R = F \cos \alpha = 20 \cos 30 = 10\sqrt{3} \text{ (N)}$$

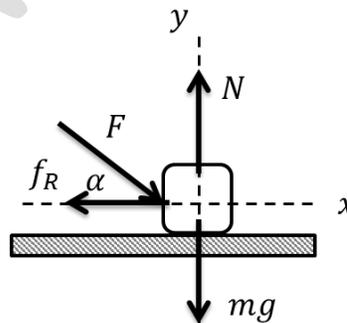


Fig. 2.6.

Para el caso b) se tiene:

$$\sum F_x = F \cos \alpha - f_R = 0, \quad \rightarrow \sum F_y = N - F \sin \alpha - mg = 0 \quad \rightarrow f_R = \mu_e N \quad \rightarrow \mu_e = \frac{F \cos \alpha}{F \sin \alpha + mg} \sim 0.44$$

----- Fin del problema -----

2.4.- Dos cables de peso despreciable se amarran juntos en C y se cargan como lo indica la Fig. 2.7. Calcular la tensión en el cable AC y en el cable BC cuando el bloque permanece en reposo.

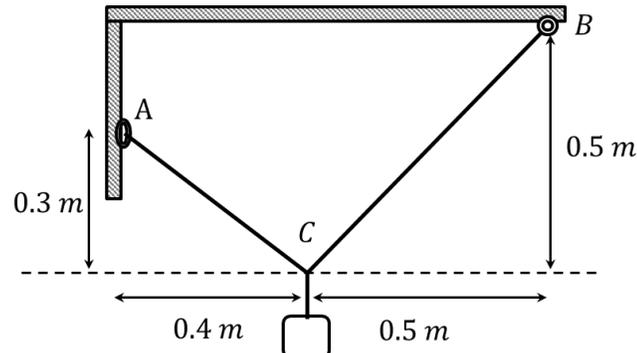


Fig. 2.7.

Resolución del problema

Conceptos previos.

a) Representación de vectores fuerza, b) Vectores unitarios y c) Primera ley de Newton.

Resultado de aprendizaje.

Usar vectores unitarios para representar fuerzas concurrentes en un problema de equilibrio.

Para resolver el problema planteado se usa el diagrama de fuerzas mostrado en la Fig. 2.8 que contiene los módulos de los vectores que concurren en C y los vectores unitarios asociados a cada uno de ellos. Así.

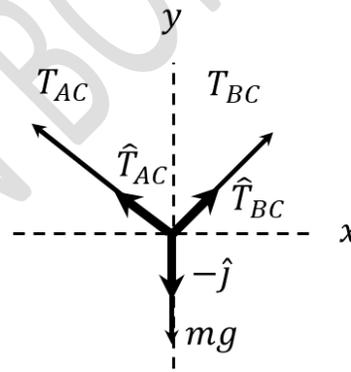


Fig. 2.8.

$$\hat{T}_{BC} = \frac{\hat{i} + \hat{j}}{\sqrt{2}}, \quad \rightarrow \hat{T}_{AC} = \frac{-4\hat{i} + 3\hat{j}}{5} \quad \rightarrow \vec{T}_{BC} = \frac{T_{BC}\hat{i} + T_{BC}\hat{j}}{\sqrt{2}} \quad \rightarrow \vec{T}_{AC} = \frac{-4T_{AC}\hat{i} + 3T_{AC}\hat{j}}{5}$$

$$\sum F_x = T_{BC} - 4T_{AC} = 0, \quad \rightarrow \sum F_y = T_{BC} + 3T_{AC} - mg = 0$$

$$T_{AC} = \frac{1}{7}mg, \quad T_{BC} = \frac{4}{7}mg$$

----- Fin del problema -----

2.5.- Un bloque de 20 (kg) se mantiene en reposo sobre un plano inclinado cuando se aplica una fuerza de 230 (N), tal como lo muestra la Fig. 2.9. Considere que entre el bloque y el plano inclinado existe un coeficiente de roce estático de 0.3. Calcular el valor mínimo de θ para el cual el bloque se mantiene en reposo.

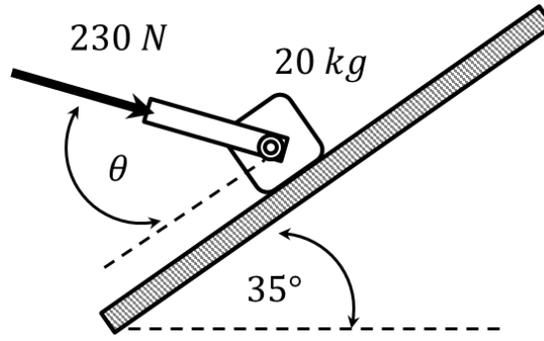


Fig. 2.9.

Resolución del problema

Conceptos previos.

a) Representación de vectores fuerza, b) Fuerza de roce estático, c) Elementos de trigonometría y d) Primera ley de Newton.

Resultado de aprendizaje.

Determinar el valor de la fuerza de roce ejercida por un plano inclinado sobre un cuerpo en reposo.

La Fig. 2.10 ilustra el diagrama de fuerzas que se aplican sobre el bloque, donde se supone que el bloque está a punto de deslizarse hacia abajo del plano (ángulo mínimo) siendo la fuerza de roce estática máxima a considerar. A continuación, se aplica la primera ley de Newton para determinar el valor del ángulo.

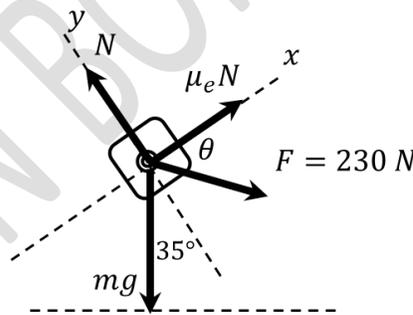


Fig. 2.10.

$$\sum F_x = \mu_e N + F \cos \theta - mg \sin 35 = 0, \quad \rightarrow \quad \sum F_y = N - F \sin \theta - mg \cos 35 = 0$$

$$\mu_e F \sin \theta + F \cos \theta = mg \sin 35 - \mu_e mg \cos 35 \quad \rightarrow \quad 69 \sin \theta + 230 \cos \theta = 64.3$$

$$\sqrt{1 - \cos^2 \theta} = 0.932 - 3.33 \cos \theta \quad \rightarrow \quad 1 - \cos^2 \theta = 0.87 + 11 \cos^2 \theta - 6.2 \cos \theta \quad \rightarrow \quad 12z^2 - 6.2z - 0.13 = 0$$

$$z = 0.5368 \quad \rightarrow \quad \cos \theta = 0.5368, \quad \therefore \theta = 57.5^\circ$$

----- Fin del problema -----

2.6.- Determinar el valor de la fuerza $\|\vec{F}\|$ que se debe aplicar sobre un cilindro homogéneo de masa m y radio R para subir el obstáculo de longitud h que muestra la Fig. 2.11.

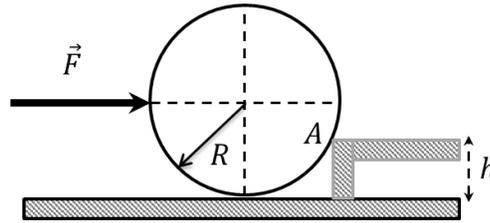


Fig. 2.11.

Resolución del problema

Conceptos previos.

a) Representación de vectores fuerza, b) Vectores concurrentes, c) Elementos de trigonometría y d) Primera ley de Newton.

Resultado de aprendizaje.

Determinar el valor de una o más fuerzas concurrentes de un cuerpo en reposo.

El diagrama de fuerzas sobre el centro del cilindro está dado por la Fig. 2.12, donde a continuación se aplica la primera ley de acuerdo a los ejes coordenados indicados allí. Nótese que la fuerza aplicada en A es perpendicular y pasa por el centro del cilindro. De este modo:

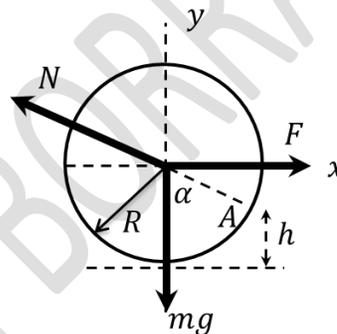


Fig. 2.12.

$$\sum F_x = F - N \operatorname{sen} \alpha = 0, \quad \rightarrow \quad \sum F_y = N \operatorname{cos} \alpha - mg = 0$$

Además, se establece que:

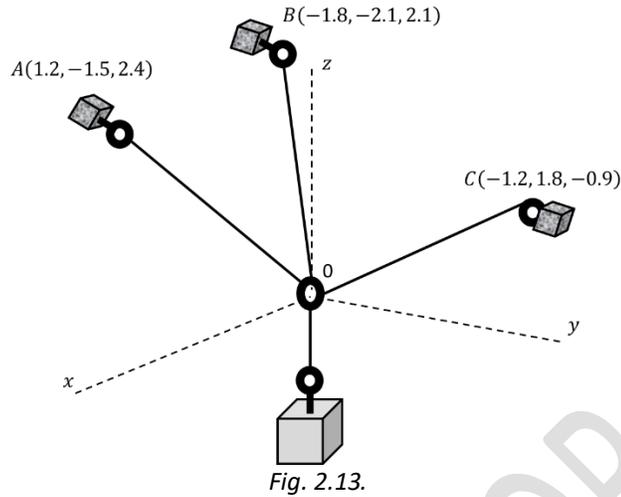
$$R \operatorname{cos} \alpha + h = R, \quad \rightarrow \quad \operatorname{cos} \alpha = \frac{R - h}{R}, \quad \therefore \operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{2Rh - h^2}}{R}$$

Combinando las ecuaciones,

$$F = N \operatorname{sen} \alpha \quad \rightarrow \quad N = \frac{mg}{\operatorname{cos} \alpha} = 0 \quad \therefore \quad F = \frac{mg \sqrt{2Rh - h^2}}{R - h}$$

----- Fin del problema -----

2.7.- Un bloque está suspendido de un sistema de cables tal como lo indica la Fig. 2.13. El peso del bloque es P y el módulo de la tensión del cable OC es 100 (N). Determinar las tensiones de los cables OA y OB.



Resolución del problema

Conceptos previos.

a) Representación de vectores fuerza 3D, b) vector unitario 3D, c) Álgebra y d) Primera ley de Newton.

Resultado de aprendizaje.

Determinar el valor de una o más fuerzas concurrentes 3D de un cuerpo en reposo.

En el punto O de unión de los cables y dado que el bloque está en reposo, se cumple que $\vec{T}_{0A} + \vec{T}_{0B} + \vec{T}_{0C} + \vec{P} = \vec{0}$, de acuerdo a la primera ley de Newton. De esta manera, se debe representar los vectores 3D en términos de sus vectores unitarios correspondientes y luego realizar las sumatorias en cada eje. De este modo:

$$\hat{T}_{0A} = \frac{1.2\hat{i} - 1.5\hat{j} + 2.4\hat{k}}{3.07}, \quad \hat{T}_{0B} = \frac{-1.8\hat{i} - 2.1\hat{j} + 2.1\hat{k}}{3.47}, \quad \hat{T}_{0C} = \frac{-1.2\hat{i} + 1.8\hat{j} - 0.9\hat{k}}{2.34}$$

$$\vec{T}_{0A} = (0.39\hat{i} - 0.49\hat{j} + 0.78\hat{k}) T_{0A}, \quad \vec{T}_{0B} = (-0.52\hat{i} - 0.6\hat{j} + 0.6\hat{k}) T_{0B}, \quad \vec{T}_{0C} = -51\hat{i} + 77\hat{j} - 38\hat{k} (N)$$

$$\sum F_x = 0.39T_{0A} - 0.52T_{0B} - 51 = 0, \quad \rightarrow \sum F_y = -0.49T_{0A} - 0.61T_{0B} + 77 = 0$$

$$\rightarrow \sum F_z = 0.78T_{0A} + 0.61T_{0B} - 38 - P = 0$$

$$0.39T_{0A} - 0.52T_{0B} - 51 = 0, \quad \rightarrow -0.49T_{0A} - 0.61T_{0B} + 77 = 0 \quad \rightarrow 0.78T_{0A} + 0.61T_{0B} - 38 - P = 0$$

$$T_{0A} = 144.5 (N), \quad T_{0B} = 10.3 (N), \quad P = 81(N)$$

----- Fin del problema -----

2.8.- Una torre de transmisión se sostiene por medio de tres alambres que están unidos a una articulación en A y que se anclan mediante pernos en B, C y D. Si la tensión en el alambre AB es 0.5 (kN), determinar la fuerza vertical $\|\vec{P}\|$ ejercida por la torre en la articulación A, correspondiente al vector deslizante que se ejerce como normal en O.

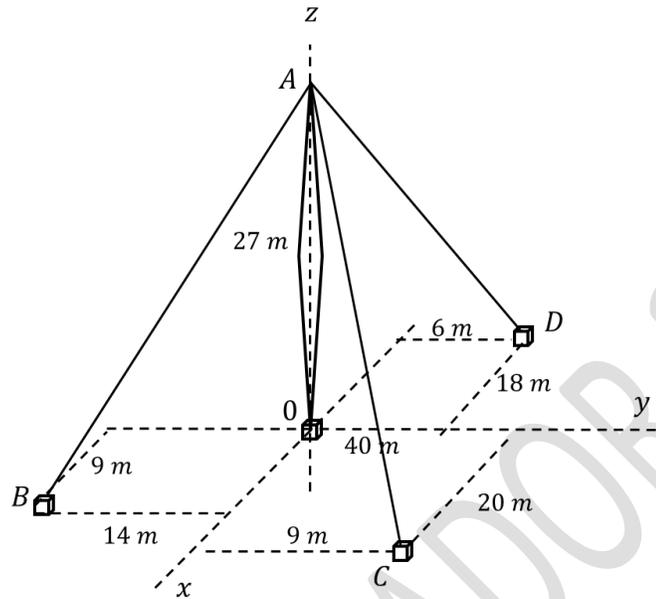


Fig. 2.14.

Resolución del problema

Conceptos previos.

a) Representación de vectores fuerza 3D, b) vector unitario 3D, c) Álgebra y d) Primera ley de Newton.

Resultado de aprendizaje.

Determinar el valor de una o más fuerzas concurrentes 3D de un cuerpo en reposo.

En el punto A de unión de los cables y dado que la torre está en reposo, se cumple que $\vec{T}_{AB} + \vec{T}_{AC} + \vec{T}_{AD} + \vec{P} = \vec{0}$, de acuerdo a la primera ley de Newton. De esta manera, se debe representar los vectores 3D en términos de sus vectores unitarios correspondientes y luego realizar las sumatorias en cada eje. De este modo:

$$\hat{T}_{AB} = 0.28\hat{i} - 0.44\hat{j} - 0.85\hat{k}, \quad \rightarrow \hat{T}_{AC} = 0.57\hat{i} + 0.26\hat{j} - 0.78\hat{k}, \quad \rightarrow \hat{T}_{AD} = -0.55\hat{i} + 0.18\hat{j} - 0.82\hat{k}$$

$$\vec{T}_{AB} = (0.14\hat{i} - 0.22\hat{j} - 0.43\hat{k}) (kN), \quad \rightarrow \hat{T}_{AC} = (0.57\hat{i} + 0.26\hat{j} - 0.78\hat{k})T_{AC},$$

$$\rightarrow \hat{T}_{AD} = (-0.55\hat{i} + 0.18\hat{j} - 0.82\hat{k})T_{AD}$$

$$\sum F_x = 0.14 + 0.57T_{AC} - 0.55T_{AD} = 0, \quad \rightarrow \sum F_y = 0.22 + 0.26T_{AC} + 0.18T_{AD} = 0$$

$$\rightarrow \sum F_z = 0.43 - 0.78T_{AC} - 0.82T_{AD} + P = 0$$

Resolviendo.

$$T_{AC} = 3.7 (kN), \quad T_{AD} = 4.1 (kN), \quad P = 6.7 (kN)$$

----- Fin del problema -----

Problemas Propuestos de Fuerzas Concurrentes.

2.9.- Dos cilindros homogéneos lisos A y B están en reposo como indica la Fig. 2.15, esto es, la línea que une sus centros es horizontal. El cilindro A tiene una masa de 40 (kg), en cambio el cilindro B de 90 (kg). Calcular el módulo de la fuerza de interacción entre ambos cilindros y el ángulo α que satisface la situación planteada.

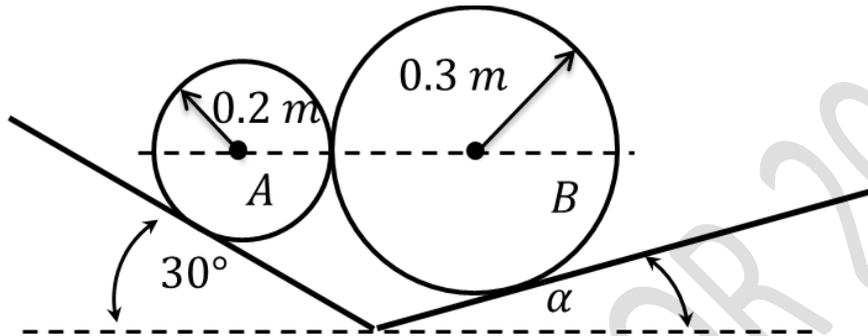


Fig. 2.15.

Respuestas: **Evaluación concepto de fuerzas concurrentes aplicadas a un cuerpo en reposo.**

$$R_{AB} = R_{BA} = \frac{\sqrt{3}}{3} m_A g \quad \rightarrow \quad \tan \alpha = \frac{\sqrt{3} m_A}{3 m_B} \quad \rightarrow \quad \alpha = 14.4^\circ$$

2.10.- a) Determinar si el bloque de $m = 10$ (kg) mostrado en la Fig. 2.16 está en reposo cuando $\theta = 15^\circ$ y $\|\vec{F}\| = 50$ (N). b) Calcular el ángulo θ para el cual el bloque está a punto de moverse hacia arriba del plano inclinado cuando se aplica una fuerza de $F = 62.5$ (N).

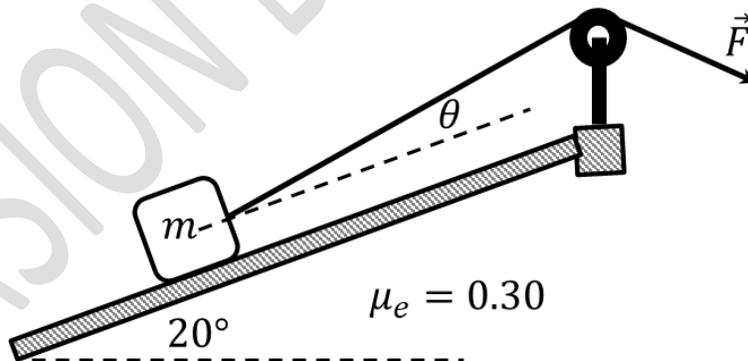


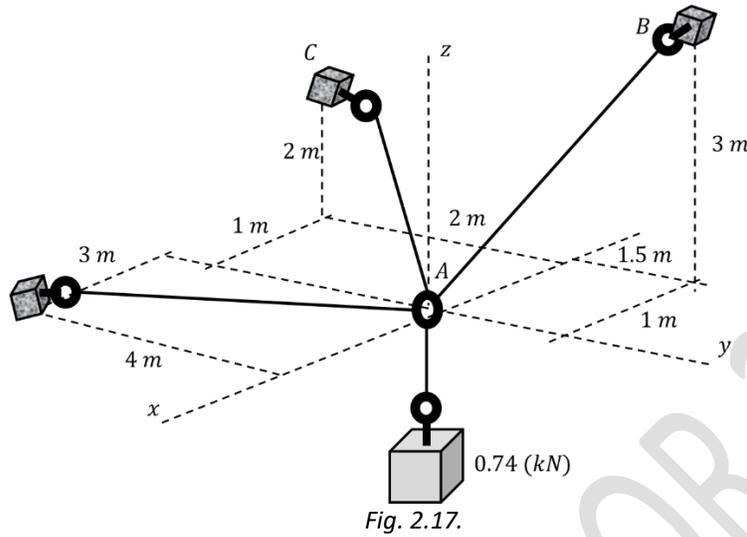
Fig. 2.16.

Respuestas: **Evaluación concepto de fuerzas concurrentes aplicadas a un cuerpo en reposo.**

a) $f_R = 14.8$ (N) $\rightarrow f_{Rm} = 23.7$ (N), \therefore reposo

b) $1.1 \text{sen}^2 \theta - 0.6 \text{sen} \theta - 0.04 = 0 \quad \rightarrow \quad \theta = 37^\circ$

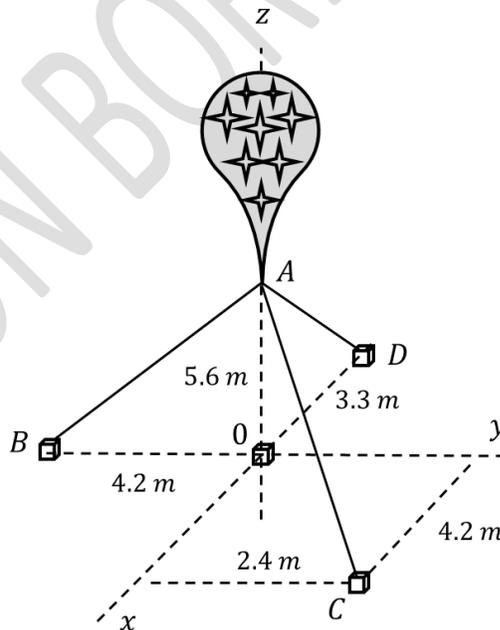
2.11.- Determinar la tensión a la cual se someten los cables AB, AC y AD de la Fig. 2.17 para que el bloque de 0.74 (kN) esté en reposo.



Respuestas: **Evaluación concepto de fuerzas concurrentes aplicadas a un cuerpo en reposo.**

$$T_{AB} = 0.835 \text{ (kN)}, \rightarrow T_{AC} = 0.036 \text{ (kN)}, \rightarrow T_{AD} = 0.418 \text{ (kN)}$$

2.12.- Tres cables son usados para amarrar un globo que se muestra en la Fig. 2.18. Si la tensión en el cable AC es de 444 (N), determine las tensiones de los cables AB, AD y la fuerza de empuje del globo en A.



Respuestas: **Evaluación concepto de fuerzas concurrentes aplicadas a un cuerpo en reposo.**

$$T_{AB} = 237 \text{ (N)}, \rightarrow T_{AD} = 496 \text{ (N)}, \rightarrow F_A = 954 \text{ (N)}$$

3.- Definición de Torque y Sistemas Equivalentes

El **torque** es la **medida rotacional** de una fuerza, es una magnitud vectorial y está definido operacionalmente a través de un **producto vectorial**. Una característica principal, es que el torque se calcula **respecto de un punto o recta** y su signo indica la rotación: si es positivo, rotación antihoraria, si es negativo, rotación horaria. La Fig. 3 ilustra una barra de longitud ℓ sostenida mediante un pasador en un extremo 0 y por el otro A, se aplica una fuerza \vec{F} . El torque $\vec{\tau}_0$ de la fuerza respecto del punto 0 se define como:

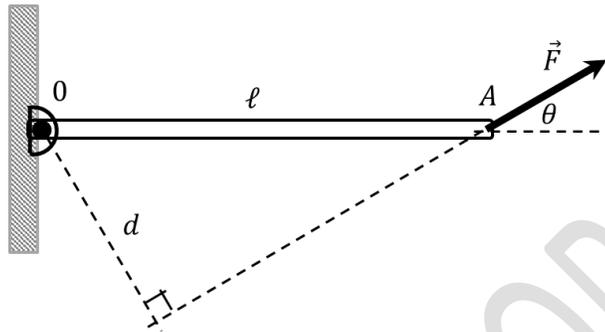


Fig. 3. Representación esquemática para definir el torque de una fuerza respecto de un punto.

$$\vec{\tau}_0 = \vec{r}_{0A} \times \vec{F}_A$$

Donde \vec{r}_{0A} es el vector que une dos puntos: el punto donde se calcula el torque 0 y el punto donde se aplica la fuerza A. Alternativamente, se puede calcular el torque, cuando se proyecta el vector fuerza en una dirección paralela a la barra ($F \cos \theta$) y otra perpendicular ($F \sin \theta$). Para este caso, la componente de la fuerza a lo largo de la barra no realiza torque, en cambio, la componente perpendicular, realiza un torque máximo. La rotación en este caso, es antihoraria, lo que define un torque positivo. De esta forma:

$$\|\vec{\tau}_0\| = \ell \|\vec{F}_A\| \sin \theta$$

Otro concepto usado para calcular torques es el de **palanca**, donde el módulo del torque es el producto entre el módulo de la fuerza y el **brazo de giro**, correspondiente a una distancia que toca perpendicular a la dirección de la fuerza, representado por d en la Fig. 3. El sentido rotacional está determinado por el criterio antes señalado. Así:

$$\|\vec{\tau}_0\| = d \|\vec{F}_A\| = (\ell \sin \theta) \|\vec{F}_A\|$$

Para determinar el **torque respecto de una recta** o eje $\vec{\tau}_R$, se deben tener en cuenta algunos pasos a seguir. En primer lugar, caracterizar la recta por un **vector unitario** $\hat{\mu}_R$, en el caso de los ejes coordenados es directo, puede ser \hat{i} , \hat{j} o \hat{k} . En segundo lugar, se requiere determinar un torque respecto de un punto (cualquiera) que pertenece a la recta $\vec{\tau}_P$. Finalmente, el torque respecto de la recta será la **proyección del torque** $\vec{\tau}_P$, en el sentido de la recta caracterizada por $\hat{\mu}_R$ de la siguiente manera:

$$\vec{\tau}_R = \left(\text{proy}_{\vec{\tau}_P(R)} \right) \hat{\mu}_R = (\vec{\tau}_P \cdot \hat{\mu}_R) \hat{\mu}_R = [(\vec{r}_{PA} \times \vec{F}_A) \cdot \hat{\mu}_R] \hat{\mu}_R$$

Un **par de fuerzas**, son dos fuerzas idénticas, de sentido contrario y **no son concurrentes**. Esto significa que sus direcciones son paralelas y sólo pueden realizar rotaciones cuando se aplican sobre un cuerpo. Es muy interesante calcular los torques que se producen cuando actúa un par de fuerzas dado que no depende del punto o de la recta

donde se calcula. La Fig. 4 ilustra un par de fuerzas actuando sobre un cuerpo y la distancia d corresponde a la separación de las líneas de acción de las fuerzas.

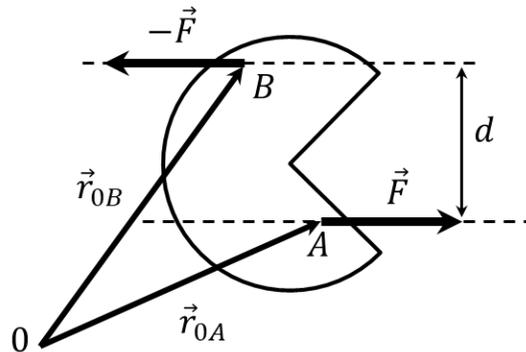


Fig. 4. Representación esquemática para definir el torque de un par de fuerzas.

El torque total es la suma vectorial de los torques, es decir:

$$\vec{\tau}_0 = \vec{r}_{0A} \times \vec{F}_A + \vec{r}_{0B} \times \vec{F}_B = \vec{r}_{0A} \times \vec{F} + \vec{r}_{0B} \times (-\vec{F}) = (\vec{r}_{0A} - \vec{r}_{0B}) \times \vec{F} = \vec{r}_{BA} \times \vec{F}$$

donde el vector \vec{r}_{BA} tiene sentido desde B hasta A y puede proyectarse en un vector paralelo a la línea de acción del par de fuerzas y otro perpendicular a él. Así la componente del vector paralela a la línea de acción no realiza torque, en cambio su componente perpendicular realiza un torque máximo, de este modo:

$$\vec{\tau}_0 = \vec{r}_{BA} \times \vec{F} = (\vec{r}_{BA})_{\parallel} \times \vec{F} + (\vec{r}_{BA})_{\perp} \times \vec{F} = -dj \times F\hat{i} = dF\hat{k} \rightarrow \tau = dF$$

lo que da cuenta que el valor del torque sólo depende del valor de la fuerza y las distancia entre las líneas de acción de las mismas. La rotación que se produce se establece de acuerdo al criterio mencionado más arriba.

Un **sistema equivalente** se define en términos de los conceptos de **fuerza y torque**. Un sistema equivalente caracteriza un conjunto de fuerzas no concurrentes, torques y pares de fuerza **aplicados sobre un cuerpo**. Este nuevo sistema equivalente está representado por la fuerza neta y el torque neto respecto de un punto que puede ser o no el origen. Lo interesante es que este punto, donde se **calculan los torques**, define el punto donde se **aplica la fuerza neta**.

De este modo, comparando fuerzas y torques netos respecto de un punto, se pueden identificar si dos sistemas son o no equivalentes. Por definición **la resultante de un sistema de fuerzas**, es un sistema equivalente cuando el punto donde se calculan los torques es el origen. El **sistema equivalente más simple**, es aquel determinado por una sola fuerza aplicada en **un punto**. Este punto, medido respecto del origen, da como resultado el torque neto.

De este modo, un cuerpo está en **equilibrio estático**, cuando la resultante de un sistema de fuerzas es nula y operativamente se tiene que:

$$\vec{F}_N = \vec{F}_A + \vec{F}_B + \dots + \vec{F}_i = \sum \vec{F}_i = \vec{0}$$

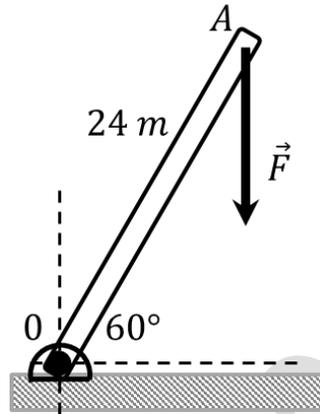
$$\vec{\tau}_0 = \vec{r}_{0A} \times \vec{F}_A + \vec{r}_{0B} \times \vec{F}_B + \dots + \vec{r}_{0i} \times \vec{F}_i + \vec{p}_A + \vec{p}_B + \dots + \vec{p}_i = \sum \vec{r}_{0i} \times \vec{F}_i + \sum \vec{p}_i = \vec{0}$$

donde \vec{p}_i son torques aplicados por pares de fuerza en el cuerpo.

Problemas Resueltos de Cálculo de Torques y Sistemas Equivalentes.

3.1.- Una fuerza vertical de 100 (N) se aplica en el extremo A de una barra de peso despreciable, de longitud 24 (m) y que puede rotar en el punto O.

- Determinar el torque que produce la fuerza respecto del punto O.
- Obtener una fuerza horizontal aplicada en A que realiza el mismo torque de la letra a).
- Calcular la fuerza mínima aplicada en A, que efectúa el mismo torque de la letra a).



Resolución del problema

Conceptos previos.

- Producto vectorial y b) Definición de torque.

Resultado de aprendizaje.

Determinar el torque que realiza una fuerza sobre una barra que rota en un extremo.

Usando la definición operacional se tiene:

$$\vec{\tau}_0 = \vec{r}_{0A} \times \vec{F}_A = (24\cos 60\hat{i} + 24\sin 60\hat{j}) \times (-100\hat{j}) = -1200\hat{k} \text{ (Nm)}$$

$$\vec{\tau}_0 = \vec{r}_{0A} \times \vec{F}_A = (24\cos 60\hat{i} + 24\sin 60\hat{j}) \times (F_A\hat{i}) = -1200\hat{k} \text{ (Nm)} \rightarrow F_A = 57.7 \text{ (N)}$$

Si la fuerza es mínima, entonces el torque producido es máximo cuyo valor es el conocido, por lo tanto

$$\|\vec{\tau}_{0(\max)}\| = \|\vec{r}_{0A}\| \|\vec{F}_A\| \sin 90 \rightarrow 1200 = 24F_A, \quad \therefore F_A = 50 \text{ (N)}$$

----- Fin del problema -----

3.2.- Una Fuerza de 800 (N) actúa sobre un marco que forma una L y de peso despreciable, como muestra la Fig. 3.2. Calcule el torque con respecto del pasador ubicado en el punto B.

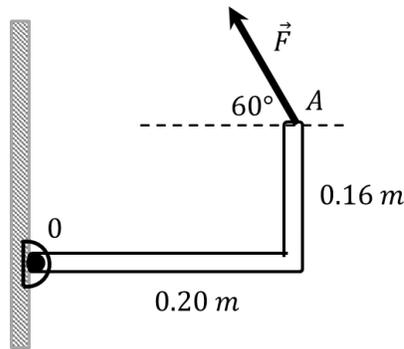


Fig. 3.2.

Resolución del problema

Conceptos previos.

a) Producto vectorial y b) Definición de torque.

Resultado de aprendizaje.

Determinar el torque que realiza una fuerza sobre un marco que rota en un extremo.

Directamente de la definición de producto vectorial en términos de un determinante.

$$\vec{\tau}_0 = \vec{r}_{0A} \times \vec{F}_A = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0.20 & 0.16 & 0.0 \\ -800\cos 60 & 800\sin 60 & 0 \end{vmatrix} = (138.56\hat{k} + 64\hat{k}) = \mathbf{202.56\hat{k} (Nm)}$$

----- Fin del problema -----

3.3.- Sobre un paralelepípedo se aplica una fuerza de módulo $\sqrt{29}$ (kN) en la dirección y sentido que muestra la Fig. 3.3. Determine los torques respecto de los puntos O, A y B. Luego calcule el torque respecto del eje x, eje y y de la recta \overline{AB} .

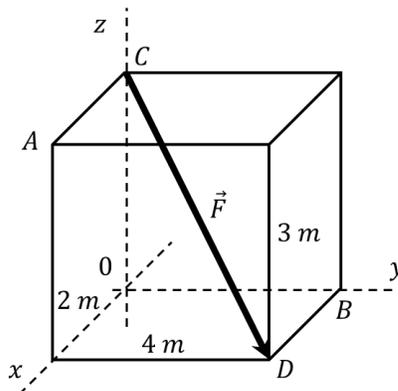


Fig. 3.3.

Resolución del problema

Conceptos previos.

a) Elementos de vectores 3D y b) Definición de torque respecto de un punto y de una recta.

Resultado de aprendizaje.

Determinar el torque que realiza una fuerza sobre una recta.

Antes de realizar la operatoria con torques, se debe encontrar la representación vectorial de la fuerza, así:

$$\vec{F}_C = F\hat{F}_C, \quad \rightarrow C(0,0,3) \text{ a } D(2,4,0) \quad \rightarrow \hat{F}_C = \frac{2\hat{i} + 4\hat{j} - 3\hat{k}}{\sqrt{2^2 + 4^2 + 3^2}} = \frac{2\hat{i} + 4\hat{j} - 3\hat{k}}{\sqrt{29}}$$

$$\vec{F}_C = F\hat{F}_C = \sqrt{29} \cdot \left(\frac{2\hat{i} + 4\hat{j} - 3\hat{k}}{\sqrt{29}} \right) = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 3\hat{k} \text{ (kN)}$$

Los primeros tres cálculos se realizan directamente de la definición de torque, por lo tanto:

$$\vec{\tau}_O = \vec{r}_{OC} \times \vec{F}_C = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & -3 \end{vmatrix} = -12\hat{i} + 6\hat{j} \text{ (Nm)}$$

$$\vec{\tau}_A = \vec{r}_{AC} \times \vec{F}_C = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -3 \end{vmatrix} = -6\hat{j} - 8\hat{k} \text{ (Nm)}$$

$$\vec{\tau}_B = \vec{r}_{BC} \times \vec{F}_C = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & -4 & 3 \\ 2 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 6\hat{j} + 8\hat{k} \text{ (Nm)}$$

Para determinar el torque respecto de una recta (o eje) se debe definir un vector unitario asociado a la recta. En el caso de los ejes coordenados x, y no hay problema. Sin embargo, se debe calcular para la recta \overline{AB} . De este modo, para el último caso tenemos.

$$\hat{\mu}_R = \frac{\overline{AB}}{\|\overline{AB}\|}, \quad \rightarrow A(2,0,3) \text{ a } B(0,4,0) \quad \rightarrow \hat{\mu}_R = \frac{-2\hat{i} + 4\hat{j} - 3\hat{k}}{\sqrt{2^2 + 4^2 + 3^2}} = \frac{-2\hat{i} + 4\hat{j} - 3\hat{k}}{\sqrt{29}}$$

Ahora bien, como segundo paso determinamos un torque respecto de un punto de la recta deseada, así:

$$\text{eje } x, \hat{i} \rightarrow \vec{\tau}_x = (\vec{\tau}_O \cdot \hat{i})\hat{i} = [(-12\hat{i} + 6\hat{j}) \cdot \hat{i}]\hat{i} = -12\hat{i} \text{ (Nm)}$$

$$\text{eje } y, \hat{j} \rightarrow \vec{\tau}_y = (\vec{\tau}_O \cdot \hat{j})\hat{j} = [(-12\hat{i} + 6\hat{j}) \cdot \hat{j}]\hat{j} = 6\hat{j} \text{ (Nm)}$$

$$\text{recta } \overline{AB}, \hat{\mu}_R \rightarrow \vec{\tau}_{\overline{AB}} = (\vec{\tau}_A \cdot \hat{\mu}_R)\hat{\mu}_R = \left[(-12\hat{i} - 8\hat{k}) \cdot \left(\frac{-2\hat{i} + 4\hat{j} - 3\hat{k}}{\sqrt{29}} \right) \right] \left(\frac{-2\hat{i} + 4\hat{j} - 3\hat{k}}{\sqrt{29}} \right)$$

$$\vec{\tau}_{\overline{AB}} = \left[\frac{(24 + 24)}{\sqrt{29}} \right] \left(\frac{-2\hat{i} + 4\hat{j} - 3\hat{k}}{\sqrt{29}} \right) = -3.3\hat{i} + 6.6\hat{j} - 5\hat{k} \text{ (Nm)}$$

----- Fin del problema -----

3.4.- Una fuerza de 600 (N) se aplica en el punto B de la Fig. 3.4. Calcular el torque que realiza la fuerza respecto del punto A y respecto de 0.

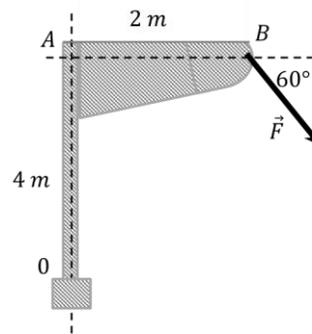


Fig. 3.4.

Resolución del problema

Conceptos previos.

a) Producto vectorial y b) Definición de torque respecto de un punto.

Resultado de aprendizaje.

Determinar el torque que realiza una fuerza sobre un punto.

Se usa directamente la definición de torque. De modo que:

$$\vec{\tau}_A = \vec{r}_{AB} \times \vec{F}_B = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 0 & 0 \\ 300 & -520 & 0 \end{vmatrix} = -1040\hat{k} \text{ (Nm)}$$

$$\vec{\tau}_0 = \vec{r}_{0B} \times \vec{F}_B = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 4 & 0 \\ 300 & -520 & 0 \end{vmatrix} = -2240\hat{k} \text{ (Nm)}$$

----- Fin del problema -----

3.5.- Se aplican dos fuerzas \vec{F}_A y \vec{F}_B de módulo 40 (N) y 30 (N) a una estructura tal como muestra la Fig. 3.5 en los puntos A y B de ella. Determinar un sistema equivalente respecto del origen 0 y respecto del punto B de la estructura.

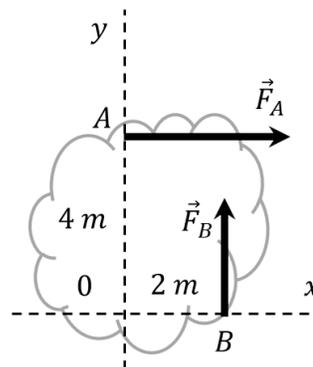


Fig. 3.5.

Resolución del problema

Conceptos previos.

a) Definición de fuerza y torque neto y b) Concepto de sistema equivalente.

Resultado de aprendizaje.

Determinar el sistema equivalente de un sistema de dos fuerzas respecto de un punto cualquiera.

Para determinar un sistema equivalente respecto del origen del sistema definido, se calcula la fuerza neta y el torque neto respecto de ese punto, es decir:

$$\vec{F}_N = \vec{F}_A + \vec{F}_B = 40\hat{i} + 30\hat{j} \text{ (N)}$$

$$\vec{\tau}_{N(0)} = \vec{r}_{0A} \times \vec{F}_A + \vec{r}_{0B} \times \vec{F}_B = 4\hat{j} \times 40\hat{i} + 2\hat{i} \times 30\hat{j} = (-160 + 60)\hat{k} = -100\hat{k} \text{ (Nm)}$$

Para el sistema equivalente respecto del punto B, se procede del mismo modo:

$$\vec{F}_N = \vec{F}_A + \vec{F}_B = 40\hat{i} + 30\hat{j} \text{ (N)}$$

$$\vec{\tau}_{N(B)} = \vec{r}_{BA} \times \vec{F}_A + \vec{r}_{BB} \times \vec{F}_B = (-2\hat{i} + 4\hat{j}) \times 40\hat{i} + \vec{0} = -160\hat{k} \text{ (Nm)}$$

En el primer caso, la fuerza neta actúa en el origen, mientras que en el segundo caso lo hace en B.

----- Fin del problema -----

3.6.- Sobre una viga se aplican tres fuerzas y un par de fuerzas como muestra la Fig. 3.6. Haga un esquema y determine un sistema equivalente respecto del origen y un sistema equivalente más simple.

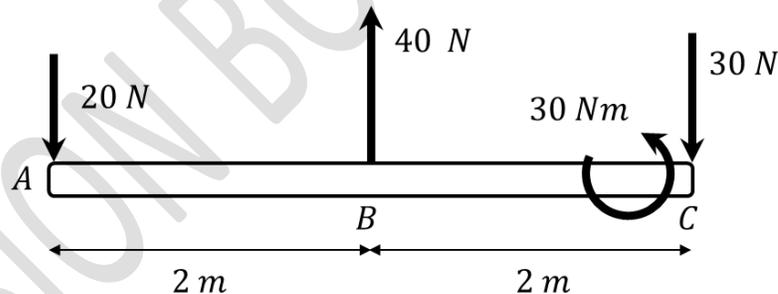


Fig. 3.6.

Resolución del problema

Conceptos previos.

a) Concepto de sistema equivalente y b) Sistema equivalente más simple.

Resultado de aprendizaje.

Determinar el sistema equivalente más simple y su esquema, de un sistema de fuerzas.

Primero se obtiene el sistema equivalente respecto del origen A.

$$\vec{F}_N = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (-20 + 40 - 30)\hat{j} = -10\hat{j} \text{ (N)}$$

$$\vec{\tau}_{N(A)} = \vec{r}_{AB} \times \vec{F}_B + \vec{r}_{AC} \times \vec{F}_C + \vec{p} = (80 - 120 + 30)\hat{k} = -10\hat{k} \text{ (Nm)}$$

En segundo lugar, se calcula el sistema equivalente más simple, es decir, la fuerza neta aplicada en un punto tal que represente el torque neto. Para ello:

$$\vec{F}_N = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (-20 + 40 - 30)\hat{j} = -10\hat{j} \text{ (N)}$$

$$\|\vec{r}_{N(A)}\| = \bar{x}\|\vec{F}_N\| \rightarrow \bar{x} = \frac{10}{10} = 1 \text{ (m)}$$

Finalmente, los esquemas de la Fig. 3.7 representan: lado izquierdo, sistema equivalente respecto del origen, lado derecho, sistema equivalente más simple.

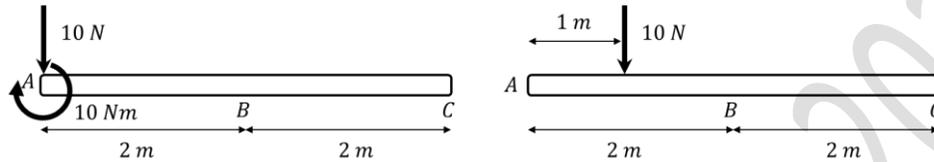


Fig. 3.7.

----- Fin del problema -----

3.7.- Determinar el sistema equivalente más simple respecto del origen 0 del sistema de tres fuerzas aplicadas sobre la barra en equilibrio mostrada en la Fig. 3.8.

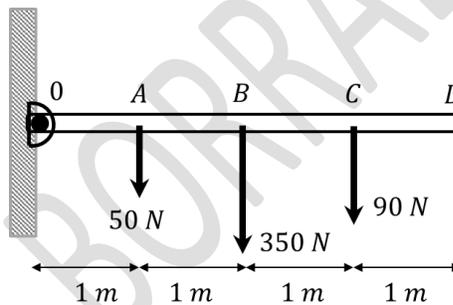


Fig. 3.8.

Resolución del problema

Conceptos previos.

a) Concepto de sistema equivalente y b) Sistema equivalente más simple.

Resultado de aprendizaje.

Determinar el sistema equivalente más simple y su esquema, de un sistema de fuerzas.

Igual que el problema anterior:

$$\vec{F}_N = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (-50 - 350 - 90)\hat{j} = -490\hat{j} \text{ (N)}$$

$$\vec{r}_{N(0)} = \vec{r}_{0A} \times \vec{F}_A + \vec{r}_{0B} \times \vec{F}_B + \vec{r}_{0C} \times \vec{F}_C = (-50 - 700 - 270)\hat{k} = -1020\hat{k} \text{ (Nm)}$$

$$\|\vec{r}_{N(0)}\| = \bar{x}\|\vec{F}_N\| \rightarrow \bar{x} = \frac{1020}{490} = 2.1 \text{ (m)}$$

----- Fin del problema -----

Problemas Propuestos de Cálculo de Torques y Sistemas Equivalentes.

3.8.- Un cable AB (entre otros dos) sostiene la caja mostrada en la Fig. 3.9 y tiene una tensión de 3 (kN). Determine el torque que produce esta fuerza con respecto del punto D.

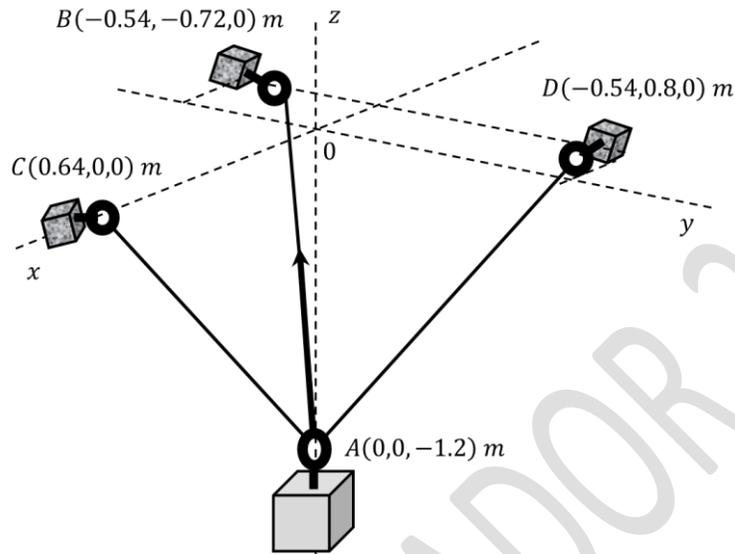


Fig. 3.9.

Respuestas: **Evaluación concepto de torque respecto de un punto de una fuerza 3D.**

$$\vec{\tau}_D = -3.65\hat{i} - 1.64\hat{k} \text{ (kNm)}$$

3.9.- La tensión que se ejerce en el cable OA mostrado en la Fig. 3.10 es de 5 (kN). Determinar el torque que realiza la tensión respecto de la recta que une B con C.

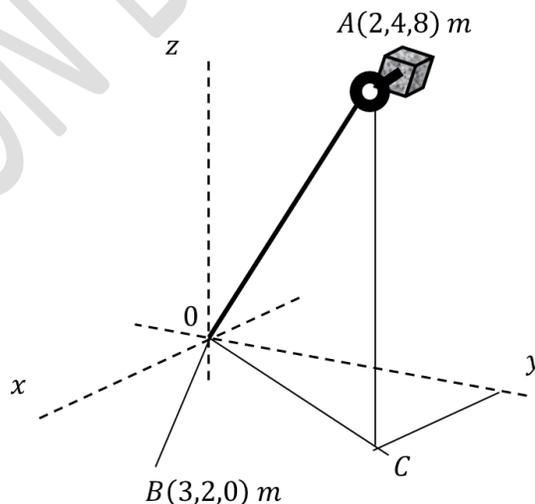


Fig. 3.10.

Respuestas: **Evaluación concepto de torque respecto de una recta de una fuerza 3D.**

$$\vec{\tau}_{AB} = -7\hat{i} + 14\hat{j} \text{ (kNm)}$$

3.10.- Para sacar un clavo C se ocupa un *chuzo* ABC (llamado también diablito) como muestra la Fig. 3.11 y se requiere ejercer una fuerza vertical de 0.9 (kN) en el punto C. Calcular:

- El torque que produce la fuerza en C (aplicada en el clavo) respecto del punto B.
- El módulo de la fuerza $\|\vec{F}\|$ necesaria para ejercer el mismo módulo del torque en B cuando $\alpha = 10^\circ$.
- El módulo de la fuerza mínima aplicada en A para que genere el mismo torque con respecto de B.

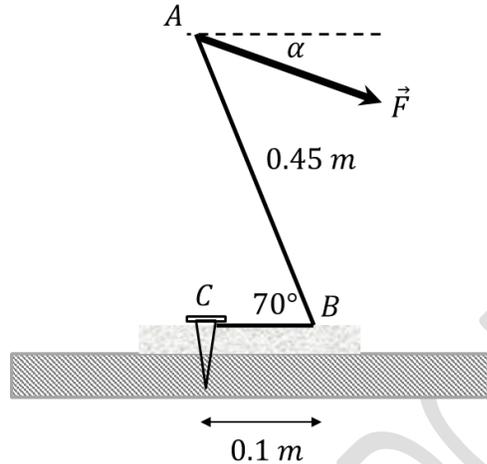


Fig. 3.11.

Respuestas: **Evaluación concepto de torque respecto de un punto.**

a) $\vec{\tau}_B = -0.09\hat{k}$ (kNm), b) $\|\vec{F}\| = 0.231$ (kN), c) $\|\vec{F}\| = 0.2$ (kN)

3.11.- La tapa ABCD de un baúl de 0.61×1.0 (m) tiene bisagras a lo largo de AB y se mantiene abierto mediante una cuerda DEC que pasa sobre un gancho en E. La tensión de la cuerda es 66 (N). En estas condiciones, calcular el torque ejercido por la cuerda DE respecto de cada uno de los ejes coordenados.

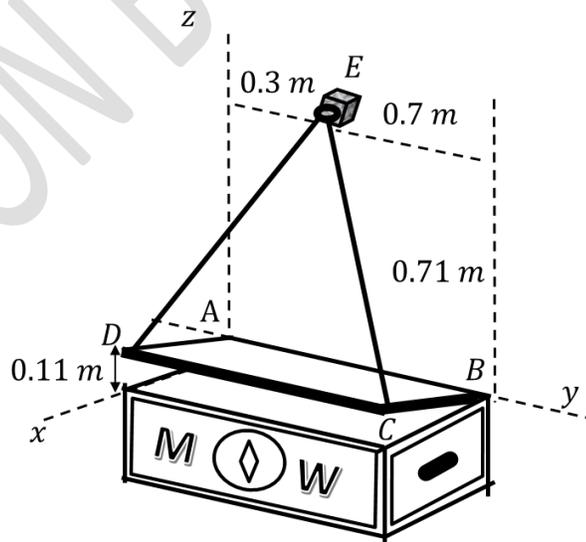


Fig. 3.12.

Respuestas: **Evaluación concepto de torque respecto de una recta.**

$\vec{\tau}_{0x} = -2.40\hat{i}$ (Nm), $\vec{\tau}_{0y} = -31.5\hat{j}$ (Nm), $\vec{\tau}_{0z} = 13.3\hat{k}$ (Nm)

- 3.12.- Un tablero de altura 2 (m) y largo 3 (m) se somete a la acción de una fuerza de 400 (N). Determinar:
 a) El torque con respecto del punto C cuando $\theta = 30^\circ$.
 b) El ángulo θ para cual la fuerza produce un torque máximo en A.

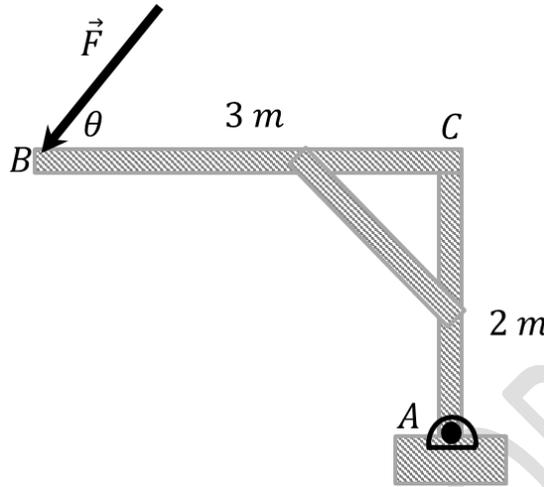


Fig. 3.13.

Respuestas: **Evaluación concepto de torque respecto de un punto.**

$$\vec{\tau}_A = 1292.8\hat{k} \text{ (Nm)}, \theta = 56.3^\circ$$

- 3.13.- Una fuerza $\|\vec{F}\|$ se aplica en el punto B de un paralelepípedo rectangular como muestra la Fig. 3.14. Determinar el módulo del torque con respecto de la recta AF.

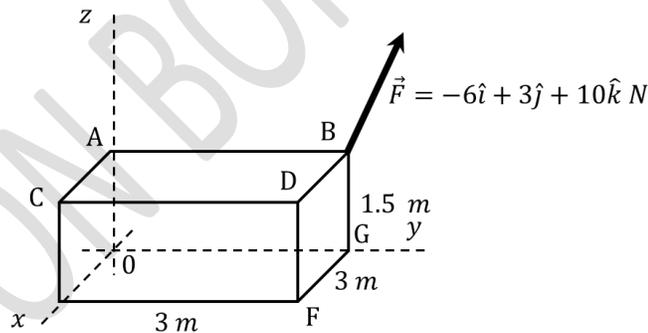


Fig. 3.14.

Respuestas: **Evaluación concepto de torque respecto de una recta.**

$$\vec{\tau}_{AF} = 9.3\hat{i} + 9.3\hat{j} - 4.7\hat{k} \text{ (Nm)}$$

- 3.14.- Considere la placa ubicada en un plano horizontal y sometida a un sistema de fuerzas como muestra la Fig. 3.15.
 a) Calcular la resultante del sistema de fuerzas.
 b) Determinar un sistema equivalente respecto del punto C.
 c) Calcular un sistema equivalente simple, sólo con las fuerzas horizontales aplicadas en B y C respecto del origen.
 d) Realice un esquema de cada situación de las letras anteriores.

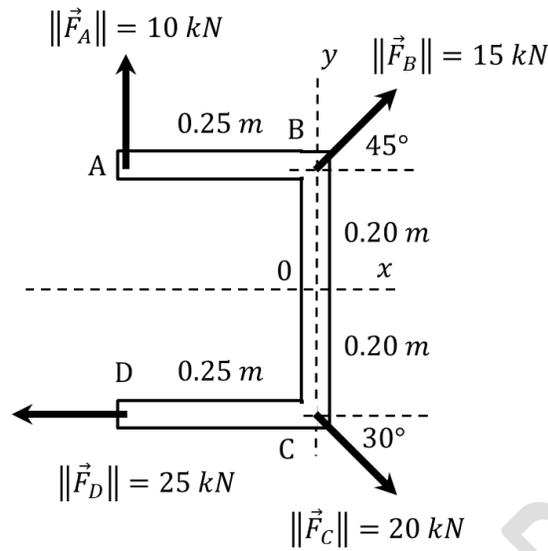


Fig. 3.15.

Respuestas: **Evaluación concepto de resultante y sistema equivalente.**

- a) $\vec{F}_N = 2.93\hat{i} + 10.6\hat{j} \text{ (kN)}$, $\vec{\tau}_N = -6.16\hat{k} \text{ (kNm)}$
- b) $\vec{F}_N = 2.93\hat{i} + 10.6\hat{j} \text{ (kN)}$, $\vec{\tau}_{N(C)} = -6.74\hat{k} \text{ (kNm)}$
- c) $\|\vec{F}_N\| = 27.9 \text{ (kN)}$, $\bar{x} = 0.048 \text{ (m)}$
- d)

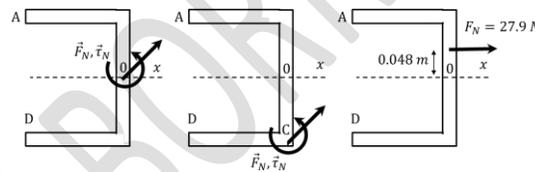


Fig. 3.16.

3.15.- Una viga de 0.5 kN se somete a varias fuerzas como muestra la Fig. 3.17. Determinar un sistema equivalente respecto del punto B y un sistema equivalente más simple respecto de A entre la fuerza aplicada en B y el peso de la viga.

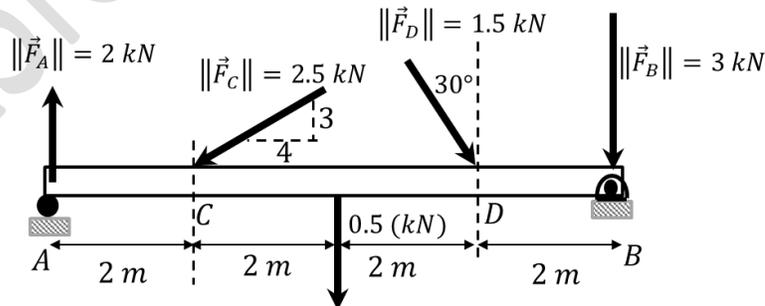


Fig. 3.17.

Respuestas: **Evaluación concepto de sistema equivalente.**

- $\vec{F}_N = -1.25\hat{i} - 4.3\hat{j} \text{ (kN)}$, $\vec{\tau}_{N(B)} = -2.4\hat{k} \text{ (kNm)}$, $\rightarrow \vec{F}_N = -3.5\hat{j} \text{ (kN)}$, $\bar{x} = 7.4 \text{ (m)}$

3.16.- Tres fuerzas actúan sobre una tubería que se muestra en la Fig. 3.18. En base a este esquema:

- Determine un sistema equivalente respecto de los puntos P y Q. Realice una representación.
- Considere ahora que se cambia la fuerza aplicada en la parte superior de Q por una fuerza vertical con sentido hacia arriba de 9.5 kN . Calcule un sistema equivalente simple compuesto por una única fuerza y un punto de aplicación a lo largo de la tubería y medido respecto de P. Realice una representación.

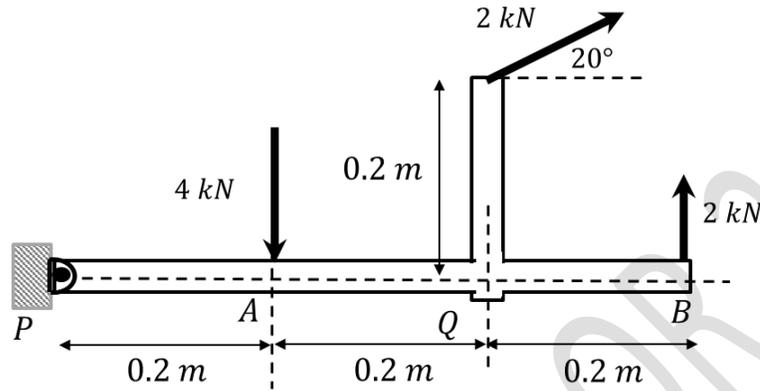


Fig. 3.18.

Respuestas: **Evaluación concepto de sistema equivalente y sistema equivalentes simple.**

a) $\vec{F}_N = 1.88\hat{i} - 1.32\hat{j} \text{ (kN)}$, $\vec{\tau}_{N(P)} = 0.3\hat{k} \text{ (kNm)}$
 $\vec{F}_N = 1.88\hat{i} - 1.32\hat{j} \text{ (kN)}$, $\vec{\tau}_{N(Q)} = 0.8\hat{k} \text{ (kNm)}$

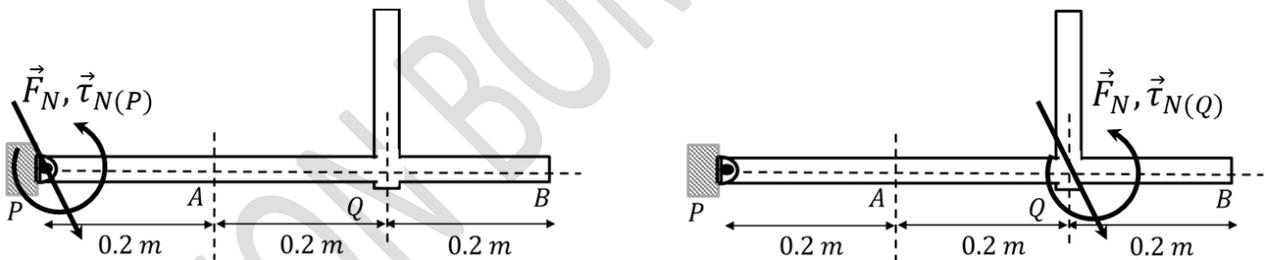


Fig. 3.19.

b) $\vec{F}_N = 7.5\hat{j} \text{ (kN)}$, $\bar{x} = 0.56 \text{ (m)}$

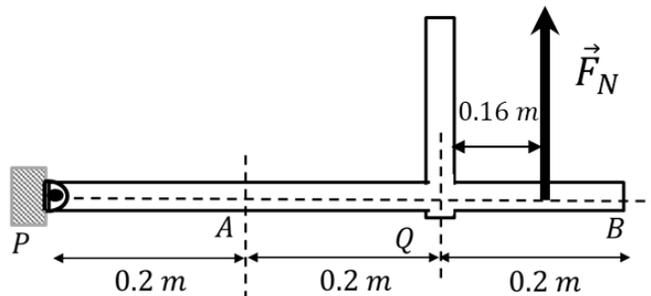


Fig. 3.20.

PARTE II. EQUILIBRIO, PARTE UNO.

En esta sección, se aplican los conceptos definidos y desarrollados anteriormente, a sistemas que contengan **fuerzas no concurrentes** y que presenten equilibrio estático. Por un lado, se estudian barras en equilibrio y por otro lado, una introducción a lo que se conoce como armaduras (estructuras) y armazones. Esto último, analizando las fuerzas internas que mantienen la conectividad para formar un cuerpo rígido o sólido. Recordemos que un cuerpo está en **equilibrio estático**, cuando la resultante de un **sistema de fuerzas** es nula, entendiéndose a que se refiere a las fuerzas y torques netos y operativamente funciona como:

$$\vec{F}_N = \vec{F}_A + \vec{F}_B + \dots + \vec{F}_i = \sum \vec{F}_i = \vec{0}$$

$$\vec{\tau}_0 = \vec{r}_{0A} \times \vec{F}_A + \vec{r}_{0B} \times \vec{F}_B + \dots + \vec{r}_{0i} \times \vec{F}_i + \vec{p}_A + \vec{p}_B + \dots + \vec{p}_i = \sum \vec{r}_{0i} \times \vec{F}_i + \sum \vec{p}_i = \vec{0}$$

donde \vec{p}_i son torques aplicados por pares de fuerza al cuerpo.

4.- Equilibrio de un cuerpo.

En esta parte del apunte, se entenderá un cuerpo como **una estructura rígida y sólida**. Se asume que el lector distingue y manipula el concepto de **centro de gravedad** de cuerpos regulares simples, como por ejemplo **barras y cilindros**. Con el objetivo de complementar otros conceptos, es necesario definir lo que se entiende por: a) Pivote o **pasador fijo**, aquel que **sujeta un cuerpo** con el suelo o una pared. b) Rodillo o **soporte**, como su nombre lo indica **soporta un cuerpo** con el suelo o una pared y c) **Empotramiento**, corresponde a un soporte **que une el cuerpo** con el suelo o pared.

La Fig. 5 muestra las fuerzas externas sobre el cuerpo (una barra en este caso) cuando el cuerpo se somete a los tipos de anclaje con una pared descritos anteriormente.

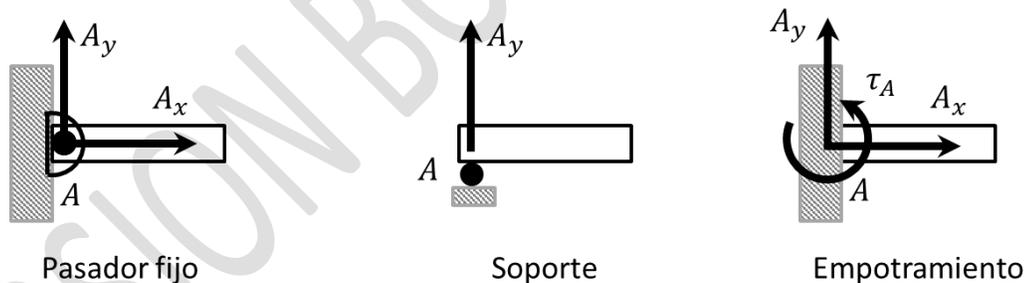


Fig. 5. Representación esquemática de las fuerzas externas para definir tipos de anclaje de una barra.

En la práctica se debe resolver (para el caso plano), dos ecuaciones provistas por la primera ley de Newton que determina el reposo traslacional y otra ecuación provista por el torque respecto de un punto, normalmente un pasador, que determina el reposo rotacional. Las tres ecuaciones determinan el equilibrio estático del cuerpo. Así:

$$\sum F_x = 0, \quad \rightarrow \quad \sum F_y = 0, \quad \rightarrow \quad \sum \tau_0 = 0$$

Problemas Resueltos de Fuerzas No Concurrentes.

4.1.- Una viga homogénea de 0.5 (kN) de peso y longitud 2.4 (m) está sometida a una fuerza de 3 (kN) y otra desconocida F como lo muestra la Fig. 4.1. La viga está fija mediante un pasador en O y se mantiene en equilibrio. Determine las reacciones en el pasador y el valor de la fuerza F .

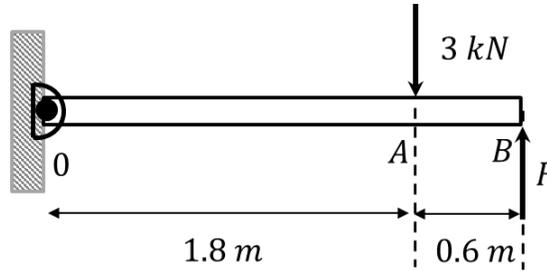


Fig. 4.1.

Resolución del problema

Conceptos previos.

a) Concepto de fuerza, b) Concepto de torque y c) Equilibrio de un cuerpo.

Resultado de aprendizaje.

Calcular reacciones de un cuerpo en equilibrio estático, usando el concepto de resultante nula.

Esquematizamos todas las fuerzas que actúan en la barra, de tal modo que se aplique directamente las tres ecuaciones definidas anteriormente para el equilibrio. Así:

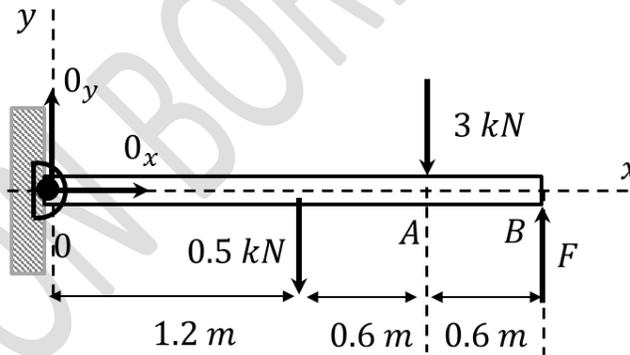


Fig. 4.2.

Así:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow 0_x = 0, \quad \rightarrow \sum F_y = 0 \rightarrow 0_y - 3.5 + F = 0, \quad \rightarrow \sum \tau_0 = 0 \rightarrow -6 + 2.4F = 0$$

De este modo, se obtiene que:

$$F = 2.5 \text{ (kN)}, \quad 0_y = 1 \text{ (kN)}, \quad 0_x = 0.$$

----- Fin del problema -----

4.2.- Considere una barra uniforme de 50 (kg) por metro de longitud como muestra la Fig. 4.3. La viga está empotrada en una pared en 0. Determine en este punto las reacciones en la barra.

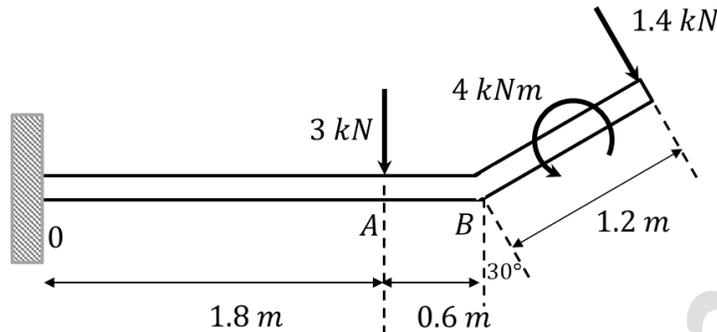


Fig. 4.3.

Resolución del problema

Conceptos previos.

a) Concepto de fuerza, b) Concepto de torque, c) Equilibrio de un cuerpo y d) Tipos de anclaje.

Resultado de aprendizaje.

Calcular reacciones de un cuerpo en equilibrio estático, usando el concepto de resultante nula.

Como en el problema anterior, se esquematizan todas las fuerzas no concurrentes que actúan en la barra, de tal modo que se aplique directamente las ecuaciones para el equilibrio. Notar que se han dispuesto un par de ejes coordenados para representar los vectores fuerzas en términos de sus componentes, como también los ángulos necesarios para determinar estas componentes y los torques respecto del origen.

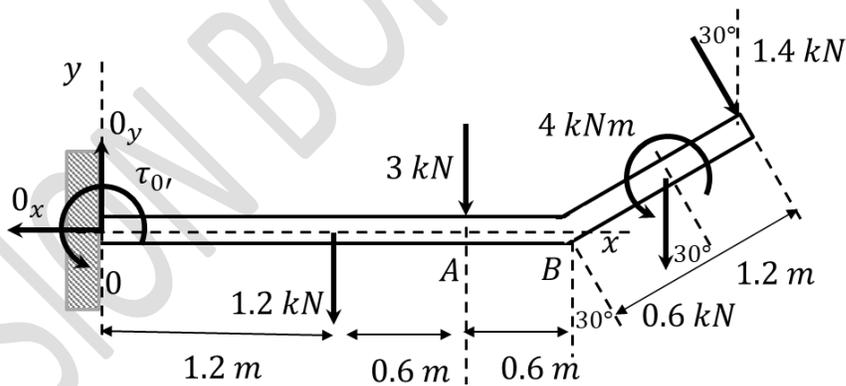


Fig. 4.4.

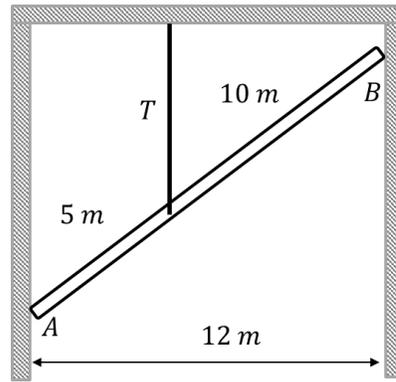
$$\sum F_x = 0 \rightarrow -0_x + 1.4 \text{sen}30 = 0, \quad \rightarrow \sum F_y = 0 \rightarrow 0_y - 1.2 - 3 - 0.6 - 1.4 \text{cos}30 = 0$$

$$\sum \tau_0 = 0 \rightarrow \tau_0 - 1.2 \cdot 1.2 - 3 \cdot 1.8 - 0.6 \cdot 2.9 - 1.4 \text{cos}30 \cdot 3.4 - 1.4 \text{sen}30 \cdot 0.6 + 4 = 0$$

$$0_x = 0.7 \text{ (kN)}, \quad 0_y = 6 \text{ (kN)}, \quad \tau_0 = 9 \text{ (kNm)}$$

----- Fin del problema -----

4.3.- Una barra uniforme de 15 (m) y 150 (kg) de masa está sometida a una tensión T que la mantiene en equilibrio como muestra la Fig. 4.5. Calcular las reacciones en A y B.



Resolución del problema

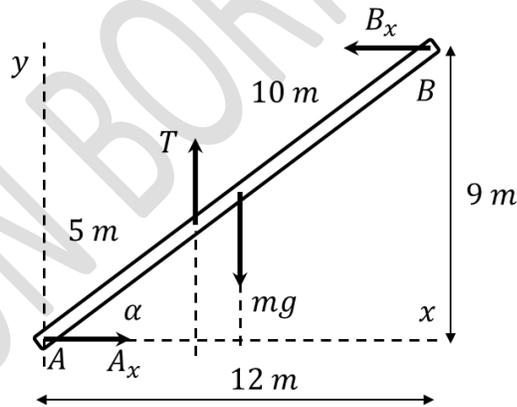
Conceptos previos.

a) Concepto de fuerza, b) Concepto de torque y c) Equilibrio de un cuerpo.

Resultado de aprendizaje.

Calcular reacciones de un cuerpo en equilibrio estático, usando el concepto de resultante nula.

La Fig. 4.6 muestra el diagrama de fuerzas no concurrentes que se aplican en la barra. Es importante notar que no existen fuerzas de roce con la pared en los puntos de contacto A y B.



Usando la condición de equilibrio se tiene:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow A_x - B_x = 0, \quad \rightarrow \sum F_y = 0 \rightarrow T - mg = 0$$

$$\sum \tau_A = 0 \rightarrow T \cdot 5 \cos \alpha - mg \cdot 7.5 \cos \alpha + B_x \cdot 9 = 0, \quad \rightarrow T \cdot 4 - mg \cdot 6 + B_x \cdot 9 = 0$$

$$T = mg, \quad B_x = A_x = \frac{2}{9} mg$$

----- Fin del problema -----

4.4.- Determine el valor de la tensión que sujeta en A la barra homogénea de longitud 1.5 (m) y masa 18 (kg) mostrada en la Fig. 4.7. Calcule, además las reacciones en el pasador en O.

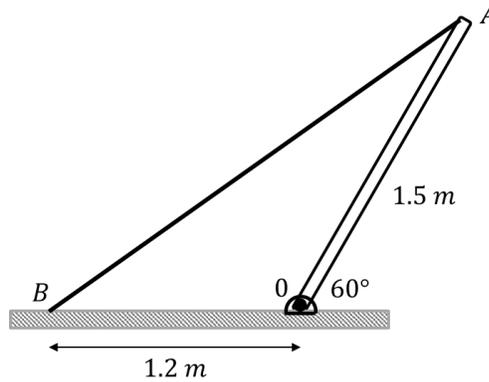


Fig. 4.7.

Resolución del problema

Conceptos previos.

a) Concepto de fuerza, b) Concepto de torque y c) Elementos de trigonometría.

Resultado de aprendizaje.

Calcular reacciones de un cuerpo en equilibrio estático, usando el concepto de resultante nula.

El diagrama de las cuatro fuerzas no concurrentes en la barra es:

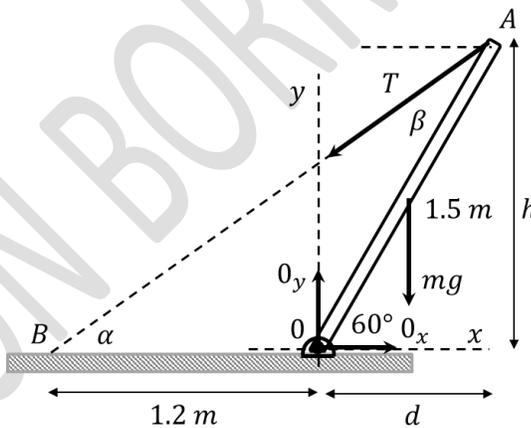


Fig. 4.8.

Usando la condición de equilibrio se tiene:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow 0_x - T \cos(60 - \beta) = 0, \quad \rightarrow \sum F_y = 0 \rightarrow 0_y - T \sin(60 - \beta) - mg = 0$$

$$\sum \tau_0 = 0 \rightarrow -mg \cdot 0.75 \cos 60 + T \sin \beta \cdot 1.5 = 0, \quad \rightarrow h = 1.5 \sin 60 = 1.3 \text{ (m)} \quad \rightarrow \tan \alpha = \frac{1.3}{1.2 + 0.75}$$

$$\therefore \alpha = 33.7^\circ, \rightarrow \beta = 26.3^\circ, \quad \therefore T = 99.5 \text{ (N)}, \quad 0_x = 82.8 \text{ (N)}, \quad 0_y = 231.6 \text{ (N)}$$

----- Fin del problema -----

4.5.- Una barra de 350 (N) de peso y 4 (m) de largo se mantiene en equilibrio por medio de un pasador en O y una cuerda AB. Un bloque de peso 90 (N) cuelga de la barra en C a una distancia de 3 (m) del pasador O. Determinar:

- Tensión de la cuerda AB.
- Reacciones en el pasador.
- Un sistema equivalente simple entre las siguientes fuerzas: Peso de la barra y tensión producida por el bloque.
- Un punto de concurrencia respecto de O entre las fuerzas aplicadas en el pasador, la tensión de la cuerda AB y el sistema equivalente simple determinado antes

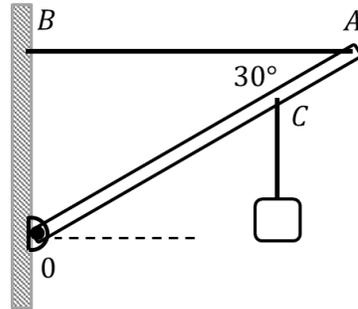


Fig. 4.9.

Resolución del problema

Conceptos previos.

a) Concepto de fuerza, b) Concepto de torque y c) Sistema equivalente simple.

Resultado de aprendizaje.

Calcular punto de concurrencia entre fuerzas presentes en sistema en equilibrio estático.

El diagrama de fuerzas que actúan sobre la barra está compuesto por:

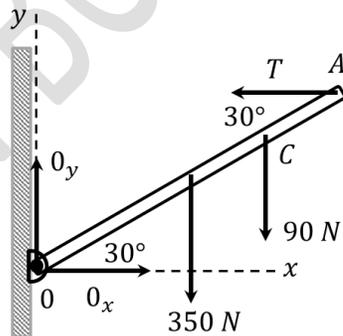


Fig. 4.10.

Usando la condición de equilibrio se tiene:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow 0_x - T = 0, \quad \rightarrow \sum F_y = 0 \rightarrow 0_y - 440 = 0, \rightarrow 0_y = 440 \text{ (N)}$$

$$\sum \tau_0 = 0 \rightarrow -350 \cdot 2\cos 30 - 90 \cdot 3\cos 30 + T \cdot 4\sin 30 = 0 \rightarrow \therefore T = 420 \text{ (N)}, \quad 0_x = 420 \text{ (N)}$$

El sistema equivalente simple se calcula como:

$$\sum F_i = -350 - 90 = -440 \text{ (N)}, \quad \sum \tau_i = -970\cos 30 = -840 \text{ (Nm)}, \therefore \bar{x} = 1.9 \text{ (m)}$$

Esto es, $(\vec{F}_N = -440\hat{j} (N))$ aplicado en el punto $x = 1.9 (m)$ desde 0. La forma de esquematizar las fuerzas que están actuando sobre la barra considerando el sistema equivalente más simple, se ilustra en la Fig. 4.11.

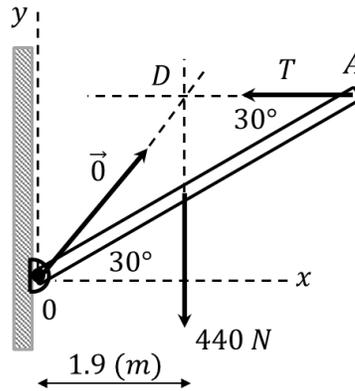


Fig. 4.11.

Donde el punto D representa el punto de concurrencia de estas fuerzas \vec{O} , \vec{T} y \vec{F}_N . Respecto de 0, la coordenada en x es $1.9 (m)$ y la coordenada en y es $2.0 (= 4\text{sen}30) (m)$. Para comprobar que el vector \vec{O} pasa por ese punto, basta determinar una recta asociada a este de la siguiente manera.

$$m = \frac{440}{420} \rightarrow y = 1.05x \quad \therefore \text{Si, } x = 1.9 \rightarrow y = 2.0$$

Lo cual significa que el vector \vec{O} pasa por el punto D, siendo concurrente en ese punto a los vectores \vec{T} y \vec{F}_N .

----- Fin del problema -----

4.6.- Una barra homogénea de $90 (N)$ de peso y $3 (m)$ de longitud se mantiene en equilibrio apoyada por su extremo A sobre una pared rugosa. Su extremo B está unido a un cable fijo a la pared en el punto C, cuya longitud es $4.7 (m)$ y formando un ángulo de 37° como muestra la Fig. 4.12.

- Demuestre que el ángulo α es 19.5° .
- Calcule el módulo de la tensión del cable y la fuerza de rozamiento en el punto de contacto A.
- Determine el punto de concurrencia respecto del punto A de todas las fuerzas aplicadas.

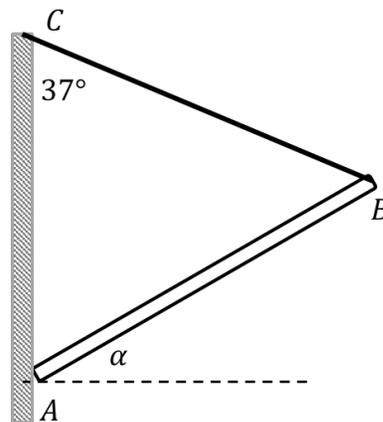


Fig. 4.12.

Resolución del problema

Conceptos previos.

a) Concepto de fuerza, b) Concepto de torque y c) Elementos de trigonometría.

Resultado de aprendizaje.

Calcular punto de concurrencia entre fuerzas presentes en sistema en equilibrio estático.

El diagrama de fuerzas que actúan sobre la barra está compuesto por:

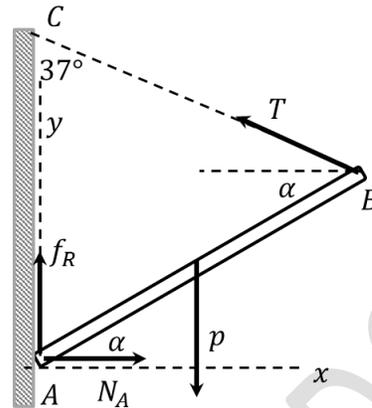


Fig. 4.13.

Usando el teorema del seno, se establece que:

$$\frac{\text{sen}37}{3} = \frac{\text{sen}(90 - \alpha)}{4.7} \rightarrow \alpha = 19.5^\circ$$

Usando la condición de equilibrio se tiene:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow N_A - T \cos 53^\circ = 0, \quad \rightarrow \sum F_y = 0 \rightarrow f_R + T \text{sen} 53 - p = 0$$

$$\sum \tau_A = 0 \rightarrow -p \cdot 1.5 \cos 19.5 + 3 \cdot T \text{sen} 72.5 = 0,$$

$$\therefore T = 44.4 \text{ (N)}, \quad N_A = 26.7 \text{ (N)}, \quad f_R = 54.5 \text{ (N)}$$

Para determinar el punto de concurrencia se hace lo siguiente.

$$\vec{F}_A = 26.7\hat{i} + 54.5\hat{j} \text{ (N)}, \rightarrow \theta = 63.9^\circ, \quad \therefore y_A = 2.04x \text{ (recta asociada al vector } \vec{F}_A)$$

$$B(2.83, 1.0) \text{ (m)} \rightarrow y_B - 1 = 1.33(x - 2.83) \text{ (recta asociada al vector } \vec{T})$$

Combinando las rectas, se encuentra que el punto de concurrencia entre ellas es:

$$x_C = 1.4 \text{ (m)}, \quad y_C = 2.9 \text{ (m)}$$

----- Fin del problema -----

4.7.- La barra homogénea AB de la Fig. 4.14 tiene una masa de 4 (kg) y longitud 2 (m). La barra se mantiene en equilibrio apoyada en C y a 0.5 (m) desde su extremo A y mediante un cable unido al extremo B. El soporte en C tiene un roce estático. Del extremo A de la barra cuelga un cuerpo de masa 6 (kg). Determinar la tensión de la cuerda en B, la fuerza de roce y la reacción en C.

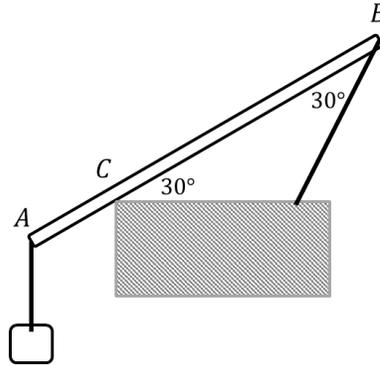


Fig. 4.14.

Resolución del problema

Conceptos previos.

a) Concepto de fuerza b) Concepto de torque y c) Elementos de trigonometría.

Resultado de aprendizaje.

Calcular reacciones de un cuerpo en equilibrio estático usando las ecuaciones para esta condición.

El diagrama de fuerzas y las ecuaciones para resolver el problema se describen a continuación.

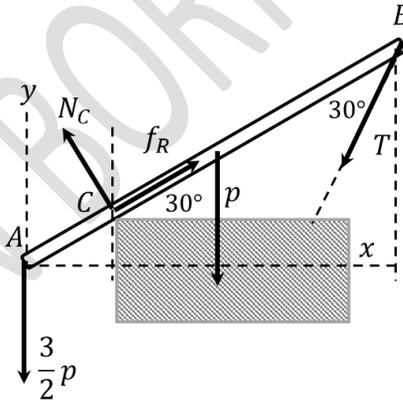


Fig. 4.15.

$$\sum F_x = 0 \rightarrow -N_C \text{sen}30 + f_R \text{cos}30 - T \text{sen}30 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow N_C \text{cos}30 + f_R \text{sen}30 - T \text{cos}30 - 10g = 0$$

$$\sum \tau_C = 0 \rightarrow 6g \cdot 0.5 \text{cos}30 - 4g \cdot 0.5 \text{cos}30 - T \text{sen}30 \cdot 1.5 = 0,$$

$$\therefore T = \frac{2\sqrt{3}}{3}g \text{ (N)}, \quad N_C = \frac{16\sqrt{3}}{3}g \text{ (N)}, \quad f_R = 6g \text{ (N)}$$

----- Fin del problema -----

4.8.- Una varilla de 3.6 (m) de longitud y peso 70 (N) está apoyada en el suelo en el punto A y en el escalón C como muestra la Fig. 4.16. La varilla está en equilibrio por efecto de la fuerza de roce en el extremo A de ella y no se considera que actúe roce en el escalón C. Calcular:

- Las reacciones en A y en C.
- La fuerza de roce en A.
- Punto de concurrencia de las fuerzas sobre la barra respecto de A.

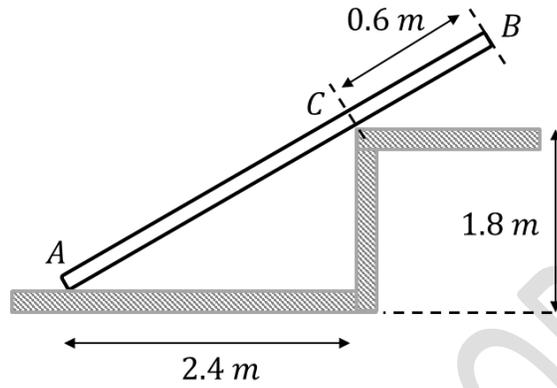


Fig. 4.16.

Resolución del problema

Conceptos previos.

a) Concepto de fuerza b) Concepto de torque y c) Punto de concurrencia.

Resultado de aprendizaje.

Calcular reacciones de un cuerpo en equilibrio estático, usando las ecuaciones para esta condición.

El diagrama de fuerzas que actúan sobre la barra está compuesto por:

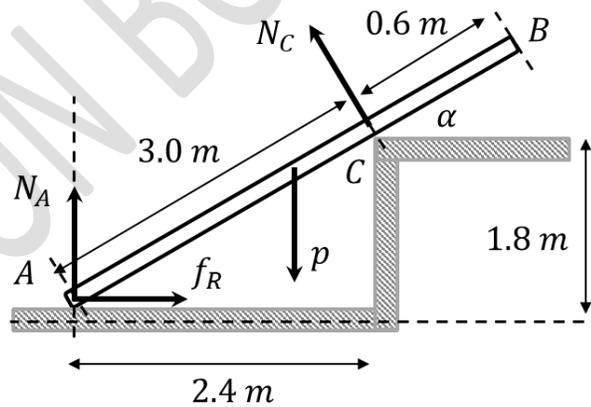


Fig. 4.17.

Las ecuaciones que dan la condición de equilibrio son:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow f_R - N_C \operatorname{sen} \alpha = 0, \quad \rightarrow \sum F_y = 0 \rightarrow N_A + N_C \operatorname{cos} \alpha - p = 0$$

$$\sum \tau_A = 0 \rightarrow -p \cdot 1.8 \operatorname{cos} \alpha + N_C \cdot 3 = 0, \quad \text{donde, } \operatorname{sen} \alpha = \frac{3}{5} \quad \operatorname{cos} \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\therefore N_A = 43.12 \text{ (N)}, \quad N_C = 33.6 \text{ (N)}, \quad f_R = 20.16 \text{ (N)}$$

Para determinar el punto de concurrencia entre las fuerzas aplicadas en A el peso y la fuerza aplicada en C, se tiene:

$$\vec{F}_A = 20.16\hat{i} + 43.12\hat{j}, \rightarrow \tan\theta = 2.139, \rightarrow y_A = 2.139x$$

$$\vec{N}_C = -20.16\hat{i} + 26.88\hat{j}, \rightarrow \tan\theta = -1.333, \rightarrow y_C - 1.8 = -1.333(x - 2.4)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales, se tiene:

$$x_C = 1.44 \text{ (m)}, \quad y_C = 3.08 \text{ (m)}$$

----- Fin del problema -----

4.9.- Una barra de 3 (kg) y largo 4 (m) se mantiene en equilibrio por medio de un pasador O y una cuerda. Dos masas de 1.5 (kg) y 2.5 (kg) cuelgan de la barra tal como lo indica la Fig. 4.18. Calcular:

- La tensión de la cuerda y las reacciones en el pasador.
- Un sistema equivalente simple entre las fuerzas verticales aplicadas en la barra.
- El punto de concurrencia entre las fuerzas aplicadas en O, la fuerza equivalente simple definida antes y la tensión de la cuerda.

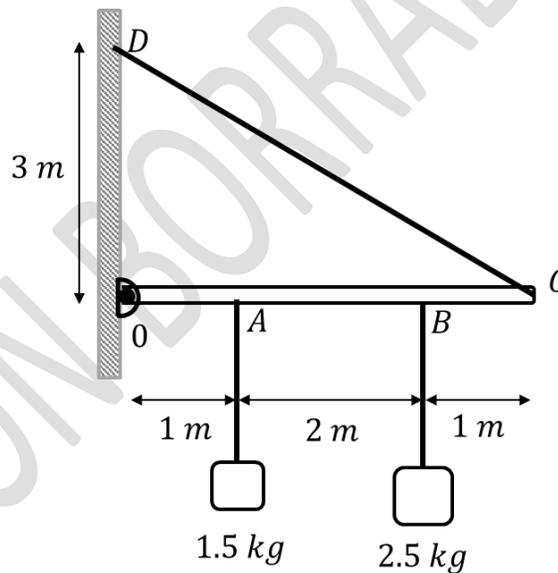


Fig. 4.18.

Resolución del problema

Conceptos previos.

a) Concepto de fuerza b) Concepto de torque y c) Punto de concurrencia.

Resultado de aprendizaje.

Calcular reacciones de un cuerpo en equilibrio estático, usando las ecuaciones para esta condición.

El diagrama de fuerzas que actúan sobre la barra está compuesto por:

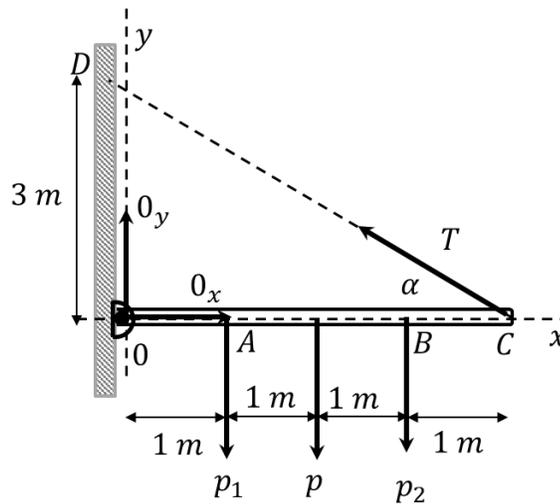


Fig. 4.19.

Cuando se aplican las ecuaciones de equilibrio al diagrama anterior se tiene:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow 0_x - T \cos \alpha = 0, \quad \rightarrow \sum F_y = 0 \rightarrow 0_y + T \operatorname{sen} \alpha - p - p_1 - p_2 = 0$$

$$\sum \tau_0 = 0 \rightarrow -p_1 \cdot 1 - p \cdot 2 - p_2 \cdot 3 + T \operatorname{sen} \alpha \cdot 4 = 0, \quad \text{donde, } \operatorname{sen} \alpha = \frac{3}{5} \quad \cos \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\therefore T = 6.25g, \quad 0_x = 5g, \quad 0_y = 3.25g$$

El sistema equivalente más simple, se obtiene de la siguiente manera.

$$\vec{F}_N = (-p - p_1 - p_2)\hat{j} = -7g\hat{j}, \quad \rightarrow \vec{r}_N = (-2p - p_1 - 3p_2)\hat{k} = -15g\hat{k}$$

$$\vec{F}_N = (-p - p_1 - p_2)\hat{j} = -7g\hat{j}, \quad \rightarrow \bar{x} = \frac{\|\vec{r}_N\|}{\|\vec{F}_N\|} = 2.14 \text{ (m)}$$

Para determinar el punto de concurrencia respecto del origen 0, se interceptan las rectas asociadas a los vectores $\vec{0}$ y \vec{T} .

$$\text{Recta asociada a } \vec{0}: y_0 = 0.65x, \quad \rightarrow \text{Recta asociada a } \vec{T}: y_T = -0.75(x - 4)$$

Igualando, se obtiene el punto de concurrencia de los vectores:

$$x_C = 2.14 \text{ (m)}, \quad y_C = 1.4 \text{ (m)}$$

Notar que la coordenada x es exactamente igual a aquella donde se aplica la fuerza que representa el sistema equivalente más simple.

----- Fin del problema -----

4.10.- Una barra de 3 (kg) y largo 4 (m) se mantiene en equilibrio por medio de un pasador O y una cuerda. Un letrero de 4 kg cuelga de la barra tal como lo indica la Fig. 4.20. Calcular:

- La tensión de la cuerda y las reacciones en el pasador.
- Un sistema equivalente simple entre las fuerzas verticales aplicadas en la barra.
- El punto de concurrencia entre las fuerzas aplicadas en O , la fuerza equivalente simple definida antes y la tensión de la cuerda.

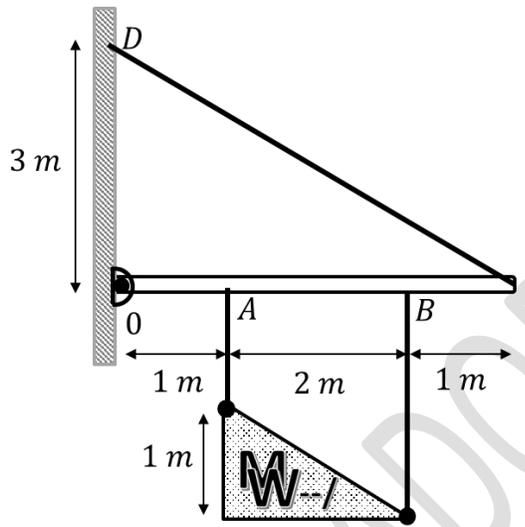


Fig. 4.20.

Resolución del problema

Conceptos previos.

a) Concepto de fuerza b) Concepto de torque y c) Punto de concurrencia.

Resultado de aprendizaje.

Calcular reacciones de un cuerpo en equilibrio estático, usando las ecuaciones para esta condición.

El diagrama de fuerzas que actúan sobre la barra y el letrero está compuesto por:

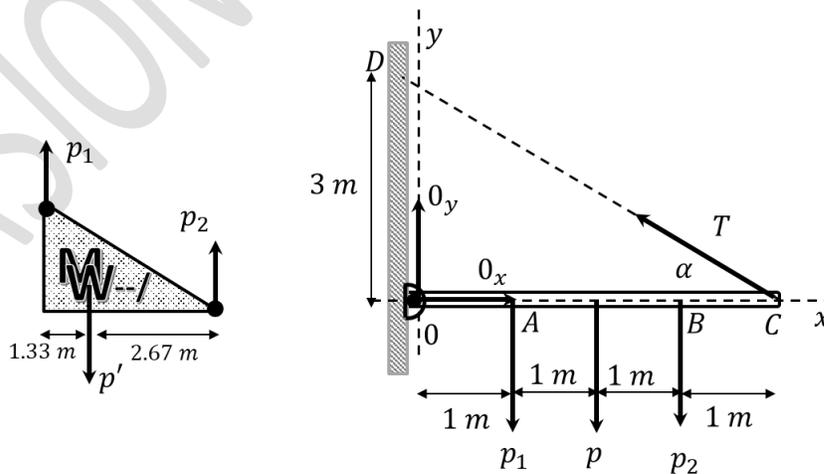


Fig. 4.21.

Para determinar los valores de los p_1 y p_2 , se considera el diagrama de fuerzas del letrero, en este caso.

$$\sum F_y = 0 \rightarrow p_1 + p_2 - p' = 0, \quad \rightarrow \sum \tau_{cg} = 0 \rightarrow -p_1 \cdot 1.33 + p_2 \cdot 2.67 = 0$$

donde cg representa el centro de gravedad de letrero. Resolviendo, $p_2 = \frac{4}{3}g$, $p_1 = \frac{8}{3}g$. De este modo, considerando el diagrama de fuerzas de la barra, se tiene:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow 0_x - T \cos \alpha = 0, \quad \rightarrow \sum F_y = 0 \rightarrow 0_y + T \operatorname{sen} \alpha - p - p_1 - p_2 = 0$$

$$\sum \tau_0 = 0 \rightarrow -p_1 \cdot 1 - p \cdot 2 - p_2 \cdot 3 + T \operatorname{sen} \alpha \cdot 4 = 0, \quad \text{donde, } \operatorname{sen} \alpha = \frac{3}{5} \quad \operatorname{cos} \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\therefore T = 51.7 \text{ (N)}, \quad 0_x = 41.2 \text{ (N)}, \quad 0_y = 37.6 \text{ (N)}$$

El sistema equivalente más simple, se obtiene de la siguiente manera.

$$\vec{F}_N = (-p - p_1 - p_2)\hat{j} = -7g\hat{j}, \quad \rightarrow \vec{\tau}_N = (-2p - p_1 - 3p_2)\hat{k} = -\frac{38}{3}g\hat{k}$$

$$\vec{F}_N = (-p - p_1 - p_2)\hat{j} = -7g\hat{j}, \quad \rightarrow \bar{x} = \frac{\|\vec{\tau}_N\|}{\|\vec{F}_N\|} = 1.8 \text{ (m)}$$

Para determinar el punto de concurrencia respecto del origen 0, se interceptan las rectas asociadas a los vectores $\vec{0}$ y \vec{T} .

$$\text{Recta asociada a } \vec{0}: y_0 = 0.91x, \quad \rightarrow \text{Recta asociada a } \vec{T}: y_T = -0.75(x - 4)$$

Igualando, se obtiene el punto de concurrencia de los vectores:

$$x_C = 1.8 \text{ (m)}, \quad y_C = 1.64 \text{ (m)}$$

Notar que la coordenada x es exactamente igual a aquella donde se aplica la fuerza que representa el sistema equivalente más simple.

----- Fin del problema -----

Problemas Propuestos de Fuerzas No Concurrentes.

4.11.- Una barra OB de peso 350 (N) y largo 4 (m) se mantiene en equilibrio mediante una cuerda AB sujeta desde el extremo B a la pared en A. Además, desde una distancia de 3 m del punto O, un cable sujeta un peso de 90 (N) como muestra la Fig. 4.22. Calcular:

- Módulo de la tensión de la cuerda AB.
- Reacciones en el pasador en O.
- Un sistema equivalente (No simple) entre las fuerzas aplicadas en O y el peso de la barra.
- Punto de concurrencia respecto del punto O, entre las tensiones aplicadas en la barra y la resultante obtenido en c).

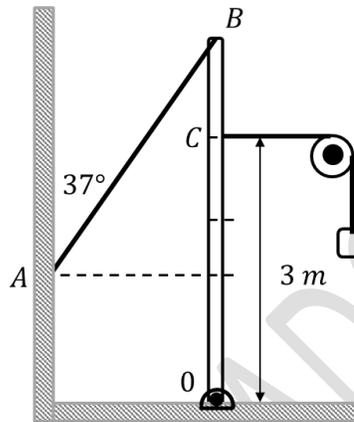


Fig. 4.22.

Respuestas: **Evaluación concepto de punto de concurrencia y equilibrio de un cuerpo rígido.**

- $T = 112 \text{ (N)}$, $b) O_x = 22.5 \text{ (N)}$, $O_y = 439.4 \text{ (N)}$
- $\vec{F}_N = \vec{O} + \vec{w} = -22.5\hat{i} + 89.4\hat{j} \text{ (N)}$, $d) P_c(-0.75, 3) \text{ (m)}$

4.12.- Para la Fig. 4.23 mostrada a continuación, considere las mismas variables del problema 4.11 y calcule. Para la letra c) obtenga el sistema equivalente simple.

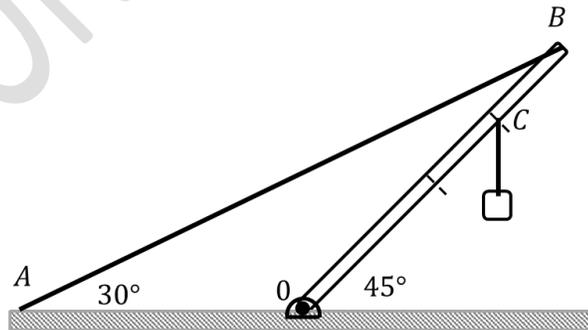


Fig. 4.23.

Respuestas: **Evaluación concepto de punto de concurrencia y equilibrio de un cuerpo rígido.**

- $T = 662.5 \text{ (N)}$, $b) O_x = 573.7 \text{ (N)}$, $O_y = 771.3 \text{ (N)}$
- $\vec{F}_N = -440\hat{j} \text{ (N)}$, $\bar{x} = 1.56 \text{ (m)}$ $d) P_c(1.57, 2.1) \text{ (m)}$

4.13.- Una barra de peso $p_1 = mg$ y de longitud 6 m , está dispuesta de manera horizontal y con un pasador fijo en O. La barra está sujeta por una cuerda AB. En el extremo derecho D se aplica una fuerza $p_2 = 2mg$ como muestra la Fig. 4.24. Determinar:

- La tensión de la cuerda y reacciones en el pasador en función del peso mg .
- Punto de concurrencia respecto de O, entre las fuerzas aplicadas en O, la tensión de la cuerda y la fuerza del sistema equivalente simple entre los pesos p_1 y p_2 .

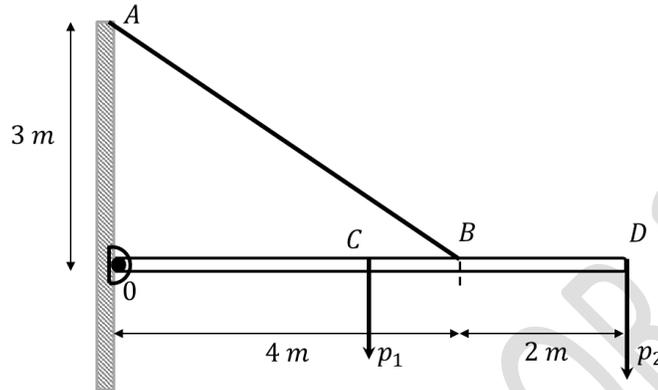


Fig. 4.24.

Respuestas: **Evaluación concepto de punto de concurrencia y equilibrio de un cuerpo rígido.**

a) $T = 6.25mg$, $O_x = 5mg$, $O_y = -0.75mg$, b) $P_c(5.0, -0.75)$ (m)

4.14.- Una barra OA de largo 4 (m) y masa 2 (kg) está soportada en un pasador en O como muestra la Fig. 4.25 y formando un ángulo de 30° respecto de la pared vertical. En el extremo A de la barra se conecta una cuerda AB de largo 6 (m) .

- Determinar la posición del punto B respecto del origen O.
- Calcular la tensión de la cuerda AB y reacciones del pasador.
- Calcular el punto de concurrencia respecto de O, entre las reacciones del pasador O, el peso de la barra y la tensión de la cuerda.

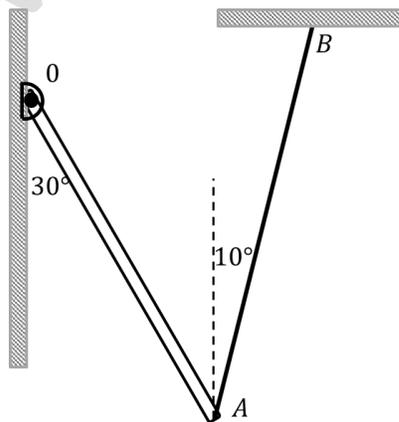


Fig. 4.25.

Respuestas: **Evaluación concepto de punto de concurrencia y equilibrio de un cuerpo rígido.**

a) $\vec{r}_{OB} = 3.04\hat{i} + 2.44\hat{j}$ (m), b) $T = 7.6$ (N), $O_x = 1.3$ (N), $O_y = 12.1$ (N), c) $P_c(1.0, -9.2)$ (m)

5.- Armaduras o estructuras. Método de los nudos y método de las secciones.

Una **armadura o estructura**, consiste en una colección de varillas que conforman un **cuerpo rígido** y que pueden tolerar grandes cargas. Usualmente, el peso de cada varilla es despreciable respecto de las fuerzas externas que la soportan.

La idea central consiste en determinar las **fuerzas internas** a las que son sometidas las varillas de la estructura. Para ello, se utilizan dos métodos: el **método de los nudos**, cuyo concepto físico se sustenta en la **primera ley de Newton** (fuerzas concurrentes) y el **método de las secciones**, cuyo concepto físico se sustenta en el **equilibrio de un cuerpo rígido** (fuerzas no concurrentes). La aplicación de **ambos métodos**, sólo es posible cuando las **fuerzas externas** aplicada sobre la estructura se realiza sobre **los nudos** de ella (razón para no considerar el peso). El caso en que las fuerzas externas no se aplican en los nudos, se verá más adelante.

En la práctica, cuando se utiliza el método de los nudos (análisis de fuerzas en los nudos), se aplica la siguiente regla: Las fuerzas aplicadas en las varillas (fuerzas internas) son contrarias a las aplicadas en los nudos, recordando la tercera ley de Newton y de acuerdo al siguiente esquema mostrado en la Fig. 6.

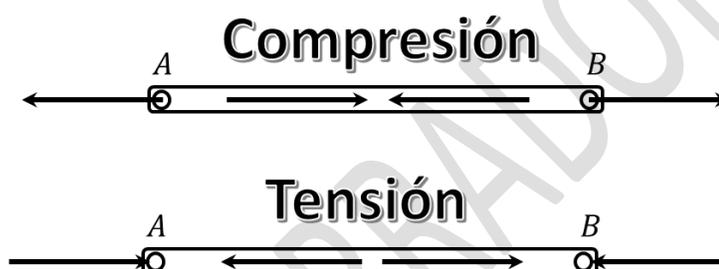


Fig. 6. Método de los nudos para determinar si una fuerza interna está en tensión o compresión.

Por lo tanto, después de haber realizado un análisis de fuerzas externas y considerando las ecuaciones de equilibrio, se analiza la estructura, nudo a nudo, aplicando la primera ley de Newton. Si las fuerzas aplicadas en los nudos apuntan en un sentido, usando el esquema de la Fig. 6 se interpreta que, en la varilla, las fuerzas están en sentido contrario. Así, se sabe si la varilla está en tensión o compresión.

Para el caso del método de las secciones no se utiliza la regla anterior, sino que al realizar el corte "imaginario" sobre la estructura, el signo más (+) indica si la varilla está en tensión y el signo menos (-) si está en compresión. Hay que considerar que cuando se realiza un corte sobre una varilla, en ese punto, aparecen fuerzas internas y de acuerdo con la tercera ley de Newton, son de igual módulo, sentidos opuestos y aplicadas en ambas partes de la varilla.

Por lo tanto, después de haber realizado un análisis de fuerzas externas y considerando las ecuaciones de equilibrio, se analiza la estructura, considerando el corte imaginario y aplicando nuevamente las ecuaciones de equilibrio. Si el resultado de las fuerzas internas es positivo la varilla está en tensión, de lo contrario en compresión.

Problemas Resueltos de Estructuras (Armaduras).

5.1.- La armadura mostrada en la Fig. 5.1 se compone de cinco varillas rígidas cuyas dimensiones se expresan en la figura y está anclada mediante un pasador en A y un soporte en D. Sobre el nudo B de la armadura se aplica una carga de 5 (kN). Determine las fuerzas internas de las varillas indicando si están en tensión o compresión.

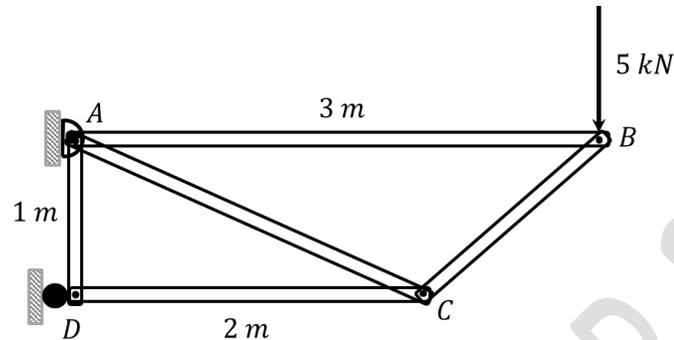


Fig. 5.1.

Resolución del problema

Conceptos previos.

a) Concepto de fuerza b) Concepto de torque y c) Equilibrio de un cuerpo.

Resultado de aprendizaje.

Calcular fuerzas internas en estructuras formadas por varias varillas rígidas sometidas a fuerzas externas.

Comenzamos realizando un diagrama de fuerzas externas a la armadura y utilizamos la condición de equilibrio para calcular las reacciones en el pasador A y en el soporte D.

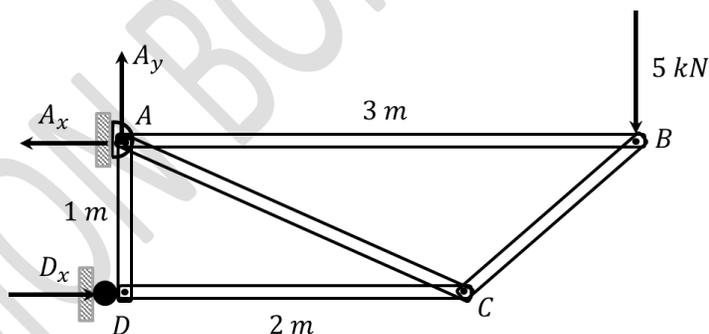


Fig. 5.2.

Así:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow D_x - A_x = 0, \quad \rightarrow \sum F_y = 0 \rightarrow A_y - 5 = 0, \quad \rightarrow \sum \tau_A = 0 \rightarrow -5 \cdot 3 + D_x \cdot 1 = 0$$

$$\therefore A_y = 5 \text{ (kN)}, \quad A_x = D_x = 15 \text{ (kN)}$$

Una vez conocido el valor de las reacciones, utilizamos un método (nudo o secciones) para calcular las fuerzas internas en las varillas. Se utilizará en este problema ambos métodos para mostrar la ventajas y desventajas de cada uno.

Para resolver el problema mediante el método de los nudos, se parte por el nudo donde haya un número menor de fuerzas que concurren al nudo, por ejemplo, el B o D y a continuación el resto de ellos. La Fig. 5.3 ilustra los tres nudos que son necesarios para resolver el problema por este método.

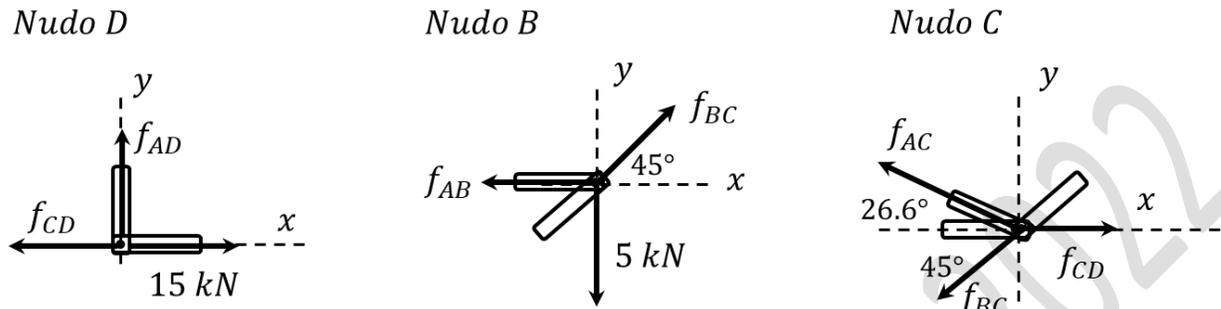


Fig. 5.3.

Los valores de los ángulos se han obtenido mediante las longitudes de cada varilla. Notar que en este método todas las fuerzas son concurrentes al nudo, por lo que basta realizar suma de fuerzas en cada eje coordinado. El sentido de las fuerzas en cada nudo se ubicó asumiendo una configuración del nudo en equilibrio, esto para evitar valores negativos.

$$\text{Nudo D: } \sum F_x = 0 \rightarrow f_{CD} = 15 \text{ (kN)[C]}, \quad \rightarrow \sum F_y = 0 \rightarrow f_{AD} = 0$$

$$\text{Nudo B: } \sum F_x = 0 \rightarrow f_{BC} \cos 45 = f_{AB}, \quad \rightarrow \sum F_y = 0 \rightarrow f_{BC} \sin 45 = 5 \\ \therefore f_{BC} = 7.07 \text{ (kN) [C]}, \quad f_{AB} = 5 \text{ (kN)[T]}$$

$$\text{Nudo C: } \sum F_x = 0 \rightarrow f_{AC} \cos 26.6 + f_{BC} \cos 45 = 15 \text{ (kN)}, \quad \rightarrow \sum F_y = 0 \rightarrow f_{AC} \sin 26.6 = f_{BC} \sin 45 \\ \therefore f_{AC} = 11.2 \text{ (kN) [T]}$$

Ahora se debe aplicar la regla de la Fig. 6 para interpretar si las varillas están en tensión [T] ó compresión [C]. En el caso de la fuerza f_{CD} , en el nudo se aplica con sentido hacia la izquierda, por lo tanto, en la varilla se aplica hacia la derecha, esto es, la fuerza interna en la varilla está en compresión. Los mismo se realiza con el resto de las fuerzas internas aplicadas en los nudos.

Para resolver el problema usando el método de las secciones se hará un corte imaginario a la estructura en las varillas AB, AC y CD tal como muestra la Fig. 5.4 (parte izquierda), obteniéndose los siguientes diagramas.

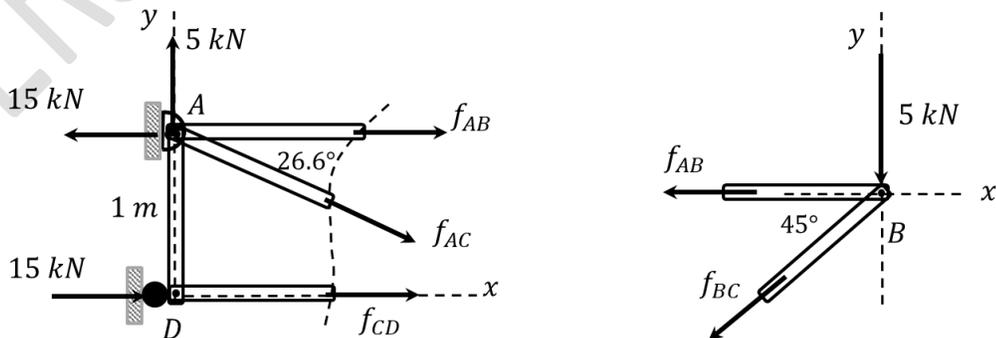


Fig. 5.4.

Como se ve, las fuerzas no concurren en la parte izquierda de la figura, por lo tanto, se usan las ecuaciones de equilibrio para resolver el problema. De este modo:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow -15 + f_{AB} + f_{AC} \cos 26.6 + 15 + f_{CD} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow 5 - f_{AC} \sin 26.6 = 0, \quad \therefore f_{AC} = 11.2 \text{ (kN)[T]}$$

$$\sum \tau_A = 0 \rightarrow 15 \cdot 1 + f_{CD} \cdot 1 = 0, \quad \therefore f_{CD} = -15 \text{ (kN)[C]}, \quad f_{AB} = 5 \text{ (kN)[T]}$$

La fuerza faltante f_{BC} , se calcula realizando otro corte imaginario a la estructura, por ejemplo, cortando las barras AB y BC (derecha de la Fig. 5.4). En este caso resulta que $f_{BC} = -7.07 \text{ (kN) [C]}$. Como se ve, los resultados son iguales usando uno u otro método.

----- Fin del problema -----

5.2.- La armadura que se muestra en la Fig. 5.5 se compone de siete varillas, todas ellas de longitud $L = 2 \text{ (m)}$ y de peso despreciable. La armadura está anclada mediante un pasador en A y de un soporte en C. Como se ve en la figura, sobre la armadura actúan tres cargas en los nudos B, D y E. Además, los nudos E y D son puntos medios de AB y BC respectivamente. Determine:

- Mediante el método de los nudos, las fuerzas internas en las varillas AB, AE, BC, BE, BD y CD indicando si están en tensión o compresión.
- Mediante el método de las secciones, calcule las fuerzas internas para las varillas AB, BE y DE.

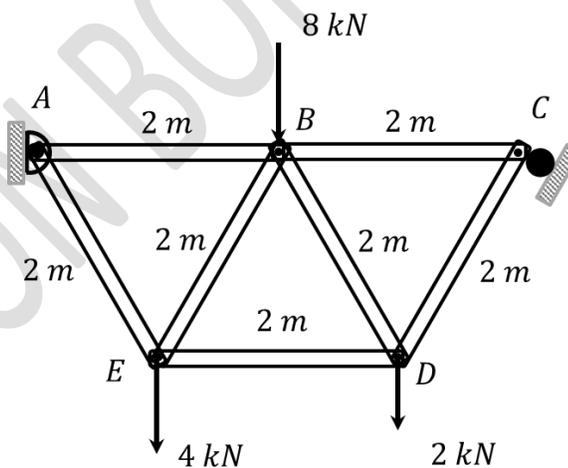


Fig. 5.5.

Resolución del problema

Conceptos previos.

- Equilibrio de un cuerpo rígido
- Método de los nudos
- Método de las secciones.

Resultado de aprendizaje.

Calcular fuerzas internas en estructuras formadas por varias varillas rígidas sometidas a fuerzas externas.

$$\therefore f_{BC} = 15 \text{ (kN) [C]}, \quad f_{BD} = 5.2 \text{ (kN)[C]}, \quad f_{BE} = 4.04 \text{ (kN)[C]}$$

$$\text{Nudo C: } \sum F_x = 0 \rightarrow f_{BC} - f_{CD} \cos 60 - 13 \sin 60 = 0, \quad \rightarrow \sum F_y = 0 \rightarrow 13 \cos 60 = f_{CD} \sin 60$$

$$\therefore f_{CD} = 7.5 \text{ (kN) [T]}$$

Aplicando el método de las secciones y realizando el corte como muestra la Fig. 5.8, se tiene:

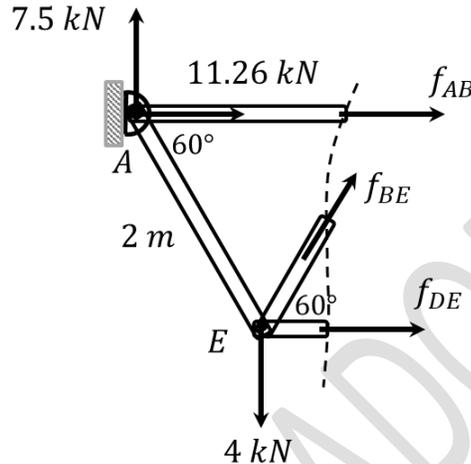


Fig. 5.8.

$$\sum F_x = 0 \rightarrow 11.26 + f_{AB} + f_{BE} \cos 60 + f_{DE} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow 7.5 + f_{BE} \sin 60 = 4, \quad \therefore f_{BE} = -4.04 \text{ (kN)[C]}$$

$$\sum \tau_A = 0 \rightarrow -4 \cdot 1 + f_{BE} \cos 60 \cdot 2 \sin 60 + f_{BE} \sin 60 \cdot 1 + f_{DE} \cdot 2 \sin 60 = 0$$

$$\therefore f_{AB} = -15.6 \text{ (kN)[C]}, \quad f_{DE} = 6.3 \text{ (kN)[T]}$$

Como se observa, el procedimiento para resolver el problema es idéntico al anterior, es decir, se considera la armadura como un cuerpo rígido y se aplican las ecuaciones de equilibrio para las fuerzas externas a la armadura, esto es, las cargas y los anclajes. Posteriormente se decide que método usar para calcular las fuerzas internas de las varillas que conforman la estructura. Si se decide el método de los nudos, no olvidar que está relacionado con fuerzas concurrentes en los nudos, por el contrario, si se decide aplicar el método de las secciones, entonces no olvidar que habrá fuerzas concurrentes y no concurrentes.

----- Fin del problema -----

5.3.- La Fig. 5.9 muestra una estructura conformada por siete varillas. La varilla $AB = DE = CD = 2(m)$. El punto A representa un pasador fijo, en cambio el punto E un soporte o rodillo. Calcular mediante el método de los nudos las fuerzas internas en cada varilla indicando si están en tensión o compresión.

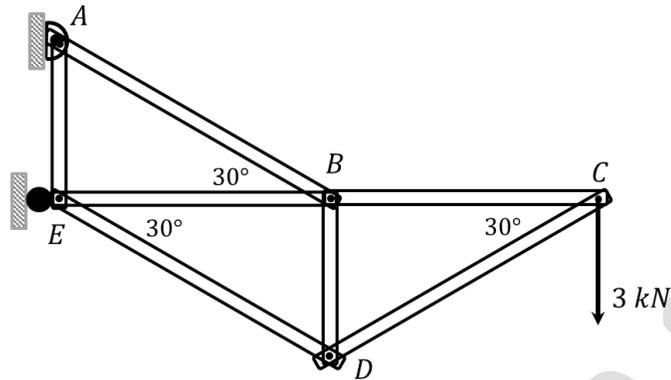


Fig. 5.9.

Resolución del problema

Conceptos previos.

a) Equilibrio de un cuerpo rígido y b) Método de los nudos.

Resultado de aprendizaje.

Calcular fuerzas internas en estructuras formadas por varias varillas rígidas sometidas a fuerzas externas usando método de los nudos.

Se aplica la condición de equilibrio a las fuerzas externas aplicadas a la armadura y se calcula las reacciones en el pasador y en el soporte. Para ello, se utiliza el siguiente diagrama de fuerzas no concurrentes.

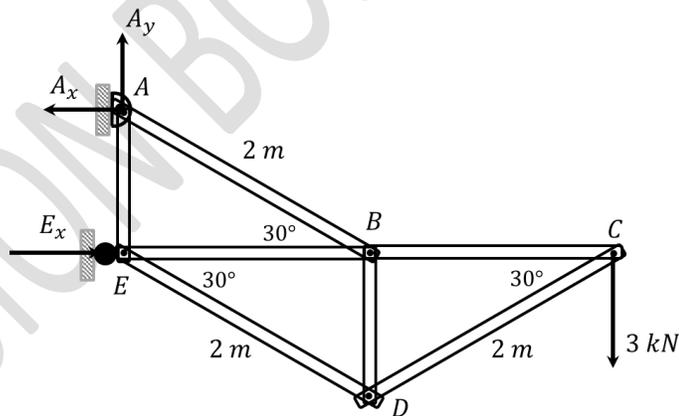


Fig. 5.10.

$$\sum F_x = 0 \rightarrow -A_x + E_x = 0, \quad \rightarrow \sum F_y = 0 \rightarrow A_y - 3 = 0,$$

$$\sum \tau_A = 0 \rightarrow E_x \cdot 2 \operatorname{sen} 30 - 3 \cdot 2 \cdot 2 \operatorname{cos} 30 = 0$$

$$\therefore A_y = 3 \text{ (kN)}, \quad A_x = E_x = 6\sqrt{3} \text{ (kN)}$$

Para calcular las fuerzas internas de las varillas utilizando el método de los nudos, usamos el criterio de comenzar con el nudo que contiene menor número de fuerzas concurrentes. En este caso, el nudo C.

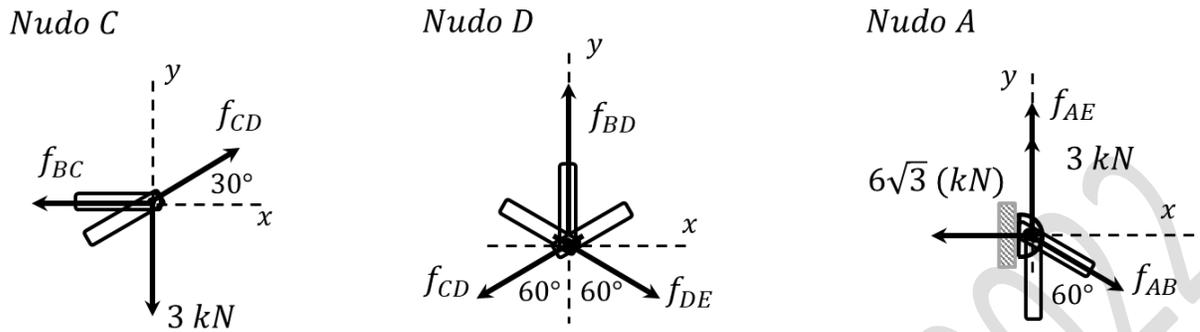


Fig. 5.11.

$$\begin{aligned} \text{Nudo C: } \sum F_x = 0 &\rightarrow f_{CD} \cos 30 - f_{BC} = 0, \quad \rightarrow \sum F_y = 0 \rightarrow f_{CD} \sin 30 = 3 \\ &\therefore f_{CD} = 6 \text{ (kN) [C]}, \quad f_{BC} = 3\sqrt{3} \text{ (kN) [T]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Nudo D: } \sum F_x = 0 &\rightarrow f_{DE} \sin 60 = f_{CD} \sin 60, \quad \rightarrow \sum F_y = 0 \rightarrow f_{BD} - f_{CD} \cos 60 - f_{DE} \cos 60 = 0 \\ &\therefore f_{DE} = 6 \text{ (kN) [C]}, \quad f_{BD} = 6 \text{ (kN) [T]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Nudo A: } \sum F_x = 0 &\rightarrow f_{AB} \sin 60 = 6\sqrt{3}, \quad \rightarrow \sum F_y = 0 \rightarrow f_{AE} + 3 - f_{AB} \cos 60 = 0 \\ &\therefore f_{AB} = 12 \text{ (kN) [T]}, \quad f_{AE} = 3 \text{ (kN) [C]} \end{aligned}$$

Cuando se resuelve el nudo E o el nudo B se obtiene para la fuerza interna $f_{BE} = 3\sqrt{3} \text{ (kN) [C]}$.

Para finalizar la resolución del problema, el diagrama que se muestra a continuación, representa las fuerzas internas que se ejercen en las varillas que componen la estructura.

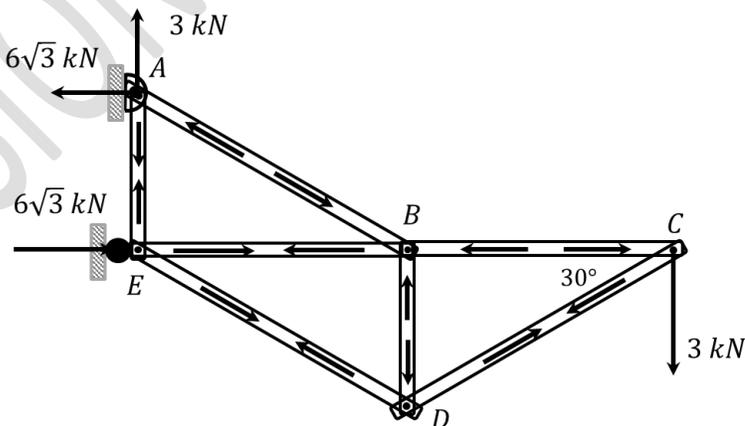


Fig. 5.12.

----- Fin del problema -----

5.4.- La armadura mostrada en la Fig. 5.13 consiste de siete barras rígidas. La armadura se sujeta mediante una cuerda en el nudo B, mientras que en el nudo A se aplica una fuerza de 30 (kN). En el punto E la armadura tiene un pasador fijo con la pared. Usando el método de las secciones, determinar las fuerzas internas en las varillas BD, BC, AC, CD, y CE indicando si están en tensión o compresión.

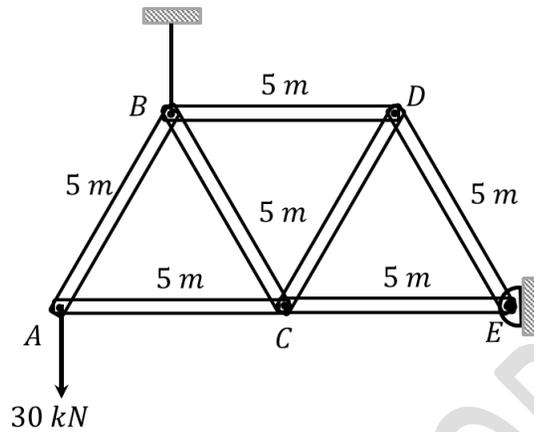


Fig. 5.13.

Resolución del problema

Conceptos previos.

a) Equilibrio de un cuerpo rígido y b) Método de las secciones.

Resultado de aprendizaje.

Calcular fuerzas internas en estructuras formadas por varias varillas rígidas sometidas a fuerzas externas usando método de las secciones.

Se aplica la condición de equilibrio a las fuerzas externas aplicadas a la armadura y se calcula las reacciones en el pasador y en el soporte. Para ello, se utiliza el siguiente diagrama de fuerzas no concurrentes.

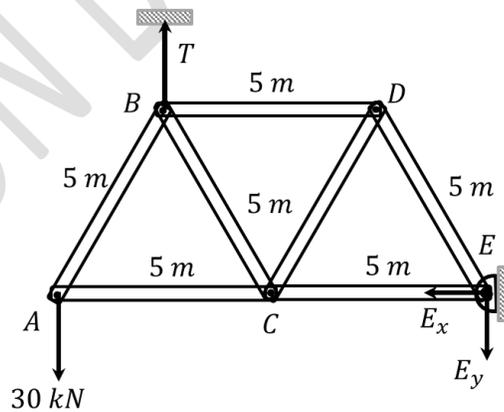


Fig. 5.14.

$$\sum F_x = 0 \rightarrow -A_x = 0, \quad \rightarrow \sum F_y = 0 \rightarrow T - 30 - E_y = 0,$$

$$\sum \tau_E = 0 \rightarrow 30 \cdot 10 - T \cdot 7.5 = 0$$

$$\therefore A_x = 0 \text{ (kN)}, \quad T = 40 \text{ (kN)}, \quad E_y = 10 \text{ (kN)}$$

Para calcular las fuerzas internas de las varillas utilizando el método de las secciones, veamos el siguiente esquema dado por la Fig. 5.15.

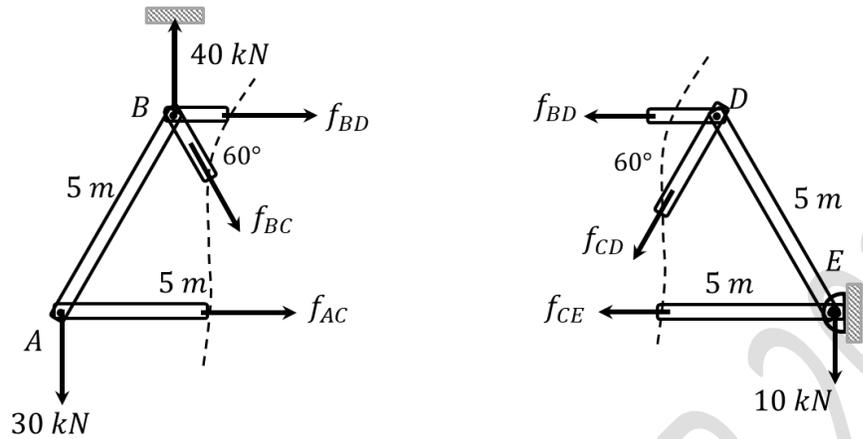


Fig. 5.15.

Las ecuaciones de equilibrio aplicadas a la parte izquierda de la figura resultan.

$$\sum F_x = 0 \rightarrow f_{BD} + f_{BC} \cos 60 + f_{AC} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow 40 - f_{BC} \sin 60 - 30 = 0, \quad \therefore f_{BC} = 11.55 \text{ (kN)}[T]$$

$$\sum \tau_B = 0 \rightarrow -30 \cdot 2.5 + f_{AC} \cdot 5 \sin 60 = 0, \quad \therefore f_{AC} = -17.3 \text{ (kN)}[C], \quad f_{BD} = 11.53 \text{ (kN)}[T]$$

Y al aplicar las ecuaciones de equilibrio a la parte derecha de la figura resultan.

$$\sum F_x = 0 \rightarrow -f_{BD} + f_{CD} \cos 60 + f_{CE} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow -f_{CD} \sin 60 - 10 = 0, \quad \therefore f_{CD} = -11.55 \text{ (kN)}[C]$$

$$\sum \tau_D = 0 \rightarrow -10 \cdot 5 \cos 60 - f_{CE} \cdot 5 \sin 60 = 0, \quad \therefore f_{CE} = -5.77 \text{ (kN)}[C], \quad f_{BD} = 11.53 \text{ (kN)}[T]$$

Este método se caracteriza por aplicar las condiciones de equilibrio dos veces. En primer lugar, se aplica a la estructura como tal, considerando las fuerzas externas aplicadas a ella. Con ello, se calculan las fuerzas del anclaje, es decir, en los pasadores y soportes. En segundo lugar, las condiciones de equilibrio se aplican a la parte de la estructura que queda después de hacer el corte virtual. Con ello, se calculan las fuerzas internas en las varillas correspondientes a las cuales se desea obtener esa fuerza interna.

----- Fin del problema -----

5.5.- La Fig. 5.16 muestra una estructura conformada por trece varillas rígidas de 5 (m) en longitud horizontal y 4 (m) de longitud vertical. La armadura está montada sobre un pasador fijo en A y por un soporte en E. Calcule mediante el método de las secciones las fuerzas internas en las varillas AB, AH, CD, CF y FG indicando si están en tensión o compresión.

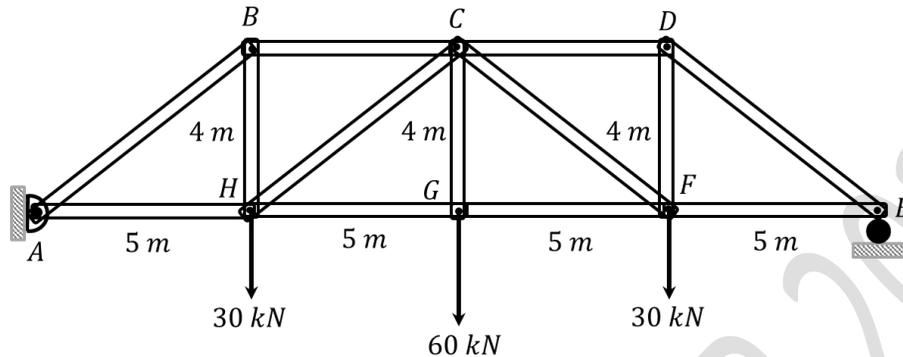


Fig. 5.16.

Resolución del problema

Conceptos previos.

a) Equilibrio de un cuerpo rígido y b) Método de las secciones.

Resultado de aprendizaje.

Calcular fuerzas internas en estructuras formadas por varias varillas rígidas sometidas a fuerzas externas usando método de las secciones.

Realizando el diagrama de fuerzas no concurrentes y aplicando las condiciones de equilibrio a las fuerzas externas aplicadas a la estructura se tiene:

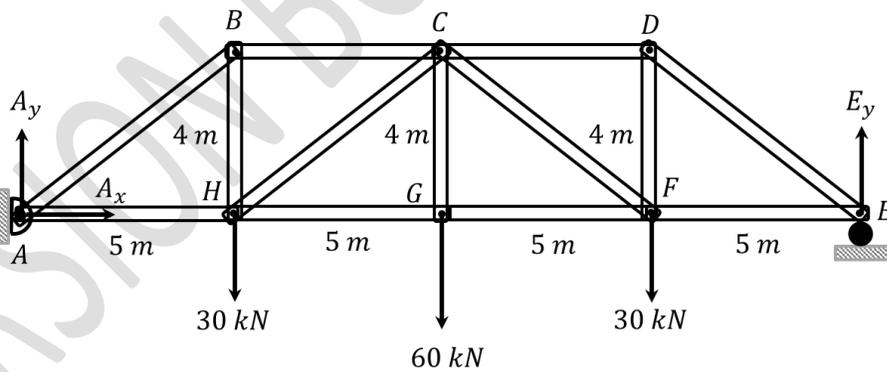


Fig. 5.17.

$$\sum F_x = 0 \rightarrow -A_x = 0, \quad \rightarrow \sum F_y = 0 \rightarrow A_y + E_y - 120 = 0,$$

$$\sum \tau_A = 0 \rightarrow -30 \cdot 5 - 60 \cdot 10 - 30 \cdot 15 + E_y \cdot 20 = 0$$

$$\therefore A_x = 0 \text{ (kN)}, \quad E_y = 60 \text{ (kN)}, \quad A_y = 60 \text{ (kN)}$$

Realizando el diagrama de fuerzas concurrentes y no concurrentes a las partes de las secciones una vez realizado el corte virtual y aplicando las condiciones de equilibrio se obtienen las fuerzas internas de las varillas.

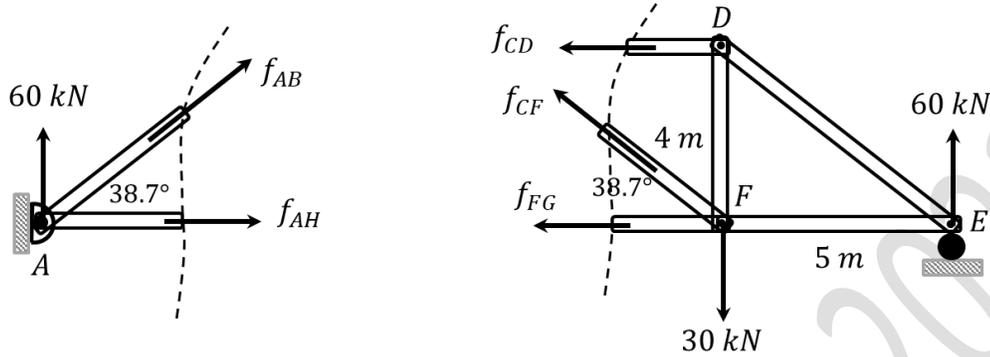


Fig. 5.18.

Parte izquierda de la Fig. 5.18. (Fuerzas concurrentes, sólo primera ley de Newton)

$$\sum F_x = 0 \rightarrow f_{AB} \cos 38.7 + f_{AH} = 0, \quad \rightarrow \sum F_y = 0 \rightarrow f_{AB} \sin 38.7 + 60 = 0,$$

$$f_{AB} = -96 \text{ (kN)[C]}, \quad f_{AH} = 75 \text{ (kN)[T]}$$

Parte derecha de la Fig. 5.18. (Fuerzas no concurrentes, ecuaciones de equilibrio, primera ley y torques)

$$\sum F_x = 0 \rightarrow -f_{CD} - f_{CF} \cos 38.7 + f_{FG} = 0, \quad \rightarrow \sum F_y = 0 \rightarrow 60 + f_{CF} \sin 38.7 - 30 = 0,$$

$$\sum \tau_F = 0 \rightarrow f_{CD} \cdot 4 + 60 \cdot 5 = 0$$

$$\therefore f_{CD} = -75 \text{ (kN)[C]}, \quad f_{CF} = -48 \text{ (kN)[C]}, \quad f_{FG} = 112.5 \text{ (kN)[T]}$$

----- Fin del problema -----

Problemas Propuestos de Estructuras (Armaduras).

5.6.- Una estructura está compuesta por cinco varillas ligeras. El conjunto está montado sobre un pasador en A y un soporte en D. Sobre la estructura se aplican dos fuerzas de 10 (kN) como muestra la Fig. 5.19. Determinar las fuerzas en cada elemento y establezca si están en tensión o compresión.

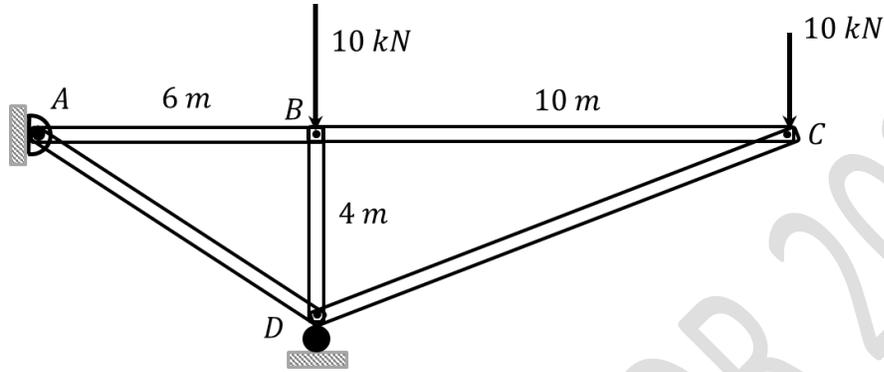


Fig. 5.19.

Respuestas: **Evaluación concepto fuerzas internas en armaduras simples, usando método de los nudos o secciones.**

$$f_{AB} = 25 \text{ (kN)}[T], \quad f_{BC} = 25 \text{ (kN)}[T], \quad f_{AD} = 30 \text{ (kN)}[C], \quad f_{CD} = 27 \text{ (kN)}[C], \quad f_{BD} = 10 \text{ (kN)}[C]$$

5.7.- Una estructura está compuesta por nueve varillas ligeras. El conjunto está montado sobre un pasador en A y un soporte en E. Sobre la estructura se aplican dos fuerzas de 1.2 (kN) y 2.4 (kN) como muestra la Fig. 5.20. Determinar las fuerzas internas BD y DE indicando si están en tensión o compresión.

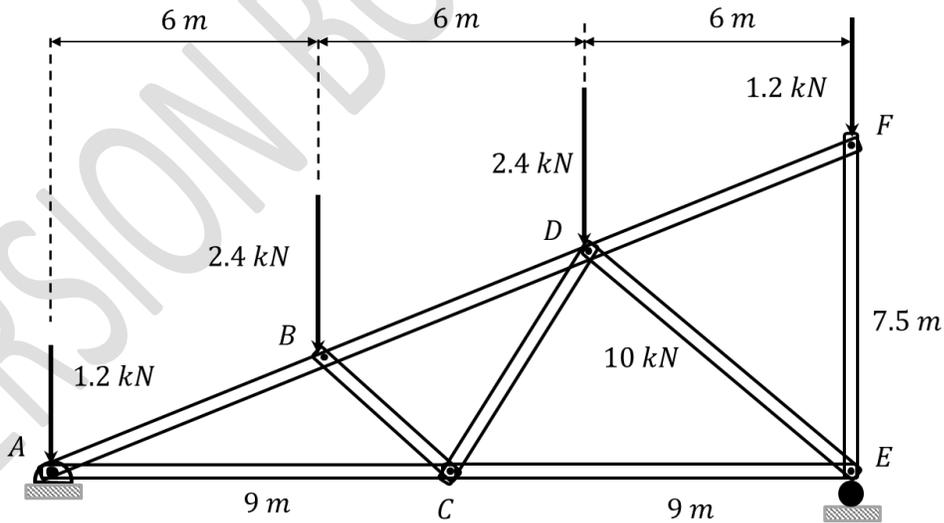


Fig. 5.20.

Respuestas: **Evaluación concepto fuerzas internas en armaduras simples, usando método de las secciones.**

$$f_{BD} = 4.16 \text{ (kN)}[C], \quad f_{DE} = 3.75 \text{ (kN)}[C], \quad f_{BC} = 2.5 \text{ (kN)}[C], \quad f_{AC} = 5.76 \text{ (kN)}[T], \quad f_{CE} = 2.9 \text{ (kN)}[T]$$

5.8.- En la armadura mostrada en la Fig. 5.21 se aplica una fuerza de 3 (kN) en el nudo A de ella. La armadura está montada en un pasador fijo en C y un soporte tipo rodillo en D. Calcule en cada una de las cinco varillas que la componen las fuerzas internas indicando si están en tensión o compresión. Utilice el método de los nudos.

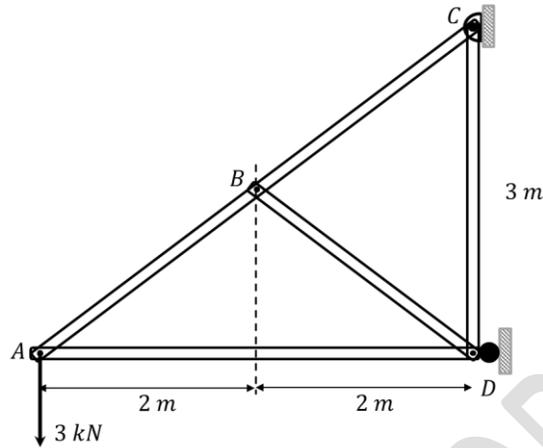


Fig. 5.21.

Respuestas: **Evaluación concepto fuerzas internas en armaduras simples, usando método de los nudos.**

$$f_{AB} = 5 \text{ (kN)[T]}, \quad f_{AD} = 4 \text{ (kN)[C]}, \quad f_{BC} = 5 \text{ (kN)[T]}, \quad f_{CD} = 0, \quad f_{BD} = 0$$

5.9.- En la armadura mostrada en la Fig. 5.22 se aplica una fuerza de 2 (kN) en el nudo A de ella. La armadura está montada en un pasador fijo en E y un soporte tipo rodillo en C. Calcule para las varillas DE, CD, BC, AD y AB las fuerzas internas indicando si están en tensión o compresión. Utilice el método de las secciones.

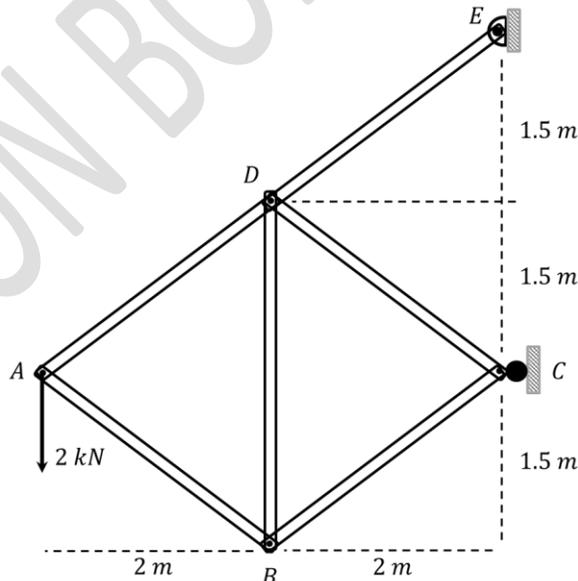


Fig. 5.22.

Respuestas: **Evaluación concepto fuerzas internas en armaduras simples, usando método de las secciones.**

$$f_{DE} = \frac{10}{3} \text{ (kN)[T]}, \quad f_{CD} = \frac{5}{3} \text{ (kN)[C]}, \quad f_{BC} = \frac{5}{3} \text{ (kN)[C]}, \quad f_{AD} = \frac{5}{3} \text{ (kN)[T]}, \quad f_{BD} = 2 \text{ (kN)[T]}$$

5.10.- Las armaduras de la Fig. 5.23 que se muestra a continuación se componen de cinco varillas y están ancladas mediante dos soportes en D y E. Como se ve, sobre la armadura de arriba actúa una carga en el nudo B, en cambio en la armadura de abajo actúa una fuerza F en el nudo A y C. Determine mediante cualquier método, las fuerzas internas indicando si están en compresión o tensión.

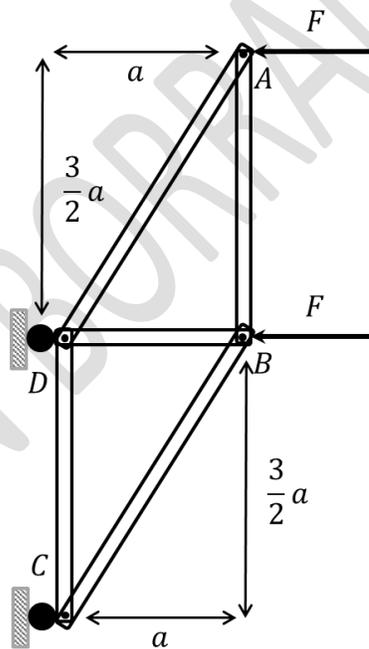
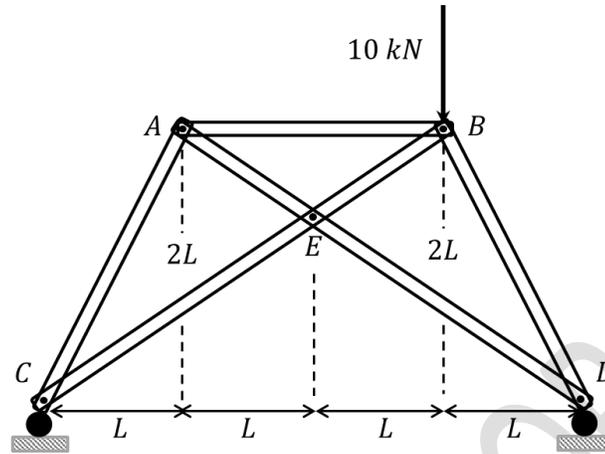


Fig. 5.23.

Respuestas: **Evaluación concepto fuerzas internas en armaduras simples, usando método de las secciones.**

(arriba) $f_{AD} = 4.2 \text{ (kN)[C]}$, $f_{CD} = 2.26 \text{ (kN)[T]}$, $f_{AB} = 7.5 \text{ (kN)[C]}$,

(abajo) $f_{CD} = \frac{\sqrt{13}}{2} F \text{ [T]}$, $f_{BD} = \frac{3}{2} F \text{ [C]}$, $f_{BC} = 2F \text{ [C]}$, $f_{AC} = \frac{3}{2} F \text{ [T]}$, $f_{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2} F \text{ [C]}$

6.- Armazones simples.

Se habla de **armazones** cuando sobre una estructura, las fuerzas externas o cargas se aplican **fuera de los nudos**. Esto **no permite aplicar** el método de los nudos, ni el método de las secciones y por lo tanto la estructura se debe tratar como un cuerpo rígido compuesto por varios elementos. Sobre cada elemento se debe aplicar la condición de equilibrio, teniendo en cuenta que al separar los elementos que componen la estructura, se debe considerar las fuerzas internas que sujetan un elemento con otro y de acuerdo con la tercera ley de Newton.

Problemas Resueltos de Armazones.

6.1.- Dos tableros lisos están articulados en la parte superior y se equilibran como lo indica la Fig. 6.1. Esta articulación no posee rozamiento. Cada tablero tiene una masa de 20 (kg) y una longitud de la arista transversal de 1.5 (m) y forman un ángulo de 60° con el suelo. Determinar el coeficiente de roce estático que mantiene el sistema en equilibrio.

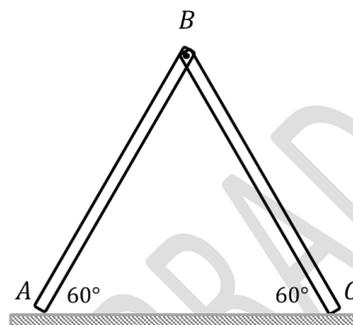


Fig. 6.1.

Resolución del problema

Conceptos previos.

a) Concepto de fuerza b) Concepto de torque, c) Equilibrio de un cuerpo y d) Fuerzas internas.

Resultado de aprendizaje.

Calcular fuerzas externas e internas en un armazón sometido a cargas puntuales.

Realizando el diagrama de cuerpo libre (fuerzas externas, Fig. 6.2 lado izquierdo) se puede observar que no es posible determinar el coeficiente de roce estático. Separando los tableros y realizando un nuevo diagrama de fuerzas incluyendo las fuerzas internas de la articulación B (Fig. 6.2, lado derecho) el problema se resuelve satisfactoriamente.

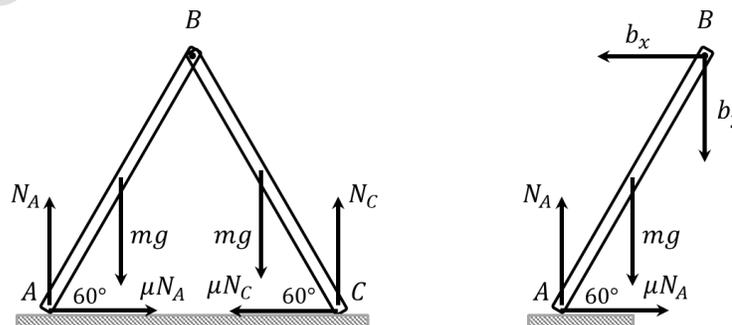


Fig. 6.2.

De este modo:

$$\begin{aligned} \text{Lado izquierdo: } \sum F_x = 0 &\rightarrow \mu N_A - \mu N_C = 0, \quad \rightarrow \sum F_y = 0 \rightarrow N_A + N_C - 2mg = 0, \\ \sum \tau_A = 0 &\rightarrow -mg \cdot \frac{L}{2} \cos 60 - mg \cdot \frac{3L}{2} \cos 60 + N_C \cdot 2L \cos 60 = 0 \end{aligned}$$

De acuerdo con las ecuaciones del lado izquierdo, el único resultado posible es $N_A = N_C = mg$. Así:

$$\begin{aligned} \text{Lado derecho: } \sum F_x = 0 &\rightarrow \mu N_A - b_x = 0, \quad \rightarrow \sum F_y = 0 \rightarrow N_A - b_y - mg = 0, \\ \sum \tau_A = 0 &\rightarrow -mg \cdot \frac{L}{2} \cos 60 - b_y \cdot L \cos 60 + b_x \cdot L \sin 60 = 0 \end{aligned}$$

Despejando y comparando se encuentra que $b_y = 0$ y $\mu = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

----- Fin del problema -----

6.2.- La Fig. 6.3 muestra un armazón simple (2 elementos) el cual está anclado mediante dos pasadores fijos en A y B. Se aplican dos fuerzas, una en cada elemento del armazón. Determine las reacciones en los pasadores A, B y en el punto de amarre C.

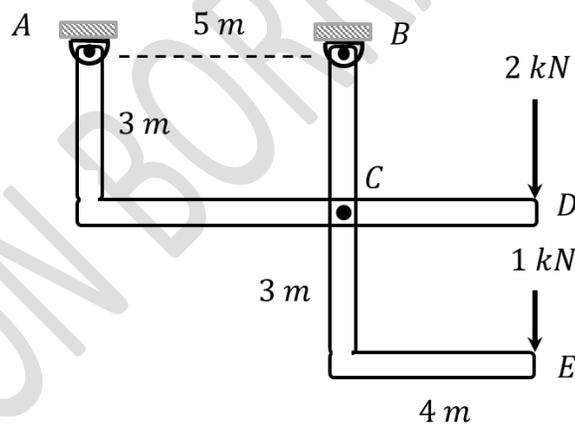


Fig. 6.3.

Resolución del problema

Conceptos previos.

a) Concepto de fuerza b) Concepto de torque, c) Equilibrio de un cuerpo y d) Fuerzas internas.

Resultado de aprendizaje.

Calcular fuerzas externas e internas en un armazón sometido a cargas puntuales.

Como en el ejemplo anterior, se usa un diagrama de fuerzas externas, como muestra la Fig. 6.4, donde al aplicar las condiciones de equilibrio del cuerpo rígido permite determinar la relación (o valores) existentes entre las fuerzas de amarre y las cargas aplicadas. Así.

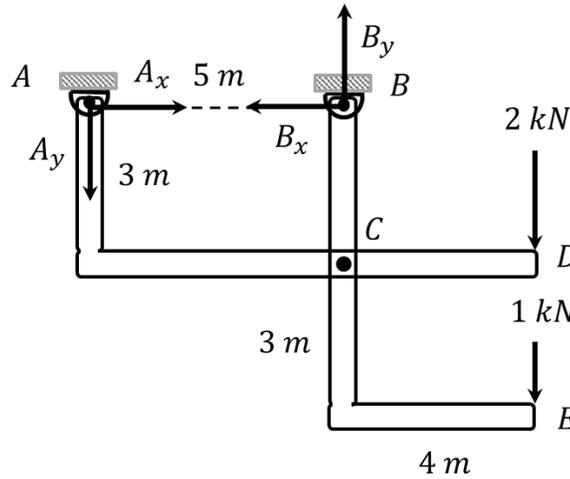


Fig. 6.4.

$$\sum F_x = 0 \rightarrow A_x - B_x = 0, \quad \rightarrow \sum F_y = 0 \rightarrow B_y - A_y - 3 = 0,$$

$$\sum \tau_A = 0 \rightarrow B_y \cdot 5 - 2 \cdot 9 - 1 \cdot 9 = 0, \quad \rightarrow B_y = 5.4 \text{ (kN)}, \quad A_y = 2.4 \text{ (kN)}$$

El diagrama de fuerzas anterior, aunque permite determinar parte de las fuerzas en los anclajes, no permite determinar la fuerza interna en el punto C. Para ello, se procede a desarmar el armazón y basta con aplicar nuevamente las condiciones de equilibrio al elemento ACB para determinar los valores solicitados. Así.

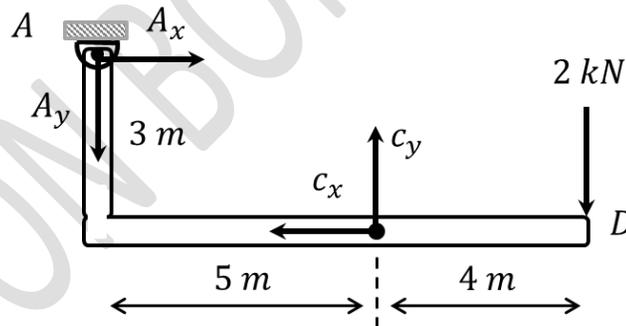


Fig. 6.5.

$$\sum F_x = 0 \rightarrow A_x - c_x = 0, \quad \rightarrow \sum F_y = 0 \rightarrow c_y - A_y - 2 = 0,$$

$$\sum \tau_A = 0 \rightarrow c_y \cdot 5 - c_x \cdot 3 - 2 \cdot 9 = 0, \quad \rightarrow c_y = 4.4 \text{ (kN)}, \quad c_x = A_x = B_x = 1.33 \text{ (kN)}$$

Como comentario final, si se hubiera resuelto la parte BCE del armazón el resultado debe ser el mismo.

----- Fin del problema -----

6.3.- Para el armazón y las cargas aplicadas en el elemento CF mostrado en la Fig. 6.6, calcule las componentes de las fuerzas internas que actúa sobre el elemento ABC, ED y CF.

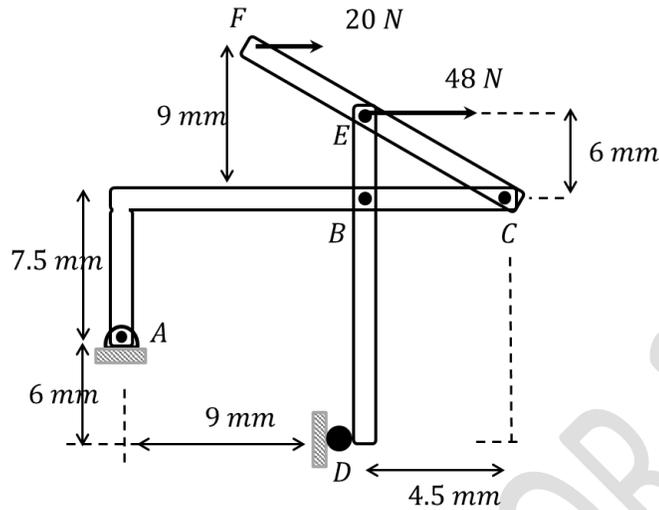


Fig. 6.6.

Resolución del problema

Conceptos previos.

a) Concepto de fuerza b) Concepto de torque, c) Equilibrio de un cuerpo y d) Fuerzas internas.

Resultado de aprendizaje.

Calcular fuerzas externas e internas en un armazón sometido a cargas puntuales.

El diagrama de fuerzas externas queda como sigue.

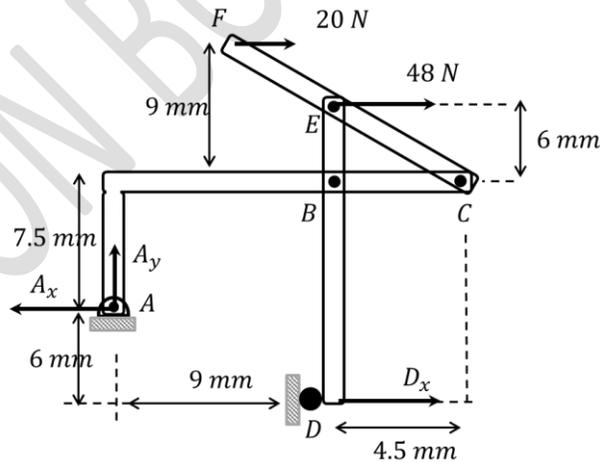


Fig. 6.7.

$$\sum F_x = 0 \rightarrow D_x + 68 - A_x = 0, \quad \rightarrow \sum F_y = 0 \rightarrow A_y = 0,$$

$$\sum \tau_A = 0 \rightarrow D_x \cdot 6 - 48 \cdot 13.5 - 20 \cdot 16.5 = 0, \quad \rightarrow D_x = 163 \text{ (N)}, \quad A_x = 231 \text{ (N)}$$

Tomando los elementos ABC y BDE, se tiene el siguiente diagrama de fuerzas externas e internas sobre cada elemento.

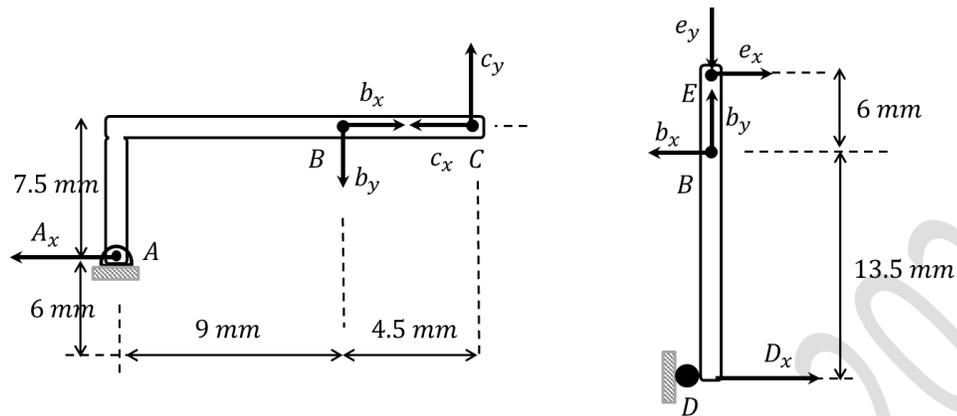


Fig. 6.8.

$$\text{Elemento ABC: } \sum F_x = 0 \rightarrow b_x - c_x - A_x = 0, \quad \rightarrow \sum F_y = 0 \rightarrow c_y - b_y = 0,$$

$$\sum \tau_B = 0 \rightarrow -A_x \cdot 7.5 + c_y \cdot 4.5 = 0, \quad \rightarrow c_y = b_y = 385 \text{ (N)}$$

$$\text{Elemento BDE: } \sum F_x = 0 \rightarrow e_x + D_x - b_x = 0, \quad \rightarrow \sum F_y = 0 \rightarrow b_y - e_y = 0,$$

$$\sum \tau_B = 0 \rightarrow D_x \cdot 13.5 - e_x \cdot 6 = 0, \quad \rightarrow e_x = 366.75 \text{ (N)}, \quad b_x = 529.75 \text{ (N)}, \quad c_x = 298.75 \text{ (N)},$$

Se puede comprobar el resultado, analizando las fuerzas que actúan en el elemento CEF que ilustra la Fig. 6.9, puesto que en él se aplican las cargas. La suma de las fuerzas a lo largo de los ejes coordenados es nula y observar que se han incorporado las cargas sólo en este elemento.

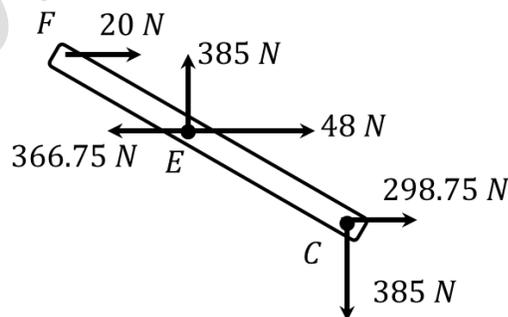


Fig. 6.9.

----- Fin del problema -----

6.4.- Se aplica una fuerza de 6 (kN) en el punto B del elemento AC del armazón mostrado en la Fig. 6.10. El punto B está localizado en la mitad de \overline{AC} y la fuerza se aplica perpendicular a este elemento. El armazón está montado en dos pasadores fijos A y D. Calcule las fuerzas en el pasador fijo A.

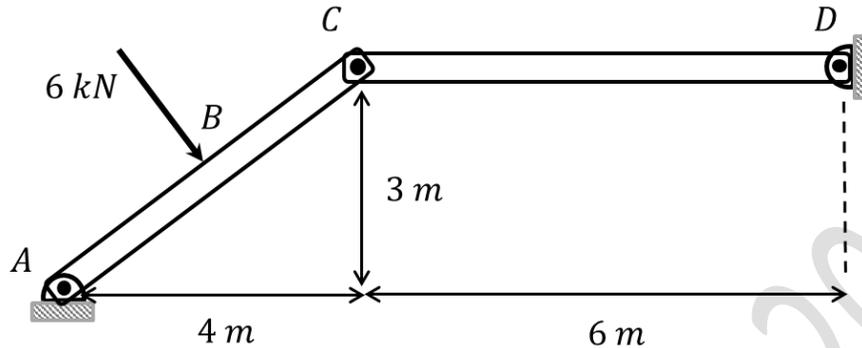


Fig. 6.10.

Resolución del problema

Conceptos previos.

a) Concepto de fuerza b) Concepto de torque, c) Equilibrio de un cuerpo y d) Fuerzas internas.

Resultado de aprendizaje.

Calcular fuerzas externas e internas en un armazón sometido a cargas puntuales.

El diagrama de fuerzas externas queda como sigue.

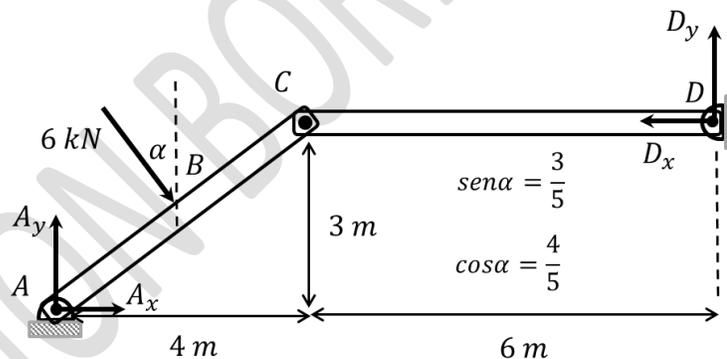


Fig. 6.11.

$$\sum F_x = 0 \rightarrow A_x + 6\text{sen}\alpha - D_x = 0, \quad \rightarrow \sum F_y = 0 \rightarrow A_y + D_y - 6\text{cos}\alpha = 0,$$

$$\sum \tau_A = 0 \rightarrow -6 \cdot 2.5 + D_x \cdot 3 + D_y \cdot 10 = 0$$

Como se observa, con las ecuaciones de equilibrio de un cuerpo rígido que relacionan las fuerzas externas, no son capaces de determinar el valor específico de cada una de ellas. Por lo tanto, se debe realizar un análisis del armazón desarmando los dos elementos como muestra la Fig. 6.12 y aplicar las ecuaciones de equilibrio a cada uno de ellos. De esta forma.

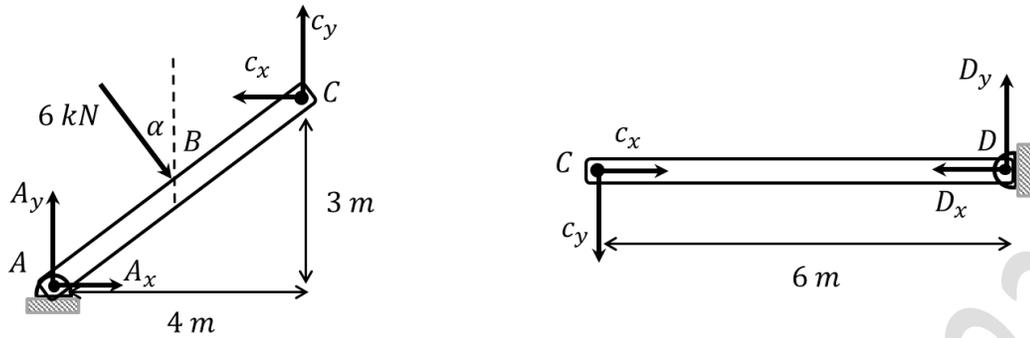


Fig. 6.12.

$$\text{Elemento } ABC: \sum F_x = 0 \rightarrow A_x + 6\text{sen}\alpha - c_x = 0, \quad \rightarrow \sum F_y = 0 \rightarrow A_y + c_y - 6\text{cos}\alpha = 0,$$

$$\sum \tau_A = 0 \rightarrow -6 \cdot 2.5 + c_x \cdot 3 + c_y \cdot 4 = 0$$

$$\text{Elemento } CD: \sum F_x = 0 \rightarrow c_x - D_x = 0, \quad \rightarrow \sum F_y = 0 \rightarrow D_y - c_y = 0,$$

$$\sum \tau_C = 0 \rightarrow D_y \cdot 6 = 0, \quad \rightarrow D_y = c_y = 0$$

$$\therefore A_y = 4.8 \text{ (kN)}, \quad A_x = 1.4 \text{ (kN)}$$

Observar que en el nudo C, las fuerzas internas cumplen con la tercera ley de Newton al separar los elementos.

----- Fin del problema -----

6.5.- Para el armazón mostrado en la Fig. 6.13 determine las componentes de todas las fuerzas que actúan sobre el elemento ACG. (Analice como se relacionan las fuerzas internas en el pasador móvil C o ranura del elemento AG)

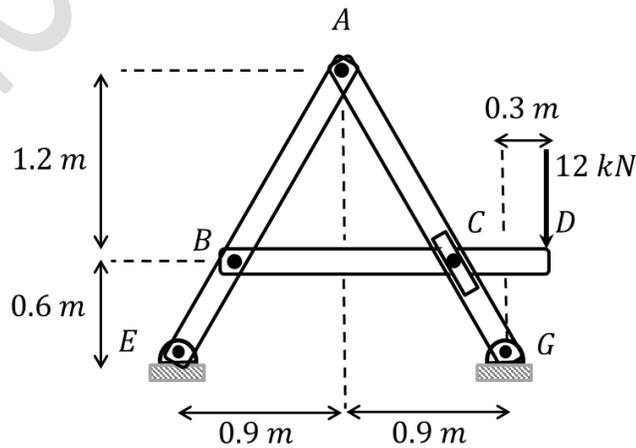


Fig. 6.13.

Resolución del problema

Conceptos previos.

a) Concepto de fuerza b) Concepto de torque, c) Equilibrio de un cuerpo y d) Fuerzas internas.

Resultado de aprendizaje.

Calcular fuerzas externas e internas en un armazón sometido a cargas puntuales con un pasador móvil.

La Fig. 6.14 representa el diagrama de fuerzas externas que permite relacionar la carga aplicada en D y las fuerzas externas aplicadas en los anclajes E y G. Aplicando las ecuaciones de equilibrio se tiene:

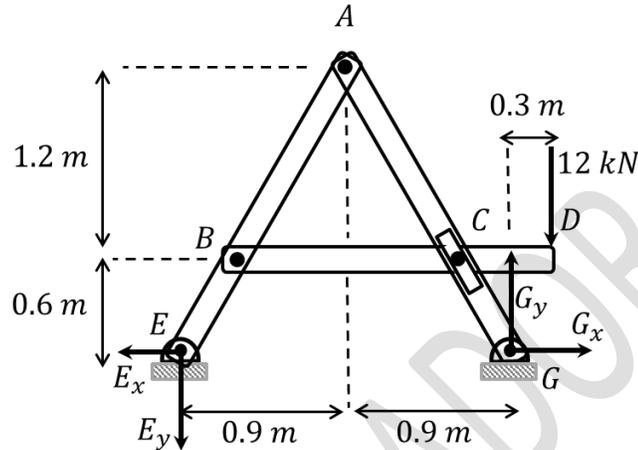


Fig. 6.14.

$$\sum F_x = 0 \rightarrow G_x - E_x = 0, \quad \rightarrow \sum F_y = 0 \rightarrow G_y + E_y - 12 = 0,$$

$$\sum \tau_E = 0 \rightarrow -12 \cdot 2.1 + G_y \cdot 1.8 = 0, \quad \rightarrow G_y = 14 \text{ (kN)}, \quad E_y = 2 \text{ (kN)}$$

Para determinar las fuerzas internas que actúan en el elemento ACG, aún es necesario determinar el valor de la fuerza externa horizontal en G y las fuerzas internas: pasador fijo A y pasador móvil en C. Para ello se separa el armazón.

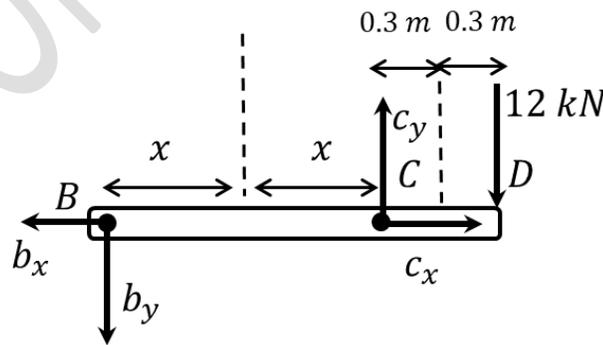


Fig. 6.15.

Para determinar el valor de x , se considera en la Fig. 6.14, la siguiente relación de proporcionalidad.

$$\frac{0.6 + 1.2}{0.9} = \frac{1.2}{x} \rightarrow x = 0.6 \text{ (m)}$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow c_x - b_x = 0, \quad \rightarrow \sum F_y = 0 \rightarrow c_y - b_y - 12 = 0,$$

$$\sum \tau_B = 0 \rightarrow c_y \cdot 1.2 - 12 \cdot 1.8 = 0, \quad \rightarrow c_y = \mathbf{18 \text{ (kN)}}, \quad b_y = \mathbf{6 \text{ (kN)}}$$

Por otro lado, en el pasador móvil se debe cumplir una ecuación que mantenga siempre una ligazón entre las componentes de las fuerzas internas c_x y c_y de la siguiente manera.

$$\frac{c_y}{c_x} = \tan \alpha = \frac{1.2}{0.9} = \frac{4}{3}, \quad \rightarrow 3c_y = 4c_x, \quad \therefore c_x = b_x = \mathbf{13.5 \text{ (kN)}}$$

Finalmente, en el diagrama de fuerzas del elemento ACG, se tiene:

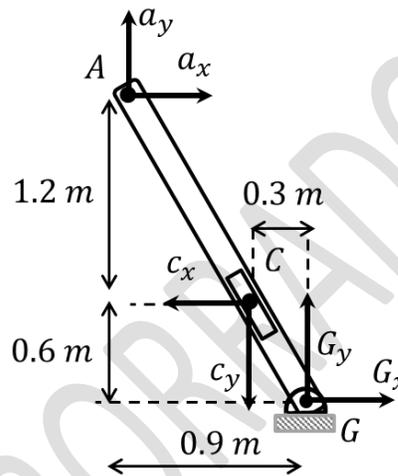


Fig. 6.16.

$$\sum F_x = 0 \rightarrow a_x + G_x - c_x = 0, \quad \rightarrow \sum F_y = 0 \rightarrow a_y - c_y + G_y = 0, \quad \rightarrow a_y = \mathbf{4 \text{ (kN)}}$$

$$\sum \tau_a = 0 \rightarrow -c_x \cdot 1.2 - c_y \cdot 0.6 + G_y \cdot 0.9 + G_x \cdot 1.8 = 0, \quad \rightarrow G_x = \mathbf{8 \text{ kN}}, \quad a_x = \mathbf{5.5 \text{ (kN)}}$$

Se concluye que en problemas con armazones no es suficiente con aplicar las ecuaciones de equilibrio sobre el cuerpo rígido, sino que además se debe desarmar el armazón y aplicando nuevamente las ecuaciones de equilibrio a los elementos que conforman el armazón. En este problema en particular, se estudia y muestra cómo se descompone un pasador móvil. Observar en este caso, que las componentes de las fuerzas están relacionadas por la tangente del ángulo entre ellas, lo que se denomina una ecuación de ligadura.

----- Fin del problema -----

6.6.- Una fuerza horizontal de 0.6 (kN) se aplica sobre el armazón mostrado en la Fig. 6.17, determinar las fuerzas que actúan en los elementos AB y CD.

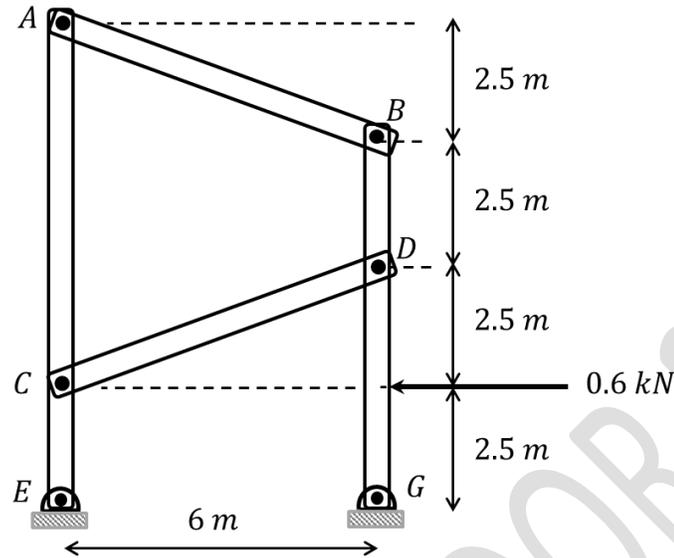


Fig. 6.17.

Resolución del problema

Conceptos previos.

a) Concepto de fuerza b) Concepto de torque, c) Equilibrio de un cuerpo y d) Fuerzas internas.

Resultado de aprendizaje.

Calcular fuerzas externas e internas en un armazón sometido a cargas puntuales con pasadores fijos.

El diagrama de fuerzas y las ecuaciones de equilibrio aplicadas a las fuerzas externas del armazón quedan descritas como:

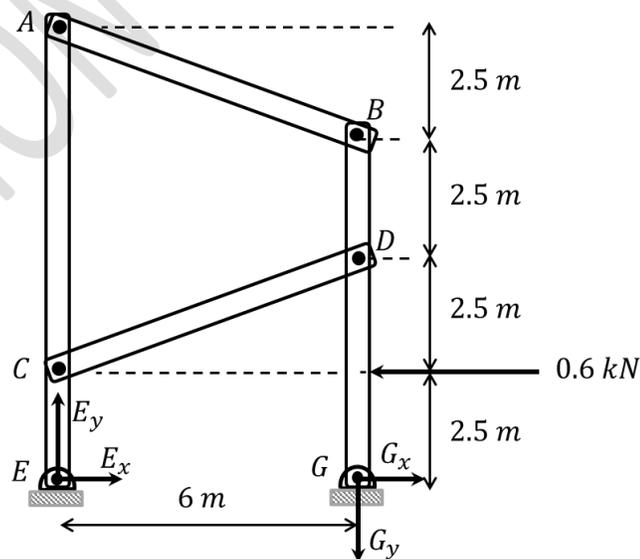


Fig. 6.18.

$$\sum F_x = 0 \rightarrow E_x + G_x - 0.6 = 0, \quad \rightarrow \sum F_y = 0 \rightarrow E_y - G_y = 0,$$

$$\sum \tau_E = 0 \rightarrow 0.6 \cdot 2.5 - G_y \cdot 6 = 0, \quad \rightarrow G_y = E_y = 0.25 \text{ (kN)}$$

Desarmando el armazón en sus cuatro elementos ACE, AB, CD y BDG, que han sido esquematizados en la Fig. 6.19. Así.

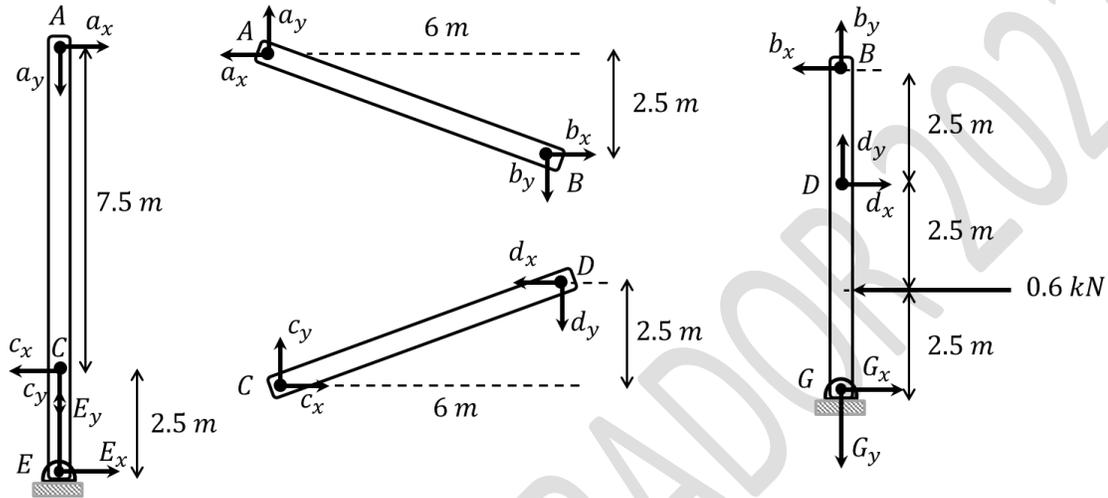


Fig. 6.19.

Siguiendo el procedimiento, se encuentran las ecuaciones de equilibrio para cada elemento.

Elemento ACE:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow a_x + E_x - c_x = 0, \quad \rightarrow \sum F_y = 0 \rightarrow E_y - c_y - a_y = 0$$

$$\sum \tau_C = 0 \rightarrow -a_x \cdot 7.5 + E_x \cdot 2.5 = 0, \rightarrow E_x = 3a_x$$

Elemento AB:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow b_x - a_x = 0, \quad \rightarrow \sum F_y = 0 \rightarrow a_y - b_y = 0$$

$$\sum \tau_A = 0 \rightarrow b_x \cdot 2.5 - b_y \cdot 6 = 0, \rightarrow b_x = 2.4b_y$$

Elemento CD:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow c_x - d_x = 0, \quad \rightarrow \sum F_y = 0 \rightarrow c_y - d_y = 0$$

$$\sum \tau_C = 0 \rightarrow d_x \cdot 2.5 - d_y \cdot 6 = 0, \rightarrow d_x = 2.4d_y$$

Elemento BDG:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow d_x + G_x - b_x - 0.6 = 0, \quad \rightarrow \sum F_y = 0 \rightarrow b_y + d_y - G_y = 0$$

$$\sum \tau_D = 0 \rightarrow b_x \cdot 2.5 - 0.6 \cdot 2.5 + G_x \cdot 5 = 0, \rightarrow b_x = 0.6 - 2G_x$$

De esta manera, mezclando las ecuaciones y usando álgebra,

$$E_x = 3a_x = 3b_x = 3 \cdot (0.6 - 2G_x) = 1.8 - 6G_x$$

Y como,

$$E_x + G_x - 0.6 = 0$$

Entonces, se obtiene que:

$$G_x = 0.24 \text{ (kN)}, \quad E_x = 0.36 \text{ (kN)}$$

Usando el resto de las ecuaciones, sobre los elementos AB y CD actúan las siguientes fuerzas.

$$\text{Elemento AB: } a_x = b_x = 0.12 \text{ (kN)}, \quad a_y = b_y = 0.05 \text{ (kN)}$$

$$\text{Elemento CD: } c_x = d_x = 0.48 \text{ (kN)}, \quad c_y = d_y = 0.2 \text{ (kN)}$$

----- Fin del problema -----

6.7.- Un armazón es sometido a una carga puntual de 120 (N) y otra de 20 (N) como se muestra en la Fig. 6.20. El armazón está montado sobre un pasador fijo en A, un soporte en D y una cuerda EF que lo mantiene en equilibrio. Determinar las fuerzas que se ejercen sobre el elemento BD.

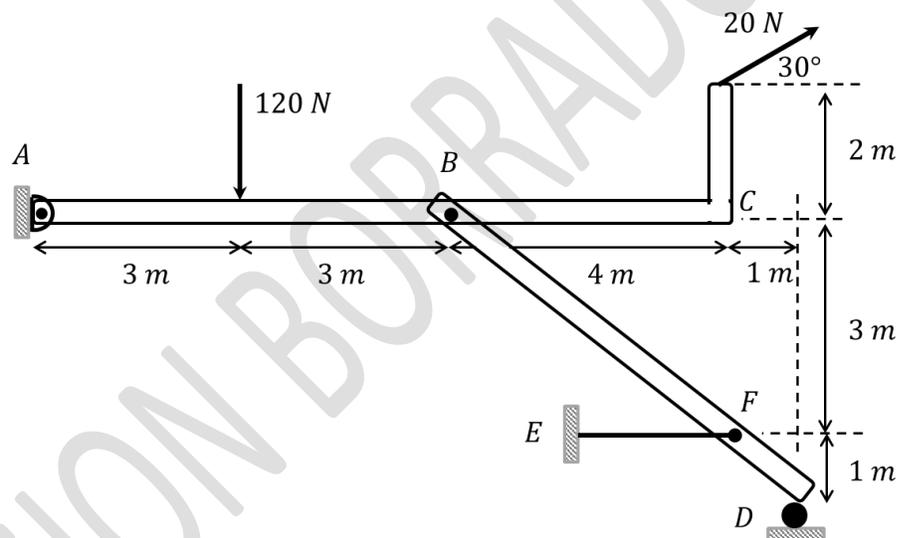


Fig. 6.20.

Resolución del problema

Conceptos previos.

a) Concepto de fuerza b) Concepto de torque, c) Equilibrio de un cuerpo y d) Fuerzas internas.

Resultado de aprendizaje.

Calcular fuerzas externas e internas en un armazón sometido a cargas puntuales con pasadores fijos.

El diagrama de fuerzas y las ecuaciones de equilibrio para determinar las fuerzas externas aplicadas al armazón quedan descritas como:

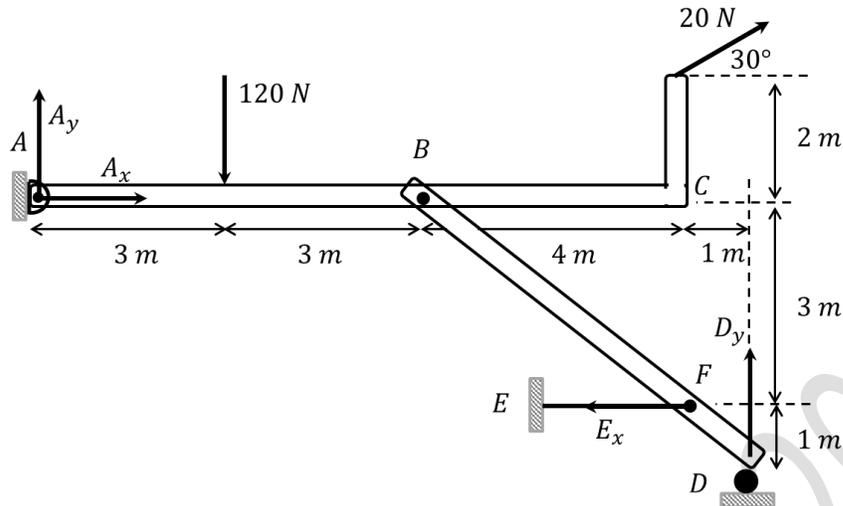


Fig. 6.21.

$$\sum F_x = 0 \rightarrow A_x - E_x + 20\cos 30 = 0, \quad \rightarrow \sum F_y = 0 \rightarrow A_y + 20\sin 30 - 120 + D_y = 0$$

$$\sum \tau_A = 0 \rightarrow -120 \cdot 3 + 20\sin 30 \cdot 10 - 20\cos 30 \cdot 2 - E_x \cdot 3 + D_y \cdot 11 = 0$$

En resumen,

$$A_x - E_x + 10\sqrt{3} = 0, \quad A_y + D_y - 110 = 0, \quad 11D_y - 3E_x - 260 - 20\sqrt{3} = 0$$

Separando los elementos que componen el armazón y aplicando las ecuaciones de equilibrio, se tiene:

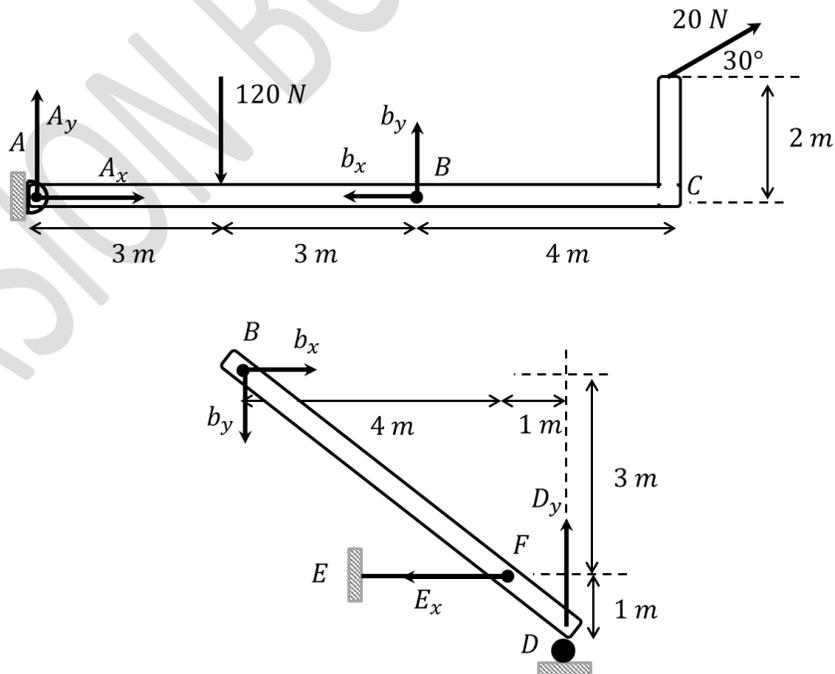


Fig. 6.22.

Esto es,

$$\text{Elemento } ABC: \sum F_x = 0 \rightarrow A_x - b_x + 20\cos 30 = 0, \quad \rightarrow \sum F_y = 0 \rightarrow A_y + 20\sin 30 - 120 + b_y = 0$$

$$\sum \tau_A = 0 \rightarrow -120 \cdot 3 + b_y \cdot 6 + 20\sin 30 \cdot 10 - 20\cos 30 \cdot 2 = 0$$

$$\therefore 6b_y = 20\sqrt{3} + 260, \rightarrow b_y = 49.1 \text{ (N)}$$

$$\text{Elemento } BD: \sum F_x = 0 \rightarrow b_x - E_x = 0, \quad \rightarrow \sum F_y = 0 \rightarrow D_y - b_y = 0$$

$$\sum \tau_B = 0 \rightarrow -E_x \cdot 3 + D_y \cdot 5 = 0$$

$$\therefore D_y = b_y = 49.1 \text{ (N)}, \quad E_x = b_x = 81.8 \text{ (N)}$$

----- Fin del problema -----

Problemas Propuestos de Armazones.

6.8.- Determinar las componentes de las fuerzas que actúan sobre el pasador fijo o nudo B del armazón mostrado en la Fig. 6.23.

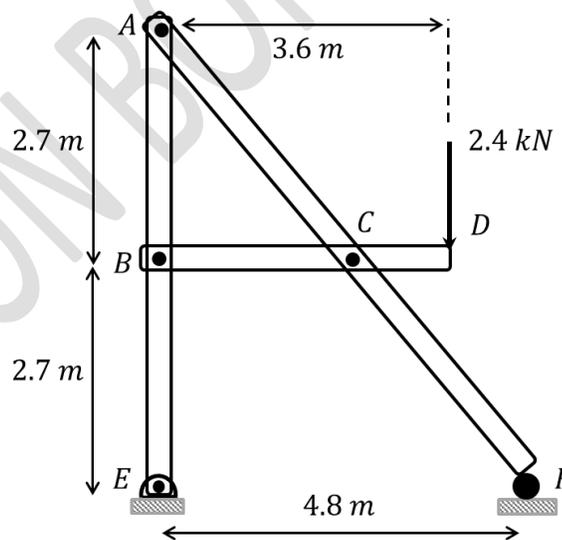


Fig. 6.23.

Respuestas: **Evaluación concepto fuerzas internas en armazones.**

$$b_x = 0 \text{ (kN)}, \quad b_y = 1.2 \text{ (kN)}$$

6.9.- Una fuerza horizontal de 600 N se aplica sobre el perno A del armazón mostrado en la Fig. 6.24. Calcule las fuerzas que actúan sobre los nudos B y D.

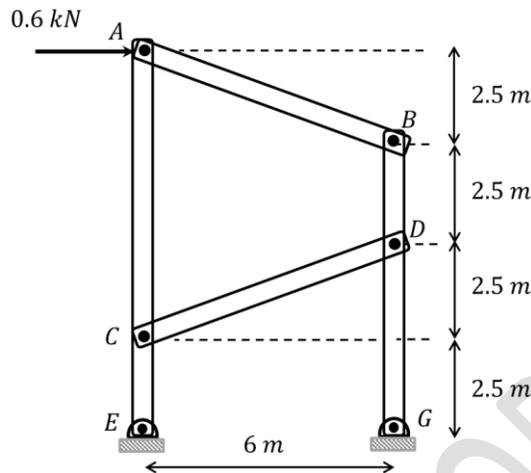


Fig. 6.24.

Respuestas: **Evaluación concepto fuerzas internas en armazones.**

$$\sqrt{b_x^2 + b_y^2} = 1.04 \text{ (kN)}, \quad \sqrt{d_x^2 + d_y^2} = 1.56 \text{ (kN)}$$

6.10.- En el armazón que se muestra en la Fig. 6.25, los elementos ACE y BCD están conectados por medio de un pasador en C y por la varilla DE. Cuando se aplica una carga de tamaño 480 (N) en el elemento ACE, determine la fuerza en el pasador fijo C.

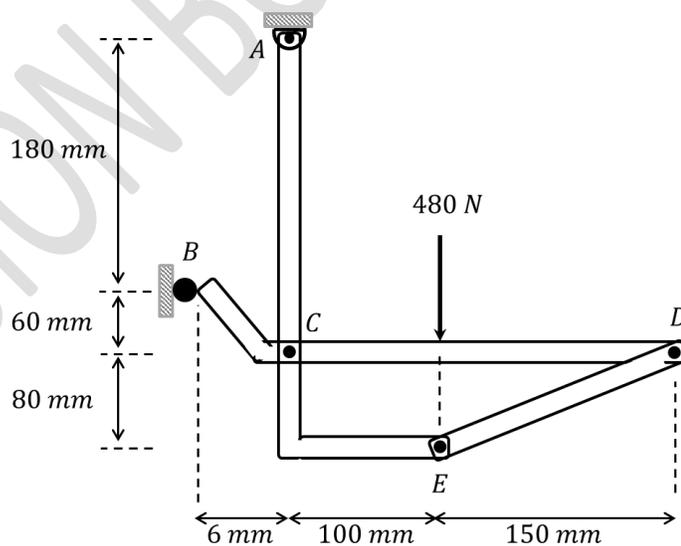


Fig. 6.25.

Respuestas: **Evaluación concepto fuerzas internas en armazones.**

$$c_x = 746.7 \text{ (N)}, \quad c_y = 224 \text{ (N)}$$

PARTE III. EQUILIBRIO, PARTE DOS.

En esta parte del apunte, se desarrollan dos temas específicos que están asociados al concepto de **viga**. Una viga es un elemento estructural que puede ser sometida a grandes **cargas puntuales** o **cargas distribuidas**. Cuando este elemento presenta **fallas**, teóricamente se pueden obtener valores de **fuerzas internas** presentes en las fallas de la viga, en términos de las cargas a la que es sometida.

7.- Fuerzas lineales distribuidas en vigas.

Una carga distribuida lineal es la medida de la fuerza por unidad de longitud representada $w(x)$. Esta función puede ser simple, representada por una función constante o complicada, representada por una función polinomial de grado mayor. Lo interesante aquí, es que, ocupando el concepto de sistema equivalente más simple, es posible caracterizar la fuerza distribuida por una fuerza puntual actuando en un punto bien determinado de la viga. La Fig. 7 ilustra esta situación para la viga AB.

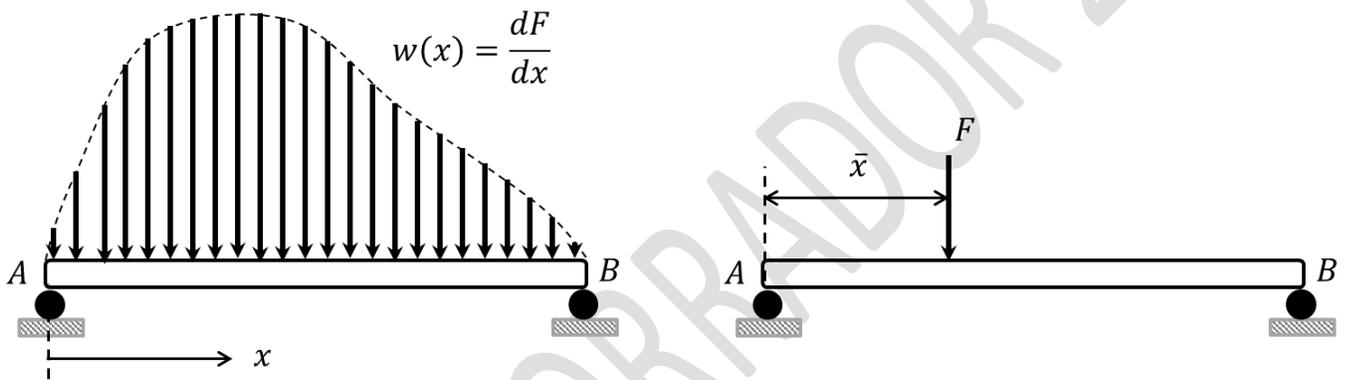


Fig.7: Lado izquierdo: Viga montada sobre dos soportes A y B, sometida a una carga distribuida lineal polinómica. Lado derecho: Sistema equivalente más simple de la fuerza distribuida del lado izquierdo calculada respecto del inicio de la viga (punto A).

Para determinar el sistema equivalente más simple, se calcula el módulo de la fuerza y el torque como:

$$F = \int_A^B w(x)dx, \quad \tau_A = \int_A^B xw(x)dx, \quad \bar{x} = \frac{\tau_A}{F}$$

De este modo, el sistema equivalente más simple consiste en la aplicación de una fuerza puntual $\vec{F}_{eq} = -F\hat{j}$ en la posición \bar{x} .

En la práctica, para calcular el anclaje o fuerzas externas que soporta una viga sometida a cargas distribuidas, un primer paso es determinar una o más fuerzas puntuales que representan el sistema equivalente más simple de las fuerzas distribuidas aplicadas en la viga. A continuación, se aplican las condiciones de equilibrio de un cuerpo rígido y se obtienen las fuerzas restantes. Este mismo procedimiento aplica, cuando las fuerzas distribuidas se aplican a las varillas de una armadura o bien un armazón.

Problemas Resueltos de Fuerza Distribuida

7.1.- Una viga de peso despreciable está sometida a dos tipos de fuerza distribuida como muestra la Fig. 7.1. Calcular las reacciones en los apoyos A y B.

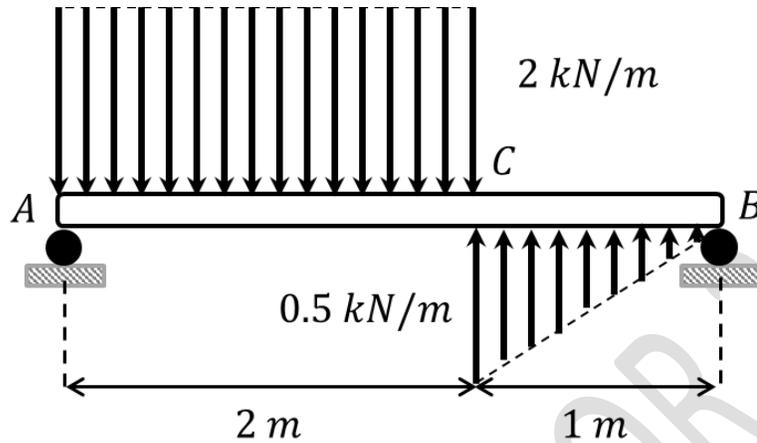


Fig. 7.1.

Resolución del problema

Conceptos previos.

a) Concepto de fuerza y torque b) Sistema equivalente simple y c) Equilibrio de un cuerpo.

Resultado de aprendizaje.

Calcular fuerzas externas en una viga sometido a cargas distribuidas simples.

Para resolver este problema, en primer lugar, se debe encontrar un sistema equivalente simple, que represente las cargas distribuidas en cargas puntuales. En el primer caso, $w_1(x) = 2$ por lo tanto es una función constante, de este modo:

$$w_1(x) = 2, \quad F = \int_0^2 2dx = 4 \text{ (kN)}, \quad \tau_A = \int_0^2 2xdx = 4 \text{ (kNm)}, \quad \bar{x}_1 = \frac{4}{4} = 1 \text{ (m)}$$

Dado que, la integral tiene límites entre 0 y 2 (m), se asume que el origen del sistema coordenado está en la posición A. Esto es particularmente importante para la ubicación de la carga puntual. En el segundo caso, la carga distribuida es triangular y se puede considerar como referencia el punto A o el punto C como referencia. En este caso se hará desde el punto C. Así, la ecuación de la recta entre C y B que determina la función $w_2(x) = -0.5 + 0.5x$. Para determinar el sistema equivalente más simple se tiene:

$$F = \int_0^1 (-0.5 + 0.5x)dx = -0.25 \text{ (kN)}, \quad \tau_A = \int_0^1 (-0.5x + 0.5x^2)dx = -\frac{0.25}{3} \text{ (kNm)}, \quad \bar{x}_2 = \frac{1}{3} \text{ (m)}$$

Dado que, la integral tiene límites entre 0 y 1 (m), se asume que el origen del sistema coordenado está en la posición A. Esto es particularmente importante para la ubicación de la carga puntual. Si se hubiera escogido el punto A como referencia, entonces la función sería distinta y los límites de integración.

En segundo lugar, realizamos el diagrama de fuerzas de cargas puntuales y no concurrentes sobre la viga y aplicamos las condiciones de equilibrio para calcular las reacciones.

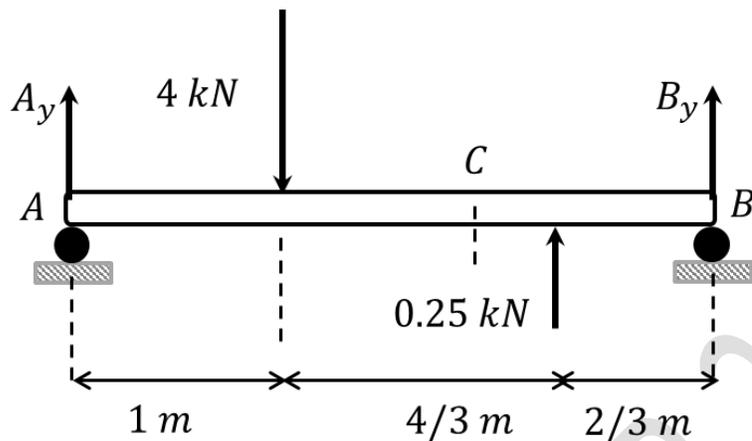


Fig. 7.2.

$$\sum F_y = 0 \rightarrow A_y - 4 + 0.25 + B_y = 0, \quad \rightarrow \sum \tau_A = 0 \rightarrow -4 \cdot 1 + 0.25 \cdot \frac{7}{3} + B_y \cdot 3 = 0$$

$$\therefore B_y = 1.14 \text{ (kN)}, \quad A_y = 2.61 \text{ (kN)}$$

----- Fin del problema -----

7.2.- Una viga de peso despreciable está sometida a una fuerza distribuida triangular como muestra la Fig. 7.3. Calcular las reacciones en los apoyos A y B.

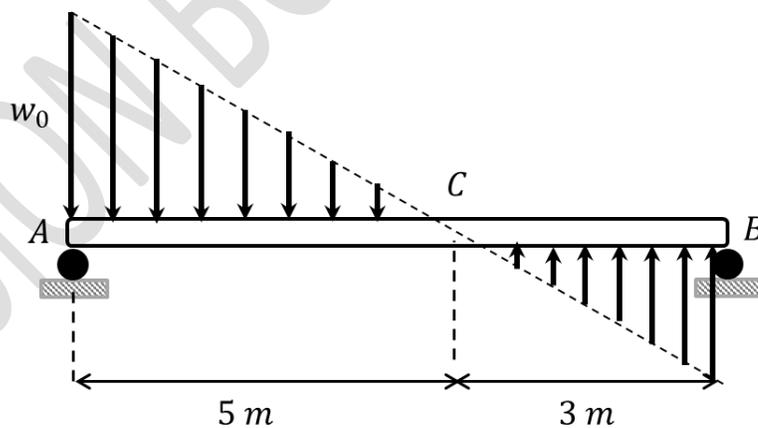


Fig. 7.3.

Resolución del problema

Conceptos previos.

a) Concepto de fuerza y torque b) Sistema equivalente simple y c) Equilibrio de un cuerpo.

Resultado de aprendizaje.

Calcular fuerzas externas en una viga sometida a una carga distribuida triangular.

Para calcular los valores de las reacciones en los apoyos, se requiere llevar la carga distribuida a una o dos cargas puntuales. Si es una carga puntual, entonces el origen necesariamente es A para medir la distancia donde se aplica la carga puntual. Cuando se quiere representar la carga distribuida por dos cargas puntuales, una hacia abajo y otra hacia arriba, se debe considerar primero un sistema respecto de A y luego respecto de C. Aquí las funciones $w(x)$ no son las mismas. Se usa el primer caso para resolver el problema y el segundo para realizar una observación.

La función que representa la carga distribuida se puede expresar como sigue:

$$w(x) = w_0 - \frac{w_0}{5}x$$

Entonces,

$$F = \int_0^8 \left(w_0 - \frac{w_0}{5}x \right) dx = \frac{8}{5}w_0, \quad \tau_A = \int_0^8 \left(w_0x - \frac{w_0}{5}x^2 \right) dx = -\frac{32}{15}w_0, \quad \bar{x} = \frac{4}{3} \text{ (m)}$$

Luego el diagrama de fuerzas de la viga en función de la carga puntual usando la conceptualización del sistema equivalente más simple es:

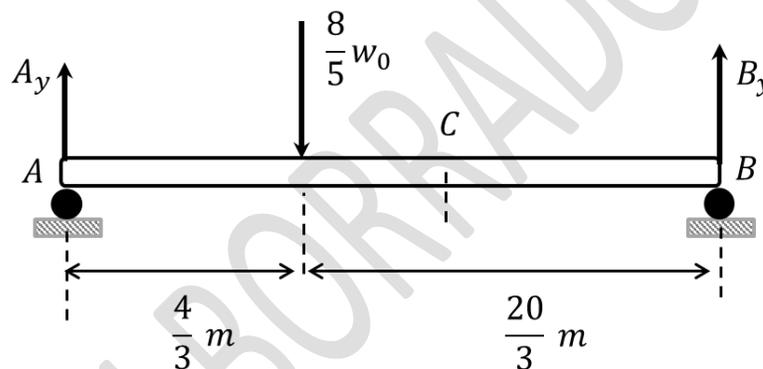


Fig. 7.4.

De esta forma, usando las condiciones de equilibrio.

$$\sum F_y = 0 \rightarrow A_y - \frac{8}{5}w_0 + B_y = 0, \quad \rightarrow \sum \tau_A = 0 \rightarrow -\frac{8}{5}w_0 \cdot \frac{4}{3} + B_y \cdot 8 = 0$$

$$\therefore B_y = \frac{4}{15}w_0, \quad A_y = \frac{4}{3}w_0$$

Usando el segundo procedimiento, es decir usando, $w_1(x) = w_0 - \frac{w_0}{5}x$ y $w_2(x) = -w'_0x = -\frac{w_0}{5}x$ se tiene que los sistemas equivalentes simples son: $F_1 = \frac{5w_0}{2}$, $\bar{x}_1 = \frac{5}{3}$ (m) respecto del punto A y $F_2 = \frac{9w_0}{10}$, $\bar{x}_2 = 2$ (m) respecto del punto C. Nuevamente realizando sistema equivalente entre ellos, se tiene: $F = \frac{8w_0}{5}$, $\bar{x} = \frac{4}{3}$ (m) respecto del punto A. Sistema equivalente correspondiente al desarrollado en el primer procedimiento.

----- Fin del problema -----

7.3.- La viga de la Fig. 7.5 está montada en dos soportes fijos y sometida a dos fuerzas distribuidas del tipo triangular. Calcular las reacciones en los soportes A y B.

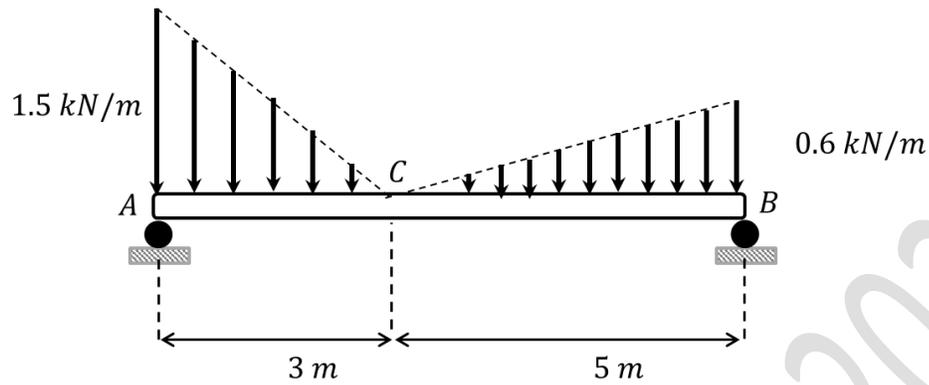


Fig. 7.5.

Resolución del problema

Conceptos previos.

a) Concepto de fuerza y torque b) Sistema equivalente simple, c) Equilibrio de un cuerpo y d) Ecuación de la recta.

Resultado de aprendizaje.

Calcular fuerzas externas en una viga sometida a una carga distribuida triangular.

Las funciones w_1 y w_2 asociadas a cada carga distribuida están determinadas por $w_1 = 1.5 - 0.5x$ y $w_2 = 0.12x$ respectivamente. Así.

$$F_1 = \int_0^3 (1.5 - 0.5x)dx = 2.25 \text{ (kN)}, \quad \tau_1 = \int_0^3 (1.5x - 0.5x^2)dx = 2.25 \text{ (kNm)}, \quad \bar{x}_1 = 1 \text{ (m) (desde A)}$$

$$F_2 = \int_0^5 (0.12x)dx = 1.5 \text{ (kN)}, \quad \tau_2 = \int_0^5 (0.12x^2)dx = 5 \text{ (kNm)}, \quad \bar{x}_2 = 3.33 \text{ (m) (desde C)}$$

Así.

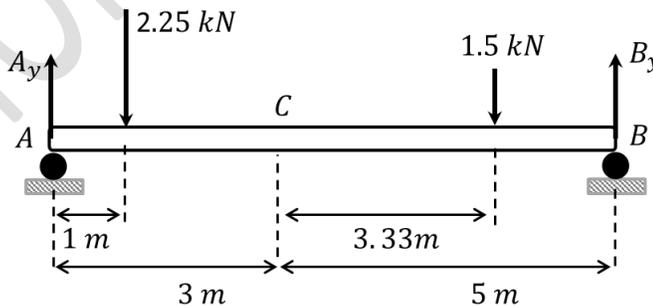


Fig. 7.6.

$$\sum F_y = 0 \rightarrow A_y + B_y - 3.75 = 0, \quad \rightarrow \sum \tau_A = 0 \rightarrow -2.25 \cdot 1 - 1.5 \cdot 6.33 + B_y \cdot 8 = 0,$$

$$\therefore B_y = 1.47 \text{ (kN)}, \quad A_y = 2.28 \text{ (kN)}$$

----- Fin del problema -----

7.4.- Una viga empotrada de peso 1200 (N) está cargada por una fuerza distribuida rectangular como se muestra en la Fig. 7.7. Determinar un sistema equivalente entre el peso de la viga y la carga distribuida y continuación calcule las reacciones en A.

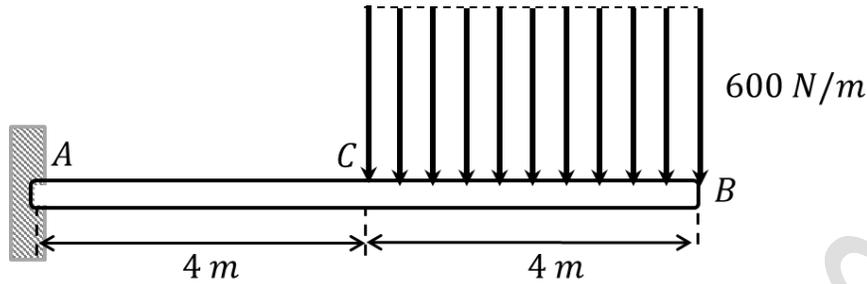


Fig. 7.7.

Resolución del problema

Conceptos previos.

a) Concepto de fuerza y torque b) Sistema equivalente simple y c) Equilibrio de un cuerpo.

Resultado de aprendizaje.

Calcular fuerzas externas en una viga empotrada sometida a una carga distribuida cuadrada.

La carga puntual que reemplaza la carga distribuida se determina mediante un sistema equivalente simple respecto de C y dado por:

$$F = \int_0^4 600dx = 2.4\text{ (kN)}, \quad \tau_A = \int_0^4 600xdx = 4.8\text{ (kNm)}, \quad \bar{x} = 2\text{ (m)} \text{ (desde C)}$$

De esta forma, el sistema equivalente simple entre el peso y el sistema equivalente simple que da cuenta de la carga distribuida respecto de A es:

$$F = -1.2 - 2.4 = -3.6\text{ (kN)}, \quad \tau_A = -1.2 \cdot 4 - 2.4 \cdot 6 = 19.2\text{ (kNm)}, \quad \bar{x} = 5.33\text{ (m)} \text{ (desde A)}$$

Para determinar las reacciones en A, se realiza un diagrama de fuerzas y se aplican las condiciones de equilibrio.

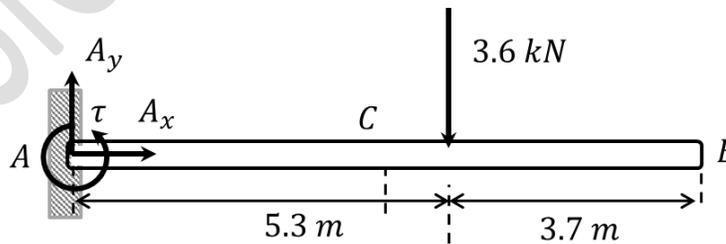


Fig. 7.8.

$$\sum F_y = 0 \rightarrow A_y - 3.6 = 0, \quad \therefore A_y = 3.6\text{ kN}, \quad \sum \tau_A = 0 \rightarrow -3.6 \cdot 5.3 + \tau = 0, \quad \therefore \tau = 19.2\text{ kNm}$$

----- Fin del problema -----

7.5.- Una viga de peso despreciable se carga mediante dos sistemas de fuerzas distribuidas triangulares como se muestra en la Fig. 7.9. Calcular las reacciones en el pasador A y en el soporte B

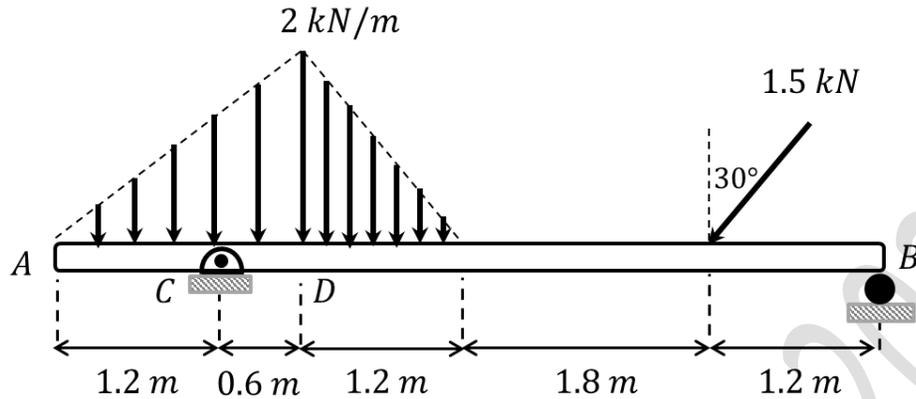


Fig. 7.9.

Resolución del problema

Conceptos previos.

a) Concepto de fuerza y torque b) Sistema equivalente simple y c) Equilibrio de un cuerpo.

Resultado de aprendizaje.

Calcular fuerzas externas en una viga con pasador fijo y con soporte sometida a una carga distribuida triangular.

Los valores de las funciones de carga distribuida son $w_1(x) = 1.1x$ respecto de A y $w_2(x) = 2 - 1.67x$ respecto de D respectivamente. Con esto, las cargas puntuales asociadas son:

$$F_1 = \int_0^{1.8} 1.1dx = 1.8 \text{ (kN)}, \quad \tau_1 = \int_0^{1.8} 1.1x^2 dx = 2.16 \text{ (kNm)}, \quad \bar{x}_1 = 1.2 \text{ (m) (desde A)}$$

$$F_2 = \int_0^{1.2} (2 - 1.67x) dx = 1.2 \text{ (kN)}, \quad \tau_2 = \int_0^{1.2} (2x - 1.67x^2) dx = 0.48 \text{ (kNm)}$$

$$\bar{x}_2 = 0.4 \text{ (m) (desde D)}$$

Con esto, se puede realizar un diagrama de fuerzas que actúan sobre la viga y aplicando las ecuaciones de equilibrio se tiene:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow C_x - 1.5\text{sen}30 = 0, \quad \rightarrow C_x = 0.75 \text{ (kN)}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow -1.8 + C_y - 1.2 - 1.5\text{cos}30 + B_y = 0,$$

$$\sum \tau_c = 0 \rightarrow -1.2 \cdot 1 - 1.5\text{cos}30 \cdot 3.6 + B_y \cdot 4.8 = 0,$$

$$\therefore B_y = 1.22 \text{ (kN)}, \quad C_y = 3.08 \text{ (kN)}$$

----- Fin del problema -----

7.6.- Una viga de peso despreciable y homogénea soporta una carga distribuida parabólica como muestra la Fig. 7.10. El punto C representa el vértice de la parábola, en estas condiciones, determine las reacciones en los soportes A y B.

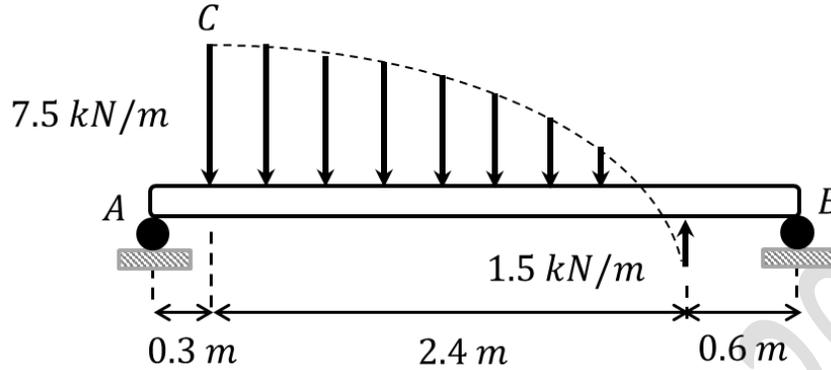


Fig. 7.10.

Resolución del problema

Conceptos previos.

a) Concepto de fuerza y torque b) Sistema equivalente simple, c) Equilibrio de un cuerpo y d) Ecuación de una parábola.

Resultado de aprendizaje.

Calcular fuerzas externas en una viga con soporte sometida a una carga distribuida parabólica.

Para resolver este problema, se debe determinar la función que representa la carga distribuida. Se sabe que se trata de una función parabólica, para ello se define el *eje y* pasando por el vértice C y el *eje x* a lo largo de la viga. La ecuación de una parábola se puede escribir en términos de una función polinomial de grado 2, de modo que:

$$y(x) = ax^2 + bx + c$$

Donde $y(x)$ representa la carga distribuida y x la distancia respecto del origen del sistema coordenado. Así:

$$\begin{aligned} x = 0 \text{ m}, &\rightarrow y(0) = ax^2 + bx + c = c = 7.5 \text{ kN} \\ x = 2.4 \text{ m}, &\rightarrow y(2.4) = 5.76a + 2.4b + 7.5 = -1.5 \text{ kN} \\ x = -2.4 \text{ m}, &\rightarrow y(-2.4) = 5.76a - 2.4b + 7.5 = -1.5 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$\therefore y(x) = -1.563x^2 + 7.5$$

Una vez obtenida la función que representa la carga distribuida, se busca el sistema equivalente más simple, que consiste en una carga puntual ubicada a cierta distancia del origen establecido. Por lo tanto:

$$F = \int_0^{2.4} (-1.563x^2 + 7.5)dx = 10.8 \text{ (kN)}, \quad \tau_0 = \int_0^{2.4} (-1.563x^3 + 7.5x)dx = 8.6 \text{ (kNm)}$$

$$\bar{x} = \frac{8.6}{10.8} = 0.8 \text{ (m) (desde C)}$$

Las fuerzas puntuales que actúan sobre la viga ahora son:

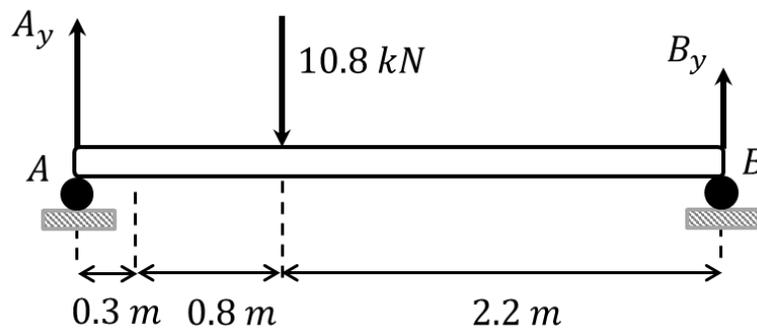


Fig. 7.11.

Usando las ecuaciones de equilibrio, se tiene:

$$\sum F_y = 0 \rightarrow A_y - 10.8 + B_y = 0, \quad \sum \tau_A = 0 \rightarrow -10.8 \cdot 1.1 + B_y \cdot 3.3 = 0,$$

$$\therefore B_y = 3.6 \text{ (kN)}, \quad A_y = 7.2 \text{ (kN)}$$

----- Fin del problema -----

7.7.- Una viga AB de peso despreciable y homogénea soporta dos cargas distribuidas que son parábolas como muestra la Fig. 7.12. El punto C representa el vértice de ambas parábolas, en estas condiciones, determine las reacciones en el empotramiento A.

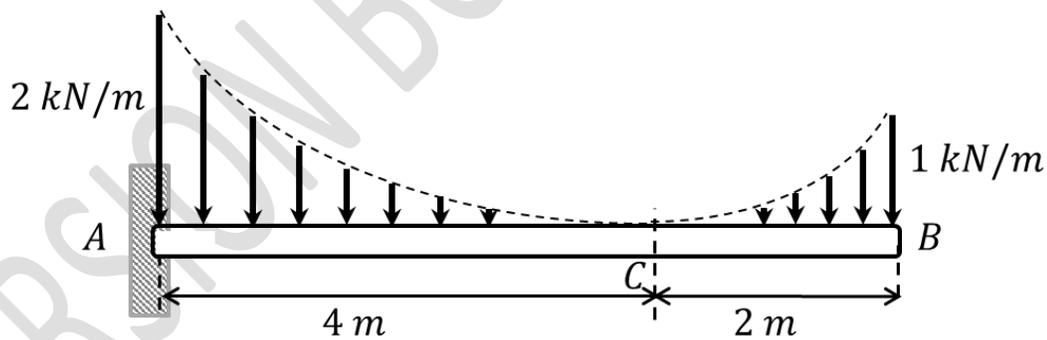


Fig. 7.12.

Resolución del problema

Conceptos previos.

a) Concepto de fuerza y torque b) Sistema equivalente simple, c) Equilibrio de un cuerpo y d) Ecuación de una parábola.

Resultado de aprendizaje.

Calcular fuerzas externas en una viga con soporte sometida a una carga distribuida parabólica.

Se determinan las funciones que dan cuenta de las dos cargas distribuidas parabólicas. Para la primera (izquierda) se considera el origen en el punto A, en cambio para la parábola de la derecha, se considera el origen en el punto C. De este modo:

$$\text{Parábola izquierda: } y(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\begin{aligned} x = 0 \text{ m, } \rightarrow y(0) &= c = 2 \text{ kN} \\ x = 4 \text{ m, } \rightarrow y(4) &= 16a + 4b + 2 = 0 \\ x = 8 \text{ m, } \rightarrow y(8) &= 64a + 8b + 2 = 2 \\ \therefore y(x) &= 2 - x + \frac{1}{8}x^2 \end{aligned}$$

$$\text{Parábola derecha: } z(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\begin{aligned} x = 0 \text{ m, } \rightarrow z(0) &= 0 \\ x = 2 \text{ m, } \rightarrow z(2) &= 4a + 2b = 1 \\ x = -2 \text{ m, } \rightarrow z(-2) &= 4a - 2b = 1 \\ \therefore z(x) &= \frac{1}{4}x^2 \end{aligned}$$

Calculando los sistemas equivalentes simples, se tiene:

$$F_1 = \int_0^4 \left(2 - x + \frac{1}{8}x^2\right) dx = \frac{8}{3} \text{ (kN)}, \quad \tau_1 = \int_0^4 \left(2x - x^2 + \frac{1}{8}x^3\right) dx = \frac{8}{3} \text{ (kNm)},$$

$$\bar{x}_1 = 1 \text{ (m) (desde A)}$$

$$F_2 = \int_0^2 \left(\frac{1}{4}x^2\right) dx = \frac{2}{3} \text{ (kN)}, \quad \tau_2 = \int_0^2 \left(\frac{1}{4}x^3\right) dx = 1 \text{ (kNm)}, \quad \bar{x}_2 = \frac{3}{2} \text{ (m) (desde C)}$$

Así, el diagrama de fuerzas no concurrentes sobre la viga y usando las condiciones de equilibrio.

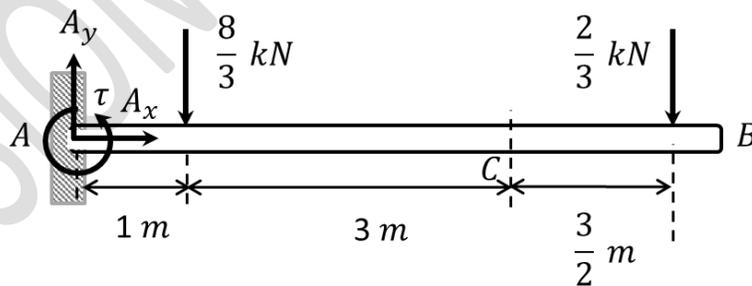


Fig. 7.13.

$$\sum F_y = 0 \rightarrow A_y - \frac{10}{3} = 0, \quad \sum \tau_A = 0 \rightarrow \tau - \frac{8}{3} \cdot 1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{11}{2} = 0,$$

$$\therefore A_y = \frac{10}{3} \text{ (kN)}, \quad \tau = \frac{19}{3} \text{ (kNm)}$$

----- Fin del problema -----

7.8.- Determinar el valor de las reacciones en los pasadores fijos A y C del armazón mostrado en la Fig. 7.14.

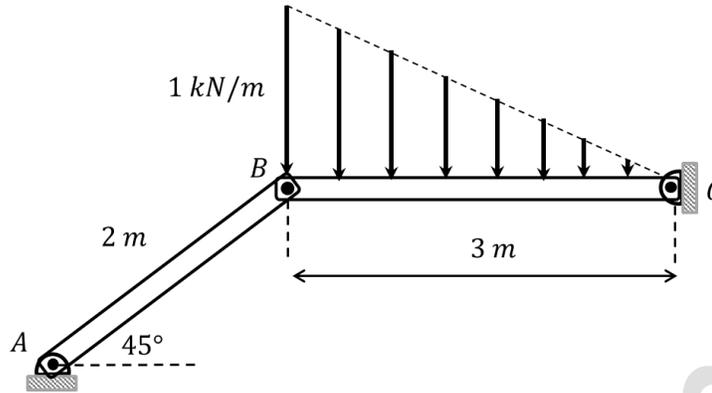


Fig. 7.14.

Resolución del problema

Conceptos previos.

a) Concepto de fuerza y torque b) Sistema equivalente simple y c) Armazones.

Resultado de aprendizaje.

Calcular fuerzas externas en un armazón con pasadores fijos sometida a una carga distribuida triangular.

La carga distribuida triangular se puede reemplazar por una carga puntual medida desde B cuando se considera la función $w(x) = 1 - \frac{1}{3}x$, de modo que:

$$F = \int_0^3 \left(1 - \frac{1}{3}x\right) dx = \frac{3}{2} \text{ (kN)}, \quad \tau_B = \int_0^3 \left(x - \frac{1}{3}x^2\right) dx = \frac{3}{2} \text{ (kNm)}, \quad \bar{x} = 1 \text{ (m) (desde B)}$$

Ahora sólo resta ocupar las condiciones de equilibrio para el armazón y sus elementos mostrados en la Fig. 7.15.

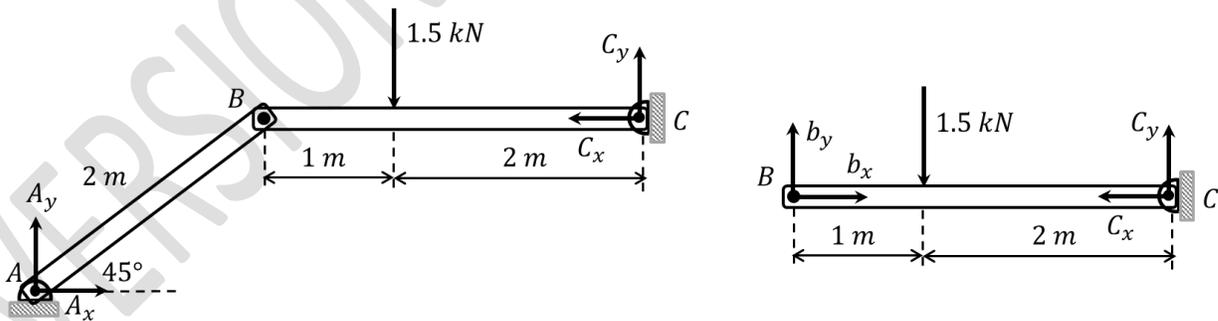


Fig. 7.15.

La Fig. 7.15 izquierda corresponde al diagrama de fuerzas externas, en cambio, el diagrama de la derecha corresponde a un elemento del armazón. Aplicando las ecuaciones en cada caso se tiene:

$$\text{Izquierda: } \sum F_x = 0 \rightarrow A_x - C_x = 0, \quad \sum F_y = 0 \rightarrow A_y + C_y - 1.5 = 0,$$

$$\sum \tau_A = 0 \rightarrow -1.5 \cdot (\sqrt{2} + 1) + C_x \cdot (\sqrt{2}) + C_y \cdot (\sqrt{2} + 3) = 0$$

$$\text{Derecha: } \sum F_x = 0 \rightarrow C_x - b_x = 0, \quad \sum F_y = 0 \rightarrow b_y + C_y - 1.5 = 0,$$

$$\sum \tau_B = 0 \rightarrow -1.5 \cdot 1 + C_y \cdot 3 = 0$$

$$\therefore C_y = \frac{1}{2} \text{ (kN)}, \quad b_y = 1 \text{ (kN)}, \quad C_x = 1 \text{ (kN)}$$

----- Fin del problema -----

7.9.- Determinar el valor de las fuerzas internas en C del armazón que muestra la Fig. 7.16 sometido a una fuerza distribuida en el elemento BC y sujetado mediante una cuerda en B.

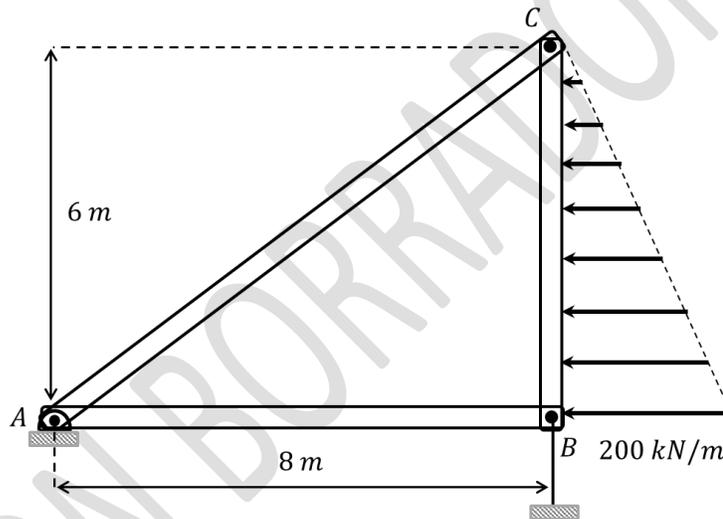


Fig. 7.16.

Resolución del problema

Conceptos previos.

a) Concepto de fuerza y torque b) Sistema equivalente simple y c) Armazones.

Resultado de aprendizaje.

Calcular fuerzas externas e internas en un armazón con un pasador fijo sometida a una carga distribuida triangular.

Como en los problemas anteriores, se calcula la carga puntual de la fuerza distribuida usando el concepto de sistema equivalente más simple. Usando C como origen, se tiene que la ecuación es $w(x) = \frac{100}{3}x$, por lo tanto:

$$F = \int_0^6 \left(\frac{100}{3}x \right) dx = 600 \text{ (kN)}, \quad \tau_C = \int_0^6 \left(\frac{100}{3}x^2 \right) dx = 2400 \text{ (kNm)}, \quad \bar{x} = 4 \text{ (m) (desde C)}$$

Por lo tanto, aplicando las ecuaciones de equilibrio a las fuerzas externas, se tiene:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow A_x - 600 = 0, \quad \sum F_y = 0 \rightarrow A_y - T_B = 0, \quad \sum \tau_A = 0 \rightarrow 600 \cdot 2 - T_B \cdot 8 = 0$$

$$\therefore T_B = A_y = 150 \text{ (kN)}, \quad A_x = 600 \text{ (kN)}$$

Separando los elementos que componen el armazón, se puede calcular las fuerzas internas o de amarre del armazón en cada punto, de este modo el diagrama es:

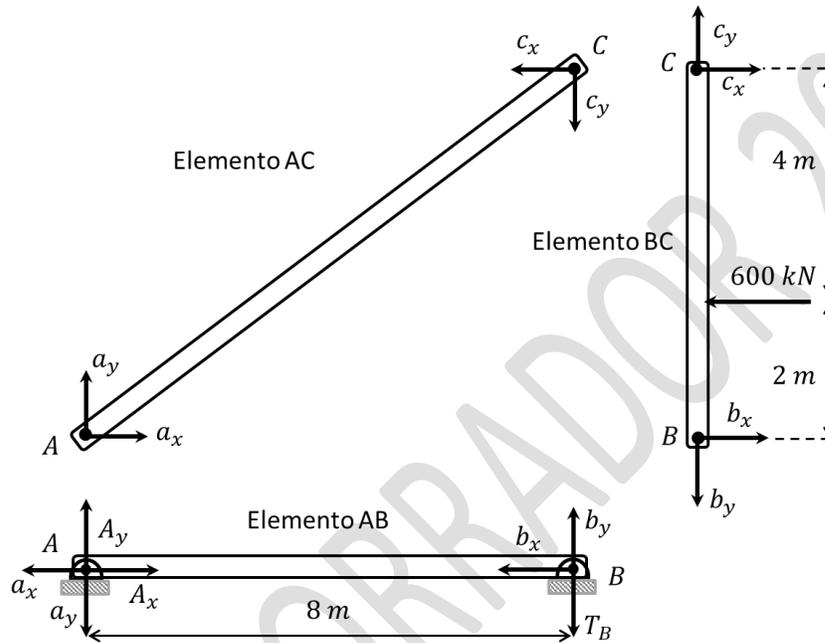


Fig. 7.17.

Como se observa, en el diagrama de fuerzas conviven fuerzas externas y fuerzas internas en las uniones de los elementos que componen el armazón. Aplicando las ecuaciones de equilibrio a cada elemento se tiene:

$$\text{Elemento AC: } \sum F_x = 0 \rightarrow a_x = c_x, \quad \sum F_y = 0 \rightarrow a_y = c_y, \quad \sum \tau_A = 0 \rightarrow c_y \cdot 8 - c_x \cdot 6 = 0$$

$$\text{Elemento BC: } \sum F_x = 0 \rightarrow c_x + b_x = 600, \quad \sum F_y = 0 \rightarrow c_y = b_y,$$

$$\sum \tau_B = 0 \rightarrow 600 \cdot 2 - c_x \cdot 6 = 0$$

$$\therefore c_x = 200 \text{ (kN)}, \quad b_x = 400 \text{ (kN)}, \quad c_y = b_y = a_y = 150 \text{ (kN)}$$

Con estos resultados se puede concluir que las fuerzas internas en C corresponden a $\vec{c} = 200\hat{i} + 150\hat{j}$ (kN) y que el elemento AC está en compresión con una fuerza de $\|\vec{c}\| = 250$ (kN).

----- Fin del problema -----

7.10.- Un armazón se compone de tres elementos y está montado en un soporte A y un pasador fijo E. Uno de los elementos de esta estructura es sometido a dos cargas distribuidas: una constante y otra triangular como muestra la Fig. 7.18. Calcular el valor de la fuerza interna en B y en C.

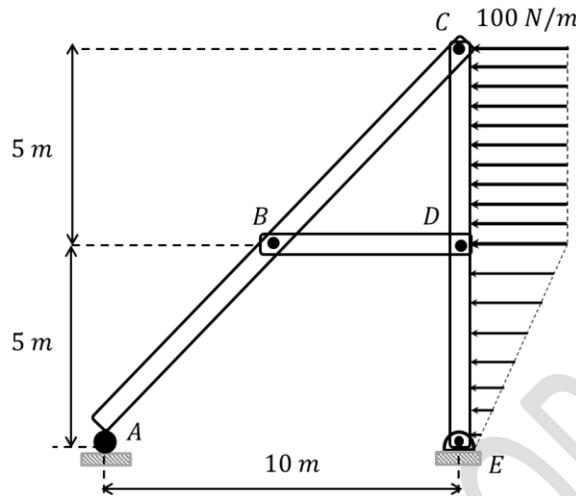


Fig. 7.18.

Resolución del problema

Conceptos previos.

a) Concepto de fuerza y torque b) Sistema equivalente simple y c) Armazones.

Resultado de aprendizaje.

Calcular fuerzas externas e internas en un armazón con un pasador fijo y un soporte, sometido a cargas distribuidas.

El sistema equivalente que representa las cargas distribuidas se calcula como:

$$F_1 = \int_0^5 100 dx = 500 \text{ (N)}, \quad \tau_1 = \int_0^5 100x dx = 1250 \text{ (Nm)}, \quad \bar{x}_1 = \frac{5}{2} \text{ (m) (desde C)}$$

$$F_2 = \int_0^5 (100 - 20x) dx = 250 \text{ (N)}, \quad \tau_2 = \int_0^5 (100x - 20x^2) dx = \frac{1250}{3} \text{ (Nm)}$$

$$\bar{x}_2 = \frac{5}{3} \text{ (m) (desde D)}$$

Aplicando las ecuaciones de equilibrio a las fuerzas externas aplicadas sobre el armazón se encuentra que:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow E_x - 750 = 0, \quad \sum F_y = 0 \rightarrow A_y - E_y = 0$$

$$\sum \tau_E = 0 \rightarrow -A_y \cdot 10 + 250 \cdot \frac{10}{3} + 500 \cdot \frac{15}{2} = 0$$

$$\therefore E_x = 750 \text{ (N)}, \quad A_y = E_y = \frac{1375}{3} \text{ (N)}$$

A continuación, se procede a desarmar el armazón, obteniéndose los siguientes diagramas de fuerza.

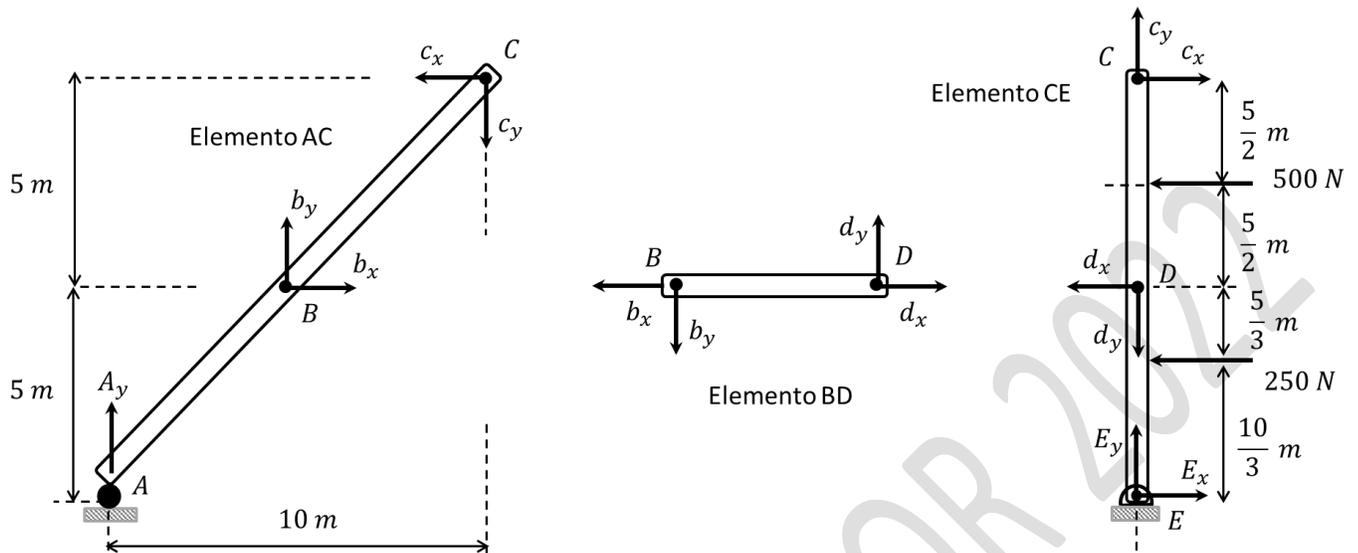


Fig. 7.19.

Usando las ecuaciones de equilibrio en cada elemento se tiene:

$$\text{Elemento AC: } \sum F_x = 0 \rightarrow b_x = c_x, \quad \sum F_y = 0 \rightarrow A_y + b_y = c_y,$$

$$\sum \tau_C = 0 \rightarrow -A_y \cdot 10 - b_y \cdot 5 + b_x \cdot 5 = 0 \rightarrow b_x = \frac{2750}{3} + b_y$$

$$\text{Elemento CE: } \sum F_x = 0 \rightarrow c_x + E_x - d_x - 750 = 0 \rightarrow c_x = d_x$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow c_y - d_y + E_y = 0 \rightarrow c_y = d_y - \frac{1375}{3}$$

$$\sum \tau_E = 0 \rightarrow 250 \cdot \frac{10}{3} + d_x \cdot 5 + 500 \cdot \frac{15}{2} - c_x \cdot 10 = 0 \rightarrow d_x - 2c_x + \frac{2750}{3} = 0$$

$$\text{Elemento BD: } \sum F_x = 0 \rightarrow d_x = b_x, \quad \sum F_y = 0 \rightarrow d_y = b_y, \quad \sum \tau_B = 0 \rightarrow d_y = 0$$

$$\therefore c_x = d_x = b_x = \frac{2750}{3} \text{ (N)}, \quad b_y = 0 \text{ (N)}, \quad c_y = \frac{1375}{3} \text{ (N)}$$

De este modo, las fuerzas internas en C corresponden a $\vec{c} = \frac{2750}{3} \hat{i} + \frac{1375}{3} \hat{j}$ (N) y el elemento BD está en tensión.

----- Fin del problema -----

Problemas Propuestos de Fuerza Distribuida

7.11.- Considere la viga AB de peso despreciable mostrada en la Fig. 7.20 y calcule las reacciones en los soportes A y B.

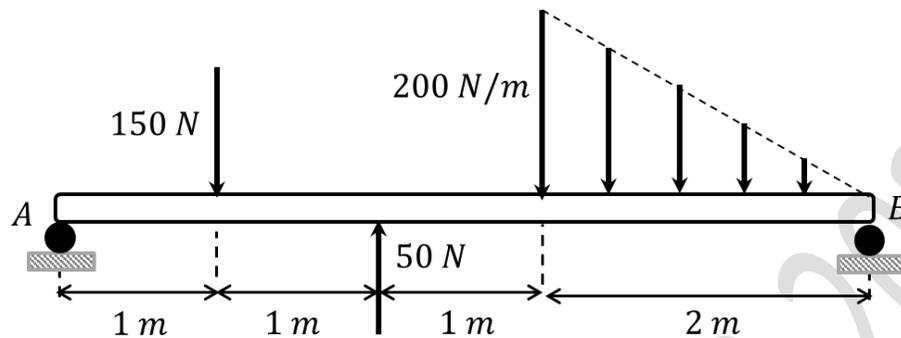


Fig. 7.20.

Respuestas: **Evaluación concepto fuerzas distribuidas en vigas.**

$$A_y = 143.2 \text{ (N)}, \quad B_y = 156.8 \text{ (N)}$$

7.12.- Sobre una viga homogénea de peso despreciable que está montada en dos soportes B y C, se aplican tres cargas distribuidas como se muestra en la Fig. 7.21. Determine las reacciones en los soportes.

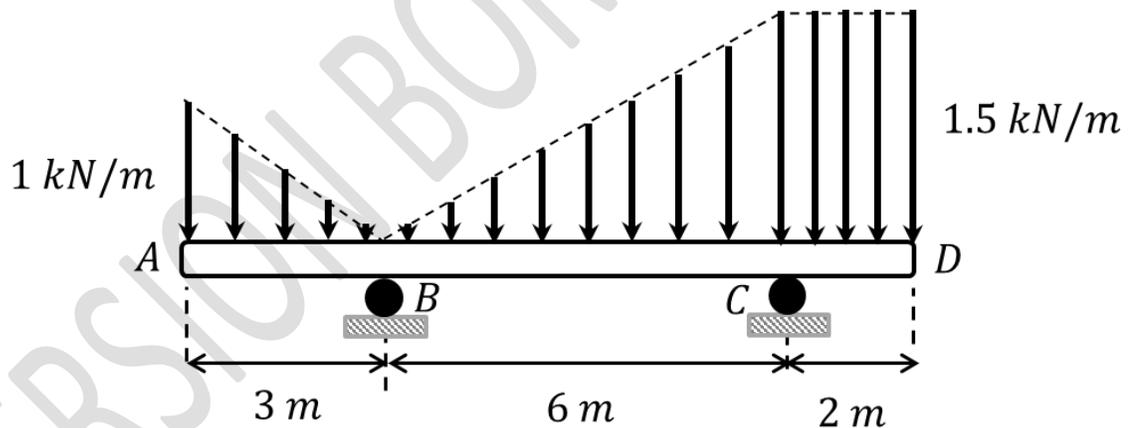


Fig. 7.21.

Respuestas: **Evaluación concepto fuerzas distribuidas en vigas.**

$$C_y = 6 \text{ (kN)}, \quad B_y = 3 \text{ (kN)}$$

7.13.- Tres varillas son usadas para conformar un armazón como muestra la Fig. 7.22. Una varilla del armazón está sometida a una carga distribuida triangular. Calcular la fuerza interna en el punto de unión C para las dos configuraciones A y B.

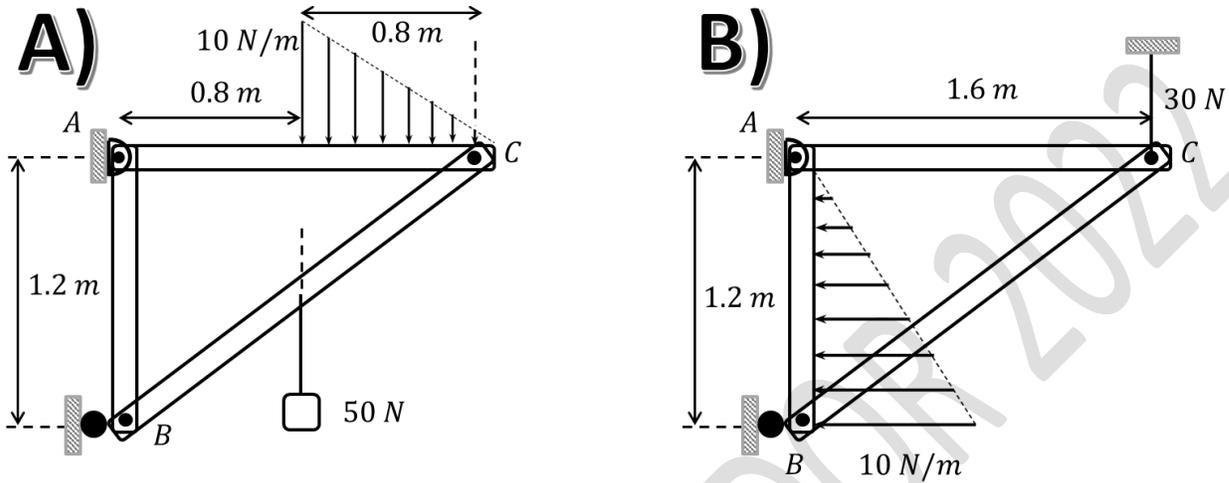


Fig. 7.22.

Respuestas: **Evaluación concepto fuerzas distribuidas en armazones.**

A) $c_x = 37 \text{ (N)}$, $c_y = 2.67 \text{ (N)}$, B) $c_x = 40 \text{ (N)}$, $c_y = 30 \text{ (N)}$

7.14.- Una viga de 8 (m) de largo y peso despreciable está sostenida por dos soportes A y B y sometida a dos fuerzas distribuidas triangulares como muestra la Fig. 7.23. Calcule la fuerza en cada apoyo A y B.

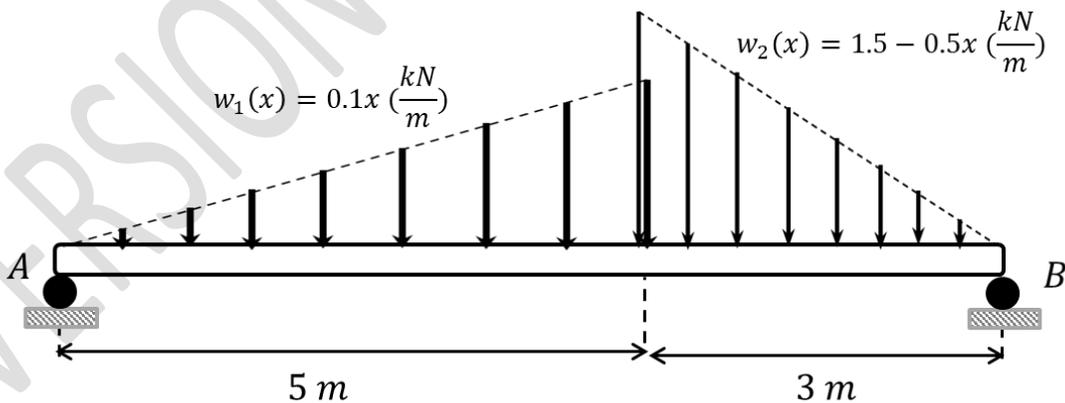


Fig. 7.23.

Respuestas: **Evaluación concepto fuerzas distribuidas en vigas.**

$B_y = 2.2 \text{ (kN)}$, $A_y = 1.3 \text{ (kN)}$

7.15.- Una viga de largo 16 (m) y peso despreciable, sostenida por dos soportes B y C está sometida a una fuerza distribuida como se muestra en la Fig. 7.24. Calcule la fuerza en cada apoyo B y C.

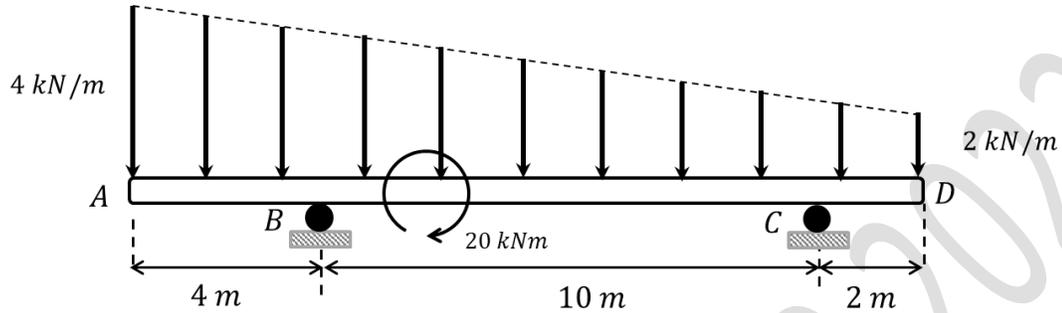


Fig. 7.24.

Respuestas: **Evaluación concepto fuerzas distribuidas en vigas.**

$$C_y = 17 \text{ (kN)}, \quad B_y = 31 \text{ (kN)}$$

7.16.- Un armazón está conformado por dos tableros ACE y BCD el cual esta sostenido por medio de dos pasadores en A y B. El armazón tiene un soporte (apoyo) en D cuyo valor es $D_y = 4 \text{ (kN)}$. Sobre la parte horizontal del tablero ACE se aplican dos fuerzas distribuidas como se muestra en la Fig. 7.25. Calcular las reacciones en la unión C del armazón.

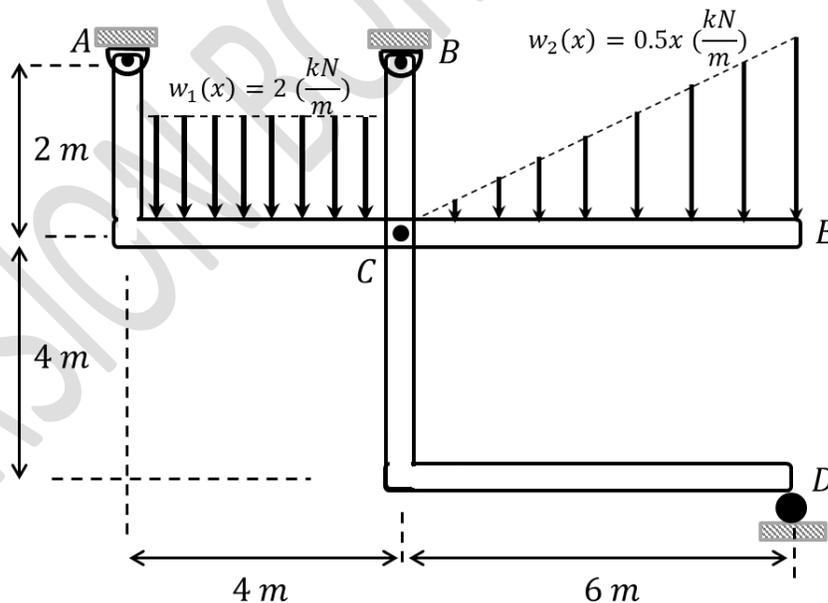


Fig. 7.25.

Respuestas: **Evaluación concepto fuerzas distribuidas en armazones.**

$$c_x = 12 \text{ (kN)}, \quad c_y = 16 \text{ (kN)}$$

8.- Fuerzas y torques internos. Diagramas.

Usualmente las estructuras y vigas presentan fallas en parte de sus elementos y teóricamente es posible predecir el comportamiento que estas estructuras o vigas cuando ocurre este efecto (falla de materiales, por ejemplo). La idea es localizar el punto de la falla y realizar un corte imaginario para determinar el valor de las fuerzas y torques internos en ese punto. Las fuerzas internas son dos: fuerza axial en la dirección de la viga y fuerza cortante, perpendicular a la viga. El torque interno en el punto se denomina torque flector.

Problemas Resueltos de Fuerzas y Torques Internos

8.1.- La viga de peso despreciable mostrada en la Fig. 8.1 está sometida a una carga puntual P ubicada a $2L/3$ del extremo A. Determine la fuerza cortante y el torque flector a una posición $x = L/2$ de A.

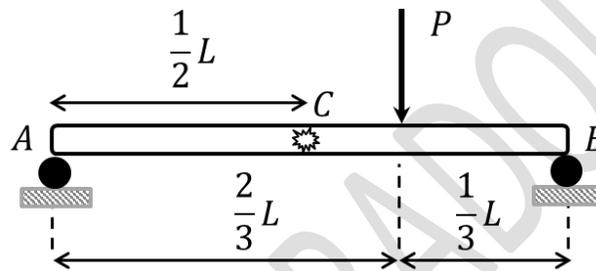


Fig. 8.1.

Resolución del problema

Conceptos previos.

a) Concepto de fuerza y torque b) Equilibrio de un cuerpo y d) Fuerzas internas.

Resultado de aprendizaje.

Calcular fuerzas internas en un punto de una viga sometida a una carga puntual.

Para resolver el problema, se calcula como primera parte, las fuerzas externas en los soportes A y B usando las ecuaciones de equilibrio aplicadas al diagrama de fuerzas no concurrentes. Así:

$$\sum F_y = 0 \rightarrow A_y - P + B_y = 0, \quad \sum \tau_A = 0 \rightarrow -P \cdot \frac{2}{3}L + B_y \cdot L = 0, \quad B_y = \frac{2}{3}P, \quad A_y = \frac{1}{3}P$$

A continuación, se realiza el corte virtual en el punto del nudo C y de acuerdo al diagrama de fuerzas visto desde la izquierda se tiene.

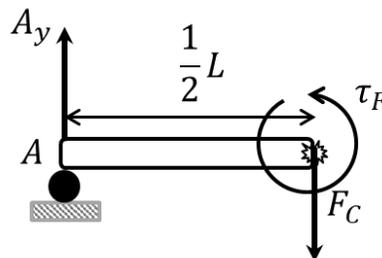


Fig. 8.2.

Considerando las ecuaciones de equilibrio,

$$\sum F_y = 0 \rightarrow A_y - F_C = 0, \quad \sum \tau_A = 0 \rightarrow -F_C \cdot \frac{1}{2}L + \tau_F = 0, \quad F_C = \frac{1}{3}P, \quad \tau_F = \frac{1}{6}PL$$

Otra forma de obtener los resultados anteriores, es usando el diagrama de fuerzas visto desde la derecha, en cuyo caso se obtiene el mismo valor para la fuerza cortante y torque flector. Es decir:

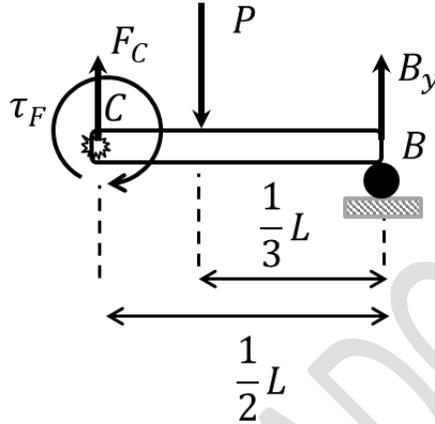


Fig. 8.3.

$$\sum F_y = 0 \rightarrow B_y + F_C - P = 0, \quad \sum \tau_B = 0 \rightarrow P \cdot \frac{1}{3}L - F_C \cdot \frac{1}{2}L - \tau_F = 0, \quad F_C = \frac{1}{3}P, \quad \tau_F = \frac{1}{6}PL$$

El estudiante podrá escoger cualquiera de las dos alternativas, pero está claro que el resultado debe ser el mismo. Observar, que al comparar los diagramas de las Figs. 8.2 y 8.3 la fuerza y torque interno tienen sentidos opuestos, cumpliéndose la tercera ley de Newton.

----- Fin del problema -----

8.2.- La viga de la Fig. 8.4 soporta la fuerza de 4.5 (kN) y el par de fuerzas de 3 (kNm) aplicado al puntal soldado de 0.7 (m) al extremo de la viga. Determinar la fuerza axial, cortante y torque flector en la sección equidistante de A y B.

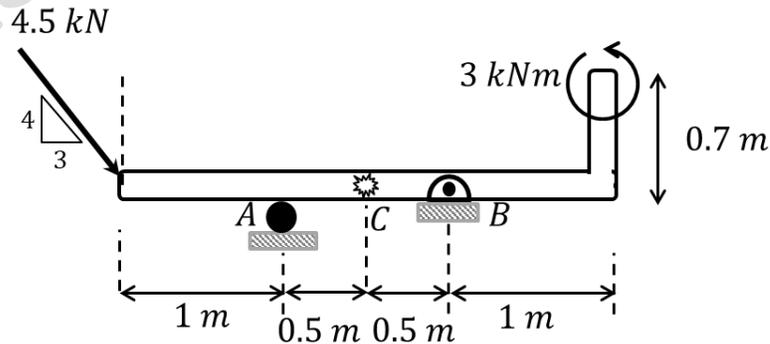


Fig. 8.4.

Resolución del problema

Conceptos previos.

a) Concepto de fuerza y torque b) Equilibrio de un cuerpo y c) Fuerzas internas.

Resultado de aprendizaje.

Calcular fuerzas internas en un punto de una viga sometida a cargas puntuales.

Se obtienen los valores de las fuerzas externas de la manera usual.

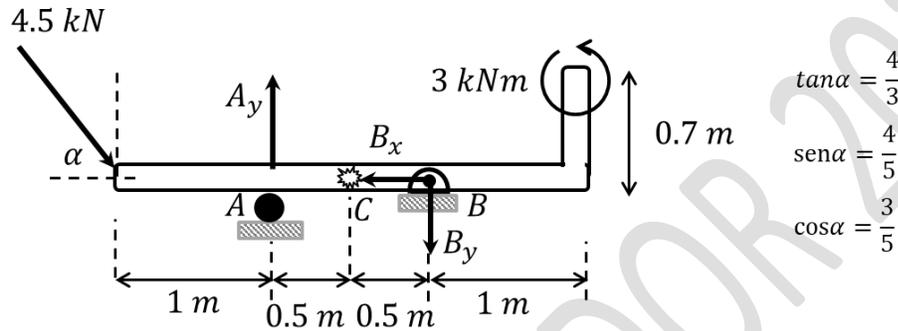


Fig. 8.5.

$$\sum F_x = 0 \rightarrow 4.5 \cos \alpha - B_x = 0, \rightarrow B_x = 2.7 \text{ (kN)}, \quad \sum F_y = 0 \rightarrow -4.5 \sin \alpha + A_y - B_y = 0,$$

$$\sum \tau_B = 0 \rightarrow 4.5 \sin \alpha \cdot 2 - A_y \cdot 1 + 3 = 0, \quad A_y = 10.2 \text{ (kN)}, \quad B_y = 6.6 \text{ (kN)}$$

Se realiza el corte en C y se analiza la viga desde la izquierda.

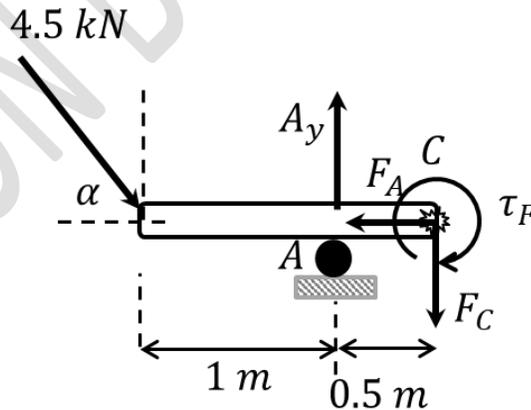


Fig. 8.6.

$$\sum F_x = 0 \rightarrow 4.5 \cos \alpha - F_A = 0, \quad \rightarrow F_A = 2.7 \text{ (kN)}, \quad \sum F_y = 0 \rightarrow -4.5 \sin \alpha + A_y - F_C = 0,$$

$$\sum \tau_C = 0 \rightarrow 4.5 \sin \alpha \cdot 1.5 - A_y \cdot 0.5 - \tau_F = 0, \quad F_C = 6.6 \text{ (kN)}, \quad \tau_F = 0.3 \text{ (kNm)}$$

----- Fin del problema -----

8.3.- Dibujar un diagrama continuo de fuerza cortante y torque flector de la viga cargada por dos fuerzas puntuales mostrada en la Fig. 8.7.

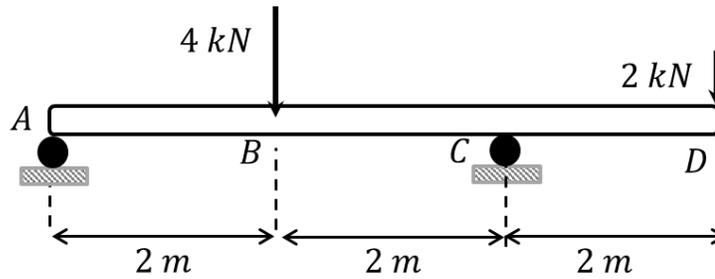


Fig. 8.7.

Resolución del problema

Conceptos previos.

a) Concepto de fuerza y torque b) Equilibrio de un cuerpo y c) Fuerzas internas.

Resultado de aprendizaje.

Calcular el diagrama de fuerzas y torques internos de una viga sometida a cargas puntuales.

Se calculan las fuerzas en los soportes. Para ello se realiza el diagrama de fuerzas y se aplican las condiciones de equilibrio. Así.

$$\sum F_y = 0 \rightarrow A_y - 6 + C_y = 0, \quad \sum \tau_A = 0 \rightarrow -4 \cdot 2 + C_y \cdot 4 - 2 \cdot 6 = 0$$

$$C_y = 5 \text{ (kN)}, \quad A_y = 1 \text{ (kN)}$$

Para realizar un diagrama continuo de fuerzas internas, la viga se divide en zonas o tramos (T) para determinar la fuerza cortante y torque flector en función de una variable definida, por ejemplo, x (por estar a lo largo de la viga). De este modo, de izquierda a derecha se tiene:

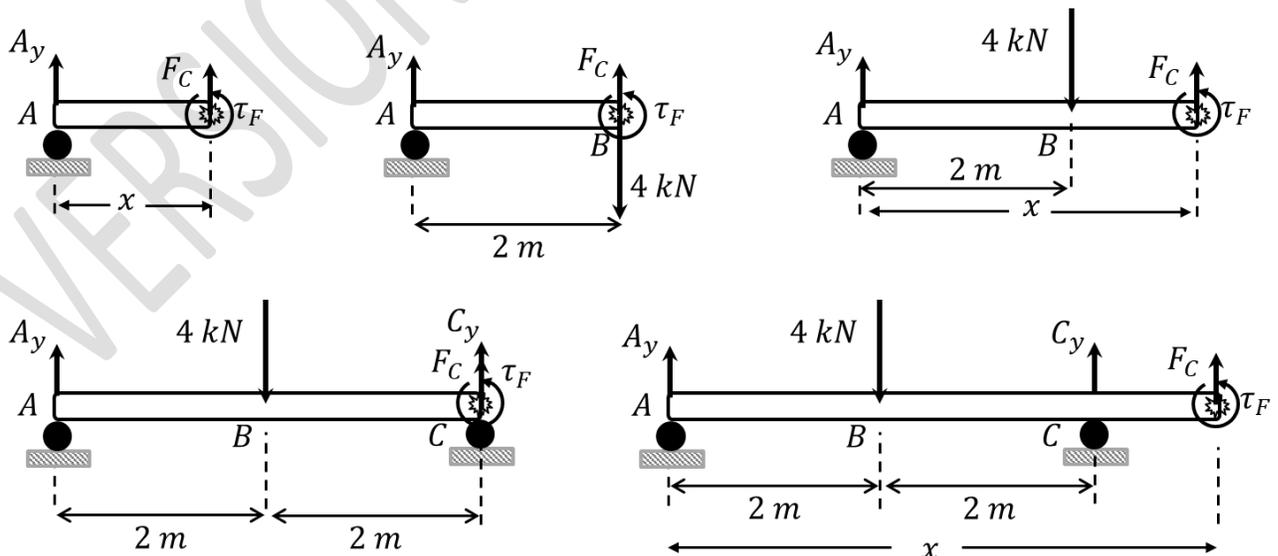


Fig. 8.8.

Sobre cada tramo (T) se aplican las condiciones de equilibrio. Así.

$$T1, x < 2 (m), \quad \sum F_y = 0 \rightarrow A_y + F_C = 0, \quad \sum \tau_A = 0 \rightarrow F_C \cdot x + \tau_F = 0, \\ \therefore F_C = -1 (kN), \rightarrow \tau_F = x (kNm)$$

$$T2, x = 2 (m), \quad \sum F_y = 0 \rightarrow A_y - 4 + F_C = 0, \quad \sum \tau_A = 0 \rightarrow F_C \cdot 2 - 4 \cdot 2 + \tau_F = 0, \\ \therefore F_C = 3 (kN), \rightarrow \tau_F = 2 (kNm)$$

$$T3, x < 4 (m), \quad \sum F_y = 0 \rightarrow A_y - 4 + F_C = 0, \quad \sum \tau_A = 0 \rightarrow -4 \cdot 2 + F_C \cdot x + \tau_F = 0, \\ \therefore F_C = 3 (kN), \rightarrow \tau_F = 8 - 3x (kNm)$$

$$T4, x = 4 (m), \quad \sum F_y = 0 \rightarrow A_y - 4 + F_C + C_y = 0, \quad \sum \tau_A = 0 \rightarrow -4 \cdot 2 + F_C \cdot 4 + C_y \cdot 4 + \tau_F = 0, \\ \therefore F_C = -2 (kN), \rightarrow \tau_F = -4 (kNm)$$

$$T5, x < 6 (m), \quad \sum F_y = 0 \rightarrow A_y - 4 + C_y + F_C = 0, \quad \sum \tau_A = 0 \rightarrow -4 \cdot 2 + C_y \cdot 4 + F_C \cdot x + \tau_F = 0, \\ \therefore F_C = -2 (kN), \rightarrow \tau_F = -12 + 2x (kNm)$$

Para finalizar, se realizan las gráficas en las unidades correspondientes que muestran como varía las fuerzas y torques internos en la viga. De este modo:

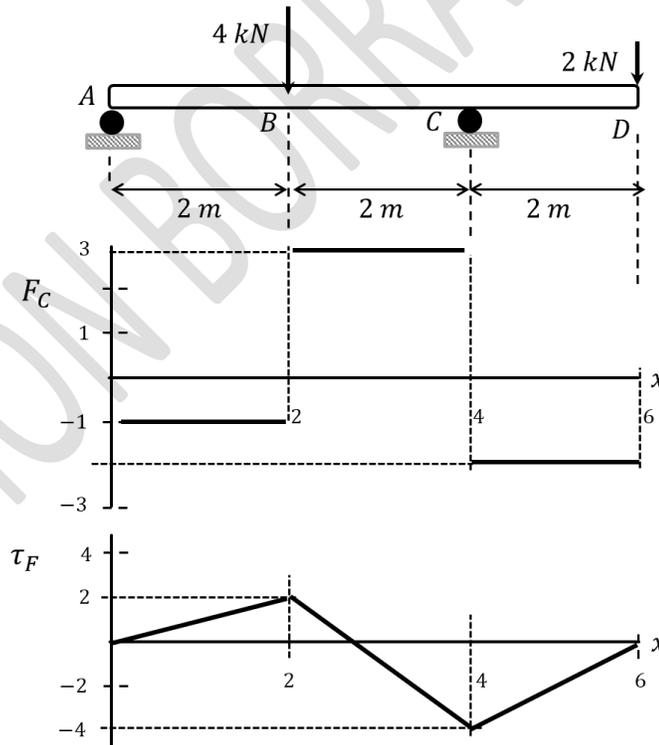


Fig. 8.9.

Observar que la fuerza cortante máxima es 3 (kN) y el torque flector máximo es 2 (kNm). Además, el torque flector es nulo en $x = 2.67 (m)$ y $x = 6 (m)$.

----- Fin del problema -----

8.4.- Utilice la viga mostrada en la Fig. 8.10 para determinar la fuerza cortante y el torque flector a una distancia de 4 (m) medidos desde A.

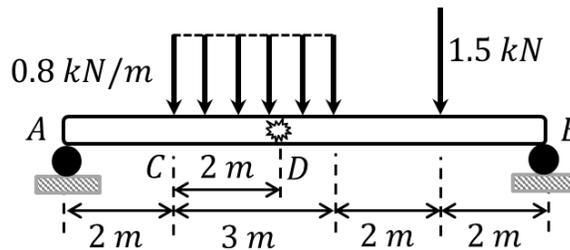


Fig. 8.10.

Resolución del problema

Conceptos previos.

a) Concepto de fuerza y torque b) Equilibrio de un cuerpo y c) Sistema equivalente más simple.

Resultado de aprendizaje.

Calcular fuerzas y torques internos de una viga sometida a cargas puntuales y fuerzas distribuidas simples.

Para resolver el problema, se debe calcular en primer lugar las fuerzas externas en los soportes A y B. Eso significa reemplazar la carga distribuida por una carga puntual usando el concepto de sistema equivalente más simple. Así.

$$F = \int_0^3 0.8 dx = 2.4 \text{ (kN)}, \quad \tau_c = \int_0^3 0.8x dx = 3.6 \text{ (kNm)}, \quad \bar{x} = 1.5 \text{ (m) (desde C)}$$

Por lo tanto.

$$\sum F_y = 0 \rightarrow A_y - 2.4 - 1.5 + B_y = 0, \quad \sum \tau_A = 0 \rightarrow -2.4 \cdot 3.5 - 1.5 \cdot 7 + B_y \cdot 9 = 0$$

$$B_y = 2.1 \text{ (kN)}, \quad A_y = 1.8 \text{ (kN)}$$

Ahora se realiza el corte en el punto D, dejando parte de la fuerza distribuida hasta ese punto, por tanto:

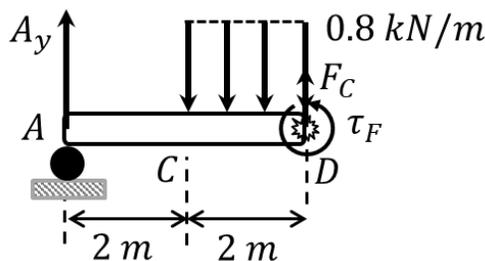


Fig. 8.11.

$$F = \int_0^2 0.8 dx = 1.6 \text{ (kN)}, \quad \tau_c = \int_0^2 0.8x dx = 1.6 \text{ (kNm)}, \quad \bar{x} = 1 \text{ (m) (desde C)}$$

De esta manera,

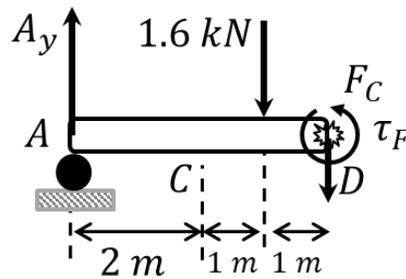


Fig. 8.12.

Donde finalmente, se encuentra.

$$\sum F_y = 0 \rightarrow A_y - 1.6 - F_C = 0, \quad \sum \tau_A = 0 \rightarrow -1.6 \cdot 3 - F_C \cdot 4 + \tau_F = 0$$

$$F_C = 0.2 \text{ (kN)}, \quad \tau_F = 5.6 \text{ (kNm)}$$

Como conclusión, es importante tener en cuenta que cuando existe una carga distribuida, y se requiere hacer un corte dentro de esta región, entonces la carga distribuida total sirve para obtener las fuerzas externas y la parte de la fuerza distribuida hasta el corte sirve también para obtener las fuerzas internas.

----- Fin del problema -----

8.5.- Determinar la fuerza cortante y el torque flector en $x = 0.75 \text{ (m)}$ medidos desde A en la viga mostrada en la Fig. 8.13.

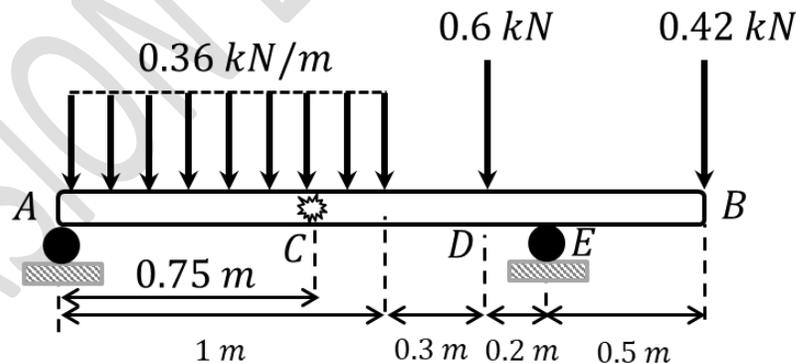


Fig. 8.13.

Resolución del problema

Conceptos previos.

a) Concepto de fuerza y torque b) Equilibrio de un cuerpo y c) Sistema equivalente más simple.

Resultado de aprendizaje.

Calcular fuerzas y torques internos de una viga sometida a cargas puntuales y fuerzas distribuidas simples.

Realizando el sistema equivalente más simple para reemplazar la carga distribuida por una carga puntual y luego aplicando las ecuaciones de equilibrio al diagrama de fuerzas externas se tiene:

$$F = \int_0^1 0.36 dx = 0.36 \text{ (kN)}, \quad \tau_A = \int_0^1 0.36x dx = 0.18 \text{ (kNm)}, \quad \bar{x} = 0.5 \text{ (m) (desde A)}$$

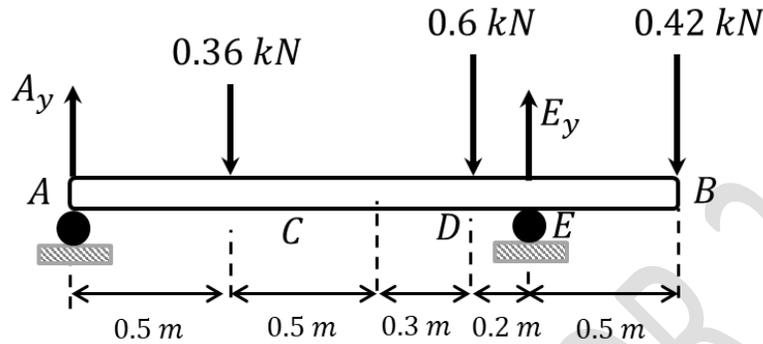


Fig. 8.14.

$$\sum F_y = 0 \rightarrow A_y - 1.38 + E_y = 0, \quad \sum \tau_A = 0 \rightarrow -0.36 \cdot 0.5 - 0.6 \cdot 1.3 + E_y \cdot 1.5 - 0.42 \cdot 2 = 0$$

$$E_y = 1.2 \text{ (kN)}, \quad A_y = 0.18 \text{ (kN)}$$

El corte se debe hacer en $x = 0.75$, punto que está dentro de la región de la fuerza distribuida. De modo que se debe buscar una carga puntual que represente sólo hasta esta parte de la carga distribuida. Así:

$$F = \int_0^{0.75} 0.36 dx = 0.27 \text{ (kN)}, \quad \tau_A = \int_0^{0.75} 0.36x dx = 0.1 \text{ (kNm)}, \quad \bar{x} = 0.37 \text{ (m) (desde A)}$$

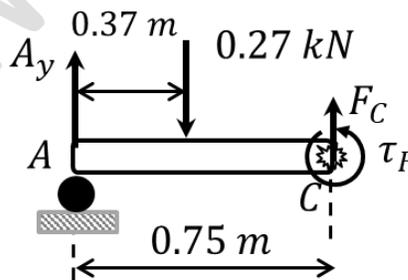


Fig. 8.15.

$$\sum F_y = 0 \rightarrow A_y - 0.27 + F_c = 0, \quad \sum \tau_A = 0 \rightarrow -0.27 \cdot 0.37 + F_c \cdot 0.75 + \tau_F = 0$$

$$F_c = 0.09 \text{ (kN)}, \quad \tau_F = 0.0324 \text{ (kNm)}$$

----- Fin del problema -----

8.6.- Dibujar un diagrama continuo de fuerza cortante y torque flector de la viga cargada mediante una fuerza distribuida constante de la Fig. 8.16.

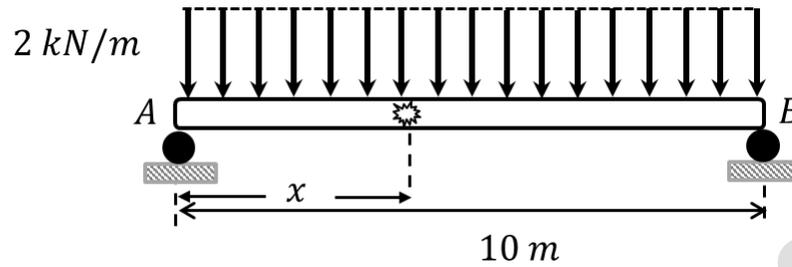


Fig. 8.16.

Resolución del problema

Conceptos previos.

a) Concepto de fuerza y torque b) Equilibrio de un cuerpo y c) Sistema equivalente más simple.

Resultado de aprendizaje.

Calcular el diagrama de fuerzas y torques internos de una viga sometida a una carga distribuida simple.

Se calcula fuerzas externas en los soportes A y B.

$$F = \int_0^{10} 2dx = 20 \text{ (kN)}, \quad \tau_A = \int_0^{10} 2xdx = 100 \text{ (kNm)}, \quad \bar{x} = 5 \text{ (m) (desde A)}$$

Esto es:

$$\sum F_y = 0 \rightarrow A_y - 20 + B_y = 0, \quad \sum \tau_A = 0 \rightarrow -20 \cdot 5 + B_y \cdot 10 = 0$$

$$B_y = 10 \text{ (kN)}, \quad A_y = 10 \text{ (kN)}$$

Se realiza un corte a una distancia $x = x_1$ medido desde A, entendiéndose que x_1 sigue siendo variable. Así:

$$F = \int_0^{x_1} 2dx = 2x_1 \text{ (kN)}, \quad \tau_A = \int_0^{x_1} 2xdx = x_1^2 \text{ (kNm)}, \quad \bar{x} = \frac{x_1}{2} \text{ (m) (desde A)}$$

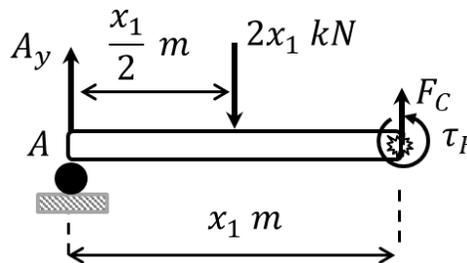


Fig. 8.17.

$$\sum F_y = 0 \rightarrow A_y - 2x_1 + F_C = 0, \quad \sum \tau_A = 0 \rightarrow -2x_1 \cdot \frac{x_1}{2} + F_C \cdot x_1 + \tau_F = 0$$

$$F_C(x_1) = (2x_1 - 10) \text{ (kN)}, \quad \tau_F(x_1) = (-x_1^2 + 10x_1) \text{ (kNm)}$$

Las ecuaciones obtenidas para la fuerza cortante y torque flector están en función de la variable x_1 , siendo lineal en el primer caso y parabólica en el segundo. En este último tiene un máximo para 5 (m) como era de esperar. De este modo los diagramas son:

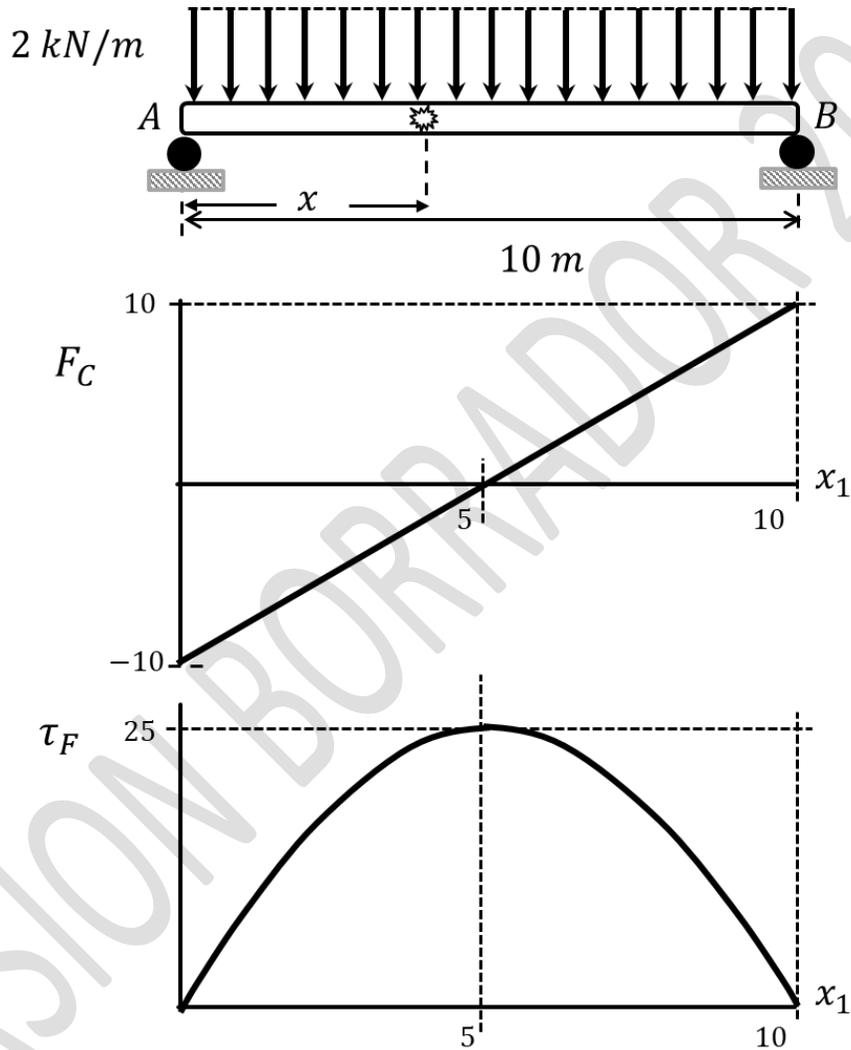


Fig. 8.18.

Notar que, para calcular el máximo del torque flector, basta hacer la derivada igualar a cero y se tiene la posición máxima a lo largo de la viga. Luego se reemplaza en la ecuación para obtener el valor del torque flector 25 (kNm) en este caso.

----- Fin del problema -----

8.7.- Una viga está montada sobre dos soportes A y B como muestra la Fig. 8.19 y está sometida a dos cargas puntuales, una de 2.4 (kN) y otra de 1.5 (kN). Calcule los diagramas de fuerza cortante y torque flector para la viga.

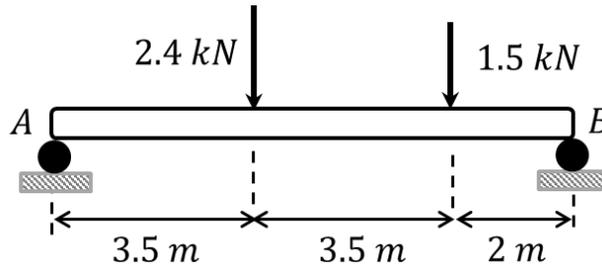


Fig. 8.19.

Resolución del problema

Conceptos previos.

a) Concepto de fuerza y torque b) Equilibrio de un cuerpo y c) Fuerzas internas.

Resultado de aprendizaje.

Calcular el diagrama de fuerzas y torques internos de una viga sometida a cargas puntuales.

Se determina las fuerzas externas de los soportes.

$$\sum F_y = 0 \rightarrow A_y - 3.9 + B_y = 0, \quad \sum \tau_A = 0 \rightarrow -2.4 \cdot 3.5 - 1.5 \cdot 7 + B_y \cdot 9 = 0$$

$$B_y = 2.1 \text{ (kN)}, \quad A_y = 1.8 \text{ (kN)}$$

Realizando los cortes en las cinco zonas, se tiene:

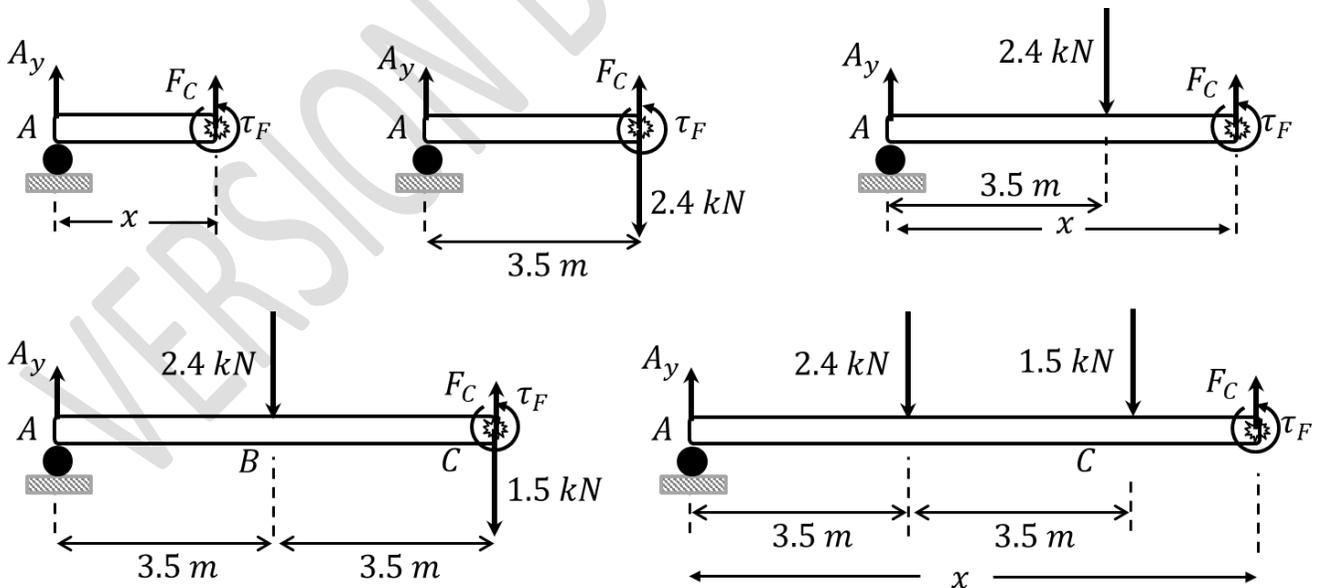


Fig. 8.20.

De este modo, sobre cada tramo (T) se aplican las condiciones de equilibrio. Así.

$$T1, x < 3.5 (m), \quad \sum F_y = 0 \rightarrow A_y + F_C = 0, \quad \sum \tau_A = 0 \rightarrow F_C \cdot x + \tau_F = 0, \\ \therefore F_C = -1.8 (kN), \rightarrow \tau_F = 1.8x (kNm)$$

$$T2, x = 3.5 (m), \quad \sum F_y = 0 \rightarrow A_y - 2.4 + F_C = 0, \quad \sum \tau_A = 0 \rightarrow F_C \cdot 3.5 - 2.4 \cdot 3.5 + \tau_F = 0, \\ \therefore F_C = 0.6 (kN), \rightarrow \tau_F = 6.3 (kNm)$$

$$T3, x < 7 (m), \quad \sum F_y = 0 \rightarrow A_y - 2.4 + F_C = 0, \quad \sum \tau_A = 0 \rightarrow -2.4 \cdot 3.5 + F_C \cdot x + \tau_F = 0, \\ \therefore F_C = 0.6 (kN), \rightarrow \tau_F = 8.4 - 0.6x (kNm)$$

$$T4, x = 7 (m), \quad \sum F_y = 0 \rightarrow A_y - 2.4 + F_C - 1.5 = 0, \quad \sum \tau_A = 0 \rightarrow -2.4 \cdot 3.5 + F_C \cdot 7 - 1.5 \cdot 7 + \tau_F = 0, \\ = 0, \quad \therefore F_C = 2.1 (kN), \rightarrow \tau_F = 4.2 (kNm)$$

$$T5, x < 9 (m), \quad \sum F_y = 0 \rightarrow A_y - 2.4 - 1.5 + F_C = 0, \quad \sum \tau_A = 0 \rightarrow -2.4 \cdot 3.5 - 1.5 \cdot 7 + F_C \cdot x + \tau_F = 0, \\ = 0, \quad \therefore F_C = 2.1 (kN), \rightarrow \tau_F = 18.9 - 2.1x (kNm)$$

Luego.

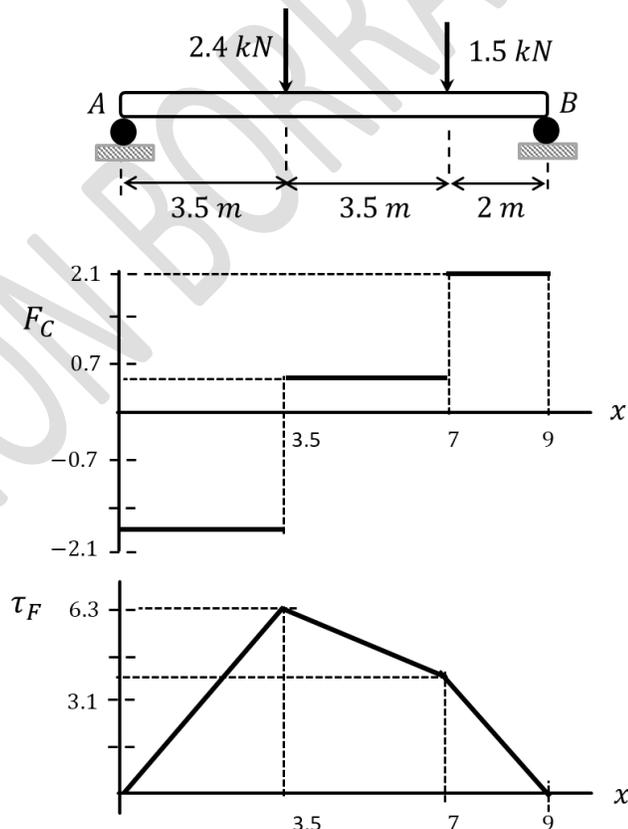


Fig. 8.21.

----- Fin del problema -----

8.8.- Una viga de peso despreciable se carga mediante una fuerza distribuida rectangular o constante como se muestra en la Fig. 8.22. Calcular las fuerzas internas en el punto D y C de la viga.

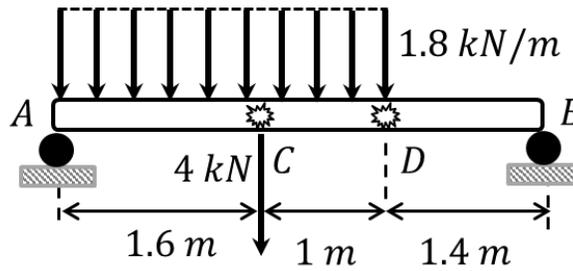


Fig. 8.22.

Resolución del problema

Conceptos previos.

a) Concepto de fuerza y torque b) Equilibrio de un cuerpo y c) Sistema equivalente más simple.

Resultado de aprendizaje.

Calcular fuerzas y torques internos de una viga sometida a una carga puntual y una fuerza distribuida simple.

Usando el concepto de sistema equivalente más simple y las ecuaciones de equilibrio se calculan las fuerzas externas en los soportes A y B. Así.

$$F = \int_0^{2.6} 1.8 dx = 4.68 \text{ (kN)}, \quad \tau_A = \int_0^{2.6} 1.8x dx = 6.08 \text{ (kNm)}, \quad \bar{x} = 1.3 \text{ (m) (desde A)}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow A_y - 8.68 + B_y = 0, \quad \sum \tau_A = 0 \rightarrow -4.68 \cdot 1.3 - 4 \cdot 1.6 + B_y \cdot 4 = 0, \\ \therefore B_y = 3.12 \text{ (kN)}, \rightarrow A_y = 5.56 \text{ (kNm)}$$

Para calcular las fuerzas internas en D, se usa el esquema de la Fig. 8.23 izquierda y para el caso C el grupo de esquemas de la Fig. 8.23 derecha. En cada caso se aplican las ecuaciones de equilibrio, encontrándose que:

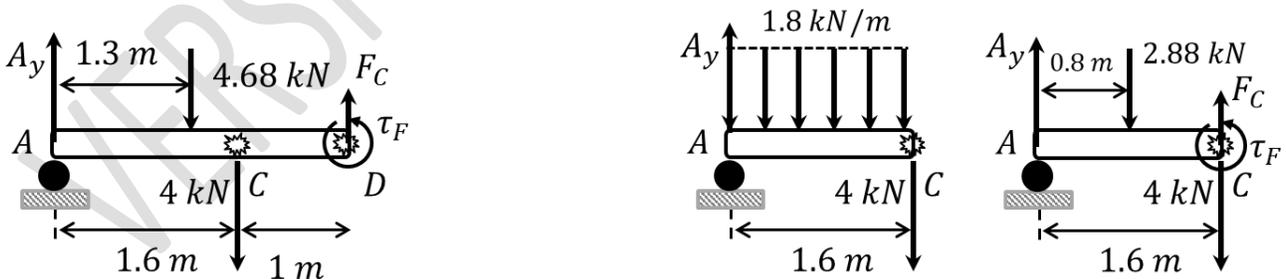


Fig. 8.23.

En D: $F_C = 3.12 \text{ (kN)}$, $\tau_F = 4.37 \text{ (kNm)}$, **En C:** $F_C = 1.32 \text{ (kN)}$, $\tau_F = 6.6 \text{ (kNm)}$

----- Fin del problema -----

8.9.- Dibujar un diagrama continuo de fuerza cortante y torque flector de la viga cargada mediante una fuerza distribuida triangular de la Fig. 8.24.

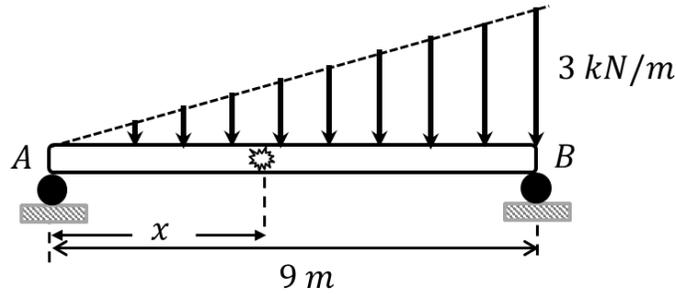


Fig. 8.24.

Resolución del problema

Conceptos previos.

a) Concepto de fuerza y torque b) Equilibrio de un cuerpo, c) Sistema equivalente más simple y d) Mínimos y máximos.

Resultado de aprendizaje.

Calcular el diagrama de fuerzas y torques internos de una viga sometida a una carga distribuida triangular.

Se calcula fuerzas externas en los soportes A y B.

$$F = \int_0^9 \frac{1}{3}x dx = \frac{27}{2} \text{ (kN)}, \quad \tau_A = \int_0^9 \frac{1}{3}x^2 dx = 81 \text{ (kNm)}, \quad \bar{x} = 6 \text{ (m) (desde A)}$$

Esto es:

$$\sum F_y = 0 \rightarrow A_y - \frac{27}{2} + B_y = 0, \quad \sum \tau_A = 0 \rightarrow -\frac{27}{2} \cdot 6 + B_y \cdot 9 = 0$$

$$B_y = 9 \text{ (kN)}, \quad A_y = \frac{9}{2} \text{ (kN)}$$

Igual que el problema 8.6, se realiza un corte a una distancia $x = x_1$ medido desde A, entendiéndose que x_1 sigue siendo variable. Así:

$$F = \int_0^{x_1} \frac{1}{3}x dx = \frac{1}{6}x_1^2 \text{ (kN)}, \quad \tau_A = \int_0^{x_1} \frac{1}{3}x^2 dx = \frac{1}{9}x_1^3 \text{ (kNm)}, \quad \bar{x} = \frac{2}{3}x_1 \text{ (m) (desde A)}$$

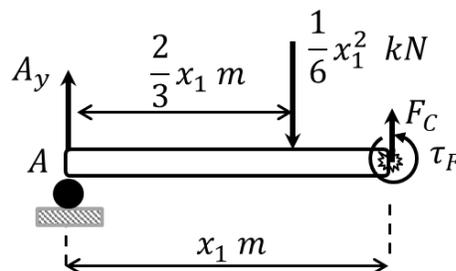


Fig. 8.25.

Usando nuevamente las condiciones de equilibrio,

$$\sum F_y = 0 \rightarrow A_y - \frac{1}{6}x_1^2 + F_C = 0, \quad \sum \tau_A = 0 \rightarrow -\frac{1}{6}x_1^2 \cdot \frac{2}{3}x_1 + F_C \cdot x_1 + \tau_F = 0$$

$$\therefore F_C(x_1) = \left(\frac{1}{6}x_1^2 - \frac{9}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}x_1^2 - 9\right) \text{ (kN)}$$

$$\tau_F(x_1) = \frac{1}{9}x_1^3 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}x_1^2 - 9\right)x_1 = -\frac{1}{18}x_1^3 + \frac{9}{2}x_1 = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{9}x_1^2 + 9\right)x_1 \text{ (kNm)}$$

De esta manera, los diagramas de fuerza cortante y torque flector son:

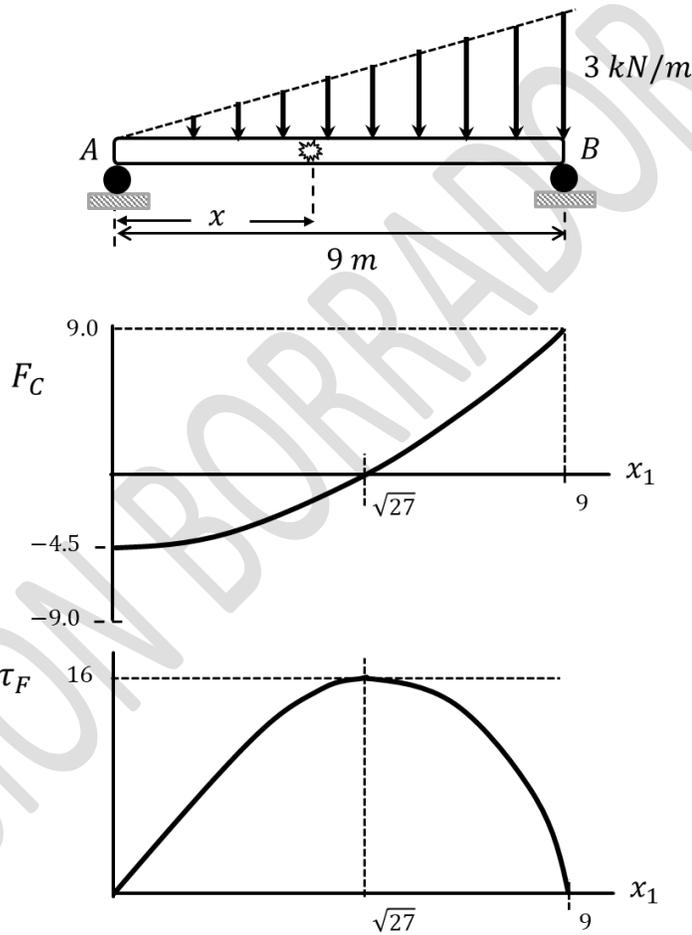


Fig. 8.26.

Se puede obtener los resultados críticos de las funciones, así $F_C = 0$, cuando $x_1 = \sqrt{27}$ (m). Por otro lado, el torque flector presenta un máximo en ese mismo valor.

----- Fin del problema -----

8.10.- La viga homogénea está montada sobre dos soportes A y B y sometida a dos cargas puntuales y una carga distribuida constante como se muestra en la Fig. 8.27. Realice un diagrama de fuerza cortante y torque flector e indique donde la fuerza cortante es máxima y la posición desde A cuando el torque flector es nulo.

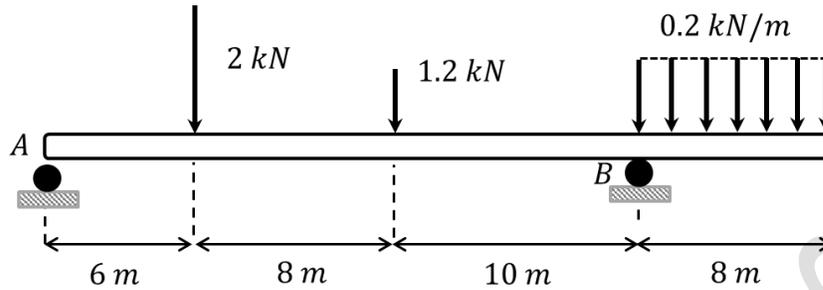


Fig. 8.27.

Resolución del problema

Conceptos previos.

a) Concepto de fuerza y torque b) Equilibrio de un cuerpo y c) Sistema equivalente más simple.

Resultado de aprendizaje.

Calcular el diagrama de fuerzas y torques internos de una viga sometida a una cargas puntuales y distribuidas.

Como se ha venido desarrollando cada problema, en primer lugar, se determina las fuerzas externas en los soportes A y B. Para ello, se calcula la fuerza puntual que representa la fuerza distribuida. Así:

$$F = \int_0^8 0.2 dx = 1.6 \text{ (kN)}, \quad \tau_B = \int_0^8 0.2x dx = 6.4 \text{ (kNm)}, \quad \bar{x} = 4 \text{ (m) (desde B)}$$

esto es:

$$\sum F_y = 0 \rightarrow A_y - 4.8 + B_y = 0, \quad \sum \tau_A = 0 \rightarrow -2 \cdot 6 - 1.2 \cdot 14 + B_y \cdot 24 - 1.6 \cdot 28 = 0$$

$$B_y = 3.07 \text{ (kN)}, \quad A_y = 1.73 \text{ (kN)}$$

A continuación, se comienza con el cálculo de la fuerza cortante y torque flector por cada zona en función de la posición x respecto del extremo A de la viga. Luego:

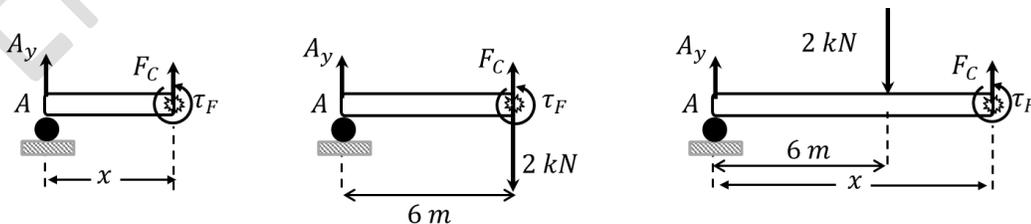


Fig. 8.28.

$$T1, x < 6 (m), \quad \sum F_y = 0 \rightarrow A_y + F_C = 0, \quad \sum \tau_A = 0 \rightarrow F_C \cdot x + \tau_F = 0, \\ \therefore F_C = -1.73 (kN), \rightarrow \tau_F = 1.73x (kNm)$$

$$T2, x = 6 (m), \quad \sum F_y = 0 \rightarrow A_y - 2 + F_C = 0, \quad \sum \tau_A = 0 \rightarrow F_C \cdot 6 - 2 \cdot 6 + \tau_F = 0, \\ \therefore F_C = 0.27 (kN), \rightarrow \tau_F = 10.4 (kNm)$$

$$T3, x < 14 (m), \quad \sum F_y = 0 \rightarrow A_y - 2 + F_C = 0, \quad \sum \tau_A = 0 \rightarrow -2 \cdot 6 + F_C \cdot x + \tau_F = 0, \\ \therefore F_C = 0.27 (kN), \rightarrow \tau_F = 12 - 0.27x (kNm)$$

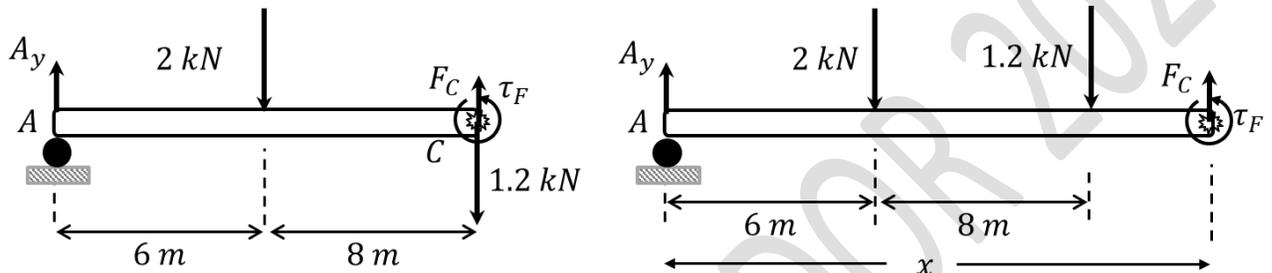


Fig. 8.29.

$$T4, x = 14 (m), \quad \sum F_y = 0 \rightarrow A_y - 3.2 + F_C = 0, \quad \sum \tau_A = 0 \rightarrow -2 \cdot 6 - 1.2 \cdot 14 + F_C \cdot 14 + \tau_F = 0, \\ \therefore F_C = 1.47 (kN), \rightarrow \tau_F = 8.2 (kNm)$$

$$T5, x < 24 (m), \quad \sum F_y = 0 \rightarrow A_y - 3.2 + F_C = 0, \quad \sum \tau_A = 0 \rightarrow -2 \cdot 6 - 1.2 \cdot 14 + F_C \cdot x + \tau_F = 0, \\ \therefore F_C = 1.47 (kN), \rightarrow \tau_F = 29 - 1.47x (kNm)$$

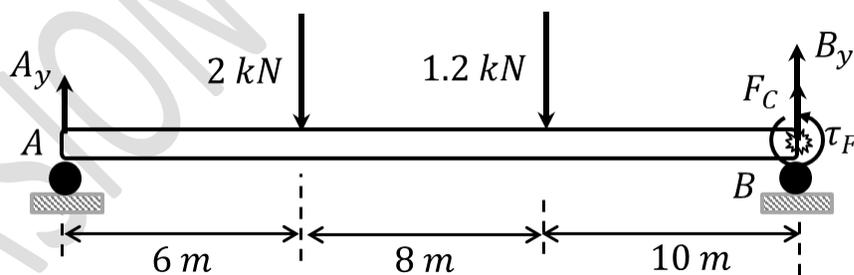


Fig. 8.30.

$$T6, x = 24 (m), \quad \sum F_y = 0 \rightarrow A_y - 3.2 + 3.07 + F_C = 0,$$

$$\sum \tau_A = 0 \rightarrow -2 \cdot 6 - 1.2 \cdot 14 + F_C \cdot 24 + B_y \cdot 24 + \tau_F = 0,$$

$$\therefore F_C = -1.6 (kN), \rightarrow \tau_F = -6.5 (kNm)$$

Finalmente, para la fuerza distribuida, se tiene:

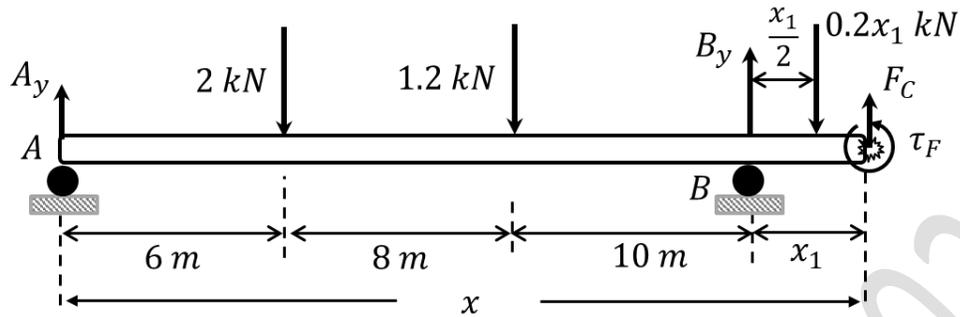


Fig. 8.31.

$$F = \int_0^{x_1} 0.2dx = 0.2x_1 \text{ (kN)}, \quad \tau_B = \int_0^{x_1} 0.2xdx = 0.1x_1^2 \text{ (kNm)}, \quad \bar{x} = 0.5x_1 \text{ (m) (desde B)}$$

$$T7, x < 32 \text{ (m)}, \quad \sum F_y = 0 \rightarrow A_y - 3.2 + 3.07 - 0.2x_1 + F_C = 0, \quad \rightarrow F_C = 0.2x_1 - 1.6 \text{ (kN)}$$

Esto es, cuando $x_1 = 0$, entonces se obtiene el valor de la fuerza cortante del tramo anterior, y cuando x_1 adquiere el valor de 8 (m), se tiene que el valor de la fuerza cortante es nulo. Alternativamente, $x_1 = x - 24$, para $x > 24$, en este caso:

$$F_C = 0.2(x - 24) - 1.6 = 0.2x - 6.4 \text{ (kN)}$$

De igual modo:

$$\sum \tau_A = 0 \rightarrow -2 \cdot 6 - 1.2 \cdot 14 + B_y \cdot 24 - 0.2x_1(24 + 0.5x_1) + F_C \cdot x + \tau_F = 0$$

$$\rightarrow 44.9 - 0.2x_1(24 + 0.5x_1) + F_C \cdot x + \tau_F = 0$$

$$\rightarrow 44.9 - 0.2(x - 24)(24 + 0.5(x - 24)) + (0.2x - 6.4) \cdot x + \tau_F = 0$$

$$\rightarrow 44.9 - (0.2x - 4.8)(12 + 0.5x) + (0.2x^2 - 6.4x) + \tau_F = 0$$

$$\rightarrow \tau_F = (0.2x - 4.8)(12 + 0.5x) - (0.2x^2 - 6.4x) - 44.9$$

$$\therefore \tau_F = -0.1x^2 + 6.4x - 102.5$$

Evaluando en $x = 24 \text{ (m)}$ se obtiene el valor del torque flector del tramo anterior y cuando $x = 32 \text{ (m)}$ se obtiene aproximadamente cero (-0.1 (kNm)).

Con los valores anteriores, se puede concluir que la fuerza cortante es máxima en el tramo entre $x = 14$ y 24 (m) . Por su parte el torque flector es máximo en $x = 6 \text{ (m)}$ y es cero en la posición $x = 19.7 \text{ (m)}$. Los diagramas se muestran a continuación.

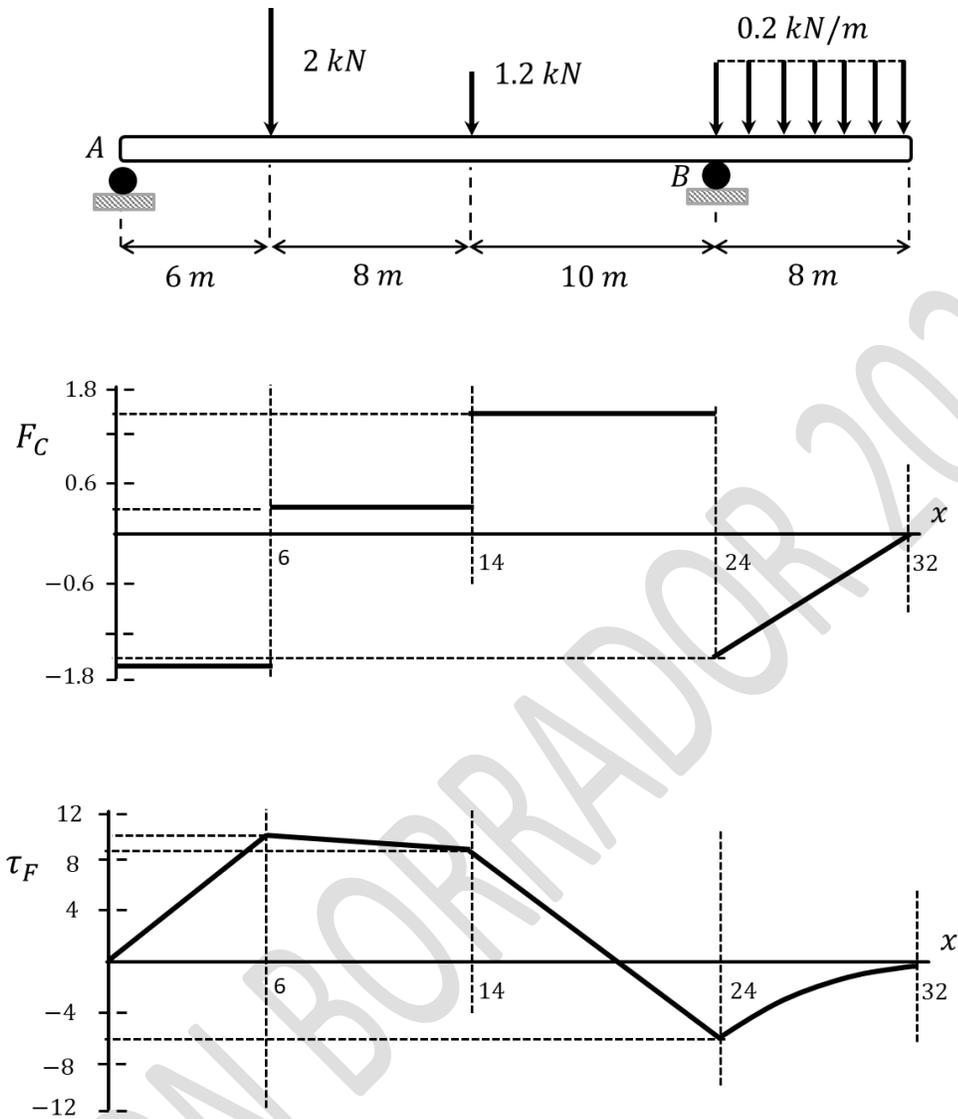


Fig. 8.32.

----- Fin del problema -----

Problemas Propuestos de Fuerzas y Torques Internos

8.11.- Una viga homogénea de masa despreciable está montada sobre dos soportes A y B. Se aplica sobre la viga dos fuerzas puntuales de 4 (kN) como se muestra en la Fig. 8.33. Un análisis visual permite observar una falla en la mitad de la viga, determinar en ese punto, la fuerza cortante y torque flector.

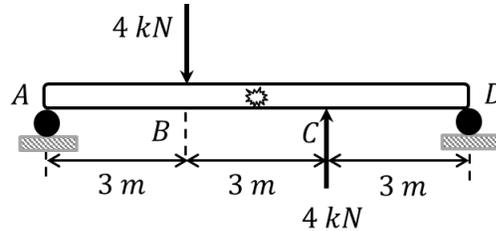


Fig. 8.33.

Respuestas: **Evaluación concepto fuerzas internas en una viga.**

$$F_C = 2.67 \text{ (kN)}, \quad \tau_F = 0 \text{ (kNm)}$$

8.12.- Utilice la viga de 3 (m) empotrada en A y sometida a una fuerza distribuida constante de 50 (N/m) y a un par de fuerzas de 100 (N) como muestra la Fig. 8.34 para determinar las fuerzas internas en $x = 1.0, 1.5$ y 2.0 (m) medidos desde A.

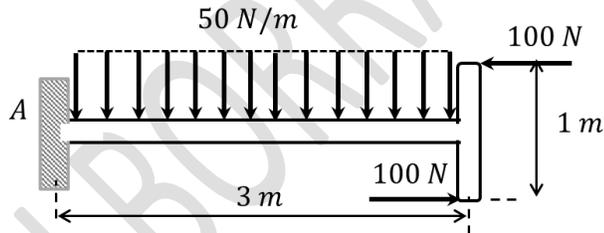


Fig. 8.34.

Respuestas: **Evaluación concepto fuerzas internas en una viga.**

$$x = 1.0 \text{ (m)} \rightarrow F_C = 100 \text{ (N)}, \quad \tau_F = 0 \text{ (Nm)}, \quad x = 1.5 \text{ (m)} \rightarrow F_C = 75 \text{ (N)}, \quad \tau_F = 43.75 \text{ (Nm)}$$

$$x = 2.0 \text{ (m)} \rightarrow F_C = 50 \text{ (N)}, \quad \tau_F = 75 \text{ (Nm)}$$

8.13.- Utilice la viga mostrada en la Fig. 8.35 para determinar la fuerza cortante y torque flector en el punto C.

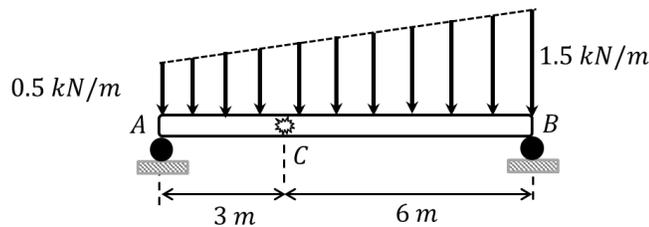


Fig. 8.35.

Respuestas: **Evaluación concepto fuerzas internas en una viga.**

$$F_C = 1.75 \text{ (kN)}, \quad \tau_F = 8.5 \text{ (kNm)}$$

8.14.- Una viga AC está sometida a dos cargas puntuales, una de 1 (kN) y otra de 4 (kN). La viga está sujeta por dos soportes B y C como muestra la Fig. 8.36. Determine los diagramas de fuerza cortante y torque flector para la viga.

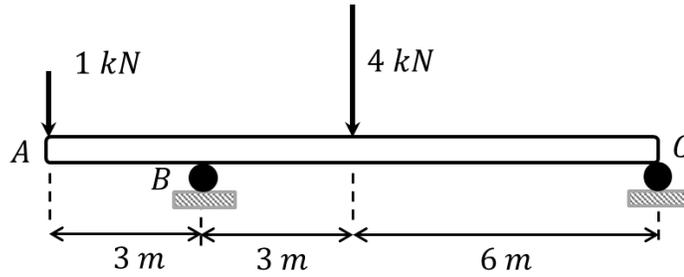


Fig. 8.36.

Respuestas: **Evaluación del concepto diagramas de fuerzas internas en una viga.**

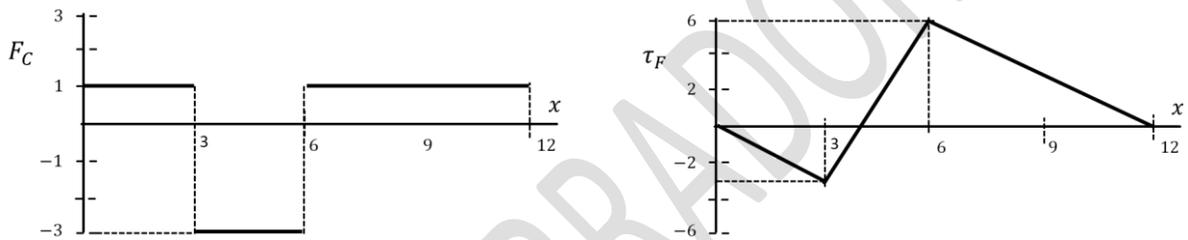


Fig. 8.37.

8.15.- Realice un diagrama de fuerza cortante y torque flector de la viga montada en los soportes AB y sometida a una carga distribuida homogénea como se muestra en la Fig. 8.38.

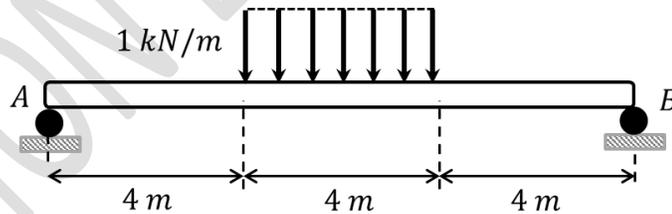


Fig. 8.38.

Respuestas: **Evaluación del concepto diagramas de fuerzas internas en una viga.**

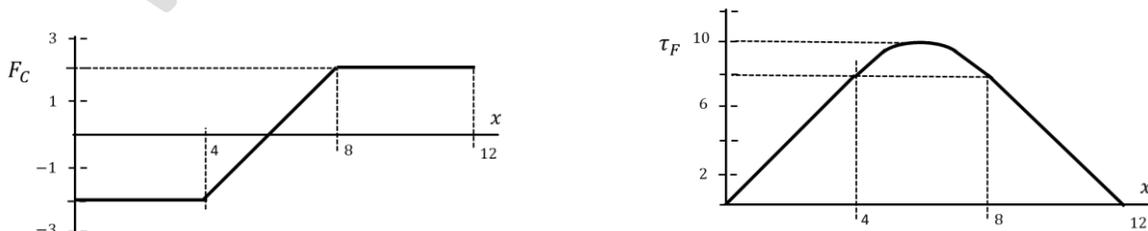


Fig. 8.39.

8.16.- Realice un diagrama de fuerza cortante y torque flector de la viga montada en los soportes AB y sometida a una carga distribuida homogénea como se muestra en la Fig. 8.40.

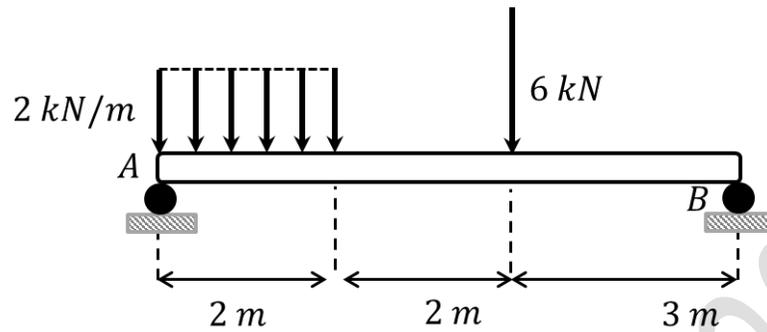


Fig. 8.40.

Respuestas: **Evaluación del concepto diagramas de fuerzas internas en una viga.**

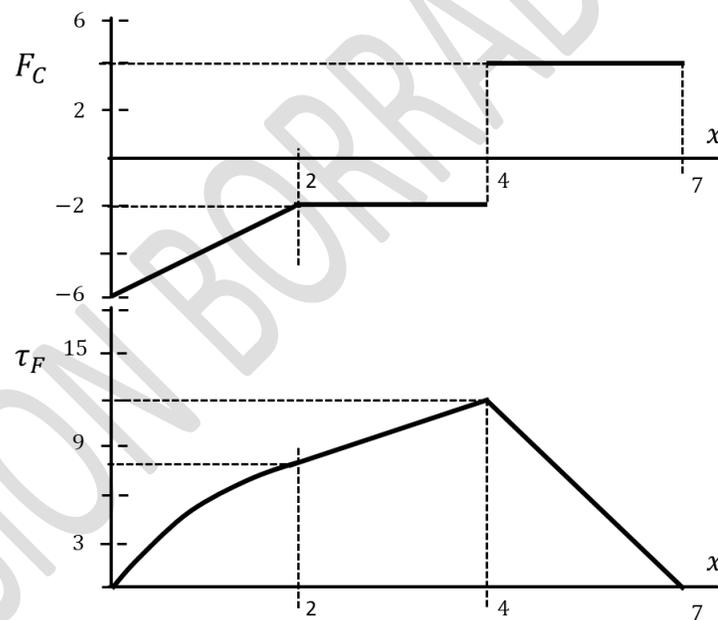


Fig. 8.41.

PARTE IV. OTROS PROBLEMAS RELACIONADOS.

Para finalizar este apunte, se plantean problemas suplementarios para complementar cada uno de los temas desarrollados y permiten al estudiante reforzar los conceptos claves y contenidos esenciales del curso.

9.- Problemas Propuestos Suplementarios.

Evaluación del concepto equilibrio de un cuerpo rígido.

9.1.- Una barra homogénea de longitud 12 (m) y masa 20 (kg) tiene un pasador en el punto O y está sujeta por una cuerda AC a un poste fijo como se ilustra en la Fig. 9.1. La barra se sujeta mediante una fuerza de 0.2 (kN) por el externo B.

Determinar:

- El ángulo θ .
- La tensión de la cuerda AC.
- Las reacciones en el pasador O.
- Coordenada x de cruce entre la tensión de la cuerda y el peso de la barra medida desde O.

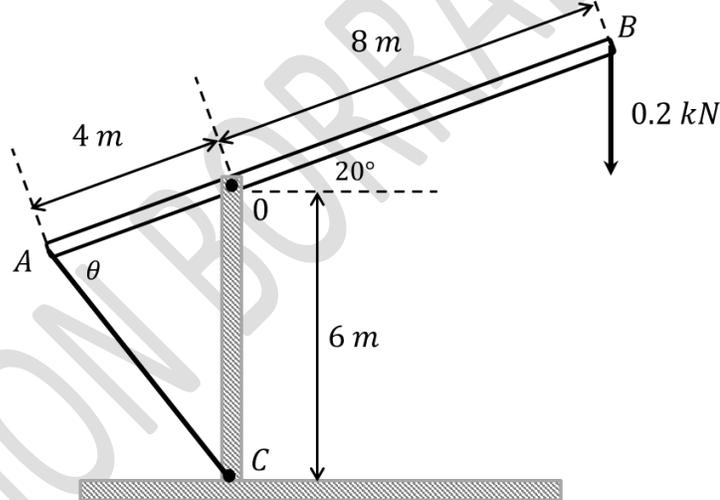


Fig. 9.1.

Respuestas:

$$\theta = 71^\circ, \quad T = 495 \text{ (N)}, \quad O_x = 312 \text{ (N)}, \quad O_y = 781 \text{ (N)}, \quad x = 1.9 \text{ (m)}$$

9.2.- Una varilla de masa $m = 2$ (kg) y largo $L = 3$ (m) está sostenida a una pared vertical mediante un pasador fijo O y por el otro extremo, amarrada por una cuerda a un techo B, tal como muestra la Fig. 9.2. Calcular:

- La tensión de la cuerda y las fuerza ejercidas en el pasador O.
- Punto de concurrencia entre las fuerzas que actúan en el pasador, el peso de la barra y la tensión, respecto de un sistema coordenado cartesiano con origen en O.

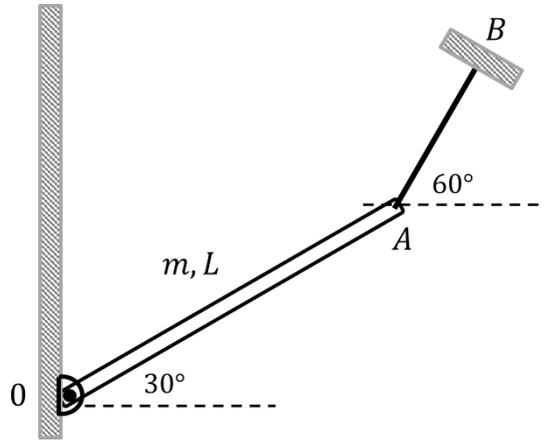


Fig. 9.2.

Respuestas:

$$T = 17 \text{ (N)}, \quad O_x = 8.5 \text{ (N)}, \quad O_y = 4.9 \text{ (N)}, \quad x = 1.3 \text{ (m)}, \quad y = -0.75 \text{ (m)}$$

9.3.- Una varilla homogénea de largo L y peso $w = 1 \text{ (kN)}$ está apoyada en una pared vertical y un piso horizontal, ambos sin roce. La varilla está sometida a dos fuerzas verticales, ambas de 0.4 (kN) y amarrada por una cuerda CD. Los puntos de aplicación de las diferentes fuerzas en la varilla se indican en la Fig. 9.3.

- a) Demuestre que el valor del ángulo γ es 38.7° .
 B) Calcule la tensión de la cuerda CD.

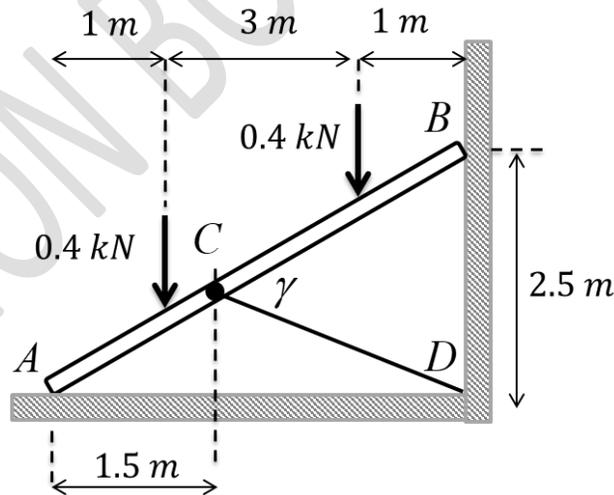


Fig. 9.3.

Respuestas:

$$T = 3.24 \text{ (kN)}$$

Evaluación del concepto equilibrio de una estructura o armazón cuando se aplica una fuerza puntual o distribuida.

9.4.- Una estructura simple está compuesta por 4 varillas ligeras. El conjunto está montado sobre un pasador en A y un soporte en C y sobre la estructura se aplica una fuerza de 5 (kN) en D, como muestra la Fig. 9.4. Calcular la fuerza interna en la varilla AD e indique si está en tensión o compresión.

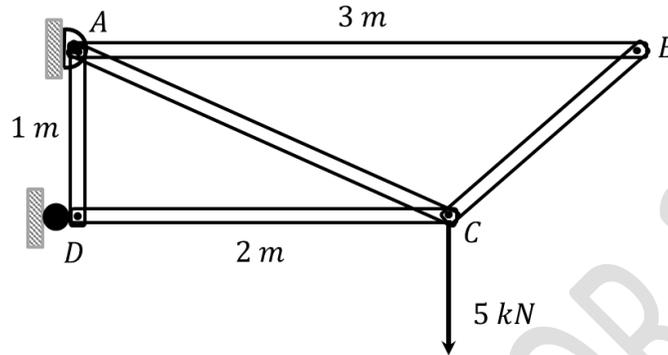


Fig. 9.4.

Respuestas:

$$T_{AD} = 11.2 \text{ (kN) [T]}$$

9.5.- Un armazón está conformado por tres elementos AB, BC y DC adosado a una pared vertical mediante dos pasadores A y D como muestra la Fig. 9.5. El armazón está sometido a una fuerza de 2 (kN) aplicada en el punto medio del elemento AB.

- Determinar las reacciones en los pasadores A y D.
- Calcule la fuerza aplicada en el pasador C.

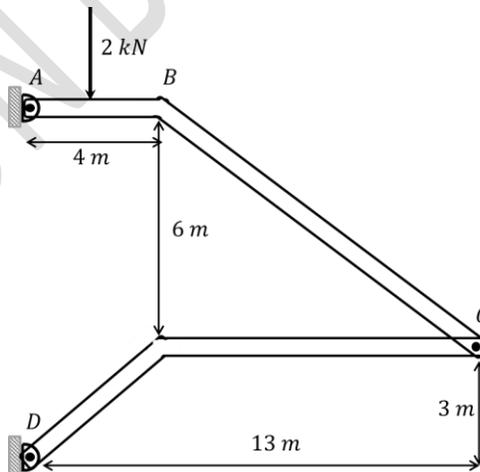


Fig. 9.5.

Respuestas:

$$A_x = -D_x = -\frac{4}{9} \text{ (kN)}, \quad A_y = \frac{74}{39} \text{ (kN)}, \quad c_x = \frac{4}{9} \text{ (kN)}, \quad c_y = \frac{4}{39} \text{ (kN)} = D_y$$

9.6.- Determinar el valor de las reacciones en el pasador A y el apoyo B del armazón mostrado en la Fig. 9.6 y luego determine las reacciones en D.

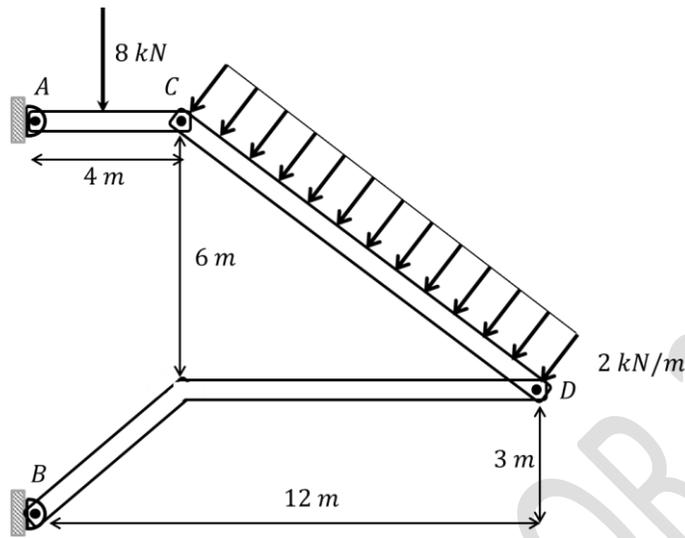


Fig. 9.6.

Respuestas:

$$A_x = 8 \text{ (kN)}, \quad B_x = 20 \text{ (kN)}, \quad A_y = 4 \text{ (kN)}, \quad B_y = 20 \text{ (kN)}, \quad D_x = 20 \text{ (kN)}, \quad D_y = 20 \text{ (kN)}$$

9.7.- Determinar el valor de las reacciones en el pasador A del armazón mostrado en la Fig. 9.7.

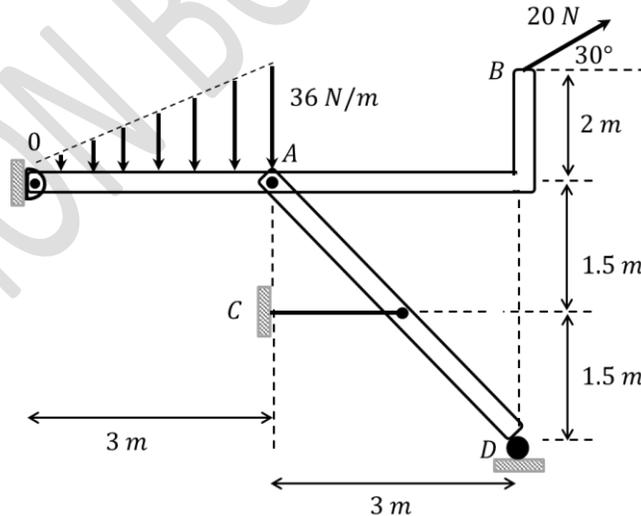


Fig. 9.7.

Respuestas:

$$a_x = 55 \text{ (N)}, \quad a_y = 27.5 \text{ (N)}$$

9.8.- Un armazón está compuesto por dos varillas OA y AB de masa despreciable. Sobre la varilla OA actúa una fuerza de 15 (kN) en el punto C correspondiente al punto equidistante OA y perpendicular a ella. Sobre la varilla AB actúa

una fuerza distribuida triangular cuya fuerza máxima por unidad de longitud es $0,25 \text{ (kN/m)}$. Determinar el valor de las reacciones en los pasadores 0 y B del armazón mostrado en la Fig. 9.8.

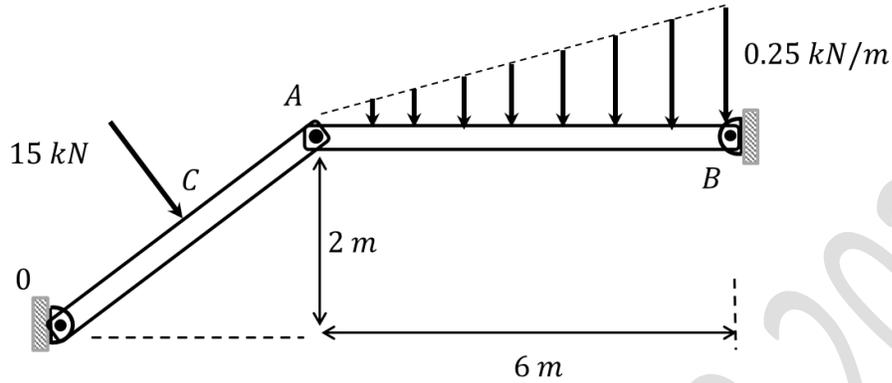


Fig. 9.8.

Respuestas:

$$O_x = 10 \text{ (kN)}, \quad B_x = 17.5 \text{ (kN)}, \quad O_y = 14.5 \text{ (kN)}, \quad B_y = 3 \text{ (kN)}$$

Evaluación del concepto equilibrio de una viga sometida a fuerzas distribuidas análisis de fuerzas internas.

9.9.- Una viga está sometida a tres diferentes fuerzas distribuidas como lo muestra la Fig. 9.9. Determinar el valor de las reacciones en los apoyos B y C de la viga.

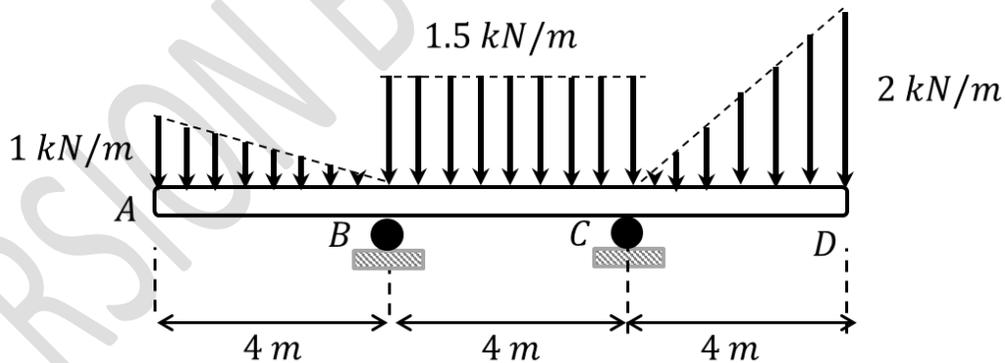


Fig. 9.9.

Respuestas:

$$B_y = 3.7 \text{ (kN)}, \quad C_y = 8.7 \text{ (kN)}$$

9.10. La viga AE está sometida a dos fuerzas puntuales (cargas) como muestra la Fig. 9.10. Se ha medido que existe una relación entre los apoyos E y C dados por $E_y = 2C_y$.

- Determinar el valor de las reacciones en los apoyos A, C y E de la viga.
- Realice un diagrama de fuerza cortante y torque flector en la viga.

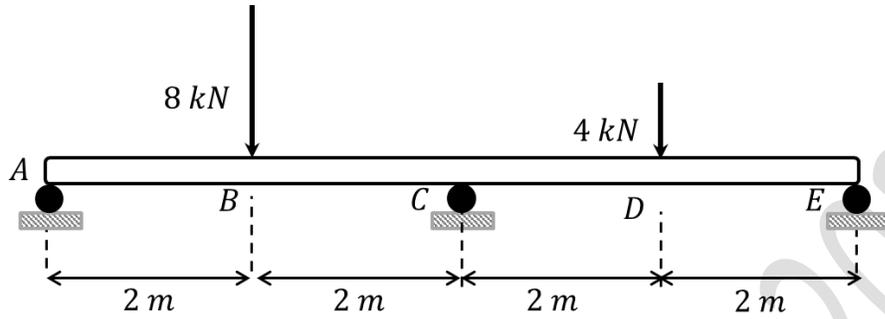
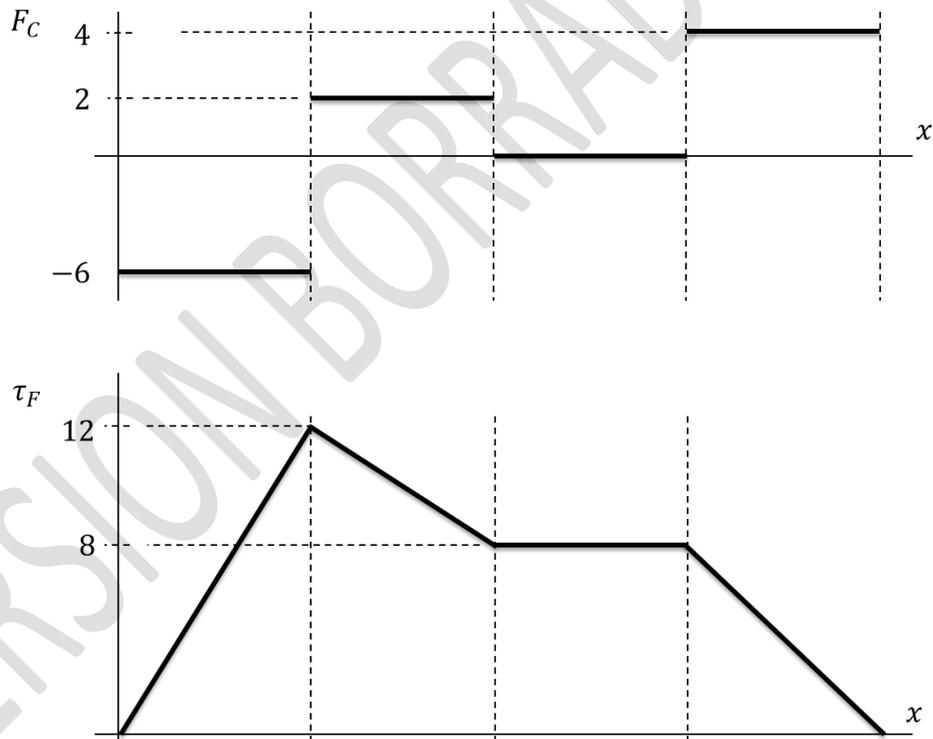


Fig. 9.10.

Respuestas:

$$A_y = 6 \text{ (kN)}, \quad C_y = 2 \text{ (kN)}, \quad E_y = 4 \text{ (kN)}$$



9.11. La viga AB está sometida a tres fuerzas puntuales (cargas) como muestra la Fig. 9.11 y está apoyada en los soportes A y B. Realice un diagrama de fuerza cortante y torque flector en la viga.

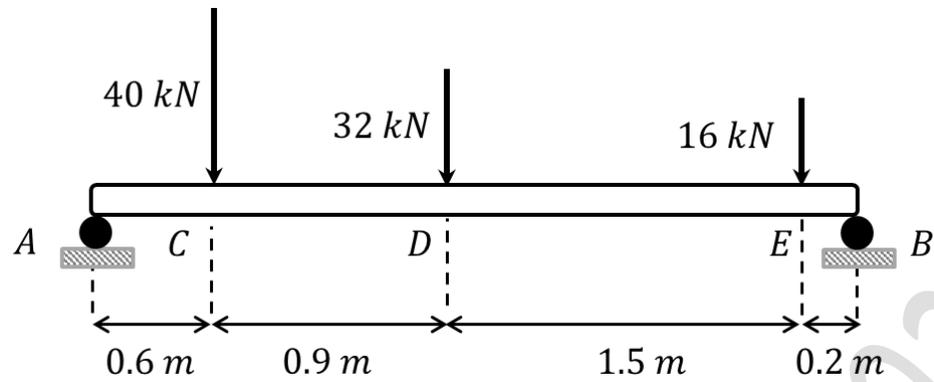
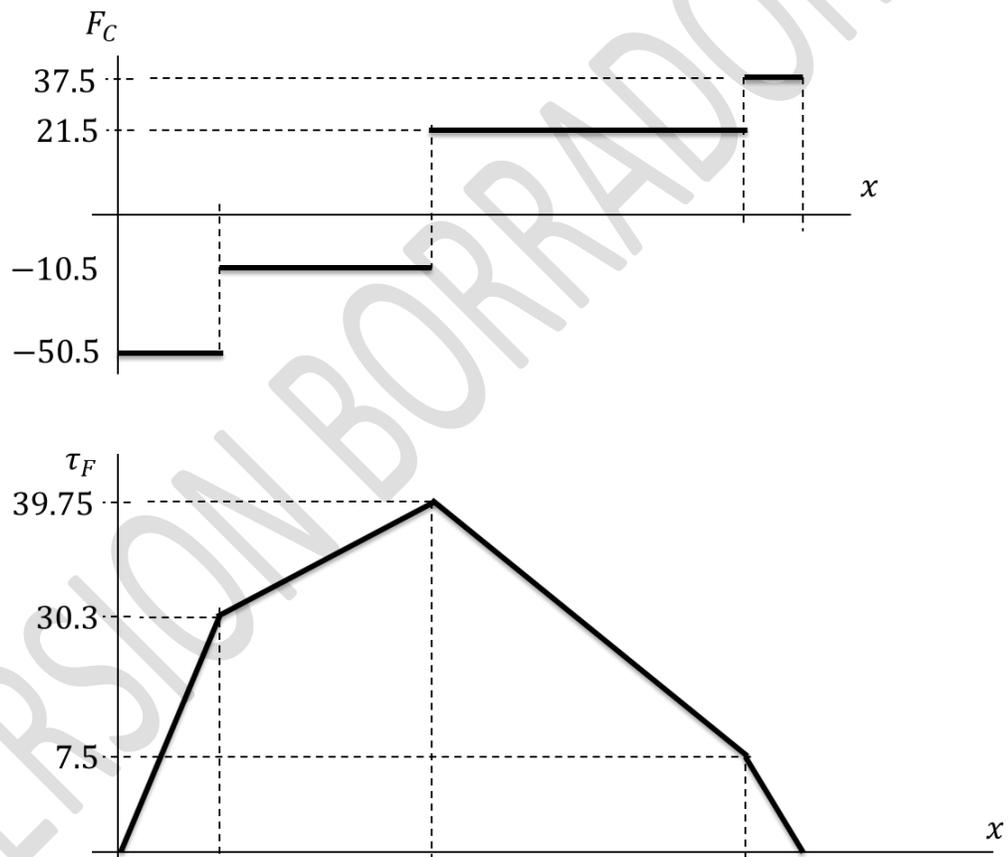


Fig. 9.11.

Respuestas:



9.12.- La viga ABC está montada en dos soportes A y C y sometida a una fuerza distribuida lineal como muestra la Fig. 9.12. Determinar:

- El valor de las reacciones en los apoyos A y C de la viga.
- La función que representa la fuerza cortante en el tramo BC, es decir entre $2 \leq x < 8$ (m).
- El punto de la viga, medido desde A, donde la fuerza cortante es nula.
- La función que representa el torque flector en el tramo BC, es decir entre $2 \leq x < 8$ (m).
- El punto de la viga, medido desde A, donde el torque flector es máximo.

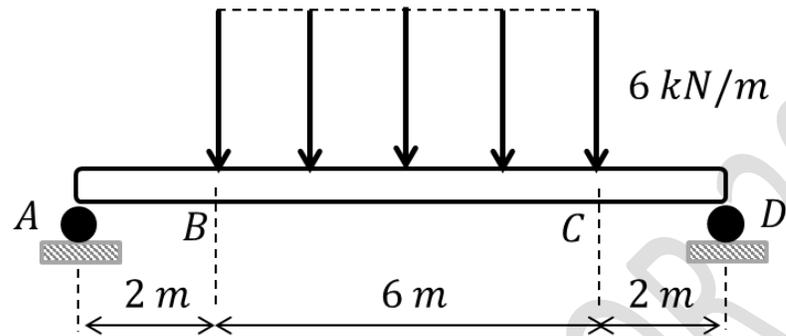


Fig. 9.12.

Respuestas:

$$A_y = 18 \text{ (kN)}, \quad C_y = 18 \text{ (kN)}$$

$$F_C(x) = 30 - 6x, \quad x = 5 \text{ (m)}$$

$$\tau_F(x) = -12 + 39x - 6x^2, \quad x = 3.25 \text{ (m)}$$

VERSION BORRADOR 2022