Universidad de La Frontera
Facultad de Ingeniería y Ciencias
Departamento de Matemática y Estadística

Fundamentos de Matemática: Apuntes de Curso

Erwin Henríquez, Angélica Mansilla, Joan Molina
Adrialy Muci, Elena Olivos, Alex Sepúlveda, Eduardo Uribe

Temuco - Chile
Marzo 2013

Índice general

Introducción

Este texto, aún en versión preliminar, ha sido escrito por el equipo de académicos del Departamento de Matemática y Estadística de la Universidad de La Frontera que dicta el curso de Fundamentos de la Matemática. Se trata del primer curso de matemática que rinden los estudiantes que ingresan a las carreras de ingeniería y pretende, por una parte, nivelar conocimiento previo y por otra, permitir a los estudiantes adquirir el nivel de razonamiento abstracto necesario para cursar con éxito las asignaturas siguientes.

El principal objetivo de quienes hemos escrito este libro es entregar al estudiante que recién se integra a nuestra universidad un texto guía especialmente diseñado para esta primera asignatura. El texto está compuesto por 4 capítulos. En el capítulo 1 revisamos la operatoria básica de números racionales y reales, sin entrar en detalles ni formalizaciones. El capítulo 2 contiene elementos básicos de Lógica y Teoría de conjuntos, el lenguaje de la matemática. En el capítulo 3 hacemos un pequeño recorrido por los conjuntos numéricos elementales y nos detenemos en la estructura de cuerpo ordenado completo de los números reales. Finalmente, en el capítulo 4 veremos algunos elementos de Trigonometría y Geometría analítica. Cada capítulo contiene un número importante de problemas resueltos y propuestos que esperamos sirvan de guía al estudiante para enfrentar problemas por sí mismo. Los contenidos se presentan en el nivel de profundización que se requiere en este nivel, por lo que muchas veces, en vez de una demostración formal se dará un esquema intuitivo.

Sin duda, aún quedan muchos errores, y te invitamos a ser parte activa en la corrección y mejoras de este texto, aportando tus opiniones e ideas para que la versión definitiva de este texto resulte ser un verdadero apoyo para los futuros estudiantes de ingeniería de nuestra facultad. No podemos dejar de agradecer a todos quienes de distintas formas aportaron a la elaboración de este libro: los profesores César Burgueño, María Teresa Alcalde, Herminia Ochsenius, José Labrín, Hernán Burgos, Luis Sandoval y a Camila Guzmán por la revisión del texto final.

Verano de 2013.

Capítulo 1

Álgebra elemental

1.1. Números racionales

Cuenta la leyenda, sobre la tumba de Diofanto[1], gran amante de los números en la Antigüedad, se dejó el siguiente epitafio: «Diofanto pasó una sexta parte de su vida en la niñez, una doceava parte en la juventud y una séptima parte soltero. Cinco años después de su matrimonio nació un niño que murió cuatro años antes que su padre cumpliera la mitad de su edad».

El epitafio anterior utiliza fracciones dentro de las frases que la componen, nosotros llamaremos a estos números, **números racionales**. El término racional alude a fracción o parte de un todo. Formalmente la definición es:

Definición 1.1.1 (Números racionales) *Definimos el conjunto de los números racionales, simbolizado por $\mathbb{Q}$, como:*

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \ \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}.$$

Este número racional de la forma $\frac{a}{b}$ es también llamado fracción, donde a y b se llaman numerador y denominador respectivamente.

A pesar de que se ha definido a los números racionales como aquellos números que se pueden expresar como $\frac{a}{b}$, con $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$, se acostumbra a representar a los números racionales con denominador positivo, es decir,

$$\frac{a}{-b} = \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}.$$

[1]Matemático Griego, que vivió en Alejandría, Egipto, en el siglo III de la era cristiana. Su trabajo fue de enorme importancia para el desarrollo del álgebra y tuvo una gran influencia sobre los matemáticos europeos del siglo XVIII.

Definición 1.1.2 (Número Decimal) *Diremos que la representación decimal del número racional* $\frac{a}{b}$*, es el resultado de la división de* a *por* b.

Ejemplo 1.1.3 *La expresión decimal de:*

- $\frac{3}{8}$ *es* $0,375$ *(Corresponde a un número decimal finito).*
- $\frac{1}{3} = 0,333...$ *(Corresponde a un número decimal infinito periódico).*
- $\frac{19}{90} = 0,2111...$ *(Corresponde a un número decimal infinito semiperiódico).*

Transformación de decimal a fracción

Como ya vimos, toda fracción puede ser representada como un número decimal finito, infinito periódico o semiperiódico. Generalmente cuando utilicemos decimales infinitos periódicos o semiperiódicos nos referiremos a ellos sólo como decimales periódicos o semiperiódicos. Ahora mostraremos los métodos para transformar un número decimal a fracción. Existen tres casos posibles:

Decimal finito a fracción.
Consideremos el siguiente ejemplo: sea $x = 4,4713$ y transformemos este número decimal a fracción, para ello multiplicamos x por 10000 y obtenemos $10000x = 44713$. Despejando x obtenemos lo buscado:

$$x = 4,4713 = \frac{44713}{10000}.$$

Podemos resumir el procedimiento de transformar un número decimal finito a fracción en la siguiente regla: el número decimal queda expresado como la fracción cuyo numerador está formado por todo el número sin la coma decimal y el denominador por la potencia de 10 que tiene tantos ceros como cifras decimales existan.

Ejemplo 1.1.4

a) $0,123 = \frac{123}{1000}$. *b)* $2,13 = \frac{213}{100}$. *c)* $-3,1 = -\frac{31}{10}$.

Decimal periódico a fracción.
Consideremos el siguiente ejemplo: sea $x = 1,\overline{7}$ y transformemos este número decimal a fracción, para ello multiplicamos x por 10 (una potencia de 10 con tantos ceros como cifras tiene el periodo), para luego restar x al resultado. Quedando:

$$10x - x = 17,\overline{7} - 1,\overline{7}$$

$$9x = 16$$
$$x = 1,\overline{7} = \frac{16}{9}.$$

Podemos resumir el procedimiento de transformar un número decimal periódico a fracción en la siguiente regla: el numerador de la fracción resultante está formado por la diferencia entre el número completo, sin la coma decimal, y la parte entera del número decimal (todo lo que no está en el periodo). El denominador corresponde a un número entero formado por tantos nueves como cifras tenga el periodo.

Ejemplo 1.1.5

a) $1,\overline{34} = \dfrac{134-1}{99} = \dfrac{133}{99}.$ *b)* $-2,\overline{321} = -\dfrac{2321-2}{999} = -\dfrac{2319}{999}.$

Decimal semiperiódico a fracción.

Consideremos el siguiente ejemplo: sea $x = 12,23\overline{7}$ y transformemos este número decimal a fracción, para ello multiplicamos x por 100 (una potencia de 10 con tantos ceros como cifras tiene la parte decimal no periódica) obteniendo:

$$100x = 1223,\overline{7} \tag{1.1}$$

con lo cual obtenemos un número periódico, el cual multiplicamos por 10 (una potencia de 10 con tantos ceros como cifras tiene el periodo) resultando:

$$1000x = 12237,\overline{7} \tag{1.2}$$

luego al restar (1.1) de (1.2), nos queda:

$$1000x - 100x = 12237,\overline{7} - 1223,\overline{7}$$
$$900x = 11014,$$

de donde obtenemos el resultado despejando x:

$$x = 12,23\overline{7} = \frac{11014}{900}.$$

Podemos resumir el procedimiento de transformar un número decimal semiperiódico a fracción en la siguiente regla: el numerador de la fracción resultante está formado por la diferencia entre el número completo sin la coma decimal y la parte del número que no pertenece al periodo (sin la coma decimal) y el denominador está formado por tantos nueves como dígitos tiene el periodo, seguido por tantos ceros como números hay entre la coma decimal y el periodo (anteperiodo).

Ejemplo 1.1.6

a) $0,42\overline{1} = \dfrac{421-42}{900} = \dfrac{379}{900}$. *b)* $-1,5\overline{68} = -\dfrac{1568-15}{990} = -\dfrac{1553}{990}$.

Definición 1.1.7 (Fracciones equivalentes)
Diremos que la fracción $\dfrac{a}{b}$ *es equivalente a la fracción* $\dfrac{c}{d}$ *si ambas fracciones tienen la misma representación decimal.*

Proposición 1.1.8 (Caracterización de fracciones equivalentes)
La fracción $\dfrac{a}{b}$ *es equivalente a la fracción* $\dfrac{c}{d}$ *si y solo si* $a \cdot d = c \cdot b$

Ejemplo 1.1.9
La fracción $\dfrac{7}{28}$ *es equivalente a* $\dfrac{5}{20}$ *pues* $7 \cdot 20 = 140 = 5 \cdot 28$.

Si $ad \neq bc$ entonces $\dfrac{a}{b} \neq \dfrac{c}{d}$, lo cual nos indica de que $\dfrac{a}{b} > \dfrac{c}{d}$ o $\dfrac{a}{b} < \dfrac{c}{d}$ según corresponda.

Amplificación y simplificación

Los procesos de amplificación y simplificación son de mucha utilidad cuando se quiere igualar el denominador de dos o más fracciones que se están sumando.
Por ejemplo, si queremos realizar la siguiente suma: $\dfrac{3}{4} + \dfrac{5}{6} - \dfrac{7}{3}$ debemos darnos cuenta que todas las fracciones involucradas pueden escribirse como fracciones equivalentes con denominador 12, de esta manera:

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{9}{12}, \qquad \frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{10}{12}, \qquad \frac{7}{3} = \frac{7 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{28}{12}.$$

Con lo cual la suma de fracciones inicial quedará escrita de la siguiente forma:

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{6} - \frac{7}{3} = \frac{9}{12} + \frac{10}{12} - \frac{28}{12} = -\frac{9}{12}.$$

Definición 1.1.10 (Amplificación)
La amplificación *corresponde al proceso mediante el cual una fracción se transforma en otra equivalente multiplicando el numerador y denominador por un mismo número no nulo.*

Observación 1.1.11 (Fracción irreducible)
Diremos que una fracción es irreducible *si el máximo común divisor entre el numerador y el denominador es* 1.

Definición 1.1.12 (Simplificación)
La simplificación *corresponde al proceso mediante el cual una fracción se transforma en otra equivalente dividiendo numerador y denominador por un mismo número natural no nulo.*

Ejemplo 1.1.13 *Si queremos simplificar la fracción* $\dfrac{18}{24}$ *lo podemos hacer por* 2, 3 *o por* 6. *Lo más conveniente en este caso es simplificar inmediatamente por* 6 *obteniéndose* $\dfrac{3}{4}$, *la cual es una fracción irreducible.*

Comparación de fracciones

Al comparar dos o más fracciones, tenemos dos casos posibles:

Todas las fracciones tienen el mismo denominador. En este caso sólo debemos comparar los numeradores y ordenar las fracciones según estos, es decir, a mayor numerador mayor será la fracción.

Fracciones con distinto denominador. Para compararlas debemos transformarlas a fracciones con denominador común a través de la amplificación y luego proceder como el caso anterior.

Otra forma de comparar dos fracciones es:

$$0 < \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \text{ si y solo si } ad < bc.$$

Ejemplo 1.1.14 *Ordenemos de menor a mayor las siguientes fracciones:* $\frac{3}{8}, \frac{2}{3}, \frac{5}{12}$. *Primero escribamos cada fracción como su fracción equivalente, con denominador* 24 *que es el mínimo común múltiplo entre* $3, 8$ *y* 12,

$$P = \frac{3}{8} = \frac{9}{24}, \quad Q = \frac{2}{3} = \frac{16}{24}, \quad R = \frac{5}{12} = \frac{10}{24}.$$

Comparando los numeradores de las fracciones equivalentes, se tiene que, P *es menor que* R *y* R *es menor que* Q.

El ejemplo anterior nos da indicios de que podemos ordenar los elementos de $\mathbb{Q}$, lo cual formalizaremos más adelante.

Operatoria

Al **sumar** dos o más fracciones, tenemos dos casos posibles:

Todas las fracciones tienen el mismo denominador. En este caso solo debemos sumar los numeradores y conservar el denominador.

Fracciones con distinto denominador. Para sumarlas debemos transformarlas a fracciones con denominador común a través de la amplificación y luego proceder como el caso anterior.

Ejemplo 1.1.15

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{6} - \frac{7}{3} = \frac{9}{12} + \frac{10}{12} + \frac{-28}{12} = \frac{9 + 10 - 28}{12} = -\frac{9}{12} = -\frac{3}{4}.$$

En la **multiplicación** de fracciones, la fracción resultante es la que tiene en el numerador el producto de todos los numeradores de las fracciones involucradas y en su denominador el producto de todos los denominadores de las mismas fracciones involucradas, esto es:

$$\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} \cdot \frac{a_3}{b_3} \cdot \ldots \cdot \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n}{b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \ldots \cdot b_n}.$$

Ejemplo 1.1.16

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15}.$$

Razones y proporciones

Definición 1.1.17 (Razón)
Se llama razón entre dos cantidades cualesquiera a y b, a la comparación por cuociente de ellas. La razón entre a y b se puede escribir como $\frac{a}{b}$ o $a : b$, donde a se denomina antecedente y b consecuente y se lee "a es a b".

Toda razón $\frac{a}{b}$ tiene asociado un cuociente k llamado **valor de la razón**, es decir, $\frac{a}{b} = k$.

Ejemplo 1.1.18 *El ancho y el largo de un rectángulo miden $10\ cm$ y $30\ cm$ respectivamente. Luego, la razón de la medida del ancho y el largo es de $\frac{\text{ancho}}{\text{largo}} = \frac{10\ cm}{30\ cm} = \frac{1}{3}$, es decir, el ancho es un tercio del largo.*

Definición 1.1.19 (Proporción)
Se define proporción como la igualdad de dos razones, es decir, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se lee "a es a b como c es a d".

Los términos a y d se llaman extremos, c y b se llaman medios.

Proposición 1.1.20 *En toda proporción, el producto de los términos medios es igual al producto de los términos extremos.*

Definición 1.1.21 (Proporcionalidad directa e inversa) *Dos variables a y b son:*

- **Directamente proporcionales** *si y solo si la razón entre ellas es constante, es decir, existe una constante k tal que $\frac{a}{b} = k$ o bien $a = k \cdot b$.*
- **Inversamente proporcionales** *si y solo si el producto entre ellas es constante, es decir, existe una constante k tal que $a \cdot b = k$ o bien $a = \frac{k}{b}$.*

Una característica de las proporciones directas es que si una de las variables aumenta o disminuye la otra variable sigue el mismo comportamiento, en cambio, en la proporcionalidad inversa si una variable aumenta o disminuye la otra tiene un comportamiento inverso.

Ejemplo 1.1.22 *Un libro tiene 75 páginas de 40 líneas cada una. Una nueva edición del libro tendrá 50 líneas por cada página y se quiere saber con cuántas páginas quedará el nuevo libro.*

Solución:

Como es una proporción inversa (pues al aumentar la cantidad de líneas por página, la cantidad de páginas en la nueva edición disminuye), se calcula el producto de las cantidades en razón (líneas y páginas del libro) para obtener la constante de proporcionalidad. Así, $k = 75 \cdot 40 = 300$ entonces el número de páginas necesarias es de $\frac{300}{50} = 60$.

Definición 1.1.23 (Porcentaje)
Un porcentaje *es un caso particular de razón, en la cual el consecuente es* 100. *Para el cálculo de porcentajes se puede plantear la proporción:*

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{100}$$

donde, a *es parte del total,* b *es el total,* c *porcentaje del total al cual equivale* a.

Ejemplo 1.1.24 *El* $20\,\%$ *de* 300 *corresponde a* 60, *ya que* $\frac{60}{300} = \frac{20}{100}$.

Un porcentaje también se puede expresar como un número decimal transformando la expresión $\frac{c}{100}$ a su expresión decimal equivalente, por ejemplo, el $40\,\%$ equivale a tomar 40 partes de un total de 100 partes iguales. Esto se puede expresar como $\frac{40}{100}$ o $0,4$.

Números irracionales

Definición 1.1.25 (Números irracionales)
Un número irracional, es aquel que no puede expresarse como el cuociente de dos enteros. El conjunto de los números irracionales será simbolizado por: $\mathbb{I}$.

Ejemplos de numeros irracionales son: $\sqrt{2},\ e,\ \sqrt[3]{5},\ -\sqrt{11},\ \pi$.

Definición 1.1.26 (Números reales)
Se define al conjunto de los números reales que se denota por $\mathbb{R}$, *como la unión del conjunto de los números racionales con el conjunto de los números irracionales. En símbolos* $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

Notemos que si $x \in \mathbb{R}$ y x no es un número racional, entonces x es un número irracional.

1.2. Potencias

Definición 1.2.1 (Potencias)
Para todo número real a y natural n, se define la n-ésima potencia de a, que se escribe a^n y se lee a elevado a n, como la multiplicación iterada (repetida) del número a por si mismo n veces, es decir:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ veces}}$$

el número a se llama **base** *y n se llama* **exponente**.

Ejemplo 1.2.2 *La escritura como potencia de:*

$$(-7) \cdot (-7) \cdot (-7) \cdot (-7) \cdot (-7) \cdot (-7) = (-7)^6 .$$

Toda potencia de exponente 1 es igual a la base, es decir, $a^1 = a$.

Teorema 1.2.3
Sea $m, n \in \mathbb{N},\ a, b \in \mathbb{R}$ se tiene:

1. **Multiplicación de potencias de igual base:** *se conserva la base y se suman los exponentes,*
$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

2. **División de potencias de igual base:** *se conserva la base y se resta al exponente del dividendo el exponente del divisor,*
$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}.$$

3. **Multiplicación de potencias de igual exponente:** *se multiplican las bases y se conserva el exponente,*
$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n .$$

4. **División de potencias de igual exponente:** *se dividen las bases y se conserva el exponente,*
$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n .$$

5. **Potencia de potencias:** *se conserva la base y se multiplican los exponentes,*
$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}.$$

6. **Potencia de exponente 0:** *todo real no nulo elevado a cero, da como resultado 1,*
$$a^0 = 1, \quad a \neq 0.$$

7. **Potencia de exponente negativo:** *la expresión equivalente a una potencia con exponente negativo es el recíproco de la base elevado al inverso aditivo del exponente original,*

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}, \quad a \neq 0.$$

8. **Igualdad de potencias con misma base:**

$$a^n = a^m \Rightarrow n = m, \quad a \neq 0, \ a \neq 1.$$

Observación 1.2.4 *Una aplicación de las potencias es en el sistema decimal actual, las cantidades se representan utilizando como base el número* 10. *Es un sistema de numeración posicional donde el valor del dígito depende de la posición dentro del número. Así, por ejemplo,*

$$32,321 = 3 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} + 1 \cdot 10^{-3}.$$

Raíces

Supongamos que el suelo de una habitación cuadrada tiene 144 baldosas cuadradas de 20 cm. cada una ¿Cuáles son las medidas de la habitación?
Para resolver este problema, primero debemos encontrar un número que elevado al cuadrado sea 144, dado que al ser una habitación cuadrada hay la misma cantidad de baldosas tanto en el largo como en el ancho. De lo anterior, es fácil notar que este número es 12 y como la dimensión de cada baldosa es 20 cm., se tiene que la habitación mide 240 cm. por lado.

Este procedimiento guarda relación con el concepto de raíz de un número, de forma más precisa, raíz cuadrada de 144.

A continuación definiremos la raíz $n-$ésima de a.

Definición 1.2.5 (Raíz)
Sean n un entero positivo mayor que 1 y a un número real.

1. *Si $a = 0$, entonces $\sqrt[n]{a} = 0$.*

2. *Si $a > 0$, entonces $\sqrt[n]{a}$ es el número real positivo b tal que $b^n = a$.*

3. *a) Si $a < 0$ y n es impar, entonces $\sqrt[n]{a}$ es el número real negativo b tal que $b^n = a$.*
   b) Si $a < 0$ y n es par, entonces $\sqrt[n]{a}$ no es un número real.

   único real positivo b, tal que $b^n = a$ se llama raíz $n-$ésima de a.

En los casos anteriores denotamos: $\sqrt[n]{a} = b$, donde a se llama cantidad subradical o radicando y n recibe el nombre de índice de la raíz. Si el índice n es 2, normalmente se omite.

Ejemplo 1.2.6

1. $\sqrt[4]{81} = 3$, *porque* $3^4 = 81$.
2. $\sqrt[3]{-125} = -5$, *porque* $(-5)^3 = -125$.

Definición 1.2.7 (Potencia de exponente racional)
Toda potencia de exponente racional de la forma $\dfrac{m}{n}$, con n y $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, corresponde a la raíz $n-$ésima de la $m-$ésima potencia de a. Así:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Ejemplo 1.2.8

a) $2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$

b) $8^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{8}$

Teorema 1.2.9 *Sean a, b reales no negativos, $n, k, p \in \mathbb{Z}$ tales que $n, k \geq 1$*

1. $(\sqrt[n]{a})^n = \sqrt[n]{a^n} = a$.
2. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$.
3. $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}, \quad b \neq 0$.
4. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n \cdot k]{a}$.
5. $\sqrt[n]{a^p} = (\sqrt[n]{a})^p$.
6. $\sqrt[nk]{a^{pk}} = \sqrt[n]{a^p}$.
7. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[k]{b} = \sqrt[nk]{a^k b^n}$.

Ejemplo 1.2.10

1. $(\sqrt[4]{17})^4 = 17$
2. $(\sqrt{-3})^2 = \nexists$
3. $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{64} = 4$
4. $\sqrt{98} = \sqrt{49 \cdot 2} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{2} = 7\sqrt{2}$
5. $\dfrac{\sqrt[3]{2000}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\dfrac{2000}{2}} = \sqrt[3]{1000} = 10$
6. $\sqrt{\dfrac{15}{196}} = \dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{196}} = \dfrac{\sqrt{15}}{14}$
7. $\sqrt[3]{\sqrt{17}} = \sqrt{\sqrt[3]{17}} = \sqrt[6]{17}$

8. $\sqrt[3]{27^2} = (\sqrt[3]{27})^2 = 3^2 = 9$

9. $\sqrt[6]{8^4} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$

Observación 1.2.11 *Si el índice radical es impar entonces las propiedades del Teorema 1.2.9 son verdaderas para todo número real.*

Ejemplo 1.2.12

1. $(\sqrt[3]{-8})^3 = -8$

2. $\sqrt[3]{-3} \cdot \sqrt[3]{-9} = \sqrt[3]{-3 \cdot -9} = \sqrt[3]{27} = 3$

3. $\dfrac{\sqrt[3]{-250}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\dfrac{-250}{2}} = \sqrt[3]{-125} = -5$

4. $\sqrt[3]{\sqrt[5]{-64}} = \sqrt[5]{\sqrt[3]{-64}} = \sqrt[15]{-64} = \sqrt[15]{(-4)^3} = \sqrt[5]{-4}$

5. $\sqrt[5]{(-243)^3} = (\sqrt[5]{-243})^3 = (-3)^3 = -27$

Suma de raíces

La adición entre raíces $n-$ésimas se puede efectuar, solo si ellas tienen igual índice y cantidad subradical.

Ejemplo 1.2.13

1. $3\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$

2. $6\sqrt[3]{5} - 8\sqrt[3]{5} = -2\sqrt[3]{5}$

3. $\sqrt{18} + 3\sqrt{8} - \sqrt{32} = 3\sqrt{2} + 6\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

En general cuando una expresión racional tiene un denominador con radicales, se amplifica de tal forma, que su denominador se transforme a un número racional. Este proceso se conoce como racionalización de denominadores.

Ejemplo 1.2.14

1. $\dfrac{14}{\sqrt{7}} \cdot \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \dfrac{14\sqrt{7}}{7} = 2\sqrt{7}$

2. $\dfrac{6}{\sqrt[7]{8}} = \dfrac{6}{\sqrt[7]{2^3}} \cdot \dfrac{\sqrt[7]{2^4}}{\sqrt[7]{2^4}} = \dfrac{6\sqrt[7]{2^4}}{2} = 3\sqrt[7]{16}$

3. $\dfrac{12}{3-\sqrt{7}} = \dfrac{12}{3-\sqrt{7}} \cdot \dfrac{3+\sqrt{7}}{3+\sqrt{7}} = \dfrac{12(3+\sqrt{7})}{9-7} = 6(3+\sqrt{7})$

1.3. Álgebra

Lenguaje algebraico

La importancia del álgebra radica en que constituye el cimiento de la matemática y la ingeniería, además de ser una poderosa herramienta para desarrollar el pensamiento analítico. Con la ayuda del lenguaje algebraico podemos modelar tanto situaciones de índole práctico como teórico.

Tomemos como ejemplo el epitafio de Diofanto mencionado en la Sección 1.1:

«Diofanto pasó una sexta parte de su vida en la niñez, una doceava parte en la juventud y una séptima parte soltero. Cinco años después de su matrimonio nació un niño que murió cuatro años antes que su padre cumpliera la mitad de su edad».

Si x representa la edad de Diofanto al morir, el epitafio puede ser escrito en términos de la edad x en la que falleció, donde $\frac{x}{6}$ representa la niñez, $\frac{x}{12}$ la juventud, $\frac{x}{7}$ la soltería y $5+\frac{x}{2}+4$ la expresión que corresponde al periodo entre el matrimonio y la muerte de Diofanto. Quedando todo lo anterior plasmado en la siguiente ecuación:

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4=x.$$

Ejemplo 1.3.1 *A continuación se representan en lenguaje algebraico algunos enunciados:*

Lenguaje Cotidiano	Lenguaje Algebraico
La mitad de un número a	$\frac{1}{2}a$
El triple de a, aumentado en el doble de b	$3a+2b$
El doble del cuociente entre a y b	$2\cdot\frac{a}{b}$
El cubo de la diferencia entre a y b	$(a-b)^3$
La diferencia entre los cubos de a y b	a^3-b^3
La suma de tres números enteros consecutivos	$a+(a+1)+(a+2)$
La suma de tres números impares consecutivos	$(2a+1)+(2a+3)+(2a+5)$
La cuarta parte del producto entre el cuadrado de a y el cubo de b	$\frac{1}{4}\cdot a^2\cdot b^3$

Estableceremos algunos conceptos algebraicos básicos, los cuales nos ayudarán en la comprensión y desarrollo del tema.

Definición 1.3.2 (Término algebraico, grado)
Se denomina término algebraico al producto de un factor numérico por una o más variables

literales. En cada término algebraico se distingue el **coeficiente numérico** *(que incluye el signo y constantes) y el* **factor literal** *(que incluye las variables con sus respectivos exponentes).*

El **grado** de un término algebraico *es la suma de los exponentes de las variables que componen cada factor literal.*

Ejemplo 1.3.3

Término algebraico	*Coeficiente numérico*	*Parte literal*	*Grado*
a^5bc	1	a^5bc	$5+1+1=7$
$\frac{3}{7}b^2\frac{x}{y}$	$\frac{3}{7}$	$b^2\frac{x}{y}=b^2xy^{-1}$	$2+1+(-1)=2$
$-2,\overline{7}xy$	$-2,\overline{7}$	xy	$1+1=2$
$\frac{3}{4}\pi r^3$	$\frac{3}{4}\pi$	r^3	3
$2^{128}m^4n^a$	2^{128}	m^4n^a	$4+a$

Definición 1.3.4 (Expresiones Algebraicas)
Una expresión algebraica *es la suma de términos algebraicos. De acuerdo con el número de términos que componen la expresión algebraica, éstas se clasifican en:*

- Monomio: Expresión algebraica de un término.
- Binomio: Expresión algebraica de dos términos.
- Trinomio: Expresión algebraica de tres términos.
- Polinomio: Expresión algebraica que puede tener uno o más términos y donde los exponentes de la parte literal son todos enteros positivos.

Ejemplo 1.3.5

1. $3xy^2+4xy-\dfrac{x}{5}$ *es un trinomio.*
2. $3xy^2+4xy$ *es un binomio.*
3. $3x^5+5x^4-3x^3+2x^2+5$ *es un polinomio.*

Definición 1.3.6 (Grado de una expresión algebraica)
El grado de una expresión algebraica *corresponde al mayor de los grados de los términos que la componen.*

Ejemplo 1.3.7 *Los términos de la expresión* $x^3y^5z^9 - 3x^2yz^7 + \dfrac{x^{14}y}{z^2} - y^4 + 100x^3y^2z^8$ *tienen grados* $17, 10, 13, 4$ *y* 13 *respectivamente, luego el grado de la expresión algebraica anterior es 17.*

Valorización de expresiones algebraicas

Valorar una expresión algebraica, consiste en asignar un valor numérico a cada variable que aparece en la expresión y resolver las operaciones aritméticas que correspondan para obtener el valor numérico final de la expresión.

Ejemplo 1.3.8 *Dados los valores* $x = 2$, $y = -1$ *y* $z = -3$, *el valor numérico de* $5xy^2 - z^2$, *es*

$$5 \cdot 2 \cdot (-1)^2 - (-3)^2 = 5 \cdot 2 \cdot 1 - 9 = 1.$$

Reducción de términos semejantes

Definición 1.3.9 (Términos semejantes) *Dos o más términos de una expresión algebraica se dicen semejantes si tienen el mismo factor literal.*

Ejemplo 1.3.10

1. *En la expresión algebraica* $2a^2b - ab - \sqrt{3}a^2b$, *los términos* $2a^2b$ *y* $-\sqrt{3}a^2b$ *son semejantes.*

2. *En la expresión algebraica* $-0,2m^3n - 0,1mn^2 - 6mn^2 + m^3n$, *hay dos pares de términos semejantes:*$-0,2m^3n$ *con* m^3n *y* $-0,1mn^2$ *con* $-6mn^2$

Para reducir términos sumamos los coeficientes numéricos de los términos semejantes y conservamos el factor literal.

Ejemplo 1.3.11

$$5xy + x + y - 3xy + 2x - 3y = 3x - 2y + 2xy.$$

Multiplicación algebraica

La multiplicación algebraica, los productos notables y la completación de cuadrados son elementos escenciales en muchos desarrollos matemáticos, constituyen la base para problemas más complejos y son un conocimiento previo que necesitas adquirir para las materias que siguen.
En la multiplicación de dos expresiones algebraicas se pueden considerar los siguientes dos casos:

1. **Monomio por monomio:** Usando la propiedad conmutativa se multiplican los coeficientes numéricos entre sí y sus factores literales utilizando las propiedades de potencias.

2. **Multiplicación de polinomios:** Se multiplica cada término del primer polinomio por todos los términos del segundo, para posteriormente reducir los términos semejantes.

Ejemplo 1.3.12

a) $$\begin{aligned} 5xy^2 \cdot -6xy^3z &= (5 \cdot -6)(xy^2 \cdot xy^3z) \\ &= -30x^2y^5z. \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 3x^3 \cdot (4xy - x^4 + 2y^3) &= 3x^3 \cdot 4xy - 3x^3 \cdot x^4 + 3x^3 \cdot 2y^3 \\ &= 12x^4y - 3x^7 + 6x^3y^3. \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} (2x + 3y)(x^2 - 3xy + y^3) &= 2x \cdot (x^2 - 3xy + y^3) + 3y(x^2 - 3xy + y^3) \\ &= 2x^3 - 6x^2y + 2xy^3 + 3yx^2 - 9xy^2 + 3y^4 \\ &= 2x^3 - 3x^2y - 9xy^2 + 2xy^3 + 3y^4. \end{aligned}$$

Para multiplicar expresiones algebraicas cuya parte literal tenga exponentes racionales, se procede igual al caso anterior, considerando las propiedades de las potencias.

Observación 1.3.13 *El uso de* **paréntesis** *es frecuente en matemática, pues sirve para separar expresiones algebraicas. Para eliminarlo se procede de acuerdo a:*

- *Si está precedido de un signo $+$, entonces se elimina sin hacer ningún cambio a los términos que se encuentran al interior del paréntesis.*
- *Si está precedido de un signo $-$ se elimina después de cambiar todos los signos de los términos que se encuentran al interior del paréntesis. Es importante hacer notar que al eliminar el paréntesis también se elimina el signo que lo antecede.*

Ejemplo 1.3.14

1.
$$\begin{aligned} -(a+b-c)-(-a-b+c)+(a-b+c) &= -a-b+c+a+b-c+a-b+c \\ &= a-b+c. \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} 2ab-[3a-(-2ab+3a)-ab] &= 2ab-[3a+2ab-3a-ab] \\ &= 2ab-[ab] \\ &= 2ab-ab \\ &= ab. \end{aligned}$$

Productos notables

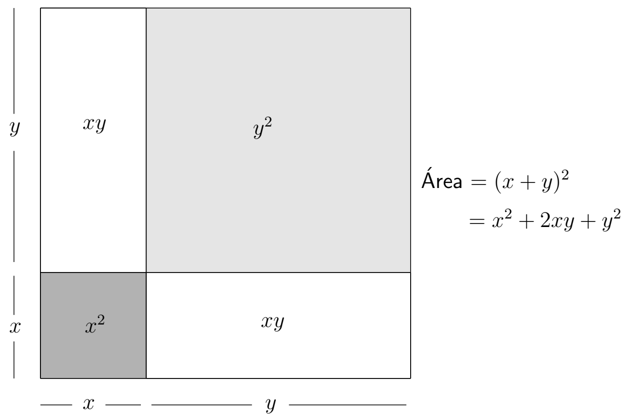
Dentro de la multiplicación algebraica existen algunos productos que pueden ser desarrollados directamente.

1. Cuadrado del Binomio:

$$(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} (x+y)^2 &= (x+y)\cdot(x+y) && \text{Definición de Potencia} \\ &= (x+y)\cdot x+(x+y)\cdot y && \text{Propiedad Distributiva} \\ &= x^2+yx+xy+y^2 && \text{Propiedad Distributiva y Multiplicación} \\ &= x^2+2xy+y^2 && \text{Reducción Términos Semejantes} \end{aligned}$$



Ejemplo 1.3.15

1) $$\begin{aligned}(2x+3y^2)^2 &= (2x)^2 + 2\cdot 2x\cdot 3y^2 + (3y^2)^2\\ &= 4x^2+12xy^2+9y^4.\end{aligned}$$

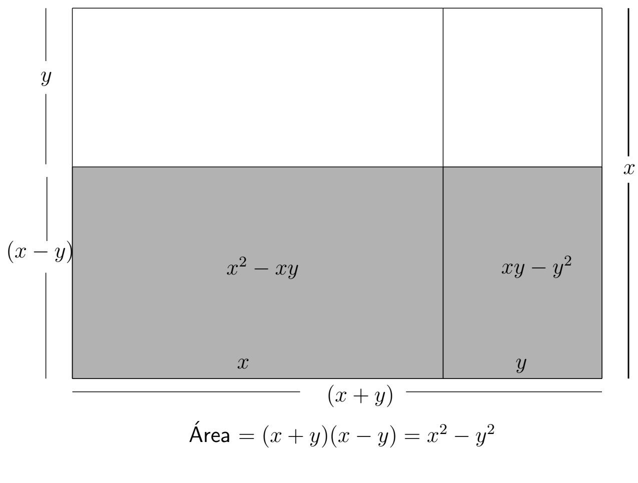
2) $$\begin{aligned}(3x^3-y^2)^2 &= (3x^3)^2 - 2\cdot 3x^3\cdot y^2 + (y^2)^2\\ &= 9x^6-6x^3y^2+y^4.\end{aligned}$$

2. Suma por diferencia:

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

En efecto,

$$\begin{aligned}(x+y)(x-y) &= (x+y)\cdot x - (x+y)\cdot y && \text{Propiedad Distributiva}\\ &= x^2+yx-xy-y^2 && \text{Propiedad Distributiva y Multiplicación}\\ &= x^2-y^2 && \text{Reducción Términos Semejantes}\end{aligned}$$



Ejemplo 1.3.16

1) $$\begin{aligned}(3x^3 - y^2)(3x^3 + y^2) &= (3x^3)^2 - (y^2)^2\\ &= 9x^6 - y^4.\end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned}(-2x^4 - y^3)(-2x^4 + y^3) &= (-2x^4)^2 - (y^3)^2\\ &= 4x^8 - y^6.\end{aligned}$$

3) $$\begin{aligned}\left(\frac{x^3}{y^2} - \frac{2y}{x^2}\right)\left(\frac{x^3}{y^2} + \frac{2y}{x^2}\right) &= \left(\frac{x^3}{y^2}\right)^2 - \left(\frac{2y}{x^2}\right)^2\\ &= \frac{x^6}{y^4} - \frac{4}{x^4}y^2.\end{aligned}$$

3. Producto de dos binomios con un término común

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

En efecto,

$$\begin{aligned}(x+a)\cdot(x+b) &= (x+a)\cdot x + (x+a)\cdot b && \text{Propiedad Distributiva}\\ &= x^2 + ax + xb + ab && \text{Propiedad Distributiva y Multiplicación}\\ &= x^2 + (a+b)x + ab && \text{Reducción Términos Semejantes}\end{aligned}$$

Ejemplo 1.3.17

1) $$\begin{aligned}(x+2)(x-12) &= x^2 + (2 + (-12))x + 2\cdot -12\\ &= x^2 - 10x - 24.\end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned}(x^2+5)(x^2-3) &= (x^2)^2 + (5 + (-3))x^2 + 5\cdot -3\\ &= x^4 + 2x^2 - 15.\end{aligned}$$

3) $$\begin{aligned}(3x^2+2y)(3x^2-3y) &= (3x^2)^2 + (2y + (-3y))3x^2 + 2y\cdot(-3y)\\ &= 9x^4 - 3x^2y - 6y^2.\end{aligned}$$

4. Cubo del binomio:

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

Ejemplo 1.3.18

1)
$$\begin{aligned}(2x+3y)^3 &= (2x)^3 + 3\cdot(2x)^2\cdot 3y + 3\cdot 2x\cdot(3y)^2 + (3y)^3\\ &= 8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3.\end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned}\left(\tfrac{x^2}{2z} - y^3\right)^3 &= \left(\tfrac{x^2}{2z}\right)^3 - 3\cdot\left(\tfrac{x^2}{2z}\right)^2\cdot y^3 + 3\cdot\tfrac{x^2}{2z}\cdot(y^3)^2 - (y^3)^3\\ &= \frac{x^6}{8z^3} - y^9 - \frac{3}{4}x^4\frac{y^3}{z^2} + \frac{3}{2}x^2\frac{y^6}{z}.\end{aligned}$$

5. Sumas o diferencia de cubos:

$$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$$

$$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$$

Ejemplo 1.3.19

1) $x^3 - 8 = (x-2)(x^2+2x+4)$

2) $8x^3 + 27y^6 = (2x)^3 + (3y^2)^3 = (2x+3y^2)(4x^2 - 6xy^2 + 9y^4)$

Factorización.

La factorización de una expresión algebraica consiste en convertirla en producto de expresiones más simples. Para llevarla a cabo se debe buscar un factor común, pues la factorización es el proceso inverso de aplicar la propiedad distributiva y los productos notables.

Factor común (monomio y polinomio)

En este caso todos los términos de la expresión algebraica presentan un factor común, que puede ser un monomio o polinomio, por el cual se factoriza.

Ejemplo 1.3.20 *Factoricemos*

1. $ax + ay - az = a(x+y-z)$, *donde* a *es el factor común.*
2. $3xy^2 - 15x^3y^5 + 24x^4y^4 = 3xy^2(1 - 5x^2y^3 + 8x^3y^2)$, *el factor común es* $3xy^2$
3. $a(x+y) + b(x+y) = (x+y)(a+b)$, *donde* $x+y$ *es el binomio común.*
4. $x^2(a^2-b^2) - y(a-b) = x^2(a+b)(a-b) - y(a-b) = (a-b)(x^2(a+b) - y)$, *el factor común es el binomio* $a - b$

Factorización por agrupación de términos

En este caso todos los términos de la expresión algebraica no presentan un único factor común, pero se pueden factorizar por grupos.

Ejemplo 1.3.21 *Factoricemos:*

1. $$\begin{aligned} ax + ay - bx - by &= a(x+y) - b(x+y) \\ &= (x+y)(a-b) \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - 9y^3 &= x^2(x-3y) + 3y^2(x-3y) \\ &= (x-3y)(x^2+3y^2) \end{aligned}$$

En el caso que la expresión algebraica corresponda al desarrollo de un producto notable para factorizar se utilizan las mismas fórmulas pero de manera inversa.

Ejemplo 1.3.22 *Factoricemos*

- $a^2 - 16b^2 = (a+4b)(a-4b)$ *diferencia de cuadrados.*

- $$\begin{aligned} 4x^2 - 12xy + 9y^2 &= (2x)^2 - 2\cdot 2x \cdot 3y + (3y)^2 \quad \textit{desarrollo de un cuadrado perfecto} \\ &= (2x-3y)^2 \end{aligned}$$

- $x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2)$ *(dos números cuya suma sea -5 y su producto 6).*

Completación de Cuadrados

La completación de cuadrado es una técnica en la cual se utilizan operaciones algebraicas para expresar un trinomio de la forma ax^2+bx+c donde $a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0$ en una expresión equivalente que contenga un cuadrado de binomio más otros términos.

Ejemplo 1.3.23

- *Escribiremos la expresión x^2+4x de tal manera que aparezca un cuadrado de binomio: Sumando 0 a la expresión original:*

  $$x^2 + 4x + 0.$$

  Como debe aparecer una expresión de la forma $a^2 + 2\cdot a \cdot b + b^2$ se tiene

  $$x^2 + 4x + 0 = x^2 + 2\cdot x \cdot \boxed{2} + 0.$$

  Nos damos cuenta que el término que falta es 4, luego la expresión anterior puede ser escrita en la forma:

  $$x^2 + 2\cdot x \cdot 2 + 0 = x^2 + 4x + 2^2 - 2^2.$$

Finalmente la expresión original queda escrita como:

$$x^2 + 4x = (x+2)^2 - 4.$$

- $4x^2+24x+3y^2+24y$. *En este caso podemos factorizar por* 4 *los dos primeros términos y por 3 los dos últimos términos.*

$$4(x^2+6x)+3(y^2+8y),$$

sumamos un cero conveniente en ambas expresiones dentro de los respectivos paréntesis .

$$4(x^2+6x+9-9)+3(y^2+8y+16-16) = 4((x+3)^2-9)+3((y+4)^2-16),$$

que finalmente queda,

$$4\left(x+3\right)^2+3\left(y+4\right)^2-84.$$

- $2x^2+8x$ *Lo primero que se puede hacer es factorizar por 2 obteniendo:*

$$2(x^2+4x),$$

ahora sumamos 0 dentro del paréntesis como $4-4$*,*

$$2(x^2+4x+4-4) = 2\left((x+2)^2-4\right),$$

finalmente podemos escribirlo como:

$$2(x+2)^2-8.$$

- $2x^2-6x-4y^2+24y$
Procederemos de manera análoga a los anteriores, primero factorizamos por 2 *las expresiones con* x *y luego factorizamos por* -4 *las expresiones con* y*.*

$$2(x^2-3x)-4(y^2-6y),$$

las expresiones con y *la factorizamos por* -4 *debido a que el número que acompaña a* y^2 *debe ser siempre positivo para llevar a cabo la completación de cuadrados, ahora, seguimos como antes:*

$$\begin{aligned}
&2(x^2-3x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4})-4(y^2-6y+9-9)\\
=&2((x-\frac{3}{2})^2-\frac{9}{4})-4((y-3)^2-9)\\
=&2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-4\left(y-3\right)^2+\frac{63}{2}
\end{aligned}$$

Fracciones Algebraicas

El cuociente de dos expresiones algebraicas lo denominaremos **fracciones algebraicas**. Para la operatoria asumiremos que estas fracciones están definidas, es decir, sus denominadores son distintos de cero.

Ejemplo 1.3.24 *Las siguientes expresiones son fracciones algebraicas:*

- $\dfrac{x+y}{ab^2}, \qquad a, b \neq 0.$
- $\dfrac{5xy^2 - 3x + y}{x - y}, \qquad x \neq y.$

La operatoria de estas fracciones es análoga a la utilizada en los números racionales, teniendo presente que el numerador y el denominador son expresiones algebraicas. En el caso de la suma, será conveniente determinar el mínimo común múltiplo de los denominadores para evitar cálculos engorrosos. La siguiente tabla muestra algunos ejemplos:

Polinomios	Factores	M.C.M.
$9x^2y$ $6xy^4$ $12x^5y$	$3^2 \cdot x^2 \cdot y$ $2 \cdot 3 \cdot x \cdot y^4$ $2^2 \cdot 3 \cdot x^5 \cdot y$	$2^2 \cdot 3^2 \cdot x^5 \cdot y^4$ $36x^5y^4$
x^2+5x+6 x^2+6x+9 x^2+3x+2 $x+2$	$(x+2)(x+3)$ $(x+3)^2$ $(x+2)(x+1)$ $(x+2)$	$(x+2)(x+3)^2(x+1)$
$a-b$ $3b-3a$ a^2-b^2 $-5a-5b$	$(-1)(b-a)$ $3(b-a)$ $(a-b)(a+b)$ $(-1)5(a+b)$	$-1 \cdot 3 \cdot 5(b-a)(b+a)$ $-15 \cdot (b^2-a^2)$
$6x^3-6y^3$ x^2+xy+y^2 $2(x-y)$	$3 \cdot 2 \cdot (x-y)(x^2+xy+y^2)$ x^2+xy+y^2 $2 \cdot (x-y)$	$3 \cdot 2(x-y)(x^2+xy+y^2)$ $6(x^3-y^3)$

Ejemplo 1.3.25 *Veamos las operatorias más comunes:*

1. **Simplificación**

$$\begin{aligned}\frac{x^2-3x+2}{x^2-1} &= \frac{(x-2)(x-1)}{(x+1)(x-1)}\\ &= \frac{x-2}{x+1}, \qquad x \neq \pm 1.\end{aligned}$$

2. **Multiplicación**

a) $$\begin{aligned} \frac{x-y}{a}\cdot\frac{xy}{b-c} &= \frac{(x-y)xy}{a(b-c)} \\ &= \frac{x^2y-xy^2}{ab-ac}, \quad a\neq 0,\ b\neq c. \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} \frac{x^2-y^2}{xa}\cdot\frac{ab}{x+y} &= \frac{(x-y)(x+y)ab}{xa(x+y)} \\ &= \frac{(x-y)b}{x} \\ &= \frac{xb-yb}{x}; \qquad x,\ a\neq 0,\ x\neq -y. \end{aligned}$$

3. **Suma**

$$\begin{aligned} \frac{5}{x^2-y^2}-\frac{4}{x+y} &= \frac{5}{(x+y)(x-y)}-\frac{4}{x+y}\cdot\frac{x-y}{x-y} \\ &= \frac{5}{(x+y)(x-y)}-\frac{4x-4y}{(x+y)(x-y)} \\ &= \frac{5-(4x-4y)}{(x+y)(x-y)} \\ &= \frac{5-4x+4y}{x^2-y^2}, \quad x\neq \pm y. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.3.26 *Reduzcamos las siguientes expresiones algebraicas.*

1. $$\begin{aligned} \frac{1}{x-3}+\frac{2}{x+5}-\frac{x-1}{x^2+2x-15} &= \frac{1(x+5)+2(x-3)-(x-1)}{(x-3)(x+5)} \\ &= \frac{x+5+2x-6-x+1}{(x-3)(x+5)} \\ &= \frac{2x}{(x-3)(x+5)}, \qquad x\neq 3, x\neq -5. \end{aligned}$$

2. $$\frac{x^2-7x+12}{x^2-16}=\frac{(x-4)(x-3)}{(x+4)(x-4)}=\frac{x-3}{x+4}, \qquad x\neq \pm 4.$$

3. $$\frac{x^3-1}{x^2+x+1}=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)}=x-1.$$

4. $$\frac{3x^2+2xy}{9x^2-4y^2}\cdot\frac{15x-10y}{2x} = \frac{x(3x+2y)}{(3x+2y)(3x-2y)}\cdot\frac{5(3x-2y)}{2x}=\frac{5}{2},\ x\neq \pm\tfrac{2}{3}y,\ x\neq 0.$$

5.
$$\frac{m^2-5m+6}{m^2-9}\cdot\frac{m^3-m}{m^3+2m^2-8m}\cdot\frac{7m+21}{7m^2-7}$$
$$= \frac{(m-3)(m-2)}{(m+3)(m-3)}\cdot\frac{m(m+1)(m-1)}{m(m+4)(m-2)}\cdot\frac{7(m+3)}{7(m+1)(m-1)}$$
$$= \frac{1}{m+4}, \qquad x \notin \{\pm 3, \pm 1, -4, 0, 2\}.$$

1.4. Ecuaciones

Si p y q son expresiones algebraicas en una variable x, entonces una proposición de la forma $p = q$ se llama una **ecuación algebraica** en x. Si se obtiene una afirmación verdadera cuando x es reemplazada por algún número real a, entonces a a se le llama una **solución** de la ecuación. El **conjunto solución** está formado por todos los valores reales que satisfacen la ecuación.

Resolver una ecuación consiste en determinar su conjunto solución.
Cuando $p = q$ se cumple para cualquier valor de la incógnita, ésta igualdad se denomina **identidad**.

Ejemplo 1.4.1

a) $3x^2 - 3x + 1 = 0$

b) $3t - 16 = 4t - 5$

c) $(x+1)^2 - 4x = (x-1)^2$.

El **grado** de una ecuación, corresponde al valor del mayor exponente que tiene la incógnita una vez que se han reducido todos los términos semejantes.

Ecuación de Primer Grado

Definición 1.4.2 (Ecuación de Primer Grado)
Una ecuación de primer grado o lineal es aquella que se puede reducir a la forma

$$ax + b = 0, \quad a, b \in \mathbb{R}, \; a \neq 0.$$

Es fácil notar que esta ecuación tiene como única solución $x = -\dfrac{b}{a}$.

Ejemplo 1.4.3 *Resolvamos la ecuación* $6x - 10 = 2(4x - 6) + 10$

Solución

Pasos a seguir:

- *Utilizando la propiedad distributiva se tiene*
$$6x - 10 = 8x - 12 + 10$$
- *Sumamos el inverso aditivo de* $8x$ *y* -10 *y reduciendo términos semejante se obtiene*
$$-2x = 8$$
- *Multiplicando por* $-\dfrac{1}{2}$ *ambas partes de la igualdad se obtiene*
$$x = -4$$

Ejemplo 1.4.4 *Pagué \$87 por un libro, un traje y un sombrero. El sombrero costó \$5 más que el libro y \$20 menos que el traje. ¿Cuánto pagué por cada artículo?*

Solución

Es importante recalcar que la asignación de la incógnita con una letra nos permite llevar a una expresión matemática el enunciado del problema a resolver. Una buena definición de esta, simplifica las expresiones que componen la ecuación.

Sea $x :=$ *el precio pagado libro, entonces*

- *Como el sombrero costó* $\$5$ *más que el libro, el precio pagado por el sombrero es* $x+5$.
- *El sombrero costó* $\$20$ *menos que el traje, entonces el precio pagado por el traje es* $x + 5 + 20 = x + 25$
- *Como todo costó \$87; la suma de los precios del libro, del sombrero y el traje tiene que ser igual a \$87, de aquí tenemos la ecuación:*
$$x + (x + 5) + (x + 25) = 87 \tag{1.3}$$

De donde obtenemos:
$$3x + 30 = 87$$
Despejando x*:*
$$x = 19$$
Por lo tanto, el precio del libro es \$19 (valor de x*), el precio del sombrero \$24 (valor de* $x+5$*) y el precio del traje \$44 (valor de* $x+25$*). Verificando el resultado con las condiciones iniciales, tenemos que* $19 + 24 + 44 = 87$.

Ejemplo 1.4.5 *Resolvamos la ecuación planteada en la subsección anterior y que nos entregará como solución la edad a la que murió Diofanto:*

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4=x$$

Solución

Sumando cada fracción algebraica:

$$\frac{14x+7x+12x+420+42x+336}{84}=x,$$

Reduciendo términos semejantes

$$\frac{75x+756}{84}=x \;\Rightarrow\; 75x+756=84x \;\Rightarrow\; 9x=756$$

cuya solución es $x=84$ y por lo tanto podemos concluir que Diofanto falleció a los 84 años.

En algunos casos un problema que a simple vista no es una ecuación de primer grado, puede ser reducida a una de este tipo, el siguiente ejemplo muestra una de estas situaciones.

Ejemplo 1.4.6 *Resolvamos la ecuación fraccionaria* $\dfrac{2x-1}{x+2}-\dfrac{x+3}{x-5}=\dfrac{x^2-3}{x^2-3x-10}$*, con* $x\neq -2$ *y* $x\neq 5$

Solución*:*

Factorizando los denominadores y multiplicando por el MCM que es: $(x+2)(x-5)$ *obtenemos*

$$\begin{aligned}(2x-1)(x-5)-(x+3)(x+2) &= x^2-3\\ 2x^2-10x-x+5-x^2-5x-6 &= x^2-3\\ -16x &= -3-5+6\\ x &= \frac{-2}{-16}\\ x &= \frac{1}{8}\end{aligned}$$

Ecuaciones cuadráticas

Definición 1.4.7 (Ecuación cuadrática)
Una ecuación cuadrática o de segundo grado con una incógnita, es una ecuación de la forma

$$ax^2+bx+c=0$$

donde a, b y c son números reales y $a\neq 0$.

Ejemplo 1.4.8 *Las siguientes ecuaciones son cuadráticas:*

a) $3x^2 - 5x + 6 = 0$ *b)* $2x^2 + 3x = 0$ *c)* $x^2 - 4 = 0.$

Una ecuación cuadrática no siempre tiene soluciones reales, cuestión que abordaremos más adelante, un ejemplo de ello es la ecuación $x^2+1=0$. Ahora bien, si la ecuación cuadrática está incompleta, es decir, si $b=0$ o $c=0$, la ecuación cuadrática tiene la formao $ax^2+c=0$ o $ax^2+bx=0$ respectivamente. En tal caso resolverla es bastante simple, solo debemos factorizar y/o despejar la incógnita.

Ejemplo 1.4.9 *Resolvamos las ecuaciones:*

1. $x^2 + 5x = 0$
2. $x^2 - 3 = 0$

Solución.

a) Factorizando obtenemos $x(x+5)=0$ *y como cada factor representa un número real obtenemos que* $x=0$ *o* $x+5=0$. *Por tanto, las soluciones de la ecuación son:* $x_1=0$, $x_2=-5$.
b) Podemos considerar la ecuación $x^2-3=0$ *como una diferencia de números al cuadrado y entonces factorizar como* $(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})=0$, *por tanto, las soluciones son* $x=\sqrt{3}$, $x=-\sqrt{3}$.

Si generalizamos este último ejemplo, podemos ver una **característica importante de las ecuaciones cuadráticas**: si $k>0$ entonces la ecuación $x^2-k=0$ tiene dos soluciones reales $x=\sqrt{k}$, $x=-\sqrt{k}$. En efecto, si $x^2-k=0$ entonces factorizando obtenemos que $(x-\sqrt{k})(x+\sqrt{k})=0$ y por tanto las soluciones son $x=\sqrt{k}$ y $x=-\sqrt{k}$. Ahora, si $k=0$ la ecuación tiene como única solución $x=0$. Por último, cuando $k<0$ la ecuación $x^2=k$ no tiene soluciones reales, pues todo número real al cuadrado es mayor o igual a cero.

Ahora consideremos una ecuación cuadrática completa. Podemos resolver esta ecuación completando cuadrados. En efecto, a partir de $ax^2+bx+c=0$ llegamos a:

$$\begin{aligned}
x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} &= -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \\
\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2-4ac}{4a^2} \\
x + \frac{b}{2a} &= \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \\
x &= -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\
x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}.
\end{aligned}$$

Esta última expresión es conocida como la **fórmula cuadrática** y nos entrega una regla de cálculo para las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ que depende de los valores de a, b y c.

Ejemplo 1.4.10

1. *Resolvamos la ecuación $x^2 - 3x + 2 = 0$ utilizando la fórmula cuadrática.*

   Como $a = 1$, $b = -3$ y $c = 2$:

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2}$$

$$x_1 = \frac{3 + 1}{2}$$

$$x_2 = \frac{3 - 1}{2}$$

   Luego la ecuación tiene dos soluciones reales: $x_1 = 2$, $x_2 = 1$.

   Note que factorizando podemos escribir la ecuación como $(x - 1)(x - 2) = 0$.

2. *Resolvamos la ecuación $2x^2 - x + 1 = 0$. Usando la fórmula cuadrática obtenemos*

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{-7}}{4}$$

   Por tanto, no tiene soluciones reales, pues la raíz cuadrada no está definida para los números negativos.

3. *Resolvamos la ecuación $x^2 + 4x + 4 = 0$. De la formula cuadrática obtenemos que:*

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{2}$$

   y por tanto la ecuación tiene como única solución a $x = -2$. En este caso, la ecuación se puede escribir como $(x + 2)^2 = 0$.

Tomando como punto de partida el último ejemplo, nos damos cuenta que la expresión $b^2 - 4ac$ en la fórmula cuadrática juega un papel fundamental al momento de decidir si la ecuación tiene dos soluciones reales, tiene sólo una solución o no tiene soluciones reales. Para formalizar este hecho, llamaremos discriminante de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ al número real $b^2 - 4ac$ y lo denotaremos por Δ.
Podemos resumir el análisis anterior en el teorema siguiente:

Teorema 1.4.11 (Fórmula cuadrática)
Sean a, b y c números reales, con $a \neq 0$. Las soluciones de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ son:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ y } x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Dependiendo del discriminante de la ecuación cuadrática, la naturaleza de las soluciones puede clasificarse según lo siguiente:

- *Si $\Delta > 0$, existen dos soluciones reales distintas.*
- *Si $\Delta = 0$, existe una única solución real de multiplicidad dos.*
- *Si $\Delta < 0$, no existe solución real.*

Ejemplo 1.4.12 *Sea k un número real. Utilicemos el discriminante para determinar los valores de k que permiten que la ecuación $x^2 - 3x + 2k = 0$*

a) tenga dos soluciones reales distintas,

b) tenga una solución real de multiplicidad 2,

c) no tenga solución real.

Solución

El discriminante de la ecuación es $\Delta = 9 - 8k$, por tanto:

a) Para que tenga dos soluciones reales distintas $\Delta > 0$, es decir, $9 - 8k > 0$ y por tanto $k < \dfrac{9}{8}$.

b) La ecuación tendrá solo una solución real cuando $\Delta = 0$, luego si $9 - 8k = 0$ entonces $k = \dfrac{9}{8}$.

c) No tendrá soluciones reales si $\Delta < 0$. Si $9 - 8k < 0$ entonces $k > \dfrac{9}{8}$.

Ahora que sabemos como resolver una ecuación cuadrática estudiemos el proceso inverso, es decir, si conocemos las soluciones de una ecuación cuadrática ¿Podemos reconstruir tal ecuación? Si sabemos que x_1 y x_2 son las soluciones de $ax^2 + bx + c = 0$ entonces

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ y } x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Sumando las soluciones de la ecuación cuadrática

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b}{a}$$

Por otra parte, multiplicando las soluciones de la ecuación cuadrática:

$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{(-b)^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} \\ &= \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} \\ &= \frac{c}{a} \end{aligned}$$

Ahora bien, si x_1 y x_2 son las soluciones de la ecuación cuadrática, sabemos que ésta puede escribirse de la forma

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

y al resolver este producto encontramos la forma general de la ecuación correspondiente:

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0$$

Además sabemos que $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ y $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$. Sustituyendo en la última igualdad obtenemos:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

luego, multiplicando por a obtenemos la forma general de la ecuación cuadrática. Podemos resumir esta propiedad de las soluciones en el siguiente teorema:

Teorema 1.4.13 (Propiedades de las soluciones de una ecuación cuadrática)
Sean x_1 y x_2 las soluciones de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, entonces se cumple que:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \quad \textit{y} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Ejemplo 1.4.14

Sabiendo que las soluciones de una ecuación cuadrática suman $\frac{8}{5}$ *y que su producto es* -3 *determine una ecuación que cumpla con las condiciones dadas.*

Solución

Si x_1 *y* x_2 *son las soluciones, entonces la ecuación cuadrática es* $(x - x_1)(x - x_2) = 0$. *Multiplicando obtenemos* $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0$ *y al reemplazar los datos del enunciado obtenemos la ecuación cuadrática*

$$5x^2 - 8x - 15 = 0.$$

Ejemplo 1.4.15

Determinemos la ecuación cuadrática que tiene por soluciones $x_1 = \frac{3}{4}$ *y* $x_2 = -\frac{1}{2}$

Solución

$$\begin{array}{rcll}
\left(x - \dfrac{3}{4}\right)\left(x + \dfrac{1}{2}\right) & = & 0 & \quad / \cdot 8 \\
4 \cdot \left(x - \dfrac{3}{4}\right) 2 \cdot \left(x + \dfrac{1}{2}\right) & = & 0 & \\
(4x - 3)(2x + 1) & = & 0 & \\
8x^2 + 4x - 6x - 3 & = & 0 & \\
8x^2 - 2x - 3 & = & 0. &
\end{array}$$

Ecuaciones literales

Consideremos el ejemplo siguiente. Si a y b son las medidas de los catetos y c la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, por el teorema de Pitágoras sabemos que se cumple la relación

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Si $c = 7$ y $b = 3$, entonces

$$a^2 + 3^2 = 7^2.$$

la cual es una ecuación cuadrática donde la incógnita a representa la medida del cateto desconocido. Para determinar la solución de ésta, solo debemos resolver la ecuación despejando a.

$$\begin{array}{rcl}
a^2 & = & 49 - 9 \\
a & = & \pm 2\sqrt{10}
\end{array}$$

en este caso sólo consideramos el valor positivo de la raíz, pues a representa una medida, luego la solución es $a = 2\sqrt{10}$.

Ahora cambiemos los datos iniciales, si $c = 6$ y $b = 5$ obtenemos la ecuación cuadrática $a^2 + 5^2 = 6^2$. Resolviendo

$$\begin{aligned} a^2 &= 36 - 25 \\ a &= \pm\sqrt{11} \end{aligned}$$

Luego, en este caso la medida del otro cateto será $a = \sqrt{11}$.
Note que al cambiar la medida de b y c se resolvió de manera análoga la ecuación cuadrática resultante. Para distintos valores de estos datos no es necesario que hagamos el mismo procedimiento una y otra vez, más bien, podemos despejar a manteniendo b y c de forma genérica, para finalmente reemplazarlos por sus valores conocidos.

$$\begin{aligned} a^2 &= c^2 - b^2 \\ a &= \pm\sqrt{c^2 - b^2}. \end{aligned}$$

Vemos que la solución queda en función de b y c. La incógnita de la ecuación es a mientras que las cantidades conocidas b y c reciben el nombre de **parámetros** de la ecuación y se suponen constantes. Este tipo de ecuaciones en donde además de la incógnita se incluyen parámetros para representar sus coeficientes se le denomina **ecuaciones literales**.

Para resolver las ecuaciones literales, se utilizan los mismos procedimientos que para ecuaciones comunes, pero es fundamental identificar claramente cuál es la incógnita de la ecuación y cuáles son los parámetros. Generalmente, la solución quedará expresada en función de los parámetros.

Ejemplo 1.4.16

a) *La solución de la ecuación* $5x - 4b = 7a$ *es* $x = \dfrac{7a + 4b}{5}$ *al considerar* x *como la incógnita.*

b) *Encuentre la o las soluciones de la ecuación:* $x^2 - (a^2 + b^2)x + a^2b^2 = 0$.

Solución:

Factorizando se tiene:

$$(x - a^2)(x - b^2) = 0$$

Luego las soluciones son:

$$x_1 = a^2 \text{ y } x_2 = b^2$$

c) *Encuentre la o las soluciones de la ecuación fraccionaria:* $\dfrac{x+a}{x+b} = \dfrac{1}{2}$ *con* $x \neq -b$.

Solución

Multiplicando por $2(x+b)$ *obtenemos,*

$$2(x+a) = x+b$$

$$2x+2a = x+b$$

$$x = b-2a$$

Problemas de planteo

En la vida cotidiana existen problemas que pueden ser modelados usando ecuaciones. Resolver un problema de éste tipo consiste en encontrar la o las soluciones que satisfacen las ecuaciones involucradas, teniendo presente que dicha solución debe ser una respuesta lógica al problema.

Estrategias para resolver problemas de planteamiento

1. Lea el problema haciendo una lista de la información disponible.
2. Teniendo claro qué se debe determinar, introduzca una incógnita y defina lo que representa, indicando unidades si es necesario.
3. Formule una ecuación para la situación descrita en el problema.
4. Resuelva la ecuación.
5. Verifique que las soluciones sean pertinentes al contexto del problema.
6. Describa la solución obtenida.

Ejemplo 1.4.17

a) *En una actividad de finalización de año organizada por una empresa asistió el doble de mujeres que hombres (adultos) y el triple de niños que hombres y mujeres juntos, si el total de personas es de 156. ¿Cuántos niños, mujeres y hombres asistieron?*

Solución

Sea x *el número de hombres,* $2x$ *el número de mujeres y* $9x$ *el número de niños. Como la suma de hombres, mujeres y niños es 156, entonces*

$$\begin{aligned} x + 2x + 9x &= 156 \\ 12x &= 156 \\ x &= 13. \end{aligned}$$

Por tanto, habían 13 hombres, 26 mujeres y 117 niños que en total suman 156.

b) *Si dos números suman 11 y su producto entre ellos es 18. ¿Cuáles son los números?*

Solución

Sea x uno de los números, como la suma de ambos es 11 el otro número será $11 - x$. Luego se tiene la ecuación

$$\begin{aligned} x \cdot (11 - x) &= 18 \\ 11x - x^2 &= 18 \\ 0 &= x^2 - 11x + 18 \\ 0 &= (x - 9)(x - 2) \end{aligned}$$

Por lo tanto, los números son 2 y 9.

c) *Un automóvil sale de cierta ciudad a mediodía y se dirige hacia el este a $40\ Km/h$. A las 13 hrs. sale de la ciudad otro automóvil que viaja en la misma dirección a una velocidad de $50\ Km/h$. ¿Cuántas horas tarda el segundo vehículo en alcanzar al primero?*

Solución

Sea x la cantidad de horas que demora el segundo vehículo en alcanzar al primero. Como éste viaja a $50\ Km/h$ la distancia recorrida hasta alcanzar al primer automóvil será $50 \cdot x$.

Ahora bien, como el primer vehículo lleva una hora más de viaje a una velocidad de $40\ KM/h$, la distancia que recorrió hasta ser alcanzado por el segundo vehículo será $40 \cdot (x + 1)$

Al igualar las distancias llegamos a la ecuación

$$50 \cdot x = 40 \cdot (x + 1)$$

Resolviendo esta ecuación lineal obtenemos que $x = 4$, es decir, el segundo vehículo alcanza al primero 4 horas después de salir de la ciudad.

d) *Angélica tiene un salario base de* $\$250000$ *semanales. Además recibe una comisión del* $12\,\%$ *de lo que venda. La semana anterior, sus ingresos totales fueron de* $\$520000$. *¿Cuáles fueron sus ventas totales durante esa semana?*

Solución

Sea x *sus ventas totales de la semana. Luego, la comisión que obtuvo la semana anterior fue* $0{,}12 \cdot x$ *(*$12\,\%$ *de* x*). Estableciendo la igualdad*

$$250000 + 0{,}12x = 520000.$$

Resolviendo esta ecuación obtenemos que $x = 2250000$ *y por tanto Angélica vendió un total de* $\$2250000$ *la semana anterior.*

Ecuaciones irracionales

Definición 1.4.18 (Ecuación irracional) *Una ecuación irracional es aquella donde la incógnita se encuentra presente en la cantidad subradical de alguna de las raíces involucradas en la igualdad.*

Para resolver una ecuación irracional se debe elevar cada miembro de ella una o más veces a las potencias que correspondan para eliminar sucesivamente las raíces que contienen a la incógnita. Luego se debe ver la pertinencia de los valores encontrados y serán soluciones aquellas que satisfagan la ecuación original.

Ejemplo 1.4.19 *Resolvamos la ecuación* $\sqrt{2x-5} = 7$.

Solución

Elevando al cuadrado

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{2x-5}\right)^2 &= 7^2 \\ 2x - 5 &= 49 \\ 2x &= 54 \\ x &= 27 \end{aligned}$$

Comprobación: $\sqrt{2 \cdot 27 - 5} = \sqrt{54 - 5} = \sqrt{49} = 7$, *finalmente*

$$\textit{Sol: } \{27\}$$

Ejemplo 1.4.20 *Resolvamos la ecuación* $\sqrt{x+2}+\sqrt{2x}=\sqrt{18-x}$.

Solución

Resolviendo:

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x}\right)^2 &= (\sqrt{18-x})^2 \\
\left(\sqrt{x+2}\right)^2+2\sqrt{x+2}\cdot\sqrt{2x}+(\sqrt{2x})^2 &= (\sqrt{18-x})^2 \\
x+2+2\sqrt{2(x+2)x}+2x &= 18-x \\
2\sqrt{2(x+2)x} &= 16-4x \\
\sqrt{2(x+2)x} &= 8-2x \\
2x^2+4x &= (8-2x)^2 \\
2x^2+4x &= 64-32x+4x^2 \\
2x^2-36x+64 &= 0 \\
x^2-18x+32 &= 0 \\
(x-16)(x-2) &= 0 \\
x=16,\ x=2 &
\end{aligned}$$

Verificando:

- *Con* $x=16$

$$\begin{aligned}
\sqrt{16+2}+\sqrt{16\cdot 2} &= \sqrt{18-16} \\
\sqrt{18}+\sqrt{32} &= \sqrt{2} \\
3\sqrt{2}+4\sqrt{2} &= \sqrt{2} \\
7\sqrt{2} &= \sqrt{2}\ \textit{contradicción.}
\end{aligned}$$

  Por lo tanto, $x=16$ *no es solución.*

- *Con* $x=2$

$$\begin{aligned}
\sqrt{2+2}+\sqrt{2\cdot 2} &= \sqrt{18-2} \\
\sqrt{4}+\sqrt{4} &= \sqrt{16} \\
2+2 &= 4
\end{aligned}$$

  Por lo tanto, $x=2$ *es solución.*

Sistemas de ecuaciones lineales

Definición 1.4.21 (Sistemas de ecuaciones lineales)
Un sistema de ecuaciones lineales es aquel que está formado por dos o más ecuaciones de primer grado con una o más incógnitas.

Resolver un sistema de este tipo consiste en determinar el o los valores de las incógnitas involucradas que satisfacen todas las ecuaciones que lo conforman. Si existe al menos una solución, entonces el sistema se denomina compatible, en caso contrario se dirá incompatible, pues no tendrá solución.

A continuación veremos los métodos más utilizados para resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Método de reducción

1. Amplificar o simplificar cada ecuación, para obtener en una de las incógnitas coeficientes que difieran sólo en el signo.
2. Sumar las ecuaciones con el fin de eliminar una de las incógnitas.
3. Resolver la ecuación de la incógnita resultante.
4. Calcular el valor de la otra incógnita reemplazando en una de las ecuaciones originales o en alguna de las ecuaciones equivalentes de las que se hayan obtenido en el proceso.

Ejemplo 1.4.22 *Resolver el sistema:*

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x-3y & = & 2 \\ 5x+2y & = & 4 \end{array}\right|$$

Solución

Para eliminar la variable y multiplicamos la primera ecuación por 2 y la segunda por 3, obteniendo:

$$\left.\begin{array}{rcl} 4x-6y & = & 4 \\ 15x+6y & = & 12 \end{array}\right|$$

Sumando ambas ecuaciones se tiene:

$$19x = 16 \ \Rightarrow x = \frac{16}{19}$$

Para encontrar el valor de y reemplazamos el valor de x en alguna de las ecuaciones, por ejemplo, en la primera:

$$\begin{aligned} 2\cdot\frac{16}{19}-3y &= 2 \qquad / \cdot 19 \\ 32-57y &= 38 \\ y &= \frac{-2}{19} \end{aligned}$$

Método de sustitución

1. Despejar una de las incógnitas en función de la otra, en una de las ecuaciones.
2. La expresión obtenida se sustituye en la otra ecuación, obteniendo una ecuación de primer grado con una incógnita.
3. Resolver la ecuación con una incógnita.
4. Determinar el valor de la otra incógnita reemplazando en una de las ecuaciones originales o en alguna de las ecuaciones equivalentes de las que se hayan obtenido en el proceso.

Ejemplo 1.4.23 *Resolver el sistema:*

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x-3y & = & 2 \\ 5x+2y & = & 4 \end{array}\right|$$

Solución

Desde la primera ecuación despejamos x, obteniendo $x = \dfrac{2+3y}{2}$. Reemplazando esta expresión en la segunda ecuación obtenemos:

$$5\left(\frac{2+3y}{2}\right)+2y=4.$$

Resolviendo esta ecuación de primer grado se obtiene que $y=-\dfrac{2}{19}$ y reemplazando en la primera ecuación llegamos a que $x=\dfrac{16}{19}$.

Ejemplo 1.4.24 *Resolver el sistema:*

$$\left.\begin{array}{rcl} 3x-y+z & = & 2 \\ x+2y+2z & = & 11 \\ 2x+y+z & = & 7 \end{array}\right|$$

Solución

Reduciremos una incógnita de modo de llegar a un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Al sumar la primera ecuación con la tercera se elimina la incógnita y, resultando la ecuación $5x+2z=9$. Para obtener otra ecuación con las mismas incógnitas, amplificaremos la primera por 2 y luego sumamos con la segunda, quedando la ecuación $7x+4z=15$. El nuevo sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas formado es:

$$\left.\begin{array}{rcl} 5x+2z & = & 9 \\ 7x+4z & = & 15 \end{array}\right|$$

Que se resuelve de forma similar al primer ejemplo. Luego de obtener la solución la reemplazaremos en cualquiera de las ecuaciones originales del sistema de orden 3 y encontraremos el valor de la tercera incógnita, de esta manera obtenemos que $x = 1$ y $z = 2$, estos valores reemplados en cualesquiera de las tres ecuaciones originales nos da el valor de $y = 3$.

Ejemplo 1.4.25

Resolver el sistema de ecuaciones para las incógnitas x e y considerando a m como parámetro.

$$\left.\begin{array}{rcl} mx + y &=& 2 \\ x + my &=& 2 \end{array}\right|$$

Solución

Para resolver este sistema se utilizará el método de reducción, para esto la primera ecuación la multiplicaremos por m y la segunda por -1, obteniendo el sistema:

$$\left.\begin{array}{rcl} m^2x + my &=& 2m \\ -x - my &=& -2 \end{array}\right|$$

sumando ambas ecuaciones

$$m^2x - x = 2m - 2 \Longrightarrow (m^2 - 1)x = 2(m - 1) \Longrightarrow x = \frac{2(m-1)}{m^2 - 1}$$

luego $x = \dfrac{2(m-1)}{(m+1)(m-1)}$, *por tanto* $x = \dfrac{2}{m+1}$, *con* $m \neq \pm 1$.

Reemplazando esta expresión de x obtenida en cualquiera de las ecuaciones originales se obtiene:

$$\begin{array}{rcl} mx + y &=& 2 \\ m \cdot \dfrac{2}{m+1} + y &=& 2 \\ y &=& \dfrac{2}{(m+1)}, \end{array}$$

entonces una solución al sistema esta dada por $(x, y) = \left(\dfrac{2}{m+1}, \dfrac{2}{m+1}\right)$.

Analicemos los casos donde $m = 1$ y $m = -1$, reemplacemos la primera condición en el sistema original:

$$\left.\begin{array}{rcl} x + y &=& 2 \\ x + y &=& 2 \end{array}\right|$$

podemos observar que el sistema se reduce a una sola ecuación con dos variables y tiene infinitas soluciones de la forma $(x, y) = (t, 2 - t)$ *con* $t \in \mathbb{R}$*. Y en el caso de que* $m = -1$ *tenemos:*

$$\left.\begin{array}{rcl} -x + y & = & 2 \\ x - y & = & 2 \end{array}\right|$$

sumando ambas ecuaciones se tiene $0 = 4$ *lo que es una contradicción y luego el sistema no tiene solución.*

Otro método utilizado para resolver éste tipo de sistemas es el **método de igualación** el cual consiste en despejar de ambas ecuaciones la misma incógnita para luego igualar las expresiones resultantes. De esta manera se reduce el problema a una ecuación de primer grado con una incógnita.

1.5. Logaritmos

A partir del siglo XVI, debido principalmente a la expansión comercial y al perfeccionamiento de las técnicas de navegación, los cálculos que se precisaban, eran de tal magnitud que surge la necesidad de encontrar algoritmos menos laboriosos para las operatorias de multiplicación, división, etc. que los utilizados hasta entonces.

El desarrollo de los logaritmos no se produjo aisladamente por un único proceso. Dos caminos condujeron a su hallazgo: los cálculos trigonométricos para las investigaciones astronómicas aplicables a la navegación y el cálculo de las riquezas acumuladas en lo que se refiere a las reglas de interés compuesto. Ambos caminos inspiraron respectivamente a John Napier y a Henry Briggs[2] en el desarrollo de los logaritmos.

Definición 1.5.1 (Logaritmo)
Sea $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$*. Si* $x \in \mathbb{R}^+$*, entonces el único exponente* y *tal que* $a^y = x$ *se denomina el logaritmo de* x *en base* a*. Se denota por* $\log_a x$*.*

Observación 1.5.2

1. *Solamente se puede calcular logaritmo de números reales positivos.*

2. *Si la base es* 10*, se llama logaritmo decimal o logaritmo de Briggs y se denota por* $\log$*, omitiendo la escritura de la base.*

3. *Si la base es* $e \approx 2,7172$*, se llama logaritmo natural o logaritmo neperiano (en honor a Napier) y se denota por* $\ln$*.*

[2] John Napier, matemático escocés $(1550 - 1617)$; Henry Briggs, matemático inglés $(1561 - 1630)$

Propiedades de los logaritmos

A continuación presentamos las propiedades de uso más común y que utilizaremos para resolver ecuaciones donde la incógnita se encuentra en la base o en el argumento del logaritmo.

1. $\log_a 1 = 0$
2. $\log_a a^x = x$
3. $a^{\log_a u} = u$
4. $\log_a a = 1$
5. $\log_a x^k = k \log_a x$
6. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$
7. $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
8. $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$
9. $\log_a x = \log_a y \Rightarrow x = y$

Probaremos algunas de las propiedades, utilizando la definición de logaritmo:

5) Sea $y = \log_a x^k$ por definición tenemos que $a^y = x^k$, elevando esta igualdad a $\dfrac{1}{k}$ obtenemos:
$$a^{\frac{y}{k}} = x \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{y}{k} = \log_a x,$$
multiplicando por k se tiene que $y = k \log_a x$.

6) Tomando $z = \log_a xy$, $p = \log_a x$ y $q = \log_a y$, se tiene que:
$$a^z = xy, \quad x = a^p \ \text{ e } \ y = a^q,$$
de donde
$$a^z = a^p \cdot a^q = a^{p+q},$$
por lo tanto $z = p + q$.

8) Sea $p = \log_b x$ y $q = \log_b a$, entonces $b^p = x$ y $b^q = a$, de donde:
$$\log_a x = p \log_a b \qquad \text{y} \qquad \log_a a = q \log_a b,$$
efectuando el cuociente de estas dos últimas igualdades, obtenemos:
$$\log_a x = \frac{p \log_a b}{q \log_a b} = \frac{p}{q}.$$

9) Basta con reemplazar $x = y$ en la propiedad 7) y el resultado se tiene de la propiedad 1).

Esta última propiedad es una de las más útiles para resolver ecuaciones logarítmicas. Para familiarizarnos más con estas propiedades consideremos los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1.5.3

1. *Calcula los siguientes logaritmos:*

   a) $\log_2 128 = \log_2 2^7 = 7.$

   b) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{27} = \log_{\frac{1}{3}} 3^{\frac{3}{2}} = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{3}{2}.$

   c) $\log_a b + \log_a \frac{1}{b} = \log_a b \cdot \frac{1}{b} = \log_a 1 = 0.$

2. *Escribamos como un solo logaritmo la expresión:*

$$\frac{1}{2}\log a - \frac{1}{2}\log b - \frac{1}{2}\log c.$$

Solución

Comenzamos factorizando

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\log a - \frac{1}{2}\log b - \frac{1}{2}\log c &= \frac{1}{2}(\log a - \log b - \log c) \\
&= \frac{1}{2}(\log a - (\log b + \log c)) \\
&= \frac{1}{2}(\log a - \log bc) \\
&= \frac{1}{2}\log \frac{a}{bc} \\
&= \log \left(\frac{a}{bc}\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

3. *Verifiquemos que* $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = 1$

Solución

En este problema aplicamos la propiedad 8), escribiendo todos los logaritmos en términos de una sola base, escogemos arbitrariamente la base a.

$$\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = \log_a b \cdot \frac{\log_a c}{\log_a b} \cdot \frac{\log_a a}{\log_a c} = 1$$

4. *Determina la base del sistema de logaritmos en que el logaritmo de 567 excede al logaritmo de 7 en 4 unidades.*

Solución

Definimos x *como la base del logaritmo:*

$$\begin{aligned} \log_x 567 - \log_x 7 &= 4 \\ \log_x \frac{567}{7} &= 4 \\ \log_x 81 &= 4. \end{aligned}$$

Luego, $x = 3$*, pues* $3^4 = 81$.

Ecuaciones logarítmicas

Son aquellas ecuaciones en las que al menos una de las incógnitas se encuentra en el argumento o en la base del logaritmo. Para resolverlas utilizamos las propiedades de los logaritmos vistas anteriormente.
Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 1.5.4 *Resuelva las siguientes ecuaciones:*

1. $\log(2x + 4) - \log(x - 1) = 1$

   Solución

   Como es una resta de logaritmos, podemos utilizar la propiedad 7) y la propiedad 4):

$$\log \frac{2(x+2)}{x-1} = 1 \Rightarrow \log \frac{2x+4}{x-1} = \log 10$$

   Utilizando la propiedad 9), obtenemos:

$$\frac{2x+4}{x-1} = 10$$

   Cuya solución es: $x = \frac{7}{4}$

2. $\log(3x + 5) + \log(2x - 1) = \log x^2$

   Solución

   En este problema, reescribiremos el lado izquierdo utilizando la propiedad 6):

$$\log(3x + 5)(2x - 1) = \log(6x^2 + 10x - 3x - 5) = \log x^2.$$

   Y ahora, el problema se reduce a una ecuación cuadrática al aplicar la propiedad 9):

$$\begin{aligned} 6x^2 + 7x - 5 &= x^2 \\ 5x^2 + 7x - 5 &= 0 \end{aligned}$$

utilizando la fórmula cuadrática obtenemos las siguientes soluciones:

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{149}}{10}$$

con lo cual obtenemos: $x_1 = \frac{-7+\sqrt{149}}{10} \approx 0{,}52$ *y* $x_2 = \frac{-7-\sqrt{149}}{10}$

La solución negativa en este caso debemos descartarla, pues al ser reemplazada en la ecuación original, nos queda argumento negativo en el logaritmo, lo cual no está definido.

3. $2\log x = \log(10-3x)$

Solución

Comenzamos utilizando la propiedad 4) al lado izquierdo, lo que nos permite llevar la ecuación a la forma de la propiedad 9):

$$\begin{aligned} \log x^2 &= \log(10-3x) \\ x^2 &= 10-3x \\ x^2+3x-10 &= 0. \end{aligned}$$

Las soluciones de la cuadrática son:

$$x = \frac{-3 \pm 7}{2}$$

con lo cual obtenemos: $x_1 = -5$ *y* $x_2 = 2$.

Descartaremos la solución $x_1 = -5$*, pues indefine la ecuación original, al quedar argumento negativo en el logaritmo.*

4. $(\log x)^2 + \log x - 2 = 0.$

Solución

Esta ecuación se reduce a resolver una ecuación cuadrática, mediante la sustitución $u = \log x$*:*

$$u^2 + u - 2 = 0$$

Ahora tenemos una ecuación de segundo grado, cuyas soluciones son:

$$u_1 = -2 \;\; y \;\; u_2 = 1.$$

Es decir,

$$\log x = -2 \Rightarrow x = 10^{-2} = \frac{1}{100}$$

y

$$\log x = 1 \Rightarrow x = 10.$$

1.6. Ejercicios propuestos

1. Transforme de número decimal a fracción:

   a) $-0,23$
   b) $3,563$
   c) $1,\overline{1}$
   d) $3,\overline{356}$
   e) $1,1\overline{3}$
   f) $3,5\overline{63}$

2. Realice operaciones y simplifique:

   a) $\dfrac{3}{5}+\dfrac{7}{6}-0,14+1,\overline{3}-\dfrac{2}{3}$
   b) $0,54+\dfrac{3}{5}-1,\overline{8}+1,1\overline{3}$
   c) $\dfrac{32}{9}-1,0\overline{3}-\left(\dfrac{4}{3}+0,\overline{6}\right)$
   d) $\left[\dfrac{77}{6}-\left(4-\dfrac{7}{3}\right)\right]-\dfrac{1}{2}$
   e) $\left[-\dfrac{2}{5}:(-4)\right]\cdot\left[\dfrac{5}{-3}:\dfrac{-1}{6}\right]$
   f) $\left(\dfrac{7}{10}\cdot\left[\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{5}+\dfrac{3}{4}\right)+\dfrac{7}{16}\right]\right):\dfrac{2}{3}$
   g) $2+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{5}}}$
   h) $\dfrac{\left(\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{4}+\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{4}\right)\cdot 6}{\left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}\right)\cdot\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{6}}$
   i) $\dfrac{\left(\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{6}\right)\cdot\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{6}}{\left(\dfrac{3}{12}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{6}+\dfrac{1}{4}\right)\cdot 2\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)}$

3. Usando fracciones resuelva los siguientes problemas:

   a) Hace unos años Pedro tenía 24 años, que representan los $\frac{2}{3}$ de su edad actual ¿Qué edad tiene Pedro?

   b) Un padre reparte entre sus hijos 1.800 pesos. Al mayor le da $\frac{4}{9}$ de esa cantidad, al mediano $\frac{1}{3}$ y al menor el resto ¿Qué cantidad recibió cada uno? ¿Qué fracción del dinero recibió el tercero?

   c) María gana como secretaria \$240.000 líquido. Gasta la cuarta parte en alimentarse; $\frac{4}{5}$ del resto en arriendo, $\frac{1}{2}$ de lo que sobra lo gasta en pasajes y vestuario, el resto lo gasta en pago de deudas ¿ Cuánto dinero gasta en cada item?

   d) El estanque de un auto está lleno de bencina al empezar el viaje. Al terminar la primera etapa le quedan los $\frac{3}{5}$ del estanque. En la segunda etapa ha gastado la mitad de lo que le quedaba. Le quedan aún 15 litros ¿Cuál es la mitad de la capacidad del estanque? ¿Cuántos litros gastó en cada etapa?.

   e) Jorge compró una calculadora con los $\frac{2}{7}$ del dinero que tenía. Con la mitad de lo que le quedaba compró un diccionario de bolsillo. Tiene todavía \$1.250 ¿Cuánto dinero tenía antes de sus compras?

f) En las elecciones locales celebradas en un pueblo, $\frac{3}{11}$ de los votos fueron para el partido A, $\frac{3}{10}$ para el partido B, $\frac{5}{14}$ para C y el resto para el partido D. El total de votos ha sido de 15400. Determine el número de votos obtenidos por cada partido y el número de abstenciones si se sabe que el número de votantes representa $\frac{5}{8}$ del censo electoral.

g) Una piscina contiene 1.200 litros de agua cuando está llena hasta $\frac{1}{4}$de su capacidad.

i) ¿Cuál es la capacidad total de la piscina?

ii) ¿Cuántos litros le faltan para llenarla?

4. El almanaque del año 2000 menciona que en Chile hay 15.000.000 de habitantes, 3.000.000 de televisores y 2.000.000 de teléfonos.

a) ¿Qué Conclusión puedes sacar al realizar el cuociente entre la cantidad de habitantes y el número de televisores?

b) Pablo afirma que observando la razón entre el número de habitantes y el número de teléfonos, se puede concluir que en Chile hay aproximadamente un teléfono por cada 7 a 8 habitantes ¿Cuál es tu opinión?

5. En un campeonato deportivo, la razón de partidos ganados a partidos perdidos del equipo favorito es 6:4. Si en total se jugaron 20 partidos y no hubo empates ¿Cuántos partido ganó? ¿Cuántos perdió?.

6. Las edades de un padre y su hijo están en la razón $10 : 3$. Si entre ambos tienen 78 años ¿Cuántos años más tiene el padre que el hijo?

7. Los ángulos interiores de un triángulo están en la razón $4 : 9 : 2$ ¿Cuál es la medida de cada uno?

8. La diferencia entre las edades de dos hermanos es de 12 años. Si la razón entre ambas edades es de $5 : 3$ ¿Qué edad tiene cada hermano?

9. Las edades de cinco hermanos están en la razón de $2 : 3 : 5 : 7 : 9$. Si sabemos que la suma de las edades de los cinco hermanos es 208 ¿Qué edad tiene cada hermano?

10. Un vehículo gasta 12 litros de bencina en recorrer $124Km$ ¿Cuántos $Km.$ recorre si tiene 9 litros de bencina?

11. Dos socios logran al finalizar el año una ganancia de $\$$2.000.000. Se repartirán el dinero en forma proporcional al capital inicial de cada uno. El primero colocó como capital inicial $\$$120.000 y el segundo colocó un capital inicial de $\$$ 70.000 ¿Cuánto dinero recibe cada uno de los socios?

12. Cinco personas se demoran 12 horas en limpiar un terreno de 60 metros cuadrados ¿Cuántas horas se demorarán en limpiar este mismo terreno 8 personas?

13. Diez llaves llenan un estanque de ocho mil litros en cuatro horas ¿Cuántas horas se demorarán ocho llaves en llenar el estanque de ocho mil litros? ¿Cuántas horas se demorarán en llenar ocho llaves un estanque de 12 mil litros?

14. Un afortunado caballero ganó \$450.000 en el Kino, pero por compromiso tiene que darle el $7\,\%$ al amigo que lo acompañó a comprar el boleto ¿Con cuánto dinero se quedara él?

15. A todos los trabajadores se les descuenta el $7\,\%$ de su sueldo para Salud y un $12\,\%$ para la AFP, si Luis gana \$183.000 mensuales ¿Cuánto le queda de sueldo después de los descuentos?

16. Escriba cada expresión como una sola potencia.

    a) $2^6 \cdot 3^6$
    b) $4^4 \cdot (-5)^4$
    c) $2^5 \cdot 3^5 \cdot 5^5$
    d) $2^2 \cdot (-3)^2 \cdot 6^5$
    e) $(-8)^3 \cdot 10^3$
    f) $(-5)^3 \cdot 5^3 \cdot (-5)^3$

17. Calcule el valor de cada expresión.

    a) $3^5 \cdot 3^{-5}$
    b) $\dfrac{7^9 \cdot 7^{-5}}{7^4}$
    c) $\dfrac{(11^2)^3 \cdot 11^{-6}}{11^0}$
    d) $\dfrac{10^7 \cdot 10}{10^5 \cdot 10 \cdot 10^2}$
    e) $\dfrac{(-3)^{-4} \cdot 243}{3^3 \cdot 3^0}$
    f) $\dfrac{(-17)^2 \cdot (-17)^3}{(-17)^4 \cdot (-17)}$

18. Resuelva las siguientes adiciones y sustracciones de potencias:

    a) $2^2 + 3^3 - 2^2$
    b) $2^3 - 7^5 + 2^3 + 7^5 + 2^3 + 2^3$
    c) $3^4 + 3^3 + 3^4 + 3^1 + 3^4$
    d) $6^2 - 5^3 + 5^{-2} + 6^2$
    e) $3^5 + 5^3 - 7^2 - 3^5 + 5^3$
    f) $6^2 + 5^4 + 10^8 - 10^8 + 5^4 + 6^2$

19. Reduzca las siguientes expresiones:

    a) $2a^2b(3ab^2 - 5ab + 8a^2b)$
    b) $\left(\dfrac{3}{4}a + 2b\right)(0,5b - a)$
    c) $\left(\dfrac{a^2}{3} + 4\right)\left(\dfrac{a^2}{3} - 4\right)$
    d) $\dfrac{3}{7}a^2b^3\left(\dfrac{7}{3}ab^{-3} - \dfrac{1}{3}a^{-2}b + \dfrac{14}{9}a^{-2}b^{-3}\right)$
    e) $(2a-3)^2(a+3y-5z)(a+3y-4z)$
    f) $\dfrac{10}{3}x^4y^5(0,5x - 0,3y + 0,2xy + 0,5x^2y^2)$

20. Usando propiedades de las potencias exprese en la forma más simple.

    a) $x^{2a+3b} \cdot x^{a-5b} \cdot x^{2b-3a}$

    b) $\dfrac{\left[(-2ab)^2\,(-3a^2b)\right]^2}{12\,(a^2b)^2}$

    c) $\left(\dfrac{x^{-5}a^{-1}}{b^4c^{-2}}\right)^{-3} : \left(\dfrac{x^2b^{-3}}{c^{-1}a^2}\right)^{-2}$

    d) $\dfrac{p^{7x-3}\cdot p^{x+1}\cdot p^{1-3x}}{p^{x-3}\cdot p^{x-1}}$

    e) $\left[\dfrac{(y^8)^3}{(y^4)^5\,(y^3)^4}\right]^{-2}$

    f) $\dfrac{4a^3b^5}{9c^4} : \dfrac{2c}{27a^2b^2}$

    g) $\dfrac{m^{x-3y}n^{7-2x}}{p^{7y-9}} : \dfrac{p^{9-6y}}{m^{4y-x}n^{x-7}}$

    h) $\dfrac{16^{2x+y}\cdot\left(\dfrac{1}{8}\right)^{x-y}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{y-2x}}{2^{x+y}\cdot 32^{x-y}}$

    i) $\dfrac{27^{2x-3y}\cdot\left(\dfrac{1}{9}\right)^{2y-x}}{81^{x+y}\cdot 27^{x-y}} : \dfrac{9^{x-2y}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3y}}$

21. Desarrolle los siguientes productos notables:

    a) $(y-3)^2$

    b) $(8n-5p)^2$

    c) $(u-4,5)^2$

    d) $(4y-7z)^2$

    e) $\left(y-\dfrac{7}{2}\right)^3$

    f) $(-7a+6b)^3$

    g) $(2c-\dfrac{3}{4})^3$

    h) $(-2x-3y)^2$

    i) $\left(\dfrac{1}{2}e+\dfrac{1}{3}f\right)^2$

    j) $(x+3y)(x-3y)$

    k) $(4a-b)(4a+b)$

    l) $(x^2-6)(x^2+6)$

    m) $(uv+1)(uv-1)$

    n) $(b-8)(b-9)$

    ñ) $(c+6)(c-3)$

    o) $(2m+5)(2m-1)$

    p) $(pq+3)(pq-3)$

    q) $(a^2x+3)(a^2x-2)$

    r) $(5+x)(3+x)$

    s) $(m^2-mn)(m^2+7mn)$

22. Resuelva las operaciones indicadas y reduzca los términos semejantes:

    a) $(x-1)(x-6)+(x+7)(x-3)$

    b) $2(a+1)^2-3(a+1)(a-1)$

    c) $2(x+5)(x-4)-3(2x+4)(2x-3)$

    d) $3(x-y)^2-2(2x+3y)^2$

    e) $(x+2y)(x+3y)-3x(3x+4y)$

    f) $\left(\dfrac{a^2}{3}+3\right)\left(\dfrac{a^2}{3}-3\right)-3\left(\dfrac{a}{3}-3\right)^2$

    g) $\left(\dfrac{1}{2}a-\dfrac{1}{3}b\right)^2-\left(\dfrac{3}{2}a-\dfrac{2}{3}b\right)^2$

    h) $\left(\dfrac{1}{3}-3x\right)^3+\left(\dfrac{1}{3}+3x\right)\left(\dfrac{1}{3}-3x\right)$

    i) $(0,1x-0,2y)^2-(0,2x+0,4y)^2$

    j) $(a-2)^3+(a-2)^2$

    k) $7(3m-n)^2-(m+n)^2-8m^2$

l) $3xy(x^2 - 2xy + y) - 2xy(2x - 3y)$

m) $(3x-5)(3x-4)-(2x+4)(2x-6)$

n) $(3a-4)2-(3a-4)(3a+4)$

ñ) $\left(\frac{2}{3}x-3\right)^2-\left(\frac{2}{3}x-3\right)\left(\frac{2}{3}x-2\right)$

o) $4\left(\frac{1}{2}a-3\right)^2+4\left(\frac{1}{2}a+3\right)$

23. Realice los pasos necesarios para escribir las siguientes expresiones de tal manera que aparezca uno o dos cuadrados de binomio:

a) $u^2 - u$

b) $4a^2 + b^2$

c) $a^2x^2 + bx$

d) $4p^2 - 28pq$

e) $16y^2 + 5y^2$

f) $2y - 8x - x^2$

g) $9x^2 + 72x + 24y + 16$

h) $3y^2 - 9y - 5x - 2$

i) $x^2 + y^2 - 3x + 6y - 5$

j) $x^2 - y^2 - 6x + 8y$

k) $4x^2 + 4y^2 + 8x - 20$

l) $4x^2 + 9y^2 + 32x - 18y + 37$

m) $-6x^2 + 4y^2 - 36x + 16y + 46$

n) $9x^2 - 4y^2 - 36x + 32y + 8$

ñ) $4x^2 - 9y^2 + 32x + 36y + 64$

o) $9x^2 - 16y^2 - 36x - 32y - 124$

24. Agrupe según factor común:

a) $3(x^2)^3 - x^5$

b) $4(x^2)^3x^4 - (2x)^2x^3$

c) $a^2x + a^3x^2 - 4a^2x^3$

d) $3ax^2 - 9a^2x^2 + 6a^3x^3$

e) $4ab^2c - 8a^2b^3c$

f) $7a^2xy^3 - 14a^2x^2y^2$

g) $(a+2b)(c+3d) - (2a-b)(c+3d)$

h) $(4a-3b)a-(4a-3b)a^2+(4a-3b)a^3$

i) $a^2 + ab + ac + bc$

j) $a^2 + 3b - ab - 3a$

25. Factorice los siguientes productos notables:

a) $a^2b^2 - 4$

b) $a^4 + 2a^2b^2 + b^4$

c) $9 - x^2 + 2xy - y^2$

d) $p^3 + 8 + 6p^2 + 12p$

e) $16m^2 - 8mn + n^2 - 49$

f) $x^3 + x^2 - x - 1$

g) $x^3 - 5x^2 - x + 5$

h) $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 6x + 4$

i) $(3x-6)(x^2-1)-(5x-10)(x-1)^2$

j) $27x^3 - 1$

26. Exprese en la forma más simple:

a) $\dfrac{2^{2m+3}-3\left(2^m\right)^2}{3\left(2^{m+1}\right)^2-2^{2m+1}}$

b) $\dfrac{y^{-2}+2x^{-1}y^{-1}+x^{-2}}{x^{-1}y^{-2}+x^{-2}y^{-1}}$

c) $\dfrac{xy^{-2}-x^{-1}}{y^{-2}+x^{-1}y^{-1}}$

d) $\dfrac{y^{-3}-x^{-3}}{x^{-2}y^{-3}-x^{-3}y^{-2}}$

27. Compruebe en cada caso si las fracciones dadas son equivalentes.

a) $\dfrac{x+2}{3x+5}$ y $\dfrac{1}{3}$

b) $\dfrac{x^2+x}{x^2}$ y $\dfrac{x+1}{x}$

c) $\dfrac{3x}{x^2-x}$ y $\dfrac{3}{x-2}$

d) $\dfrac{3x-3}{9x^2-9}$ y $\dfrac{1}{3x-3}$

28. Realice las siguientes operaciones:

a) $\dfrac{1}{3x}+\dfrac{3}{2x}-\dfrac{1}{x}$

b) $\dfrac{2}{3x}-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3}{2x^2}$

c) $\dfrac{3}{x}-\dfrac{x}{x-1}$

d) $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}$

29. Descomponga en factores y simplifique:

a) $\dfrac{x^2-3x}{2x-6}$

b) $\dfrac{x^2-1}{(x-1)^2}$

c) $\dfrac{x^2+4x+4}{x^2-4}$

d) $\dfrac{x^2-16}{x^2+8x+16}$

e) $\dfrac{x^2-9}{x^4-81}$

f) $\dfrac{x^2+3x}{x^2+x-6}$

g) $\dfrac{x^2+2x-3}{x^3-x^2}$

h) $\dfrac{x^3+4x^2+3x}{x^2+x-6}$

30. Opere y simplifique:

a) $\left(\dfrac{4}{x}-x\right):\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2}\right)$

b) $\dfrac{x+2}{(x+2)^2}\cdot\dfrac{x^2-4}{x}$

c) $\dfrac{x^2}{2}\cdot\left(\dfrac{2}{x}:\dfrac{1}{x+2}\right)$

d) $\left[\left(\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x+1}\right):\left(x-\dfrac{1}{x+1}\right)\right]\cdot x$

e) $\left(\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{x+2}{x}-\dfrac{x+1}{x-2}\right)\cdot 2x^2$

31. Realice las operaciones indicadas y simplifique:

a) $\left(\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{x-y}{x+y}\right)\cdot\left(\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}\right)$

b) $\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}+\dfrac{x+y}{xy}\right)\cdot\dfrac{2xy}{x+y}$

c) $\left(\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{x}{x+1}\right)\cdot\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$

d) $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{x-1}{x^2-4x+3}$

e) $\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{3}{x-1}-\dfrac{x+1}{x^2+x-2}$

f) $\dfrac{x}{x^2-x-2}-\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{x-1}{x^2-3x+2}$

g) $\dfrac{x}{x^2}-\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{x+2}{x^2+x-2}$

32. Opere y simplifique

a) $\dfrac{a^2+6a+9}{a^2-9}:\dfrac{a^2+9}{a^4-81}$

b) $\dfrac{16-x^4}{4x+8}:(32-8x^2)$

c) $\dfrac{\dfrac{36}{x+y}}{\dfrac{6}{x-y}}:\dfrac{\dfrac{3x}{x+y}}{\dfrac{1}{x^2-y^2}}$

d) $\dfrac{2y}{y-1}-\dfrac{y-1}{3y}-\dfrac{3-y}{y}$

e) $\dfrac{y}{y-2}-\dfrac{y}{y^2-3y+2}-\dfrac{y}{y-1}$

f) $\dfrac{3+x}{3-x}-\dfrac{1}{-x-3}-\dfrac{x^2}{9-x^2}$

g) $\dfrac{1}{y^2-y}+\dfrac{2y+1}{y^2-1}+\dfrac{y}{y+1}$

h) $\dfrac{x^4-3x^3}{x^4-6x^3+9x^2}$

i) $\dfrac{2x+6}{x^2-3x}-\dfrac{x+5}{x^2-4x+3}+\dfrac{x-1}{2x-6}$

j) $\dfrac{x-1}{x^2+2x+1}-\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{1}{x-1}$

k) $\dfrac{x}{x^2-x}+\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{x-1}{x^2-1}$

l) $\dfrac{x-1}{x^2+x}-\dfrac{3(x-1)}{x}+\dfrac{2x}{x+1}$

33. Simplifique:

a) $\dfrac{1+\dfrac{x}{y}}{\dfrac{x^2-y^2}{xy-y^2}}$

b) $\dfrac{\dfrac{x^2-3x-10}{x^3-2x^2-4x+8}\cdot\dfrac{x^2-4}{x-5}}{\dfrac{x+2}{3-x}\cdot\dfrac{6x-2x^2}{2x^2-4x}}$

c) $$\dfrac{\dfrac{9+6x+x^2}{9-x^2}\cdot\dfrac{3x^2-x^3}{3x^2+x^3}}{\dfrac{2x-4}{\dfrac{3}{4}+\dfrac{2}{8}}:\dfrac{2x^2-8x+8}{x-2}}$$

d) $$\dfrac{x^2+6x+5}{x^2-5x+4}\cdot\dfrac{x-2}{x^2-4}+\dfrac{x^3-2x}{x^2-4x}$$

e) $$\dfrac{\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-1}\cdot\dfrac{4x^2-4x}{x+1}}{\dfrac{2x^2+14x+20}{x^3-50+2x^2-25x}:\dfrac{x-5}{2x^3-20x^3+50x}}$$

f) $$\dfrac{\dfrac{x^2-1}{x^2+2x+1}\cdot\dfrac{2x^2-8x-10}{x-1}}{\dfrac{2x+2}{x^2+x-2}:\dfrac{x+1}{x^3-4x^2-7x+10}}$$

g) $$\dfrac{\left(\dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-9}\cdot\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-3x+2}\right):\dfrac{x^2+x-2}{x^2+4x+4}}{\dfrac{2x^2-2x}{3x^2+3x-6}-\dfrac{3x^2+12x+12}{2x}}$$

h) $$\dfrac{1+\dfrac{x-3}{x+3}}{\dfrac{3-x}{3x}}-\dfrac{\dfrac{x+3}{x}-\dfrac{x+3}{3}}{\dfrac{x+3}{x-3}-1}$$

i) $$\left(\dfrac{x^3+x^2-6x}{x^2+x}-\dfrac{x^2-9}{x^3+6x^2+9x}\right):\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+x}$$

j) $$\dfrac{\dfrac{a^2-1}{a^2+1}-\dfrac{a^2+1}{a^2-1}}{\dfrac{a-1}{a+1}-\dfrac{a+1}{a-1}}:\left(\dfrac{a^2+1}{a}-\dfrac{a^2-2a+1}{(a-1)^2}\right)$$

34. Resuelva las siguientes ecuaciones lineales con una incógnita:

a) $2(x+2)-5(2x-3)=3$

b) $3[2x-(5x+2)]+1=3x-9(x-3)$

c) $6x-(2x-1)(2x+1)=2-(3+2x)^2$

d) $(x-7)^2-(1+x)^2=2(3x-4)$

e) $\dfrac{8-13x}{5} - \dfrac{3(8+4x)}{2} + 4 = 5 - \dfrac{6x-7}{8}$

f) $\dfrac{7x-4}{2} - \dfrac{3x-2}{5} + 2 = \dfrac{6x-3}{4}$

g) $(x-2)^2 - (x+1)(x-1) = 5$

h) $2-(y+1)^2 = 5-3[y-(5y+9)]-y^2$

i) $(w+3)^2 + 4 = (w-2)^2 + 5w - 2$

35. Resuelva los problemas de planteo sobre ecuaciones de primer grado con una incógnita:

a) Un número multiplicado por 5 sumado con el mismo número multiplicado por 6 da 55. ¿Cuál es el número?

b) Tres números impares consecutivos suman 81. ¿Cuáles son los números?

c) El doble de un número más el triple de su sucesor, más el doble del sucesor de éste es 147. Hallar el número.

d) Si el lado de un cuadrado se duplica, su perímetro aumenta 40m. Calcular la medida del lado del cuadrado.

e) La suma de las edades de tres personas es 88 años. La mayor tiene 20 años más que la menor y la del medio 18 años menos que la mayor. Hallar las respectivas edades.

f) Dividir 1080 en dos partes tales que la mayor disminuida en 132 equivalga a la menor aumentada en 100.

g) Silvia compra un pañuelo, una falda, y un abrigo en 5.050 pesos. Calcula los precios respectivos, si la falda vale 25 veces más que el pañuelo, y el abrigo, el triple de la falda.

h) ¿Qué número debe sumarse al numerador y al denominador de la fracción $\frac{8}{13}$ y simultáneamente restarse del numerador y del denominador de $\frac{40}{51}$ para que las fracciones resultantes sean equivalentes?

36. Resuelva las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $a^{x+3} - a^8 = 0$

b) $(a^{x-1})^{x-7} = (a^{7x-1})^7 \cdot (a^{x-6})^9$

c) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{3x+1} \cdot 2^{x-4} = \dfrac{1}{8}$

d) $(0{,}25)^{x+1} = (0{,}125)^{x-1}$

e) $(25^{x-3})^6 : (125^{2-3x})^2 = 625$

f) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{2x} \cdot \left(\dfrac{8}{3}\right)^{2x} = 2^{x-3}$

g) $\sqrt[3]{8^x} = 65536$

h) $\sqrt[4]{4^{x+3}} = 4$

i) $\sqrt{2^{x+5}} = \sqrt[3]{4^{x+2}}$

j) $\sqrt[3]{10^{2x+7}} = \sqrt{100^{x-1}}$

a) Calcule las siguientes raíces:

1) $\sqrt{64}$, $\sqrt{100}$, $\sqrt[3]{64}$, $\sqrt[5]{-32}$, $\sqrt[4]{81}$, $\sqrt{121}$.

2) $\sqrt{\frac{81}{49}}$, $\sqrt[3]{\frac{1}{27}}$, $\sqrt[4]{\frac{1}{625}}$, $\sqrt[3]{-\frac{125}{216}}$.

b) Usando propiedades de las raíces exprese en la forma más simple.

1) $\dfrac{\sqrt[3]{27a^7b^{12}}}{\sqrt[3]{ab^6}}$

2) $\sqrt[3]{3x^2yz}\cdot\sqrt[3]{2x^2y^2z}$

3) $\dfrac{\sqrt{2^{x+3}}}{\sqrt{2^{x-1}}}$

4) $\sqrt[3]{\sqrt{10}-\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{10}+\sqrt{2}}$

5) $\frac{3\sqrt{128a^4}}{6\sqrt{64a^2}}$

6) $\sqrt{\dfrac{xy}{z}}\cdot\sqrt{\dfrac{z^{-3}}{x^{-5}y^{-7}}}$

7) $\sqrt[n-1]{\frac{a}{\sqrt[n]{a}}}$

8) $\left[\sqrt[3]{\frac{5a^2b^5}{c^4b}}:\sqrt{\frac{b^2c^3}{a^3}}\right]^{12}$

9) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}$

c) Transforme las raíces que sean necesarias y reduzca a términos semejantes

1) $\sqrt{2}+2\sqrt{8}+3\sqrt{18}$

2) $2\sqrt{5}-13\sqrt{20}+5\sqrt{45}$

3) $\dfrac{12\sqrt{20}-18\sqrt{45}}{6\sqrt{5}}$

4) $3\sqrt{8}+2\sqrt{32}+7\sqrt{50}-6\sqrt{162}+9\sqrt{98}$

d) Racionalice los denominadores.

1) $\dfrac{\sqrt{\sqrt{5}+1}}{\sqrt{\sqrt{5}-1}}$

2) $\dfrac{8}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$

3) $\dfrac{\sqrt{24}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$

4) $\dfrac{4}{\sqrt[5]{8}}$

5) $\dfrac{a}{\sqrt[7]{a^3b^2}}$

6) $\dfrac{x+y}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}$

e) Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones:

1) $\begin{cases} 3x-2y=13 \\ 2x+4y=3 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x+y=8 \\ 2x-y=4 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{2y}{3}+1=-x \\ \frac{5}{x}x-y=-\frac{21}{2} \end{cases}$

4) $\begin{cases} 7x-2y=1 \\ 8x+4y=6 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3x+2y=a+1 \\ ax-y=1 \end{cases}$

6) $\begin{cases} ax+y=b \\ -3x+by=a \end{cases}$

7) $\begin{cases} 5x+ay=a+b \\ x-by=a \end{cases}$

8) $\begin{cases} mx+ny=2 \\ nx+my=2 \end{cases}$

9) $\begin{cases} ax-y=b/(a+b) \\ bx+y=a/(a+b) \end{cases}$

10) $\begin{cases} px+qy=p+2q \\ x-2y=p \end{cases}$

f) Reduzca los siguientes sistemas a lineales y resuelvalos:

1) $\begin{cases} x(y-6)=y(x-4) \\ \frac{5}{x-3}-\frac{11}{y-a}=0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} y(x-1)-x(y-2)=3 \\ x(y-3)-y(x+5)=2 \end{cases}$

3) $\left\{\begin{array}{l} \frac{x+4}{y-1} = \frac{2x-1}{2y-4} \\ 3x - 5y = 0 \end{array}\right.$

4) $\left\{\begin{array}{c} (x-2)^2 = (x-1)^2 - 3 + 6y \\ 5(x-1) - 3(x+2) = 3y \end{array}\right.$

5) $\left\{\begin{array}{c} \frac{2x-y}{3} + x = -\frac{y+1}{2} \\ \frac{x-y+1}{-x+y-2} = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$

6) $\left\{\begin{array}{c} (x+3)^2 = (x+2)^2 - 3y \\ 3x + 2y + 3(x-y) = 6 \end{array}\right.$

g) Plantee y resuelva los sistemas de ecuaciones que resuelven los siguientes problemas:

1) La edad de Carla es el doble que la edad de Macarena. Hace diez años la suma de las edades era igual a la edad que tiene hoy Carla ¿Cuál es la edad de cada una en la actualidad?
2) Un granjero cuenta con un determinado número de jaulas para sus conejos. Si introduce 6 conejos en cada jaula quedan cuatro plazas libres en una jaula. Si introduce 5 conejos en cada jaula quedan dos conejos libres ¿Cuántos conejos y jaulas hay?
3) Se quieren mezclar vino de 6000 pesos con otro de 3500 pesos, de modo que resulte vino con un precio de 5000 pesos el litro ¿Cuántos litros de cada clase deben mezclarse para obtener 200 litros de la mezcla?
4) Al comenzar los estudios de universidad se les hace un test a los estudiantes con 30 cuestiones sobre Matemáticas. Por cada pregunta contestada correctamente se le dan 5 puntos y por cada pregunta incorrecta o no contestada se le quitan 2 puntos. Un alumno obtuvo en total 94 puntos ¿Cuántas preguntas respondió correctamente?
5) El día del estreno de una película se vendieron 600 entradas y se recaudaron 1.962.500 pesos. Si los adultos pagaban 4000 pesos y los niños 1500 pesos ¿Cuál es el número de adultos y niños que acudieron?
6) Halla dos números tales que si se dividen el primero por 3 y el segundo por 4 la suma es 15; mientras que si se multiplica el primero por 2 y el segundo por 5 la suma es 174.
7) Juan y Roberto comentan: *Juan: Si yo te tomo 2 monedas, tendré tantas como tú Roberto: Sí, pero si yo te tomo 4, entonces tendré 4 veces más que tú.* ¿Cuántas monedas tienen cada uno?
8) Mi abuelo quiso repartir entre sus nietos cierta cantidad de dinero. Si nos daba 300000 pesos a cada uno le sobraba 600.000 pesos y si no daba 500.000 pesos le faltaba 1.000.000 pesos ¿Cuántos nietos tiene? ¿Qué cantidad quería repartir?

37. Resuelva las siguientes ecuaciones cuadráticas:

a) $x^2 - 25 = 0$

b) $(2x+1)^2 = 4x + 1$

c) $3x^2 + 2x = 3 + 2x$

d) $\dfrac{2x^2-1}{2}-\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{1-2x}{6}$

e) $\left(3x-\dfrac{1}{2}\right)^2+3x=\dfrac{5}{4}$

f) $\dfrac{x}{3}+\dfrac{3}{x}=\dfrac{x}{12}+\dfrac{12}{x}$

g) $\dfrac{3^{2x}+9}{3^x}=10$

h) $\dfrac{2x}{3}+\dfrac{3}{2x}=\dfrac{13}{6}$

i) $\dfrac{x+4}{x+5}-\dfrac{x+2}{x+3}=\dfrac{1}{24}$

j) $\dfrac{5x-8}{x-1}=\dfrac{7x-4}{x+2}$

38. Determine las condiciones de k en la ecuación cuadrática:

a) $9x^2+(8+k)x+k=0$ para que las soluciones sean iguales

b) $x^2-(k+7)x+(7k-1)=0)$ para que el producto de sus soluciones sea 48

c) $5x(x+2)=k$ para que carezca de soluciones reales

d) $3x^2+5x+k^2-5k+6=0$ para que una de sus soluciones sea cero

e) $x^2+kx+12=0$ para que una de las soluciones sea el triple de la otra.

f) $x^2+kx-(7+k)=0$ para que las soluciones sean -2 y -3.

39. Determine la ecuación cuadrática que satisface:

a) 2 y -5 son sus soluciones.

b) La suma de sus soluciones es $\dfrac{5}{6}$ y su producto es $\dfrac{1}{6}$

c) Tiene una solución de multiplicidad 2 que es $\sqrt{6}$

d) Sus soluciones con $2+\sqrt{5}$ y $2-\sqrt{5}$

e) Sus soluciones son -1 y 0.

40. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones de segundo grado:

a) $\begin{cases} 2x+y=4 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x+y=-1 \\ x-y^2=-8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x-y=9 \\ 2xy=-40 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x-2y=6 \\ 2x^2-y^2=23 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x^2+2y^2=72 \\ x^2-y^2=60 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x^2-3y^2=194 \\ 3x^2+y^2=-60 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x^2+y^2=26 \\ xy=5 \end{cases}$

h) $\begin{cases} x^2+y^2=20 \\ xy=6 \end{cases}$

41. Resuelva los problemas de planteo que involucran ecuaciones cuadráticas:

a) El área de una cancha rectangular de fútbol es 1600 metros cuadrados. Si el largo de la cancha es de 60 metros más que el ancho ¿Cuál es el ancho de la misma?

b) Dentro de 11 años la edad de Pedro será la mitad del cuadrado de la edad que tenía hace 13 años. Calcula la edad de Pedro.

c) Los tres lados de un triángulo rectángulo son proporcionales a los números 3, 4 y 5. Halla la longitud de cada lado sabiendo que el área del triángulo es 24 metros cuadrados.

d) Dos números naturales se diferencian en dos unidades y la suma de sus cuadrados es 580 ¿Cuáles son esos números?

e) Halle un número entero sabiendo que la suma con su inverso es fracción $\frac{26}{5}$

f) Los lados de un triángulo rectángulo tienen por medidas en centímetros tres números pares consecutivos. Halle los valores de dichos lados. (Utilice el Teorema de Pitágoras)

g) Un terreno rectangular mide 15 metros de largo y 8 metros de ancho ¿En cuántos metros habría que disminuir, simultáneamente, el largo y el ancho para que la diagonal sea 4 metros menor?.

h) El numerador de una fracción tiene una unidad menos que el denominador. Aumentando el numerador en 14 y el denominador en 4, el valor de la fracción se duplica ¿Cuál es la fracción?.

42. Resuelva las siguientes ecuaciones irracionales

a) $\sqrt{2x+\sqrt{x+3}}=2$

b) $\sqrt[3]{\sqrt{x+2}}=2$

c) $\sqrt{(x+1)^2+(x-1)^2}=2$

d) $\dfrac{\sqrt{5+2\sqrt{x}}}{\sqrt{5-2\sqrt{x}}}=2$

e) $\sqrt{12+\sqrt{6x-1}}=4$

f) $\sqrt{x+4}-\sqrt{x-3}=1$

g) $\dfrac{4x}{3}=\sqrt{100-x^2}$

h) $\dfrac{\sqrt{x+6}}{\sqrt{x+3}}=\dfrac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+1}}$

i) $\dfrac{5}{\sqrt{x+5}-\sqrt{x}}=1$

j) $\sqrt{\dfrac{2x^2-2x+5}{2}}=x$

k) $\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-x}=1$

l) $\dfrac{3+\sqrt[3]{27x}}{3-\sqrt[3]{27x}}=3$

43. Resuelva las siguientes ecuaciones utilizando incógnitas auxiliares

a) $4^{2x+1} - 3 \cdot 4^x = 10$

b) $3^x + 3^{2x} = 2$

c) $\dfrac{4}{2^{x-1}} = 4 \cdot 2^{x+1} - 63$

d) $6^x - 9 \cdot 6^{-x} + 8 = 0$

e) $3^{x+2} + 3^{x+1} + 3^x + 3^{x-1} = 120$

f) $3^{2(x+1)} - 18 \cdot 3^x + 9 = 0$

g) $5^{2x+1} - 3 \cdot 5^{2x-1} = 550$

h) $2^{2x} - 10 \cdot 2^x + 2^4 = 0$

44. Calcule el valor de cada una de las siguientes expresiones:

a) $\log_4 64 + \log 1{,}000 + \log_5 125$

b) $\log_{\frac{2}{3}} \frac{4}{9} - \log_{\frac{5}{6}} \frac{125}{216} + \log 10{,}000$

c) $2\log_5 25 - 3\log_7 49 + 4\log_8 4{,}096$

d) $2\log 100{,}000 - 2\log_4 256 + 4\log_2 32$

45. Reduzca cada una de las siguientes expresiones a un solo logaritmo.

a) $2\log_b 3 + 3\log_b 2$

b) $\frac{1}{2}\log_b c - 6\log_b a$

c) $\log_p(x+3) - 4\log_p(x-2)$.

d) $\frac{2}{3}\log_b c + \frac{3}{5}\log_b a - 1$

e) $\frac{3}{4}\log_b a - \frac{2}{3}\log_b c - \frac{3}{4}\log_b d + \frac{2}{3}\log_b e$

f) $\log_m a - 2\log_m b + \log_m c - \frac{15}{4}\log_m d$

g) $\log_b(x^2+1) + \log_b(x+1) + \log_b(x-1)$

h) $\frac{1}{4}\log_p(x+y+z) - 4\log_p(x-y-z)$

46. Si $\log_6 2 = A$, $\log_6 3 = B$ y $\log_6 5 = C$, exprese en términos de A, B y C.

a) $\log_6 5{,}400$

b) $\log_6 90$

c) $\log_6 \sqrt{216}$

d) $\log_6 \frac{1{,}080}{32{,}400}$

47. Resuelva las siguientes ecuaciones logarítmicas.

a) $6\log x = \log 64 + \log \frac{x}{4}$

b) $\log \frac{3-x^2}{2x+10} = 1$

c) $\frac{1}{5}\log(x+5) = \log 2$

d) $\log x + 2\log x + logx^3 - 5\log x = 2$

e) $\log_3(\log_3(5x+2)) = 1$

f) $\log_2(\log_2(5x+6)) = 2$

g) $\log(\log x^3) = -1$

h) $\frac{\log_4(x^2+8)}{\log_4(x+3)} = 2$

i) $\log_7 \sqrt{x+1} = \log_7 x$

j) $\log(x-4) + \log x = \log 5$

k) $2\log(2x-1) - 2 = -2\log(3x-4)$

l) $\log_5(5x-4) - \log_5(2x-7) = 2$

m) $\log\left(\frac{9}{2} - x\right) = \log\frac{9}{2} - \log x$

n) $\log\sqrt{2x-3} + \log\sqrt{x-5} + 1 = \log 30$

ñ) $\log_2 x + \log_2 6 = \log_2 30 - \log_2 5$

o) $\log(x+3) + \log(x-5) = 2\log(x-6)$

p) $\log(3x-4) - \log x + \log 5 = \log(15x+2) - \log(x+2)$

q) $\log_2(\log_2(\log_2(2x-8))) = 0$

r) $\log_3(\log_3(\log_3(x+25))) = 0$

s) $\log(6x+5) + \log(2x+7) = \log(3x+4) + \log(x+5)$

t) $\log(x+7) - \log(x+5) = \log(x^2+10x+25)$

48. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} 2^x = 16 \\ \log(x^2 - 5x + 5) = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3^{x^2+x-2} = 1 \\ \log(2-x) + \log x = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 25^x - 30 \cdot 5^{x-1} + 5 = 0 \\ \log(120 - 4x) = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2^{\log x} = 4 \\ (\log x)^2 - \log x^3 + 2 = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \log_y x + \log_x y = 2 \\ x^2 - y = 20 \end{cases}$

f) $\begin{cases} \log(x^2 + y^2) = 2 - \log 5 \\ \log(x+y) + \log(x-y) = \log 1,2 + 1 \end{cases}$

g) $\begin{cases} \log_4 x + \log_4 y = 1 + \log_4 9 \\ x + y - 20 = 0 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 3^y \cdot 9^x = 81 \\ \log(y+x)^2 - \log x = 2\log 3 \end{cases}$

i) $\begin{cases} \log_y x + \log_x y = \frac{5}{2} \\ x \cdot y = 27 \end{cases}$

j) $\begin{cases} x \cdot y = 40 \\ x^{\log y} = 4 \end{cases}$

49. Los químicos miden el pH de una solución (condición de ácido o base) mediante la fórmula: $pH = -\log[H+]$, donde $[H+]$ es la concentración de iones de hidrógeno en moles por litro.

   a) Muchas soluciones tienen un rango de pH que fluctúa entre 1 y 14. ¿Qué valores de H+ están asociados a esos valores extremos?

   b) Encuentra el pH aproximado de:

      1) Cerveza, $[H+] = 6,31 \cdot 10^{-5}$
      2) Sangre, $[H+] = 3,98 \cdot 10^{-8}$
      3) Vinagre, $[H+] = 6,3 \cdot 10^{-3}$

   c) Si el huevo tiene un pH = 7,79, una manzana un pH = 3,0 y el agua pura un pH = 7,0, encuentra [H+] en cada caso.

50. Una famosa escala para medir la cantidad de energía liberada por un sismo es la escala de Richter, representada por la ecuación: $\log E = 1,5R + 11,8$ donde E: energía liberada medida en ergios; R: magnitud del sismo en grados de la escala Richter.

   a) Calcule la cantidad de energía liberada en un sismo de grado 6 y en un sismo de grado 7.

   b) ¿Qué relación numérica existe entre ambos valores?

   c) ¿Qué aumento representa en la cantidad de energía liberada, el aumento de un grado en la escala Richter? Si el aumento fuera de dos grados, ¿cómo aumenta la energía liberada?

d) El terremoto de mayor magnitud registrado corresponde al ocurrido en 1960 en la ciudad de Valdivia, el cual fue de 9,5 grados Richter ¿Cuál fue la energía liberada por este sismo?

Capítulo 2

Elementos de lógica y teoría de conjuntos

En un lejano reino de oriente, había una vez un rajá que tenía una única hija. Había también un malvado visir que quería apoderarse del trono y aprovechando una gran sequía que hubo en el reino dijo al rajá: "Esta noche me he comunicado con los dioses y ellos piden que tu hija se sacrifique por su pueblo. Sin embargo, los dioses son benévolos y le dan la oportunidad de decir una única frase antes de morir. Si lo que ella dice es verdadero, el verdugo cortará su cabeza, y si lo que dice la princesa es falso, será quemada en la hoguera". El rajá creyó que todo estaba perdido, pero su hija ya había encontrado una solución que impediría su ejecución. Te desafío a que tú también encuentres una solución para salvar a la princesa.

2.1. Lógica proposicional

Antes de iniciar nuestro estudio formal de la matemática como ciencia exacta, resulta indispensable conocer algunos aspectos del lenguaje matemático. La matemática estudia las propiedades de ciertos objetos como los números, los conjuntos y las operaciones. La mayoría de las veces, estas propiedades no son evidentes y necesitan de una argumentación para establecer su verdad. El lenguaje matemático nos permite expresar estas propiedades y argumentos.
Por su riqueza y complejidad, nuestro lenguaje habitual nos lleva a menudo a contradicciones, por lo que solo usaremos una parte de él. Por ejemplo,

"Esta frase es falsa"

es una afirmación del lenguaje natural de la cual no podemos decidir que es verdadera, y tampoco que es falsa, pues de cualquier manera llegamos a una contradicción.

El lenguaje matemático está formado por una parte del lenguaje natural más un conjunto de variables y símbolos lógicos que nos ayudan a simplificar la escritura. El lenguaje natural permitido consiste en todas las afirmaciones sobre las cuales se puede decidir si son verdaderas o falsas, aún cuando nosotros no tengamos la respuesta. Por ejemplo,

$$\text{“}\textit{Hay vida en otros planetas}\text{”}$$

es una afirmación que no sabemos si es verdadera o falsa, pero aún así esta frase es o verdadera, o falsa. Estas afirmaciones del lenguaje natural las llamamos **proposiciones simples**. Así, toda proposición simple tiene asociado un valor de verdad, que puede ser V, si es verdadera, o F si es falsa. En general, usaremos las letras p, q, r para simbolizar proposiciones.

Ejemplo 2.1.1 *Veamos algunos ejemplos:*
a) “La semana tiene siete días”, es una proposición verdadera.
b) $3 + 2 = 8$ *es una proposición falsa.*
c) $7 - 2$ *no es una proposición.*
d) $15 - 7 < 28$ *es una proposición verdadera.*
e) “La frase entre comillas es falsa” no es una proposición.

A partir de proposiciones simples podemos formar proposiciones más complejas introduciendo ciertos símbolos lógicos que llamaremos **conectivos**. A este tipo de proposiciones las llamaremos compuestas y su valor de verdad dependerá del valor de verdad de las proposiciones simples que la componen y de los conectivos involucrados.

Conectivos lógicos

Negación. Símbolo: $\neg$
Si p es una proposición, entonces $\neg p$, la negación de p es también una proposición y su valor de verdad es siempre el contrario del de p.

Ejemplo 2.1.2 *Algunos ejemplos:*
i) Si p *es a la proposición “Hoy llueve”,* $\neg p$ *corresponde a la proposición “Es falso que hoy llueve” o simplemente “Hoy no llueve”.*
ii) La negación de “3 es menor que 7”, $\neg(3 < 7)$*, se representa habitualmente por* $3 \nless 7$ *(que sabemos equivale a* $3 \geq 7$*).*
iii) Escribiremos $7 \neq 3$ *en vez de* $\neg(7 = 3)$.

Conjunción. Símbolo: $\wedge$
La expresión $p \wedge q$ se lee “p y q” es verdadera únicamente en el caso en que ambas, p y q son verdaderas.

Ejemplo 2.1.3 *Notemos que el símbolo $\wedge$ corresponde exactamente a la conjunción* **y** *del lenguaje cotidiano:*

i) La proposición "Está nublado y hace mucho frío" es verdadera únicamente si ambas proposiciones, p : "Está nublado" y q : "Hace mucho frío" son verdaderas.
ii) "6 es divisible por 3 y por 2". Aquí, p es la proposición "6 es divisible por 3", y q es "6 es divisible por 2", luego $p \wedge q$ es una proposición verdadera.
iii) "3 es menor que 0, pero mayor que 1". Escribimos $3 < 0 \wedge 3 > 1$ o también en forma abreviada, $1 < 3 < 0$, es claramente falsa.

Disyunción. Símbolo: $\vee$
La proposición $p \vee q$ se lee "p o q", pero en la práctica viene a significar y/o. Es decir, la proposición $p \vee q$ es verdadera si **al menos** una de las dos, p o q, es una proposición verdadera.

Ejemplo 2.1.4 *Notemos que la única posibilidad de que esta proposición compuesta sea falsa es que las dos proposiciones componentes lo sean:*
i) $3 < 7 \vee 7 < 3$ es una proposición verdadera.
ii) $1 \neq 2 \vee 1 \neq 3$ es verdadera.
iii) $3 \geq 7 \vee 3 \geq 10$ es falsa.

Implicación. Símbolo: $\Rightarrow$
La implicación o condicional es una de las más importantes construcciones en matemática. Quiere rescatar la idea intuitiva de que a partir de una afirmación verdadera, necesariamente se obtienen conclusiones verdaderas. Sin embargo, a menudo produce problemas pues algunas implicaciones verdaderas son muy poco intuitivas.

En símbolos, escribimos: $p \Rightarrow q$, que leemos, *Si p, entonces q*, o simplemente, *Si p, q*. También se utilizan otras expresiones típicas de la matemática, que no estamos acostumbrados a utilizar en el lenguaje natural. Las más comunes son *p implica q*, *Una condición necesaria para p es q*, *Una condición suficiente para q es p*.

Ejemplo 2.1.5 *Sean las siguientes proposiciones:*

p**:** *Llueve durante una hora en Temuco.*

q**:** *Las calles se inundan.*

3.1 *Las siguientes frases se expresan en la forma $p \Rightarrow q$:*

- **a)** *Si llueve durante una hora en Temuco, las calles se inundan.*
- **b)** *Basta (es suficiente) que llueva una hora en Temuco para que se inunden las calles.*
- **c)** *Las calles de Temuco se inundan siempre que llueve durante una hora.*

3.2 *Las siguientes frases se expresan en la forma $q \Rightarrow p$:*

a) *En Temuco, es necesario que llueva durante una hora para que se inunden las calles.*

b) *Si las calles de Temuco se inundan es porque llueve durante una hora.*

Esta proposición es **falsa** únicamente cuando el antecedente es verdadero y el consecuente, falso. Cuando un teorema se expresa en la forma $p \Rightarrow q$, decimos que p es la(s) hipótesis y q, la conclusión. Su tabla de verdad es la siguiente:

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Ejemplo 2.1.6 *Las siguientes proposiciones son verdaderas:*

a) $2 < 3 \Rightarrow 4 < 5$ *(antecedente y consecuente verdaderos).*

b) $2 > 3 \Rightarrow 4 < 5$ *(antecedente falso, no importa si el consecuente es verdadero o falso).*

c) $2 > 3 \Rightarrow 4 > 5$ *(antecedente falso).*

d) Si tú eres Napoleón, yo soy telépata. (Esta frase es falsa únicamente si tú eres Napoleón, pues te aseguro que no soy telépata).

Ejemplo 2.1.7 *La siguiente proposición es falsa, pues el antecedente es verdadero y el consecuente, falso:*

$$2 < 3 \Rightarrow 4 > 5$$

Doble implicación (bicondicional). Símbolo $\Leftrightarrow$
La proposición $p \Leftrightarrow q$ es verdadera solo en aquellos casos en que p y q tienen el mismo valor de verdad. Se lee p si y solo si q o bien p es condición necesaria y suficiente para q. La doble implicación podemos entenderla como una manera abreviada de escribir la expresión $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$.

Ejemplo 2.1.8 *Analicemos los siguientes ejemplos:*
i) $3 < 7 \Leftrightarrow 7 < 3$ *es falsa, pues* $3 < 7$ *es verdadera y* $7 < 3$*, falsa.*

ii) $1 \neq 2 \Leftrightarrow 1 \neq 3$ *es verdadera, pues ambas proposiciones lo son.*

iii) $7 < 3 \Leftrightarrow 3 \geq 10$ *es verdadera, pues ambas proposiciones son falsas.*

Podemos resumir los valores de verdad en la siguiente tabla.

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V

Las tablas de verdad nos permiten decidir el valor de verdad de una proposición compuesta a partir del valor de verdad de las proposiciones simples que la componen. Una tabla de verdad contiene todas las combinaciones posibles de valores de verdad de las proposiciones componentes.

Ejemplo 2.1.9 *Construya la tabla de verdad de la proposición:*

$$[(p \wedge \neg q) \vee r] \Leftrightarrow (q \Rightarrow r).$$

p	q	r	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$(p \wedge \neg q) \vee r$	$q \Rightarrow r$	$[(p \wedge \neg q) \vee r] \Leftrightarrow (q \Rightarrow r)$
V	V	V	F	F	V	V	V
V	V	F	F	F	F	F	V
V	F	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	V	V	V
F	V	V	F	F	V	V	V
F	V	F	F	F	F	F	V
F	F	V	V	F	V	V	V
F	F	F	V	F	F	V	F

Observación 2.1.10 *Intentaremos no abusar de los paréntesis. En una proposición compuesta sin paréntesis, se aplica primero el símbolo $\neg$, luego los símbolos $\Leftrightarrow$ y $\Rightarrow$, y finalmente los símbolos $\wedge$ y $\vee$. Por ejemplo $\neg p \wedge q \Rightarrow r$ significa $(\neg p) \wedge (q \Rightarrow r)$. En cambio $p \vee q \wedge r$ NO es proposición, pues no sabemos si corresponde a $(p \vee q) \wedge r$ o a $p \vee (q \wedge r)$ y ambas proposiciones tiene tablas de verdad diferentes.*

Teoremas de la lógica.

Construyamos la tabla de verdad de la proposición $\neg p \vee q$.

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

Podemos notar que la tabla de verdad es exactamente igual a la de la proposición $p \Rightarrow q$. Es decir, desde el punto de vista lógico estas dos proposiciones no se diferencian entre sí. Su diferencia es solo formal. Cuando esto ocurre, decimos que ambas proposiciones son **lógicamente equivalentes**, o simplemente **equivalentes**. Usamos la notación $p \equiv q$ para decir que p y q son proposiciones equivalentes. La palabra $equivalente$ se usa en matemática para expresar que dos objetos dados son prácticamente iguales.
Ahora bien, existen proposiciones que son siempre verdaderas no importando el valor de verdad de las proposiciones componentes. Por ejemplo, la proposición $p \Rightarrow p$ es una proposición siempre verdadera no importa si p es verdadera o falsa. A este tipo de proposiciones las llamamos **tautologías** o **teoremas lógicos**. Si p es una tautología escribiremos $p \equiv V$. Si $\neg p \equiv V$, es decir la proposición p es siempre falsa, independiente de las proposiciones componentes, diremos que p es una **contradicción** y escribiremos $p \equiv F$. A veces se usa la palabra **contingencia** para hablar de una proposición que no es tautología ni contradicción.

Ejemplo 2.1.11 *La proposición $p \vee \neg p$ es una tautología, pues sabemos que exactamente una de las dos proposiciones, p o $\neg p$ es necesariamente verdadera, y la disyunción es verdadera en ese caso. Justamente esta tautología recibe el nombre de Ley del tercero excluído, en el sentido que no hay una tercera alternativa.*

Ejemplo 2.1.12 *La más famosa -y más simple- de las contradicciones es $p \wedge \neg p$. Es claro que el resultado es siempre falso, independiente del valor de verdad de p.*

Los **teoremas lógicos** nos ayudarán a trabajar algebraicamente con las proposiciones, pues nos permitirán transformarlas, via equivalencia lógica, en proposiciones más simples. Aquí enunciamos los teoremas lógicos fundamentales.

Teorema 2.1.13 *Sean p, q, r proposiciones. Entonces:*

(a) Ley del tercero excluído: $\neg p \vee p \equiv V$.
Notemos que la negación de esta tautología (siempre verdadera) es la contradicción (siempre falsa) $\neg p \wedge p \equiv F$.

(b) Involución: $\neg\neg p \equiv p$

(c) Conmutatividad: $\left\{ \begin{array}{lcl} p \vee q & \equiv & q \vee p \\ p \wedge q & \equiv & q \wedge p \\ p \Leftrightarrow q & \equiv & q \Leftrightarrow p \end{array} \right.$

(d) Asociatividad: $\left\{ \begin{array}{lcl} p \vee (q \vee r) & \equiv & (p \vee q) \vee r \\ p \wedge (q \wedge r) & \equiv & (p \wedge q) \wedge r \\ p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r) & \equiv & (p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r \end{array} \right.$

(e) Distributividad: $\left\{ \begin{array}{lcl} p \vee (q \wedge r) & \equiv & (p \vee q) \wedge (p \vee r) \\ p \wedge (q \vee r) & \equiv & (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \end{array} \right.$

(f) Leyes de De Morgan: $\begin{cases} \neg(p \wedge q) & \equiv & \neg p \vee \neg q \\ \neg(p \vee q) & \equiv & \neg p \wedge \neg q \end{cases}$

(g) Idempotencia: $\begin{cases} p \vee p & \equiv & p \\ p \wedge p & \equiv & p \end{cases}$

(h) Absorción $\begin{cases} (p \vee q) \wedge p & \equiv & p \\ (p \wedge q) \vee p & \equiv & p \end{cases}$

(i) Leyes de identidad $\begin{cases} p \vee V & \equiv & V \\ p \vee F & \equiv & p \\ p \wedge V & \equiv & p \\ p \wedge F & \equiv & F \end{cases}$

(j) $\begin{array}{lcl} p \Rightarrow q & \equiv & \neg p \vee q \\ p \Leftrightarrow q & \equiv & (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \end{array}$

Todos los teoremas anteriores se verifican fácilmente usando tablas de verdad.

Ejemplo 2.1.14 *Usemos los teoremas lógicos para encontrar una proposición equivalente más simple que* $\neg(q \vee \neg r) \vee q$.

$$\begin{array}{rcll} \neg(q \vee \neg r) \vee q & \equiv & (\neg q \wedge \neg(\neg r)) \vee q & \text{(leyes de De Morgan)} \\ & \equiv & (\neg q \wedge r) \vee q & \text{(involución)} \\ & \equiv & (\neg q \vee q) \wedge (r \vee q) & \text{(distributividad)} \\ & \equiv & V \wedge (r \vee q) & \text{(ley del tercero excluído)} \\ & \equiv & r \vee q & \text{(leyes de identidad)} \end{array}$$

2.2. Nociones básicas de conjuntos

Intuitivamente, un conjunto es una colección arbitraria de objetos. Aunque se sabe que este concepto tan arbitrario es básicamente incorrecto, pues conduce a inconsistencias lógicas, no ahondaremos en el tema. En general, pensaremos en un conjunto lo bastante grande como para que contenga todos los conjuntos con que trabajaremos, al que llamamos **universo referencial** y representamos por la letra $\mathcal{U}$.
Usaremos letras mayúsculas, A, B, $C, \ldots$ para designar conjuntos. Los objetos de un conjunto se llaman **elementos** y usaremos letras minúsculas, a, b, $c, \ldots$ para denotarlos. Escribiremos $a \in A$ (a pertenece a A) para expresar que a es un elemento del conjunto A y $a \notin A$ para decir que a no pertenece al conjunto A (es decir, $a \notin A$ equivale a $\neg(a \in A)$).
Aceptamos que existe un conjunto que no tiene elementos, llamado **conjunto vacío** que representamos por $\emptyset$.
El símbolo $\{x : P(x)\}$ indicará el conjunto de todos los elementos x que satisfacen la propiedad P. Así, por ejemplo, el conjunto vacío se puede representar por ejemplo como:

$$\emptyset = \{x : x \neq x\}.$$

Como es sabido, un conjunto se puede expresar de diversas maneras:

Extensión: Enumerando todos los objetos. Por ejemplo, $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$.

Comprensión: Expresando una propiedad que cumplan exclusivamente los elementos del conjunto. En el ejemplo anterior, $A = \{x : x \text{ es un dividor de } 24\}$. Notemos que en esta escritura x no representa a la letra x, sino un elemento genérico del conjunto en cuestión.

Diagrama de Venn-Euler: Para visualizar gráficamente los conjuntos se utilizan los llamados Diagramas de Venn-Euler [1]. Según esto, los conjuntos se representan mediante círculos que se relacionan entre sí, contenidos en un rectángulo que corresponde al universo referencial.

Definición 2.2.1 *Dos conjuntos A y B son iguales si y solo si tienen exactamente los mismos elementos. Escribimos $A = B$.*

Ejemplo 2.2.2 *El conjunto $\{a, a, b, b, b, c\}$ es igual a $\{a, b, c\}$, pues, como dijimos lo que caracteriza a un conjunto es la pertenencia o no pertenencia de elementos y no cuántas veces aparecen listados.*

Ejemplo 2.2.3 *Análogamente, los conjuntos $A = \{a, e, i, o, u\}$ y $B = \{x : x \text{ es vocal}\}$ son iguales pues poseen exactamente los mismos elementos.*

Definición 2.2.4 *Dados dos conjuntos A y B, diremos que A es* **subconjunto** *de B, o que A está contenido en B si y solo si todo elemento del conjunto A es también un elemento del conjunto B. En este caso escribimos $A \subseteq B$.*

Proposición 2.2.5 *Sean A, B y C conjuntos arbitrarios. Entonces:*

1. $\emptyset \subseteq A$.
2. $A \subseteq A$.
3. $A = B$ *si y solo si* $A \subseteq B \ \wedge \ B \subseteq A$.
4. *Si* $A \subseteq B \ \wedge B \subseteq C$, *entonces* $A \subseteq C$.

Algunos conjuntos numéricos conocidos: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^*$. Como es sabido, por ejemplo, $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ y $\mathbb{Z}^+ \subseteq \mathbb{Z}$.

[1] John Venn, matemático y lógico británico (1834−1923); Leonhard Euler, matemático suizo (1707−1783)

Operaciones entre conjuntos.

Sea $\mathcal{U}$, el universo de referencia y sean A y B subconjuntos de $\mathcal{U}$.

Definición 2.2.6 Unión de conjuntos:

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}.$$

Esto significa que un elemento pertenece a la unión si al menos pertenece a uno de los conjuntos en cuestión. Gráficamente esto se representa en la Figura 2.1,

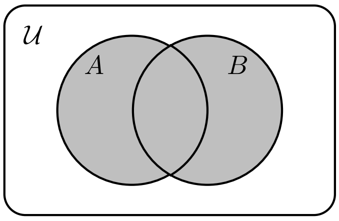


Figura 2.1: $A \cup B$.

Ejemplo 2.2.7 *Si* $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ *y* $B = \{2, 4, 8, 16, 32\}$, *entonces:*

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 32\}.$$

Definición 2.2.8 Intersección de conjuntos:

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}.$$

Esto significa que un elemento pertenece a la intersección si y solo si pertenece a ambos conjuntos en cuestión. Gráficamente la intersección es,

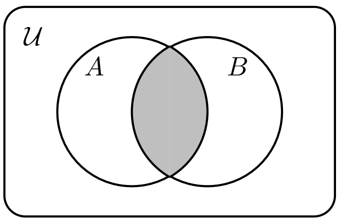


Figura 2.2: $A \cap B$.

Ejemplo 2.2.9 *Si* $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ *y* $B = \{2, 4, 8, 16, 32\}$, *entonces:*

$$A \cap B = \{2, 4\}.$$

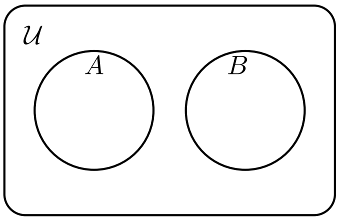


Figura 2.3: $A \cap B = \emptyset$

Definición 2.2.10 *Dos conjuntos A y B se dicen* **disjuntos** *si $A \cap B = \emptyset$, es decir, si no tienen elementos en común.*

Podemos representar gráficamente dos conjuntos disjuntos mediante el diagrama mostrado en la Figura 2.3

Ejemplo 2.2.11 *El conjunto de los números enteros pares es disjunto del conjunto de los números enteros impares, pues no tienen elementos en común.*

Ejemplo 2.2.12 *En algunas ocasiones deberemos formar* **conjuntos de conjuntos***, es decir, conjuntos cuyos elementos son a su vez conjuntos. A tales objetos los denominaremos* **familia de conjuntos***. Por ejemplo, si p es un número primo, sea*

$$A_p = \{x : x \text{ es potencia de } p\}.$$

La familia de conjuntos $\mathcal{A} = \{A_p : p \text{ es primo}\}$, satisface la propiedad de que sus elementos (los conjuntos A_p) son **disjuntos dos a dos***.*

Definición 2.2.13 Diferencia de conjuntos:

$$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}.$$

En otras palabras, el conjunto $A \setminus B$ contiene todos los elementos de A que no están en la intersección con B. Notemos que el conjunto $B \setminus A$ es en general, distinto de $A \setminus B$. Una representación de la diferencia, $A \setminus B$, es la siguiente:

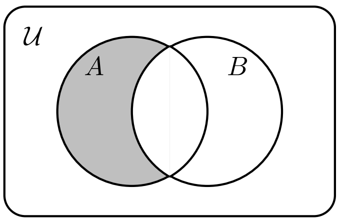


Figura 2.4: $A \setminus B$.

Ejemplo 2.2.14 *Consideremos los siguientes conjuntos de números naturales: Sea* $A = \{x : x \text{ es divisor de } 48\}$ *y* $B = \{x : x \text{ es potencia de } 2\}$. *Entonces,*

$$A \setminus B = \{x : x \text{ es divisor de 48 y no es potencia de } 2\},$$

es decir, $A \setminus B = \{1,\ 3,\ 6, 12,\ 24,\ 48\}$.

Definición 2.2.15 Complemento de un conjunto.

$$A^c = \mathcal{U} \setminus A = \{x : x \notin A\}$$

Gráficamente el complemento de un conjunto A *respecto a un universo* $\mathcal{U}$ *se representa en la figura siguiente,*

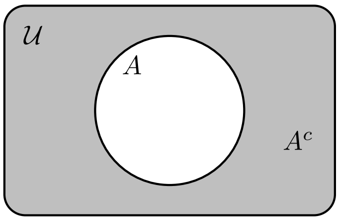


Figura 2.5: A^c.

Propiedades básicas de conjuntos

A continuación enunciamos las propiedades de conjuntos de uso más frecuente. El lector notará la semejanza con los Teoremas de la lógica.
Sean A, B y C subconjuntos de $\mathcal{U}$:

1. $\begin{cases} A \cup A^c &= \mathcal{U} \\ A \cap A^c &= \emptyset \end{cases}$

2. Involución $\{\ (A^c)^c = A$

3. Conmutatividad $\begin{cases} A \cup B &= B \cup A \\ A \cap B &= B \cap A \end{cases}$

4. Asociatividad $\begin{cases} (A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C) \\ (A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C) \end{cases}$

5. Distributividad $\begin{cases} A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{cases}$

6. Leyes de De Morgan $\begin{cases} (A \cup B)^c &= A^c \cap B^c \\ (A \cap B)^c &= A^c \cup B^c \end{cases}$

7. Idempotencia $\left\{\begin{array}{lcl} A \cup A & = & A \\ A \cap A & = & A \end{array}\right.$

8. Absorción $\left\{\begin{array}{lcl} (A \cup B) \cap A & = & A \\ (A \cap B) \cup A & = & A \end{array}\right.$

9. Identidad $\left\{\begin{array}{lcl} A \cup \mathcal{U} & = & \mathcal{U} \\ A \cup \emptyset & = & A \\ A \cap \mathcal{U} & = & A \\ A \cap \emptyset & = & \emptyset \end{array}\right.$

10. $A \cap B \subseteq A$; $A \subseteq A \cup B$.

11. $\emptyset^c = \mathcal{U}$.

12. $\mathcal{U}^c = \emptyset$.

13. $A \setminus B = A \cap B^c$.

14. $A \subseteq B \Rightarrow B^c \subseteq A^c$.

Observación 2.2.16 *La notación $a := b$ se usa en matemática para aclarar que a* **se define** *igual a b, para diferenciar del caso, como por ejemplo al resolver una ecuación, en que se* **determina** *que $a = b$. Usaremos esta notación para definir una nueva operación en el siguiente ejemplo.*

Ejemplo 2.2.17 *A partir de las operaciones básicas, es posible definir nuevas operaciones entre conjuntos. Por ejemplo, la diferencia simétrica de dos conjuntos A y B se define como $A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Demostremos que $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.*

Podemos verificar fácilmente esta propiedad usando diagramas:

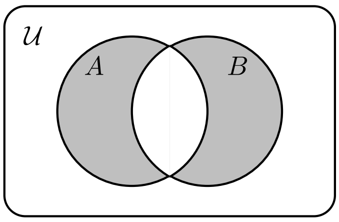


Figura 2.6: $A\Delta B$.

Ahora hacemos la demostración formal:

$$
\begin{array}{rcll}
A \triangle B & = & (A \setminus B) \cup (B \setminus A) & \text{por definición de } \triangle \\
 & = & (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) & \text{por proposición 13} \\
 & = & [(A \cap B^c) \cup B] \cap [(A \cap B^c) \cup A^c] & \text{por distributividad} \\
 & = & [(A \cup B) \cap (B^c \cup B)] \cap [(A \cup A^c) \cap (B^c \cup A^c)] & \text{por distributividad} \\
 & = & [(A \cup B) \cap \mathcal{U}] \cap [\mathcal{U} \cap (B^c \cup A^c)] & \text{por propiedad 9} \\
 & = & (A \cup B) \cap (B^c \cup A^c) & \text{por ley de identidad} \\
 & = & (A \cup B) \cap (B \cap A)^c & \text{por ley de De Morgan} \\
 & = & (A \cup B) \setminus (B \cap A) & \text{por propiedad 13}
\end{array}
$$

Cardinalidad de conjuntos finitos

Una manera simple de definir la **cardinalidad** de un conjunto es decir que corresponde al número de sus elementos distintos, la que denotamos por $|\cdot|$. Es fácil cuando hay un número finito de ellos. Con los conjuntos infinitos no es tan simple y volveremos al problema más adelante.

Proposición 2.2.18 *Sean A, B, C tres conjuntos finitos. Entonces,*

1. $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.
2. $|A \setminus B| = |A| - |A \cap B|$.
3. $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| + |A \cap B \cap C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C|$.

Ejemplo 2.2.19 *Se realiza una encuesta a 92 personas que practican disciplinas alternativas, obteniéndose los siguientes resultados: 53 practican yoga, 46 tai chi y 35 reiki. La misma encuesta también arrojó que 22 personas practican yoga y tai chi, 16 yoga y reiki y 14 tai chi y reiki ¿Cuántas personas practican las tres disciplinas? ¿Cuántos practican sólo una de ellas?*

Solución

Definamos los conjuntos,

$$
\begin{array}{rcl}
Y & = & \{\textit{Personas que practican yoga}\}, \\
T & = & \{\textit{Personas que practican tai chi}\}, \\
R & = & \{\textit{Personas que practican reiki}\}.
\end{array}
$$

De acuerdo al enunciado tenemos

$$|Y| = 53, \ |T| = 46, \ |R| = 35, \ |Y \cap T| = 22, \ |Y \cap R| = 16, \ |T \cap R| = 14.$$

Llamando $x = |V \cap F \cap N|$ y de acuerdo a la Proposición 2.2.18 tenemos,

$$92 = 53 + 46 + 35 + x - 22 - 16 - 14,$$

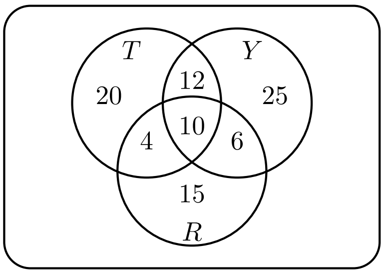


Figura 2.7: Diagrama del Problema.

lo que implica $x = 10$. Así, 10 personas realizan las tres disciplinas alternativas, 25 personas practican solamente yoga, 20 solo tai chi y 15 solo reiki.
En la Figura 2.7 se ilustra la situación mediante un diagrama de Venn-Euler.

Definición 2.2.20 *Sea A un conjunto. El conjunto formado por todos los subconjuntos posibles de A se llama* **conjunto potencia** *o* **conjunto de las partes** *de A. Lo denotamos por $\mathcal{P}(A)$. Formalmente,*

$$\mathcal{P}(A) = \{X : X \subseteq A\}.$$

Ejemplo 2.2.21 *Si $A = \{a, b, c\}$, entonces el conjunto potencia $\mathcal{P}(A)$ es:*

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, A\}.$$

Teorema 2.2.22 *Sea A un conjunto finito, entonces $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.*

La relación entre los conjuntos potencia y las operaciones entre conjuntos se resumen en el siguiente teorema:

Teorema 2.2.23

1. $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$ *si y solo si* $A = B$.
2. $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, *¡un conjunto con un elemento!*
3. $A \subseteq B \Leftrightarrow \mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(B)$.
4. $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$.
5. $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$.

2.3. Cuantificadores

Otro tipo de afirmaciones que nos interesan en matemática son aquellas frases que empiezan con "Todos" o "Existen". El valor de verdad de una proposición de este tipo depende del valor de verdad de muchas proposiciones involucradas. Para trabajar con este tipo de expresiones, definimos los cuantificadores, $\forall$ (para todo), $\exists$ (existe) y $\exists!$ (existe un único). Los cuantificadores siempre se refieren a un conjunto, el que llamamos **ámbito de un cuantificador**.

Definición 2.3.1 Proposiciones universales.
Son aquellas afirmaciones que comienzan con "todos" o "para todo". Por ejemplo:

- *"Todos los alumnos de la UFRO nacieron en Temuco."*
- *"Todo número real posee un inverso aditivo."*

Estamos de acuerdo en que la primera frase es falsa, porque, al ir chequeando los alumnos uno por uno encontramos alguno para el cual la frase "Este alumno nació en Temuco" es falsa. También es claro que la segunda proposición es verdadera.

En resumen, una proposición universal es verdadera si y solo si cada uno de los objetos a los cuales se alude verifica la afirmación.

Definición 2.3.2 Proposiciones existenciales.
Son, como su nombre lo indica, proposiciones que hablan acerca de la existencia de un objeto con alguna propiedad específica. Por ejemplo:

- *"Al menos un alumno de la UFRO nació en Temuco."*
- *"Existen números reales que no tienen inverso aditivo."*

En este caso, para determinar si las frases anteriores son o no verdaderas, debemos chequear uno por uno los objetos hasta encontrar alguno que posea la propiedad mencionada. En el primer caso, la tarea es fácil, pues hay un conjunto "pequeño" que chequear. ¿Es cierta la segunda frase? ¿Por qué? Seguramente el lector ha descubierto una interesante relación entre las proposiciones universales y las existenciales, que formalizaremos más adelante usando cuantificadores.

Definición 2.3.3 Proposiciones de existencia y unicidad. *Este tipo de proposiciones son muy comunes en matemática. Ejemplo típico del colegio es:*

Hay un único neutro aditivo para los números reales.

Para que una proposición que empieza con "Existe un único" sea verdadera, deben ocurrir dos cosas: Primero, que exista algún objeto con las características exigidas y segundo, que ningún otro objeto del conjunto cumpla tales requisitos. Formalmente,

$$\exists! x(P(x)) \equiv \exists x(P(x)) \wedge \forall x,\, y((P(x) \wedge P(y)) \Rightarrow x = y)$$

Funciones proposicionales o predicados.

Consideremos la expresión $x < 0$. Obviamente, ésta no es una proposición pues no podemos decidir si se trata de una afirmación verdadera o falsa. Nuestra respuesta obvia es "*depende del valor de* x". Es decir, si sustituimos la variable x por, por ejemplo, el número 5 obtenemos la proposición $5 < 0$, que es una proposición falsa. Este tipo de expresiones tales que al sustituir la o las variables por objetos se obtienen proposiciones, se llaman funciones proposicionales o, más simplemente, predicados.
En general, usamos predicados en las proposiciones con cuantificadores. Por ejemplo, el predicado "x es par" da origen, entre otras, a las siguientes proposiciones:

1. $\forall x \in \mathbb{N}\,(x \text{ es par})$. (*Todo número natural es par*).
2. $\exists x \in \mathbb{N}\,(x \text{ es par})$. (*Existe al menos un número natural que es par*).
3. $\exists! x \in \mathbb{N}\,(x \text{ es par})$. (*Existe un único número natural que es par*).

Por convención, usaremos las notaciones $P\,(x)$, $Q\,(x)$ para designar predicados con una variable y $\alpha\,(x, y)$, $\alpha\,(x, y, z)$, cuando haya dos, tres o más variables involucradas. Por ejemplo, $x < 0$ es un predicado con una variable y podemos denotarlo por $P\,(x)$, mientras que $x < y$ es un predicado con dos variables que podríamos denotar por $\beta\,(x, y)$.

Ejemplo 2.3.4 *Escribir en lenguaje matemático las siguientes proposiciones:*

a) *Todo número real es positivo.*
R: $\forall x \in \mathbb{R}\,(x > 0)$.

b) *Existen números reales que no tienen inverso aditivo.*
R: $\exists x \in \mathbb{R}\,\forall y \in \mathbb{R}\,(x + y \neq 0)$.

c) *Existe un único número natural cuyo cuadrado es cuatro.*
R: $\exists! x \in \mathbb{N}(x^2 = 4)$.

d) *No existe un número natural mayor que todos los demás.*
R: $\neg(\exists x \in \mathbb{N}\,\forall y \in \mathbb{N}\ (x > y))$.

Notemos que en una proposición con cuantificadores intervienen varios factores a la hora de decidir sobre su verdad o falsedad. Por ejemplo, debemos preocuparnos del ámbito del cuantificador, así como del lugar que ocupa cada uno de los cuantificadores involucrados.

Ejemplo 2.3.5 *La proposición* $\forall x \in \mathbb{N}(x > 0)$ *es verdadera y* $\forall x \in \mathbb{R}(x > 0)$ *es falsa y aquí lo único que varió fue el ámbito del cuantificador.*

Ejemplo 2.3.6 *La proposición* $\forall x \in \mathbb{N}(x \text{ es par } \vee x \text{ es impar})$ *es verdadera, en cambio la proposición* $\forall x \in \mathbb{N}(x \text{ es par}) \vee \forall x \in \mathbb{N}(x \text{ es impar})$ *es falsa.*

Esto significa que, en general, las proposiciones

$$\forall x \in A\,(P\,(x) \vee Q\,(x)) \text{ y } \forall x \in A\,(P\,(x)) \vee \forall x \in A\,(Q\,(x))$$

no son equivalentes.

Ejemplo 2.3.7 *La proposición* $\forall x \in \mathbb{N}\, \exists y \in \mathbb{N}(x < y)$ *es verdadera, mientras que la proposición* $\exists y \in \mathbb{N}\, \forall x \in \mathbb{N}\,(x < y)$ *es falsa.*

Aquí variamos el orden de los cuantificadores y podemos concluir que las proposiciones

$$\forall x \in A\ \exists y \in \mathrm{A}(\alpha\,(x,y)) \text{ y } \exists y \in A\, \forall x \in A(\alpha\,(x,y)),$$

en general van a tener valores de verdad diferentes.

Negación de una proposición con cuantificadores

En el lenguaje cotidiano, la negación de la frase "*Todos los jueves sube el precio de la bencina en Chile*" es "*No todos los jueves sube el precio de la bencina en Chile*" o equivalentemente "*Algunos jueves no sube el precio de la bencina en Chile*".
Notemos que pasamos de una proposición universal a una existencial. Análogamente, la negación de la frase "*Hay buenos programas en la televisión abierta*" es "*No hay buenos programas en la televisión abierta*" o equivalentemente "*Todos los programas de la televisión abierta son malos*". Por último la negación de la afirmación "*Hay un único culpable del incendio*", es decir, una expresión equivalente a "*No hay un único culpable del incendio*" es "*o bien no hay culpables, o bien hay más de un culpable*". En el lenguaje matemático hacemos lo mismo. Para negar una proposición que contiene cuantificadores, utilizaremos el siguiente teorema:

Teorema 2.3.8

$$\begin{aligned}
\neg\,(\forall x(P(x)) &\equiv \exists x\,(\neg P(x)) \\
\neg\,(\exists x(P(x)) &\equiv \forall x\,(\neg P(x)) \\
\neg\,(\exists! x(P(x)) &\equiv \neg\,(\exists x(P(x)) \vee \exists x \exists y\,(x \neq y \wedge P(x) \wedge P(y))
\end{aligned}$$

.

Ejemplo 2.3.9 *Negar la proposición* $\forall x \in \mathbb{R}(x > 0 \Rightarrow \exists y \in \mathbb{R}(y^2 = x))$ *y decidir cual de las dos es verdadera.*

Solución

$$\begin{aligned}
\neg \forall x \in \mathbb{R}(x > 0 \Rightarrow \exists y \in \mathbb{R}(y^2 = x)) &\equiv \exists x \in \mathbb{R} \neg(x > 0 \Rightarrow \exists y \in \mathbb{R}(y^2 = x)) \\
&\equiv \exists x \in \mathbb{R}\left(x > 0 \wedge \neg \exists y \in \mathbb{R}(y^2 = x)\right) \\
&\equiv \exists x \in \mathbb{R}\left(x > 0 \wedge \forall y \in \mathbb{R}(y^2 \neq x)\right)
\end{aligned}$$

.
En lenguaje natural, la primera proposición afirma que todo número real positivo es el cuadrado de un número real, en otras palabras, afirma la existencia de la raíz cuadrada de cualquier número real positivo, lo cual es verdadero.

2.4. Ejercicios Propuestos

1. Convierta los siguientes enunciados a lenguaje formal.
   a) Si Pedro va al cine o Juan al teatro, entonces llamaremos un taxi.
   b) Los precios son altos si y sólo sí los costos aumentan.
   c) Si la producción aumenta entonces bajarán los precios.
   d) Si aumenta la demanda esto implica que aumenta la oferta y viceversa.
   e) El triple de un numero es 24.
   f) El volumen de un cubo es igual es igual al cubo de sus aristas.
   g) El cuadrado de la diferencia de dos números enteros es igual al triple de la diferencia de sus cuadrados.
   h) La edad de Ignacia es el doble de la edad de Agustin.
   i) Hace 8 años la edad de Ignacia era $\frac{3}{2}$ de la edad que Agustin tendrá el próximo año.
2. Represente el enunciado siguiente usando conectores lógicos:
   a) Si no pago la luz, entonces me cortaran la corriente eléctrica.
   b) Y si pago la luz, entonces me quedaré sin dinero o pediré prestado.
   c) Y si me quedo sin dinero y pido prestado, entonces no podré pagar la deuda si y sólo si soy desorganizado.
3. Desarrolle las tablas de verdad de las siguientes expresiones lógicas y razone si son contradictorias, consistentes o tautológicas:
   a) $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$
   b) $[(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r)] \leftrightarrow (p \leftrightarrow r)$
   c) $[p \rightarrow (q \vee r)] \leftrightarrow [(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)]$
4. Simplifique las siguientes proposiciones usando álgebra lógica:
   a) $p \rightarrow [\neg q \rightarrow (p \vee q)]$
   b) $a \vee [(b \rightarrow \neg b) \wedge (a \rightarrow \neg a)]$

c) $(q \vee s) \wedge [(q \wedge p) \vee (q \wedge p \wedge r) \vee (q \vee p \vee \neg r) \wedge (q \vee r)]$

5. Demuestre las siguientes equivalencias utilizando las propiedades o teoremas de lógica.

   a) $p \to (q \to r) \equiv q \to (p \to r)$.

   b) $[(p \to q) \leftrightarrow p] \equiv (p \wedge q)$

6. Se define el "*o exclusivo*" como $p \veebar q \equiv (p \vee q) \wedge \overline{(p \wedge q)}$.

   a) Encuentre la tabla de verdad del operador $\veebar$.

   b) Demuestre las siguientes tautologías:

      (i) $[p \wedge (q \veebar r)] \equiv [(p \wedge q) \veebar (p \wedge r)]$.

      (ii) $\overline{(p \veebar q)} \equiv (p \Leftrightarrow q)$.

7. Sean los conjuntos:

$$A = \{n \in \mathbb{N};\ n \text{ múltiplo de } 6;\ 0 < n \leq 51\}$$

   y

$$B = \{m \in \mathbb{N};\ m \text{ múltiplo de } 4;\ 10 < m < 40\}.$$

   Encuentre $|\mathcal{P}(A)|$, $|\mathcal{P}(B)|$, $|\mathcal{P}(A \cup B)|$, $|\mathcal{P}(A \cap B)|$ y $|\mathcal{P}(B - A)|$.

8. Sean A y B subconjuntos de U. Demuestre que:

$$A \cap B^c = \emptyset \Leftrightarrow A \subset B.$$

9. Demuestre que,

   a) $[\{(A \setminus B)^c \cup B^c\} \setminus A] \cap (A^c \cup B) = A^c$.

   b) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$.

   c) $((A \cup (B \cap C)) \cup (B^c \cap C^c) \cup C)^c = (A \cup C)^c \cap B$.

   d) $A^c \setminus B^c = B \setminus A$.

   e) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$.

   f) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$.

10. Todos los 360 alumnos que toman el curso de Fundamentos de Matemática deciden practicar deporte. 160 juegan volleyball, 180 football, 220 natación, 70 juegan volleyball y football, 84 juegan football y practican natación, 64 juegan volleyball y practican natación ¿Cuántos practican los los tres deportes? ¿Cuántos practican sólo volleyball? ¿Cuántos sólo football? ¿Cuántos sólo natación?

11. Se realizó un estudio a 170 clientes de una compañía de servicios de telefonía, internet y televisión satelital tomados al azar. Dicho estudio reveló que 102 personas tienen contratados servicios de telefonía, 62 de internet y 89 de televisión satelital. El mismo estudio indicó que 32 personas cuentan con telefonía e internet, 44 tienen telefonía y televisión satelital y 15 personas tienen los tres servicios ¿Cuántas personas tienen contratados internet y televisión satelital? ¿Cuántas personas cuentan con un sólo servicio?

12. Encuentre el valor de verdad de las siguientes proposiciones y niéguelas. Justifique adecuadamente.

    a) $\exists x \in \mathbb{Z}; x$ múltiplo de $6 \Rightarrow x$ múltiplo de 3.

    b) $\exists\,!\, n \in \mathbb{N}; n$ tiene una raíz cuadrada exacta.

    c) $(\forall a \in \mathbb{N})\,(\forall b \in \mathbb{N})\,(\exists p \in \mathbb{Z})\,(\exists y \in \mathbb{Z})\,(ax + by = 1)$.

    d) $(\forall \beta > 0)\,(\exists m \in \mathbb{R})\,[(\forall x < \beta, m > x) \wedge (\forall x > \beta, m \leq x)]$.

13. Considere el conjunto $\Omega = \left\{-2, -\frac{3}{2}, -1, \frac{1}{2}, 3\right\}$. Estudie el valor de verdad de cada proposición justificando adecuadamente y luego niéguelas.

    a) $p:\ \exists\,!\, x \in \Omega;\ x^2 + 3x + 2 = 0$.

    b) $q:\ \forall\, x \in \Omega;\ x^2 \geq x$.

Capítulo 3

Conjuntos numéricos

3.1. Números naturales y enteros

Iniciamos nuestro estudio de los números con aquéllos que nos son más conocidos, el conjunto de los números naturales y el conjunto de los números enteros. Los primeros, son aquellos que nos sirven para contar. Hay una vieja discusión acerca de si el número 0 es o no un número natural. Es cierto que su aparición en la historia es muy posterior a la del resto de los números naturales (¿sabías que no existe el año 0?), pero actualmente los niños aprenden sobre el 0 junto con los demás números desde el principio. Los números enteros se construyen a partir de los naturales agregando un *reflejo* de cada número natural no nulo. Así, el reflejo del número 3 es -3 y el reflejo de 100 es -100. Ello nos permite, por ejemplo, hablar de metros de altura sobre el nivel del mar y metros de profundidad bajo el nivel del mar, o saldo con *números azules* o *números rojos* en el balance de una compañía. Revisaremos las propiedades básicas de estos dos conjuntos numéricos y nos centraremos en la formulación matemática de ellas y la forma en que demostramos.

Propiedades básicas

En esta sección nos centraremos en el conjunto $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ de los enteros positivos, a pesar de que todo lo que digamos puede extenderse naturalmente al conjunto de todos los enteros. Estudiaremos primero las propiedades de divisibilidad de los números enteros positivos y formularemos el Teorema Fundamental de la Aritmética.

Un principio o axioma es una verdad que se asume y acepta sin cuestionamiento. Los axiomas para la suma y la multiplicación de números enteros son de todos conocidos, así como los axiomas de orden, por lo que los enunciamos sin comentarios.

1. **Axiomas para la suma**. Existe una operación binaria en $\mathbb{Z}$, llamada suma que satisface para todo par de números enteros a y b:

(A.1) Clausura. $a + b \in \mathbb{Z}$.

(A.2) Conmutatividad. $a + b = b + a$.

(A.3) Asociatividad. $a + (b + c) = (a + b) + c$.

(A.4) Elemento neutro. $a + 0 = a$.

(A.5) Inverso aditivo. Todo número entero a posee un inverso aditivo $-a$ tal que $a + (-a) = 0$.

2. **Axiomas para la multiplicación**. Existe una operación binaria en $\mathbb{Z}$, llamada multiplicación que satisface para todo a, b, $c \in \mathbb{Z}$:

(M.1) Clausura. $ab \in \mathbb{Z}$.

(M.2) Conmutatividad. $ab = ba$.

(M.3) Asociatividad. $a(bc) = (ab)c$.

(M.4) Elemento identidad. $1a = a$.

(M.5) Distributividad. $a(b + c) = ab + ac$.

3. **Axiomas de orden**. Existe una relación binaria en $\mathbb{Z}$, $\leq$, que satisface para todo a, b, $c \in \mathbb{Z}$:

(O.1) Reflexividad. $a \leq a$.

(O.2) Antisimetría. $a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b$.

(O.3) Transitividad. $a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c$.

(O.4) Tricotomía. Dado cualquier par de números enteros a y b hay solo tres posibilidades: $a < b$ o $b < a$ o $a = b$.

(O.5) Compatibilidad con la suma. $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$.

(O.6) Compatibilidad con el producto. $a \leq b \wedge c > 0 \Rightarrow ac \leq bc$.

Todos los axiomas anteriores se resumen diciendo que el sistema $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1, - \rangle$ es un **dominio de integridad ordenado**. En los cursos de matemática nos preocuparemos de estudiar la estructura de conjuntos numéricos y otros objetos dotados de operaciones como los racionales, los polinomios y las matrices. Los números enteros tienen características especiales que los distinguen de las otras estructuras mencionadas. La más importante de ellas es el axioma que enunciamos a continuación:

Principio de Buen Orden. *Todo subconjunto no vacío de enteros positivos posee un menor elemento.*

Por supuesto, esta propiedad no es cierta en el conjunto de todos los números enteros, ni tampoco en el conjunto de los números racionales, ni reales. A pesar de su simpleza, el Principio de Buen Orden es una herramienta muy poderosa y permite demostrar teoremas sumamente complejos. Por ejemplo:

Proposición 3.1.1 *Todo número entero tiene un sucesor y un antecesor (predecesor) inmediato.*

Divisibilidad

Teorema 3.1.2 (Algoritmo de la división)
Para cualquier par de números $a, b \in \mathbb{Z}^+$ existen dos números enteros no negativos q y r, únicos, tales que $b = qa + r$, con $0 \leq r < a$. Al número q se le llama **cuociente** *y a r,* **resto** *de la división.*

Demostración. Recordemos que esta clase de teoremas se llaman de existencia y unicidad, pues una proposición que empieza con el cuantificador "*existe un único*" equivale a dos proposiciones, una que afirma que *existe alguno* y otra que afirma que no hay dos diferentes. Por lo tanto, la demostración consiste en probar ambas afirmaciones por separado.
Demostremos primero existencia usando el Principio de Buen Orden.
Formemos el conjunto $M = \{b, b-a, b-2a, b-3a, \ldots\}$. Si $0 \in M$, entonces existe un elemento $q \in \mathbb{Z}^+$ tal que $b - qa = 0$ y hemos terminado. Si $0 \notin M$, entonces $M \cap \mathbb{Z}^+$ es un conjunto no vacío (al menos $b \in M \cap \mathbb{Z}^+$) de enteros positivos y por lo tanto tiene un menor elemento, digamos $r = b - q \cdot a$. Así, hemos demostrado la existencia de los números q y r.

Para demostrar unicidad, lo habitual es suponer que hay otra descomposición, digamos $b = q'a + r'$, con $0 \leq r' < a$ y $q \neq q'$ y/o $r \neq r'$. Entonces, $(q - q')a + (r - r') = 0$, es decir, $(q - q')a = r' - r$. Ahora, como $-a < r' - r < a$, necesariamente $r = r'$ y $q = q'$.
■

En matemática, una **definición** consiste en introducir nuevos objetos con reglas muy precisas de comportamiento, de manera que no nos lleve a confusión. A partir del algoritmo de la división definiremos el concepto de divisibilidad y estudiaremos sus propiedades.

Definición 3.1.3 *Dados $a, b \in \mathbb{Z}^+$, diremos que a* **divide a** *b, en símbolos $a \mid b$ si existe un entero positivo c tal que $b = a \cdot c$. Si $a \mid b$, diremos que a es un* **divisor** *o un* **factor** *de b o que b es un* **múltiplo** *de a.*

La siguiente proposición reúne las principales propiedades de la divisibilidad.

Proposición 3.1.4 Propiedades de la divisibilidad.
Sean a, b, c, d y e números enteros positivos.

1. *Propiedad antisimétrica. Si $a \mid b$ y $b \mid a$, entonces $a = b$.*

2. *Si $a \mid b$ y $c \mid d$, entonces $ac \mid bd$.*

3. *Propiedad transitiva. Si $a \mid b$ y $b \mid c$, entonces $a \mid c$.*

4. *Si* $a \mid b$ *y* $a \mid d$*, entonces* $a \mid (bc + de)$.

Demostración. Todas estas propiedades se pueden probar por el método de **demostración directa**. El método, como su nombre lo indica, consiste en asumir verdaderas las premisas y usar propiedades y axiomas anteriores hasta obtener la conclusión. Recordemos que la implicación solo es falsa si el antecedente es verdadero y el consecuente, falso, por lo que la demostración directa consiste en asumir el antecedente verdadero y concluir que, en ese caso, el consecuente ha de ser verdadero, y con ello, la proposición completa es verdadera.

1. Suponemos verdaderas las premisas $a \mid b$ y $b \mid a$ y debemos concluir que $a = b$.

   Por definición, si $a \mid b$ debe existir un entero positivo c tal que $b = ac$ y si $b|a$, debe existir un entero positivo d tal que $a = bd$. Entonces, $a = bd = acd$, de donde $cd = 1$ (propiedad de cancelación para la multiplicación), luego $c = d = 1$ y $a = b$, como queríamos probar.

2. Ahora suponemos que $a \mid b$ y $c \mid d$. Esto significa que podemos escribir $b = ak$ y $d = cl$ para ciertos enteros positivos k y l. Multiplicando ambas expresiones, tenemos que $bd = akcl = acm$, donde $m = kl \in \mathbb{Z}^+$. Es decir, el número entero ac es un factor del producto bd, como queríamos probar.

3. Supongamos que $a \mid b$ y $b \mid c$. Entonces, existen $k, l \in \mathbb{Z}^+$ tales que $b = ak$ y $c = bl$. Entonces $c = akl = am$, de donde $a \mid c$.

4. Por último, si $a \mid b$ y $a \mid d$, entonces podemos escribir $b = ka$ y $d = la$ para ciertos k y l, números enteros. Entonces $bc + de = kac + lae = a(kc + le)$, es decir, a es un factor de $bc + de$.

■

Ejemplo 3.1.5 *Demuestre que 7 es divisor del número entero* $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ *para cualquier número natural* n.

Solución

Aplicaremos la propiedad 4. de la proposición anterior. Usando la factorización

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

tenemos que

$$9^n - 2^n = 7(9^{n-1} + 9^{n-2} \cdot 2 + \ldots + 9 \cdot 2^{n-2} + 2^{n-1})$$

Ahora bien,

$$3^{2n+1} + 2^{n+2} = 3 \cdot 9^n + 4 \cdot 2^n = 3(9^n - 2^n) + 7 \cdot 2^n$$

Como los dos sumandos de la derecha son múltiplos de 7, entonces la expresión completa es múltiplo de 7 como queríamos demostrar.

Definición 3.1.6 (Máximo común divisor)
Dados dos números enteros positivos, a, b, el mayor divisor común entre ambos se conoce como máximo común divisor y se escribe $\text{mcd}\{a,b\}$.

Es fácil notar que el conjunto de divisores de un número es finito, y además, 1 es divisor de cualquier entero, luego el máximo común divisor siempre existe. Un método práctico para encontrarlo está basado en el Algoritmo de la división y se conoce como **Algoritmo de Euclides**. Antes de mostrar el Algoritmo, demostremos un lema práctico.

Lema 3.1.7 *Si $b = qa + r$, entonces* $\text{mcd}\{a,b\} = \text{mcd}\{a,r\}$.

Demostración. Primero intentemos entender la afirmación. Muchas veces, es lo único que necesitamos para visualizar un método de demostración apropiado. En este caso, la afirmación es que el máximo común divisor entre dos enteros a y b es igual al máximo común divisor entre cualquiera de ellos y el resto que entrega el Algoritmo de la división.

Haremos una demostración directa. Como queremos demostrar una igualdad entre números, lo que hacemos es usar la propiedad antisimétrica que demostramos en la proposición anterior. Supongamos que $b = qa + r$ y sean $d = \text{mcd}\{a,b\}$ y $e = \text{mcd}\{a,r\}$. Probaremos que $d \leq e$ y $e \leq d$. Para la primera desigualdad, como $r = b - qa$ y $d|a$ y $d|b$, tenemos que $d|r$. Luego, $d \leq e$. Por otro lado, $e|a$ y $e|r$, luego $e|b$, de donde $e \leq d$. De aquí podemos concluir que $e = d$.

■

Veamos ahora cómo funciona el **Algoritmo de Euclides**.

Sean a, b enteros positivos y supongamos $a < b$. Entonces existen q_1 y r_1 tales que:

$$b = q_1 a + r_1,\ 0 \leq r_1 < a.$$

Si $r_1 = 0$, hemos terminado, pues entonces $a|b$ y $\text{mcd}\{a,b\} = a$. Si $r_1 \neq 0$, entonces, aplicando nuevamente el Algoritmo de la división, existen q_2 y r_2 tales que:

$$a = q_2 r_1 + r_2,\ 0 \leq r_2 < r_1.$$

Si $r_2 = 0$, detenemos el proceso. Si no, existen q_3 y r_3 tales que:

$$r_1 = q_3 r_2 + r_3,\ 0 \leq r_3 < r_2.$$

Es claro este proceso es finito pues hay solo un número finito de enteros entre 0 y r_1 y podemos continuar hasta obtener una sucesión $0 = r_{n+1} < r_n < \ldots < r_1$ tal que:

$$r_{i-1} = q_{i+1} r_i + r_{i+1}, \quad 0 \leq r_{i+1} < r_i.$$

El último paso es $r_{n-1} = q_{n+1} r_n$.

Luego $\text{mcd}\{r_{n-1}, r_n\} = r_n$ y, aplicando el lema anterior,

$$\text{mcd}\{a,b\} = \text{mcd}\{a,r_1\} = \text{mcd}\{r_1,r_2\} = \ldots \text{mcd}\{r_{n-1},r_n\} = r_n.$$

Ejemplo 3.1.8 *Calculemos* $\operatorname{mcd}\{644, 189\}$.

$$\begin{aligned} 644 &= 3 \cdot 189 + 77 \\ 189 &= 2 \cdot 77 + 35 \\ 77 &= 2 \cdot 35 + 7 \\ 35 &= 5 \cdot 7 + 0. \end{aligned}$$

Luego, $(644, 189) = 7$.

El conocer el máximo común divisor entre dos números enteros no es solamente útil para sumar fracciones.

Corolario 3.1.9 *Si* $d = \operatorname{mcd}\{a, b\}$*, entonces la ecuación* $d = ax+by$ *tiene siempre solución entera.*

Demostración. Como $d = r_n$ en el Algoritmo de Euclides, podemos expresar d en términos de r_{n-1} y r_{n-2}. Estos, a su vez, se pueden expresar en términos de los dos restos anteriores y podemos continuar este proceso hasta tener expresado r_n en función de a y b.

■

En nuestro ejemplo

$$7 = 77 - 2 \cdot 35 = 77 - 2(189 - 2 \cdot 77) = 5(644 - 3 \cdot 189) - 2 \cdot 189 = 5 \cdot 644 - 17 \cdot 189.$$

Ejemplo 3.1.10 *Antes de irse de la ciudad, el circo $Animales\ acróbatas$ realizó una función especial con entradas rebajadas. El valor para adultos fue \$3.600 y para niños, solo \$1.500. Si la recaudación final fue de \$1.800.000, los asistentes adultos fueron al menos 350 y había más niños que adultos, ¿es posible saber exactamente cuántos adultos y cuántos niños asistieron?*

Solución

Si llamamos x *al número de adultos e* y *al número de niños que asistió, podemos plantear la ecuación* $3600x + 1500y = 1800000$ *o, equivalentemente,* $12x + 5y = 6000$*. Como* $\operatorname{mcd}\{12, 5\} = 1$*, la ecuación* $12x + 5y = 1$ *tiene solución entera, por ejemplo,* $x = -2$ *e* $y = 5$.
Por supuesto que hay muchas otras soluciones. En general $x = -2 + 5a$ *e* $y = 5 - 12a$ *es solución de la ecuación cualquiera sea el valor de* a*. Por lo tanto,* $x = 6000(-2 + 5a)$ *e* $y = 6000(5 - 12a)$ *es solución de la ecuación* $12x + 5y = 6000$.
Ahora, de las condiciones del problema, tanto x *como* y *deben ser números positivos y* $x < y$*. Ello implica las desigualdades*

$$a > \frac{2}{5}, \qquad a < \frac{5}{12}, \qquad a < \frac{7}{17}.$$

Como $\frac{2}{5} < \frac{7}{17} < \frac{5}{12}$*, obtenemos* $\frac{2}{5} < a < \frac{7}{17}$*, de donde* $0 < x < \frac{6000}{17} < y < 300$*. Ya que* $\frac{6000}{17} \approx 352,9$ *y por hipótesis* $x \geq 350$*, escribiremos* y *en términos de* x *para calcular el número exacto de asistentes. Despejando* a *en función de* x*, tenemos* $a = \frac{1}{5}\left(\frac{x}{6000} + 2\right)$ *y reemplazando,* $y = 6000\left(5 - \frac{12}{5}\left(\frac{x}{6000} + 2\right)\right) = 1200 - \frac{12}{5}x$*. En particular, necesariamente* $5|x$ *y por lo tanto el número exacto de adultos asistentes fue 350, de donde deducimos que hubo 360 niños.*

■

Revisemos ahora algunas de las principales propiedades del Máximo Común Divisor:

Proposición 3.1.11 *Sean* a *y* b *números enteros positivos. Entonces:*

1. *Si* k *es un divisor común de* a *y* b*, entonces* $\operatorname{mcd}\left\{\frac{a}{k}, \frac{b}{k}\right\} = \frac{\operatorname{mcd}\{a,b\}}{k}$.

2. *Si* n *es cualquier entero,* $\operatorname{mcd}\{n \cdot a, n \cdot b\} = n \cdot \operatorname{mcd}\{a, b\}$.

3. *Si* $\operatorname{mcd}\{a, b\} = d$*, entonces* $\operatorname{mcd}\left\{\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right\} = 1$.

Demostración.

1. Demostración directa. Por hipótesis, existen dos enteros positivos m y l tales que $a = mk$ y $b = lk$. Además, por el corolario anterior, sabemos que existen dos enteros r y s tales que:
$$ar + bs = \operatorname{mcd}\{a, b\} = d.$$
Por la propiedad 4. de la Proposición3.1.4, necesariamente $k \mid d$. Así, existe un entero positivo c tal que $d = kc$. Ahora, como d divide tanto a a como a b, tenemos que c divide tanto a m como a l.

   Nos falta probar que $c = \operatorname{mcd}\{m, l\}$. Si c' es un divisor común de m y l, entonces existen enteros m' y l' tales que $m = c'm'$ y $l = c'l'$ y multiplicando ambas igualdades por k obtenemos $a = c'm'k$ y $b = c'l'k$. Luego kc' es un divisor común de a y b por lo tanto $kc' \mid d$, es decir $c \mid c'$.

2. Ahora podemos usar la propiedad anterior, pues n es un divisor común de $n \cdot a$ y $n \cdot b$. Luego, $\operatorname{mcd}\left\{\frac{n \cdot a}{n}, \frac{n \cdot b}{n}\right\} = \frac{\operatorname{mcd}\{n \cdot a, n \cdot b\}}{n}$, que equivale a decir,
$$n \cdot \operatorname{mcd}\{a, b\} = \operatorname{mcd}\{n \cdot a, n \cdot b\}.$$

3. Nuevamente un caso particular de (1), con $m = d$. $\operatorname{mcd}\left\{\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right\} = \frac{\operatorname{mcd}\{a,b\}}{d} = 1$.

■

Primos y primos relativos

Definición 3.1.12 *Dos números enteros positivos a y b se dicen* **primos relativos** *si* $\text{mcd}\{a, b\} = 1$.

El siguiente teorema nos da un método para determinar si dos enteros arbitrarios son primos relativos.

Teorema 3.1.13 *a y b son primos relativos si y solo si existen dos números enteros x e y tales que $1 = ax + by$.*

Demostración. Este teorema consta en realidad de dos afirmaciones que debemos demostrar por separado:

($\Rightarrow$) Si a y b son primos relativos entonces existen dos números enteros x e y tales que $1 = ax + by$.
Esto es consecuencia directa de la definición de primos relativos y el Corolario 3.1.9.

($\Leftarrow$) Si existen dos números enteros x e y tales que $1 = ax + by$, entonces a y b son primos relativos.
En este caso conviene usar un método de demostración indirecta llamado **por contrarecíproca**, el cual consiste en usar la formulación equivalente a $p \Rightarrow q$, $\neg q \Rightarrow \neg p$. Es decir, suponemos que a y b no son primos relativos y demostramos que la ecuación $1 = ax + by$ no tiene solución entera.
Supongamos que $\text{mcd}\{a, b\} = d > 1$. Entonces, por propiedad (4) de la Proposición 3.1.4, d divide a cualquier combinación lineal $ax + by$, luego no existe solución entera para $ax + by = 1$, pues $d \not| 1$.

■

Ejemplo 3.1.14 *Para resolver en $\mathbb{Z}$ la ecuación $23x + 9y = 7$, notemos que:*

$$\begin{aligned} 23 &= 2 \cdot 9 + 5 \\ 9 &= 5 + 4 \\ 5 &= 4 + 1. \end{aligned}$$

Luego, $1 = 2 \cdot 23 - 5 \cdot 9$ y multiplicando esta última igualdad por 7, obtenemos $x = 14$ e $y = -35$. Como vimos anteriormente, de aquí obtenemos en realidad las infinitas soluciones, $x = 14 + 9a,\ y = -35 - 23a$ para cualquier $a \in \mathbb{Z}$.

Enunciemos algunas de las principales propiedades de los primos relativos.

Proposición 3.1.15 *Sean a, b dos números primos relativos y sean c, d números enteros positivos.*

1. *Si* $c \mid a$ *y* $d \mid b$*, entonces* $\operatorname{mcd}\{c, d\} = 1$.

2. *Si* $a \mid bc$*, entonces* $a \mid c$.

3. *Si* $a \mid c$ *y* $b \mid c$*, entonces* $ab \mid c$.

4. *Si* $\operatorname{mcd}\{a, c\} = 1$*, entonces* $\operatorname{mcd}\{a, bc\} = 1$.

Demostración. Para demostrar cada una de estas afirmaciones usamos demostración directa aplicando el teorema anterior, es decir, como $\operatorname{mcd}\{a, b\} = 1$, existen enteros x e y tales que:

$$ax + by = 1 \qquad (3.1)$$

1. Si $c \mid a$ y $d \mid b$, entonces existen dos enteros positivos k, m tales que $a = ck$ y $b = dm$. Pero entonces, reemplazando en la ecuación (3.1), $ckx + dmy = 1$ y por el teorema anterior, $\operatorname{mcd}\{c, d\} = 1$.

2. Multiplicando por c la ecuación (3.1) obtenemos $acx + bcy = c$ y como a divide a cada uno de los términos acx y bcy, entonces usando la propiedad 4. de la divisibilidad, obtenemos que $a \mid c$.

3. Nuevamente multiplicamos por c la ecuación (3.1). Ahora, como $a \mid c$ y $b \mid c$, existen enteros k y m tales que $c = ak = bm$. Reemplazando, resulta $abmx + baky = c$, es decir $ab \mid c$.

4. Ahora tenemos además, que existen enteros u y v tales que $au + cv = 1$. Es decir $(ax + by)(au + cv) = 1$, o mejor, $a(x(au + cv) + byu) + bcyv = 1$, y por el teorema anterior, $\operatorname{mcd}\{a, bc\} = 1$.

■

Definición 3.1.16 (Número primo)
Un entero positivo $p \neq 1$ *se dice que es un* **primo** *si sus únicos divisores son* 1 *y* p*. Un número entero que no es primo se llama compuesto. Un entero negativo es un primo si su inverso aditivo lo es.*

El método más elemental para encontrar todos los números primos menores que un cierto n dado, es conocido como **Criba de Eratóstenes** y consiste en escribir los números enteros positivos en orden creciente hasta n y luego ir eliminando sucesivamente los múltiplos de 2, 3, etc., hasta eliminar todos los números compuestos. Por ejemplo, si $n = 120$:

	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\cancel{4}$	$\boxed{5}$	$\cancel{6}$	$\boxed{7}$	$\cancel{8}$	$\cancel{9}$	$\cancel{10}$
$\boxed{11}$	$\cancel{12}$	$\boxed{13}$	$\cancel{14}$	$\cancel{15}$	$\cancel{16}$	$\boxed{17}$	$\cancel{18}$	$\boxed{19}$	$\cancel{20}$
$\cancel{21}$	$\cancel{22}$	$\boxed{23}$	$\cancel{24}$	$\cancel{25}$	$\cancel{26}$	$\cancel{27}$	$\cancel{28}$	$\boxed{29}$	$\cancel{30}$
$\boxed{31}$	$\cancel{32}$	$\cancel{33}$	$\cancel{34}$	$\cancel{35}$	$\cancel{36}$	$\boxed{37}$	$\cancel{38}$	$\cancel{39}$	$\cancel{40}$
$\boxed{41}$	$\cancel{42}$	$\boxed{43}$	$\cancel{44}$	$\cancel{45}$	$\cancel{46}$	$\boxed{47}$	$\cancel{48}$	$\cancel{49}$	$\cancel{50}$
$\cancel{51}$	$\cancel{52}$	$\boxed{53}$	$\cancel{54}$	$\cancel{55}$	$\cancel{56}$	$\cancel{57}$	$\cancel{58}$	$\boxed{59}$	$\cancel{60}$
$\boxed{61}$	$\cancel{62}$	$\cancel{63}$	$\cancel{64}$	$\cancel{65}$	$\cancel{66}$	$\boxed{67}$	$\cancel{68}$	$\cancel{69}$	$\cancel{70}$
$\boxed{71}$	$\cancel{72}$	$\boxed{73}$	$\cancel{74}$	$\cancel{75}$	$\cancel{76}$	$\cancel{77}$	$\cancel{78}$	$\boxed{79}$	$\cancel{80}$
$\cancel{81}$	$\cancel{82}$	$\boxed{83}$	$\cancel{84}$	$\cancel{85}$	$\cancel{86}$	$\cancel{87}$	$\cancel{88}$	$\boxed{89}$	$\cancel{90}$
$\cancel{91}$	$\cancel{92}$	$\cancel{93}$	$\cancel{94}$	$\cancel{95}$	$\cancel{96}$	$\boxed{97}$	$\cancel{98}$	$\cancel{99}$	$\cancel{100}$
$\boxed{101}$	$\cancel{102}$	$\boxed{103}$	$\cancel{104}$	$\cancel{105}$	$\cancel{106}$	$\boxed{107}$	$\cancel{108}$	$\boxed{109}$	$\cancel{110}$
$\cancel{111}$	$\cancel{112}$	$\boxed{113}$	$\cancel{114}$	$\cancel{115}$	$\cancel{116}$	$\cancel{117}$	$\cancel{118}$	$\cancel{119}$	$\cancel{120}$

Podemos ver en la tabla que la aparición de primos se va espaciando y sería razonable conjeturar que tal vez éstos se acaban en algún momento. La primera demostración de la infinitud de los primos aparece en uno de los libros de *Los Elementos* de Euclides, 300 años antes de Cristo. Demostraremos primero algunas propiedades respecto a los números primos.

Proposición 3.1.17 *Si un número primo p divide al producto de dos números enteros, entonces necesariamente p divide al menos a uno de los factores.*

Demostración. Sea p un número primo y sean a, $b \in \mathbb{Z}^+$. Podemos expresar esta proposición en símbolos:

$$p \mid (ab) \Rightarrow p \mid a \ \vee \ p \mid b.$$

Usaremos método de demostración directa, pero aplicaremos una técnica especial que conocemos como **análisis de casos**. Como su nombre lo indica, el método consiste en analizar por separado distintos casos hasta cubrir todos los posibles. Supongamos entonces que $p|ab$ y analicemos por separado las dos posibilidades: o bien $p|a$ o bien $p \not| a$.

- Si $p \mid a$, estamos listos, pues en tal caso la afirmación $p|a \vee p|b$ es cierta.
- Si $p \nmid a$, entonces $\operatorname{mcd}\{p, a\} = 1$, luego, por la propiedad (2) de los primos relativos, obtenemos que $p \mid b$, como queríamos probar.

■

Teorema 3.1.18 *Todo número compuesto tiene un factor primo.*

Demostración. Para demostrar el teorema usaremos el Principio de Buen Orden, es decir, construiremos un conjunto apropiado de números naturales que será no vacío y por tanto tendrá un menor elemento.
Sea n un número compuesto. Consideremos el conjunto:

$$D := \{d \in \mathbb{Z}^+ : d > 1 \wedge d|n\}.$$

Por hipótesis, este conjunto es no vacío y por tanto posee un menor elemento, digamos a. Afirmamos que necesariamente a es primo. Si no, existe c tal que $1 < c < a$ y $c|a$, pero entonces, por transitividad, $c|n$ y $c \in D$, contradicción pues a era el menor elemento de D.

■

Teorema 3.1.19 (Teorema Fundamental de la Aritmética)
Todo número entero positivo admite una factorización prima. Tal factorización es única, excepto por el orden en que aparecen los factores primos.

Demostración. Nuevamente estamos en presencia de un teorema de existencia y unicidad. Demostremos existencia. Sea n un entero positivo. Si n es primo, hemos terminado; si no, por el teorema anterior, n tiene un factor primo, digamos $n = p_1 n_1$ con p_1 número primo. Podemos elegir p_1 como el menor divisor de n distinto de 1. Si n_1 es primo, hemos terminado; si no, repetimos el proceso y obtenemos un primo p_2 tal que $p_1 \leq p_2$, $n = p_1 p_2 n_2$ y $n_2 < n_1 < n$. Como el número de enteros positivos menores que n es finito, este proceso termina en algún momento y tenemos que $n = p_1 p_2 \ldots p_k$, con $p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_k$ primos. Con ello demostramos la existencia de la factorización prima de cualquier entero positivo. Ahora demostremos la unicidad.

Sea $n = p_1 p_2 \ldots p_k = q_1 q_2 \ldots q_m$, con $p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_k$ y $q_1 \leq q_2 \leq \ldots \leq q_m$ primos y supongamos $k \leq m$. Como $p_1 | p_1 p_2 \cdots p_k$, tenemos que $p_1 | q_1 q_2 \ldots q_m$, luego $p_1 = q_1$. Por igual razonamiento obtenemos que $p_2 = q_2, \ldots, p_k = q_k$ de donde $1 = q_{k+1} \ldots q_m$, no puede ser. Por lo tanto, $k = m$ y la factorización de n es única.

■

Teorema 3.1.20 *El conjunto de números primos es infinito.*

Demostración. Haremos una demostración por contradicción.$(\neg p \Rightarrow (r \wedge \neg r))$.
Supongamos que el conjunto fuese finito, digamos $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$. Entonces, el número $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots p_n + 1$ no pertenece al conjunto P, pues es mayor que cualquier elemento de P y por tanto, sería un número compuesto. Ello significa que tendría un factor primo, pero ningún elemento de P divide a n. Es decir, el número n es primo y no es primo, una contradicción. La contradicción surgió de nuestra suposición de que el número de primos era finito y, por tanto, debe ser infinito.

■

Reglas de divisibilidad

Aplicaremos los teoremas anteriores para formular algunas reglas de divisibilidad que nos serán útiles más adelante. Demostramos las dos primeras y dejamos las siguientes como ejercicios al lector.

1. Un número entero a es par si y solo si a^2 es par.
   Demostración.

$\Rightarrow$ Si a es par, entonces $a = 2k$ para algún entero k. Entonces $a^2 = 4k^2 = 2m$, donde $m = 2k^2$ es un entero. Luego, a^2 es par.

$\Leftarrow$ Ahora haremos una demostración por contrarecíproca. Es decir, debemos probar que si a es impar (no es par), entonces a^2 es impar.
Ahora, si a es impar, entonces $a = 2k - 1$ para algún entero k, de donde $a^2 = (2k - 1)^2 = 4k^2 - 4k + 1 = 2(2k^2 - 2k) + 1$ es un número impar.

■

2. Un número entero es divisible por 3 si y solo si la suma de sus cifras es divisible por 3.

   - Notemos que la expresión $10^n a_n + 10^{n-1}a_{n-1} + \cdots + 10a_1 + a_0$, donde los coeficientes a_n, a_{n-1}, $\ldots$, a_1, a_0 son números entre 0 y 9, representa justamente al número $a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0$. Así, por ejemplo, el número 4503 se representa como la suma $10^3 \cdot 4 + 10^2 \cdot 5 + 10 \cdot 0 + 3$.
   - Recordemos también la factorización $10^k - 1 = (10 - 1)(10^{k-1} + \cdots + 10 + 1)$. En particular, $10^k - 1$ es un número divisible por 9.
   - Sea a un número entero cuya representación como suma de potencias de 10 es $10^n a_n + 10^{n-1}a_{n-1} + \cdots + 10a_1 + a_0$. Entonces,

$$\begin{aligned} a &= 10^n a_n + 10^{n-1}a_{n-1} + \cdots + 10a_1 + a_0 \\ &= (10^n - 1 + 1)a_n + \cdots + (10 - 1 + 1)a_1 + a_0 \\ &= (10^n - 1)a_n + \cdots + (10 - 1)a_1 + a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n \\ &= 9k + a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n. \end{aligned}$$

   - Por la propiedad (4) de la Proposición 3.1.4, el número a es divisible por 3 solo si la suma $a_n + \cdots + a_1 + a_0$, es decir, la suma de sus cifras, es divisible por 3.

■

3. Un número entero es divisible por 4 si y solo si la suma de sus dos últimas cifras es divisible por 4.
4. Un número entero es divisible por 5 si y solo si la cifra de las unidades es 0 o 5.
5. Un número entero es divisible por 6 si y solo si es divisible por 2 y por 3.

Principio de inducción matemática

Terminaremos esta sección estudiando una herramienta fundamental en matemática. El Principio de Buen Orden es equivalente al Principio de Inducción Matemática, que constituye uno de los principales métodos de demostración para enteros positivos. Ambos principios son equivalentes en el sentido que podemos elegir indistintamente uno de los dos como axioma y demostrar el otro como teorema.

Teorema 3.1.21 (Primer principio de inducción matemática)
Sea $P(x)$ una función proposicional que satisface:
(i) $P(1)$ es verdadera.
(ii) Si suponemos que $P(k)$ es verdadera, ello implica que $P(k+1)$ también es verdadera; entonces la proposición $\forall x \in \mathbb{Z}^+(P(x))$ es verdadera.

Muchas afirmaciones acerca de números enteros positivos se demuestran por el **Método de Inducción Matemática**, basado en el teorema anterior. Este método funciona de la siguiente manera:

Ejemplo 3.1.22 *Todo número entero positivo de la forma $2^{2n}-1$ es múltiplo de 3.*

Solución

En primer lugar, verifiquemos que la afirmación es cierta para $n=1$. En efecto, $2^{2\cdot 1}-1=3$. El segundo paso es algo más complejo. Debemos demostrar que si suponemos *que la afirmación es cierta para un cierto k, entonces la afirmación también es cierta para el entero siguiente $k+1$.*

Supongamos entonces que $2^{2k}-1=3a$, para algún entero positivo a y analicemos qué ocurre con la expresión cuando reemplazamos k por $k+1$.

$$2^{2(k+1)}-1=2^{2k}\cdot 2^2-1=4\cdot 2^{2k}-1=3\cdot 2^{2k}+2^{2k}-1=3\cdot 2^{2k}+3a=3(2^{2k}+a)$$

y entonces la proposición es verdadera para $k+1$.

Luego, se cumplen las hipótesis del Principio de Inducción y por lo tanto, la propiedad "$2^{2n}-1$ es múltiplo de 3" es cierta para todo número entero positivo n.

■

Ejemplo 3.1.23 *El lector puede usar la técnica anterior para demostrar el ejemplo 3.1.5 por inducción.*

Observación 3.1.24 *El principio de inducción matemática tiene una formulación equivalente, aunque aparentemente más compleja, la cual es necesaria para demostrar algunos teoremas posteriores. La dejamos enunciada sin mayores comentarios.*

Teorema 3.1.25 (Segundo principio de inducción matemática)
Sea $P(x)$ una función proposicional que satisface:
(i) $P(1)$ es verdadera.
(ii) Si suponemos que $P(i)$ es verdadera para todo $i<k$, ello implica que $P(k)$ también es verdadera, entonces la proposición $\forall x \in \mathbb{Z}^+(P(x))$ es verdadera.

Definiciones recursivas

El Principio de inducción matemática nos permite mejorar la forma de realizar algunas definiciones, llamadas **recursivas**. Significa que no definimos directamente, sino que damos una regla de cómo definir en el paso $k+1$ cuando ya se ha definido en el paso anterior. Veamos algunos ejemplos:

- **Potencia.** Inicialmente definimos potencias usando puntos suspensivos:

  $$a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a.$$

  La definición recursiva de la potencia n-ésima para cualquier entero positivo n es:

  $$\begin{aligned} a^1 &:= a \\ a^{k+1} &:= a^k \cdot a. \end{aligned}$$

  Así, $a^2 = a \cdot a$, $a^3 = a^2 \cdot a = a \cdot a \cdot a$, y así sucesivamente, la definición corresponde exactamente a lo que conocíamos como n-ésima potencia.

- **Factorial**

  $$\begin{aligned} 1! &:= 1 \\ (n+1)! &:= n! \cdot (n+1). \end{aligned}$$

  Por ejemplo, $2! = 1$, $3! = 2 \cdot 3$, $4! = 2 \cdot 3 \cdot 4$.
  El factorial está definido solo para números positivos. Se agrega, por definición, $0! = 1$.

Sumatoria

Definición 3.1.26 (Sucesión)
Una sucesión es una función cuyo dominio es el conjunto de números enteros positivos. La entendemos como una enumeración de elementos. Habitualmente, en vez de decir que $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$ definida por $f(n) = a_n$ es una sucesión, decimos que $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ es una **sucesión real**.

Ejemplo 3.1.27 *La sucesión $\{2n-1\}$ representa una enumeración de los números impares, pues $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5, \ldots$.*

Ejemplo 3.1.28 *La sucesión $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ corresponde a la enumeración $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \ldots$.*

Muchas veces estamos interesados en conocer la suma de los n primeros términos de una sucesión, para cualquier valor de n. Por ejemplo, ¿cómo calcularías la suma de los 100 primeros números naturales? La tradición cuenta que justamente éste fue el problema que propuso el profesor a un curso de niños de 9 años en 1786. Seguramente el profesor pensó que disponía de un par de horas libres. Sin embargo, a los pocos minutos un niño llegó con la respuesta: 5050. El niño se llamaba Carl Friedrich Gauss y el siguiente fue su argumento:

$$
\begin{array}{rrrrrrr}
 & 1 & + & 2 & + & \ldots & + & 100 \\
+ & 100 & + & 99 & + & \ldots & + & 1 \\
\hline
 & 101 & + & 101 & + & \ldots & + & 101
\end{array}
$$

Entonces, si S_{100} representa la suma de los primeros 100 números naturales, tenemos que $2S_{100} = 100 \cdot 101$, de donde $S_{100} = 50 \cdot 101 = 5050$.

Notemos que el argumento de Gauss es fácilmente replicable a la suma de los primeros n números naturales, cualquiera sea el número n.

Introducimos ahora una escritura *ad hoc* para representar expresiones de la forma,

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n,$$

mediante el uso del símbolo $\sum$ (letra griega sigma). Con esto, la forma abreviada de la suma anterior es,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i,$$

la que se lee "*sumatoria de a_i, desde $i = 1$ hasta n*" o "*sumatoria desde $i = 1$ hasta n de a_i*".
Formalmente, si $\{a_i\}$ es una sucesión, la suma de los n primeros términos de la sucesión sumatoria se define recursivamente de la manera siguiente:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{1} a_i &= a_1 \\
\sum_{i=1}^{n+1} a_i &= \sum_{i=1}^{n} a_i + a_{n+1}.
\end{aligned}
$$

Es importante tener claro que $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, es decir, las variables i, j, k son mudas, esto significa que se pueden reemplazar por cualquier otra letra excepto n, no alterándose el valor de la suma.
En la siguiente proposición damos las principales propiedades que posee la notación sumatoria.

Proposición 3.1.29 *Sean $\{a_i\}$ y $\{b_i\}$ sucesiones de números reales, $\lambda \in \mathbb{R}$, $n, k \in \mathbb{N}$ y $0 \leq k \leq n$. Entonces, tenemos las siguientes propiedades,*

1. $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda a_i = \lambda\sum\limits_{i=1}^{n}a_i.$

2. $\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum\limits_{i=1}^{n}a_i + \sum\limits_{i=1}^{n}b_i.$

3. $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i = \sum\limits_{i=1}^{k}a_i + \sum\limits_{i=k+1}^{n}a_i.$

4. $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i = \sum\limits_{i=k+1}^{n+k}a_{i-k}.$

5. $\sum\limits_{i=k}^{n}\lambda = (n-k+1)\lambda.$

6. $\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1}) = a_n - a_0.$

Demostración. Las demostraciones de estas propiedades se hacen mediante inducción sobre el número de términos de la sumatoria. Probaremos 2. y 6. quedando las restantes como ejercicios al lector.
Para la propiedad 2. tenemos,

- Verificamos primero la afirmación para $n = 1$, es decir,

$$\sum_{i=1}^{1}(a_i + b_i) = a_1 + b_1 = \sum_{i=1}^{1}a_i + \sum_{i=1}^{1}b_i.$$

- Suponemos válida la afirmación para n, es decir, tenemos la hipótesis de inducción $\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum\limits_{i=1}^{n}a_i + \sum\limits_{i=1}^{n}b_i$. Debemos mostrar que la propiedad es válida para $n+1$, esto significa demostrar que $\sum\limits_{i=1}^{n+1}(a_i + b_i) = \sum\limits_{i=1}^{n+1}a_i + \sum\limits_{i=1}^{n+1}b_i$.

- En efecto,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1}(a_i + b_i) &= \sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) + (a_{n+1} + b_{n+1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n}a_i + \sum_{i=1}^{n}b_i + a_{n+1} + b_{n+1} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n}a_i + a_{n+1}\right) + \left(\sum_{i=1}^{n}b_i + b_{n+1}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n+1}a_i + \sum_{i=1}^{n+1}b_i.
\end{aligned}$$

- Puesto que se cumplen las dos condiciones del Principio de inducción, la afirmación es válida para cualquier entero positivo n.

Para la propiedad 6. tenemos,

- Si $n=1$, $\sum\limits_{i=1}^{1}(a_i-a_{i-1})=a_1-a_0$.
- Suponemos válida la propiedad para n. Con esto tenemos la hipótesis de inducción $\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i-a_{i-1})=a_n-a_0$ y demostremos para $n+1$, es decir,

$$\sum_{i=1}^{n+1}(a_i-a_{i-1})=a_{n+1}-a_0.$$

- En efecto,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1}(a_i-a_{i-1}) &= \sum_{i=1}^{n}(a_i-a_{i-1})+(a_{n+1}-a_n)\\ &= a_n-a_0+a_{n+1}-a_n\\ &= a_{n+1}-a_0.\end{aligned}$$

- De 1. y 2. concluimos que la afirmación es cierta para cualquier número de sumandos.

■

La propiedad 6. de la proposición anterior es conocida como **propiedad telescópica**.
Con todo esto en mente nos abocamos a encontrar expresiones sencillas para calcular algunas sumatorias de uso frecuente. En primer lugar, usando el argumento de Gauss, es fácil ver que $\sum\limits_{i=1}^{n}i=\dfrac{n(n+1)}{2}$.
Usaremos la propiedad telescópica para determinar el valor de $\sum\limits_{i=1}^{n}i^2$. Considerando que $(i+1)^3-i^3=3i^2+3i+1$. Entonces,

$$\sum_{i=1}^{n}(i+1)^3-i^3=(n+1)^3-1=3\sum_{i=1}^{n}i^2+3\sum_{i=1}^{n}i+\sum_{i=1}^{n}1.$$

Despejando $\sum\limits_{i=1}^{n}i^2$, reemplazando las expresiones de $\sum\limits_{i=1}^{n}i$, $\sum\limits_{i=1}^{n}1$ y reduciendo obtenemos,

$$\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}.$$

Este procedimiento puede utilizarse para encontrar de manera recursiva la fórmula de $\sum\limits_{k=1}^{n}k^m$, con $m\in\mathbb{N}$. Por ejemplo, para encontrar la fórmula de $\sum\limits_{k=1}^{n}k^3$, utilizamos la relación $(k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1$, conociendo previamente las fórmulas para las sumas de k y k^2.

Ejemplo 3.1.30 *Encontremos una fórmula para la suma de los cuadrados de los n primeros números impares.*

Solución

Sabemos que la forma general de un número impar es $2k-1$, con $k \in \mathbb{N}$. Con esto,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 &= \sum_{k=1}^{n} \left(4k^2 - 4k + 1\right) \\
&= 4\sum_{k=1}^{n} k^2 - 4\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 \\
&= 4\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4\frac{n(n+1)}{2} + n \\
&= \frac{n}{3}\left(4n^2 - 1\right).
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.1.31 *Sea r un número real, $r \neq 1$. Queremos encontrar una fórmula para la* **suma geométrica** $S = \sum_{i=1}^{n} r^i$. *Nuevamente usaremos la propiedad telescópica.*

Para ello, notemos que $rS = \sum_{i=1}^{n} r^{i+1}$, de donde:

$$(1-r)S = S - rS = \sum_{i=1}^{n} r^i - \sum_{i=1}^{n} r^{i+1} = \sum_{i=1}^{n}(r^i - r^{i+1}) = 1 - r^{n+1}.$$

Despejando, obtenemos la fórmula buscada, $\sum_{i=1}^{n} r^i = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$, $r \neq 1$.

Terminamos esta sección sobre números enteros estableciendo una última propiedad interesante, que caracteriza a los números reales en general, y a los enteros positivos en particular. Se trata de aquella que expresa que el conjunto de los números enteros positivos es infinito y no acotado en $\mathbb{R}$.

Teorema 3.1.32 (Propiedad Arquimediana)
Si a y b son números enteros positivos, entonces existe un número entero positivo n tal que $a < nb$.

Demostración. Nuevamente usamos Principio de Buen Orden. Si $a \leq b$, estamos listos, pues $n = 2$ basta. Si no, consideremos el conjunto:

$$\{a - nb : n \in \mathbb{Z}^+ \wedge a - nb > 0\}.$$

Por construcción, este es un subconjunto de $\mathbb{Z}^+$. Como $a > b$, este conjunto es no vacío y por tanto tiene un menor elemento, digamos $a - mb$. Pero entonces $a - (m+1)b \leq 0$, es decir, $a \leq (m+1)b < (m+2)b$. ■

3.2. Números reales

En esta sección hablaremos del conjunto base para el estudio del Cálculo Diferencial e Integral, el cual es el conjunto de los números reales. Paradójicamente su presentación fue formalizada en el siglo XIX, dos siglos más tarde del surgimiento del Cálculo Infinitesimal, desarrollado por Newton y Leibnitz[1].

La importancia de los números reales ($\mathbb{R}$) radica en sus propiedades aritméticas (axiomas de cuerpo) que ya conoces de la enseñanza básica y media y que hasta ahora hemos seguido ocupando sin una justificción rigurosa y además de sus propiedades relacionadas con desigualdades (axiomas de orden), junto a la más trascendental de todas, su propiedad que nos permite estudiar procesos continuos, la que guarda relación con el axioma del supremo y que no comparte con ninguno de los conjuntos vistos hasta ahora.

Comenzaremos el estudio formal de los números reales, con los **axiomas de cuerpo**, los cuales están relacionados con el primer grupo de propiedades, es decir, las que tienen que ver con la igualdad y las ecuaciones.

3.2.1. Axiomas de cuerpo

Los axiomas de cuerpo rigen las operaciones de adición y producto, éstos nos entregan una manipulación algebraica de los números en $\mathbb{R}$. Podemos agruparlos en los siguientes:

A.1. Clausura

La suma y la multiplicación son **cerradas** en $\mathbb{R}$, es decir,

- $\forall a, b \in \mathbb{R}, a + b \in \mathbb{R}$.
- $\forall a, b \in \mathbb{R}, a \cdot b \in \mathbb{R}$.

A.2. Conmutatividad

La suma y la multiplicación son **conmutativas** en $\mathbb{R}$, es decir,

- $\forall a, b \in \mathbb{R}, a + b = b + a$.
- $\forall a, b \in \mathbb{R}, a \cdot b = b \cdot a$.

[1]Isaac Newton, físico y matemático inglés, $(1642 - 1727)$; Gottfried Leibniz, matemático y filósofo alemán, $(1646 - 1716)$

A.3. Asociatividad

La suma y la multiplicación son **asociativas** en $\mathbb{R}$, es decir,

- $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, (a + b) + c = a + (b + c)$.
- $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

A.4. Neutros

El $0 \in \mathbb{R}$ cumple con la propiedad de **neutro aditivo**. Es decir,

$$\forall a \in \mathbb{R}, a + 0 = 0 + a = a.$$

El $1 \in \mathbb{R}$ cumple con la propiedad de **neutro multiplicativo**. Es decir,

$$\forall a \in \mathbb{R}, a \cdot 1 = 1 \cdot a = a.$$

A.5. Inversos

Para todo $a \in \mathbb{R}$, existe $(-a) \in \mathbb{R}$, llamado **opuesto aditivo o inverso aditivo**, tal que,

$$\forall a \in \mathbb{R}, a + (-a) = (-a) + a = 0.$$

Para todo $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, existe $a^{-1} \in \mathbb{R}$, llamado **inverso multiplicativo o recíproco**, tal que,

$$\forall a \in \mathbb{R}, a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1.$$

Por último, enunciamos el axioma que relaciona a las dos operaciones.

A.6. Distributividad

La adición se relaciona con la multiplicación mediante la propiedad **distributiva** de la multiplicación respecto a la suma:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}, a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Teorema 3.2.1
El neutro aditivo y el neutro multiplicativo son únicos.

Demostración. En efecto, para el neutro aditivo, si existiera $e \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\forall a \in \mathbb{R}, a + e = e + a = a,$$

entonces en particular podemos tomar $a = 0$ y como además es neutro, se tiene:

$$e = 0 + e = e + 0 = 0,$$

obteniendo que $e = 0$.
Análogamente se puede mostrar la unicidad del neutro multiplicativo, su demostración queda propuesta como ejercicio. ■

Teorema 3.2.2

1. *$\forall a \in \mathbb{R}$ su opuesto aditivo $(-a)$ es único.*

2. *$\forall a \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$ su inverso multiplicativo a^{-1} es único.*

Demostración. En efecto, para demostrar la unicidad del opuesto aditivo supongamos que para $a \in \mathbb{R}$ existen dos opuestos aditivos a_1 y a_2, es decir,

$$a + a_1 = 0 \tag{3.2}$$
$$a + a_2 = 0. \tag{3.3}$$

Ahora bien,

$$\begin{array}{lll} a_1 & = a_1 + 0 & \text{pues } 0 \text{ es el neutro aditivo} \\ & = a_1 + (a + a_2) & \text{usando (3.3)} \\ & = (a_1 + a) + a_2 & \text{por la asociatividad de la suma} \\ & = (a + a_1) + a_2 & \text{por la conmutatividad de la suma} \\ & = (0) + a_2 & \text{usando (3.2)} \\ & = a_2 & \text{pues } 0 \text{ es el neutro aditivo.} \end{array}$$

Concluyendo que $a_1 = a_2$.

La demostración es análoga para el inverso multiplicativo y queda propuesta como ejercicio. ■

Definición 3.2.3 (Diferencia, Cuociente)
Sean $a, b \in \mathbb{R}$, definimos:

1. *La* **diferencia** *o resta entre a y b como $a - b = a + (-b)$.*

2. *El* **cuociente** *o división entre a y b como $\dfrac{a}{b} = ab^{-1}$ para $b \neq 0$.*

Note que la diferencia $a - b$ solo es una notación para representar la suma de a con el inverso aditivo de b. Lo mismo sucede con $\dfrac{a}{b}$ que denota la multiplicación entre a y el inverso multiplicativo de b y en particular $b^{-1} = \dfrac{1}{b}$.

Observación 3.2.4 *Notemos que como 0 no posee inverso multiplicativo, la división por 0 no está definida.*

Propiedades de $\mathbb{R}$ relacionadas con los axiomas de cuerpo

A continuación veremos algunas de las propiedades más relevantes de $\mathbb{R}$, las cuales se desprenden de los axiomas de cuerpo, por lo cual, éstas pueden ser demostradas. La mayoría de ellas son conocidas para nosotros y las hemos utilizado desde el colegio, como por ejemplo la ley de cancelación, cuyo uso es habitual en la resolución de ecuaciones, pero ahora las veremos desde un punto de vista diferente, demostrándolas a través de los seis axiomas de cuerpo enunciados anteriormente.

Proposición 3.2.5 . *Sean a, b, c, $d \in \mathbb{R}$ entonces se cumple que:*

1. *Ley de cancelación:*
   a) $a + b = a + c \Rightarrow b = c$.
   b) $a \cdot b = a \cdot c \Rightarrow b = c$, $a \neq 0$.
2. $a \cdot 0 = 0$, $\forall a \in \mathbb{R}$.
3. $(-1) \cdot a = -a$.
4. $-(-a) = a$.
5. $(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$.
6. $(-a)(-b) = a \cdot b$.
7. $(a^{-1})^{-1} = a$, $a \neq 0$.
8. $(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}, \quad a, b \neq 0$.
9. $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$.

Demostración.

Demostraremos algunas de ellas, las restantes quedan como ejercicios propuestos.

2. Para probar $0 \cdot a = 0$, tenemos:

$$\begin{array}{rcll} 0 \cdot a & = & 0 \cdot a + 0 & \text{neutro aditivo} \\ & = & 0 \cdot a + [a + (-a)] & \text{inverso aditivo} \\ & = & (0 \cdot a + a) + (-a) & \text{asociatividad} \\ & = & (0 \cdot a + 1 \cdot a) + (-a) & \text{neutro multiplicativo} \\ & = & (0 + 1)\, a + (-a) & \text{distributividad} \\ & = & a + (-a) & \text{neutro aditivo} \\ & = & 0 & \text{opuesto aditivo} \end{array}$$

4. Para $-(-a) = a$, tenemos por definición que $0 = -(-a) + (-a)$. Luego,

$$\begin{array}{rcll} a & = & -(-a) + (-a) + a & \text{neutro aditivo} \\ & = & -(-a) + [(-a) + a] & \text{asociatividad} \\ & = & -(-a) + 0 & \text{opuesto aditivo} \\ & = & -(-a) & \text{neutro aditivo} \end{array}$$

9. Probamos ahora que $ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$.

   ($\Rightarrow$) Supongamos $a \neq 0$ y mostremos que $b = 0$. En efecto,

$$\begin{array}{rcll} b & = & 1 \cdot b & \text{neutro multiplicativo} \\ & = & (a \cdot a^{-1})\, b & \text{inverso multiplicativo} \\ & = & (a^{-1} \cdot a)\, b & \text{conmutatividad} \\ & = & a^{-1} \cdot (ab) & \text{asociatividad} \\ & = & a^{-1} \cdot 0 & \text{hipótesis} \\ & = & 0 & \text{propiedad 1} \end{array}$$

($\Leftarrow$) Si $a = 0 \vee b = 0$, tenemos $0 \cdot b = 0$ y $a \cdot 0 = 0$ respectivamente.

Proposición 3.2.6 . *Sean a, b, c, $d \in \mathbb{R}$ entonces se cumple que:*

1. $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c.$
2. $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \cdot c}{b \cdot d}$, $b,\ d\ \neq 0.$
3. $\dfrac{a}{b} : \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \cdot d}{b \cdot c}$, $b,\ c,\ d\ \neq 0.$
4. $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$, $b,\ d \neq 0.$
5. $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c$, $b,\ d \neq 0.$
6. $\forall b \neq 0,\ \dfrac{-a}{-b} = \dfrac{a}{b}.$
7. $\forall b \neq 0,\ \dfrac{-a}{b} = \dfrac{a}{-b} = -\dfrac{a}{b}.$
8. $\dfrac{n \cdot a}{n \cdot b} = \dfrac{a}{b}$; $n \neq 0.$
9. $\dfrac{0}{b} = 0$; $b \neq 0.$

3.2.2. Axiomas de orden

Ya sabemos que los números reales tienen estructura algebraica de cuerpo y en base a ello hemos estudiado algunas operaciones como potenciación. Pero no hemos dicho nada respecto a preguntas como: ¿Es posible ordenar los números reales? ¿Se pueden representar geométricamente? ¿Cómo medir la distancia entre dos números reales cualesquiera?
Este grupo de axiomas establece un orden en el conjunto de los números reales. Según esto podremos decidir si un número es mayor, menor o igual que otro. Esta relación de orden se introduce a partir del concepto de "*positivo*".

Axiomas de orden

Consideremos la existencia de un subconjunto de $\mathbb{R}$, denotado por $\mathbb{R}^+$, llamado conjunto de **números reales positivos** caracterizado por los siguientes axiomas,

O.1. Clausura
$\mathbb{R}^+$ es cerrado para la adición y multiplicación. Es decir, para todo $a, b \in \mathbb{R}^+$,

(i) $a + b \in \mathbb{R}^+$.

(ii) $a \cdot b \in \mathbb{R}^+$.

O.2. Tricotomía
Para todo $a \in \mathbb{R}$, tenemos sólo una de las siguientes posibilidades:

(i) $a \in \mathbb{R}^+$. (ii) $a = 0$. (iii) $-a \in \mathbb{R}^+$.

Definición 3.2.7 (Números reales negativos)
Llamamos conjunto de los números reales negativos, denotado por $\mathbb{R}^-$, al conjunto de los $x \in \mathbb{R}$ tales que $-x$ es positivo. Es decir,

$$\mathbb{R}^- = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -x \in \mathbb{R}^+\right\}.$$

Del axioma O.2. y la Definición 3.2.7 tenemos que:

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^+,$$

$$\mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^- = \emptyset,$$

$$0 \notin \mathbb{R}^- \wedge 0 \notin \mathbb{R}^+.$$

Definición 3.2.8 (Menor que)
Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Diremos que a es menor que b, lo que denotamos $a < b$, si la diferencia $b - a$ es un número positivo, es decir,

$$a < b \Leftrightarrow (b - a) \in \mathbb{R}^+.$$

Definición 3.2.9 (Menor o igual que)
Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Diremos que a es menor o igual que b, lo que denotamos $a \leq b$, si la diferencia $b - a$ es un número positivo o nulo, es decir,

$$a \leq b \Leftrightarrow (b - a) \in \mathbb{R}^+ \vee b - a = 0.$$

La relación $a < b$ es equivalente a la relación $b > a$ que se lee "*b es mayor que a*". De igual forma $a \leq b$ es equivalente con $b \geq a$, cuya lectura es "*b es mayor o igual que a*".
Con todo lo anterior, un número $b \in \mathbb{R}$ es positivo si y solo si $b > 0$. Si $b < 0$ se dice **negativo**. Si $b \geq 0$ se dice **no negativo**.
En el siguiente teorema tenemos una serie de desigualdades que se demuestran utilizando los axiomas de orden, estas son de gran utilidad en el desarrollo del Cálculo.

Teorema 3.2.10
Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, entonces,

1. *Dados a y b se verifica solo una de las alternativas $a < b$, $b = a$ o $b < a$.*
2. *$a < b$ y $b < c \Rightarrow a < c$.*
3. *$a < b \Rightarrow a + c < b + c$.*

4. $a < b$ y $c < d \Rightarrow a + c < b + d.$

5. $a < b$ y $c > 0 \Rightarrow ac < bc.$

6. $a < b$ y $c < 0 \Rightarrow ac > bc.$

7. $0 < a < b$ y $0 < c < d \Rightarrow ac < bd.$

8. $a > 0$ y $b < 0 \Rightarrow ab < 0.$

9. $a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0.$

10. $a > 0 \Rightarrow a^{-1} > 0.$

11. $0 < a < b \Rightarrow b^{-1} < a^{-1}.$

12. $a \cdot b > 0 \Rightarrow (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0).$

13. $a \cdot b < 0 \Rightarrow (a > 0 \wedge b < 0) \vee (a < 0 \wedge b > 0).$

Demostración.

1 Para mostrar que dados $a, b \in \mathbb{R}$ cumplen solo una de las siguientes alternativas $a < b$, $b = a$ o $b < a$, llamemos $c = b - a \in \mathbb{R}$, según el axioma O.2. tenemos solamente una posibilidad $c \in \mathbb{R}^+$, $c = 0$ o $-c \in \mathbb{R}^+$. En virtud de lo anterior, si $c \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow (b - a) \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow a < b$. Si $c = 0 \Leftrightarrow b - a = 0 \Leftrightarrow b = a$. Finalmente, si $-c \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow -(b - a) \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow b < a$.

2 Mostremos $a < b$ y $b < c \Rightarrow a < c$. En efecto, de las hipótesis $b - a > 0$ y $c - b > 0$, luego $(b - a) + (c - b) = c - a > 0$, de donde $a < c$.

3 Probemos $a < b \Rightarrow a + c < b + c$. En efecto, de la hipótesis $b - a > 0$, luego $(b + c) - (a + c) > 0 \Rightarrow a + c < b + c$.

6 Probemos $a < b$ y $c < 0 \Rightarrow bc < ac$. En efecto, $ac - bc = -c(b - a) > 0$, pues de las hipótesis $b - a > 0$ y $-c > 0$. Así, $bc < ac$.

7 Para mostrar $0 < a < b$ y $0 < c < d \Rightarrow ac < bd$, tenemos que en virtud del ítem 5. $ac < bc$ y $bc < bd$, luego según el ítem 2. $ac < bd$.

10 Probemos $a > 0 \Rightarrow a^{-1} > 0$. Por contradicción, supongamos $a > 0$ y $a^{-1} < 0$, es decir, a^{-1} no es positivo. Así, $a \cdot a^{-1} < 0 \Rightarrow 1 < 0$. Luego, $a^{-1} > 0$.

11 Finalmente mostremos $0 < a < b \Rightarrow b^{-1} < a^{-1}$. Por hipótesis $b - a > 0$ y $ab > 0$, luego $a^{-1} - b^{-1} = \dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} = \dfrac{b - a}{ab} = (b - a)(ab)^{-1} > 0$, pues según el ítem 10. $(ab)^{-1} > 0$. Concluimos $b^{-1} < a^{-1}$.

Las demostraciones de los puntos restantes quedan propuestas como ejercicios. ■
Para las desigualdades simultáneas $a < b$ y $b < c$ escribimos $a < b < c$. De igual forma se interpretan $a \leq b < c$, $a < b \leq c$ y $a \leq b \leq c$.

Ejemplo 3.2.11 *1. Sean $a, b \in \mathbb{R}^+$. Si $a^2 + b^2 = 4$, demostremos que $a^2b^2 \leq 4$.*

Solución.

Debemos recordar que el cuadrado de todo número real es un real no negativo y usar adecuadamente el cuadrado de binomio. Con esto,

$$(a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0,$$

Pero $a^2 + b^2 = 4$, luego,

$$4 - 2ab \geq 0 \Rightarrow 0 < ab \leq 2,$$

de donde $a^2b^2 \leq 4$.

2. Demostremos que $\forall x, y \in \mathbb{R}$ se tiene que $x^2 + xy + y^2 \geq 0$.

Solución.

Si $xy \geq 0$ es inmediato que $x^2 + xy + y^2 \geq 0$, pues es suma de números reales no negativos.

Si $xy \leq 0$, entonces $-xy \geq 0$, de donde $-2xy \geq -xy \geq 0$. Esto junto al hecho que $(x+y)^2 \geq 0$, o de manera equivalente $x^2 + y^2 \geq -2xy$ nos permite concluir que $x^2 + y^2 \geq -xy$, de donde $x^2 + xy + y^2 \geq 0$.

3.2.3. Axioma de completitud

Estudiamos ahora el último axioma de los número reales. Éste es necesario para establecer la existencia de los números irracionales y con ello hacer una correspondencia biyectiva de $\mathbb{R}$ con la recta. Comenzamos dando una serie de definiciones previas.

Definición 3.2.12 (Conjunto Acotado)
Sea $S \subset \mathbb{R}$ no vacío. Diremos que S es:

1. *Acotado Superiormente si y solo si existe una constante $M \in \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in S$ $x \leq M$. La constante M se llama cota superior de S.*

2. *Acotado Inferiormente si y solo si existe una constante $m \in \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in S$ $m \leq x$. La constante m se llama cota inferior de S.*

3. *Acotado si y solo si S es acotado superior e inferiormente.*

Notemos que si S es acotado superiormente por M, entonces todo $M' > M$ es también cota superior de S. De igual forma, si S es acotado inferiormente por m, entonces todo $m' < m$ es cota inferior de S.

Ejemplo 3.2.13 *$\mathbb{R}^+$ es acotado inferiormente por cualquier $m \leq 0$. Por su parte, $\mathbb{R}^-$ es acotado superiormente por cualquier $M \geq 0$. El conjunto $S = \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$ es acotado por cualquier $N \geq 1$, en cambio $\mathbb{R}$ no es acotado.*

Definición 3.2.14 (Supremo, Ínfimo)
Sea $S \subset \mathbb{R}$ acotado, no vacío. Llamamos:

1. *Supremo a la menor de las cotas superiores. Lo denotamos $\sup\{S\}$.*

2. *Ínfimo a la mayor de las cotas inferiores. Lo denotamos $\inf\{S\}$.*

Proposición 3.2.15 *Sea $S \subset \mathbb{R}$,*

1. *Si S es acotado superiormente, entonces el supremo es único.*

2. *Si S es acotado inferiormente, entonces el ínfimo es único.*

Demostración.

1. Sean M y M' supremos de S. Por definición, M es la menor de las cotas superiores, así $M \leq M'$. De forma análoga, $M' \leq M$. Así, $M = M'$.

■

Definición 3.2.16 (Máximo, Mínimo)
Sea $S \subset \mathbb{R}$ acotado, no vacío, tal que $M = \sup\{S\}$ y $m = \inf\{S\}$. Entonces:

1. *Si $M \in S$ se llama Máximo. Lo denotamos $M = \max\{S\}$.*

2. *Si $m \in S$ se llama Mínimo. Lo denotamos $m = \min\{S\}$.*

Teorema 3.2.17 *Sea $S \subset \mathbb{R}$, no vacío,*

1. *Si S es acotado superiormente, entonces $\forall \epsilon > 0, \exists x \in S$ tal que*
$$x > \sup\{S\} - \epsilon.$$

2. *Si S es acotado inferiormente, entonces $\forall \epsilon > 0, \exists x \in S$ tal que*
$$x < \inf\{S\} + \epsilon.$$

Demostración.

1. Por contradicción. Supongamos $x \leq \sup\{S\} - \epsilon$, $\forall x \in S$, entonces $\sup\{S\} - \epsilon$ sería una cota superior de S menor que $\sup\{S\}$, lo que es una contradicción. Luego, se debe cumplir que $x > \sup\{S\} - \epsilon$ para algún $x \in S$.

2. La demostración queda propuesta.

■

Axioma de Completitud

A.C. Sea $S \subset \mathbb{R}$, $S \neq \emptyset$. Si S es acotado superiormente tiene supremo. De igual forma, si S es acotado inferiormente tiene ínfimo.

Ejemplo 3.2.18 *1. Sea* $S = \left\{ x = \dfrac{(-1)^n \cdot n}{n+1}, n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{R}$. *Estudie las propiedades de acotamiento y sus elementos principales.*

Solución.

Listando algunos elementos vemos que $S = \left\{ \ldots, -\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \ldots \right\}$. *Para* n *par los elementos se acercan cada vez más a* 1 *y para* n *impar se aproximan a* -1, *todo esto a medida que* n *crece. Luego,* S *es acotado superiormente por cualquier* $M \geq 1$ *y acotado inferiormente por* $m \leq -1$. *Tenemos que* $\sup\{S\} = 1$ *e* $\inf\{S\} = -1$. *Como el supremo y el ínfimo no pertenecen a* S *concluimos que no tiene máximo ni mínimo.*

2. *Sean* A *y* B *dos subconjuntos de números reales, no vacíos, acotados superiormente. Demuestre que si* $\alpha = \sup\{A\}$, $\beta = \sup\{B\}$ *y* $C = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$, *entonces* $\sup\{C\} = \alpha + \beta$.

Solución.

Veamos primero que $\alpha + \beta$ *es cota superior de* C. *Sea* $c \in C$, *como* $c = a_1 + b_1$ *para ciertos* $a_1 \in A$ *y* $b_1 \in B$ *y dado que* $a \leq \alpha$ *y* $b \leq \beta$, *pues* α *y* β *son cotas superiores de* A *y* B *respectivamente, tenemos que*

$$c = a_1 + b_1 \leq \alpha + \beta, \quad \forall c \in C,$$

lo que significa que $\alpha + \beta \in C$.

Veamos ahora que $\alpha + \beta$ *es la menor de las cotas superiores de* C, *esto es, dado* $\epsilon > 0$ *existe algún* $c \in C$ *, tal que* $(\alpha + \beta) - \epsilon < c$. *En efecto, como* $\alpha = \sup\{A\}$ *y* $\beta = \sup\{B\}$, *existen* $a_1 \in A$ *y* $b_1 \in B$ *tales que:*

$$\alpha - \frac{\epsilon}{2} < a_1 \quad y \quad \beta - \frac{\epsilon}{2} < b_1,$$

luego, $(\alpha + \beta) - \epsilon < a_1 + b_1$, *que es lo que se quería mostrar, pues* $c = a_1 + b_1$ *es un elemento de* C.

Otros Resultados Sobre $\mathbb{R}$

Teorema 3.2.19 (Propiedad Arquimediana)
Sean $a, b \in \mathbb{R}$, *tal que* $a > 0$, *entonces existe un* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $n \cdot a > b$.

Demostración.
Por contradicción. Supongamos $na \leq b, \forall n \in \mathbb{N}$. Definamos,

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = na, n \in \mathbb{N}\}.$$

Entonces,

1. $S \neq \emptyset$, pues $a \in S$.
2. S está acotado superiormente, pues hemos supuesto $na < b$.

Luego, por A.C. S tiene supremo $M = \sup\{S\}$ en $\mathbb{R}$, entonces $na < M, \forall n \in \mathbb{N}$. Pero, $(n+1)\,a \in S$, entonces $(n+1)\,a \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$. Luego, $na \leq M - a, \forall n \in \mathbb{N}$. Así, $M - a$ es cota superior de S y como $a > 0$ tenemos $M - a < M$, lo que contradice el hecho que M es el supremo de S. Concluimos $na > b$. ■

Teorema 3.2.20 (Densidad de $\mathbb{Q}$)
Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a < b$. Entonces existe un número racional q tal que $a < q < b$.

Demostración. Como $a < b$, entonces $b - a > 0$, por lo que aplicando la Propiedad Arquimedeana existe $n \in \mathbb{N}$ tal que,

$$n\,(b - a) > 1.$$

Aplicando nuevamente la misma propiedad tenemos que existen $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ de manera que, $m_1 > na$ y $m_2 > -na$. Luego,

$$-m_2 < na < m_1.$$

En consecuencia, existe $m \in \mathbb{Z}$, $-m_2 < m < m_1$, tal que,

$$m - 1 \leq na < m.$$

Combinando esta desigualdad con la anterior obtenemos,

$$na < m \leq 1 + na < nb.$$

Como $n > 0$, concluimos $a < \frac{m}{n} < b$, por lo que tomamos $q = \frac{m}{n}$, concluyendo la demostración. ■

Proposición 3.2.21 .
$\sqrt{2}$ es un número irracional.

Demostración. Por contradicción. Supongamos que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$, donde $\frac{a}{b}$ es irreductible, es decir, a y b no tienen factores comunes. Ahora, $\sqrt{2} = \frac{a}{b} \Rightarrow 2b^2 = a^2 \Rightarrow a^2$ es par $\Rightarrow a$ es par. Escribamos $a = 2n$, $n \in \mathbb{N}$. Luego, $(2n)^2 = 2b^2 \Rightarrow b^2 = 2n^2 \Rightarrow b$ es par $\Rightarrow a$ y b tienen un factor común, lo que es una contradicción. ■

Teorema 3.2.22 (Densidad de $\mathbb{I}$)
Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a < b$. Entonces existe un número irracional p tal que $a < p < b$.

Demostración.
Como $a < b$, entonces $\frac{a}{\sqrt{2}} < \frac{b}{\sqrt{2}}$. Luego, por el teorema anterior existe $q \in \mathbb{Q}$ de manera que $\frac{a}{\sqrt{2}} < q < \frac{b}{\sqrt{2}}$, de donde, $a < q\sqrt{2} < b$, por lo que $p = q\sqrt{2}$ cumple con el enunciado demandado, pues si p fuera racional, entonces también lo sería $\sqrt{2}$. , lo que contradeciría la Proposición 3.2.21. ∎

3.2.4. Inecuaciones

Intervalos

Definición 3.2.23 (Intervalos)
Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a < b$. Definimos,

1. **Intervalo abierto** *de extremos a y b al subconjunto de $\mathbb{R}$*

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}.$$

Gráficamente esto es,

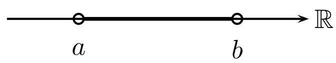


Figura 3.1: Intervalo abierto (a, b).

2. **Intervalo cerrado** *de extremos a y b al subconjunto de $\mathbb{R}$*

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}.$$

Esquemáticamente lo vemos en la Figura 2,

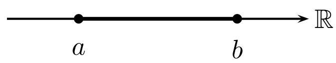


Figura 3.2: Intervalo cerrado $[a, b]$.

3. **Intervalo semiabierto o semicerrado** *de extremos a y b a los subconjuntos de $\mathbb{R}$*

   a) $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$.
   b) $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$.

Representados como,

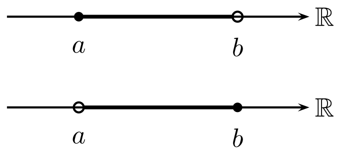


Figura 3.3: Arriba: intervalo $[a, b)$. Abajo: Intervalo $(a, b]$

4. **Intervalo infinito** *a los subconjuntos de* $\mathbb{R}$

   a) $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$.
   b) $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$.
   c) $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$.
   d) $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$.
   e) $(-\infty, \infty) = \{x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$.

Definición 3.2.24 (Inecuación)
Sean p y q expresiones algebraicas. Se llama inecuación a las afirmaciones $p(x) \leq q(x)$, $p(x) < q(x)$, $p(x) \geq q(x)$ o $p(x) > q(x)$.

Si al reemplazar x por un valor particular $a \in \mathbb{R}$ obtenemos una expresión verdadera, entonces $x = a$ se dice una **solución**. El conjunto de todas las soluciones de una inecuación se llama **conjunto solución**. Así, resolver una inecuación es encontrar su conjunto solución. Dos inecuaciones que tienen el mismo conjunto solución se dicen equivalentes.
Para resolver una inecuación hacemos uso de las propiedades de las desigualdades y/o de la ley de tricotomía. Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 3.2.25 .
Encuentre el conjunto solución de $3x + 8 \geq 5x - 4$.

Solución:

Transponiendo x tenemos:

$$\begin{aligned} 3x - 5x &\geq -4 - 8 \\ -2x &\geq -12. \end{aligned}$$

Multiplicando por $-\frac{1}{2}$ y teniendo presente que al multiplicar por un número negativo la desigualdad se invierte obtenemos:

$$x \leq 6.$$

Es decir, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 6\} = (-\infty, 6]$.

Ejemplo 3.2.26 .
Encuentre el conjunto solución de $5x^2 - 2x + 1 < x^2 + 2x$.

Solución:

Transponiendo y reduciendo a términos semejantes obtenemos:

$$4x^2 - 4x + 1 < 0$$

que es equivalente a:

$$(2x - 1)^2 < 0.$$

Que no admite solución, pues todo cuadrado de un número real es no negativo. Luego, $S = \emptyset$. *En cambio, si se hubiera querido resolver:*

$$4x^2 - 4x + 1 \leq 0,$$

entonces la única solución es $S = \{\frac{1}{2}\}$.

Ejemplo 3.2.27 .
Encuentre el conjunto solución de $4x^2 + 16x - 1 \geq 4x - 5x^2 - 5$.

Solución:

Transponiendo y reduciendo a términos semejantes obtenemos:

$$9x^2 + 12x + 4 \geq 0,$$

que es equivalente a:

$$(3x + 2)^2 \geq 0.$$

Como el cuadrado de un número real es siempre no negativo tenemos que $S = \mathbb{R}$.

Ejemplo 3.2.28 *Resuelva*

$$x^2 + x - 2 > 0.$$

Solución:

La inecuación es equivalente a $(x + 2)(x - 1) > 0$, *ahora de los axiomas de orden tenemos que las únicas alternativas para que el producto de dos cantidades sea positivo, es que ambas tengan el mismo signo. Por lo cual tenemos los siguientes casos.*

a) $x + 2 > 0 \wedge x - 1 > 0$ *implica* $x > -2 \wedge x > 1$, *por tanto* $x > 1$, *es decir, la solución al caso es* $S_1 = (1, \infty)$.

b) $x + 2 < 0 \wedge x - 1 < 0$ *implica* $x < -2 \wedge x < 1$, *por tanto* $x < -2$, *es decir, la solución al caso es* $S_2 = (-\infty, -2)$.

por tanto la solución a la inecuación es $S = S_1 \cup S_2 = (-\infty, -2) \cup (1, \infty)$.

El procedimiento anterior se puede resumir en una tabla de signos, como se muestra en el ejemplo siguiente:

Ejemplo 3.2.29 .
Encuentre el conjunto solución de $\dfrac{x+4}{x+1} \leq \dfrac{2}{x-1}$.

Solución.

a) **Método 1:** *Para encontrar el conjunto solución de la inecuación dada procedemos como sigue,*

$$\begin{aligned} \frac{x+4}{x+1} \leq \frac{2}{x-1} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{x+4}{x+1} - \frac{2}{x-1} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{x^2+x-6}{(x+1)(x-1)} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{(x+3)(x-2)}{(x+1)(x-1)} \leq 0. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Vemos que el numerador de la última fracción se anula sólo en $x = -3$ *y* $x = 2$, *por su parte, el denominador sólo se hace cero para* $x = -1$ *y* $x = 1$. *Con esto construimos la siguiente tabla donde analizamos el signo que tiene cada factor en cada intervalo,*

	$(-\infty, -3)$	$(-3, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, 2)$	$(2, \infty)$
$x+3$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$\frac{(x+3)(x-2)}{(x+1)(x-1)}$	$(+)$	$(-)$	$(+)$	$(-)$	$(+)$

Como la desigualdad no es estricta, se consideran en el conjunto solución los puntos que anulan el numerador. Así, tenemos $S = [-3, -1) \cup (1, 2]$.

b) **Método 2:** *En la primera parte de este método procedemos como en el anterior hasta obtener (3.4). Llamemos* $A(x) = \dfrac{(x+3)(x-2)}{(x+1)(x-1)}$, *que según el procedimiento anterior tiene puntos de corte* $x = -3$, $x = -1$, $x = 1$ *y* $x = 2$, *los que dividen la recta real en cinco partes:*

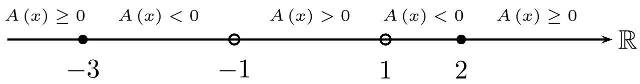


Figura 3.4: Solución de $\frac{x+4}{x+1} \leq \frac{2}{x-1}$.

Luego,

$$\begin{aligned} x = -4 \in (-\infty, -3) &\Rightarrow A(x) > 0, \\ x = -2 \in (-3, -1) &\Rightarrow A(x) < 0, \\ x = 0 \in (-1, 1) &\Rightarrow A(x) > 0, \\ x = \frac{3}{2} \in (1, 2) &\Rightarrow A(x) < 0, \\ x = 3 \in (2, \infty) &\Rightarrow A(x) > 0. \end{aligned}$$

Como $x = -3$ y $x = 2$ satisfacen la inecuación concluimos que la solución buscada es $S = [-3, -1) \cup (1, 2]$.

Observación 3.2.30 *Cuando la expresión cuadrática $ax^2 + bx + c$ tiene discriminante negativo, pueden ocurrir dos situaciones: si $a > 0$, entonces $ax^2 + bx + c > 0$ y si $a < 0$ entonces $ax^2 + bx + c < 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Valor Absoluto

Definición 3.2.31 (Valor Absoluto)
Sea $x \in \mathbb{R}$, definimos su valor absoluto como el número real denotado $|x|$, dado por

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0, \\ x & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Se deduce inmediatamente de la definición anterior que el valor absoluto de un número es siempre no negativo. Geométricamente el valor absoluto de un número real x representa su distancia al cero.

Proposición 3.2.32 *Sean $x, y \in \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}^+$, entonces:*

1. $|x| = |-x|$.
2. $|x| = \sqrt{x^2}$.
3. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.
4. Si $y \neq 0 \Rightarrow \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$.

Demostración.

1. Probemos que $|x| = |-x|$. En efecto:

- Si $x > 0 \Rightarrow |x| = x$, $-x < 0 \Rightarrow |-x| = -(-x) = x$, luego $|x| = |-x|$.
- Si $x < 0 \Rightarrow |x| = -x$, $-x > 0 \Rightarrow |-x| = -x$, luego $|x| = |-x|$.

Así, $|x| = |-x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

2. Mostremos que $|x| = \sqrt{x^2}$.
   - Si $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x \Rightarrow |x|^2 = |x| \cdot |x| = x \cdot x = x^2$.
   - Si $x < 0 \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow |x|^2 = |x| \cdot |x| = (-x) \cdot (-x) = x^2$.
3. Queda propuesta como ejercicio al lector.
4. Mostremos que si $y \neq 0$, entonces $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$ utilizando el ítem 3. En efecto, sabemos que $1 = y \cdot y^{-1} \Rightarrow 1 = |y \cdot y^{-1}| = |y| \cdot |y^{-1}|$, de donde $\dfrac{1}{|y|} = \left|\dfrac{1}{y}\right|$. Con esto, $\left|\dfrac{x}{y}\right| = |x \cdot y^{-1}| = |x| \cdot |y^{-1}| = |x| \cdot \left|\dfrac{1}{y}\right| = |x| \cdot \dfrac{1}{|y|} = \dfrac{|x|}{|y|}$.

■

Ejemplo 3.2.33 .
Resuelva la ecuación $|2x + 5| = 3x - 1$.

Solución:

Sabemos que el valor absoluto es siempre un número real no negativo, esto impone la condición sobre el lado derecho de la ecuación $3x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{3}$. Luego, todo x que sea solución debe pertenecer al intervalo $\left[\frac{1}{3}, \infty\right)$. Aplicando la definición de valor absoluto tenemos:

1. *Si $2x+5 \geq 0 \Rightarrow |2x + 5| = 2x+5$, entonces la ecuación a resolver es $2x+5 = 3x-1$ cuya solución es $x = 6$.*
2. *Si $2x + 5 < 0 \Rightarrow |2x + 5| = -(2x + 5)$, en este caso la ecuación a resolver es $-(2x + 5) = 3x - 1$, que tiene por solución $x = -\frac{4}{5}$, pero la solución obtenida no satisface la condición $2x + 5 < 0$ por lo cual no puede ser solución.*

Finalmente, obtenemos que $S = \{6\}$.

Otra alternativa válida es elevar al cuadrado ambos miembros de la ecuación, teniendo la igualdad: $|2x + 5|^2 = (3x - 1)^2$, es decir, $5x^2 - 26x - 24 = 0$. Lo que implica $x = 6$ o $x = -\frac{4}{5}$. Pero, imponiendo la condición general sobre los candidatos a soluciones, obtenemos que $S = \{6\}$.

Inecuaciones con Valor Absoluto

Proposición 3.2.34 *Sean $x, y \in \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}^+$, entonces:*

1. $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$.
2. $-|x| \leq x \leq |x|$.
3. $|x+y| \leq |x| + |y|$. *(Desigualdad Triangular).*
4. $|x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a \vee x \leq -a$.
5. $|a| - |b| \leq |a| + |b|$.
6. $|a| - |b| \leq |a - b|$.
7. $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

Demostración.

1. Probemos que $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$. En efecto.
   Si $|x| \leq a \Leftrightarrow |x|^2 \leq a^2 \Leftrightarrow x^2 \leq a^2 \Leftrightarrow x^2 - a^2 \leq 0 \Leftrightarrow (x+a)(x-a) \leq 0 \Leftrightarrow$ $-a \leq x \leq a$.

2. Mostremos que $-|x| \leq x \leq |x|$. Por un lado, si $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x$, luego $x \leq |x|$. Si $x < 0 \Rightarrow |x| = -x$ y $x < -x \leq |x|$, luego $x \leq |x|$. Por otro lado, si $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x$, luego $-|x| \leq x$. Si $x < 0 \Rightarrow |x| = -x$ o bien $-|x| = x$ y así $-|x| \leq x$. De donde $-|x| \leq x \leq |x|$.

3. Mostremos la desigualdad triangular. De los item 2. y 3. de la Proposición 3.2.32 tenemos $x \cdot y \leq |x \cdot y| = |x| \cdot |y| \Rightarrow 2xy \leq 2 \cdot |x| \cdot |y|$. Por otra parte, $|x+y|^2 = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = |x|^2 + 2xy + |y|^2 \leq |x|^2 + 2|x| \cdot |y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2$. Tomando raíz cuadrada concluimos $|x+y| \leq |x| + |y|$.

4. Mostremos que $|x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a \vee x \leq -a$.
   $(\Rightarrow)$ Si $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x$, luego $x \geq a$. Si $x \leq 0 \Rightarrow |x| = -x$, de donde $-x \geq a$ o $x \leq -a$. Concluimos $x \geq a \vee x \leq -a$.
   $(\Leftarrow)$ Si $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x \Rightarrow |x| \geq a$. Si $x < 0 \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow -|x| \leq -a \Rightarrow$ $|x| \geq a$.

5. Mostremos $|a| - |b| \leq |a| + |b|$. En efecto.
   $|a| = |(a+b) - b| \leq |a+b| + |-b| = |a+b| + |b|$, transponiendo $|b|$ tenemos $|a| - |b| \leq |a+b|$, aplicando la desigualdad triangular concluimos $|a| - |b| \leq |a| + |b|$.

6. Probemos $|a| - |b| \leq |a - b|$. En efecto, $|a| = |b + (a-b)| \leq |b| + |a-b|$, transponiendo el término $|b|$ concluimos $|a| - |b| \leq |a - b|$.

7. Mostremos $||a| - |b|| \leq |a - b|$. Intercambiando los papeles de a y b en la desigualdad del ítem 6 obtenemos $|b| - |a| \leq |a - b|$, de donde $-|a - b| \leq |a| - |b|$, pero el ítem 6 afirma $|a| - |b| \leq |a - b|$. Así, tenemos $-|a - b| \leq |a| - |b| \leq |a - b|$, de donde $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

■

Ejemplo 3.2.35 .
Resuelva $|x^2 - 5| \leq 1$.

Solución:
Aplicando propiedades del valor absoluto a la inecuación $|x^2 - 5| \leq 1$ *tenemos,*

$$\left|x^2 - 5\right| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x^2 - 5 \leq 1. \tag{3.5}$$

Esto implica que debemos resolver $-1 \leq x^2 - 5$ *y* $x^2 - 5 \leq 1$.
Para la inecuación $-1 \leq x^2 - 5$ *tenemos,*

$$-1 \leq x^2 - 5 \Leftrightarrow x^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x - 2) \geq 0.$$

Los puntos que anulan los factores son $x = \pm 2$. *Luego, la tabla de signos es,*

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, \infty)$
$x + 2$	$-$	$+$	$+$
$x - 2$	$-$	$-$	$+$
$(x + 2)(x - 2)$	$(+)$	$(-)$	$(+)$

De donde, $S_1 = (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$.
Por su parte, para $x^2 - 5 \leq 1$ *tenemos,*

$$x^2 - 5 \leq 1 \Leftrightarrow x^2 - 6 \leq 0 \Leftrightarrow \left(x + \sqrt{6}\right)\left(x - \sqrt{6}\right) \leq 0.$$

Los puntos que anulan las factores son $x = \pm\sqrt{6}$. *Con esto, la tabla de signos es,*

	$\left(-\infty, -\sqrt{6}\right)$	$\left(-\sqrt{6}, \sqrt{6}\right)$	$\left(\sqrt{6}, \infty\right)$
$x + \sqrt{6}$	$-$	$+$	$+$
$x - \sqrt{6}$	$-$	$-$	$+$
$\left(x + \sqrt{6}\right)\left(x - \sqrt{6}\right)$	$(+)$	$(-)$	$(+)$

De donde $S_2 = \left[-\sqrt{6}, \sqrt{6}\right]$.
Finalmente la solución de (3.5) es:

$$S = S_1 \cap S_2 = \Big((-\infty, -2] \cup [2, \infty)\Big) \cap \left[-\sqrt{6}, \sqrt{6}\right] = \left[-\sqrt{6}, -2\right] \cup \left[2, \sqrt{6}\right].$$

Ejemplo 3.2.36 .
Resuelva la inecuación $\dfrac{x-2}{x+3}-\dfrac{|x-1|}{x-3}\geq 0.$

Solución:

Aplicaremos dos métodos para resolver la inecuación: la definición de valor absoluto y tricotomía.

1. **Usando la definición.** *Tenemos dos casos:*

   a) *Si* $x-1<0 \Rightarrow |x-1| = -(x-1)$, $\forall x<1$. *Entonces:*

   $$\begin{aligned}\frac{x-2}{x+3}-\frac{|x-1|}{x-3}\geq 0 \quad &\Rightarrow \quad \frac{x-2}{x+3}+\frac{x-1}{x-3}\geq 0\\ &\Rightarrow \quad \frac{2x^2-3x+3}{(x+3)(x-3)}\geq 0.\end{aligned}$$

   Calculando el discriminante, $\Delta = b^2-4ac$*, se ve fácilmente que* $2x^2-3x+3>0$ *para todo* $x\in\mathbb{R}$*. Por tanto, se debe cumplir que:*

   $$(x+3)(x-3)>0,$$

   lo que se satisface para $(-\infty,-3)\cup(3,\infty)$*. Pero la condición* $x<1$ *restringe la solución a* $S_1=(-\infty,-3)$*.*

   b) *Si* $x-1\geq 0 \Rightarrow |x-1| = x-1$, $\forall x\geq 1$. *Entonces:*

   $$\begin{aligned}\frac{x-2}{x+3}-\frac{|x-1|}{x-3}\geq 0 \quad &\Rightarrow \quad \frac{x-2}{x+3}-\frac{x-1}{x-3}\geq 0\\ &\Rightarrow \quad \frac{7x-9}{(x+3)(x-3)}\leq 0.\end{aligned}$$

   Esta inecuación se puede resolver mediante una tabla de signos o por tricotomía. Aplicaremos este último método. Llamando $A(x)=\dfrac{7x-9}{(x+3)(x-3)}$ *e igualando a cero cada uno de los factores tenemos que la recta real se divide en cuatro partes:*

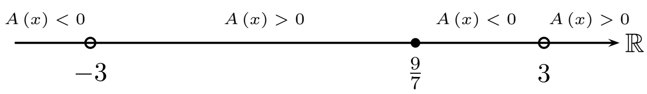


Figura 3.5: Solución de $\frac{x-2}{x+3}-\frac{|x-1|}{x-3}\geq 0.$

Luego,

$$\begin{aligned} x = -4 \in (-\infty, -3) &\Rightarrow A(x) < 0, \\ x = 0 \in \left(-3, \frac{9}{7}\right) &\Rightarrow A(x) > 0, \\ x = 2 \in \left(\frac{9}{7}, 3\right) &\Rightarrow A(x) < 0, \\ x = 4 \in (3, \infty) &\Rightarrow A(x) > 0. \end{aligned}$$

Como $x = \frac{9}{7}$ *satisface la inecuación concluimos que* $S_2 = (-\infty, -3) \cup \left[\frac{9}{7}, 3\right)$.

Finalmente, la solución de la inecuación dada es $S = S_1 \cup S_2 = (-\infty, -3) \cup \left[\frac{9}{7}, 3\right)$.

2. **Tricotomía.** *Llamando* $A(x) = \dfrac{x-2}{x+3} - \dfrac{|x-1|}{x-3}$ *e igualando a cero cada uno de los términos la recta real se divide en cinco partes, lo que se muestra en la Figura 2.*

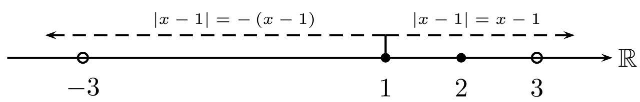


Figura 3.6: Solución de $\frac{x-2}{x+3} - \frac{|x-1|}{x-3} \geq 0$ por Tricotomía.

Además,

$$\begin{aligned} x - 1 < 0 &\Rightarrow x < 1 \ \wedge \ |x-1| = -(x-1) \\ x - 1 \geq 0 &\Rightarrow x \geq 1 \ \wedge \ |x-1| = x-1. \end{aligned}$$

Luego,

a) Caso $(-\infty, -3)$. *Tenemos:*

$$\begin{aligned} A(x) = \frac{x-2}{x+3} - \frac{|x-1|}{x-3} &\Rightarrow A(x) = \frac{x-2}{x+3} + \frac{x-1}{x-3} \\ &\Rightarrow A(x) = \frac{2x^2 - 3x + 3}{(x+3)(x-3)}. \end{aligned}$$

Como se hizo antes, calculando el discriminante del numerador de la última expresión vemos que no se anula para ningún $x \in \mathbb{R}$. *Luego, tomando* $x = -4 \in (-\infty, -3) \Rightarrow A(x) > 0$. *Por tanto,* $S_1 = (-\infty, -3)$.

b) Caso $(-3, 1)$. *En este intervalo la expresión de* $A(x)$ *se reduce a la anterior, por tanto, tomando* $x = 0 \Rightarrow A(x) < 0$, *lo que indica que no hay solución.*

c) *Caso* $(1,2)$. *Tenemos:*

$$A(x)=\frac{x-2}{x+3}-\frac{|x-1|}{x-3} \;\Rightarrow\; A(x)=\frac{x-2}{x+3}-\frac{x-1}{x-3}$$
$$\Rightarrow\; A(x)=\frac{9-7x}{(x+3)(x-3)}.$$

El numerador de esta expresión se anula en $x=\frac{9}{7}\in(1,2)$, *lo que obliga a dividir el intervalo de interés en dos subintervalos.*

i. *Subcaso* $\left(1,\frac{9}{7}\right)$. *Si* $x=\frac{5}{4}\in\left(1,\frac{9}{7}\right)\Rightarrow A(x)<0$, *lo que indica que no hay solución.*

ii. *Subcaso* $\left(\frac{9}{7},2\right)$. *Si* $x=\frac{3}{2}\in\left(\frac{9}{7},2\right)\Rightarrow A(x)>0$, *lo que indica que no hay solución. Además,* $x=\frac{9}{7}$ *y* $x=2$ *satisfacen la inecuación, por lo que tenemos como solución parcial* $S_2=\left[\frac{9}{7},2\right]$.

d) *Caso* $(2,3)$. *En este intervalo la expresión de* $A(x)$ *se reduce a la anterior, por tanto, tomando* $x=\frac{5}{2}\Rightarrow A(x)>0$, *teniéndo como intervalo de solución parcial* $S_3=(2,3)$.

e) *Caso* $(3,\infty)$. *Como ocurrió en el caso anterior,* $A(x)$ *queda expresada de igual forma. Tomando* $x=4\in(3,\infty)\Rightarrow A(x)<0$, *indicando que no hay solución.*

Con todo lo anterior, la solución general es $S=S_1\cup S_2\cup S_3=(-\infty,-3)\cup\left[\frac{9}{7},3\right)$.

En general, para inecuaciones con valor absoluto, el método de tricotomía funciona de manera más óptima que el uso de la definición, pues con ésta, los casos a analizar crecen de la forma 2^n, donde n es la cantidad de valores absolutos existentes en la inecuación.

Ejemplo 3.2.37 .
Resolvamos la siguiente inecuación,

$$||2x-3|-2|>1.$$

Solución:

Aplicando propiedades del valor absoluto tenemos dos conjuntos de desigualdades que resolver,

$$|2x-3|-2>1 \;\vee\; |2x-3|-2<-1,$$

es decir,

$$|2x-3|>3 \;\vee\; |2x-3|<1.$$

Caso 1: $|2x-3|>3$. *Aplicando propiedades del valor absoluto tenemos los subcasos*

$$2x-3>3 \;\;\vee\;\; 2x-3<-3.$$

La inecuación $2x-3>3$ tiene como solución $x>3$. Por su parte, $2x-3<-3$ se satisface para $x<0$. Uniendo soluciones tenemos, $S_1=(-\infty,0)\cup(3,\infty)$.

Caso 2: $|2x-3|<1$. *Aplicando propiedades del valor absoluto,*

$$-1<2x-3<1 \Leftrightarrow (2x-3>-1)\wedge(2x-3<1).$$

La inecuación $2x-3>-1$ se satisface para $x>1$. Por su parte, $2x-3<1$ tiene conjunto solución $x<2$. Intersectando las soluciones tenemos $S_2=(1,2)$.
Finalmente, uniendo las soluciones de cada caso obtenemos:

$$S=S_1\cup S_2=(-\infty,0)\cup(1,2)\cup(3,\infty).$$

Ejemplo 3.2.38

1. *Resuelva la inecuación:*

$$\frac{x+3}{5-x}+\frac{x-5}{x+5}+\frac{2x^2+30}{x^2-25}\geq 2$$

Solución.

Tenemos,

$$\begin{aligned}\frac{x+3}{5-x}+\frac{x-5}{x+5}+\frac{2x^2+30}{x^2-25}\geq 2 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{x+3}{5-x}+\frac{x-5}{x+5}+\frac{2x^2+30}{x^2-25}-2\geq 0\\ &\Leftrightarrow \quad \frac{18}{x+5}\leq 0\\ &\Leftrightarrow \quad x+5<0\\ &\Leftrightarrow \quad x<-5\\ &\Leftrightarrow \quad x\in(-\infty,-5).\end{aligned}$$

2. *Encuentre el conjunto solución de* $\dfrac{1}{x^2-3x+1}<1$.

Solución.

Tenemos,

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2-3x+1}<1 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{x^2-3x+1}-1<0\\ &\Leftrightarrow \quad \frac{x(x-3)}{\left(x-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)}>0.\end{aligned}$$

Los puntos que anulan los factores son $x = 0$, $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, $x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ *y* $x = 3$. *Llamando* $A(x) = \dfrac{x(x-3)}{\left(x - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)}$ *tenemos:*

$$
\begin{aligned}
x = -1 \in (-\infty, 0) &\Rightarrow A(x) > 0, \\
x = \frac{3}{10} \in \left(0, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) &\Rightarrow A(x) < 0, \\
x = 1 \in \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) &\Rightarrow A(x) > 0, \\
x = \frac{14}{5} \in \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, 3\right) &\Rightarrow A(x) < 0, \\
x = 4 \in (3, \infty) &\Rightarrow A(x) > 0.
\end{aligned}
$$

Por tanto, el conjunto solución es:

$$S = (-\infty, 0) \cup \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \cup (3, \infty).$$

3. *Encuentre el conjunto solución de* $\dfrac{2}{x} + \dfrac{x-1}{x+1} \geq 1$.

Solución.

Tenemos,

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{x} + \frac{x-1}{x+1} \geq 1 &\Leftrightarrow \frac{2}{x} + \frac{x-1}{x+1} - 1 \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{2}{x(x+1)} \geq 0.
\end{aligned}
$$

Los puntos que anulan los factores son $x = 0$ *y* $x = -1$. *Luego, la tabla de signos queda como,*

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, \infty)$
x	$-$	$-$	$+$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$x(x+1)$	$(+)$	$(-)$	$(+)$

De donde $S = (-\infty, -1) \cup (0, \infty)$.

4. Encuentre el conjunto solución de $\dfrac{||x+2|-4|}{1+|x|} \geq 1$. Estudie las propiedades de acotamiento de dicho conjunto.

Solución.

Notando que el denominador es siempre positivo y aplicando las propiedades del valor absoluto tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{||x+2|-4|}{1+|x|} \geq 1 \quad &\Leftrightarrow \quad ||x+2|-4| \geq 1+|x| \\ &\Leftrightarrow \quad |x+2|-4 \leq -1-|x| \;\;\vee\;\; |x+2|-4 \geq 1+|x| \\ &\Leftrightarrow \quad |x+2|+|x|-3 \leq 0 \;\;\vee\;\; |x+2|-|x|-5 \geq 0\end{aligned}$$

Para resolver $|x+2|+|x|-3 \leq 0$ tenemos los siguientes casos:

a) Si $x < -2$, implica $x \geq -\frac{5}{2}$. Por tanto, $S_1 = \left[-\frac{5}{2}, -2\right)$.
b) Si $-2 \leq x < 0$, implica $-1 < 0$. Por tanto, $S_2 = \mathbb{R}$.
c) Si $x \geq 0$, implica $x < \frac{1}{2}$. Por tanto, $S_3 = \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Por su parte, para $|x+2|-|x|-5 \geq 0$ tenemos los siguientes casos:

a) Si $x < -2$, implica $-7 \geq 0$. Por tanto, no hay solución.
b) Si $-2 \leq x < 0$, implica $x \geq \frac{3}{2}$. Por tanto, no hay solución.
c) Si $x \geq 0$, implica $-3 \geq 0$. Por tanto, no hay solución.

Así, la solución buscada es: $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \left[-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Vemos que S es acotado, además, $\inf\{S\} = \min\{S\} = -\frac{5}{2}$ y $\sup\{S\} = \max\{S\} = \frac{1}{2}$.

5. Un cliente trata de decidir si compra el automóvil A o B. El A que cuesta 10000 dólares, tiene un rendimiento de 30 $\frac{\text{mi}}{\text{gal}}$, y su seguro es 550 dólares anuales. El automóvil B cuesta 12000 dólares, su rendimiento es de 40 $\frac{\text{mi}}{\text{gal}}$ y su seguro cuesta 600 dólares anuales. Suponga que el cliente recorre 15000 millas por año, y que el precio de la gasolina permanece constante a $1{,}25$ dólares por galón. Tan sólo con esos datos, determine cuánto tiempo pasará para que el costo del automóvil B sea menor que el de A.

Solución.

Sea t el tiempo en años que debe transcurrir para que el costo del automóvil B sea mayor que el costo del automóvil A. Como el costo total es igual a los costos fijos más los costos variables tenemos que:

$$\text{costos de } A = 10000 + 550t + \frac{15000}{30} \cdot \frac{125}{100} t = 10000 + 1175t,$$

y

$$\textit{costos de } B = 12000 + 600t + \frac{15000}{40} \cdot \frac{125}{100} t = 12000 + \frac{4275}{4} t.$$

Luego, tenemos la inecuación:

$$12000 + \frac{4275}{4} t < 10000 + 1175t,$$

de donde $t > \frac{320}{17} \approx 18,8$ *años. Es decir, a partir de* $18,8$ *el costo del automóvil* B *es mayor que el costo del automóvil* A.

3.3. Números complejos

Primeros conceptos

Encontrar solución a una ecuación tan sencilla como $x^2+1=0$, nos lleva al hecho imposible en $\mathbb{R}$ de que el cuadrado de un número real sea negativo. Tal situación nos obliga a definir un nuevo conjunto numérico donde tal posibilidad tenga sentido, permitiendo encontrar soluciones a ecuaciones como la indicada anteriormente. Este nuevo conjunto numérico está definido como:

$$\mathbb{C} = \{z = (a,b) \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\},$$

denominado **conjunto de los números complejos**. La primera componente se llama parte real, denotada por $\mathrm{Re}(z)$ y la segunda componente se denomina parte imaginaria $\mathrm{Im}(z)$. Geométricamente un número complejo $z=(a,b)$ se representa como un vector que comienza en el origen $(0,0)$ del plano y termina en el punto (a,b). El eje de las abscisas se llama eje real y el de las ordenadas eje imaginario, además el plano recibe el nombre plano complejo o Argand.

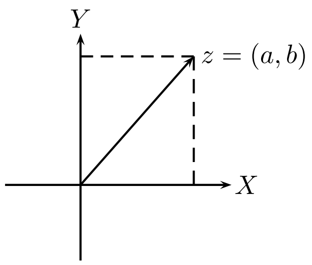


Figura 3.7: Representación geométrica del complejo $z=(a,b)$.

Los complejos z de la forma $z=(a,0)$, $a \in \mathbb{R}$ se llaman reales puros. Por su parte, los complejos z tal que $z=(0,b)$, $b \in \mathbb{R}$ se denominan imaginarios puros. Los reales puros se identifican con $\mathbb{R}$, por tanto, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Definición 3.3.1 (Igualdad de complejos)
Dos complejos $z_1 = (a, b)$ *y* $z_2 = (c, d)$ *son iguales si y solo si sus partes reales son iguales y sus partes imaginarias son iguales, es decir:*

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow a = c \wedge b = d.$$

Ejemplo 3.3.2
Encuentre $x, y \in \mathbb{R}$ *tal que el complejo* $z_1 = (x + 5, 13)$ *sea igual a* $z_2 = (20, 3 + 2y)$.
Solución.
Igualando las partes reales y las partes imaginarias tenemos $x + 5 = 20$ *y* $3 + 2y = 13$, *de donde* $x = 15$ *e* $y = 5$.

Estructura Algebraica de $\mathbb{C}$

En $\mathbb{C}$ se define la suma de dos números complejos $z_1 = (a_1, b_1)$ y $z_2 = (a_2, b_2)$ como:

$$z_1 + z_2 = (a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2).$$

Por su parte, se define el producto de z_1 y z_2 como:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1).$$

En particular: $(a, b) = (a, 0) + (0, b)$ y $(0, 1) \cdot (y, 0) = (0, y)$, luego
$(a, b) = (a, 0) + (0, 1) \cdot (b, 0)$, llamando $a = (a, 0)$ e $i = (0, 1)$ tenemos:

$$(a, b) = a + bi,$$

denominada forma normal o canónica de un complejo. Notemos que:

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = -1.$$

Observación 3.3.3 $i^3 = -i$, $i^4 = 1$.

Con esta nueva escritura tenemos que las operaciones de suma y producto quedan escritas como:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= a + bi + c + di = (a + c) + (b + d)\, i \\ z_1 \cdot z_2 &= (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)\, i. \end{aligned}$$

Sean $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, entonces la suma y producto de números complejos tienen las siguientes propiedades:

1. Conmutatividad:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= z_2 + z_1 \\ z_1 \cdot z_2 &= z_2 \cdot z_1 \end{aligned}$$

2. Asociatividad:

$$\begin{aligned} z_1 + (z_2 + z_3) &= (z_1 + z_2) + z_3 \\ z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) &= (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 \end{aligned}$$

3. Existencia de Neutros:
   - Para todo $z_1 \in \mathbb{C}$ existe $0 \in \mathbb{C}$ tal que $z_1 + 0 = 0 + z_1 = z_1$.
   - Para todo $z_1 \in \mathbb{C}$ existe $1 \in \mathbb{C}$ tal que $z_1 \cdot 1 = 1 \cdot z_1 = z_1$.

4. Existencia de inversos:
   - Para todo complejo $z = a + bi$ existe $-z = -a - bi$ tal que $z + (-z) = (-z) + z = 0$.
   - Para todo complejo $z = a + bi$ no nulo existe $z^{-1} = \dfrac{a}{a^2 + b^2} - \dfrac{b}{a^2 + b^2} i$ tal que $z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = 1$.

5. Distributividad del producto respecto a la suma:

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3.$$

De acuerdo a lo anterior decimos que $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ tiene estructura algebraica de cuerpo.

Proposición 3.3.4
$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ es un dominio de integridad, es decir, si $z, w \in \mathbb{C}$ tales que $z \cdot w = 0$, entonces $z = 0 \vee w = 0$.

Ejemplo 3.3.5
Resuelva la ecuación $(z + i)^3 + (z - i)^3 = 0$.
Solución.
Desarrollando los cubos de binomio y teniendo presente las potencias de la unidad imaginaria:

$$\begin{aligned} (z+i)^3 + (z-i)^3 &= 0 \\ z^3 + 3z^2 i + 3zi^2 + i^3 + z^3 - 3z^2 i + 3zi^2 - i^3 &= 0 \\ 2z^3 - 6z &= 0 \\ 2z\left(z^2 - 3\right) &= 0, \end{aligned}$$

lo que implica $z_1 = 0$, $z_2 = \sqrt{3}$ y $z_3 = -\sqrt{3}$.

Definición 3.3.6 (Complejo conjugado)
Sea $z \in \mathbb{C}$, $z = a + bi$, el complejo conjugado de z, denotado por $\bar{z}$, es $\bar{z} = a - bi$.

Definición 3.3.7 (Módulo de un complejo)
Sea $z = a + bi \in \mathbb{C}$. Se define el módulo o valor absoluto de z, denotado por $|z|$, como

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Geométricamente el módulo de un complejo z representa la longitud del vector asociado al complejo.
Notemos que:

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(z) &\leq |\mathrm{Re}(z)| \leq |z|, \\ \mathrm{Im}(z) &\leq |\mathrm{Im}(z)| \leq |z|. \end{aligned}$$

Asociado a un número complejo no nulo $z = a + bi$ existen otros tres complejos destacados que están en la circunferencia centrada en el origen y de radio $|z|$: $\overline{z} = a - bi$, $-z = -a - bi$, $-\overline{z} = -a + bi$.

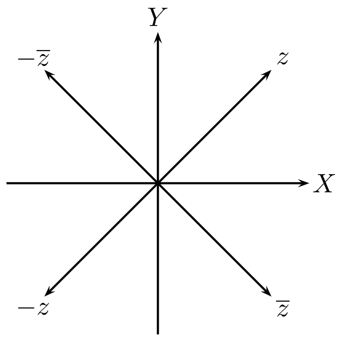


Figura 3.8: Representación geométrica de z, $\overline{z}$, $-z$ y $-\overline{z}$.

Proposición 3.3.8
Sean $z, w \in \mathbb{C}$, entonces:

1. $\overline{\overline{z}} = z$
2. $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$
3. $z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$
4. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$
5. $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
6. $|z| = |\overline{z}|$
7. $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$
8. $\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}$, $w \neq 0$
9. $z \cdot \overline{z} = |z|^2$
10. $|z + w| \leq |z| + |w|$
11. $||z| - |w|| \leq |z - w|$

Demostración.
Demostraremos solo las propiedades 8. y 10., las restantes quedan propuestas como ejercicios al lector.

8. $|z \cdot w|^2 = (z \cdot w)(\overline{z \cdot w}) = z \cdot w \cdot \bar{z} \cdot \bar{w} = z \cdot \bar{z} \cdot w \cdot \bar{w} = |z|^2|w|^2 \Rightarrow |z \cdot w| = |z| \cdot |w|.$

10. Por un lado tenemos:

$$\begin{aligned}
|z+w|^2 &= (z+w) \cdot \overline{z+w} \\
&= (z+w)(\bar{z}+\bar{w}) \\
&= z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w} \\
&= |z|^2 + (z\bar{w} + w\bar{z}) + |w|^2 \\
&= |z|^2 + (z\bar{w} + \overline{z\bar{w}}) + |w|^2.
\end{aligned}$$

Pero, $z\bar{w} + \overline{z\bar{w}} = 2\,\mathrm{Re}(z\bar{w}) \leq 2|z \cdot \bar{w}| = 2|z||\bar{w}| = 2|z||w|$. Luego,

$$|z+w|^2 = |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z|+|w|)^2 \Rightarrow |z+w| \leq |z| + |w|.$$

■

Ejemplo 3.3.9
Considere el cuociente de números complejos: $z = \dfrac{2-3i}{-1+2i}$.

1. *Escriba* z *en forma normal.*

2. *Determine el módulo de* z.

Solución

1. *Amplificando por el conjugado de* $-1+2i$ *tenemos:*

$$\begin{aligned}
z &= \frac{2-3i}{-1+2i} \cdot \frac{-1-2i}{-1-2i} \\
&= \frac{-2-6-4i+3i}{(-1)^2-(2i)^2} \\
&= -\frac{8}{5} - \frac{1}{5}i.
\end{aligned}$$

2. $|z| = \sqrt{\left(-\frac{8}{5}\right)^2 + \left(-\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{1}{5}\sqrt{65}.$

Ejemplo 3.3.10
Resuelva la ecuación $z \cdot \overline{z} + 3(z - \overline{z}) = 4 - 3i$.

Solución.

Consideremos $z = a + bi$, *que reemplazado en la ecuación dada genera:*

$$a^2 + b^2 + 6bi = 4 - 3i,$$

de donde:

$$\begin{aligned} a^2+b^2 &= 4 \quad (3.6)\\ 6b &= -3 \quad (3.7)\end{aligned}$$

De (3.7) tenemos $b=-\dfrac{1}{2}$*, lo que sustituido en (3.6) implica* $a=\pm\dfrac{\sqrt{15}}{2}$*. Por tanto, las soluciones de la ecuación son* $z_1=\dfrac{\sqrt{15}}{2}-\dfrac{1}{2}i$ *y* $z_2=-\dfrac{\sqrt{15}}{2}-\dfrac{1}{2}i$.

Ejemplo 3.3.11
Demostremos que $|z+i|=|z-i| \Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$.
Solución.
$(\Leftarrow)$ *Si* $z=a\in\mathbb{R}$*, entonces* $|a+i|=\sqrt{a^2+1}=|a-i|$.
$(\Rightarrow)$ *Aplicando las propiedades del módulo y el conjugado tenemos:*

$$\begin{aligned} |z+i|=|z-i| &\Rightarrow |z+i|^2=|z-i|^2\\ &\Rightarrow (z-i)\,\overline{(z-i)}=(z+i)\,\overline{(z+i)}\\ &\Rightarrow (z-i)\left(\overline{z}-\overline{i}\right)=(z+i)\left(\overline{z}+\overline{i}\right)\\ &\Rightarrow (z-i)\,(\overline{z}+i)=(z+i)\,(\overline{z}-i)\\ &\Rightarrow z\overline{z}+iz-i\overline{z}+1=z\overline{z}-iz+i\overline{z}+1\\ &\Rightarrow 2iz=2i\overline{z}\\ &\Rightarrow z=\overline{z}\\ &\Rightarrow z\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Ejemplo 3.3.12
Encuentre dos números complejos que cumplen simultáneamente las siguientes condiciones:

(i) *La suma de ellos es* $4-3i$

(ii) *La parte real de uno de ellos es* 3

(iii) *El módulo del otro es* $\sqrt{26}$

Solución.
Sean $z=3+ai$ *y* $w=b+ci$ *los números complejos buscados. Entonces:*

$$\begin{aligned} z+w &= 4-3i \quad (3.8)\\ b^2+c^2 &= 26 \quad (3.9)\end{aligned}$$

La ecuación (3.8) corresponde a:

$$(3+b)+(a+c)i=4-3i \Rightarrow \left\{\begin{aligned} 3+b &= 64\\ a+c &= -3\end{aligned}\right.$$

de donde, $b = 1$ *y* $a = -3 - c$.
De (3.9) tenemos $c^2 = 26 - 1^2$*, lo que implica* $c_1 = 5$ *o* $c_2 = -5$*. Entonces,* $a_1 = -8$ *o* $a_2 = 2$*. Finalmente, las soluciones son:* $z_1 = 3 - 8i$ *y* $w_1 = 1 + 5i$ *o* $z_2 = 3 + 2i$ *y* $w_2 = 1 - 5i$.

Ejemplo 3.3.13
Sea w *un número complejo no real. Encuentre el conjunto de todos los números complejos* z *tales que:*

$$\frac{|z - w|}{|z - \overline{w}|} = 1$$

Solución.

De acuerdo al enunciado tenemos:

$$\begin{aligned}
|z - w| &= |z - \overline{w}| \\
(z - w)\overline{(z - w)} &= (z - \overline{w})\overline{(z - \overline{w})} \\
(z - w)(\overline{z} - \overline{w}) &= (z - \overline{w})(\overline{z} - w) \\
z\overline{z} - z\overline{w} - w\overline{z} + w\overline{w} &= z\overline{z} - zw - \overline{z}\overline{w} + w\overline{w} \\
-z\overline{w} - \overline{z}w &= -zw - \overline{z}\overline{w} \\
\overline{z}(\overline{w} - w) &= z(\overline{w} - w)
\end{aligned}$$

pero como $w \neq \overline{w}$*, se obtiene* $\overline{z} = z$ *es decir* z *es un número real.*

Ejemplo 3.3.14
Determine todos los $z \in \mathbb{C}$ *tales que* $|z|^2 + 3\,\mathrm{Re}\,(z^2) = 4$.

Solución.

Supongamos que $z = x + yi$*, entonces* $|z|^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$*, por tanto:*

$$z^2 + 3\,\mathrm{Re}\left(z^2\right) = x^2 + y^2 + 3\left(x^2 - y^2\right) = 4,$$

de donde obtenemos:

$$x^2 - \frac{y^2}{2} = 1,$$

que corresponde a la hipérbola como se verá en el capítulo siguiente.

3.4. Ejercicios propuestos

1. Si $p(n) : r + r^2 + r^3 + \ldots + r^n = r\dfrac{(1 - r^n)}{1 - r}$, con $r \neq 0, 1$, entonces:

   a) Escriba $p(1)$, $p(2)$, $p(3)$, $p(4)$.

b) Demuestre, usando inducción, que $p(n)$ se cumple $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

2. Sabiendo que $\{a_n\}$ es una sucesión tal que

$$a_1 = \frac{1}{3},\ a_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2}\ ,\ a_3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3}, \cdots$$

   a) Escriba el término general a_n.

   b) Pruebe que $a_n = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{3^n}\right)$.

3. Considere la sucesión $b_n = (-2)^n$:

   a) Escriba los 5 primeros términos de la sucesión.

   b) Calcule la suma $b_1 + b_3 + b_5 + b_7 + \ldots + b_{99}$.

4. Si a es un real no nulo y $r \neq 0, 1$, entonces conjeture una fórmula para la suma:

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^n.$$

5. Pruebe por inducción las siguientes igualdades:

   a) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

   b) $1(1!) + 2(2!) + 3(3!) + \ldots + n(n!) = (n+1)! - 1$.

6. Demuestre que $\sum\limits_{k=0}^{m} \begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix} = 2^m$.

7. Determine el sexto término en el desarrollo de $\left(\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x}{3}\right)^6$.

8. Determine el coeficiente de x en $\left(9x - \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{13}$.

9. Determine el coeficiente de x^{10} en caso que exista en $(1 + 2x + 3x^2)(1 + x)^{12}$.

10. ¿Qué valor debe tener x para que el tercer término del desarrollo de $\left(\dfrac{3}{x} - x\right)^5$ sea igual a 90.

11. Pruebe que si $0 < a < 1$ entonces $a^n < a$. $\forall n \geq 2,\ n \in \mathbb{Z}^+$.

12. Pruebe que para todo $x \in \mathbb{R}^+, x + x^{-1} \geq 2$.

13. Muestre que si $a, b \in \mathbb{R}^+$ entonces $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

14. Resuelva las siguientes ecuaciones:

a) $|3x+2|=8$

b) $|x+4|=2x+1$

c) $|5x+1|-|3x-6|=0$

d) $|x^2-1|=|x^2+1|+|x|$

15. *a*) Halle el menor valor de $M\in\mathbb{R}^+$ que verifique :si $|x+3|<\frac{1}{2}$ entonces $|4x-1|<M$

    b) Halle el menor valor de $k\in\mathbb{R}^+$ que verifique:si $|x|\leq 1$ entonces $\left|\dfrac{x+2}{x-2}\right|\leq k$

16. Demuestre que:

    a) Si $x\in\mathbb{R}$ tal que $|x+1|<2$, entonces $\left|\dfrac{x+2}{x+5}\right|<\dfrac{5}{2}$

    b) $|x-5|<3\Rightarrow\dfrac{1}{|x^2-1|}$

    c) $\left|\frac{2x-3}{5}\right|<1\rightarrow 0<16-x^2<40$

17. Encuentre el conjunto solución de las siguientes inecuaciones:

    a) $|x^2-x-6|\leq|x+2|$

    b) $|x-1|<2<|x+1|$

    c) $|x-2|+|x-1|>1$

    d) $|x-2|+|x^2+3|\leq|x+1|$

    e) $\left|\dfrac{x^2+1}{x-1}\right|<2$

    f) $|x^2-|6x+3||<4$

    g) $\dfrac{|x-3|-|x+4|}{4+x}>1$

    h) $\dfrac{3-|x-1|}{4+x}<0$

18. Considerande la inecuación: $\dfrac{|x-1|+x+1}{x+2}>4$

    a) Encuentre si conjunto solución.

    b) Estudie si el conjunto solución es acotado e indique sus elementos principales.

19. Dados $z_1=-3+4i$ y $z_2=5+i$. Calcule z_1+z_2, $z_1\cdot z_2$, z_1^{-1}, z_2^{-1}.

20. Calcule el módulo del complejo: $\frac{(2-3i)^4(1-i)^3}{5+i}$.

21. Demuestre que $|z+i|=|z-i|\Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$.

Capítulo 4

Elementos de trigonometría y geometría analítica

4.1. Razones trigonométricas

Primeros conceptos

Definición 4.1.1 (Radián)
Un radián es la medida de un ángulo del centro de un círculo cuyos lados intersectan un arco de circunferencia de longitud igual al radio.

Como la longitud de la circunferencia es $L = 2\pi r$, si $r = 1$ tenemos que $2\pi\,\mathrm{rad} = 360°$, de donde $1\,\mathrm{rad} \approx 57,3°$ y $1° \approx 0{,}017\,\mathrm{rad}$. El lector demostrará sin dificultad que si s es un arco de circunferencia y α es el ángulo del centro comprendido medido en radianes, entonces $s = \alpha r$.

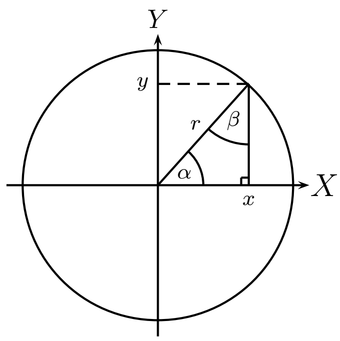


Figura 4.1: Circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$.

Consideremos la circunferencia de radio r centrada en el origen, dada por $x^2 + y^2 = r^2$, mostrada en la Figura 4.1. Definimos las razones trigonométricas,

1. **Seno del ángulo** α, denotada por $\operatorname{sen}\alpha$ como,
$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{y}{r}.$$
2. **Coseno del ángulo** α, denotada por $\cos\alpha$ como,
$$\cos\alpha = \frac{\text{Cateto Adyacente}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{x}{r}.$$
3. **Tangente del ángulo** α, denotada por $\operatorname{tg}\alpha$ como,
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Cateto Adyacente}} = \frac{y}{x}.$$
4. **Cotangente del ángulo** α, denotada por $\operatorname{ctg}\alpha$ como,
$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\text{Cateto Adyacente}}{\text{Cateto Opuesto}} = \frac{x}{y}.$$
5. **Secante del ángulo** α, denotada por $\sec\alpha$ como,
$$\sec\alpha = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto Adyacente}} = \frac{r}{x}.$$
6. **Cosecante del ángulo** α, denotada por $\csc\alpha$ como,
$$\csc\alpha = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto Opuesto}} = \frac{r}{y}.$$

Observación 4.1.2 *De la Figura 4.1 puede deducirse que* $\operatorname{sen}(\alpha + 2\pi) = \operatorname{sen}\alpha$*, asi como* $\cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha$*,...*

Si $r = 1$ tenemos la llamada **circunferencia unitaria**, donde se satisface que $\operatorname{sen}\alpha = y$ y $\cos\alpha = x$.
De la definición de razones trigonométricas se deducen las siguientes identidades básicas:

(a) $\operatorname{sen}\alpha \cdot \csc\alpha = 1.$

(b) $\cos\alpha \cdot \sec\alpha = 1.$

(c) $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1.$

(d) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}.$

(e) $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}.$

(f) $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$

La expresión (a) indica que $\operatorname{sen}\alpha$ y $\csc\alpha$ son funciones recíprocas, lo mismo ocurre con las parejas $\cos\alpha$, $\sec\alpha$ y $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$. De todo esto se deduce que basta con conocer el $\operatorname{sen}\alpha$

y $\cos\alpha$ para tener el valor de las restantes funciones trigonométricas.
Si la identidad (f) se divide por $\cos^2\alpha \neq 0$ obtenemos $\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha$ y nuevamente dividiendo la identidad (f) entre $\operatorname{sen}^2\alpha \neq 0$ resulta $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \csc^2\alpha$.

Por otro lado, en la Figura 4.1 tenemos que $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{rad}$ y se satisfacen las siguientes igualdades, , conocidas como **cofunciones**[1]:

(a) $\operatorname{sen}\alpha = \cos\beta$

(b) $\cos\alpha = \operatorname{sen}\beta$

(c) $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta$

(d) $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}\beta$

(e) $\sec\alpha = \csc\beta$

(f) $\csc\alpha = \sec\beta$

Considerando un triángulo equilátero de lado $2a$ podemos calcular el valor de las razones trigonométricas de $\frac{\pi}{6}$ rad y $\frac{\pi}{3}$ rad. De igual forma, con un triángulo isósceles rectángulo con catetos de longitud a determinamos el valor de las razones trigonométricas de $\frac{\pi}{4}$ rad. Por otra parte, utilizando la circunferencia unitaria encontramos los valores de las razones trigonométricas para 0 rad, $\frac{\pi}{2}$ rad, π rad y $\frac{3\pi}{2}$ rad. Todo esto se resume en la siguiente tabla:

Razón-Ángulo	$0\,\mathrm{rad}$	$\frac{\pi}{6}\,\mathrm{rad}$	$\frac{\pi}{4}\,\mathrm{rad}$	$\frac{\pi}{3}\,\mathrm{rad}$	$\frac{\pi}{2}\,\mathrm{rad}$	$\pi\,\mathrm{rad}$	$\frac{3\pi}{2}\,\mathrm{rad}$
$\operatorname{sen}\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$	0	$\nexists$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\nexists$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\nexists$	0
$\sec\alpha$	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	$\nexists$	-1	$\nexists$
$\csc\alpha$	$\nexists$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1	0	-1

De la circunferencia mostrada en la Figura 4.1, no es difícil ver que los signos de las razones trigonométricas varían dependiendo en qué cuadrante se encuentre el ángulo considerado. En la siguiente tabla se resume lo anterior.

Razón-Cuadrante	I	II	III	IV
Seno	$+$	$+$	$-$	$-$
Coseno	$+$	$-$	$-$	$+$
Tangente	$+$	$-$	$+$	$-$
Cotangente	$+$	$-$	$+$	$-$
Secante	$+$	$-$	$-$	$+$
Cosecante	$+$	$+$	$-$	$-$

[1]Esto se debe a que a las razones trigonométricas también se les considera como funciones trigonométricas

Ejemplo 4.1.3
Si $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{12}{13}$ *y* $\operatorname{tg}\alpha < 0$, *determine los valores de las razones trigonométricas restantes.*

Solución.

Como $\operatorname{sen}\alpha > 0$ *y* $\operatorname{tg}\alpha < 0 \Rightarrow \alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. *Usando la identidad:* $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ *tenemos:*

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha} = \pm\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2} = \pm\sqrt{\frac{169-144}{13^2}} = \pm\frac{5}{13},$$

pero la razón coseno es negativa en el segundo cuadrante, por lo cual, $\cos\alpha = -\dfrac{5}{13}$.
Por otro lado, sabemos que $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = -\dfrac{12}{5}$. *Ahora las razones recíprocas:*

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = -\frac{13}{5}, \quad \csc\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{13}{12}, \quad \operatorname{ctg}(\alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = -\frac{5}{12}.$$

Es posible conocer el valor de las razones trigonométrica de ciertos ángulos escritos como suma o resta de ciertos ángulos conocidos. Este proceso se llama **reducción** y se resumen en la siguiente proposición.

Proposición 4.1.4

1. *Las funciones trigonométricas de* $\frac{\pi}{2}\,\mathrm{rad}$ *y* $\frac{3\pi}{2}\,\mathrm{rad}$ *más o menos un ángulo agudo son iguales a la cofunción del ángulo agudo, con el signo que le corresponde a la cofunción en el cuadrante al que pertenece el ángulo original.*

2. *Las funciones trigonométricas de* $\pi\,\mathrm{rad}$ *y* $2\pi\,\mathrm{rad}$ *más o menos un ángulo agudo son iguales a la misma función del ángulo agudo, con el signo que le corresponde a la cofunción en el cuadrante al que pertenece el ángulo agudo.*

Ejemplo 4.1.5

1. $\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right) = +\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. $\operatorname{tg}\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \operatorname{tg}\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right) = +\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$.

3. $\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. $\operatorname{ctg}\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$.

4.2. Identidades y ecuaciones trigonométricas

Una igualdad trigonométrica puede ser verdadera para todo valor del ángulo o sólo para algunos. En el primer caso tenemos una **Identidad Trigonométrica** la que debe ser demostrada y en el segundo **Ecuación Trigonométrica** que debe ser resuelta, vale decir, encontrar todos los valores del ángulo que la satisfacen.
Como ya conocemos las identidades básicas, en la proposición siguiente presentamos un listado de otras identidades que son de uso frecuente en varias áreas de la matemática.

Proposición 4.2.1 *Tenemos las siguientes identidades trigonométricas,*

1. $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha.$

2. $\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\beta\cos\alpha.$

3. $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\alpha.$

4. $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\alpha.$

5. $\operatorname{sen}(2\alpha) = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha.$

6. $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1.$

7. $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$

8. $\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$

9. $\operatorname{tg}(2\alpha) = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}.$

10. $\operatorname{sen}^2\alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\alpha)).$

11. $\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\alpha)).$

Ejemplo 4.2.2
Demuestre que $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sec\alpha - 1} + \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sec\alpha + 1} = 2\operatorname{ctg}\alpha\sec\alpha.$

Solución.

En efecto,

$$
\begin{aligned}
\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sec\alpha - 1} + \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sec\alpha + 1} &= \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\left[\frac{1}{\frac{1}{\cos\alpha} - 1} + \frac{1}{\frac{1}{\cos\alpha} + 1}\right] \\
&= \operatorname{sen}\alpha\left[\frac{1}{1-\cos\alpha} + \frac{1}{1+\cos\alpha}\right] \\
&= \operatorname{sen}\alpha\left[\frac{2}{1-\cos^2\alpha}\right] \\
&= \frac{2}{\operatorname{sen}\alpha} \\
&= 2\operatorname{ctg}\alpha\sec\alpha.
\end{aligned}
$$

Ejemplo 4.2.3

Demuestre que: $\sec^2\phi\csc^2\phi = (\operatorname{tg}\phi + \operatorname{ctg}\phi)^2$.

Solución.

En efecto,

$$
\begin{aligned}
(\operatorname{tg}\phi + \operatorname{ctg}\phi)^2 &= \operatorname{tg}^2\phi + 2\operatorname{tg}\phi\operatorname{ctg}\phi + \operatorname{ctg}^2\phi \\
&= \operatorname{tg}^2\phi + 2 + \operatorname{ctg}^2 \\
&= \operatorname{tg}^2\phi + 1 + 1 + \operatorname{ctg}^2\phi \\
&= \sec^2\phi + \csc^2\phi = \frac{1}{\cos^2\phi} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\phi} \\
&= \frac{\operatorname{sen}^2\phi + \cos^2\phi}{\cos^2\phi\operatorname{sen}^2\phi} \\
&= \frac{1}{\cos^2\phi\operatorname{sen}^2\phi} \\
&= \sec^2\phi\csc^2\phi
\end{aligned}
$$

Ejemplo 4.2.4

Demuestre que $\operatorname{sen}(4\alpha)\cos(\alpha) - \operatorname{sen}(3\alpha)\cos(2\alpha) = \operatorname{sen}\alpha\cos(2\alpha)$.

Solución.

En efecto, observemos que:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen}(4\alpha)\cos(\alpha) &= \operatorname{sen}(3\alpha + \alpha)\cos(\alpha) \\
&= (\operatorname{sen}(3\alpha)\cos(\alpha) + \cos(3\alpha)\operatorname{sen}(\alpha))\cos(\alpha) \\
&= \operatorname{sen}(3\alpha)\cos^2(\alpha) + \cos(3\alpha)\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha).
\end{aligned}
$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(3\alpha)\cos(2\alpha) &= \operatorname{sen}(3\alpha)(\cos^2(\alpha) - \operatorname{sen}^2(\alpha)) \\ &= \operatorname{sen}(3\alpha)\cos^2(\alpha) - \operatorname{sen}(3\alpha)\operatorname{sen}^2(\alpha).\end{aligned}$$

Reemplazando en la identidad tenemos:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(4\alpha)\cos(\alpha) - \operatorname{sen}(3\alpha)\cos(2\alpha) &= (\cos(3\alpha)\cos\alpha + \operatorname{sen}(3\alpha)\operatorname{sen}(\alpha))\operatorname{sen}(\alpha) \\ &= \cos(3\alpha - \alpha)\operatorname{sen}(\alpha) = \cos(2\alpha)\operatorname{sen}(\alpha).\end{aligned}$$

Para resolver una ecuación trigonométrica no existe un método general, pero siempre conviene expresar la igualdad en término de un sólo tipo de ángulo, en lo posible llevar todo a senos o cosenos. Dependiendo de la ecuación será necesario factorizar, extraer raíz o elevar a alguna potencia, por lo cual, siempre debe verificarse las soluciones encontradas.

Ejemplo 4.2.5
En el intervalo $[0, 2\pi]$ *resuelva* $\cos x - \cos 2x = 0$.

Solución.

Escribiendo la ecuación en ángulos simples y en términos del coseno tenemos:

$$2\cos^2 x - \cos x + 1 = 0,$$

es decir,

$$(2\cos x + 1)(\cos x - 1) = 0,$$

de donde:

$$\begin{aligned}\cos x = 1 \quad &\Rightarrow \quad x = 0\,\mathrm{rad}, 2\pi\,\mathrm{rad} \\ \cos x = -\frac{1}{2} \quad &\Rightarrow \quad x = \frac{2\pi}{3}\,\mathrm{rad}, \frac{4\pi}{3}\,\mathrm{rad}\,.\end{aligned}$$

Tenemos el conjunto solución: $S = \left\{0\,\mathrm{rad}, \frac{2\pi}{3}\,\mathrm{rad}, \frac{4\pi}{3}\,\mathrm{rad}, 2\pi\,\mathrm{rad}\right\}$.

Ejemplo 4.2.6
En el intervalo $[0, 2\pi]$ *resuelva* $2\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 2x$.

Solución.

Escribiendo la ecuación en términos de ángulos simples y luego factorizando tenemos:

$$2\operatorname{sen} x\,(1 - \cos x) = 0,$$

de donde:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} x = 0 \quad &\Rightarrow \quad x = 0\,\mathrm{rad}, \pi\,\mathrm{rad}, 2\pi\,\mathrm{rad} \\ \cos x = 1 \quad &\Rightarrow \quad x = 0\,\mathrm{rad}, 2\pi\,\mathrm{rad}\,.\end{aligned}$$

Es decir, tenemos por conjunto solución: $S = \{0\,\mathrm{rad}, \pi\,\mathrm{rad}, 2\pi\,\mathrm{rad}\}$.

Ejemplo 4.2.7
En el intervalo $[0, 2\pi]$ *resuelva* $2\cos^2 x + \operatorname{sen} x = 1$.
Solución.
Usando identidades trigonométricas tenemos que:

$$2(1 - \operatorname{sen}^2 x) + \operatorname{sen} x = 1 \ \Rightarrow 2\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - 1 = 0.$$

Usando el cambio de variables $y = \operatorname{sen} x$ *obtenemos* $2y^2 - y - 1 = 0$, *con lo cual tenemos dos posibilidades que* $y = 1$ *o* $y = -\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x = 1 \quad &\Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{rad} \\ \operatorname{sen} x = -\frac{1}{2} \quad &\Rightarrow \quad x = \frac{7\pi}{6}\,\mathrm{rad}, \frac{11\pi}{6}\,\mathrm{rad}\,. \end{aligned}$$

Es decir, tenemos por conjunto solución: $S = \left\{\frac{\pi}{2}\,\mathrm{rad}, \frac{7\pi}{6}\,\mathrm{rad}, \frac{11\pi}{6}\,\mathrm{rad}\right\}$.

4.3. Aplicaciones

Para los siguientes resultados consideremos el triángulo ABC cualquiera de lados $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ y $\overline{BC} = a$:

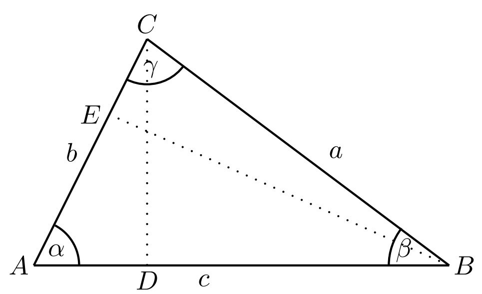


Figura 4.2: Triángulo ABC cualquiera.

Teoremas del seno y coseno

Teorema 4.3.1 (Ley de los Senos)
En todo triángulo los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos. Es decir,

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}.$$

Demostración.
En la Figura 4.2 sean $\overline{CD}$ y $\overline{BE}$ alturas correspondientes a los vértices C y B respectivamente. Luego, tenemos:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{CD}}{a} \Rightarrow \overline{CD} = a\operatorname{sen}\alpha,$$

y

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{\overline{CD}}{b} \Rightarrow \overline{CD} = b\operatorname{sen}\beta,$$

de donde concluimos:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta}.$$

Razonando de igual forma con la altura $\overline{BE}$ y los ángulos α y γ obtenemos:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma},$$

y por tanto, se concluye la afirmación del teorema. ■

Teorema 4.3.2 (Ley de los Cosenos)
En todo triángulo el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos menos el doble producto de éstos por el coseno del ángulo comprendido por ellos. Es decir,

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha, \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta, \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma. \end{aligned}$$

Demostración.
Mostremos la primera de las afirmaciones. De la Figura 4.2 tenemos que:

$$\begin{aligned} a^2 &= \overline{CD}^2 + \overline{BD}^2 \\ b^2 &= \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2. \end{aligned}$$

Restando estas igualdades obtenemos:

$$a^2 - b^2 = \overline{DB}^2 - \overline{AD}^2.$$

Pero, $\overline{BD} = c - \overline{AD}$, lo que sustituido en la igualdad anterior resulta:

$$a^2 - b^2 = c^2 - 2c \cdot \overline{AD}.$$

Pero del ΔADC tenemos que $\overline{AD} = b\cos\alpha$, por lo que concluimos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

■

Aplicación de la trigonometría a los números complejos

Las ideas trigonométricas tratadas anteriormente se pueden aplicar a los números complejos, introduciéndo una nueva escritura que facilita las operaciones de multiplicación y división.

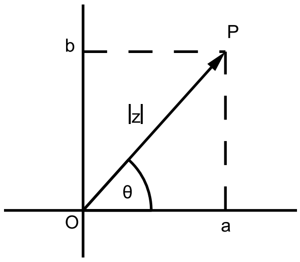


Figura 4.3: Representación vectorial de un complejo $z = a + bi$

Sea $z = a + bi$ un número complejo y θ el ángulo medido en radianes desde el eje real positivo, hasta el vector $\overrightarrow{OP}$, como muestra la Figura 4.3, entonces podemos escribir

$$\begin{aligned} a &= |z| \cos \theta \\ b &= |z| \operatorname{sen} \theta. \end{aligned}$$

Luego:

$$z = |z| (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta).$$

Observación 4.3.3 *Muchas veces es frecuente utilizar la notación* $e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$*, con ello* $z = |z| e^{i\theta}$*. Como ejercicio verifica que* $\bar{z} = |z| e^{-i\theta}$*.*

Proposición 4.3.4
Sea $z \in \mathbb{C}$ *tal que* $z = |z| (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$*, entonces para todo* $n \in \mathbb{N}$ *se tiene que* $z^n = |z|^n (\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$*.*

Demostración. Aplicamos inducción sobre n. Vemos que para $n = 1$ es evidente. Suponemos válida la afirmación para n, es decir,

$$z^n = |z|^n (\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta).$$

Debemos demostrar que la afirmación es válida para $n + 1$, es decir,

$$z^{n+1} = |z|^{n+1} (\cos (n + 1) \theta + i \operatorname{sen} (n + 1) \theta).$$

En efecto,

$$\begin{aligned} z^{n+1} &= z^n \cdot z \\ &= |z|^n (\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta) \cdot |z| (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) \\ &= |z|^{n+1} [\cos n\theta \cos \theta + i \cos n\theta \operatorname{sen} n\theta + i \operatorname{sen} n\theta \cos \theta - \operatorname{sen} n\theta \operatorname{sen} \theta) \\ &= |z|^{n+1} [(\cos n\theta \cos \theta - \operatorname{sen} n\theta \operatorname{sen} \theta) + i(\cos n\theta \operatorname{sen} n\theta + \operatorname{sen} n\theta \cos \theta) \\ &= |z|^{n+1} (\cos(n + 1)\theta + i \operatorname{sen}(n + 1)\theta) \blacksquare \end{aligned}$$

Ejemplo 4.3.5 *Calcule z^{20} si $z = -\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i$.*

Solución.

El complejo z escrito en forma trigonométrica es $z = 3\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}\right)$. Entonces:

$$\begin{aligned} z^{20} &= 3^{20}\left(\cos 20\frac{5\pi}{4} + i\operatorname{sen} 20\frac{5\pi}{4}\right) \\ &= 3^{20}\left(\cos 25\pi + i\operatorname{sen} 25\pi\right) \\ &= 3^{20}\left(\cos(\pi + 12\cdot 2\pi) + i\operatorname{sen}(\pi + 12\cdot 2\pi)\right) \\ &= 3^{20}\left(\cos\pi + i\operatorname{sen}\pi\right) \\ &= 3^{20}\left(-1+0\right) = -3^{20}. \end{aligned}$$

Proposición 4.3.6
Para todo $z \in \mathbb{C}$ no nulo tal que $z = |z|\left(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta\right)$, entonces $z^{-1} = |z|^{-1}\left(\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta\right)$.

Demostración.
Sea $w = |w|(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)$ el inverso multiplicativo de z, entonces:

$$z \cdot w = |z|\,|w|\left(\cos(\theta+\alpha) + i\operatorname{sen}(\theta+\alpha)\right) = 1\left(\cos 0 + i\operatorname{sen} 0\right).$$

Lo que implica $|z||w| = 1$, es decir, $|w| = |z|^{-1}$ y $\theta + \alpha = 0$, es decir, $\alpha = -\theta$. Por tanto,

$$z^{-1} = |z|^{-1}\left(\cos(-\theta) + i\operatorname{sen}(-\theta)\right) = |z|^{-1}\left(\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta\right).$$

■

Proposición 4.3.7
Sean $n \in \mathbb{Z}$ y $z \in \mathbb{C}$ tal que $z = |z|\left(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta\right)$, entonces $z^n = |z|^n\left(\cos n\theta + i\operatorname{sen} n\theta\right)$.

Demostración.
Para $n \in \mathbb{N}$ y $n = -1$ ya está demostrado. Para $n \in \mathbb{Z}^-$ sea $n = -m$, $m \in \mathbb{N}$ tenemos:

$$\begin{aligned} z^n &= z^{-m} \\ &= (z^{-1})^m \\ &= (|z|^{-1}(\cos -\theta + i\operatorname{sen} -\theta))^m \\ &= |z|^{-m}(\cos(-m\theta) + i\operatorname{sen}(-m\theta)) \\ &= |z|^n(\cos(n\theta) + i\operatorname{sen}(n\theta)). \end{aligned}$$

■

Proposición 4.3.8
Sea $z = |z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$ entonces las n-raíces de z están dadas por:

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right), k \in \mathbb{Z}, k = 0, \cdots, n-1.$$

Demostración.
Sea $w = |w|\,(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)$ tal que $w^n = z$, $n \in \mathbb{Z}$. Así:

$$|w|^n(\cos n\alpha + i\,\mathrm{sen}\,n\alpha) = |z|(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta),$$

de donde, $|w|^n = |z|$ y $\alpha = \theta + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. Luego, $|w| = \sqrt[n]{|z|}$ y $\alpha = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n}$, $k = 0, 1, \cdots, n-1$. Como $\mathrm{sen}\,\theta$ y $\cos\theta$ son $2\pi-$períodicas, para $k = n$ se tiene la misma raíz que para $k = 0$. ■

Observación 4.3.9 *Las n raíces de un número complejo $z \neq 0$ dividen la circunferencia de radio $|z|$ en n partes iguales.*

Ejemplo 4.3.10 *Sea $z = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$.*

1. *Encuentre $w \in \mathbb{Z}$ tal que $z \cdot w = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.*
2. *Determine z^{27}.*
3. *Encuentre las raíces cúbicas de w.*
4. *Grafique las raíces encontradas en el punto anterior.*

Solución.

1. *Como $z \cdot w = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ y $z = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$, tenemos que:*

$$w = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i} = \frac{\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)} \cdot \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)} = i.$$

2. *Para calcular z^{27}, pasamos z a la forma polar. Tenemos $|z| = 1$ y $\theta_z = \frac{\pi}{6}$. Luego,*

$$\begin{aligned}
z^{27} &= (1)^{27}\left(\cos\left(27 \cdot \frac{\pi}{6}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(27 \cdot \frac{\pi}{6}\right)\right)\\
&= \cos\left(\frac{9\pi}{2}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{9\pi}{2}\right)\\
&= \cos\left(2 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{2}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(2 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{2}\right)\\
&= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\\
&= i.
\end{aligned}$$

3. *Para determinar las raíces cúbicas de* w *pasamos a la forma polar, encontrando* $w = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)$. *Luego,* $u_k = \cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right)$, *con* $k = 0, 1, 2$. *Es decir,*

$$\begin{aligned} k = 0 \;\; &\Rightarrow \;\; u_0 = \left(\cos\frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \\ k = 1 \;\; &\Rightarrow \;\; u_1 = \left(\cos\frac{5\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \\ k = 2 \;\; &\Rightarrow \;\; u_2 = \left(\cos\frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{2}\right) = -i. \end{aligned}$$

4. *Las tres raíces cúbicas de* w:

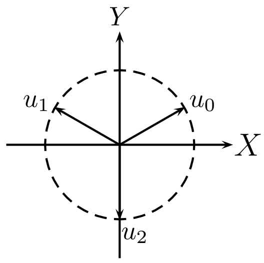


Figura 4.4: Raíces cúbicas de $w = i$.

4.4. El plano cartesiano y la recta

Para este capítulo suponemos conocidos todos los aspectos básicos de geometría elemental, por lo cual, solo haremos un comentario sobre el concepto de segmento. Recordemos que un **segmento** es la porción de línea recta comprendida entre dos puntos. Al segmento entre los puntos P y Q se denota por PQ o QP, sin importar el orden de las letras y su **longitud** por $\overline{PQ}$.

Definamos ahora un sistema de ejes coordenados que permita ubicarnos sin ambigüedad en el plano. El **sistema coordenado rectangular** consta de dos ejes, llamados **ejes coordenados**, perpendiculares entre sí. El punto de intersección entre ellos se denomina **origen**, donde ubicamos el cero. La recta horizontal se denomina **eje** X o **eje de las abscisas**, por su parte la recta vertical se denomina **eje** Y o **eje de las ordenadas**. Las abscisas, medidas sobre el eje X, a la derecha del origen son positivas y a la izquierda son negativas. Las ordenadas, medidas sobre el eje Y, son positivas arriba del origen y negativas bajo éste. Los ejes coordenados dividen el plano en cuatro partes denominadas **cuadrantes**, numeradas en forma antihoraria como se ilustra en la Figura 4.5.
Todo punto P del plano puede localizarse por medio del sistema rectangular. En efecto, se traza PA perpendicular al eje X y PB perpendicular al eje y. La longitud $\overline{OA}$ será la

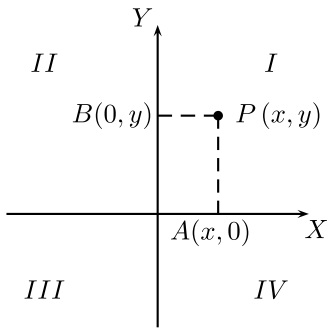


Figura 4.5: Plano Cartesiano.

abscisa de P y la longitud $\overline{OB}$ la ordenada de P. Estos números se llaman coordenadas de P y se representan por el par ordenado (x, y). Es evidente que a cada punto P del plano le corresponde un único par ordenado (x, y). Recíprocamente, cada par ordenado tiene asociado un único punto en el plano.
Este sistema de ejes coordenados rectangulares se denomina comúnmente **plano cartesiano**[2] y lo denotaremos por plano XY. Con esto a la mano comenzamos nuestro estudio de geometría analítica en el plano.

Distancia entre dos puntos

Sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ dos puntos del plano, gracias a el teorema de Pitágoras, tenemos una expresión que da cuenta de la distancia entre ellos, la que denotaremos por $d(P_1, P_2)$.

Teorema 4.4.1
Sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ dos puntos del plano. Entonces, la distancia entre ellos está dada por la expresión

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{4.1}$$

Demostración.
Por P_1 y P_2 tracemos paralelas a los ejes coordenados, como se muestra en la Figura 4.6. Con esta construcción obtenemos el triángulo rectángulo P_1QP_2, de catetos $\overline{P_1Q} = x_2 - x_1$, $\overline{P_2Q} = y_2 - y_1$ e hipotenusa $\overline{P_1P_2} = d(P_1, P_2)$. Aplicando el Teorema de Pitágoras tenemos,

$$d^2(P_1, P_2) = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2,$$

de donde,

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

■

[2] En honor a René Descartes, filósofo, matemático y físico francés, (1596-1650).

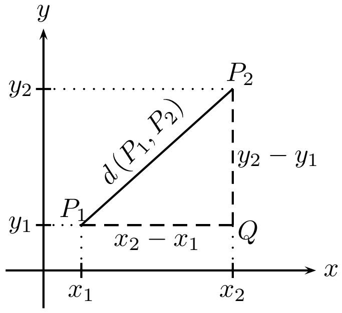


Figura 4.6: Distancia entre dos Puntos.

Ejemplo 4.4.2 *Demostrar que los puntos $A(5,-2)$, $B(7,4)$ y $C(-2,5)$ son los vértices de un triángulo escaleno.*

Solución.

Como sabemos de la geometría plana, en un triángulo escaleno todas las medidas de sus lados son distintas, calculemos la distancia entre los vértices.

$$\begin{aligned} d(A,B) &= \sqrt{(5-7)^2+(-2-4)^2} &= \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \\ d(B,C) &= \sqrt{(7-(-2))^2+(4-(-5))^2} &= \sqrt{162} = 9\sqrt{2} \\ d(C,A) &= \sqrt{(-2-5)^2+(5-(-2))^2} &= 7\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Concluímos que es un triángulo escaleno ya que $d(A,B) \neq d(B,C) \neq d(C,A)$.

Ejemplo 4.4.3

Dos de los vértices de un triángulo equilátero son los puntos $A(-4,4)$ y $B(-4,-6)$. Calcular las coordenadas del tercer vértice.

Solución.

Sea $P(x,y)$ las coordenadas del vértice a calcular. Calculemos la distancia entre A y B:

$$d(A,B) = \sqrt{(-4-(-4))^2+(4-(-6))^2} = 10.$$

Ahora calculamos las longitudes $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$.

$$\begin{aligned} d(P,A) = & \sqrt{(x-(-4))^2+(y-4)^2} &= \sqrt{x^2+y^2+8x-8y+32} \\ d(P,B) = & \sqrt{(x-(-4))^2+(y-(-6))^2} &= \sqrt{x^2+y^2+8x+12y+52} \end{aligned}$$

Como $d(P,A) = d(P,B) = d(A,B) = 10$ *igualando las últimas ecuaciones se tiene*

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+y^2+8x-8y+32} &= \sqrt{x^2+y^2+8x+12y+52} \\ x^2+y^2+8x-8y+32 &= x^2+y^2+8x+12y+52 \\ 20y &= -20 \\ y &= -1. \end{aligned}$$

Entonces de la igualdad $d(A,B) = d(P,A) = 10$ *se obtiene la ecuación*

$$x^2+y^2+8x-8y+32 = 100.$$

donde reemplazamos el valor de la ordenada $y=-1$ *y se obtiene la ecuación cuadrática* $x^2+8x-59=0$ *de soluciones* $x_1 = -4-5\sqrt{3}$ *y* $x_2 = -4+5\sqrt{3}$.
Finalmente obtenemos dos posibles terceros vértices

$$P_1\left(-4-5\sqrt{3}, -1\right) \text{ y } P_2\left(-4+5\sqrt{3}, -1\right)$$

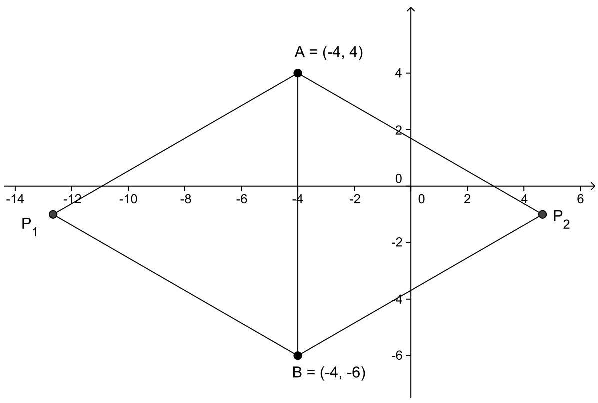


Figura 4.7: Ejemplo 4.4.3

División de un segmento

Dados dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ queremos determinar las coordenadas de otro punto $P(x,y)$ del segmento P_1P_2 que lo divida en una razón dada, r, es decir, buscamos P tal que $\dfrac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = r$.

Teorema 4.4.4
Sean $P_1(x_1, y_1)$ *y* $P_2(x_2, y_2)$ *las coordenadas de los extremos de un segmento* P_1P_2. *Entonces, las coordenadas* (x,y) *de un punto* P *que divide el segmento en la razón* $r = \dfrac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}$ *están dadas por*

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1+r}, \quad y = \frac{y_1+ry_2}{1+r}, \quad r \neq -1.$$

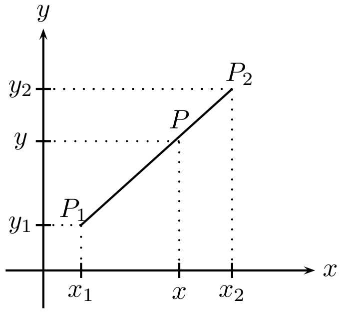


Figura 4.8: Punto de división de un segmento.

Demostración.
Por los puntos P_1, P y P_2 tracemos perpendiculares a los ejes coordenados como se muestra en la Figura 4.8. De la geometría elemental sabemos que los segmentos paralelos P_1A_1, PA y P_2A_2 intersectan segmentos proporcionales sobre las dos transversales P_1P_2 y A_1A_2. Por tanto, tenemos,

$$\frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = \frac{\overline{A_1A}}{\overline{AA_2}}. \tag{4.2}$$

Como las coordenadas de los pies de las perpendiculares al eje x son $A_1(x_1, 0)$, $A(x, 0)$ y $A_2(x_2, 0)$, tenemos que $\overline{A_1A} = x - x_1$ y $\overline{AA_2} = x_2 - x$. Reemplazando esto en (4.2),

$$r = \frac{x - x_1}{x_2 - x},$$

de donde,

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r}, \qquad \forall r \neq -1. \tag{4.3}$$

Por un argumento y procedimiento similar obtenemos,

$$r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = \frac{\overline{B_1B}}{\overline{BB_2}} = \frac{y - y_1}{y_2 - y},$$

de donde,

$$y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r}, \qquad \forall r \neq -1. \tag{4.4}$$

■

Notemos que si la razón r es negativa, el punto de división está en la prolongación del segmento que se divide.

Corolario 4.4.5 *Las coordenadas (x, y) del punto medio del segmento P_1P_2 de extremos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ son:*

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \; y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Demostración. Basta tomar $r = 1$ en (4.3) y (4.4). ■

Se debe tener mucho cuidado al utilizar las expresiones (4.3) y (4.4) respetando el orden de inicio y término del segmento, puesto que éstos se consideran dirigidos.

Ejemplo 4.4.6 *Hallar los puntos de trisección y el punto medio del segmento cuyos extremos son los puntos $A(-2,3)$ y $B(6,-3)$.*

Solución.

Primero necesitamos buscar los puntos que separan en tres partes iguales al segmento AB, es decir, se busca un punto P_1 tal que $\dfrac{\overline{AP_1}}{\overline{P_1B}} = \dfrac{1}{2}$ y un punto P_2 tal que $\dfrac{\overline{AP_2}}{\overline{P_2B}} = \dfrac{2}{1}$, entonces las coordenadas de P_1 están dadas por:

$$x = \frac{-2 + \frac{1}{2} \cdot 6}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}, \quad y = \frac{3 + \frac{1}{2} \cdot (-3)}{1 + \frac{1}{2}} = 1 \Longrightarrow P_1\left(\frac{2}{3}, 1\right),$$

las coordenadas de P_2 son:

$$x = \frac{-2 + 2 \cdot 6}{1 + 2} = \frac{10}{3}, \quad y = \frac{3 + 2 \cdot (-3)}{1 + 2} = -1 \Longrightarrow P_2\left(\frac{10}{3}, -1\right)$$

y el punto medio está dado por:

$$x = \frac{-2 + 6}{2} = 2, \quad y = \frac{3 + (-3)}{2} = 0 \Longrightarrow M(2, 0).$$

Para comprobar los resultados obtenidos basta calcular $\overline{AP_1}$, $\overline{P_1P_2}$ y $\overline{P_2B}$ y deben ser iguales.

Ejemplo 4.4.7 *Uno de los puntos extremos de un segmento es el punto $A(7,8)$ y su punto medio es $B(4,3)$. Hallar el otro extremo.*

Solución.

Sea $P(x,y)$ el extremo a determinar. De las fórmulas de puntos medio se tiene:

$$\frac{x + 7}{2} = 4 \quad \to \quad x = 1$$

$$\frac{y + 8}{2} = 3 \quad \to \quad y = -2$$

Otra forma de resolver este problema es usando las fórmulas de razón. Como observamos en la Figura 4.4.7 los segmentos AP y BP se encuentran en razón $2:1$, pero como el punto P no se encuentra en el segmento AB esta razón es negativa, en efecto, considerando $r = -2$ se tiene:

$$x = \frac{7 + (-2) \cdot 4}{1 + (-2)} = \frac{-1}{-1} = 1, \quad y = \frac{8 + (-2) \cdot (3)}{1 + (-2)} = -2$$

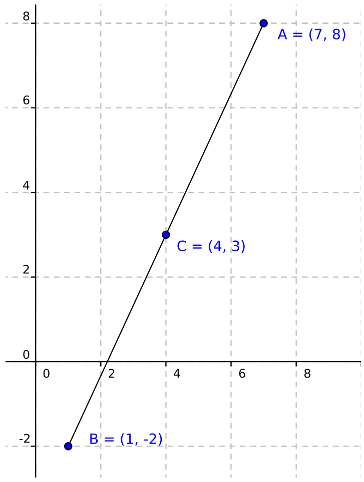


Figura 4.9: Ejemplo 4.4.7

Problemas fundamentales

Definición 4.4.8 (Lugar geométrico)
Se llama lugar geométrico o **gráfica** *de una ecuación en dos variables* $F(x, y) = 0$, *a la curva formada por el conjunto de puntos que satisfacen dicha ecuación.*

Dos son los problemas fundamentales que preocupan a la geometría analítica,

1. Dada una ecuación en dos variables interpretarla geométricamente, es decir, representar su lugar geométrico en el plano.

2. Dado un lugar geométrico o la condición que deben satisfacer sus puntos, determinar su ecuación.

Ejemplo 4.4.9
Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que se conserva siempre equidistante de los dos puntos $A(1, -2)$ *y* $B(5, 4)$.

Solución.
Sea $P(x, y)$ *un punto arbitrario que pertenece al lugar geométrico. Entonces la condición que define al conjunto de puntos se interpreta como* $\overline{PA} = \overline{PB}$, *calculando las distancias tenemos:*

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2} &= \sqrt{(x-5)^2 + (y-4)^2} \\
x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 &= x^2 - 10x + 25 + y^2 - 8y + 16 \\
8x + 12y - 36 &= 0.
\end{aligned}$$

Entonces los puntos que pertenecen al lugar geométrico son aquellos que satisfacen la relación $2x+3y-9=0$. *En efecto, un punto que cumple la relación es* $P(0,3)$ *pues*

$$2\cdot 0+3\cdot 3-9\equiv 0$$

y si comprobamos la condición:

$$\begin{aligned}\sqrt{(0-1)^2+(3+2)^2} &= \sqrt{(0-5)^2+(3-4)^2}\\ \sqrt{1+25} &= \sqrt{25+1}\\ \sqrt{26} &= \sqrt{26}.\end{aligned}$$

Ejemplo 4.4.10
¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos del plano cuyo cuociente de distancias a los puntos $M(6,0)$ *y* $N(-2,0)$ *es 3?*

Solución.

Sea $P(x,y)$ *un punto arbitrario que pertenece al lugar geométrico. Entonces la condición que define al conjunto de puntos se interpreta como* $\dfrac{\overline{PM}}{\overline{PN}}=3$, *con lo cual calculando las distancias tenemos:*

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{(x-6)^2+(y-0)^2}}{\sqrt{(x+2)^2+(y-0)^2}} &= 3\\ (x-6)^2+y^2 &= 9[(x+2)^2+y^2]\\ x^2-12x+36+y^2 &= 9(x^2+4x+4+y^2)\\ 8x^2+8y^2+48x &= 0.\end{aligned}$$

Entonces los puntos que pertenecen al lugar geométrico son aquellos que satisfacen la relación $x^2+y^2+6x=0$. *Comprobemos con un punto que cumple la relación, por ejemplo,* $P(-6,0)$ *reemplazando en la relación:*

$$\frac{\sqrt{(-6-6)^2+0^2}}{\sqrt{(-6+2)^2+0^2}}=\frac{12}{4}=3.$$

Para representar cualquier lugar geométrico debemos considerar aspectos como intersección con los ejes coordenados y la simetría.

Intersección con los ejes coordenados

1. Al hacer $x=0$ obtenemos las intersecciones de la curva con el eje de las ordenadas.

2. Al hacer $y=0$ obtenemos las intersecciones de la curva con el eje de las abscisas.

Ejemplo 4.4.11
Busquemos las intersecciones con los ejes del lugar geométrico $x^2 + y^2 + 6x = 0$,

1. $x = 0 \Rightarrow 0^2 + y^2 + 6 \cdot 0 = 0 \Rightarrow y = 0$,
2. $y = 0 \Rightarrow x^2 + 0^2 + 6 \cdot x = 0 \Rightarrow x(x+6) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = -6$.

Así, el lugar geométrico intersecta al eje de las ordenadas en el punto $(0,0)$ *y al de las abscisas en los puntos* $(0,0)$ *y* $(-6,0)$

Simetría

Definición 4.4.12 (Puntos simétricos, eje de simetría)
Dos puntos son simétricos con respecto a una recta, si la recta es perpendicular al segmento que los une en su punto medio. La recta se denomina eje de simetría.

Definición 4.4.13 (Puntos simétricos, centro de simetría)
Dos puntos son simétricos con respecto a un punto P*, si* P *es el punto medio del segmento que los une. El punto* P*, se llama centro de simetría.*

Estos conceptos se pueden interpretar en el sistema cartesiano de la siguiente manera,

1. Si al reemplazar x por $-x$, la ecuación no varía, entonces la curva es simétrica respecto al eje de las ordenadas.
2. Si al reemplazar y por $-y$, la ecuación no varía, entonces la curva es simétrica respecto al eje de las abscisas.
3. Si al reemplazar x por $-x$ e y por $-y$, la ecuación no varía, entonces la curva es simétrica respecto al origen.

Transformación de coordenadas

Veremos dos casos de transformación de coordenadas: las traslaciones y las rotaciones.

Traslación de ejes coordenados

Para simplificar o generalizar ecuaciones de lugares geométricos podemos hacer una traslación de ejes.

Teorema 4.4.14
Si trasladamos los ejes coordenados a un nuevo origen, digamos $O'(h,k)$*, y si las coordenadas de cualquier punto* P *antes y después de la traslación son* (x,y) *y* (x',y') *respectivamente, las ecuaciones de traslación del sistema primitivo al nuevo sistema de coordenadas son,*

$$\begin{aligned} x &= x' + h, \\ y &= y' + k. \end{aligned}$$

Demostración.
Sean X e Y los ejes primitivos y X' e Y' los nuevos ejes. Fijemos en (h, k) las coordenadas del nuevo origen O', como se muestra en la Figura 4.10.

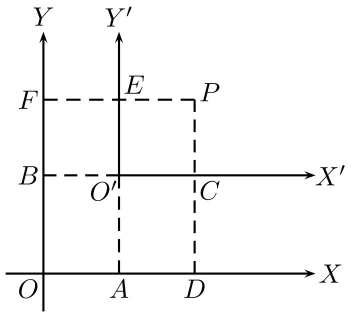


Figura 4.10: Traslación de Ejes.

Desde el punto P, trazamos perpendiculares a ambos sistemas de ejes, y prolongamos los nuevos ejes hasta que corten los originales. De esto tenemos,

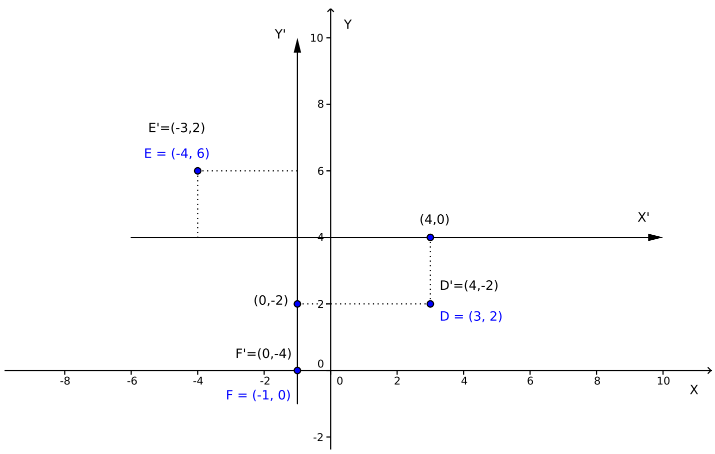
$$x = \overline{OD} = \overline{OA} + \overline{AD} = \overline{OA} + \overline{O'C} = h + x'.$$

Análogamente,

$$y = \overline{OF} = \overline{OB} + \overline{BF} = \overline{OB} + \overline{O'E} = k + y'.$$

■

Ejemplo 4.4.15
Supongamos que trasladamos el eje al punto $(-1,\ 4)$ *los puntos* $(3,\ 2)$; $(-4,\ 6)$; $(-1,\ 0)$ *equivalen a* $(4,\ -2)$; $(2,\ -9)$; $(1,\ -4)$ *en el nuevo eje.*



Rotación de ejes coordenados

Como segunda alternativa para reducir o generalizar ecuaciones de lugares geométricos tenemos la rotación de ejes.

Teorema 4.4.16
Si los ejes coordenados giran un ángulo α en torno a su origen como centro de rotación, y las coordenadas de un punto cualquiera P antes y después de la rotación son (x, y) y (x', y') respectivamente, las ecuaciones de transformación de sistema original al nuevo sistema de coordenadas están dadas por,

$$\begin{aligned} x &= x' \cos\alpha - y' \operatorname{sen}\alpha, \\ y &= x' \operatorname{sen}\alpha + y' \cos\alpha. \end{aligned}$$

Demostración.
Sean X e Y los ejes originales y X' e Y' los nuevos ejes. Desde el punto P tracemos la ordenada AP correspondiente al sistema XY, la ordenada $A'P$ correspondiente al sistema $X'Y'$, el trazo recto $\overline{OP} = r$ y el $\angle POA' = \beta$ como se muestra en la figura siguiente,

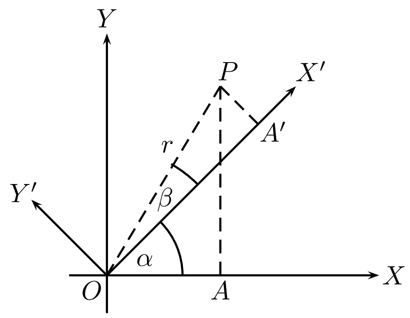


Figura 4.11: Rotación de ejes.

Por trigonometría tenemos,

$$x = \overline{OA} = r\cos(\alpha + \beta), \tag{4.5}$$

$$y = \overline{AP} = r\operatorname{sen}(\alpha + \beta), \tag{4.6}$$

$$x' = \overline{OA'} = r\cos\beta, \;\; y' = \overline{A'P} = r\operatorname{sen}\beta. \tag{4.7}$$

De (4.5) tenemos, $x = r\cos(\alpha + \beta) = r\cos\alpha\cos\beta - r\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$, donde sustituimos (4.7), obteniendo $x = x'\cos\alpha - y'\operatorname{sen}\alpha$.
Análogamente, de (4.6), $y = r\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = r\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + r\cos\alpha\operatorname{sen}\beta$, donde sustituyendo (4.7) obtenemos $y = x'\operatorname{sen}\alpha + y'\cos\alpha$, concluyendo de esta forma la demostración.
■
En las siguientes secciones nos abocamos a estudiar diversos lugares geométricos de uso habitual en el Cálculo.

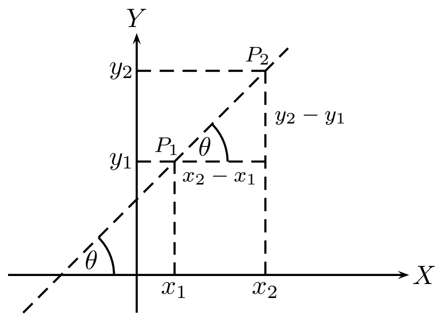
La recta

Definición 4.4.17 (Recta)
La recta es el lugar geométrico de todos los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) distintos, tales que la razón entre la diferencia de las ordenadas y la diferencia de las abscisas es constante. Es decir,

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = k.$$

Definición 4.4.18 (Ángulo de inclinación)
El ángulo de inclinación de una recta es el ángulo formado por la parte positiva del eje de las abscisas y la recta.

Definición 4.4.19 (Pendiente o coeficiente angular)
La pendiente o coeficiente angular es la tangente del ángulo de inclinación. Será denotada mediante la letra m.



Para encontrar una expresión que dé cuenta de la pendiente de una recta consideremos la Figura 4.4. Por P_1 y P_2 trazamos paralelas a los ejes coordenados formándose el triángulo rectángulo P_1QP_2. Si θ es el ángulo de inclinación de la recta, éste es igual al $\angle P_2P_1Q$ por ser correspondientes entre paralelas. Luego, por trigonometría,

$$m = \operatorname{tg}\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{4.8}$$

Con esto hemos demostrado el siguiente resultado:

Proposición 4.4.20
Si $P_1\,(x_1, y_1)$ y $P_2\,(x_2, y_2)$ son dos puntos diferentes de una recta, la pendiente está dada por:

$$m = \operatorname{tg}\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Proposición 4.4.21
El ángulo α, medido en sentido positivo (antihorario), entre dos rectas L_1 y L_2, de pendientes m_1 y m_2 respectivamente, está dado por

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}, \qquad m_1 \cdot m_2 \neq -1. \tag{4.9}$$

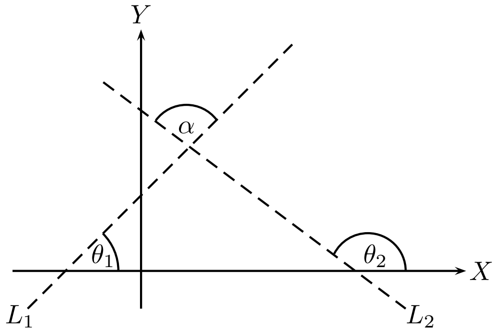


Figura 4.12: Ángulo entre rectas.

Demostración.
De la Figura 4.12 tenemos que $\theta_2 = \alpha + \theta_1$, de donde $\alpha = \theta_2 - \theta_1$. Tomando tangente a ambos lados de esta expresión tenemos $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\theta_2 - \theta_1)$. Luego, aplicando la identidad trigonométrica para la tangente de una diferencia tenemos, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{tg}\theta_2 - \operatorname{tg}\theta_1}{1 + \operatorname{tg}\theta_1 \operatorname{tg}\theta_2}$, de donde concluimos (4.9), pues $m_1 = \operatorname{tg}\theta_1$ y $m_2 = \operatorname{tg}\theta_2$. ■

Notemos que en la expresión (4.9), m_1 representa la pendiente de la recta que forma el lado inicial del ángulo y m_2 representa la pendiente de la recta que forma el lado final del ángulo.

Corolario 4.4.22

1. *Dos rectas son paralelas ($\|$) si y solo si sus pendiente son iguales.*
2. *Dos rectas son perpendiculares ($\perp$) si y solo si el producto de sus pendientes es igual a -1.*

Demostración. El lector demostrará sin dificultad este resultado con la ayuda de la expresión (4.9). ■

Se deduce de la Proposición 4.4.20 que la constante que caracteriza a la recta, mencionada en la Definición 4.4.17, es la pendiente m. Esto nos da la pauta para encontrar las distintas formas de la ecuación de una recta.
Supongamos que conocemos un punto $P_1(x_1, y_1)$ de la recta y su pendiente m. Si $P(x, y)$ es otro punto de la misma recta, tenemos que,

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1},$$

de donde quitando denominadores obtenemos la ecuación,

$$y - y_1 = m\left(x - x_1\right), \tag{4.10}$$

llamada **ecuación punto-pendiente**. De esta forma hemos demostrado el siguiente resultado,

Teorema 4.4.23 (Ecuación Punto-Pendiente)
Si una recta pasa por el punto $P_1\left(x_1, y_1\right)$ y tiene pendiente m, entonces su ecuación está dada por:

$$y - y_1 = m\left(x - x_1\right), \tag{4.11}$$

A partir de esto tenemos dos casos particulares,

1. Si la recta es paralela al eje de las ordenadas y pasa por el punto $(a, 0)$, entonces tiene pendiente infinita y su ecuación es $x = a$.
2. Si la recta es paralela al eje de las abscisas y pasa por el punto $(0, b)$, entonces tiene pendiente nula y su ecuación es $y = b$.

Si conocemos la pendiente m de una recta y la ordenada en el origen n, su ecuación es $y = mx + n$, llamada **ecuación pendiente-ordenada**. Cabe señalar que la ecuación de la recta escrita de la forma $y = mx + n$ se llama **forma principal de la recta**. En tanto, se conoce como **ecuación general de la recta**, cuando tiene la forma $ax + by + c = 0$, donde a, b y c son constantes. Si escribimos ésta en la forma $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ y hacemos una semejanza con la forma principal, obtenemos que la pendiente es $m = -\frac{a}{b}$ y la ordenada en el origen es $n = -\frac{c}{b}$.

Ejemplo 4.4.24
Dados $A(-2, 3)$ y $B(5, 6)$, encuentre la ecuación de la simetral del segmento AB.

Solución.

Recordemos que la simetral es la recta que pasa por el punto medio del segmento AB y es perpendicular a éste. Calculemos el punto medio y la pendiente de la recta que los une.

$$x = \frac{-2+5}{2} = \frac{3}{2}, \quad y = \frac{6+3}{2} = \frac{9}{2}, \quad m = \frac{6-3}{5-(-2)} = \frac{3}{7}.$$

Como la simetral es perpendicular a la recta se tiene que la pendiente de ésta debe cumplir con $\frac{3}{7} \cdot m_2 = -1$ luego $m_2 = \frac{-7}{3}$. Finalmente la recta buscada la encontramos usando la ecuación punto pendiente.

$$y - \frac{9}{2} = \frac{-7}{3}(x - \frac{3}{2}) \Rightarrow 7x + 3y = 24.$$

Ejemplo 4.4.25
Hallar la recta que pasa por el punto $(-4,-5)$ *y que es paralela a la recta* $2x+3y=12$.
Solución.

Para formar la recta necesitamos la pendiente de ésta y un punto de ella. Como es paralela a $2x+3y=7$ *su pendiente es la misma. Llevando esta ecuación a su forma principal* $y=-\frac{2}{3}x+\frac{7}{3}$ *la pendiente es* $m=\frac{-2}{3}$. *La recta buscada la obtenemos de la ecuación punto-pendiente:*

$$y-(-5)=\frac{-2}{3}(x-(-4)) \Rightarrow 3y+2x+23=0.$$

Ejemplo 4.4.26
Dada la recta $4x+3y-6=0$, *escribe la ecuación de la recta perpendicular a ella en el punto de corte con el eje de las ordenadas.*
Solución.

Primero busquemos el punto de intersección de la recta con el eje Y. *Para ello basta con tomar* $x=0$ *en la ecuación, con lo cual se tiene* $4{\cdot}0+3y=6 \Rightarrow y=2$. *Al escribir la ecuación en la forma principal para obtener la pendiente de la recta* $y=-\frac{4}{3}x+2 \Rightarrow m_1=\frac{-4}{3}$, *como se busca la recta perpendicular la pendiente de ésta cumple que* $m_2=\frac{-1}{m_1}$ *con lo cual la pendiente queda* $m_2=\frac{3}{4}$. *Finalmente la recta queda:*

$$y-2=\frac{3}{4}(x-0) \Rightarrow 4y-3x-8=0$$

Supongamos ahora que conocemos dos puntos $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$ pertenecientes a una misma recta. Si $P(x,y)$ es otro punto de la misma recta, entonces se satisface $m=\frac{y-y_1}{x-x_1}$ y $m=\frac{y-y_2}{x-x_2}$, de donde,

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y-y_2}{x-x_2}.$$

Quitando denominadores y del hecho que $\frac{y-y_2}{x-x_2}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, tenemos la **ecuación punto-punto** dada por,

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1). \tag{4.12}$$

De esta forma hemos mostrado el siguiente resultado:

Teorema 4.4.27 (ecuación punto-punto)
Si $P_1(x_1,y_1)$ *y* $P_2(x_2,y_2)$ *son puntos de una misma recta, entonces su ecuación está dada por* (4.12).

Ejemplo 4.4.28 *Encuentre la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P(-1,3)$ y $Q(1,2)$.*

Solución.

Reemplazando en la ecuación 4.12 se tiene:

$$y - 3 = \frac{2-3}{1-(-1)}(x-(-1)) \Rightarrow y - 3 = \frac{-1}{2}(x+1)$$

Ejemplo 4.4.29
Se sabe que el agua se congela a 0° Celcius o 32° Farenheit, y que hierve a 100° Celcius o 212° Farenheit. Además, la relación entre la temperatura, expresada en grados Celcius y en grados Farenheit es lineal. Encontrar esa relación.

Solución.

Sea F la temperatura medida en grados Farenheit (ordenada) y C la temperatura en grados Celcius (abscisa) entonces necesitamos construir una recta que pase por los puntos $(0,32)$ y $(100,212)$, calculando la pendiente:

$$m = \frac{212-32}{100-0} = \frac{180}{100} = \frac{9}{5},$$

con lo cual la relación queda:

$$F - 32 = \frac{9}{5}(C-0) \Rightarrow F = \frac{9}{5}C + 32.$$

Teorema 4.4.30 (ecuación simétrica de la recta)
Supongamos que la recta intersecta a los ejes X e Y en a y b respectivamente. Entonces su ecuación está dada por,

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Demostración. El lector demostrará este resultado a manera de ejercicio. ■

Ejemplo 4.4.31
Determinemos la longitud del segmento que determina la recta $x - 2y + 5 = 0$ al cortar a los ejes de coordenadas.

Solución.

Primero hay que buscar las intersecciones con los ejes coordenados para ello escribamos la *ecuación en su forma simétrica:*

$$\begin{aligned} x - 2y + 5 &= 0 \\ x - 2y &= -5 \\ \frac{x}{-5} - \frac{2y}{-5} &= 1 \\ \frac{x}{-5} + \frac{y}{5/2} &= 1, \end{aligned}$$

por lo cual la recta intersecta al eje x en el punto $(-5, 0)$ y al eje y en $\left(0, \frac{5}{2}\right)$. Ahora calculando la distancia entre los puntos.

$$d = \sqrt{(-5-0)^2 + (0-5/2)^2} = \sqrt{\frac{125}{4}} = \frac{5\sqrt{5}}{2}.$$

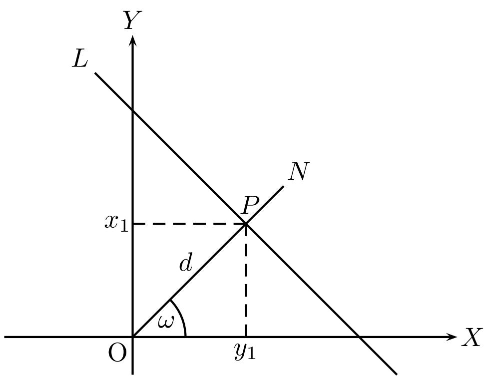


Figura 4.13: Ecuación normal

Para terminar la discusión sobre las ecuaciones de la recta, supongamos que conocemos la longitud d de una perpendicular ON a la recta L trazada desde el origen. Supongamos además, conocido el ángulo ω que forma dicha perpendicular con el eje de las abscisas. Sea $P(x_1, y_1)$ el punto intersección entre la perpendicular y la recta L, todo como se muestra en la Figura 4.4.

Por trigonometría, $y_1 = d \sin \omega$ y $x_1 = d \cos \omega$. Como ON tiene pendiente $m_{ON} = \operatorname{tg} \omega$ y es perpendicular a L, en virtud del Corolario 4.4.22 la recta L tiene pendiente $m_L = -\dfrac{1}{\operatorname{tg} \omega}$, por tanto, su ecuación es $y - y_1 = -\dfrac{1}{\operatorname{tg} \omega}(x - x_1)$, que una vez simplificada corresponde a,

$$x \cos \omega + y \sin \omega - d = 0, \tag{4.13}$$

llamada **ecuación normal** de la recta.

Si hacemos un paralelo con la ecuación general de la recta, $ax + by + c = 0$, vemos que $\cos \omega = ka$, $\operatorname{sen} \omega = kb$ y $-d = kc$, donde k es una constante de proporcionalidad, pues

$\operatorname{sen}\omega$ y $\cos\omega$ varía sólo entre -1 y 1. Elevando al cuadrado las dos primeras relaciones, sumando y tomando raíz cuadrada obtenemos $k = \dfrac{1}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$. Esto se resume en el siguiente resultado,

Teorema 4.4.32 (Ecuación Normal)
La forma general de la ecuación de la recta $ax+by+c=0$, puede reducirse a la forma normal (4.13) dividiendo cada término de la ecuación general por $k=\pm\sqrt{a^2+b^2}$, donde el signo de la raíz se escoge como,

1. *Si $c \neq 0$, k es de signo contrario a c.*
2. *Si $c = 0$ y $b \neq 0$, k y b tienen el mismo signo.*
3. *Si $c = b = 0$, k y a tienen el mismo signo.*

Una aplicación interesante de la forma normal de una recta es la determinación de la distancia d entre un punto $P_1(x_1, y_1)$ y una recta L.

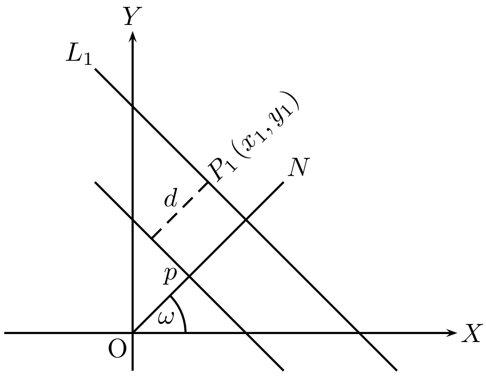


Figura 4.14: Distancia de un Punto a una Recta

Para ello, tracemos una recta L_1 paralela a L que pase por P_1, como se muestra en la Figura 4.14. Sea ω el ángulo de inclinación de la recta perpendicular a L_1 y L, que pasa por el origen. Con esto las ecuaciones normales de L_1 y L son $x\cos\omega + y\operatorname{sen}\omega - (p+d) = 0$ y $x\cos\omega + y\operatorname{sen}\omega - p = 0$ respectivamente. Como las coordenadas de P_1 satisfacen la ecuación de L_1 tenemos $x_1\cos\omega + y_1\operatorname{sen}\omega - (p+d) = 0$, de donde $d = x_1\cos\omega + y_1\operatorname{sen}\omega - p$.
Una forma más adecuada de la expresión de distancia entre un punto y una recta se logra pasando de la forma normal a la general. Así tenemos:

Teorema 4.4.33
La distancia dirigida d, del punto $P_1(x_1, y_1)$ a la recta $ax+by+c=0$, está dada por:

$$d = \frac{ax_1 + by_1 + c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}, \tag{4.14}$$

donde el signo de la raíz se escoge de acuerdo al Teorema 4.4.32.

Corolario 4.4.34
La distancia no dirigida d, del punto $P_1(x_1, y_1)$ a la recta $ax + by + c = 0$, está dada por:

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \tag{4.15}$$

Ejemplo 4.4.35
Encontremos la distancia entre las rectas $L_1 : x - 2y + 8 = 0$ y $L_2 : -2x + 4y - 7 = 0$.

Solución.

Primero debemos comprobar que las rectas son paralelas entre sí. De lo contrario, ellas se intersectan en algún punto y su distancia entre ellas sería 0.
Escribamos ambas rectas en su forma principal: $L_1 : y = \frac{1}{2}x + 4$ y $L_2 : y = \frac{1}{2}x - \frac{7}{4}$ con lo cual $m_1 = m_2 = \frac{1}{2}$ lo cual implica que ambas rectas son paralelas. Ahora para calcular la distancia tomemos un punto que pertenezca a la recta L_1, por ejemplo si $x = 2$ entonces $y = 5$. Usando la fórmula de distancia entre un punto y una recta se tiene:

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-2 \cdot 2 + 4 \cdot 5 - 7|}{\sqrt{(-2)^2 + (4)^2}} = \frac{9\sqrt{5}}{10}.$$

Ejemplo 4.4.36
Determine c para que la distancia de la recta $x - 3y + c = 0$ al punto $(6, 2)$ sea de $\sqrt{10}$ unidades.

Solución.

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|1 \cdot 6 + (-3) \cdot 2 + c|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \sqrt{10} \Rightarrow |c| = 10.$$

Con lo cual existen dos opciones $c = \pm 10$.

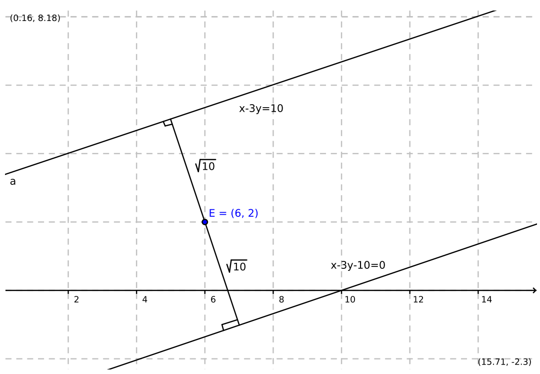


Figura 4.15: Ejemplo 4.4.36

4.5. Secciones cónicas

La circunferencia

Definición 4.5.1 (Circunferencia)
La circunferencia es el lugar geométrico de todos los puntos que están a una distancia constante de otro punto fijo llamado **centro**. *La distancia constante se llama* **radio**.

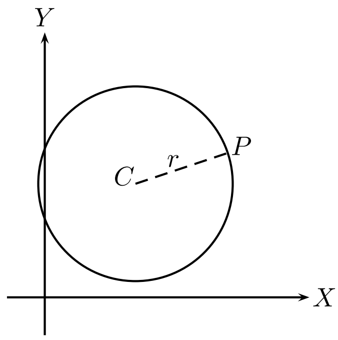


Figura 4.16: Circunferencia de centro C y radio r.

Sea $C\,(h,k)$ el centro de una circunferencia de radio r y sea $P\,(x,y)$ un punto arbitrario de ésta, como se muestra en la Figura 4.16.
De acuerdo a (4.1) y la Definición 4.5.1 tenemos,

$$\begin{aligned} d\,(C,P) &= r \\ \sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2} &= r, \end{aligned}$$

de donde,

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2. \tag{4.16}$$

Es inmediato de la expresión anterior que:

1. Una circunferencia centrada en el origen tiene ecuación $x^2+y^2=r^2$.
2. Una circunferencia con centro sobre el eje de las abscisas tiene ecuación $(x-h)^2+y^2=r^2$.
3. Una circunferencia con centro sobre el eje de las ordenadas tiene ecuación $x^2+(y-k)^2=r^2$.

Desarrollando la expresión (4.16) encontramos la **forma general de la circunferencia**. Obtenemos:

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0, \tag{4.17}$$

donde $D = -2h$, $E = -2k$ y $F = h^2 + k^2 - r^2$.
Recíprocamente, completando cuadrados en (4.17), obtenemos:

$$\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4F}{4},$$

que comparada con (4.16) indica $h = -\frac{D}{2}$, $k = -\frac{E}{2}$ y $r^2 = \dfrac{D^2 + E^2 - 4F}{4}$. Según esto tenemos tres casos:

1. Si $\dfrac{D^2 + E^2 - 4F}{4} > 0$, entonces (4.17) representa una circunferencia de centro $C\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ y radio $r = \dfrac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}}{2}$.

2. Si $\dfrac{D^2 + E^2 - 4F}{4} = 0$, entonces (4.17) representa una circunferencia de centro $C\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ y radio $r = 0$, es decir, simplemente un punto.

3. Si $\dfrac{D^2 + E^2 - 4F}{4} < 0$, entonces (4.17) representa una circunferencia imaginaria. En nuestro caso, que nos interesa la geometría real, no representa ningún lugar geométrico.

De la ecuación (4.16) vemos que una circunferencia queda completamente determinada si se conoce el centro $C(h, k)$ y el radio r. Al conocer menos condiciones obtenemos una **familia de circunferencias** dependientes de parámetros. Por ejemplo, $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = r^2$ representa la familia de todas las circunferencias con centro en $(-2, 1)$.

Ejemplo 4.5.2 *Hallemos el centro y el radio de la circunferencia* $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$.

Solución.

Agrupando y completando cuadrados se tiene:

$$x^2 - 4x + 4 - 4 + y^2 + 2y + 1 - 1 - 4 = 0 \Rightarrow (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9.$$

Luego el centro de la circunferencia $C(2, -1)$ *y el radio es* $r = 3$.

Ejemplo 4.5.3
Encontraremos el centro, radio y tracemos la gráfica de la circunferencia cuya ecuación es $9x^2 + 9y^2 - 12x + 36y - 104 = 0$.

Solución.

$$\begin{aligned}
9\left(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}-\frac{4}{9}\right)+9(y^2+4y+4-4)-104 &= 0\\
9\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+9(y+2)^2-4-36-104 &= 0\\
9\left[\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+9(y+2)^2\right] &= 144\\
\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+(y+2)^2 &= 16.
\end{aligned}$$

Luego, es la circunferencia tiene centro $\left(\frac{2}{3},-2\right)$ *y radio* $r=4$.

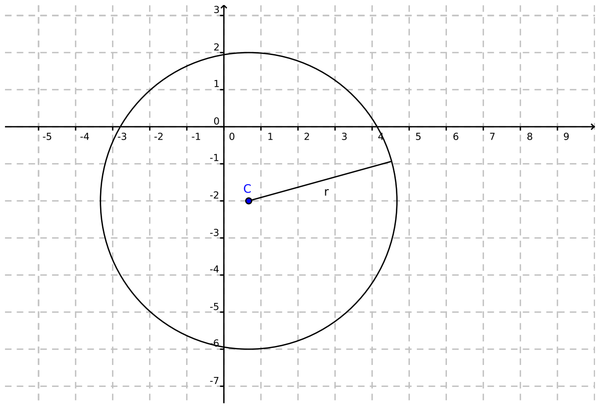


Figura 4.17: Ejemplo 4.5.3

Ejemplo 4.5.4

Determinemos la ecuación de la circunferencia de radio 5 *y cuyo centro es el punto de intersección de las rectas* $3x-2y-24=0$ *y* $2x+7y+9=0$.

Solución.

Primero encontremos la intersección de la rectas. Para ello resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} 3x-2y &= 24\\ 2x+7y &= -9 \end{aligned}\right|$$

que tiene por solución el punto $(10,3)$. *Así la ecuación de la circunferencia queda dada por* $(x-10)^2+(y-3)^2=25$.

Ejemplo 4.5.5

Determinemos la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos de coordenadas

$A(0,0)$; $B(2,0)$ y $D(1,1)$.

Solución.

En este tipo de problemas conviene usar la ecuación general: $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$. *Reemplazando se tiene las siguientes ecuaciones:*

$$\begin{aligned} 0^2+0^2+D\cdot 0+E\cdot 0+F &= 0 \Rightarrow F=0 \\ 2^2+0^2+D\cdot 2+E\cdot 0+F &= 0 \Rightarrow D=-2 \\ 1^2+1^2+D\cdot 1+E\cdot 1+F &= 0 \Rightarrow E=0. \end{aligned}$$

Con lo que se obtiene $x^2+y^2-2x=0$ *o equivalentemente* $(x-1)^2+y^2=1$ *que es una circunferencia de centro* $C(1,0)$ *y radio* $r=1$.

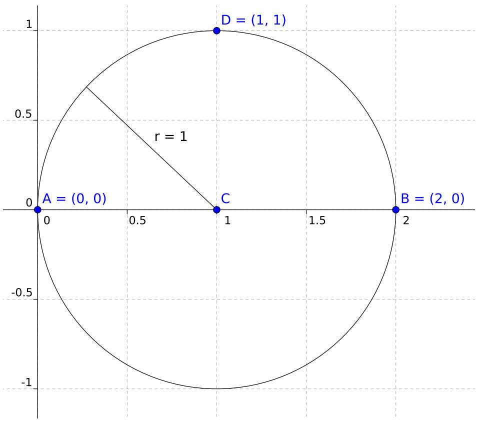


Figura 4.18: Ejemplo 4.5.5

Ejemplo 4.5.6
El diámetro de una circunferencia es el segmento de recta definido por los puntos: $A(-8,-2)$ *y* $B(4,6)$. *Obtener la ecuación de dicha circunferencia.*

Solución.

Observemos que si el segmento AB *es el diámetro entonces el punto medio de éste será el centro de la circunferencia, así:*

$$h=\frac{-8+4}{2}=-2, \qquad k=\frac{-2+6}{2}=2,$$

y para obtener el radio basta con calcular la distancia del centro a cualquiera de los puntos:

$$r=\sqrt{(-2-4)^2+(2-6)^2}=\sqrt{36+16}=\sqrt{52},$$

con lo que la ecuación buscada es:

$$(x+2)^2+(y-2)^2=52.$$

Ejemplo 4.5.7 *Demostremos que las circunferencias*

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0 \qquad \text{y} \qquad x^2 + y^2 + 4x + 2y = 0,$$

se cortan ortogonalmente.

Solución.

Primero escribamos cada una de las circunferencias en forma canónica, para ello debemos completar los cuadrados de binomio correspondientes:

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 5 \qquad \text{y} \qquad (x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 5.$$

Ahora necesitamos buscar los puntos de intersección de las circunferencias luego tenemos:

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y = x^2 + y^2 + 4x + 2y \Rightarrow 0 = 2x + 6y \Rightarrow x = -3y,$$

reemplazando en cualquiera de las ecuaciones tenemos:

$$(-3y)^2 + (y)^2 + 2(-3y) - 4y = 0 \Rightarrow 10y^2 + -10y = 0 \Rightarrow 10y(y-1) = 0 \Rightarrow y = 0 \vee y = 1,$$

con lo cual se tienen dos puntos de intersección $(0, 0)$ *y* $(-3, 1)$. *Para comprobar que las circunferencias son ortogonales en el punto* $(-3, 1)$, *tenemos que recordar que la recta tangente a una circunferencia es perpendicular a la recta que une el centro con el punto de tangencia. Así, si las rectas que unen el centro con el punto de tangencia son perpendiculares, entonces las tangentes a la circunferencia también son ortogonales y las circunferencias son ortogonales.*
En primer lugar calculemos la pendiente de la recta que une el centro de la circunferencia $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$ *y el punto* $(-3, 1)$ *se tiene* $m_1 = \dfrac{1-2}{-3-(-1)} = \dfrac{1}{2}$. *Ahora para la segunda circunferencia* $(x+2)^2+(y+1)^2 = 5$ *se tiene que* $m_2 = \dfrac{1-(-1)}{-3-(-2)} = -2$, *Luego las rectas claramente son perpendiculares ya que* $m_1 \cdot m_2 = -1$.

La parábola

Definición 4.5.8 (Parábola)

La parábola es el lugar geométrico de todos los puntos cuya distancia no dirigida a un punto fijo F, *llamado* **foco**, *es igual a la distancia no dirigida a una recta* L, *llamada* **directríz**.

La recta que pasa por el foco y es perpendicular a la directriz se denomina **eje de simetría** de la parábola (eje focal). El punto medio entre el foco y la directriz se llama **vértice**, que denotaremos por V. El segmento de recta que une dos puntos cualesquiera de la parábola se llama **cuerda**, cualquier cuerda que pasa por el foco se denomina **cuerda focal** y la cuerda focal perpendicular al eje se denomina **lado recto**.

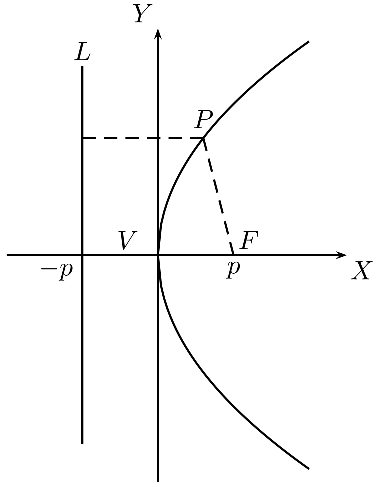


Figura 4.19: Parábola Horizontal.

Encontremos la ecuación de la parábola con vértice en el origen, $V\,(0,0)$ y foco $F\,(p,0)$ con $p>0$, como se muestra en la Figura 4.19. De acuerdo a esto y según la Definición 4.5.8 tenemos que la ecuación de la directríz L, es $x+p=0$. Sea $P\,(x,y)$ un punto arbitrario de la parábola, aplicando (4.1) y (4.15) tenemos,

$$\begin{aligned} d\,(F,P) &= d\,(P,L) \\ \sqrt{(x-p)^2+y^2} &= |x+p|\,, \end{aligned}$$

elevando al cuadrado y simplificando obtenemos,

$$y^2 = 4px. \tag{4.18}$$

Despejando y de la ecuación anterior y evaluando en $x=p$ tenemos $y=\pm\sqrt{4p^2}$, de donde deducimos que el lado recto mide $|4p|$.
De forma análoga encontramos que la ecuación de la parábola de vértice en $V\,(0,0)$ y foco $F\,(-p,0)$ con $p>0$ es,

$$y^2 = -4px.$$

Si mantenemos el vértice en el origen, pero ahora fijamos el foco en $F\,(0,p)$ con $p>0$ tendremos que la directriz es paralela al eje de las abscisas con ecuación $y+p=0$, como se muestra en la Figura 4.20. Como antes, si $P\,(x,y)$ es un punto arbitrario de la parábola tenemos,

$$\begin{aligned} d\,(F,P) &= d\,(P,L) \\ \sqrt{x^2+(y-p)^2} &= |y+p|\,, \end{aligned}$$

elevando al cuadrado y simplificando obtenemos,

$$x^2 = 4py. \tag{4.19}$$

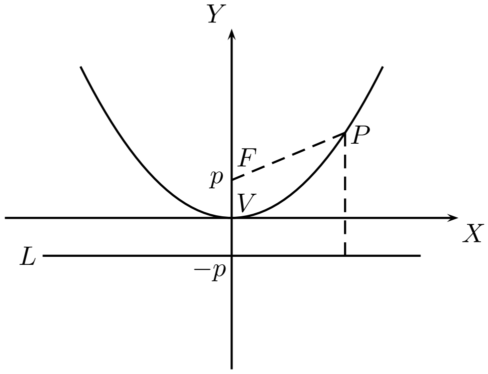


Figura 4.20: Parábola Vertical.

Análogamente encontramos que la ecuación de la parábola de vértice en $V\,(0,0)$ y foco $F\,(0,-p)$, con $p>0$ es,

$$x^2=-4py.$$

Para el caso más general consideramos el vértice en $V\,(h,k)$ y ejes paralelos a los ejes coordenados teniendo el siguiente resultado.

Teorema 4.5.9
Tenemos los siguientes casos,

1. *La ecuación de una parábola de vértice $V\,(h,k)$ y eje paralelo al eje de las abscisas, es de la forma*
$$(y-k)^2=4p\,(x-h)\,, \tag{4.20}$$
siendo $|p|$ la longitud del segmento de eje comprendido entre el foco y el vértice. Si $p>0$ la parábola se abre hacia la derecha y si $p<0$ la parábola se abre hacia la izquierda.

2. *Si el vértice es el punto $V\,(h,k)$ y el eje de la parábola es paralelo al eje de las ordenadas, su ecuación es de la forma*
$$(x-h)^2=4p\,(y-k)\,. \tag{4.21}$$
Si $p>0$ la parábola se abre hacia arriba y si $p<0$ la parábola se abre hacia abajo.

Demostración. En virtud del Teorema 4.4.14 basta hacer una traslación de las ecuaciones encontradas, es decir, reemplazar x por $x-h$ e y por $y-k$ en (4.18) y (4.19). ∎

A las formas anteriores las llamaremos **forma canónica** de la parábola.

Ejemplo 4.5.10
Consideremos la siguiente curva: $9x^2+24x+72y-20=0$ determinemos las coordenadas

del vértice y del foco, las ecuaciones de la directriz y del eje focal, y la longitud del lado recto.

Solución.

Primero escribamos la ecuación en forma canónica:

$$\begin{aligned}
9x^2+24x+72y-20 &= 0\\
9\left(x^2+\frac{8}{3}x\right) &= -72y+20\\
9\left(x^2+\frac{8}{3}x+\left(\frac{4}{3}\right)^2-\left(\frac{4}{3}\right)^2\right) &= -72y+20\\
9\left(x^2+\frac{8}{3}x+\left(\frac{4}{3}\right)^2\right)-16 &= -72y+20\\
9\left(x^2+\frac{4}{3}\right)^2 &= -72\left(y-\frac{1}{2}\right)\\
\left(x^2+\frac{4}{3}\right)^2 &= -8\left(y-\frac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

Por lo cual tenemos una parábola con vértice en el punto $V\left(-\frac{4}{3},\ \frac{1}{2}\right)$ *y valor de* $p=2$ *con lo cual la directriz es la recta* $y-\frac{1}{2}-2=y-\frac{5}{2}=0$ *y la ecuación del eje focal* $x-\frac{4}{3}=0$ *y la longitud del lado recto es* 8.

Ejemplo 4.5.11 *Encontremos la ecuación de la parábola cuyo vértice está en* $(5,-2)$ *y su foco en* $(5,-4)$.

Solución.

Podemos observar que las coordenadas de las abscisas no cambian por lo cual la parábola tiene que tener eje focal paralelo al eje Y *y la ecuación a utilizar es* $(x-h)^2=4p(y-k)$ *ahora el vértice tiene coordenadas* $V(5,2)\to h=5$ *y* $k=-2$*, finalmente* p *corresponde a la distancia entre el foco y el vértice, entonces se tiene* $p=2$ *y como la parábola se abre hacia abajo (el foco esta por debajo de el vértice) la ecuación es:*

$$(x-5)^2=-4(y+2).$$

Ejemplo 4.5.12

Encontremos la ecuación de la parábola cuyo foco tiene coordenadas $F(5,-4)$ *y tiene por directriz la recta* $x=1$.

Solución.

Podemos observar que la directriz es paralela al eje Y *con lo cual la ecuación a utilizar corresponde a* $(y-k)^2=4p(x-h)$*. Ahora, para determinar el vértice basta con recordar* *que éste se encuentra a la misma distancia del foco que de la directriz, con lo cual el vértice tendrá coordenadas $V(3,-4)$ y el valor de $p=2$. Finalmente la ecuación de la parábola es $(y+4)^2 = 8(x-3)$.*

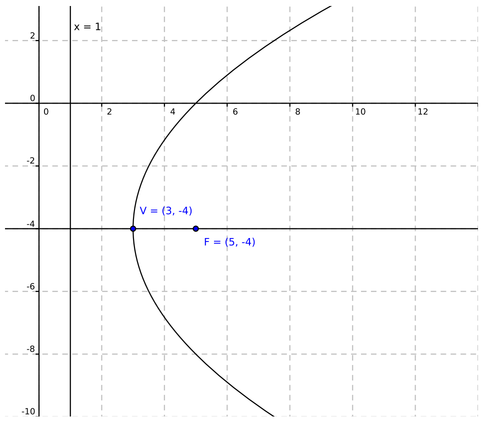


Figura 4.21: Ejemplo 4.5.12

Ejemplo 4.5.13

El agua que fluye de un grifo horizontal que está a 20 mts del piso describe una curva parabólica con vértice en el grifo. Si a 16 mts del piso, el flujo del agua se ha alejado 8 mts de la recta vertical que pasa por el grifo, ¿A qué distancia de esta recta vertical tocará el agua el suelo?

Solución.

Siguiendo el bosquejo:
Sea $V(0,20)$ el vértice de la parábola la ecuación es:

$$(x-0)^2 = 4p(y-20).$$

Dado que el punto $(8,16)$ se encuentra en la parábola se cumple que:

$$(8-0)^2 = 4p(16-20) \ \rightarrow 64 = -16p \rightarrow p = -4.$$

Finalmente la parábola es $x^2 = -16(y-20)$ para calcular la distancia basta calcular el punto $(d,0)$, evaluando en la parábola, tenemos:

$$d^2 = -16(0-20) \Rightarrow d = 8\sqrt{5}.$$

Ejemplo 4.5.14

Determinemos la ecuación de la parábola cuyo eje es paralelo al eje X, y que pasa por los puntos $(0,0)$; $(8,-4)$ y $(3,1)$

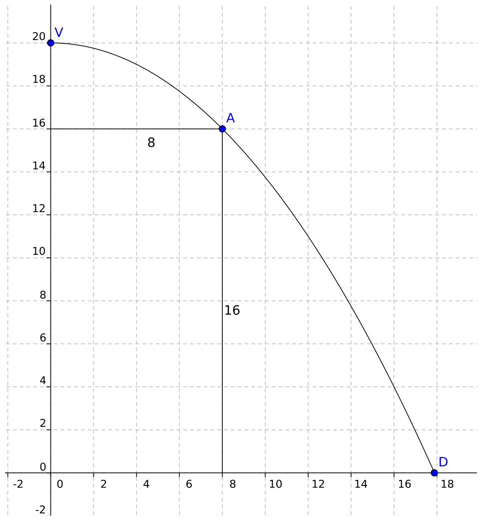


Figura 4.22: Ejemplo 4.5.13

Solución.

Que la parábola tenga eje paralelo al eje X, nos indica que la ecuación a usar es de la forma $y^2 + Dx + Ey + F = 0$, Ahora reemplazando en los puntos dados se tiene:

$$\begin{array}{rcc} 0^2 + D \cdot 0 + E \cdot 0 + F = 0 & \Rightarrow & F = 0 \\ (-4)^2 + D \cdot 8 + E \cdot (-4) + F = 0 & \Rightarrow & 16 + 8D - 4E = 0 \\ 1^2 + D \cdot 3 + E \cdot 1 + F = 0 & \Rightarrow & 1 + 3D + E = 0, \end{array}$$

con lo cual se obtiene un sistema de ecuaciones cuya solución es $D = -1$ y $E = 2$. La ecuación es:

$$y^2 - x + 2y = 0 \rightarrow (y+1)^2 = 4 \cdot \frac{1}{4}(x+1)$$

que es una parábola de vértice $(-1, -1)$.

Ejemplo 4.5.15

Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia de la recta $L_1 : x + 3 = 0$ es siempre 2 unidades mayor que su distancia del punto $P_1(1, 1)$.

Solución.

Sea $P(x, y)$ los puntos que pertenecen al lugar geométrico entonces tenemos que:

$$\begin{aligned}
D(P,P_1)+2 &= D(P,L_1)\\
\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}+2 &= x+3\\
\sqrt{x^2+y^2-2x-2y+2} &= x+1\\
x^2+y^2-2x-2y+2 &= x^2+2x+1\\
y^2-2y+1 &= -4x\\
(y-1)^2 &= 4\cdot(-1)(x-0).
\end{aligned}$$

Que es una parábola de vértice en el punto $V(0,1)$ con eje focal paralelo al eje X.

La Elipse

Definición 4.5.16 (Elipse)
*La elipse es el lugar geométrico de todos los puntos que se mueven en un plano de tal manera que la suma de las distancias a dos puntos fijos de ese plano, llamados **focos**, es siempre igual a una constante, mayor que la distancia entre los dos puntos.*

Denotaremos los focos de una elipse como F_1 y F_2. La recta que pasa por los focos de llama **eje focal**. El eje focal corta a la elipse en dos puntos llamados **vértices**, que denotaremos por V_1 y V_2. La porción de eje focal comprendida entre los vértices se llama **eje mayor**. El punto medio entre los focos se denomina **centro** y lo denotaremos por C. Por su parte, la recta que pasa por el centro y es perpendicular al eje focal se llama **eje normal**. El segmento de eje normal comprendido en el interior de la elipse se denomina **eje menor**.

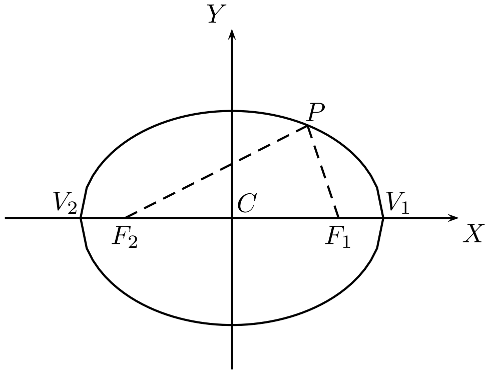


Figura 4.23: Elipse Horizontal

Supongamos que la elipse tiene su centro en el origen y que las coordenadas de los focos son $F_1\,(c,0)$ y $F_2\,(-c,0)$, con $c>0$, como se muestra en la Figura 4.23. Sea además, $P\,(x,y)$

un punto arbitrario de la elipse, según la definición 4.5.16 y aplicando (4.1) tenemos:

$$\begin{aligned} d(F_1, P) + d(F_2, P) &= 2a \\ \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= 2a, \end{aligned}$$

donde la constante $2a$ se interpretará posteriormente. Transponiendo el término $\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, elevando al cuadrado, reduciendo y ordenando adecuadamente obtenemos:

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx.$$

Nuevamente, elevando al cuadrado, reduciendo y ordenando los términos tenemos,

$$\left(a^2 - c^2\right) x^2 + a^2 y^2 = a^2 \left(a^2 - c^2\right).$$

Como por definición $a > c$, entonces $a^2 > c^2$ o lo que es lo mismo $a^2 - c^2 > 0$. Llamando $b^2 = a^2 - c^2$ tenemos,

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2,$$

dividiendo por $a^2 b^2$ obtenemos,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{4.22}$$

De esta ecuación vemos que la elipse corta al eje de las abscisas en $x = a$ y $x = -a$, por tanto, las coordenadas de los vértices son $V_1(a, 0)$ y $V_2(-a, 0)$. Además, la longitud del eje mayor es $2a$, la constante que menciona la definición de elipse. Por otra parte, la intersección con el eje de las ordenadas ocurre en $y = b$ e $y = -b$, con esto la longitud del eje menor es $2b$. Vemos también, que la elipse es simétrica respecto a los ejes mayor, menor y a su centro.

Despejando y de (4.22) obtenemos $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$. Haciendo $x = c$ tenemos $y = \pm\frac{b^2}{a}$, con esto la longitud del lado recto asociado a F_1 es $\frac{2b^2}{a}$. Un cálculo similar muestra que el lado recto para F_2 mide lo mismo. Finalmente, llamaremos **excentricidad** al parámetro que determina el grado de desviación de la elipse con respecto a la circunferencia y se calcula como $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} < 1$. Entre más cercano sea este parámetro a cero, la elipse se parecerá a una circunferencia.

Supongamos ahora que la elipse mantiene su centro en el origen, pero tiene focos en el eje de las ordenadas, $F_1(0, c)$ y $F_2(0, -c)$, con $c > 0$, como se muestra en la figura siguiente, Si $P(x, y)$ es un punto arbitrario de la elipse, por un cálculo similar al hecho anteriormente obtenemos que su ecuación es:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1. \tag{4.23}$$

Para el caso más general consideramos que el centro está ubicado en $C(h, k)$, con ejes paralelos a los ejes coordenados. Esto se resume en el siguiente resultado:

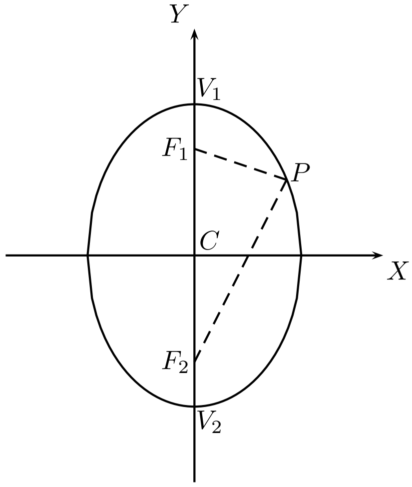


Figura 4.24: Elipse Vertical.

Teorema 4.5.17
Tenemos los siguientes casos,

1. *La ecuación de la elipse centrada en el punto (h,k) y eje focal paralelo al eje de las abscisas tiene la forma:*
$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1. \tag{4.24}$$

2. *La ecuación de la elipse centrada en el punto (h,k) y eje focal paralelo al eje de las ordenadas tiene la forma:*
$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1. \tag{4.25}$$

En ambos casos tenemos que a es la medida del semieje mayor, b la medida del semieje menor y c la distancia del centro al foco. Además, a,b y c satisfacen $a^2=b^2+c^2$. La excentricidad es $e=\frac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}<1$ y los lados rectos miden $\dfrac{2b^2}{a}$ cada uno.

Demostración. Según el Teorema 4.4.14 basta hacer una traslación de las ecuaciones encontradas, es decir, reemplazar x por $x-h$ e y por $y-k$ en (4.22) y (4.23). ■

Ejemplo 4.5.18
Hallemos la ecuación de la elipse con vértices en $(1,4)$ y $(9,4)$ y semieje menor igual a 2.

Solución.

Podemos observar que las coordenadas de las ordenadas no cambian entre los vértices por lo cual el eje mayor de la elipse es paralelo con el eje x, además se sabe que el centro de la *elipse es el punto medio entre los vértices. Así el centro es $C(5,4)$ y la longitud del semieje mayor es $a=4$ (mitad de la distancia entre los vértices). Usando el dato adicional se tiene que $b=2$ con lo que la elipse es:*

$$\frac{(x-5)^2}{16}+\frac{(y-4)^2}{4}=1.$$

Ejemplo 4.5.19

Encuentre la ecuación de la elipse que tiene un foco en $F(1,-3)$ y $C(1,-1)$, y cuya excentricidad es igual a $\frac{1}{2}$.

Solución.

Como el centro y el foco tienen misma abscisa, entonces la elipse tiene eje mayor paralelo al eje Y. Además sabemos que la distancia del centro al foco corresponde al valor $c=2$. Para encontrar el valor de las longitudes de los ejes usemos el dato de la excentricidad

$$e=\frac{c}{a}\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{2}{a}\Rightarrow a=4,$$

ahora para calcular el valor de b usamos la identidad $b^2=a^2-c^2$ tenemos que $b^2=12$. Finalmente la ecuación es:

$$\frac{(x-1)^2}{12}+\frac{(y+1)^2}{16}=1.$$

Ejemplo 4.5.20

Considere la siguiente curva: $4x^2+9y^2+32x-18y+28=0$ determine las coordenadas del centro, vértices y focos, las longitudes de los ejes mayor y menor, la de cada lado recto y la excentricidad.

Solución.

$$\begin{aligned}
4x^2+9y^2+32x-18y+28 &= 0\\
4(x^2+8x)+9(y^2-2y) &= -28\\
4(x^2+8x+16-16)+9(y^2-2y+1-1) &= -28\\
4(x+4)^2-64+9(y^2-2y+1)-9 &= -28\\
4(x+4)^2+9(y-1)^2 &= 45\\
\frac{(x+4)^2}{\frac{45}{4}}+\frac{(y-1)^2}{5} &= 1.
\end{aligned}$$

Que es una elipse de centro $C(-4,1)$ con eje mayor paralelo al eje X $\left(a=\frac{\sqrt{45}}{2}>\sqrt{5}=b\right)$, los vértices $V_1\left(-4+\frac{3\sqrt{5}}{2},1\right)$ y $V_2\left(-4-\frac{3\sqrt{5}}{2},1\right)$ para los focos necesitamos calcular el *valor de c, para ello $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{\frac{45}{4} - 5} = \frac{5}{2}$ entonces los focos son $F_1\left(-4 + \frac{5}{2}, 1\right)$ y $F_2\left(-4 - \frac{5}{2}, 1\right)$ la longitud del eje mayor $2a = \sqrt{45}$ y la longitud del eje menor $2b = 2\sqrt{5}$. Y la excentricidad $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$.*

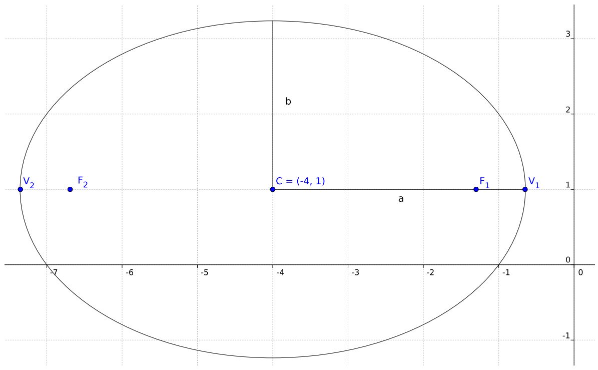


Figura 4.25: Ejemplo 4.5.20

Ejemplo 4.5.21

Encontrar el lugar geométrico de los puntos cuya distancia al origen es $\frac{1}{2}$ de su distancia a la recta $L_1 : x + 3 = 0$.

Solución.

Sean $P(x, y)$ todos los puntos pertenecientes al lugar geométrico, la condición de la definición establece:

$$\begin{aligned} D(P,(0,0)) &= \frac{1}{2}D(P, L_1) \\ 2\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} &= x + 3 \\ 4(x^2 + y^2) &= x^2 + 6x + 9 \\ 3x^2 + 4y^2 - 6x - 9 &= 0. \end{aligned}$$

Ejemplo 4.5.22

El arco de un puente es semielíptico, con eje mayor horizontal. La base del arco mide 30 mts de un lado y la parte más alta del arco mide 10 mts arriba de la calzada horizontal, como muestra la Figura 4.5.22, encuentre la altura a los 6 mts de la base.

Solución.

Ubicando el eje cartesiano en el centro del puente, tenemos que la ecuación de la elipse viene dada por

$$\frac{x^2}{15^2} + \frac{(y+10)^2}{10^2} = 1,$$

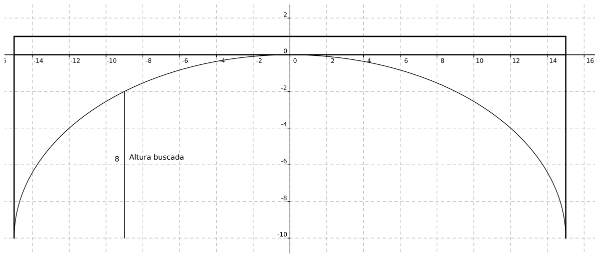


Figura 4.26: Ejemplo 4.5.22

como queremos saber la distancia a 6 metros de la base, entonces $x = -9$ con lo cual tenemos:

$$\frac{9^2}{15^2}+\frac{(y+10)^2}{10^2}=1 \Rightarrow \frac{(y+10)^2}{10^2}=\frac{15^2-9^2}{15^2}=\frac{12^2}{15^2} \Rightarrow (y+10)=\pm\frac{10\cdot 12}{15} \Rightarrow y=-10\pm 8,$$

con lo cual como $y = -2$ o $y = -18$ adaptando los datos al problema se tiene que la altura del puente es de 8 mts.

La hipérbola

Definición 4.5.23 (Hipérbola)
La hipérbola es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos del plano, llamados **focos***, es siempre igual a una cantidad constante, menor que la distancia entre los focos.*

Como hicimos con la elipse, designaremos los focos por F_1 y F_2, la recta que pasa por los focos seguirá llamándose **eje focal** o **eje de simetría**. El eje focal corta la hipérbola en los **vértices**, que denotaremos por V_1 y V_2. La porción de eje focal comprendido entre los vértices se denomina **eje transverso** o **eje real**. El punto medio del eje transverso se llama **centro**, que designaremos por C. La recta perpendicular al eje transverso, que pasa por el centro se denomina **eje normal**, este eje no corta la hipérbola, sin embargo, una porción de éste que contiene al centro como punto medio se denomina **eje conjugado**. La cuerda que pasa perpendicularmente por un foco se denomina **lado recto**.
Supongamos que la hipérbola tiene su centro en el origen y sus foco sobre el eje de las abscisas, con coordenadas $F_1(c,0)$ y $F_2(-c,0)$, con $c>0$. Sea $P(x,y)$ un punto arbitrario de la hipérbola como se muestra en la Figura 4.27. Según la Definición 4.5.23 y aplicando (4.1) tenemos,

$$\begin{aligned} d(F_2,P)-d(F_1,P) &= 2a \\ \sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2} &= 2a, \end{aligned}$$

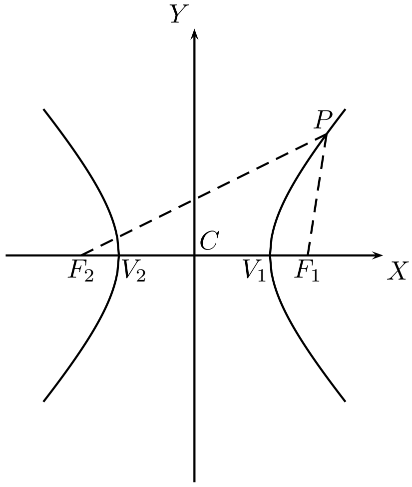


Figura 4.27: Hipérbola Horizontal

donde la constante $2a$ se interpretará posteriormente. Despejando $\sqrt{(x-c)^2+y^2}$, elevando al cuadrado, simplificando y reduciendo adecuadamente obtenemos:

$$cx - a^2 = a\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

elevando nuevamente al cuadrado, simplificado y ordenando:

$$\left(c^2-a^2\right)x^2 - y^2 = a^2\left(c^2-a^2\right).$$

Por definición $c > a$, entonces $c^2 - a^2 > 0$. Designando $b^2 = c^2 - a^2$ tenemos:

$$b^2x^2 - y^2 = a^2b^2,$$

dividiendo por a^2b^2, concluimos,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{4.26}$$

De esta ecuación vemos que la hipérbola corta el eje de las abscisas en $x = a$ y $x = -a$, por tanto, las coordenadas de los vértices son $V_1\,(a,0)$ y $V_2\,(-a,0)$, consecuentemente, el eje transverso mide $2a$, que es la constante mencionada en la Definición 4.5.23. Aunque no hay intersección con el eje de las ordenadas, los puntos $(0,b)$ y $(0,-b)$ se toman como extremos del eje conjugado, cuya longitud es entonces $2b$.

Despejando y de (4.26) obtenemos $y = \pm\frac{a}{b}\sqrt{x^2-a^2}$. Haciendo $x = c$, tenemos $y = \pm\frac{b^2}{a}$, con esto la longitud del lado recto de cada foco es $\frac{2b^2}{a}$. La excentricidad de la hipérbola es $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} > 1$.

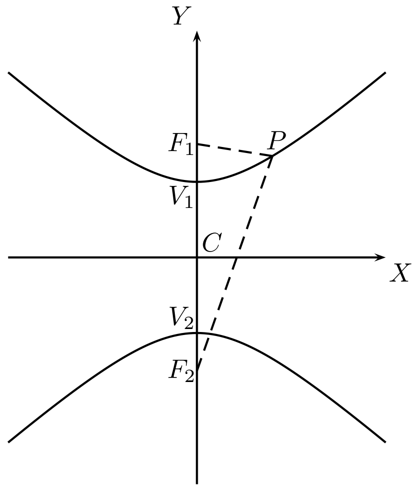


Figura 4.28: Hipérbola Vertical.

Mantengamos el centro de la hipérbola en el origen, pero fijemos los focos sobre el eje de las ordenadas, con coordenadas $F_1\,(0,c)$ y $F_2\,(0,-c)$, $c>0$, mostrada en la Figura 4.5.
Si $P\,(x,y)$ es un punto arbitrario de la hipérbola y procediendo como se hizo en el caso anterior obtenemos:

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1. \tag{4.27}$$

Para el caso más general, consideramos el centro en el punto (h,k) y ejes paralelos a los ejes coordenados. Esta situación se resume en el siguiente resultado:

Teorema 4.5.24 *Tenemos los siguientes casos:*

1. *La ecuación de la hipérbola con centro en el punto (h,k) y eje focal paralelo al eje de las abscisas, es de la forma*

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1. \tag{4.28}$$

2. *La ecuación de la hipérbola con centro en el punto (h,k) y eje focal paralelo al eje de las ordenadas, es de la forma*

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1. \tag{4.29}$$

Para cada hipérbola, a es la longitud del semieje transverso, b la longitud del semieje conjugado, c la distancia del centro a cada uno de los focos. Además, a, b y c, satisfacen $c^2=a^2+b^2$. También, para cada hipérbola, la longitud de cada lado recto es $\frac{2b^2}{a}$ y la excentricidad está dada por $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}>1$.

Demostración. Por el Teorema 4.4.14 basta reemplazar x por $x-h$ e y por $y-k$ en (4.26) y (4.27). ■

Ejemplo 4.5.25
Considere la siguiente curva: $4x^2 - 9y^2 + 8x - 18y + 31 = 0$ *determine las coordenadas del centro, vértices y focos y la excentricidad.*

Solución.

$$\begin{aligned}
4x^2 - 9y^2 + 8x - 18y + 31 &= 0 \\
4(x^2 + 2x) - 9(y^2 + 2y) &= -31 \\
4(x^2 + 2x + 1 - 1) - 9(y^2 + 2y + 1 - 1) &= -31 \\
4(x+1)^2 - 4 - 9(y^2 + 2y + 1) + 9 &= -31 \\
4(x+1)^2 - 9(y+1)^2 &= -36 \\
\frac{(y+1)^2}{4} - \frac{(x+1)^2}{9} &= 1.
\end{aligned}$$

Que corresponde a una hipérbola de centro $C(-1,-1)$ *con eje mayor paralelo al eje* Y $a = 2$ *y* $b = 3$*, los vértices* $V_1(-1, 1)$ *y* $V_2(-1, -3)$ *para los focos necesitamos calcular el valor de* c*, para ello* $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$ *entonces los focos son* $F_1\left(-1, -1 + \sqrt{13}\right)$ *y* $F_2\left(-1, -1 - \sqrt{13}\right)$*. Y la excentricidad* $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{2} > 1$.

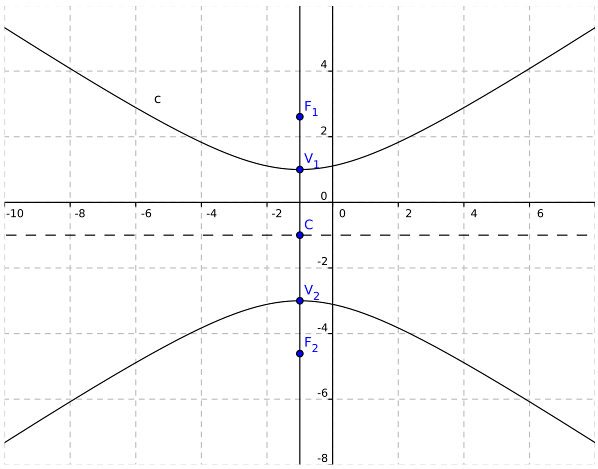


Figura 4.29: Ejemplo 4.5.25

Asíntotas

Definición 4.5.26 (Asíntotas)
Llamamos asíntotas de una curva a la recta que a medida que un punto sobre la curva se

aleja indefinidamente del origen de coordenadas, la distancia entre ese punto y la recta en cuestión decrece continuamente acercándose a cero.

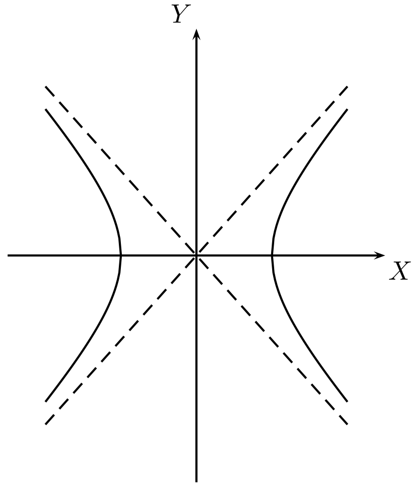


Figura 4.30: Asíntotas de la Hipérbola

La hipérbola tiene dos asíntotas oblícuas. Por ejemplo, en la Figura 4.5 se muestran las asíntotas de una hipérbola de eje focal paralelo al eje de las abscisas.
Despejando y de la ecuación (4.28) y acomodando adecuadamente tenemos,

$$y = k \pm \frac{b}{a}(x-h)\sqrt{1-\frac{a^2}{(x-h)^2}}.$$

A medida que x crece sin límite, la expresión anterior se acerca a $y = k \pm \frac{b}{a}(x-h)$, que corresponde a las ecuaciones de las asíntotas para una hipérbola centrada en (h,k) y eje focal paralelo al eje x.
De forma análoga se encuentra que las ecuaciones de las asíntotas para hipérbola (4.29) son $y = k \pm \frac{a}{b}(x-h)$.
Con esto hemos demostrado el siguiente resultado:

Proposición 4.5.27
Respecto a las ecuaciones de las asíntotas tenemos,

1. *Si la hipérbola tiene su centro en (h,k) y eje focal paralelo al eje de las abscisas, entonces las ecuaciones de las asíntotas son,*

$$y = k \pm \frac{b}{a}(x-h). \tag{4.30}$$

2. *Si la hipérbola tiene su centro en (h,k) y eje focal paralelo al eje de las ordenadas, entonces las ecuaciones de las asíntotas son,*

$$y = k \pm \frac{a}{b}(x-h). \tag{4.31}$$

Ejemplo 4.5.28
Encontremos el lugar geométrico de los puntos $P(x,y)$ tales que el producto de las pendientes de las rectas trazadas desde P a los puntos: $A(-2,1)$ y $B(2,-1)$ sea igual a 1.

Solución.
La pendiente de la recta de los puntos que une P y A es $m_1 = \dfrac{y-1}{x+2}$ y la pendiente de la recta que une los puntos P y B es $m_2 = \dfrac{y+1}{x-2}$ con lo cual se tiene

$$\frac{y-1}{x+2}\cdot\frac{y+1}{x-2} = 1.$$

Con lo que se obtiene:

$$\begin{aligned}
\frac{(y-1)(y+1)}{(x+2)(x-2)} &= 1\\
(y-1)(y+1) &= (x+2)(x-2)\\
y^2-1 &= x^2-4\\
x^2-y^2 &= 3\\
\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{3} &= 1.
\end{aligned}$$

Que es una hipérbola de centro $C(0,0)$.

Ejemplo 4.5.29
Hallar la ecuación de la hipérbola que pasa por el punto $(4,6)$, tiene el eje focal paralelo al eje X, y sus asíntotas son las rectas $2x+y-3=0$ y $2x-y-1=0$.

Solución.
Para determinar el centro basta buscar la intersección de las asíntotas que se produce en el punto $C(1,1)$ ahora de las mismas asíntotas observamos que tienen pendiente $m = \pm\dfrac{b}{a} = 2$, con lo cual la ecuación de la hipérbola es:

$$\frac{(x-1)^2}{a^2} - \frac{(y-1)^2}{b^2} = 1 \Longrightarrow \frac{(x-1)^2}{a^2} - \frac{(y-1)^2}{4a^2} = 1.$$

Ahora sabemos que la hipérbola pasa por el punto $(4,6)$ *con lo cual* $x = 4$ *e* $y = 6$ *entonces tenemos*

$$\frac{(4-1)^2}{a^2} - \frac{(6-1)^2}{4a^2} = 1 \Rightarrow \frac{9}{a^2} - \frac{25}{4a^2} = 1,$$

con lo cual $36 - 25 = 11 = 4a^2$ *finalmente la ecuación es*

$$\frac{4(x-1)^2}{11} - \frac{(y-1)^2}{11} = 1.$$

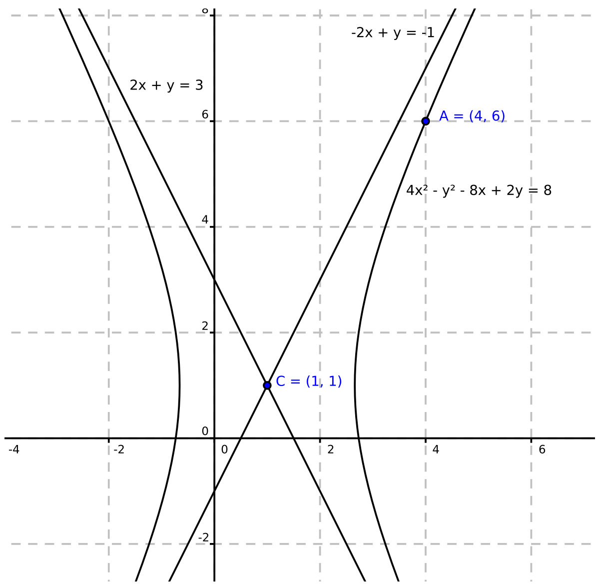


Figura 4.31: Hipérbola $\frac{4(x-1)^2}{11} - \frac{(y-1)^2}{11} = 1$.

Ejercicios Resueltos

Ejemplo 4.5.30

Encuentre la ecuación de la circunferencia tangente a $3x - 4y - 4 = 0$ *en* $(0,-1)$ *y que contenga al punto* $(-1,-8)$.

Solución.

Para hallar la circunferencia debemos determinar el centro y radio de ésta, para ello supongamos que el centro de la circunferencia se encuentra en el punto $(h,\ k)$ *y que su radio es* r.

Entonces la recta que pasa por el punto de tangencia y el centro, es perpendicular a la recta tangente con lo cual se tiene que:

$$\frac{-1-k}{0-h} \cdot \frac{3}{4} = -1 \Rightarrow -3 - 3k = 4h \Rightarrow 4h + 3k = -3,$$

por otro lado, según los datos la circunferencia pasa por lo puntos $(0,-1)$ y $(-1,-8)$ con lo cual se obtiene:

$$\left.\begin{array}{c}(0-h)^2+(-1-k)^2=r^2\\(-1-h)^2+(-8-k)^2=r^2\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{rcl}h^2+(1+k)^2 &=& (1+h)^2+(8+k)^2\\ h^2+1+2k+k^2 &=& 65+2h+h^2+16k+k^2\\ 2k &=& 2h+64+16k\\ 0 &=& h+7k+32.\end{array}$$

Juntando las ecuaciones obtenidas $h+7k=-32$ y $4h+3k=-3$ se tiene un sistema de ecuaciones que tiene por solución $k=-5$ y $h=3$ y finalmente para calcular el radio se tiene $(0-3)^2+(-1-(-5))^2=r^2=25$. Así la ecuación buscada es

$$(x-3)^2+(y+5)^2=25.$$

Ejemplo 4.5.31
Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos P del plano tales que su distancia al punto $A(1,0)$, es el triple de su distancia a la recta $x=2$. Identifique el lugar geométrico que se obtiene.

Solución.

Sea $P(x,y)$ los puntos que pertenecen al lugar geométrico. Entonces la condición que define al conjunto de puntos se interpreta como $d(A,P)=3d(P,L)$, con lo cual calculando las distancias tenemos:

$$\begin{array}{rcl}\sqrt{(x-1)^2+(y-0)^2} &=& 3\left(\dfrac{|1\cdot x-0\cdot y-2|}{1^2+0^2}\right)\\ x^2-2x+1+y^2 &=& 9[x^2-4x+4]\\ -8x^2+34x+y^2-35 &=& 0\\ 8(x^2-\dfrac{17}{4}x+\dfrac{289}{64}-\dfrac{289}{64})-y^2+35 &=& 0\\ 8\left(x-\dfrac{17}{8}\right)^2-y^2 &=& \dfrac{9}{8}.\end{array}$$

Lo que corresponde a una hipérbola horizontal.

Ejemplo 4.5.32
Determinar el valor de k de modo que la recta $2x+3y+k=0$ sea tangente a la circunferencia $x^2+y^2+6x+4y=0$.

Solución.

Primero escribamos la recta en su forma principal $y = \frac{-2}{3}x - \frac{k}{3}$, *reemplazando en la circunferencia tenemos*

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 + 6x + 4y = 0 \ &\Rightarrow \ x^2 + \left(\frac{-2x-k}{3}\right)^2 + 6x + 4\left(\frac{-2x-k}{3}\right) = 0 \\
&\Rightarrow \ x^2 + \frac{4x^2 + 4kx + k^2}{9} + 6x + \frac{-8x - 4k}{3} = 0 \\
&\Rightarrow \ 9x^2 + 4x^2 + 4kx + k^2 + 54x - 24x - 12k = 0 \\
&\Rightarrow \ 13x^2 + (4k + 30)x + k^2 - 12k = 0,
\end{aligned}$$

entonces para que la recta sea tangente, el discriminante de la ecuación anterior debe ser nulo. Así

$$\Delta = (4k + 30)^2 - 4 \cdot 13 \cdot (k^2 - 12k) = 0 \Rightarrow k^2 - 24k + 25 = 0,$$

con lo cual $k = 25$ *o* $k = 11$

Ejemplo 4.5.33
Dados los puntos $A = (1,\ 2),\ B = (3, 3)$, *hallar un punto* C *sobre la recta* $y = x + 1$ *de modo que el área del triángulo* ABC *sea* 1.

Solución.

Primero observemos que el punto A *pertenece a la recta. Ahora denotemos por* (x_0, y_0) *el vértice buscado, con cual se tiene* $y_0 = x_0 + 1$ *y como* A *y* C *están sobre la misma recta podemos suponer que esta recta forma la base del triángulo cuyo largo es*

$$\sqrt{(2 - y_0)^2 + (1 - x_0)^2} = \sqrt{(2 - x_0 - 1)^2 + (1 - x_0)^2} = \sqrt{2(1 - x_0)^2} = \pm(1 - x_0)\sqrt{2}.$$

Ahora para obtener la altura del triángulo, debemos calcular la distancia no dirigida entre B *y la base.*

$$h = \frac{|-1 \cdot 3 + 1 \cdot 3 - 1|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Finalmente el área del triángulo es 1, *por lo cual:*

$$A = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (\pm\sqrt{2}(1 - x_0))}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \pm(1 - x_0) = 2,$$

con lo que tenemos dos opciones $x_0 = -1 \to y_0 = 0$ *o* $x_0 = 3 \to y_0 = 4$.

Ejemplo 4.5.34

El centro de una elipse es el punto $(2, -4)$ *y un vértice es* $(-2, -4)$*. Si el lado recto se halla sobre la recta* $x = -1$*, hallar la ecuación de esta elipse.*

Solución.

Como el centro es $(2, -4)$ *y un vértice es* $(-2, -4)$ *es fácil ver que el valor de* $a = 4$*, por definición del lado recto, sabemos que este pasa por un foco, así que éste se encuentra en el punto* $(-1, -4)$*, y con lo cual* $c = 3$*, y finalmente:*

$$a^2 - c^2 = b^2 \Rightarrow b^2 = 7.$$

De esta manera, la ecuación buscada es

$$\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y+4)^2}{7} = 1.$$

Ejemplo 4.5.35

Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el origen y por los puntos de intersección de la recta $y = 2x - 6$ *con la parábola* $y = x^2 - 3x$*.*

Solución.

Primero calculemos la intersección de la recta con la parábola. Reemplazando la recta en la parábola obtenemos

$$2x - 6 = y = x^2 - 3x \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \to (x = 2 \Rightarrow y = -2) \text{ o } (x = 3 \Rightarrow y = 0),$$

en resumen tenemos 3 puntos de la circunferencia solicitada: $(0, 0)$*,* $(2, -2)$*, y* $(3, 0)$*, podemos encontrar su ecuación usando la forma general* $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ *reemplazando se tiene el sistema*

$$\begin{aligned} 0^2 + 0^2 + D \cdot 0 + E \cdot 0 + F &= 0 \Rightarrow F = 0 \\ 2^2 + (-2)^2 + D \cdot 2 + E \cdot (-2) + F &= 0 \Rightarrow 2D - 2E = -8 \Rightarrow D - E = -4 \\ 3^2 + 0^2 + D \cdot 3 + E \cdot 0 + F &= 0 \Rightarrow 3D = -9 \Rightarrow D = -3. \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones es fácil obtener que $D = -3$ *y* $E = 1$ *ahora debemos revisar si realmente se obtiene una circunferencia. Completando cuadrados se tiene*

$$x^2 + y^2 - 3x + y = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{2},$$

que efectivamente es una circunferencia de centro $C\left(\frac{3}{2}, \frac{-1}{2}\right)$ *y radio* $\sqrt{\frac{5}{2}}$*.*

Ejemplo 4.5.36
Halle el valor de k para que el punto $(2,3)$ pertenezca al lugar geométrico definido por la ecuación $(2+k)x-(3-k)y+4k+14=0$.

Solución.
Para que el punto pertenezca al lugar geométrico debe satisfacer la relación, por lo cual reemplazando se tiene:

$$(2+k)\cdot 2-(3-k)\cdot 3+4k+14=0 \Rightarrow 9k=-9 \Rightarrow k=-1.$$

Ejemplo 4.5.37
Determine (si es posible) los valores de k para que la siguiente ecuación represente una circunferencia, una elipse, una parábola y una hipérbola.

$$kx^2+k(k+4)y^2-1=0.$$

Solución.

- *Para que la ecuación sea un circunferencia es necesario que $k=k(k+4)$ con lo que existen dos casos: que $k=0$ lo que no es posible ya que al reemplazar se obtendría $-1=0$ o que $k=-3$ lo que tampoco es posible ya que al reemplazar se obtiene $-3x^2-3y^2=1$ lo cual es una contradicción. Por tanto no existe un valor para que la ecuación sea circunferencia.*

- *Para que la ecuación sea una elipse solo se necesita que $k>0$, en efecto, reescribiendo la ecuación como sigue*
$$\frac{x^2}{\frac{1}{k}}+\frac{y^2}{\frac{1}{k(k+4)}}=1,$$
se debe garantizar que ambos denominadores sean estrictamente positivos

- *Para que la ecuación sea una parábola se necesita que sola una de las siguientes condiciones se cumpla $k=0$ o $k(k+4)=0$ por lo cual se tiene que $k=-4$.*

- *Para que la ecuación sea una hipérbola al igual que la elipse podemos reescribir la ecuación como sigue*
$$\frac{x^2}{\frac{1}{k}}+\frac{y^2}{\frac{1}{k(k+4)}}=1,$$
y se debe cumplir que los denominadores deben tener signos opuestos lo cual se cumple si $k<-4$.

Ejemplo 4.5.38
Determine la ecuación de la elipse que tiene los mismos focos que la hipérbola de ecuación

$7x^2 - 9y^2 = 63$ y su excentricidad es igual a la mitad de la excentricidad de la hipérbola.

Solución.

Escribiendo en forma canónica la hipérbola se tiene $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$ de donde $a = 3$ y $b = \sqrt{7}$ con lo cual $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 7} = \sqrt{16} = 4$ y la excentricidad de la hipérbola es $e = \frac{4}{3}$. Ahora como la elipse tiene los mismos focos de la hipérbola, las coordenadas de éstos son $F(\pm 4, 0)$ y su centro es $C(0, 0)$, ahora como la excentricidad es la mitad que la de la hipérbola entonces se tiene que $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{2}{3}$. Dado que $c = 4$ se tiene que $a = 6$, finalmente $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{36 - 16} = \sqrt{20}$ y la ecuación de la elipse buscada es:

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1.$$

Ejemplo 4.5.39

Los focos de una elipse son los puntos $F_1(3, 8)$ y $F_2(3, 2)$ y la longitud de su eje menor es 8. Hallar la ecuación de la elipse.

Solución.

El centro de la elipse viene dado por el punto medio entre los focos $C(h, k) = C(3, 5)$ y el valor de $c = 3$. Ahora usando la relación de la elipses

$$a^2 - c^2 = b^2 \Rightarrow a^2 = 64 + 9 = 73,$$

finalmente la ecuación pedida es

$$\frac{(x-3)^2}{64} + \frac{(y-5)^2}{73} = 1.$$

Ejemplo 4.5.40

¿Existe algún punto real que satisfaga la ecuación $9x^2 + 4y^2 + 36x - 24y + 216 = 0$?

Solución.

No existe, pues:

$$\begin{aligned}
9x^2 + 4y^2 + 36x - 24y + 216 &= 0 \\
9(x^2 + 4x) + 4(y^2 - 6y) &= -216 \\
9(x^2 + 4x + 4 - 4) + 4(y^2 - 6y + 9 - 9) &= -216 \\
9(x+2)^2 - 36 + 4(y^2 - 6y + 9) - 36 &= -216 \\
9(x+2)^2 + 4(y-3)^2 &= -144,
\end{aligned}$$

lo que es una contradicción ya que la suma de dos números positivos no puede ser negativa.

4.6. Ejercicios propuestos

1. Determine las otras cinco razones trigonométricas para el ángulo α si:

   a) $\cos\alpha = -\dfrac{2}{7},\ \ \alpha \notin II$ cuadrante.

   b) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{2},\ \ \operatorname{sen}\alpha > 0.$

2. Determine el valor de:

   a) $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{1+\cos\alpha}$ si $\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{5}{12},\ \ \alpha \in III$ cuadrante.

   b) $\dfrac{5\operatorname{sen}\alpha + 7\cos\alpha}{6\cos\alpha - 3\operatorname{sen}\alpha}$ si $\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{4}{15}$ y además $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

3. Calcule el valor de $\dfrac{\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{2} - 3\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} - 3\cos\frac{7\pi}{6}}{\operatorname{tg}\frac{7\pi}{3} + 5\sec\frac{5\pi}{6} + \csc\frac{4\pi}{3}}$.

4. Demuestre que:

   a) $1 - \dfrac{\cos^2 x}{1+\operatorname{sen} x} = \operatorname{sen} x$

   b) $\dfrac{\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{ctg} x} + \dfrac{\operatorname{ctg} x}{1-\operatorname{tg} x} = 1 + \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$

   c) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{sen}\alpha}{\csc\alpha - \operatorname{ctg}\alpha} = \sec\alpha - \cos\alpha$

   d) $\cos 2x \cdot \cos x + \operatorname{sen} 2x \cdot \operatorname{sen} x = \cos x$

   e) $\dfrac{1}{8}(1-\cos 4x) = \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x$

5. Encuentre todas las soluciones de las siguientes ecuaciones trigonométricas:

   a) $\operatorname{ctg}^2 x \cdot \cos x - 3\cos x + \operatorname{ctg}^2 x - 3 = 0$

   b) $\dfrac{5}{2}\sec(x)\operatorname{sen}(2x) - \cos(2x) + 3 = 0$

   c) $\sec^2 x \cdot \operatorname{sen} x - \sec x - 2\operatorname{tg} x + 2 = 0$

6. Calcule $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{40}$.

7. Encuentre un complejo z tal que $z^{-1} + 2(\overline{z})^{-1} = 1 + i$.

8. Dados los números complejos los complejos $z_1 = -2 - \frac{2}{\sqrt{3}}i$ y $z_2 = -\sqrt{3} + \sqrt{3}i$, determine:

a) z_1^{12}

b) Las raíces cuartas de z_2.

9. Sea la ecuación: $iz^3+27=0$. Determinar sus soluciones y representarlas gráficamente en el plano complejo.

10. En $\mathbb{C}$, resuelva la ecuación $x^4=-8+8\sqrt{3}i$.

11. Calcule las raíces de la ecuación $z^2=-i$ y exprésela s de la forma $a+bi$.

12. Demuestre que $z=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$ es una ráiz octava de 1.

13. Sea $z=\cos\frac{2\pi}{5}+i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{5}$. Verifique que $z^5-1=0$

14. Demuestre que las raíces cúbicas de $z=4(1+\sqrt{3}i)$ tienen suma nula.

15. Calcula las coordenadas del punto P, que divide al segmento de extremos $A(2,-4)$ y $B(1,3)$ en dos partes tales que $\overline{AP}=3\overline{PB}$.

16. Determinar las coordenadas de los extremos A y B del segmento que es dividido en tres partes iguales por los puntos $P(2,2)$ y $Q(1,5)$

17. Dados los puntos $A(2,-3),\ B(-1,4)$ y $C(x,3)$, determina el valor de x para que $A,\ B$ y C sean colineales.

18. Un punto se mueve de tal manera que su distancia al punto $(2,-2)$ es siempre igual a un tercio de su distancia al punto $(4,1)$. Determine la ecuación del lugar geométrico,

19. Determine la ecuación del lugar geométrico compuesto de puntos $P(x,y)$ que cumplen con la condición de que su distancia al eje "y" es el doble que su distancia al punto $(2,-3)$.

20. Determine la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que la distancia a la recta $x+3=0$ es siempre dos unidades mayor que su distancia al punto $(1,1)$.

21. En el triángulo de vértices $A(0,-1),\ B(8,3)$ y $C(6,-1)$ calcula la longitud de la altura que parte de B.

22. Dados $A(-2,3),\ B(5,6)$, encuentra la ecuación de la mediatriz del segmento AB.

23. Demuestre que el triángulo ABC es:

    a) Isóceles, si $A(2,1),\ B(5,5),\ C=(2,4)$.

    b) Rectángulo, si $A(0,1),\ B(4,0),\ C=(3,4)$.

24. Dada la familia de rectas $(3k-2)x-(k^2-9)y+(3k+5)=0$, determine (si existe) cual de ellas:

a) Pasa por el origen

b) Corta al eje x en 5

c) Es paralela a la recta de ecuación $5y + 4x - 10 = 0$

d) Es perpendicular a la recta de ecuación $65y + 18x - \frac{1}{2} = 0$

e) Es horizontal

25. Una recta pasa por los puntos $(3, 2)$ y $(-4, -6)$, mientras que otra pasa por el punto $(-7, 1)$ y un punto A de ordenada -6. Si ambas rectas son perpendiculares entre sí. Determine la abscisa de A.

26. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas $x - 3y + 1 = 0$, $2x + 5y - 9 = 0$ y cuya distancia al origen es 2.

27. Determinar para qué valores de a y b la recta de ecuación

$$(2a - b + 5)x + (a + 3b - 2)y + 2a + 7b + 19 = 0,$$

es paralela al eje de ordenadas y pasa por $(5, 0)$. Escribir la ecución de la recta.

28. Determinar para qué valor de k las dos recta de ecuaciones

$$(k - 1)x + ky - 5 = 0, \quad kx + (2k - 1)y + 7 = 0,$$

se intersectan en un punto del eje de abscisas.

29. Encuentre las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto $C(1, 1)$ y están a igual distancia de los puntos $A(1, 0)$ y $B(1, 1)$.

30. Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que se conserva siempre equidistante de los dos puntos $(5, 2)$ y $(4, -1)$.

31. Determina los puntos que trisectan el segmento definido por los puntos $A\,(2, 5)$ y $B\,(8, -1)$.

32. Demostrar que los puntos $(0, 1)$, $(3, 5)$, $(7, 2)$ y $(4, -2)$ son lo vértices de un cuadrado.

33. Hallar la ecuación de la parábola cuyo eje es paralelo al eje X y pasa por los tres puntos: $(\frac{3}{2}, -1); (0, 5)$ y $(-6, -7)$.

34. Encuentre la intersección de la parábola $y - x^2 - 1 = 0$ con la circunferencia $x^2 + y^2 - 8y + 7 = 0$. Grafique.

35. Determine la ecuación de la elipse cuyos vértices son los puntos $(4, 0)$ y $(-4, 0)$, y tiene sus focos en los puntos $(3, 0)$ y $(-3, 0)$. Grafique.

36. Determine el(los) valor(es) de "m" tales que la ecuación $\frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{m-7} = 1$ corresponda a una elipse, en la que la recta y=x la intersecta en los puntos de abscisas $x = \frac{12}{5}$ y $x = -\frac{12}{5}$.

37. Encontrar la ecuación de la elipse cuyos focos son los puntos $(4, 5)$ y $(4, -1)$ y la distancia entre los vértices es 10.

38. Dada la elipse $4x^2 + 9y^2 - 32x + 54y + 109 = 0$, encuentre la ecuación de la circunferencia que tiene como centro el mismo de la elipse y como radio la mitad de la longitud del eje menor.

39. Dada la ecuación de la hipérbola $8x^2 - 4y^2 - 24x - 4y - 15 = 0$, encuentre las coordenadas de los vértices, de los focos y la ecuación de las asíntotas. Grafique.

40. Encontrar la ecuación de la hipérbola cuyas asíntotas tiene ecuación $x - 2y + 1 = 0$, $x + 2y - 3 = 0$, y la distancia entre los vértices es 2 unidades.

41. Encontrar la ecuación del lugar geométrico de los puntos tales que la suma de sus distancias a $P1(1, -3); P2(-1, -3)$ es $2\sqrt{3}$.

42. Determine (si es posible) respectivamente los valores de k para que las siguientes ecuaciones representen una circunferencia, una elipse, una parábola y una hipérbola.

    a) $kx^2 + k(k + 4)y^2 - 1 = 0$

    b) $x^2 + 4y^2 - kx - 4 = 0$

43. Considerando la elipse $x^2 + 3y^2 + 3x - 4y - 3 = 0$; Hallar los valores de k para los cuales las rectas de la familia $5x + 2y + k = 0$:

    a) corten a la elipse en 2 puntos diferentes

    b) son tangentes a la elipse

    c) no corten a la elipse

44. La excentricidad de una elipse es $\frac{1}{2}$, su centro es el origen y una de sus directrices tiene ecuación $x = 16$. Calcular la distancia desde el punto de la elipse cuya abscisa es -4, al foco correspondiente a la directriz dada.

45. Determinar la ecuación de la parábola que tiene su vértice en el centro de la circunferencia de ecuación : $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 4 = 0$ y su directriz ecuación $2y - 5 = 0$.

46. Encuentra la ecuación de de la circunferencia con centro en el centro de la hipérbola $x^2 - 2y^2 - 8x + 24y - 60 = 0$ y radio la mitad de la distancia entre los vértices de la hipérbola

Bibliografía

[1] A. Baldor, *Álgebra elemental*, Editorial Mediterraneo, 1968

[2] R. Barnett, M. Ziegler, K. Bileen, *Precálculo*, McGraw Hill, 4° edición, 1999.

[3] X. Carrasco, X Cruz, *Álgebra*, Arrayan Editores S.A., 2° edición, 2002.

[4] J. De Burgos, *Cálculo infinitesimal de una variable*, Editorial McGraw-Hill, 1° edición, 1994.

[5] X. Lehmann, *Geometría analítica*, Editorial Limusa, 2007.

[6] L. Leithold, *Matemáticas previas al cálculo*, Oxford, 3° edición 2003.

[7] L. Leithold, *El cálculo*, Oxford, 7° edicioón, 1994

[8] M. Sobel, N. Lerner, *Precálculo*, Editorial Pearson, 5° edición.

[9] M. Spivak, *Calculus, cálculo infinitesimal*, Editorial Reverté, 2° Edición, 1992.

[10] E. Swokowsky, J. Cole, *Álgebra y trigonometría*, Editorial Thomson, 11° edición 2007.

[11] D. Zill, J. Dewar, *Álgebra y trigonometría*, McGraw Hill, 2° edición, 2001.