Ρıχαττı

Βεσσελ

ECUACIONES DIFERENCIALES

Problemas Resueltos

Segunda Edición

Βερνουλλι

Ευλερ

Λαπλαχε

Angélica Mansilla - Elena Olivos

Universidad de La Frontera

2012

Χλαιραυτ

ECUACIONES DIFERENCIALES
PROBLEMAS RESUELTOS

ANGÉLICA MANSILLA - ELENA OLIVOS

Prólogo

Los cursos de ciencia básica, particularmente los cursos de matemática, de las carreras de pregrado, persiguen como resultados de aprendizaje, primero la comprensión a un nivel adecuado de los conceptos involucrados, y luego, la aplicación de los mismos a la resolución de problemas. Este libro, cuya primera edición se imprimió el año 2004, ha sido confeccionado con el propósito de ayudar al estudiante a alcanzar el segundo resultado de aprendizaje, es decir, comprender y plantear los ejercicios básicos, en este caso de un primer curso de ecuaciones diferenciales ordinarias. Cada capítulo se inicia con un resumen de los contenidos que se requieren para enfrentar los problemas que se desarrollan en él, pero es preciso que el estudiante haya primeramente estudiado a conciencia sus apuntes y se haya apoyado en uno de los buenos libros de texto que están dados en la bibliografía básica.

La mayoría de los problemas han sido tomados de textos clásicos de Ecuaciones Diferenciales que constituyen la bibliografía básica del curso que se dicta a los estudiantes de ingenierías civiles en la Universidad de la Frontera.

Índice general

Capítulo 1

Ecuaciones de primer orden

1.1. Resumen

Ecuación diferencial.
Una ecuación diferencial es cualquier relación en la que interviene una o más variables dependientes y alguna(s) de sus derivadas con respecto a una o más variables independientes.

Una ecuación diferencial **ordinaria** es aquella en que intervienen solo derivadas de funciones de una variable. Una ecuación diferencial en **derivadas parciales** es aquella en que intervienen funciones de varias variables y sus derivadas parciales.

El **orden** de una ecuación diferencial está dado por la derivada de orden más alto que aparezca en ella.

Una ecuación diferencial ordinaria de orden n se representa mediante la identidad

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Solución (o integral) de una ecuación diferencial ordinaria.
Una función real $y = \varphi(x)$ con al menos n derivadas definida en un intervalo I es una solución explícita de la ecuación $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ en I si y solo si se cumple que $F(x, \varphi(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) = 0$.

Una relación $G(x, y) = 0$ es una solución implícita de la ecuación

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

en un intervalo I si y solo si existe al menos una función $y = \varphi(x)$ que satisface la relación G y la ecuación diferencial en I.

Por lo general una solución de una ecuación diferencial tiene una o más constantes arbitrarias, tantas como indique el orden de la ecuación, es decir, es una familia n-paramétrica de soluciones. Cuando damos un valor a las constantes obtenemos una solución particular de la ecuación. Si toda solución de la ecuación se obtiene asignando valores a las constantes de la familia n-paramétrica, decimos que ella es la solución general de la ecuación. Una solución singular es una solución de la ecuación diferencial que no puede obtenerse asignándole valores a las constantes de la familia n-paramétrica de soluciones.

Problemas de valor inicial.
Un problema de valor inicial es una ecuación diferencial para la cual se especifican los valores de la función y algunas de sus derivadas en cierto punto llamado punto inicial. Un **problema de contorno o de frontera** es una ecuación diferencial en la cual se dan valores por lo menos para dos puntos de la función o alguna de sus derivadas.

Teorema 1. Teorema de Picard. Existencia y unicidad de las soluciones. *Si $f(x, y)$ y $f_y(x, y)$ son funciones continuas sobre un rectángulo cerrado R, entonces por cada punto (x_0, y_0) del interior de R pasa una y solo una curva integral (o curva solución) de la ecuación $y' = f(x, y)$*

Variables Separables.
Toda ecuación que se puede escribir de la forma $G(y)\,dy = H(x)\,dx$ se resuelve por integración directa.

Ecuaciones exactas.
Sean M y N funciones de dos variables, continuas y con primeras derivadas parciales continuas en una región abierta R del plano XY.

Teorema 2. *Una ecuación de la forma $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ es una ecuación* *exacta si y solo si existe una función de dos variables F tal que*

$$F_x(x,y) = M(x,y) \quad \text{y} \quad F_y(x,y) = N(x,y)$$

Teorema 3. *Una ecuación es exacta si y solo si $M_y(x,y) = N_x(x,y)$.*

La solución de la ecuación diferencial exacta está dada por $F(x,y) = C$, donde

$$F(x,y) = \int M(x,y)dx + g(y) = \int N(x,y)dy + h(x)$$

Factor Integrante.
A veces es posible transformar una ecuación no exacta en exacta multiplicando por un factor adecuado, que llamamos Factor Integrante, $\mu(x,y)$.
En tal caso, debe cumplirse:

$$\mu_y M - \mu_x N = \mu(N_x - M_y)$$

Caso 1: Si μ es una función que solo depende de x, entonces el Factor Integrante es $e^{\int h(x)dx}$, donde

$$h(x) = \frac{M_y - N_x}{N}$$

Caso 2 : Si μ es una función que solo depende de y, entonces el Factor Integrante es $e^{\int h(y)dy}$, donde

$$h(y) = \frac{N_x - M_y}{M}$$

Caso 3: Si $u(x,y) = g(z)$, con $z = x + y$, entonces el Factor Integrante es $e^{\int h(z)dz}$, donde

$$h(z) = \frac{N_x - M_y}{M - N}$$

Caso 4: Si $u(x,y) = g(z)$, con $z = x - y$, entonces el Factor Integrante es $e^{\int h(z)dz}$, donde

$$h(z) = \frac{M_y - N_x}{M + N}$$

Caso 5: Si $u(x,y) = g(z)$, con $z = x \cdot y$, entonces el Factor Integrante es $e^{\int h(z)dz}$, donde

$$h(z) = \frac{N_x - M_y}{xM - yN}$$

Ecuaciones lineales.
Una ecuación lineal de primer orden es de la forma $y' + P(x)y = Q(x)$, con P y Q funciones continuas en un intervalo abierto de $\mathbb{R}$. Su solución es:

$$y(x) = e^{-\int P(x)dx}\left[C + \int Q(x)\, e^{\int P(x)dx} dx\right]$$

Ecuaciones de coeficientes homogéneos.
Una ecuación diferencial de la forma $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ se dice homogénea o de coeficientes homogéneos si existe un número real α tal que $M(\alpha x, \alpha y) = \alpha^n M(x,y)$ y $N(\alpha x, \alpha y) = \alpha^n N(x,y)$.

En este caso, se hace la sustitución $y = ux$, obteniéndose la ecuación de variables separables:

$$\frac{dx}{x} = \frac{-N(1,u)\,du}{M(1,u) + uN(1,u)}$$

Ecuación de Bernoulli.
Una ecuación diferencial de la forma $y' + P(x)y = Q(x)y^r$, donde r es cualquier número real y P y Q funciones continuas en un intervalo abierto de $\mathbb{R}$, se conoce como ecuación de Bernoulli. La sustitución $z = y^{1-r}$ transforma la ecuación en una ecuación lineal y su solución es:

$$y^{(1-r)} = e^{-(1-r)\int P(x)dx}\left[C + (1-r)\int Q(x) e^{(1-r)\int P(x)dx} dx\right]$$

Ecuaciones de la forma $y' = f(ax + by + c)$.
Mediante la sustitución $z = ax + by + c$ la ecuación se transforma en una ecuación de variables separables y su solución es:

$$dx = \frac{dz}{b\,f(z) + a}$$

Ecuaciones de la forma $y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$, con $a_1b_2 \neq a_2b_1$

Se utiliza la sustitución $u = x - h$, $v = y - k$, donde h y k se obtienen resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{array}{rcl} a_1h + b_1k + c_1 & = & 0 \\ a_2h + b_2k + c_2 & = & 0 \end{array}\right|$$

Se obtiene la ecuación de coeficientes homogéneos de la forma

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v}\right)$$

Ecuación de Riccati.
Una ecuación de la forma $y' + P(x)y + Q(x)y^2 + R(x) = 0$ con P, Q y R funciones continuas en un intervalo abierto de $\mathbb{R}$, se conoce como ecuación de Riccati. Si se conoce una solución particular $y_1(x)$ de esta ecuación, la sustitución $y = y_1 + \frac{1}{z}$, transforma la ecuación original en la ecuación lineal:

$$z' - (P(x) + 2y_1(x)Q(x))z = Q(x)$$

La sustitución $y' = p$.
Esta sustitución permite hacer un cambio de variables usando regla de la cadena. La solución en este caso, aparece expresada en forma paramétrica.

Ecuación de Clairaut.
Una ecuación de Clairaut es una ecuación diferencial de la forma

$$y = xy' + f(y')$$

Su solución general es $y = Cx + f(C)$. Haciendo la sustitución $y' = p$, se obtiene la solución singular de la ecuación de Clairaut:

$$\begin{cases} y = -pf'(p) + f(p) \\ x = -f'(p) \end{cases}$$

Sustituciones usando diferenciales.
A veces es posible usar fórmulas diferenciales conocidas para encontrar una sustitución adecuada para resolver una ecuación diferencial. Algunas de estas fórmulas diferenciales son:

1. $d(x+y) = dx + dy$
2. $d(xy) = y\,dx + x\,dy$
3. $d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}$
4. $d(x^2+y^2) = 2x\,dx + 2y\,dy$
5. $d\left(\arctan\left(\frac{x}{y}\right)\right) = \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2+y^2}$
6. $d\left(\ln\left(\frac{x}{y}\right)\right) = \frac{y\,dx - x\,dy}{xy}$

1.2. Problemas resueltos

1. Resolver la ecuación de primer orden:

$$y\, e^{\cos x}\ \operatorname{sen} x\, dx + \frac{1}{y}\, dy = 0$$

Se trata de una ecuación de variables separables, luego reordenamos e integramos ($y \neq 0$ por hipótesis):

$$\begin{aligned} e^{\cos x}\ \operatorname{sen} x\, dx &= -\frac{1}{y^2}\, dy \\ \int e^{\cos x}\ \operatorname{sen} x\, dx &= -\int \frac{1}{y^2}\, dy \\ -e^{\cos x} &= \frac{1}{y} + C \end{aligned}$$

Luego, la solución de la ecuación es:

$$y = \frac{1}{C - e^{\cos x}}$$

2. Resolver la ecuación de primer orden:

$$y' = \frac{x - y}{x + 2y}$$

Reescribiendo, $(x - y)\, dx - (x + 2y)\, dy = 0$.

$M_y = -1 = N_x$, luego la ecuación es exacta.

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int (x - y)\, dx \\ &= \frac{x^2}{2} - xy + g(y) \end{aligned}$$

Derivando respecto a y e igualando a N:

$$f_y(x, y) = -x + g'(y) = -x - 2y \Rightarrow g'(y) = -2y \Rightarrow g(y) = -y^2$$

Luego $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 - xy - y^2$ y la solución de la ecuación es

$$x^2 - 2xy - 2y^2 = C$$

3. Resolver la ecuación $(y-x)y' = 1$.

Camino 1. Ecuación lineal.

Notemos que $x' + x = y$, luego la ecuación es lineal en x y su solución es:

$$\begin{aligned} x &= e^{-\int dy}\left[C + \int y\, e^{\int dy}\right] \\ &= e^{-y}\left[C + e^{y}(y-1)\right] \end{aligned}$$

o bien

$$(x - y + 1)\, e^{y} = C$$

Camino 2. Factor integrante.

Nuevamente reescribimos la ecuación: $dx + (x-y)\, dy = 0$.

Como $M_y = 0$ y $N_x = 1$, la ecuación no es exacta y buscamos un factor integrante:

$$\frac{N_x - M - y}{M} = 1$$

Luego, un factor integrante de la ecuación es $e^{\int dy} = e^{y}$. Ahora la ecuación

$$e^{y}\, dx + e^{y}(x-y)\, dy = 0$$

es exacta y

$$f(x,y) = \int e^{y}\, dx = x\, e^{y} + g(y)$$

Derivando e igualando:

$$f_y(x,y) = e^{y} + g'(y) = e^{y}(x-y)$$

Luego, $g'(y) = -y\, e^{y}$, de donde $g(y) = (1-y)\, e^{y}$.

Así, $f(x,y) = (x-y+1)\, e^{y}$ y la solución de la ecuación es:

$$(x - y + 1)\, e^{y} = C$$

4. Resolver el problema de valor inicial:

$$y - xy' = a(1 + x^2y'), \quad y(1) = 2a$$

Ordenando la ecuación tenemos $\dfrac{dy}{y-a} = \dfrac{dx}{x+ax^2}$ y usando fracciones parciales:

$$\frac{dy}{y-a} = \left[\frac{1}{x} - \frac{a}{ax+1}\right] dx$$

Esta es una ecuación de variables separables, por lo que integrando obtenemos:

$$\ln(y-a) = \ln x - \ln(ax+1) + \ln C$$

Usando las propiedades de logaritmo $y - a = C\dfrac{x}{ax+1}$ y reemplazando las condiciones iniciales, $C = a(a+1)$.

Así, la solución del problema de valor inicial es

$$y(x) = \frac{x(2a^2 + a) + a}{ax+1}$$

5. Resolver el problema de valor inicial:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(\ln y - \ln x + 1)}{x}, \quad y(1) = e$$

Se trata de una ecuación homogénea, por lo que hacemos la sustitución $y = u\,x$. Entonces, $y' = u'x + u$.

Reemplazando, $u'x + u = u(\ln u + 1)$, es decir, $u'x = u \ln u$, una ecuación de variables separables, por lo que escribimos:

$$\frac{du}{u \ln u} = \frac{dx}{x}$$

Integrando, $\ln(\ln u) = \ln x + \ln C \Rightarrow \ln u = C\,x \Rightarrow \ln y = C\,x + \ln x$. Ahora, reemplazando la condición inicial, $y(1) = e$, tenemos que $C = 1$. Así, la solución del problema de valor inicial es

$$y = x\,e^x$$

6. Resolver la ecuación: $(x-2y+4)+(2x-y+2)y'=0$.

   Reoordenando la ecuación tenemos $y' = \dfrac{2y-x-4}{2x-y+2}$.

   Intersectamos las dos rectas involucradas resolviendo el sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} x-2y+4 & = & 0 \\ 2x-y+2 & = & 0 \end{array}\right|$$

   cuya solución es $x=0$ e $y=2$.
   Hacemos entonces la sustitución $u=x$, $v=y-2$, y obtenemos la ecuación homogénea

$$\frac{dv}{du}=\frac{2v-u}{2u-v}$$

   Mediante una segunda sustitución, $v=zu$, resulta la ecuación

$$\frac{du}{u}=\frac{2-z}{z^2-1}dz=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{z-1}-\frac{3}{z+1}\right]$$

   e integrando obtenemos:

$$\frac{1}{2}\ln|z-1|-\frac{3}{2}\ln|z+1|=\ln u+\ln C$$

   Utilizando las propiedades de logaritmo,

$$\frac{z-1}{(z+1)^3}=Cu^2$$

   y así, la solución en las variables iniciales es

$$\frac{x^2y-2x^2-x^3}{(y-2+x)^3}=Cx^2$$

   Otra forma de resolver esta ecuación es probando que admite un factor integrante que es función de la resta $x-y$:

$$\mu(x,y)=e^{\int\frac{-4}{3z+6}dz}=(x-y+2)^{-\frac{4}{3}}$$

7. Resolver el problema de valor inicial:

$$xy' = -y + \sqrt{xy+1}, \qquad y(0) = 0$$

Hacemos la sustitución $u = xy + 1$. Entonces $u' = y + xy'$.
Reemplazando en la ecuación, $u' - y = -y + \sqrt{u}$, o equivalentemente,

$$\frac{du}{\sqrt{u}} = dx$$

Luego, $2\sqrt{u} = x + C$, es decir, $2\sqrt{xy+1} = x + C$.
Reemplazando la condición inicial, obtenemos $C = 2$ y por lo tanto la solución del problema de valor inicial es:

$$2\sqrt{xy+1} = x + 2$$

8. Usar la sustitución $v = \sqrt{y + \operatorname{sen} x}$, para resolver la ecuación

$$y' = \sqrt{y + \operatorname{sen} x} - \cos x$$

Analicemos primero el caso $v \neq 0$.
$v = \sqrt{y + \operatorname{sen} x} \Rightarrow \dfrac{dv}{dx} = \dfrac{y' + \cos x}{2v} \Rightarrow y' = 2v\dfrac{dv}{dx} - \cos x.$
Reemplazando en la ecuación original, obtenemos la ecuación de variables separables $2v\dfrac{dv}{dx} = v$.

Como $v \neq 0$, obtenemos $2\,dv = dx$, de donde $2v = x + C$, es decir

$$2\sqrt{y + \operatorname{sen} x} = x + C$$

o bien

$$y = \frac{1}{4}(x + C)^2 - \operatorname{sen} x$$

Ahora, si $v = 0$, $y = -\operatorname{sen} x$ también es solución de la ecuación pues $y' = -\cos x$. Por lo tanto, $y = -\operatorname{sen} x$ corresponde a una solución singular de la ecuación. Note que por el Teorema de Picard hay una única solución que pasa por cualquier punto de $\mathbb{R}^2$ a excepción de los puntos (x, y) para los cuales $y = -\operatorname{sen} x$.

9. Resolver el problema de valor inicial:

$$dx - (3e^y - 2x)dy = 0, \quad y(-1) = 0$$

Camino 1. Como la ecuación no es lineal en la variable y, pero sí en la variable x, escribimos

$$\frac{dx}{dy} + 2x = 3e^y$$

De aquí, $P(y) = 2$, $Q(y) = 3e^y$, y la solución es

$$x = e^{-2y}\left(\int 3e^y e^{2y} dy + C\right) = e^{-2y}(e^{3y} + C)$$

Reemplazando la condición inicial obtenemos $C = -2$, por lo que la solución del problema de valor inicial es

$$x = e^y - 2e^{-2y}$$

Camino 2. Un segundo método es buscando un factor integrante:

Como $\dfrac{N_x - M_y}{M} = \dfrac{2}{1}$, tenemos que

$$\mu(x, y) = h(y) = e^{2\int dy} = e^{2y}$$

es un factor integrante y la ecuación

$$e^{2y}dx - e^{2y}(3e^y - 2x)dy = 0$$

es exacta. Luego, $F(x, y) = \displaystyle\int e^{2y}dx = xe^{2y} + g(y)$.

Como $F_y = N$, tenemos que $F_y(x, y) = 2xe^{2y} + g'(y) = 2xe^{2y} - 3e^{3y}$ de donde $g'(y) = -3e^{3y}$. Luego $g(y) = -e^{3y} + C$.

Por lo tanto, la solución general es $xe^{2y} - e^{3y} = C$, que es equivalente a la anterior.

10. Resolver la ecuación: $(2y^2 + 3x)dx + 2xy\,dy = 0$.

$$\left.\begin{array}{rclcrcl} M(x,y) & = & 2y^2+3x & \Rightarrow & M_y(x,y) & = & 4y \\ N(x,y) & = & 2xy & \Rightarrow & N_x(x,y) & = & 2y \end{array}\right\} M_y \neq N_x.$$

La ecuación no es exacta, pero como la expresión

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{2y}{2xy} = \frac{1}{x}$$

solo depende de x, tenemos el factor integrante

$$\mu(x,y) = h(x) = e^{\int \frac{dx}{x}} = x$$

Ahora, la ecuación $(2xy^2 + 3x^2)dx + 2x^2y\,dy = 0$ es exacta, por tanto

$$F(x,y) = \int 2x^2y\,dy = x^2y^2 + h(x)$$

y como $F_x = M$, igualando tenemos que

$$F_x(x,y) = 2xy^2 + h'(x) = 2xy^2 + 3x^2$$

Luego, $h(x) = x^3 + C$ y así, la solución general de la ecuación es

$$x^2y^2 + x^3 = C$$

11. Resolver la ecuación $y(6y^2 - x - 1)dx + 2x\,dy = 0$.

La ecuación se puede escribir como $y' - \dfrac{x+1}{2x}y = -\dfrac{3}{x}y^3$, una ecuación de Bernoulli cuya solución es:

$$y^{-2} = e^{-\int \frac{x+1}{x}dx}\left[C + 6\int \frac{e^{\int \frac{x+1}{x}dx}}{x}dx\right]$$

es decir: $\dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{xe^x}(C + 6e^x)$.

Por lo tanto, la solución implícita de la ecuación es

$$y^2 = \frac{xe^x}{C + 6e^x}$$

12. Resolver la ecuación: $(y + y\cos xy)\,dx + (x + x\cos xy)\,dy = 0$.

    Camino 1. Debemos considerar dos casos:

    - Si $1 + \cos xy \neq 0$, dividiendo por $1 + \cos xy$, obtenemos la ecuación $ydx + xdy = 0$ cuya solución es $xy = C$.

    - Si $1 + \cos xy = 0$, entonces $xy = (2k-1)\pi$, que está incluida en la solución anterior, por lo que la solución de la ecuación es $xy = C$.

    Camino 2. Mostrar que la ecuación es exacta.

    $$M_y(x,y) = N_x(x,y) = 1 + \cos xy - xy\,\mathrm{sen}\,xy$$

    Entonces, $F(x,y) = \displaystyle\int (y + y\cos xy)dx = xy + \mathrm{sen}\,xy + g(y)$

    Como $F_y = N,\ x + x\cos xy + g'(y) = x + x\cos xy$.

    Esto significa que $g'(y) = 0$, es decir g es constante y la solución general de la ecuación es $xy + \mathrm{sen}\,xy = C$.

    Aparentemente, esta solución es distinta de la que obtuvimos con el primer método. Sin embargo, notemos que si $xy = C$, entonces se cumple que $xy + \mathrm{sen}\,xy = C + \mathrm{sen}\,C$, es decir, constante.

    Por otro lado, la función $f(z) = z + \mathrm{sen}\,z$ es estrictamente creciente, pues $f'(z) = 1 + \cos z \geq 0$ y es igual a 0 solo en puntos aislados. Eso significa que f es inyectiva, por lo que $f(z) = C$ implica que z es constante.

    Por lo tanto, $xy + \mathrm{sen}\,xy = C$ implica $xy = C_0$, por lo que ambas soluciones son equivalentes.

    Camino 3. Otro método de solución es usar el hecho que la diferencial de un producto es $d(xy) = y\,dx + x\,dy$, por lo que haciendo la sustitución $u = xy$, obtenemos $(1 + \cos u)\,du = 0$, es decir, $u + \mathrm{sen}\,u = C$, que corresponde a la solución anterior.

13. Resolver la ecuación $\dfrac{3y^2}{x(x+3)}\,dx + 2y\left[\ln\dfrac{5x}{x+3} + 3\operatorname{sen} y\right] dy = 0.$

Derivando, $M_y(x,y) = N_x(x,y) = \dfrac{6y}{x(x+3)}$.

Luego la ecuación es exacta, de donde

$$F(x,y) = \int \frac{3y^2}{x(x+3)}\,dx = 3y^2\int \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+3}\right)dx = y^2\ln\frac{x}{x+3} + g(y)$$

Como $F_y = N$, tenemos que

$$F_y(x,y) = 2y\ln\frac{x}{x+3} + g'(y) = 2y\left[\ln\frac{5x}{x+3} + 3\operatorname{sen} y\right]$$

y por lo tanto, $g'(y) = 2y\ln 5 + 6y\operatorname{sen} y$.

Integrando,

$$g(y) = y^2\ln 5 + 6\int y\operatorname{sen} y\,dy = y^2\ln 5 + 6(-y\cos y + \operatorname{sen} y) + C$$

Así, la solución general de la ecuación es

$$y^2\ln\frac{5x}{x+3} - 6y\cos y + 6\operatorname{sen} y = C$$

14. Resolver el problema de valor inicial: $\sqrt{y}y' + \sqrt{y^3} = 1,\ y(0) = 4.$

Como claramente $y > 0$, pues $y = 0$ no es solución, dividimos por $\sqrt{y}$ y obtenemos la ecuación $y' + y = y^{-\frac{1}{2}}$, que es una ecuación de Bernoulli con $r = -\frac{1}{2}$. Entonces

$$y^{\frac{3}{2}} = e^{-\frac{3}{2}x}\left[\frac{3}{2}\int e^{\frac{3}{2}x}dx + C\right] = e^{-\frac{3}{2}x}(e^{\frac{3}{2}x} + C) = C\,e^{-\frac{3}{2}x} + 1$$

Reemplazando la condición inicial, obtenemos $C = 7$.

Luego, la solución del problema de valor inicial es :

$$y = (7e^{-\frac{3}{2}x} + 1)^{\frac{2}{3}}$$

15. Resolver la ecuación $y' - (1 + \frac{1}{x})y + (x + \frac{1}{x})e^x = 0$ y probar que ella tiene dos soluciones particulares tales que una es la derivada de la otra.

    Como la ecuación es lineal :

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{\int (1+\frac{1}{x})dx} \left[C - \int (x + \frac{1}{x}) e^x e^{-\int (1+\frac{1}{x})dx} dx \right] \\ &= xe^x \left[C - \int (x + \frac{1}{x}) e^x \frac{e^{-x}}{x} dx \right] \\ &= xe^x \left[C - \int (1 + \frac{1}{x^2}) dx \right] \end{aligned}$$

    Así, la solución general de la ecuación es $y(x) = e^x(Cx - x^2 + 1)$.

    Consideremos ahora dos soluciones particulares, digamos

$$y_1(x) = e^x(Ax - x^2 + 1) \text{ e } y_2(x) = e^x(Bx - x^2 + 1)$$

    Entonces $y_1'(x) = e^x(Ax - x^2 + 1) + e^x(A - 2x)$ e imponemos la condición $y_1'(x) = y_2(x)$ de donde $A = 0$, $B = -2$.

    Así, $y_1(x) = e^x(1 - x^2)$ e $y_2(x) = e^x(1 - 2x - x^2)$ cumplen lo pedido.

16. Demostrar que la ecuación $y' + P(x)y = Q(x)y \ln y$ puede resolverse mediante el cambio de variable $z = \ln y$.

    Claramente, $y > 0$. Ahora, $z = \ln y \Rightarrow \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dx} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = y\dfrac{dz}{dx}$.

    Reemplazando, $y\,\dfrac{dz}{dx} + P(x)\,y = Q(x)\,y\,z$, de donde

$$\frac{dz}{dx} - Q(x)\,z = -P(x)$$

    es lineal por lo que la solución de la ecuación es

$$\ln y = e^{\int Q(x)\,dx} \left[C - \int P(x)\, e^{-\int Q(x)\,dx} dx \right]$$

17. Aplicar el método del ejercicio anterior para resolver la ecuación

$$xy' = 2x^2y + y\ln y,\ x > 0$$

Dividimos por x en la ecuación y obtenemos $y' - 2xy = \dfrac{1}{x}y\ln y$.
Entonces, $P(x) = -2x$, $Q(x) = \frac{1}{x}$, y la solución de la ecuación es

$$\begin{aligned}
\ln y &= e^{\int \frac{1}{x}dx}\left[\int 2x\, e^{\int -\frac{1}{x}\,dx}dx + C\right] \\
&= x\left[\int 2\,x\,e^{-ln\,x}dx\ + C\right] \\
&= x(2x + C)
\end{aligned}$$

18. Usar un factor integrante de la forma $\mu\ = e^{ax+by}$ para resolver la ecuación

$$(2x - 2y - x^2 + 2xy)dx + (2x^2 - 4xy - 2x)dy = 0$$

Utilizando el factor integrante tenemos que:

$$\begin{aligned}
M_y(x,y) &= e^{ax+by}((2bx - 2by - bx^2 + 2bxy - 2 + 2x) \\
N_x(x,y) &= e^{ax+by}(2ax^2 - 4axy - 2ax + 4x - 4y - 2)
\end{aligned}$$

Como queremos que la ecuación resulte exacta, $M_y = N_x$, es decir,

$$-(b + 2a)x^2 + 2(b - 1 + a)x + 2(2 - b)y + 2(2a + b)xy = 0$$

de donde $a = -1$ y $b = 2$. Luego,

$$\begin{aligned}
F(x,y) &= \int e^{-x+2y}(2x^2 - 4xy - 2x)dy \\
&= e^{-x+2y}(x^2 - 2xy) + f(x)
\end{aligned}$$

Derivando,

$$F_x(x,y) = e^{-x+2y}(2xy - x^2 + 2x - 2y) + f'(x) = N(x,y)$$

y así, $f'(x) = 0$, de donde $f(x) = C$. Por lo tanto, la solución de la ecuación es

$$e^{-x+2y}(x^2 - 2xy) = C$$

19. Resolver la ecuación

$$\left[\frac{2\cos x}{\operatorname{sen} y} + e^x\right] dx - \frac{\operatorname{sen} x \cos y}{\operatorname{sen}^2 y} dy = 0$$

Buscamos factor integrante:

$$M_y = \frac{-2\cos x\ \cos y}{\operatorname{sen}^2 y} \qquad\qquad N_x = -\frac{\cos x\ \cos y}{\operatorname{sen}^2 y}$$

Como la expresión

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{-\cos x\ \cos y\ \operatorname{sen}^2 y}{\operatorname{sen}^2 y\ \operatorname{sen} x\ \cos y} = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

solo depende de x, un factor integrante de la ecuación es

$$h(x) = e^{\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} dx} = \operatorname{sen} x$$

Ahora la ecuación

$$\left[\frac{2\cos x\ \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} y} + e^x \operatorname{sen} x\right] dx - \frac{\operatorname{sen}^2 x \cos y}{\operatorname{sen}^2 y} dy = 0$$

es exacta:

$$M_y = N_x = \frac{-2\ \operatorname{sen} x \cos x \cos y}{\operatorname{sen}^2 y}$$

Luego, $f(x,y) = -\int \frac{\operatorname{sen}^2 x \cos y}{\operatorname{sen}^2 y} dy = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} y} + g(x)$, y entonces

$$f_x(x,y) = M \Rightarrow \frac{2\ \operatorname{sen} x\ \cos x}{\operatorname{sen} y} + g'(x) = \frac{2\cos x\ \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} y} + e^x \operatorname{sen} x$$

de donde $g(x) = \int e^x \operatorname{sen} x\, dx = \frac{1}{2} e^x (\operatorname{sen} x - \cos x)$.

Así, la solución general del problema es

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} y} + \frac{1}{2} e^x (\operatorname{sen} x - \cos x) = C$$

20. Demuestre que la ecuación

$$(2x(1+x^2y^2)+y)\,dx+(x-2y(1+x^2y^2))\,dy=0$$

tiene un factor integrante de la forma $\mu(x,y)=f(xy)$ y úselo para resolverla.

Sea $\mu(x,y)=f(z)$ con $z=xy$. Entonces

$$\mu_x(x,y)=yf'(z) \qquad \text{y} \qquad \mu_y(x,y)=xf'(z)$$

Por hipótesis, la ecuación

$$\mu(x,y)(2x(1+x^2y^2)+y)\,dx+\mu(x,y)(x-2y-2x^2y^3))\,dy=0$$

es exacta, luego

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu(x,y)(2x+2x^3y^2+y)\right)=xf'(z)(2x+2x^3y^2+y)+f(z)(4x^3y+1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu(x,y)(x-2y-2x^2y^3)\right)=yf'(z)(x-2y-2x^2y^3)+f(z)(1-4xy^3)$$

Igualando estas expresiones y simplicando, obtenemos

$$\begin{aligned}
2f'(z)((x^2+y^2)+x^2y^2(x^2+y^2)) &= -4xyf(z)(x^2+y^2)\\
\frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{-2xy}{1+x^2y^2}\\
\frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{-2z}{1+z^2}\\
\ln f(z) &= -\ln(1+z^2)\\
f(xy) &= \frac{1}{1+x^2y^2}
\end{aligned}$$

Luego, la ecuación

$$\frac{2x(1+x^2y^2)+y}{1+x^2y^2}\,dx+\frac{x-2y(1+x^2y^2)}{1+x^2y^2}\,dy=0$$

es exacta. En efecto,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(2x+\frac{y}{1+x^2y^2}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{1+x^2y^2}-2y\right)=\frac{1+x^2y^2-2x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2}$$

Así,

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2 + \arctan xy + g(y) \\ f_y(x,y) &= \frac{x}{1+x^2y^2} + g'(y) = \frac{x}{1+x^2y^2} - 2y \end{aligned}$$

Luego, $g'(y) = -2y$, de donde $g(y) = -y^2$ y

$$f(x,y) = x^2 + \arctan xy - y^2$$

La solución general de la ecuación es entonces

$$x^2 + \arctan xy - y^2 = C$$

21. Dada la ecuación diferencial $y(1+2x^3e^{2x}y^2)dx + xdy = 0$ con $x,\ y > 0$.

    a) Encontrar una función h y una constante b tal que $\mu(x,y) = h(x)y^b$ sea un factor integrante.

    Si $h(x)y^b$ es un factor integrante, entonces la ecuación

    $$h(x)y^{b+1}(1+2x^3e^{2x}y^2)dx + h(x)y^b x dy = 0$$

    es exacta. Derivando,

    $$\begin{aligned} M_y(x,y) &= (b+1)h(x)(1+2x^3e^{2x}y^2)y^b + 4x^3e^{2x}h(x)y^{b+2} \\ N_x(x,y) &= h(x)y^b + xh'(x)y^b \end{aligned}$$

    Calculamos la diferencia $M_y - N_x$ y la igualamos a 0 para que la ecuación sea exacta:

    $$\begin{aligned} y^b[(b+1)h(x)(1+2x^3e^{2x}y^2) + 4x^3e^{2x}h(x)y^2 - h(x) - xh'(x)] &= \\ y^b[h(x)((b+1)(1+2x^3e^{2x}y^2) + 4x^3e^{2x}y^2 - 1) - xh'(x)] &= \\ y^b[h(x)(b+2(b+3)x^3e^{2x}y^2) - xh'(x)] &= 0 \end{aligned}$$

    Podemos elegir $b = -3$ y entonces obtenemos la ecuación diferencial

    $$-3h(x) - xh'(x) = 0$$

    cuya solución es $h(x) = x^{-3}$, y por tanto $\mu(x,y) = x^{-3}y^{-3}$ es un factor integrante de la forma pedida.

b) Encontrar la solución general de la ecuación.

Multiplicando por el factor integrante que encontramos en la parte *a*) obtenemos la ecuación exacta

$$(x^{-3}y^{-2} + 2e^{2x})dx + x^{-2}y^{-3}dy = 0$$

En efecto,

$$M_y(x,y) = N_x(x,y) = -2x^{-3}y^{-3}$$

Entonces $F(x,y) = \int x^{-2}y^{-3}dy = -\frac{1}{2}x^{-2}y^{-2} + g(x)$.
Ahora, $F_x = M$, luego $x^{-3}y^{-2} + g'(x) = x^{-3}y^{-2} + 2e^{2x}$.

De aquí, $g'(x) = 2e^{2x}$ y por lo tanto $g(x) = e^{2x}$, de donde la solución general de la ecuación es:

$$-\frac{1}{2}x^{-2}y^{-2} + e^{2x} = C$$

c) Determinar la solución particular que verifica la condición inicial $y(2) = \frac{3}{2\sqrt{2}}e^{-2}$ y el intervalo máximo donde tal solución está definida.

Utilizando la condición inicial, tenemos que $C = \frac{8}{9}e^4$. Luego la solución particular es

$$\frac{1}{2}x^{-2}y^{-2} = e^{2x} - \frac{8}{9}e^4$$

Finalmente, determinamos el intervalo máximo de definición, mediante la inecuación $e^{2x} - \frac{8}{9}e^4 > 0$, cuya solución es el intervalo

$$\left(2 + \ln\frac{2\sqrt{2}}{3}, +\infty\right)$$

22. Resolver la ecuación
$$y' = \frac{2y}{x} + \cos\left(\frac{y}{x^2}\right)$$

Hacemos la sustitución $y = x^2 z$. Entonces $y' = 2xz + x^2 z'$.
Reemplazando en la ecuación obtenemos
$$2xz + x^2 z' = \frac{2x^2 z}{x} + \cos(z)$$
es decir, $x^2 z' = \cos z$, una ecuación de variables separables que escribimos como
$$\frac{dz}{\cos z} = \frac{dx}{x^2}$$
Integrando,
$$\begin{aligned} \ln|\sec(z) + \tan(z)| &= -\frac{1}{x} + C \\ \ln\left|\sec\left(\frac{y}{x^2}\right) + \tan\left(\frac{y}{x^2}\right)\right| &= -\frac{1}{x} + C \end{aligned}$$
Luego, la solución implícita de la ecuación es
$$\ln\left|\sec\left(\frac{y}{x^2}\right) + \tan\left(\frac{y}{x^2}\right)\right| + \frac{1}{x} = C$$

23. Mostrar que la ecuación diferencial $2x^4 yy' + y^4 = 4x^6$ se reduce a una ecuación homogénea mediante la transformación $y = z^n$, para cierto n y usar este hecho para resolverla.

Sea $y = z^n$, entonces $y' = nz^{n-1}z'$, y reemplazando en la ecuación tenemos
$$2x^4 z^n n z^{n-1} z' + z^{4n} = 4x^6$$
es decir,
$$2nx^4 z^{2n-1} z' + z^{4n} = 4x^6$$
Para que esta ecuación sea homogénea se debe tener $2n - 1 = 4$ y $4n = 6$, de donde $n = \frac{3}{2}$. Por lo tanto
$$\frac{dz}{dx} = \frac{4x^6 - z^6}{3x^4 z^2}$$

Como la ecuación resultante es homogénea hacemos el cambio de variable $z = xu$ y obtenemos:

$$u + xu' = \frac{1}{3}\left[\frac{4}{u^2} - u^4\right]$$

es decir,

$$\frac{dx}{x} = \frac{3u^2du}{4 - u^6 - 3u^3} = -\frac{1}{5}\left[\frac{3u^2du}{u^3-1} - \frac{3u^2du}{u^3+4}\right]$$

e integrando nos queda

$$-\ln x = \frac{1}{5}\left(\ln(u^3-1) - \ln\left(u^3+4\right)\right) - \ln C$$

Por las propiedades de logaritmo tenemos $\dfrac{C}{x^5} = \dfrac{u^3-1}{u^3+4}$, de donde

$$u^3 = \frac{4C + x^5}{x^5 - C}$$

y por lo tanto $z = x\left(\dfrac{4C+x^5}{x^5-C}\right)^{\frac{1}{3}}$.

Reemplazando nuevamente, tenemos que la solución de la ecuación en las variables originales es

$$y(x) = x^{\frac{3}{2}}\left(\frac{4C+x^5}{x^5-C}\right)^{\frac{1}{2}}$$

24. Use la sustitución $z = \dfrac{1}{y-x}$ para resolver la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = x^3(y-x)^2 + \frac{y}{x}$$

Notemos que $y = \dfrac{1}{z} + x$, luego $y' = -\dfrac{z'}{z^2} + 1$. Reemplazando en la ecuación, obtenemos:

$$\begin{aligned} -\frac{z'}{z^2} + 1 &= \frac{x^3}{z^2} + \frac{1+zx}{zx} \\ -z' + z^2 &= x^3 + \frac{z(1+zx)}{x} \\ z' + \frac{z}{x} &= -x^3 \end{aligned}$$

Obtenemos una ecuación lineal cuya solución es

$$\begin{aligned}
z &= e^{-\int \frac{dx}{x}} \left[C - \int x^3 e^{\int \frac{dx}{x}} dx \right] \\
&= e^{-\ln x} \left[C - \int x^3 e^{\ln x} dx \right] \\
&= \frac{1}{x} \left[C - \int x^4 \, dx \right] \\
&= \frac{1}{x} \left(C - \frac{x^5}{5} \right)
\end{aligned}$$

Ahora volvemos a las variables originales y obtenemos la solución implícita:

$$\frac{1}{y-x} = \frac{C - x^5}{5x}$$

o bien la solución explícita

$$y = \frac{5x}{C - x^5} + x$$

25. Demuestre que usando una sustitución adecuada, la ecuación

$$y' = x^{\alpha-1} f\left(\frac{y}{x^\alpha} \right)$$

donde α es un número real, se transforma en una ecuación de variables separables.

Hacemos la sustitución $u = \dfrac{y}{x^\alpha}$, es decir, $y = ux^\alpha$. Entonces

$$y' = u' x^\alpha + \alpha u x^{\alpha-1}$$

Reemplazamos y obtenemos la ecuación de variables separables

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dx} x^\alpha + \alpha u x^{\alpha-1} &= x^{\alpha-1} f(u) \\
\frac{du}{dx} x &= -\alpha u + f(u) \\
\frac{du}{f(u) - \alpha u} &= \frac{dx}{x}
\end{aligned}$$

26. Usar el ejercicio anterior para resolver la ecuación

$$y' = x^2 \left[\frac{3y}{x^3} + \cos^2\left(\frac{y}{x^3}\right) \right]$$

Ahora bien, para la ecuación dada hacemos $f(u) = 3u + \cos^2 u$, reemplazamos y

$$\begin{aligned} \frac{du}{3u + \cos^2 u - 3u} &= \frac{dx}{x} \\ \int \frac{du}{cos^2 u} &= x + C \\ \tan u &= x + C \end{aligned}$$

Así, la solución general de la ecuación es

$$\tan\left(\frac{y}{x^3}\right) = x + C$$

27. Resolver la ecuación $y' - e^{2x} = (1 + 2\,e^x)y + y^2$ sabiendo que tiene una solución particular $y_1 = -e^x$.

Esta es una ecuación del tipo Riccati, y en este caso se usa la sustitución

$$y = -e^x + \frac{1}{z}$$

Como $y' = -e^x - \dfrac{z'}{z^2}$ obtenemos la ecuación:

$$-e^x - \frac{z'}{z^2} - e^{2x} = (1 + 2\,e^x)(-e^x + \frac{1}{z}) + (-e^x + \frac{1}{z})^2$$

o, equivalentemente, $z' + z + 1 = 0$, cuya solución es :

$$z = e^{-\int dx} \left[C - \int e^{\int dx} dx \right] = e^{-x}(C - e^x)$$

Luego, la solución de la ecuación dada es

$$y(x) = \frac{e^x - Ce^x + e^{2x}}{C - e^x}$$

28. Dada la ecuación

$$y' + e^{-2x}y^2 - \frac{1}{x}(1+4x+2x^2)y = -\frac{e^{2x}}{x}(1+x+2x^2+x^3)$$

a) Encontrar una solución particular de la forma

$$y_1(x) = e^{2x}(Ax+B)$$

Derivando, $y_1'(x) = 2e^{2x}(Ax+B) + e^{2x}A$, y reemplazando en la ecuación tenemos:

$$e^{2x}[2(Ax+B) + A + (Ax+B)^2 - \frac{1}{x}(1+4x+2x^2)(Ax+B)]$$
$$= -\frac{e^{2x}}{x}(1+x+2x^2+x^3)$$

de donde

$$B + B(2-B)x + 2(A - AB + B)x^2 + A(2-A)x^3 = 1 + x + 2x^2 + x^3$$

Así, $A = B = 1$, luego la solución particular es:

$$y_1(x) = e^{2x}(x+1)$$

b) Determinar la solución general de la ecuación.

Como se trata de una ecuación de Riccati, usamos la sustitución

$$y = e^{2x}(x+1) + \frac{1}{z}$$

Entonces, $y' = e^{2x}(2x+3) - \dfrac{z'}{z^2}$ y reemplazando en la ecuación y simplificando, obtenemos la ecuación lineal

$$z' + (\frac{1+2x}{x})z - e^{-2x} = 0$$

La solución de esta ecuación es

$$z = e^{-\int \frac{1+2x}{x}dx}\left[C + \int e^{-2x}e^{\int \frac{1+2x}{x}dx}dx\right] = \frac{e^{-2x}}{x}\left(C + \frac{x}{2}\right)$$

Finalmente, reemplazando z tenemos

$$y(x) = \frac{2x + (x+1)(2C+x^2)}{2C+x^2}e^{2x}$$

29. Resolver la ecuación $y = y'^2 + 2y'^3$.

    Notemos primero que si $y' = 0$, tenemos la solución trivial $y = 0$ de la ecuación. Ahora, para $y' \neq 0$, hacemos la sustitución $y' = p$. Entonces $y = p^2 + 2p^3$ y derivando con respecto a x:

    $$p = 2p(1+3p)\frac{dp}{dx}$$

    Como $p \neq 0$, obtenemos $x = \displaystyle\int (2+6p)dp = 2p + 3p^2 + C$ y por lo tanto, la solución general paramétrica de la ecuación es

    $$\begin{cases} x &= 2p + 3p^2 + C \\ y &= p^2 + 2p^3 \end{cases}$$

30. Resolver la ecuación $y = y'x\ln x + (y')^2x^2$.

    Hacemos la sustitución $y' = p$:

    $$y = px\ln x + (p)^2x^2$$

    Derivando la expresión con respecto a x:

    $$p = x\ln x\frac{dp}{dx} + p(\ln x + 1) + 2px^2\frac{dp}{dx} + 2xp^2$$

    Ordenando

    $$\left[x\frac{dp}{dx} + p\right](\ln x + 2px) = 0$$

    Luego $x\dfrac{dp}{dx} + p = 0 \ \vee \ \ln x + 2px = 0$ En el primer caso, podemos resolver, por ejemplo, como ecuación lineal:

    $$p = e^{-\int \frac{1}{x}dx}(C+0) = \frac{C}{x}$$

    Luego, $y = \dfrac{C}{x}x\ln x + \left(\dfrac{C}{x}\right)^2 x^2$, y obtenemos la solución general

    $$y = C\ln x + C^2$$

En el segundo caso, $\ln x + 2px = 0$, equivale a $p = -\dfrac{\ln x}{2x}$, de donde obtenemos la solución singular $y = -\dfrac{\ln x}{2x} x \ln x + \left(-\dfrac{\ln x}{2x}\right)^2 x^2$, es decir:

$$y = -\frac{(\ln x)^2}{2} + \frac{(\ln x)^2}{4} = -\frac{(\ln x)^2}{4}$$

31. Resolver la ecuación $y^2 - (4xy+1)y' + 4x^2(y')^2 = 0$.

Ordenando tenemos la ecuación algebraica

$$y^2 - 4xy'y + 4x^2(y')^2 - y' = 0$$

cuya solución es:

$$y = \frac{4xy' \pm \sqrt{16x^2y'^2 - 16x^2y'^2 + 4y'}}{2} = 2xy' \ \pm \ (y')^{\frac{1}{2}}$$

Para resolver la ecuación $y = 2xy' + (y')^{\frac{1}{2}}$ consideremos la sustitución $y' = p$.
Entonces $\dfrac{dy}{dx} = 2p + 2x\dfrac{dp}{dx} + \dfrac{1}{2\sqrt{p}}\dfrac{dp}{dx}$, de donde

$$p + \left(2x + \frac{1}{2\sqrt{p}}\right)\frac{dp}{dx} = 0$$

Como esta ecuación no es lineal en la variable p, pero sí en la variable x, escribimos $p\,\dfrac{dx}{dp} + 2x + \dfrac{1}{2}p^{-\frac{1}{2}} = 0$ de donde,

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p}x + \frac{1}{2\sqrt{p^3}} = 0$$

cuya solución es:

$$x = e^{-2lnp}\left(C - \frac{1}{2}\int \frac{e^{2lnp}}{\sqrt{p^3}}dp\right) = \frac{1}{p^2}\left(C - \frac{1}{3}\sqrt{p^3}\right)$$

La ecuación $y = 2xy' - (y')^{\frac{1}{2}}$ se resuelve en forma análoga (note que solo cambia un signo). Por lo tanto, la solución de la ecuación es:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{p^2}(C \mp \frac{\sqrt{p^3}}{3}) \\ y = 2px \pm \sqrt{p} \end{cases}$$

Notemos que también podríamos haber resuelto la ecuación algebraica para y':

$$4x^2(y')^2 - (1+4xy)y' + y^2 = 0$$

y entonces

$$y' = \frac{1+4xy \pm \sqrt{(1+4xy)^2 - 16x^2y^2}}{8x^2} = \frac{1+4xy \pm \sqrt{1+8xy}}{8x^2}$$

Hacemos la sustitución $u = 1 + 8xy$, de donde $u' = 8(y + xy')$.

Reemplazando y despejando, obtenemos la ecuación en variables separables:

$$2xu' - 3u = -1 \pm 2\sqrt{u}$$

Resolviendo:

$$\begin{aligned}
\frac{du}{-1 \pm 2\sqrt{u} + 3u} &= \frac{dx}{2x} \\
\frac{1}{3}\int \frac{du}{(\sqrt{u} \pm 1)\left(\sqrt{u} \mp \frac{1}{3}\right)} &= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} \\
\frac{1}{4}\int \frac{du}{(\sqrt{u} \pm 1)} - \frac{1}{4}\int \frac{du}{(\sqrt{u} \mp \frac{1}{3})} &= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} \\
\frac{1}{6}\left(\ln(\sqrt{u} \pm 1)^3(\sqrt{u} \mp \frac{1}{3})\right) &= \frac{1}{2}\ln x + \ln C_0 \\
(\sqrt{u} \pm 1)\sqrt[3]{\sqrt{u} \mp \frac{1}{3}} &= Cx
\end{aligned}$$

Luego, las soluciones son:

$$(\sqrt{8xy+1} \pm 1)\sqrt[3]{\sqrt{8xy+1} \mp \frac{1}{3}} = Cx$$

Eliminando p en las soluciones paramétricas obtenidas con el primer método se obtienen las soluciones cartesianas anteriores.

32. Dada la función definida implícitamente por $xy - x^3 + \operatorname{sen} y = -1$.

 a) Demostrar que la función dada es la única solución del problema de valor inicial
$$y' = \frac{3x^2 - y}{\cos y + x}\ ,\ \ y(1) = 0$$
Usaremos el Teorema de Picard. Primero, es claro que el punto $(1,\,0)$ pertenece a la curva $xy - x^3 + \operatorname{sen} y = -1$.

 Ahora, la función f definida por $f(x,y) = \dfrac{3x^2 - y}{\cos y + x}$ es continua en todo el plano, excepto en los puntos sobre la curva $x = -\cos y$. Además,
$$f_y = \frac{(3x^2 - y)\operatorname{sen} y - (\cos y + x)}{(\cos y + x)}$$
es también continua en todo el plano, excepto en los puntos sobre la curva $x = -\cos y$.

 Como $x + \cos y$ no se anula en $(1,0)$, hay una vecindad del punto en que tanto f como f_y son continuas. Por el Teorema de Picard, el problema de valor inicial tiene solución única.

 Derivando implícitamente, $y + xy' - 3x^2 + y'\cos y = 0$, es decir
$$y' = \frac{3x^2 - y}{\cos y + x}$$
y la función dada es solución de la ecuación.

 b) Determine si la función dada es creciente en $(1,0)$ y calcule el valor de la segunda derivada de la función en ese punto.

 Notemos que en $(1,0)$, $y' = \dfrac{3}{2} > 0$, luego, la función es creciente en ese punto.

 Ahora, $y'' = \dfrac{(6x - y')(\cos y + x) - (1 - y'\operatorname{sen} y)(3x^2 - y)}{(\cos y + x)^2}$ y evaluando en $(1,0)$,
$$y''(1) = \frac{2\left(6 - \frac{3}{2}\right) - 3}{4} = \frac{3}{2}$$

1.3. Ejercicios propuestos

1. Clasifique las siguientes soluciones en explícitas o implícitas, generales o particulares y verifique que efectivamente son solución de la ecuación diferencial respectiva.

   a) $y = xe^x$
   $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y\,(\ln y\ - \ln x\ + 1)}{x}$

   b) $y^2 - \ln(1+e^x)^2 = 1 - 2\ln 2$
   $yy' = \dfrac{e^x}{1+e^x}$

   c) $y = \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$
   $\dfrac{d}{dx}\left(x^2\dfrac{dy}{dx}\right) + \dfrac{y}{x^2} = 0$

   d) $2\sqrt{xy+1} = x+2$
   $xy' = -y + \sqrt{xy+1}$

   e) $x + \arctan y = C$
   $y' + y^2 + 1 = 0$

   f) $\ln x^2 + \dfrac{y^2}{x^2} = 0$
   $xyy' - y^2 + x^2 = 0$

   g) $x = C\operatorname{sen}\left(\dfrac{y}{x}\right)$
   $\left(x\tan\left(\dfrac{y}{x}\right) + y\right)dx - xdy = 0$

   h) $y = C\,e^{\frac{y}{x}}$
   $y' = \dfrac{y^2}{xy - x^2}$

   i) $y = e^{x^2}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}dt$
   $y\prime = 2xy + 1$

   j) $xy + \operatorname{sen} xy = C$
   $(y + y\cos xy)dx + (x + x\cos xy)dy = 0$

   k) $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) - \arctan\left(\dfrac{x}{y}\right) = C$
   $\left[\dfrac{1}{x} - \dfrac{y}{x^2+y^2}\right]dx + \left[\dfrac{x}{x^2+y^2} - \dfrac{1}{y}\right]dy = 0$

2. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales de primer orden:

   a) $(x^2+4)\,dy + xy\,dx = 0$
   b) $(1+y^2)\,dx + (1+x^2)\,dy = 0$
   c) $(1-xy)y' = y^2$
   d) $(2x+3y+1)dx + (2y-3x+5)dy = 0$
   e) $y^2dx = (x^3-xy)dy$
   f) $x\,dy + y\,dx = x\cos x\,dx$
   g) $(e^x - 3x^2y^2)y' + ye^x = 2xy^3$
   h) $y(xy-1)^2dx + x(xy+1)^2dy = 0$
   i) $y = xy' - e^{y'}$
   j) $(y-xy')^2 - (y')^2 = 1$
   k) $\cos(x+y)dx = x\operatorname{sen}(x+y)\,dx + x\operatorname{sen}(x+y)\,dy$
   l) $y'\ln(x-y) = 1+\ln(x-y)$
   m) $(y^2e^{xy}+\cos x)dx + (e^{xy}+xye^{xy})dy = 0$
   n) $\dfrac{dy}{dx} = 1 + \dfrac{y}{x} - \left(\dfrac{y}{x}\right)^2$
   ñ) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+2y+2}{-2x+y}$
   o) $3x^2\ln y\,dx + \dfrac{x^3}{y}dy = 0$
   p) $y' = \ln(y-xy')$
   q) $(y')^3 + y^2y' = 0$
   r) $(y'-1)^2 + xy' = y$
   s) $y' = \dfrac{y^2}{xy-x^2}$
   t) $(x+2y-1)dx + (3x-y+4)dy = 0$
   u) $(\cos x\ \operatorname{sen} x - xy^2)dx + y(1-x^2)dy = 0$
   v) $y' = -\dfrac{4}{x^2} - \dfrac{1}{x}y + y^2$
   w) $(x^2+y^2+1)dx - (xy+y)dy = 0$
   x) $(x-xy')\ln x = 2y$

3. Resuelva los siguientes problemas de valor inicial y analice la unicidad de la solución:

a) $xy\,dx + e^{-x^2}(y^2-1)\,dy = 0$	$y(0) = 1$
b) $y' = y^2 - 4$	$y(0) = -2$
c) $y' = xy^{1/2}$	$y(0) = 0$
d) $(e^{-y}+1)\operatorname{sen} x\,dx = (1+\cos x)\,dy$	$y(0) = 0$
e) $(1+x^4)\,dy + x(1+4y^2)\,dx = 0$	$y(1) = 0$
f) $y\,dy + 4x(y^2+1)^{1/2}dx = 0$	$y(0) = 1$
g) $\dfrac{dy}{dt} + ty = y$	$y(1) = 3$
h) $\dfrac{dx}{dy} = 4(x^2+1)$	$x\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$
i) $(3x^2-y^2)dy - 2xy\,dx = 0$	$y(1) = 2$
j) $(1-xy)y' = y^2$	$y(1) = \dfrac{\pi}{2} - 1$
k) $xyy' + y^2 = x^2\cos x$	$y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$
l) $x^2y' = x^2 + xy - y^2$	$y(1) = 1$
m) $x^2y' - 2xy = 3y^4$	$y(1) = \dfrac{1}{2}$
n) $xy' = y + 2xe^{-\frac{y}{x}}$	$y(1) = 0$

4. Encuentre la única solución que pasa por el punto $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ de la ecuación:

$$\left[\frac{\ln(\ln y)}{x} + \frac{2}{3}xy^3 + 6x\right]dx + \left[\frac{\ln x}{y\ln y} + x^2y^2 + 4e^{-2y}\right]dy = 0$$

5. ¿Bajo qué circunstancias la ecuación $Mdx + Ndy = 0$ tendrá un factor integrante que sea función de la suma $z = x + y$?

6. Use el resultado del ejercicio anterior para resolver la ecuación

$$(y^2 + xy + 1)dx + (x^2 + xy + 1)dy = 0$$

7. Encuentre condiciones para que la ecuación $Mdx + Ndy = 0$ tenga un factor integrante $\mu(x,y) = g(z)$ con $z = xy$.

8. Resuelva el problema de valor inicial

$$y' = \frac{y^2}{16x^2} - y + 4x(x+4),\ y(1) = 0$$

sabiendo que tiene una solución particular de la forma $y_1(x) = ax^b$.

9. Resuelva la ecuación $\frac{1}{y} \operatorname{sen} \frac{x}{y} dx - \frac{x}{y^2} \operatorname{sen} \frac{x}{y} dy = 0$

   a) Como ecuación exacta.

   b) Como ecuación homogénea.

10. Resuelva el problema de valor inicial

$$(y \ln y - 2xy)dx + (x+y)dy = 0,\ y(0) = 1$$

11. ¿Bajo qué circunstancias la ecuación $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ tendrá un factor integrante que sea función de $z = x - y$?

12. Use el resultado del ejercicio anterior para resolver la ecuación

$$(y^2 + xy + 1)dx - (x^2 + xy + 1)dy = 0$$

13. Resuelva la ecuación $y' = \frac{2y}{x} + \frac{x^3}{y} + x \tan \frac{y}{x^2}$

14. Demuestre que la ecuación de Riccati con coeficientes constantes

$$y' + ay^2 + by + c = 0$$

tiene una solución de la forma $y(x) = m$ si y solo si m es una raíz de la ecuación cuadrática $am^2 + bm + c = 0$.

15. Determine todos los puntos (x_0, y_0) para los cuales la ecuación

$$y' = 2\sqrt{y+1} \cos x$$

admite solución única.

16. Pruebe que e^{-xy} es un factor integrante de la ecuación y úselo para resolverla:

$$(y^2 + xy - 1)dx + (x^2 + xy - 1)dy = 0$$

17. Resuelva el problema de valor inicial
$$y(\tan x - y^2 \sec^4 x)\,dx - dy = 0\,,\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$
¿Es única la solución? Justifique.

18. Encuentre un factor integrante de la forma $\dfrac{1}{xy^\alpha}$ y úselo para resolver la ecuación $\dfrac{2}{3x^2} + (xy^2 + \dfrac{1}{xy})y' = 0$.

19. Halle el valor de n para el cual la ecuación
$$(xy^2 + nx^2y)dx + (x^3 + x^2y)dy = 0$$
es exacta y resuélvala para ese valor de n.

20. Sean $M(x,y) = yf(xy)$ y $N(x,y) = xg(xy)$ donde f y g son funciones derivables en un intervalo I.
Demuestre que $\mu(x,y) = \dfrac{1}{xM - yN}$ es un factor integrante de la ecuación $M\,dx + N\,dy = 0$.

21. Use la sustitución $z = \dfrac{1}{y - 3e^{-2x}}$ para resolver la ecuación
$$y' = e^{2x}y^2 - 2y - 9e^{-2x}$$

22. Utilice una sustitución apropiada que convierta la siguiente ecuación en una ecuación lineal y resuélvala
$$\left[\frac{x^2}{y} + y^2\right]\,dx - \left[\frac{x^3}{y^2} + xy + y^2\right]\,dy = 0$$

23. Encuentre la solución general en forma explícita de la ecuación
$$y = 2xy' - xy'^2$$

24. Decida para qué puntos (x_0, y_0) el problema de valor inicial
$$(\operatorname{sen}^3 y + x\cos y)y' = \operatorname{sen} y,\ y(x_0) = y_0$$
tiene solución única. Justifique. Si hay solución única, encuéntrela.

a) $y(1) = \dfrac{\pi}{2}$ b) $y(1) = 0$ c) $y(0) = \pi$

Capítulo 2

Aplicaciones de primer orden

2.1. Resumen

Trayectorias ortogonales.
Sea Γ la familia de curvas definida por la ecuación diferencial $F(x, y, y') = 0$ para (x, y) en una región abierta D del plano XY. La familia Γ', ortogonal a Γ está definida por la ecuación diferencial

$$F(x, y, -\frac{1}{y'}) = 0$$

Trayectorias ortogonales en coordenadas polares.
Si la familia Γ está definida por la ecuación diferencial en coordenadas polares

$$F(r,\ \theta,\ \frac{dr}{d\theta}) = 0$$

entonces la familia Γ' ortogonal a Γ está definida por la ecuación diferencial

$$F(r,\ \theta,\ -r^2\frac{d\theta}{dr}) = 0$$

Proporcionalidad directa.
Si suponemos que el ritmo de cambio de una cierta cantidad representada por $X(t)$ es (directamente) proporcional a la cantidad presente en un instante t, entonces la ecuación diferencial que modela este fenómeno se puede expresar como:

$$\frac{dX}{dt} = k\,X$$

donde k es la constante de proporcionalidad.

Si k es positivo, entonces X crece en el tiempo; si k es negativo, X está disminuyendo y si $k = 0$, x es constante.
Como se trata de una ecuación en variables separables, su solución es

$$X(t) = X_0\, e^{k\,t}$$

donde $X_0 = X(0)$.

Proporcionalidad inversa.
Si suponemos que el ritmo de cambio de una cierta cantidad representada por $X(t)$ es inversamente proporcional a la cantidad presente en un instante t, entonces la ecuación diferencial que modela este fenómeno se puede expresar como:

$$\frac{dX}{dt} = \frac{k}{X}$$

donde k es la constante de proporcionalidad.
Como se trata de una ecuación en variables separables, su solución es:

$$X^2(t) = 2k\,t + X_0^2$$

donde $X_0 = X(0)$.

Proporcionalidad conjunta.
Si suponemos que el ritmo de cambio de una cierta cantidad representada por $X(t)$ es conjuntamente proporcional a la cantidad presente en un instante t y a cierta cantidad $A - X(t)$, entonces la ecuación diferencial que modela este fenómeno se puede expresar como:

$$\frac{dX}{dt} = k\,X(A - X)$$

donde k es la constante de proporcionalidad. Como se trata de una ecuación en variables separables, su solución es:

$$\frac{X}{A - X} = Ce^{Ak\,t}$$

donde $C = \dfrac{X_0}{A - X_0}$.

Análisis de compartimientos.

Un sistema de un compartimiento está constituido por una cierta cantidad $X(t)$ de material en el compartimiento, y dos funciones $E(t)$ y $S(t)$ que representan respectivamente el ritmo de entrada y el ritmo de salida de material al sistema.

$$\xrightarrow{E(t)} \boxed{X(t)} \xrightarrow{S(t)}$$

La ecuación que modela este fenómeno se puede expresar como:

$$\frac{dX}{dt} = E(t) - S(t)$$

El tipo de ecuación diferencial que resulta, depende en general de las funciones E y S.

Observaciones.

1. En el caso de mezclas, por ejemplo, $E(t)$ corresponde a la cantidad total de sustancia que ingresa al sistema, así, si entra agua pura, $E(t) = 0$. Por otro lado, el ritmo de salida $S(t)$ es la cantidad de litros que sale del sistema por unidad de tiempo por la concentración de la sustancia X en cada instante, vale decir, X dividido por el volumen total, $V(t)$.

2. En este caso, si la cantidad de litros que entra al sistema es igual a la cantidad que sale, el volumen es constante.

3. Si la cantidad de litros que entra al sistema es distinta a la cantidad que sale, el volumen total está variando y se expresa por

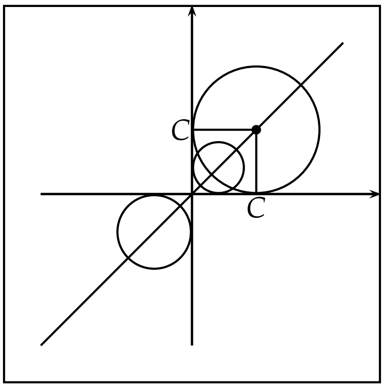
$$V(t) = V_0 + (a - b)\, t$$

donde V_0 representa el volumen inicial , a representa la cantidad de litros que entra al sistema y b, la cantidad de litros que sale de él.

2.2. Problemas resueltos

1. Hallar la ecuación diferencial de la familia de todos las circuferencias con centros en la recta $x = y$, que son tangentes a ambos ejes.

   Bosquejando el problema:



   Entonces, la familia buscada tiene ecuación: $(x - C)^2 + (y - C)^2 = C^2$. Derivando, obtenemos $2(x - C) + 2(y - C)y' = 0$, de donde

$$(x - C) = -y'(y - C)$$

   Como para obtener la ecuación diferencial de la familia debemos eliminar el parámetro, despejando, $x + y\,y' = C(1 + y')$, es decir,

$$C = \frac{x + y\,y'}{1 + y'}$$

   De aquí, $\left(x - \dfrac{x + y\,y'}{1 + y'}\right)^2 + \left(y - \dfrac{x + y\,y'}{1 + y'}\right)^2 = \left(\dfrac{x + y\,y'}{1 + y'}\right)^2$

   Luego, $(x + xy' - x - yy')^2 + (y + yy' - x - yy')^2 = (x + yy')^2$

   Por lo tanto, $(x - y)^2 y'^2 + (y - x)^2 = (x + yy')^2$ y la ecuación diferencial de la familia es:

$$(y - x)^2(1 + y'^2) = (x + y\,y')^2$$

2. Determine las trayectorias ortogonales de la familia $r^2 = C^2 \cos 2\theta$. Bosqueje en un gráfico ambas familias.

Derivamos implícitamente la ecuación $r^2 = C^2 \cos 2\theta$ y obtenemos

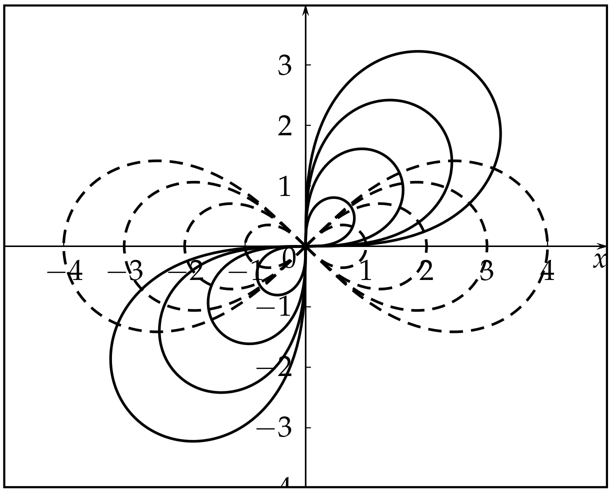
$$2r\frac{dr}{d\theta} = -2r^2\frac{\operatorname{sen} 2\theta}{\cos 2\theta}$$

que corresponde a la ecuación diferencial asociada a la familia dada. Reemplazamos $\frac{dr}{d\theta}$ por $-r^2\frac{d\theta}{dr}$ y obtenemos la ecuación diferencial de la familia ortogonal:

$$r\frac{d\theta}{dr} = \tan 2\theta$$

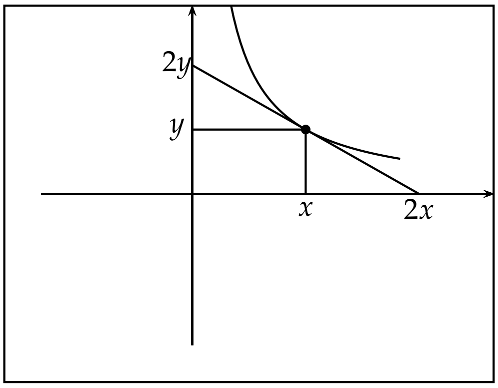
que corresponde a una ecuación de variables separables

$$\begin{aligned}
\frac{d\theta}{\tan\theta} &= \frac{1}{r}dr \\
\int \frac{\cos 2\theta}{\operatorname{sen} 2\theta}d\theta &= \ln r + C \\
\frac{1}{2}\ln \operatorname{sen} 2\theta &= \ln r + C \\
r^2 &= C \operatorname{sen} 2\theta, C > 0 \\
r^2 &= C^2 \operatorname{sen} 2\theta
\end{aligned}$$



3. Hallar las trayectorias ortogonales de la familia de curvas que satisface la condición: La porción de la tangente limitada por los ejes tiene como punto central al punto de tangencia.

   Bosquejando el problema:

   En primer lugar buscamos la ecuación diferencial de la familia dada.

   Sea (x, y) un punto cualquiera de una curva perteneciente a la familia. Entonces, los puntos $(2x, 0)$ y $(0, 2y)$ pertenecen a la recta tangente a la curva en el punto (x, y). La pendiente de esta recta es entonces $m = -\dfrac{y}{x}$.

   Como la pendiente de la recta tangente está dada por la derivada de la función en el punto, tenemos que la familia satisface la ecuación diferencial $y' = -\dfrac{y}{x}$.

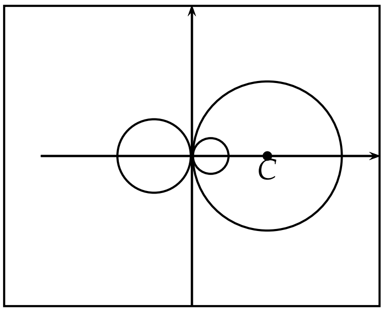
   En particular, si resolvemos esta ecuación, obtenemos precisamente la familia de hipérbolas $xy = C$, que es aquella que cumple la condición dada.

   Para obtener las trayectorias ortogonales debemos resolver la ecuación de variables separables $y' = \dfrac{x}{y}$, cuya solución es la familia de hipérbolas

$$y^2 - x^2 = C$$

4. Encontrar la familia de trayectorias ortogonales de la familia de circunferencias tangentes al eje OY en el origen.

   Bosquejando el problema:



   La familia de circunferencias tangentes al eje OY en el origen está dada por $(x-C)^2 + y^2 = C^2$ es decir,

$$x^2 + y^2 = 2xC$$

   Derivando implícitamente y despejando C, obtenemos la ecuación diferencial asociada

$$y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$$

   Para encontrar la familia ortogonal debemos encontrar la solución general de la ecuación diferencial

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$$

   Escribiendo la ecuación de la forma

$$2xydx + (y^2 - x^2)dy = 0$$

   podemos observar que tiene un factor integrante que depende de y, en efecto, $\dfrac{N_x - M_y}{M} = -\dfrac{2}{y}$, por lo tanto un factor integrante es

$$\mu(x,y) = e^{-\int \frac{2}{y}dy} = \frac{1}{y^2}$$

Multiplicando por el factor integrante obtenemos la ecuación exacta:

$$\frac{2x}{y}dx + (1 - \frac{x^2}{y^2})dy = 0$$

Luego, $F(x,y) = \dfrac{x^2}{y} + g(y)$, de donde $F_y = -\dfrac{x^2}{y^2} + g'(y)$.

Por lo tanto $g'(y) = 1$ lo que implica $g(y) = y$.

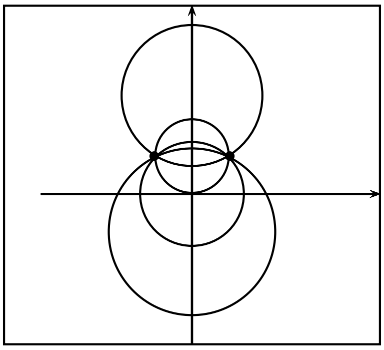
Luego, la solución general es $\dfrac{x^2}{y} + y = 2C$, o, equivalentemente

$$x^2 + y^2 = 2yC$$

Así, la familia de trayectorias ortogonales es la familia de circunferencias tangentes al eje OX en el origen.

5. Determine las trayectorias ortogonales a la familia de circunferencias que pasan por los puntos $(1,1)$ y $(-1,1)$.

   Bosquejando el problema:



   Primero debemos formular el problema matemático que representa esta situación.

   Como $d((h,k),(1,1)) = d((h,k),(-1,1))$, tenemos que

$$(h-1)^2 + (k-1)^2 = (h+1)^2 + (k-1)^2$$

de donde $h = 0$. Así, el centro de la circunferencia es $(0, C)$ y su radio, $C^2 - 2C + 2$. Luego, la familia de circunferencias es :

$$x^2 + (y - C)^2 = C^2 - 2C + 2$$

de donde, derivando implícitamente, obtenemos $2x + 2(y - C)y' = 0$.

Eliminando la constante de estas dos igualdades, obtenemos la ecuación diferencial:

$$y' = \frac{-2x(y-1)}{y^2 - x^2 - 2y + 2}$$

Entonces, la ecuación diferencial de la familia de trayectorias ortogonales es:

$$y' = \frac{y^2 - x^2 - 2y + 2}{2x(y-1)}$$

o bien $\left(y^2 - x^2 - 2y + 2\right) dx + (2x - 2xy)dy = 0$.

Como la ecuación no es exacta, calculamos

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{4y - 4}{2x - 2xy} = -\frac{2}{x}$$

Luego, $\lambda(x) = e^{-\int \frac{2}{x}dx} = \dfrac{1}{x^2}$ es un factor integrante. Ahora multiplicando por λ se obtiene la ecuación exacta:

$$\left(\frac{y^2}{x^2} - 1 - \frac{2y}{x^2} + \frac{2}{x^2}\right) dx + \left(\frac{2}{x} - \frac{2y}{x}\right) dy = 0$$

$F(x, y) = \displaystyle\int (\frac{2}{x} - \frac{2y}{x})dy = \frac{2y}{x} - \frac{y^2}{x} + g(x)$, y derivando

$F_x(x, y) = -\dfrac{2y}{x^2} + \dfrac{y^2}{x^2} + g'(x) = \dfrac{y^2}{x^2} - 1 - \dfrac{2y}{x^2} + \dfrac{2}{x^2}$

Luego, $g'(x) = -1 + \dfrac{2}{x^2}$, de donde $g(x) = -x - \dfrac{2}{x}$

Por lo tanto, la solución de la ecuación es: $\dfrac{2y}{x} - \dfrac{2}{x} - \dfrac{y^2}{x} - x = 2C$ que corresponde a la familia de circunferencias:

$$(x + C)^2 + (y - 1)^2 = C^2 - 1$$

6. Sea Γ la familia de circunferencias que pasan por los puntos $(1,0)$ y $(0,1)$.

   a) Encuentre la ecuación diferencial que define Γ.

   Sea (h,k) el centro de una circunferencia cualquiera de la familia. Entonces, $d((h,k),(1,0)) = d((h,k),(0,1)$, de donde

   $$(h-1)^2 + k^2 = h^2 + (k-1)^2$$

   Despejando, obtenemos $h = k$, es decir el centro de la circunferencia está sobre la recta $y = x$, digamos (C,C). Así, la familia de circunferencias es

   $$(x-C)^2 + (y-C)^2 = 2C^2 - 2C + 1$$

   de donde derivando implícitamente, obtenemos

   $$2x - 2C + 2(y-C)y' = 0$$

   Para obtener la ecuación diferencial buscada despejamos C en las dos expresiones anteriores e igualamos.

   $$\frac{1-x^2-y^2}{2(1-x-y)} = \frac{x+yy'}{1+y'}$$

   de donde

   $$y' = \frac{y^2-x^2-2xy+2x-1}{y^2-x^2+2xy-2y+1}$$

   b) Encuentre las trayectorias ortogonales de Γ.

   La ecuación de las trayectorias ortogonales es:

   $$-\frac{dx}{dy} = \frac{y^2-x^2-2xy+2x-1}{y^2-x^2+2xy-2y+1}$$

   o bien,

   $$(y^2-x^2+2xy-2y+1)\,dx + (y^2-x^2-2xy+2x-1)\,dy = 0$$

Como la ecuación no es exacta, calculamos:

$$\frac{M_y - N_x}{M+N} = \frac{2(x+y-1)}{-(x-y)(x+y-1)} = -\frac{2}{(x-y)}$$

Luego, $\mu(x,y) = \dfrac{1}{(x-y)^2}$ es un factor integrante que depende de la diferencia $z = x - y$.

Multiplicando por el factor integrante la ecuación

$$\frac{y^2 - x^2 + 2xy - 2y + 1}{(x-y)^2}\, dx + \frac{y^2 - x^2 - 2xy + 2x - 1}{(x-y)^2}\, dy = 0$$

se transforma en exacta. Luego,

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int \frac{y^2 - x^2 + 2xy - 2y + 1}{(x-y)^2} dx \\ &= \int \left[\frac{(y-1)^2}{(x-y)^2} + \frac{y^2}{(x-y)^2} - 1 \right] dx \\ &= -\left[\frac{(y-1)^2}{x-y} + \frac{y^2}{x-y} + x \right] + g(y) \end{aligned}$$

Derivando,

$$\begin{aligned} F_y(x,y) &= -\frac{2(y-1)(x-y) + (y-1)^2 + 2y(x-y) + y^2}{(x-y)^2} + g'(y) \\ &= \frac{2y^2 - 4xy + 2x - 1}{(x-y)^2} + g'(y) \end{aligned}$$

Igualando $F_y(x,y) = M(x,y)$:

$$g'(y) = \frac{y^2 - x^2 + 2xy - 2y + 1}{(x-y)^2} - \frac{2y^2 - 4xy + 2x - 1}{(x-y)^2} = -1$$

es decir, $g(y) = -y$ de donde, la solución de la ecuación es

$$\frac{(y-1)^2}{x-y} + \frac{y^2}{x-y} + x + y = C$$

Para identificar la familia de las trayectorias ortogonales de Γ eliminamos el demnominador y encontramos la familia de circunferencias:

$$\begin{aligned}(y-1)^2+x^2 &= C(x-y)\\ \left(y-\frac{2-C}{2}\right)^2+\left(x-\frac{C}{2}\right)^2 &= -1+\frac{(C-2)^2}{4}+\frac{C^2}{4}\\ \left(y-\frac{2-C}{2}\right)^2+\left(x-\frac{C}{2}\right)^2 &= \frac{C}{2}(C-2)\end{aligned}$$

7. Se sabe que un cierto material radiactivo decae con una rapidez que es proporcional a la cantidad presente en cada instante. Un bloque de este material tiene originalmente una masa de 100 gramos y se observa que 20 años después, su masa es de 80 gramos. Determine una expresión para la masa del material en función del tiempo. Calcule la semivida del material y la cantidad de él que quedará después de 40 años.

   Sea $X(t)$ la masa del material, medida en gramos, en un instante dado t, medido en años. Como la variación es directa, tenemos que:

$$X(t)=X_0e^{kt},\ X_0=100,\ X(20)=100e^{20k}=80$$

   Luego, $k=\dfrac{1}{20}\ln\dfrac{4}{5}$, es decir, $X(t)=100e^{\frac{t}{20}\ln\frac{4}{5}}$, o bien

$$X(t)=100\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{t}{20}}$$

   Para encontrar la semivida de la sustancia, debemos determinar el valor de t para el cual la masa se ha reducido a la mitad, en este caso 50 gramos. Luego, $50=100\left(\dfrac{4}{5}\right)^{\frac{t}{20}}$, de donde, $t=-20\dfrac{\ln 2}{2\ln 2-\ln 5}\approx 60$. Por lo tanto, el material tiene una semivida de 60 años aproximadamente.

   Por último,

$$X(40)=100e^{2\ln\frac{4}{5}}=64$$

   es decir, después de 40 años, quedarán 64 gramos del material.

8. Según la Ley de Torricelli, la rapidez con que baja el agua en un tanque en forma de cilindro vertical que se vacía es proporcional a la raíz cuadrada de la profundidad del agua en el tanque. Inicialmente, el agua tiene una profundidad de 9 pies y un tapón es retirado en el tiempo $t = 0$ (horas). Después de una hora la profundidad ha descendido a 4 pies. ¿Cuánto tiempo tardará el agua en salir del tanque?

   Sea $h(t)$ la altura del agua en el tanque en el instante t.

   Entonces, $h' = -k\sqrt{h}$, de donde $2\sqrt{h} = -kt + C$, o bien

$$h(t) = \frac{(C - kt)^2}{4}$$

   Como $h(0) = 9$, tenemos que $C = 6$ y como $h(1) = 4$, $k = 2$.

   Así, $h(t) = \frac{1}{2}(6 - 2t)^2 = 2(3 - t)^2$.

   Finalmente, $h(t) = 0 \Leftrightarrow 3 - t = 0 \Leftrightarrow t = 3$.

   Por lo tanto, el tanque demorará 3 horas en vaciarse.

9. Suponga que la población $P(t)$ en un lago es atacada por una enfermedad al tiempo $t = 0$, con el resultado que los peces cesan de reproducirse y el índice de mortalidad (muerte por semana por pez) es de ahí en adelante proporcional a $\frac{1}{\sqrt{P}}$. Si originalmente había 900 peces en el lago y 6 semanas después quedaban 441, ¿cuánto tiempo tardarán en morir todos los peces del lago?

   Se trata de un problema de decrecimiento con proporcionalidad directa.

   Sea $P(t)$ el número de peces en el lago en el instante t, medido en semanas. Entonces podemos modelar esta situación mediante la ecuación diferencial

$$P' = -k\frac{1}{\sqrt{P}}P$$

   Esta es una ecuación de variables separables, por lo tanto

$$2P^{1/2} = -kt + C$$

o equivalentemente $P(t) = \dfrac{(C-kt)^2}{4}$.

Usando las condiciones del problema, $P(0) = 900$, luego $C = 60$ y $P(6) = 441$, por lo tanto $42 = -6k + 60$, de donde $k = 3$.

Luego, $P(t) = \frac{1}{2}(60-3t)^2$.

Igualando la función a 0, $P(t) = 0 \Leftrightarrow t = 20$. Por lo tanto, en 20 semanas ya no quedarán peces en el lago.

10. Para hacer un buen diagnóstico oftalmológico, ayer a las 20:00 horas se le administró a Nicolás cierta droga que dilata la pupila. El médico explicó que la droga tiene una semivida de 6 horas y que Nicolás presentaría molestias visuales hasta que se hubiera eliminado el 80 % del medicamento. Cuando Nicolás se levantó esta mañana a las 7, se quejó de tener aún la vista borrosa. ¿Era por efecto del medicamento?

    Sea $D(t)$ la cantidad de droga presente en un instante t.

    Entonces, $D(t) = D_0 e^{kt}$, donde D_0 es la cantidad de droga administrada.

    La semivida de una sustancia corresponde al tiempo que demora en desintegrarse la mitad de ella.

    Luego, $D(6) = \dfrac{D_0}{2} = D_0 e^{6k}$, por lo que $k = -\frac{1}{6}\ln 2$, de donde

    $$D(t) = D_0(\frac{1}{2})^{t/6}$$

    El tiempo que demora en eliminarse el 80 % del medicamento se puede expresar como $D(t) = 0{,}2\, D_0 = D_0 \left(\dfrac{1}{2}\right)^{t/6}$ es decir, $t = \dfrac{6\ln 5}{\ln 2} \approx 14$.

    Luego, el medicamento dejará de producir molestias aproximadamente a las 10:00 de la mañana, por lo que las molestias de Nicolás se debían aún al efecto de la droga.

11. Amalia debe memorizar 100 páginas para su prueba de Sicología del Aprendizaje y tiene 10 días para hacerlo. Al empezar a estudiar logró memorizar 10 páginas del texto en una hora. Le comentó a su hermana Matilda que según la teoría del aprendizaje, la rapidez a la que se memoriza un tema es proporcional a la cantidad que resta por memorizar. Matilda, que estudia Ingeniería, planteó la ecuación diferencial que modela este fenómeno y calculó el número de horas diarias que debe estudiar Amalia si quiere alcanzar a memorizar todo el texto.

    a) ¿Cuál fue la ecuación que planteó Matilda? ¿Cuál es su solución?

    Sea $M(t)$ el número de páginas memorizadas después de t horas.

    Entonces $\dfrac{dM}{dt} = k(100 - M)$ que, separando variables, podemos escribir
    $$\frac{dM}{100 - M} = kdt$$
    Su solución es $-\ln(100 - M) = kt + C$, es decir $100 - M = Ce^{-kt}$.

    Ahora, usando la condición $M(0) = 0$, obtenemos $C = 100$. Para determinar el valor de k usamos la condición $M(1) = 10$.

    Entonces $10 = 100(1 - e^{-k})$, de donde $-k = \ln 0,9$. Así, la solución de la ecuación es
    $$M(t) = 100\left(1 - (0,9)^t\right)$$

    b) ¿Cuántas horas diarias debe estudiar Amalia?

    Planteando la desigualdad $M(t) > 99$, se obtiene
    $$\ln 0,01 > t \ln 0,9$$
    Como $\ln 0,9$ es negativo, el sentido de la desigualdad se invierte, luego
    $$t > \frac{-2\ln 10}{\ln 9 - \ln 10} > \frac{4,6}{0,1} = 46$$
    Por lo tanto, Amalia debe estudiar más de 4,6 horas diarias.

12. Un profesor escribe los apuntes de su asignatura con una rapidez proporcional al número de hojas escritas. Por otra parte uno de sus alumnos es capaz de leer estos apuntes con una rapidez constante. Al comenzar el curso (que es de carácter anual), el profesor entrega 10 hojas a sus alumnos y posteriormente se las va proporcionando a medida que las escribe. Si este alumno en particular, al final del tercer mes llevaba un atraso en la lectura de los apuntes de 20 páginas y al finalizar el sexto mes llevaba un atraso de 70 páginas.

   a) Determine el número de páginas que entregó el profesor al finalizar el noveno mes.

   Sea $H(t)$ el número de hojas escritas por el profesor en el instante t. Entonces $H' = kH$, luego $H(t) = Ce^{kt}$.

   La condición inicial $H(0) = 10$, implica que $C = 10$. Para encontrar el valor de k usaremos las otras condiciones del problema.

   Sea $L(t)$ el número de hojas leídas por el alumno. Como la rapidez de lectura es constante, digamos m, $L'(t) = m$, entonces

$$L(t) = mt + C_1$$

   Usando la condición $L(0) = 0$, obtenemos $C_1 = 0$. Además, las relaciones

$$\left.\begin{array}{rcl} H(3) & = & L(3) + 20 \\ H(6) & = & L(6) + 70 \end{array}\right|$$

   implican

$$\left.\begin{array}{rcl} 10e^{3k} & = & 3m + 20 \\ 10e^{6k} & = & 6m + 70 \end{array}\right|$$

   Resolviendo el sistema tenemos que $k = \dfrac{\ln 3}{3}$, de donde:

$$H(t) = 10e^{\frac{t}{3}\ln 3} = 10\left(\frac{t}{3}\right)^3$$

   Luego la cantidad de páginas que había entregado el profesor al noveno mes es $H(9) = 270$.

b) Si el curso duraba 9 meses ¿Cuántas páginas le faltaron por leer al alumno?

Encontramos primero el valor de m reemplazando en la primera ecuación del sistema:
$$30 = 3m + 20$$
Luego, $m = \dfrac{10}{3}$, de donde $L(9) = 30$, por lo que le faltaron 240 páginas por leer.

13. Un estudiante UFRO, ex ciclista, decidió probar su actual estado físico y aprovechar el 21 de mayo para hacer un viaje en su bicicleta hacia Carahue (53 kilómetros al oeste de Temuco). Partió pedaleando animosamente desde Temuco a las 9 de la mañana, pero la falta de entrenamiento provocó que su velocidad fuera disminuyendo de manera inversamente proporcional a la distancia recorrida. Cuando pasó por Imperial (30 kilómetros al oeste de Temuco), su reloj marcaba las 11:30 horas. "Si sigo a este ritmo- pensó- no llegaré antes de las 4 de la tarde a Carahue". ¿Qué tan realista fue su cálculo?

    Este problema es de proporcionalidad inversa.

    Sea $d(t)$ la distancia recorrida por el ciclista después de t horas. Entonces,
    $$d'd = k$$
    de donde
    $$d^2(t) = 2kt + C$$
    Las condiciones del problema son entonces, $d(0) = 0$ y $d(2,5) = 30$, por lo tanto $C = 0$.

    Luego, $d^2(t) = 2kt$ y $k = 180$. Luego, $d(t) = 6\sqrt{10t}$, lo que significa que llegaría a Carahue después de $t = \dfrac{1}{10}\left(\dfrac{53}{6}\right)^2 = 7,8$ horas, es decir, casi a las 5 de la tarde.

14. Un escalador de montañas sale de su campamento base a las 6:00 a.m. A medida que trepa, la fatiga y la falta de oxígeno se hacen sentir de modo que la rapidez con la cual aumenta su elevación es inversamente proporcional a la elevación. Al mediodía está a una altura de 19.000 pies, y a las 2:00 p.m. ha llegado a la cima de la montaña, que está a 20.000 pies. ¿Qué tan alto era su campamento base?

    Nuevamente un problema de proporcionalidad inversa.
    Sea $h(t)$ la altura del escalador en un instante t.

    Entonces, $h'(t) \cdot h(t) = k$, donde k es constante, cuya solución es

    $$h^2 = 2kt + C$$

    Ahora bien, $h(6) = 19{,}000$ y $h(8) = 20{,}000$, luego, reemplazando:

    $$\left.\begin{array}{rcl} 19^2 \cdot 10^6 & = & 2k \cdot 6 + C \\ 20^2 \cdot 10^6 & = & 2k \cdot 8 + C \end{array}\right|$$

    Restando la primera ecuación de la segunda, eliminamos C.

    $$10^6(20^2 - 19^2) = 4k \ \text{, es decir , } k = 10^6\frac{39}{4}$$

    Reemplazando en la primera ecuación, obtenemos

    $$C = 10^6(19^2 - 3 \cdot 39)$$

    Así, en el instante $t = 0$ (a las 6:00 de la mañana),

    $$h^2 = C = 10^6(361 - 117) = 10^6 \cdot 244$$

    de donde $h \approx 10^3 \cdot 15{,}6$.

    Por lo tanto, el campamento base se encontraba aproximadamente a 15.600 metros de altura.

15. Suponga que una población dada puede dividirse en dos grupos: los que padecen cierta infección y los que todavía no la padecen, pero que son susceptibles de adquirirla por contagio de los anteriores. Si x e y son las proporciones de población infectada y no infectada, entonces $x + y = 1$. Suponga que el ritmo de propagación, $\frac{dx}{dt}$, es conjuntamente proporcional a x e y.

    a) Determine la proporción de personas infectadas en el tiempo t en función del número inicial de infectados x_0, (y el tiempo t).

    Sea $x(t)$ la proporción de personas infectadas en un instante t. Entonces $\frac{dx}{dt} = k\,x(1-x)$, de donde

    $$\frac{x}{1-x} = Ce^{kt}$$

    Ahora, $\frac{x_0}{1-x_0} = C$, luego,

    $$x(t) = \frac{x_0 e^{kt}}{1 - x_0 + x_0 e^{kt}}$$

    b) Si la población es de 100 personas e inicialmente hay una persona contagiada, y al día siguiente hay 10 personas, determine en cuánto tiempo estará infectada toda la población.

    Como inicialmente hay una persona contagiada de 100 en total, la proporción inicial de población infectada es $x_0 = 0,01$.
    Reemplazando en la ecuación,

    $$x(t) = \frac{0,01e^{kt}}{0,99 + 0,01e^{kt}} = \frac{e^{kt}}{99 + e^{kt}}$$

    Como $x(1) = \frac{e^k}{99 + e^k} = \frac{1}{10}$, tenemos que $k = \ln 11$.

    Luego,

    $$x(t) = \frac{11^t}{99 + 11^t}$$

Toda la población estará infectada cuando $x(t) = 1$, lo cual nos lleva a la contradicción $11^t = 99 + 11^t$, por lo que debemos buscar otro camino. Una forma equivalente de expresar lo anterior es

$$x(t) > \frac{99}{100}$$

es decir, $11^t > 99^2$. Despejando,

$$t > \frac{2 \ln 99}{\ln 11} = \frac{2(2,2 + 2,4)}{2,4} \approx 4$$

es decir, en 4 días se habrá contagiado toda la población.

16. La rapidez con que aumenta el número de supermercados que emplea cajas computarizadas en un país es conjuntamente proporcional a la cantidad de supermercados que ya las emplean y a la cantidad que aún no lo hace. Si en el país hay 2001 supermercados, inicialmente uno solo adopta el sistema y después de un mes lo hacen 3, calcule el número de supermercados que adoptará el sistema después de 10 meses. ¿En cuántos meses aproximadamente, todos los supermercados del país tendrán cajas computarizadas?

    Problema de proporcionalidad conjunta.

    Sea $S(t)$ el número de supermercados que emplea cajas computarizadas en un instante t (en meses). La cantidad de supermercados que aún no adopta el sistema en un instante t dado es $2001 - S(t)$.

    Entonces, $S(0) = 1$, $S(1) = 3$.
    La ecuación se expresa como $S' = k\, S(2001 - S)$ cuya solución es:

$$\frac{1}{2001} \ln \frac{S}{2001 - S} = kt + C$$

    Para $t = 0$, tenemos $C = -\dfrac{1}{2001} \ln 2000$.

    Para $t = 1$, tenemos $\dfrac{1}{2001} \ln \dfrac{3}{1998} = k - \dfrac{1}{2001} \ln 2000$.

Luego, $k = \dfrac{1}{2001}\ln\dfrac{2000}{666} = \dfrac{1}{2001}\ln\dfrac{1000}{333}$.

Reemplazando tenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2001}\ln\frac{S}{2001-S} &= \frac{t}{2001}\ln\frac{1000}{333} - \frac{1}{2001}\ln 2000\\
\frac{S}{2001-S} &= \frac{1}{2000}\left(\frac{1000}{333}\right)^t\\
S\left[1+\frac{1}{2000}\left(\frac{1000}{333}\right)^t\right] &= \frac{2001}{2000}\left(\frac{1000}{333}\right)^t
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
S(t) &= \frac{2001}{2000}\left(\frac{1000}{333}\right)^t \frac{2000\cdot 333^t}{2000\cdot 333^t + 1000^t}\\
&= \frac{2001\cdot 1000^t}{2000\cdot 333^t + 1000^t}
\end{aligned}$$

En 10 meses, $S(10) = \dfrac{2001\cdot 1000^{10}}{333^{10}2000 + 1000^{10}} \approx 1936$ supermercados.

Por último, para determinar en cuánto tiempo todos los supermercados habrán adoptado el nuevo sistema, deberíamos resolver la ecuación $S(t) = 2001$, lo que nos lleva a la contradicción $2000\cdot 333^t = 0$. Por lo tanto calculamos $S(t) = 2000$:

$$2000 = \frac{2001\cdot 1000^t}{2000\cdot 333^t + 1000^t}$$

de donde

$$\ln 4\cdot 10^6 = t\ln\frac{1000}{333}$$

Por lo tanto,

$$t = \frac{2\ln 2 + 6\ln 10}{3\ln 10 - \ln 333} \approx 13,8$$

lo que significa que en 14 meses ya todos los supermercados tendrán cajas computarizadas.

17. Por razones obvias, la sala de disección de un forense se mantiene fría a una temperatura constante de 5 ˚ C. Mientras se encontraba realizando una autopsia de la víctima de un asesinato, el propio forense es asesinado, y el cuerpo de la víctima, robado. A las 9:00 A.M. el ayudante descubre su cadáver a una temperatura de 21 ˚ C. A mediodía, su temperatura es de 13 ˚ C. Suponiendo que el forense tenía en vida una temperatura normal de 37 ˚ C, ¿a qué hora fue asesinado?

    Sean $T(t)$ la temperatura del cuerpo en un instante t, y A la temperatura ambiente.

    Fijemos $t = 0$ a las 9:00 horas. Entonces $T(0) = 21$, $T(3) = 13$ y $A = 5$. Queremos encontrar el instante t tal que $T(t) = 37$.

    Sea $\Delta T = T - A$. Por la ley del enfriamiento de Newton,

    $$\frac{d\Delta T}{dt} = k\,\Delta T$$

    de donde $\Delta T = C\,e^{k\,t}$. Luego,

    $$T(t) = \;Ce^{kt} + A \;= Ce^{kt} + 5$$

    Reemplazando en las condiciones iniciales, $T(0) = 21 = C + 5$, de donde $C = 16$.

    Ahora, $T(3) = 13 = 16e^{3k} + 5$, es decir $-\ln 2 = 3k$, de donde

    $$k = -\frac{1}{3}\ln 2$$

    Así,

    $$T(t) = 16e^{-\frac{t}{3}\ln 2} + 5 = 16 \cdot 2^{-\frac{t}{3}} + 5$$

    Ahora, $37 = 16 \cdot 2^{-\frac{t}{3}} + 5 \;\Rightarrow 2 = 2^{-\frac{t}{3}} \;\Rightarrow t = -3.$

    Por lo tanto, el forense fue asesinado tres horas antes que se encontrara el cuerpo, es decir, a las 6:00 de la mañana.

18. Un objeto de masa 32 kilos es lanzado hacia arriba con una velocidad de 100 metros por segundo en un medio que presenta una resistencia proporcional a la magnitud de la velocidad con constante de proporcionalidad igual a 0,005.

    a) Determine el intervalo de tiempo transcurrido antes de que la velocidad del objeto tenga el 90 % de su valor límite (es decir, el valor al cual tiende la velocidad cuando $t \to \infty$). Considere $g = 10\ m/s^2$.

    Las fuerzas que actúan sobre el objeto son mg y kv y apuntan hacia abajo. Por la segunda ley de Newton, la ecuación diferencial es entonces la ecuación lineal

    $$m\frac{dv}{dt} = -mg - kv$$

    Es decir, $v' + \dfrac{k}{m}v = -10$, cuya solución es

    $$\begin{aligned} v(t) &= e^{-\frac{k}{m}t}\left[C - g\int e^{\frac{k}{m}t}dt\right] \\ &= e^{-\frac{k}{m}t}\left[C - \frac{mg}{k}e^{\frac{k}{m}t}dt\right] \\ &= Ce^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k} \end{aligned}$$

    Como $v(0) = 100$, tenemos que $C = 100 + \dfrac{mg}{k} = 64100$. Luego,

    $$v(t) = 64100e^{-\frac{1}{6400}t} - 64000$$

    La velocidad límite la obtenemos calculando $\lim_{t\to\infty} v(t) = -64000$ y entonces buscamos $t = t_0$ tal que $v(t_0) = -0{,}9 \cdot 64000$.

    $$\begin{aligned} -0{,}9 \cdot 64000 &= 64100e^{-\frac{1}{6400}t_0} - 64000 \\ \ln\left(\frac{64}{641}\right) &= -\frac{1}{6400}t_0 \\ t_0 &= 6400\ln\left(\frac{641}{64}\right) \end{aligned}$$

    Así t_0 representa los segundos transcurridos antes de que la velocidad del objeto tenga el 90 % de su valor límite.

b) Determine la mayor altura alcanzada por el objeto.

La altura máxima que alcanza el objeto se produce en el instante $t = t_1$ en el cual $v(t_1) = 0$. Entonces,

$$\begin{aligned} 0 &= 64100e^{-\frac{1}{6400}t_1} - 64000 \\ t_1 &= 6400 \ln \frac{641}{640} \end{aligned}$$

Ahora, como $v(t) = \dfrac{dx}{dt}$, integrando directamente obtenemos

$$x(t) = -64100 \cdot 6400e^{-\frac{1}{6400}t} - 64000t + C$$

La condición $x(0) = 0$, implica que $C = 64100 \cdot 6400$.

Por lo tanto la altura máxima está dada por

$$\begin{aligned} x(t_1) &= -641 \cdot 64 \cdot 10^4 \cdot \frac{640}{641} - 64^2 \cdot 10^5 \ln \frac{641}{640} + 641 \cdot 64 \cdot 10^4 \\ &= 64 \cdot 10^4 \left[1 - 640 \ln \frac{641}{640}\right] \\ &\approx 499,48m \end{aligned}$$

19. Se está celebrando una fiesta en una habitación que contiene 1800 pies cúbicos de aire libre de monóxido de carbono. En el instante $t = 0$ varias personas empiezan a fumar. El humo, que contiene un seis por ciento de monóxido de carbono, se introduce en la habitación a razón de $0,15$ pies cúbicos por minuto, y la mezcla, removida por ventilación, sale a ese mismo ritmo por una ventana entreabierta. ¿Cuándo deberá abandonar una persona prudente esa fiesta, si el nivel de monóxido de carbono comienza a ser peligroso a partir de una concentración de $0,00018$?

Se trata de un problema de tanque con volumen constante.

Sea $X(t)$ la cantidad de monóxido de carbono presente en la habitación en un instante t.

El ritmo de entrada es

$$R_E = 0,15 \cdot 0,06 = 9 \cdot 10^{-3}$$

y el ritmo de salida es

$$R_S = \frac{0,15 \cdot X(t)}{1800} = \frac{5\,X(t)}{6 \cdot 10^4}$$

Entonces,

$$X'(t) = 9 \cdot 10^{-3} - \frac{5\,X(t)}{6 \cdot 10^4}$$

Como esta es una ecuación lineal, la solución es:

$$\begin{aligned} X(t) &= e^{-\int \frac{5\,dt}{6\cdot 10^4}} \left[\int 9 \cdot 10^{-3} e^{\int \frac{5dt}{6\cdot 10^4}} dt \, + \, C \right] \\ &= e^{-\frac{5\,t}{6\cdot 10^4}} \left[9 \cdot 10^{-3} \int e^{\frac{5\,t}{6\cdot 10^4}} dt \, + \, C \right] \\ &= \frac{54 \cdot 10}{5} \, + \, C\,e^{-\frac{5\,t}{6\cdot 10^4}} \end{aligned}$$

Como $X(0) = 0$, entonces $C = -108$, luego,

$$X(t) = 108 \left[1 - e^{-\frac{5\,t}{6\cdot 10^4}} \right]$$

Finalmente, si $\overline{X(t)}$ denota la concentración de monóxido de carbono presente en la sala en un instante t, tenemos que:

$$\overline{X(t)} = \frac{X(t)}{1800} = \frac{108}{1800} (1 - e^{-\frac{5\,t}{6\cdot 10^4}})$$

Luego, $18 \cdot 10^{-5} = \dfrac{108}{1800} \left(1 - e^{-\frac{5\,t}{6\cdot 10^4}} \right)$, de donde

$$\begin{aligned} t &= -\frac{6 \cdot 10^4}{5} \ln(1 - \frac{18^2 \cdot 10^{-3}}{18 \cdot 6}) \\ &= -\frac{6 \cdot 10^4}{5} \ln(1 - 0,003) \\ &\approx 36 \end{aligned}$$

Por lo tanto, una persona prudente debería abandonar la fiesta a los 36 minutos.

20. Un tanque con capacidad para 400 galones está parcialmente lleno con 100 galones de salmuera, con 10 libras de sal disuelta. Le entra salmuera con media libra de sal por galón a razón de 6 gal/min. El contenido del tanque, bien mezclado, sale de él a razón de 4 gal/min.

   a) Calcule la cantidad de sal después de 30 minutos.

   Se trata de un problema de tanque con volumen variable. Si $v(t)$ es el volumen de salmuera presente en el tanque en el intstante t, entonces
   $$v(t) = 100 + 2t$$
   Sea $x(t)$ la cantidad de sal, medida en libras, en el tanque en el instante t, medido en minutos.

   El ritmo de entrada de sal es $0{,}5 \cdot 6 = 3$ libras por minuto y el ritmo de salida es $4 \cdot \dfrac{x(t)}{100+2t}$ Entonces,
   $$x'(t) = 3 - \frac{4x(t)}{100+2t}$$
   Esta es una ecuación lineal, por lo tanto:
   $$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\int \frac{4dt}{100+2t}} \left[\int 3\, e^{\int \frac{4dt}{100+2t}} dt + C \right] \\ &= \frac{1}{(50+t)^2} \left[3 \int (50+t)^2 dt + C \right] \\ &= \frac{1}{(50+t)^2} \left[(50+t)^3 + C \right] \end{aligned}$$
   Como $x(0) = 10 = 50 + C \cdot 50^{-2}$, entonces $C = -40 \cdot 50^2$.
   Así,
   $$x(t) = 50 + t - \frac{40 \cdot 2500}{(50+t)^2}$$
   Reemplazando para $t = 30$, tenemos que a los 30 minutos, la cantidad de sal es:
   $$80 - \frac{40 \cdot 2500}{(80)^2} = 80 - \frac{125}{8} = 80 - 15,625 = 64,375 \text{ libras}$$

b) Determinar después de cuántos minutos el tanque empezará a derramarse.

Buscamos el valor de t para el cual se cumple que

$$100 + 2t = 400$$

luego, el tanque empezará a derramarse en $t = 150$ minutos.

c) Determinar la concentración de sal en el instante en que el tanque comienza a derramarse.

La concentración de sal es la cantidad presente por galón de mezcla, por lo que dividimos la cantidad total por el contenido de mezcla en el tanque. Por lo tanto, después de 150 minuto la concentración de sal es

$$\overline{x(150)} = \frac{x(150)}{400} = \frac{197,5}{400} \approx 0,49$$

libras de sal por galón.

21. El suministro de glucosa al torrente sanguíneo es una técnica médica importante. Un paciente que presenta hipoglucemia (baja concentración sanguínea de glucosa) ingresa con un nivel inicial de 40 mg de glucosa por cada 100 ml de sangre (un hombre de su contextura tiene un volumen total de alrededor de 5,6 litros de sangre). Se le debe administrar una tasa constante de glucosa por vía intravenosa. Se sabe que a medida que se le inyecta glucosa, alrededor del 3 % de la glucosa presente en la sangre se irá transformando y eliminándose. ¿Cuántos miligramos de glucosa por minuto será necesario administrar al paciente para que éste llegue a un nivel normal de 90 mg por cada 100 ml de sangre en dos horas?

    Sea $X(t)$ la cantidad de glucosa en un instante t y A la cantidad de glucosa que se le debe administrar al paciente por minuto.

    La ecuación diferencial está dada por:

$$\frac{dX}{dt} = A - \frac{3}{100}X$$

con $X(0) = 40 \cdot 56 = 2240$ mg.

Esta ecuación es lineal y su solución es:

$$\begin{aligned} X(t) &= e^{-\frac{3}{100}t}\left[C + A\int e^{\frac{3}{100}t}dt\right] \\ &= Ce^{-\frac{3}{100}t} + \frac{100}{3}A \end{aligned}$$

Reemplazando la condición inicial obtenemos $C = 2240 - \dfrac{100}{3}A$. Luego,

$$X(t) = 2240e^{-\frac{3}{100}t} - \frac{100}{3}Ae^{-\frac{3}{100}t} + \frac{100}{3}A$$

Además, las condiciones del problema implican que

$$X(120) = 90 \cdot 56 = 5040 = 2240e^{-3,6} - \frac{100}{3}Ae^{-3,6} + \frac{100}{3}A$$

de donde

$$A = \frac{12(63 - 28e^{-3,6})}{5(1 - e^{-3,6})} \approx 153,56$$

Por lo tanto, al paciente se le debe administrar $153,56$ mg de glucosa por minuto.

22. Una fábrica de papel está situada cerca de un río con un flujo constante de 1000 m^3/seg, el cual va a dar a la única entrada de un lago que tiene un volumen de $10^9 m^3$. Suponga que en el tiempo $t = 0$, la fábrica de papel comienza a bombear contaminantes en el río a razón de 1 m^3/seg, y que la entrada y salida de agua son constantes.

    a) ¿Cuál será la concentración de contaminantes en cualquier instante?

    Sea $x(t)$ la cantidad de contaminantes, medido en metros cúbicos, presente en el lago en un instante t, medido en segundos.

    Tenemos que el volumen total es $V = 10^9$, la velocidad de entrada y de salida es constante e igual a $1001 m^3$/seg.

Luego la ecuación queda

$$\frac{dx(t)}{dt} = 1 - \frac{x(t)}{10^9} \cdot 1001$$

La solución de esta ecuación lineal es:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\int \frac{1001}{10^9} dt} \left[C + \int e^{\int \frac{1001}{10^9} dt} dt \right] \\ &= e^{-\frac{1001}{10^9} t} \left[C + \frac{10^9}{1001} e^{\frac{1001}{10^9} t} \right] \end{aligned}$$

Como $x(0) = 0$ tenemos que $C = -\dfrac{10^9}{1001}$. Luego,

$$x(t) = \frac{10^9}{1001} \left[1 - e^{-\frac{1001}{10^9} t} \right]$$

Así, la concentración es

$$\overline{x(t)} = \frac{x(t)}{V} = \frac{1}{1001} \left[1 - e^{-\frac{1001}{10^9} t} \right]$$

b) Suponga que la fábrica de papel deja de contaminar el río después de una hora. Halle una expresión para la concentración de contaminantes en el lago en cualquier tiempo t.

Por hipótesis, el modelo encontrado en la parte a) es válido solo en el intervalo $[0, 3600]$. Si $t > 3600$ debemos formular un nuevo modelo.

En este nuevo modelo el ritmo de entrada es 0 y la ecuación queda

$$x' = -\frac{x}{10^6}$$

cuya solución es

$$x(t) = Ce^{-\frac{t}{10^6}}$$

Ahora, igualando $x(3600)$ de a) y b), tenemos

$$x(3600) = \frac{10^9}{1001} \left[1 - e^{-\frac{1001}{10^7} 36} \right] = Ce^{-\frac{36}{10^4}}$$

luego

$$C = \frac{10^9}{1001}\left[1 - e^{-\frac{1001}{10^7}36}\right] e^{\frac{36}{10^4}}$$

Así, para $t > 3600$, la cantidad de contaminante presente en el lago está dada por

$$x(t) == \frac{10^9}{1001}\left[1 - e^{-\frac{1001}{10^7}36}\right] e^{\frac{3{,}600-t}{10^6}}$$

Luego, la concentración de contaminantes en el lago en cualquier instante t es:

$$\overline{x(t)} = \begin{cases} \dfrac{1}{1001}\left[1 - e^{-\frac{1001}{10^9}t}\right] & \text{si} \quad 0 \le t \le 3600 \\ \dfrac{1}{1001}\left[1 - e^{-\frac{1001}{10^7}36}\right] e^{\frac{3{,}600-t}{10^6}} & \text{si} \quad t > 3600 \end{cases}$$

23. Un tanque contiene 50 litros de agua. Al tanque entra salmuera, que contiene A gramos de sal por litro, a razón de 1,5 litros por minuto. La mezcla, bien revuelta, sale del tanque a razón de 1 litro por minuto. Si la concentración debe ser de 10 gramos por litro después de 20 minutos, calcule el valor de A.

Sea $X(t)$ la cantidad de sal en el tanque en el instante t, medido en minutos y sea $V(t)$ el volumen de líquido en el tanque en el instante t, medido en litros.

Entonces $X(0) = 0$ y $V(0) = 50$.

Puesto que, por minuto entra 1,5 litros de salmuera y sale solo 1 litro, tenemos que

$$V(t) = 50 + 0,5t = \frac{100+t}{2}$$

El ritmo de entrada de sal en el tanque es de $1,5A$ gramos por litro.

El ritmo de salida de sal es de $\dfrac{2X}{100+t}$ gramos por litro.

Luego,

$$X'(t) = 1,5A - \frac{2X}{100+t}$$

es una ecuación lineal cuya solución es

$$\begin{aligned}
X(t) &= e^{-\int \frac{2dt}{100+t}} \left[C + \frac{3}{2}A \int e^{\int \frac{2dt}{100+t}} \right] \\
&= e^{-2\ln(100+t)} \left[C + \frac{3}{2}A \int e^{2\ln 100+t} \right] \\
&= \frac{1}{(100+t)^2} \left[C + \frac{3}{2}A \int (100+t)^2 \right] \\
&= \frac{1}{(100+t)^2} \left[C + \frac{A(100+t)^3}{2} \right] \\
&= \frac{C}{(100+t)^2} + \frac{A(100+t)}{2}
\end{aligned}$$

Ahora, $X(0) = 0 = \frac{C}{100^2} + 50A$, de donde $C = -5 \cdot 10^5 A$. Así,

$$X(t) = \left[\frac{-5 \cdot 10^5}{(100+t)^2} + \frac{(100+t)}{2} \right] A$$

Después de 20 minutos, el volumen es 60 litros, luego la concentración está dada por

$$\begin{aligned}
\overline{X(20)} &= \frac{X(20)}{V(20)} \\
&= \left[\frac{-5 \cdot 10^5}{60(120)^2} + 1 \right] A \\
&= -\frac{91}{216}A
\end{aligned}$$

Como se pide que la concentración de sal en el tanque después de 20 minutos sea de 10 gramos por litro, $10 = \frac{91}{216}A$, de donde

$$A = \frac{2160}{91} \approx 23,74$$

24. El Lago Rapel contiene aproximadamente 10 millones de litros de agua. Suponga que en $t = 0$ comienzan a contaminarse sus aguas con un producto químico que se vierte en el lago a razón de 3 millones de litros por año con una concentración de $C(t) = 2 + \text{sen}(t)$ gramos por litro. Por otro lado, y al mismo tiempo de comenzar la contaminación, la empresa que administra la represa del Lago Rapel hace un desvío de aguas de un río cercano proporcionando al lago agua fresca a una tasa de 2 millones de litros por año. En el mismo instante se comienza también a evacuar el agua a una tasa de 5 millones de litros por año. Determine la cantidad de producto químico en el Lago Rapel y su concentración en cualquier instante t.

    Se trata de un problema de tanque con volumen constante.

    Sea $X(t)$ la cantidad de contaminante químico presente en el lago en el tiempo t, medido en años.

    Entonces el ritmo de entrada del contaminante es

$$E(t) = 3 \cdot 10^6 (2 + \text{sen}\, t)$$

    El ritmo de salida del contaminante es

$$S(t) = \frac{5 \cdot 10^6 X(t)}{10^7}$$

    Luego,

$$X'(t) = 3 \cdot 10^6 (2 + \text{sen}\, t) - \frac{5 \cdot 10^6 X(t)}{10^7}$$

    es decir,

$$X' + \frac{1}{2} X = 3 \cdot 10^6 (2 + \text{sen}\, t)$$

    Como se trata de una ecuación lineal, su solución es

$$\begin{aligned} X(t) &= e^{-\frac{1}{2}t} \left[C + 3 \cdot 10^6 \int (2 + \text{sen}\, t) e^{\frac{1}{2}t} dt \right] \\ &= e^{-\frac{1}{2}t} \left[C + 3 \cdot 10^6 \left(4e^{\frac{1}{2}t} + \frac{4e^{\frac{1}{2}t}}{5} \left(\frac{1}{2} \text{sen}\, t - \cos t \right) \right) \right] \\ &= Ce^{-\frac{1}{2}t} + 12 \cdot 10^5 \left(10 + \text{sen}\, t - 2\cos t \right) \end{aligned}$$

Como $X(0) = 0$, tenemos $0 = C + 12 \cdot 10^5\,(10 - 2)$, de donde

$$C = -12 \cdot 8 \cdot 10^5$$

Luego, la cantidad de producto químico presente en el lago en cualquier instante t está dado por:

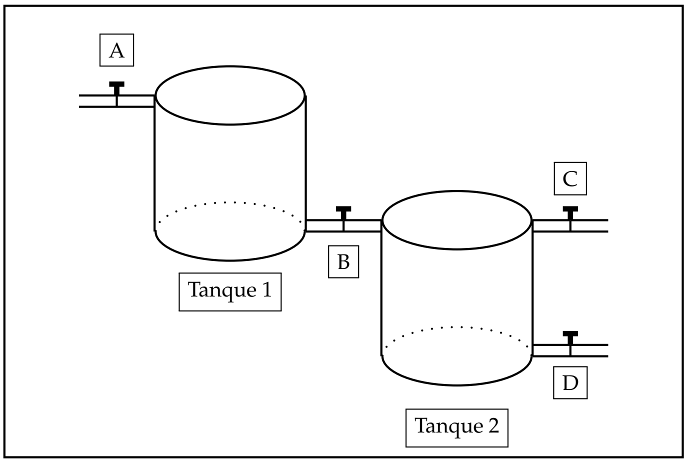
$$X(t) = 12 \cdot 10^5 \left(10 + \operatorname{sen} t - 2\cos t - 8e^{-\frac{1}{2}t}\right)$$

y la concentración :

$$\overline{X(t)} = \frac{X(t)}{10^7} = \frac{3}{25}\left(10 + \operatorname{sen} t - 2\cos t - 8e^{-\frac{1}{2}t}\right)$$

25. Considere los dos tanques de la figura. Inicialmente el tanque 1, contiene 200 litros de solución salina en la que se han disuelto 40 kilos de sal. El tanque 2, que tiene 400 litros de capacidad, contiene 100 litros de solución salina con concentración de sal de $\frac{1}{25}$ kilos por litro.

    En el instante $t = 0$ se abren simultáneamente las llaves A, B, C y D. Por A entra solución con concentración de $\frac{1}{10}$ kilos por litro a 10 litros por minuto. Por B pasa la solución del tanque 1 al tanque 2 a 10 litros por minuto. Por C entra agua pura a 2 litros por minuto y por D sale solución a 6 litros por minuto.



a) Determinar la cantidad de sal en el tanque 1 en un tiempo t.

Sea $x(t)$ la cantidad de sal, medida en kilos, en el tanque 1 en el instante t, medido en minutos.

El ritmo de entrada al tanque 1 es de $\dfrac{1}{10} \cdot 10 = 1$ kilo de sal por minuto.

El ritmo de salida es de $10 \cdot \dfrac{x(t)}{200}$ kilos por minuto.

Entonces,

$$x'(t) = 1 - \frac{x(t)}{20}$$

Esta ecuación es lineal, por lo tanto:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\int \frac{dt}{20}} \left[C + \int e^{\int \frac{dt}{20}} dt \right] \\ &= e^{-\frac{t}{20}} \left[C + 20e^{\frac{t}{20}} \right] \end{aligned}$$

Como $x(0) = 40$, entonces $C = 20$, luego

$$x(t) = 20 \left[e^{-\frac{t}{20}} + 1 \right]$$

representa la cantidad de sal en el tanque 1 en cualquier instante t.

b) Determinar el instante t_1 en que se llena el tanque 2.

Sea $V(t)$ el volumen de solución salina presente en el tanque 2 en cualquier instante t.

El tanque 2 tiene capacidad para 400 litros. La llave B aporta 10 litros por minuto y la llave C, 2 litros por minuto. Por la llave D salen 6 litros por minuto.

Luego, $V(t) = 100 + 6t$, e igualando a 400 obtenemos $t = 50$, es decir, el tanque 2 se llena a los 50 minutos.

c) Determinar la cantidad de sal en el tanque 2 para cualquier tiempo t tal que $0 < t < t_1$.

Sea $y(t)$ la cantidad de sal en el tanque 2 en el instante t. La sal que entra en el tanque proviene toda del estanque 1. Entonces,

$$y'(t) = 10 \cdot \frac{20(1 + e^{-\frac{t}{20}})}{200} - \frac{6y(t)}{100 + 6t}$$

Como esta ecuación es lineal su solución es:

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{-\int \frac{6}{100+6t} dt} \left[C + \int (1 + e^{-\frac{t}{20}}) e^{\int \frac{6}{100+6t} dt} dt \right] \\ &= \frac{1}{100 + 6t} \left[C + \int (1 + e^{-\frac{t}{20}})(100 + 6t) dt \right] \\ &= \frac{1}{100 + 6t} \left[C + 100t + 3t^2 - e^{-\frac{t}{20}} (4400 + 120t) \right] \end{aligned}$$

Como la concentración de sal en el tanque 2 en el instante inicial es $0,04$ kilos por litro, tenemos que $y(0) = 4$, de donde $C = 4800$.

Así,

$$y(t) = \frac{1}{100 + 6t} \left[4800 + 100t + 3t^2 - e^{-\frac{t}{20}} (4400 + 120t) \right]$$

d) Determinar la concentración de sal en cada tanque en el instante en el cual el segundo tanque comienza a derramarse.

La concentración de sal en el tanque 1 a los 50 minutos es

$$\overline{x(50)} = \frac{x(50)}{200} = \frac{1}{10} \left[e^{-\frac{50}{20}} + 1 \right] = \frac{1}{10} \left[e^{-\frac{5}{2}} + 1 \right]$$

La concentración en el tanque 2 a los 50 minutos es:

$$\begin{aligned} \overline{y(50)} &= \frac{y(50)}{100 + 6 \cdot 50} \\ &= \frac{1}{(400)^2} \left[4800 + 5000 + 7500 - e^{-\frac{5}{2}} (4400 + 6000) \right] \\ &= \frac{1}{1600} (173 - 104 e^{-\frac{5}{2}}) \end{aligned}$$

26. Dados dos tanques, (1) y (2), el primero con 200 litros de solución con 40 gramos de sal y el tanque (2), con 30 litros de agua pura. En el tiempo $t = 0$ se abren simultáneamente las llaves A, B, C y D. Por la llave A entran al tanque (1), 2 litros de solución por minuto con una concentración de 1 gramo de sal por litro. La mezcla, bien disuelta, pasa al tanque (2) a través de la llave B a razón de 4 litros por minuto. Por la llave C ingresan al tanque (2), 2 litros de solución con una concentración de 2 gramos de sal por litro. La mezcla, bien disuelta, sale del tanque (2) al exterior por la llave D a razón de 3 litros por minuto.

    a) Determine la cantidad de sal en los tanques (1) y (2) en cualquier instante t, con $t < 100$.

    Sean $X(t)$ e $Y(t)$ las cantidades de sal presentes en los tanques (1) y (2) respectivamente, en un instante t. Notemos que en este problema el tanque (1) se vacía a los 100 minutos, por lo que el dominio de la función x es $[0, 100)$.

    Entonces,

$$\begin{aligned} X' &= 2 - \frac{4}{200-2t}X \\ Y' &= 4 + \frac{4}{200-2t}X - \frac{3}{30+3t}Y \end{aligned}$$

    Resolviendo la primera ecuación:

$$\begin{aligned} X(t) &= e^{-\int \frac{2}{100-t}dt}\left[C + 2\int e^{\int \frac{2}{100-t}dt}dt\right] \\ &= (100-t)^2\left[C + \frac{2}{100-t}\right] \end{aligned}$$

    Como $X(0) = 40$, tenemos $C = -\dfrac{2}{125}$.

    Así, $\quad X(t) = \dfrac{2}{125}(25+t)(100-t)$.

    Ahora, reemplazando $X(t)$ en la ecuación diferencial para Y tenemos

$$Y' + \frac{1}{10+t}Y = \frac{1}{125}(150+t)$$

Resolviendo,

$$\begin{aligned} Y(t) &= e^{-\int \frac{1}{10+t}dt}\left[C + \frac{1}{125}\int (150+t)e^{\int \frac{1}{10+t}dt}dt\right] \\ &= \frac{1}{10+t}\left[C + \frac{1}{125}\int (150+t)(10+t)dt\right] \\ &= \frac{1}{10+t}\left[C + \frac{1}{125}(1500t + 80t^2 + \frac{1}{3}t^3\right] \end{aligned}$$

Como $Y(0) = 0$, tenemos $C = 0$, luego,

$$Y(t) = \frac{1}{10+t}\left(\frac{t}{375}(4500 + 240t + t^2\right)$$

b) ¿En qué instante la concentración de sal en el tanque (1) es de $\frac{9}{25}$ gramos por litro?

Solo debemos reemplazar:

$$\frac{9}{25}(200 - 2t) = \frac{2}{125}(25+t)(100-t)$$

y dado que $t \neq 100$ por las condiciones del problema, despejando tenemos que tal concentración se obtiene a los 20 minutos.

c) Si el tanque (2) tiene capacidad para 300 litros, ¿cuál es la concentración de sal cuando éste rebalsa?

El segundo tanque rebalsa cuando $30 + 3t = 300$, es decir para $t = 90$.

Luego, $Y(90) = \frac{1}{100}\left[\frac{90}{375}(4500 + 21600 + 8100\right] = \frac{10260}{125}$.

Finalmente, la concentración, en gramos por litro es de

$$\overline{Y(90)} = \frac{Y(90)}{300} = \frac{171}{625} \approx 0,27$$

2.3. Ejercicios propuestos

1. Encuentre la ecuación diferencial de las siguientes familias:

   a) La familia de todas las circunferencias que pasan por los puntos $(0,1)$ y $(-1,0)$.

   b) La familia $y = x^2 \cos(x + C)$.

   c) La familia que cumple la condición: la parte de la normal entre (x,y) y el eje Y queda bisectada por el eje X.

2. Halle la familia de trayectorias ortogonales a las siguientes familias:

   a) $12y + x^2 = C^2,\ C > 0$

   b) $x^2 + y^2 = Cy$

   c) $y = x \operatorname{sen}(x + C)$

   d) $y = \ln \tan(x + C)$

   e) $r = \dfrac{C}{1 - \cos\theta},\ C > 0$

   f) Γ es la familia de todas las rectas tangentes al círculo unitario.

   g) Γ es la familia de curvas que satisface la siguiente condición geométrica: la parte de la normal entre el punto (x,y) y el eje Y tiene como punto medio la intersección con el eje X.

3. Un cierto hombre tiene una fortuna que aumenta a una velocidad proporcional al cuadrado de su riqueza presente. Si tenía un millón de dólares hace un año, y ahora tiene dos millones, ¿ cuánto tendrá dentro de seis meses?; ¿ dentro de un año?

4. Cuando $t = 0$, había 100 miligramos de una sustancia radiactiva. Al cabo de 6 horas, esa cantidad disminuyó el 3 %. Si la razón de desintegración, en cualquier momento, es proporcional a la cantidad de la sustancia presente, calcule la cantidad que queda después de 2 horas.

5. Un cultivo bacteriano tiene una densidad de población de 100 mil organismos por pulgada cuadrada. Se observó que un cultivo que abarcaba un área de una pulgada cuadrada a las 10:00 a. m. del día martes ha aumentado a 3 pulgadas cuadradas para el mediodía del jueves siguiente. ¿Cuántas bacterias habrá en el cultivo a las 3:00 p. m. del

domingo siguiente suponiendo que la densidad de población cambia a una tasa proporcional a sí misma? ¿Cuántas bacterias habrá el lunes a las 4:00 P.M.?

6. Se sabe que un cierto material radiactivo decae con una rapidez que es proporcional a la cantidad presente en cada instante. Un bloque de este material tiene originalmente una masa de 100 gramos y se observa que 20 años después, su masa es de 80 gramos. Determine una expresión para la masa del material en función del tiempo. Calcule la semivida del material y la cantidad de él que quedará después de 40 años.

7. Al sacar un pastel del horno, su temperatura es de 300 ° F. Después de 3 min., es de 200 ° F. ¿En cuánto tiempo alcanzará una temperatura de 75 ° F, si la temperatura del medio es de 70 ° F?

8. El estroncio (Sr^{90}) tiene una vida media de 25 años. Si 10 gramos de Sr^{90} se colocan inicialmente en un recipiente sellado, ¿cuántos gramos permanecerán después de 10 años?

9. Suponga que la población P de bacterias en un cultivo al tiempo t cambia a una razón proporcional a $P^2 - P$. Asuma que $P^2 - P > 0$.

   a) Sea k la constante de proporcionalidad. Escriba una ecuación diferencial para $P(t)$ y obtenga la solución general.

   b) Encuentre la solución si hay 1000 bacterias al tiempo $t = 0$ horas.

   c) Determine la constante k suponiendo, además, que hay 100 bacterias en $t = 5$ horas.

   d) Determine $\lim\limits_{t\to\infty} P(t)$

10. Supongamos que la población de la Tierra cambia a una velocidad constante proporcional a la población actual. Supongamos además, que al tiempo $t = 0\,(1650\,\text{d.C.})$ la población era de 250 millones; en 1950 la población era de 2,5 billones ($2{,}5 \cdot 10^9$). Encuentre la población de la Tierra en cualquier instante t. Suponiendo que la mayor población que puede soportar la Tierra es de 25 billones, ¿cuándo se alcanzará ese límite?

11. Un depósito contiene 50 galones de salmuera en el que hay disueltas 75 libras de sal. A partir de un instante $t = 0$ comienza a fluir en él

salmuera a una velocidad de 2 galones por minuto. Simultáneamente, la mezcla sale del depósito a razón de un galón por minuto.

a) ¿Qué cantidad de sal hay en el depósito en un tiempo t?
b) ¿En qué instante habrá 125 libras de sal disueltas en el depósito?

12. Suponga que el Lago Erie tiene un volumen de $480\,km^3$ y que sus tasas de flujo de entrada (desde el Lago Hurón) y de salida (hacia el Lago Ontario) son ambas de $350\,km^3$ por año. Suponga también que en el instante $t = 0$ (años) la concentración de contaminación del Lago Erie -provocada por contaminación industrial pasada que ahora se ha ordenado que se detenga- es cinco veces la del Lago Hurón. Si el flujo de salida es agua del lago perfectamente mezclada, ¿cuánto tiempo le tomará reducir la concentración de contaminación en el Lago Erie al doble de la del Lago Hurón?.

13. Muchas sustancias se disuelven en el agua a un ritmo conjuntamente proporcional a la cantidad no disuelta y a la diferencia entre la concentración de una solución saturada y la concentración en ese momento. Para una tal sustancia, colocada en un depósito que contiene G galones de agua, hallar la cantidad x no disuelta en el instante t, si $x = x_0$ cuando $t = 0$ y $x = x_1$ cuando $t = t_1$, y si S es la cantidad disuelta en el depósito cuando la solución está saturada.

14. Cuando un proyectil es disparado en el agua, encuentra una resistencia (desaceleración) proporcional al cuadrado de su velocidad. Si la velocidad inicial es 540 km/h y ha disminuido a la mitad después de 1 minuto, encontrar la velocidad que lleva el proyectil después de 3 minutos, despreciando los efectos de la gravitación. ¿En cuánto tiempo la velocidad se ha reducido a la tercera parte de la velocidad inicial?

15. Una estrella perfectamente esférica sufre un colapso gravitacional debido a la pérdida de su combustible nuclear. El radio de la estrella antes del colapso es M veces el radio del Sol (R_s) y después de un minuto el radio de la estrella se reduce a la mitad. Si el proceso del colapso (disminución del radio) es proporcional al volumen de la estrella, escriba la ecuación diferencial que determina en cuánto tiempo después del inicio de esta reducción la estrella se transforma en un hoyo negro, teniendo en cuenta que el radio típico de estos objetos cósmicos es de 15 kilómetros y que el volumen de una esfera es $\frac{4}{3}\pi r^3$.

16. Según la ley de gravitación universal de Newton la aceleración de caída libre de un cuerpo que cae desde una gran distancia hasta la superficie terrestre no es la constante g, sino que es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia del objeto al centro de la tierra. Si la dirección positiva es hacia arriba, utilice la segunda ley de Newton y su ley de gravitación universal para deducir una ecuación diferencial para la distancia a la Tierra de un satélite que cae desde una gran altura. ¿Cuáles serán las condiciones iniciales del problema?

17. Se tiene un tanque que contiene 1500 litros de una salmuera que lleva disueltos 2000 gr de sal. Al tiempo $t = 0$, comienza a fluir dentro del tanque agua pura a una razón de 100 lt/min. La mezcla bien agitada, sale del tanque a la misma razón y pasa a un segundo tanque que tenía inicialmente 1500 lt de agua pura. A su vez la mezcla bien agitada abandona este segundo tanque a razón de 100 lt/min.

    a) Determine la cantidad de sal en el primer tanque a los 10 minutos.
    b) Determine la cantidad de sal en el segundo tanque a los 10 minutos.
    c) Calcule el momento en que el primer tanque tiene la mitad de sal que había inicialmente.
    d) Calcule la cantidad máxima de sal que hay en el segundo tanque en cualquier tiempo.
    e) Calcule la cantidad de sal que hay en el segundo tanque después de una hora.

18. Un tanque contiene inicialmente 100 galones de agua pura. Comenzando en $t = 0$, entra al tanque una salmuera que contiene 4 libras de sal por galón a una razón de 5 gal/min. La mezcla se conserva uniforme mediante agitación, y estando bien agitada sale con una rapidez de 3 gal/min.

    a) ¿Qué cantidad de sal habrá en el tanque después de 20 min?
    b) ¿Cuándo habrá en el tanque 50 lb de sal?
    c) Si el tanque tiene una capacidad de 400 galones. ¿Cuánto tiempo demora en llenarse?

19. Un tanque contiene en un principio 40 litros de salmuera con 8 kilos de sal en solución. Entra en el tanque, a razón de 8 litros por minuto salmuera conteniendo $\frac{1}{8}$ kilo de sal por litro. La mezcla bien agitada para que sea homogénea, sale del tanque a razón de 4 litros por minuto.

    a) Calcular la cantidad de kilos de sal que hay en el tanque a los 5 minutos.

    b) A los 10 minutos se modifica la concentración de entrada de sal a K kilos de sal por litro. Si se mantienen los otros datos, calcule K de modo que a los 20 minutos la concentración de sal en el tanque sea de $83/4$ kilos por litro.

20. Un tanque de 400 litros de capacidad está lleno con solución salina con concentración $1/5$ kilos por litro. En $t = 0$, se abren simultáneamente una llave de entrada A y una llave de salida B. Por A entra solución que contiene 0,25 kg de sal por litro a razón de 4 lts por segundo, y por B sale solución a razón de 12 lts. por segundo.

    a) Determine el tiempo $t = t_0$ que tarda el tanque en quedar vacío.

    b) Determine la cantidad de sal que hay en el tanque en cualquier instante $t < t_0$.

    c) Calcule la concentración de sal en el tanque para $t = 37{,}5$ segundos.

21. La tasa de natalidad en un suburbio de una gran ciudad es proporcional a la población y la constante de proporcionalidad es 10^{-1}. Por otra parte, la tasa de mortalidad es proporcional al cuadrado de la población y la constante de proporcionalidad es 10^{-7}. Si inicialmente había 5000 personas, determine la población en un instante cualquiera. ¿Cuál es el valor límite de la población? ¿En qué momento la población es la mitad de ese límite?

22. Una solución de ácido nítrico entra a una razón constante de 6 litros por minuto en un tanque de gran tamaño que en un principio contenía 200 litros de una solución de ácido nítrico al 0,5 %. La solución dentro del tanque se mantiene bien revuelta y sale del tanque a razón de 8 litros por minuto. Si la solución que entra al tanque tiene ácido nítrico al 20 %, ¿cuándo llegará el porcentaje de ácido nítrico en el tanque a 10 %?

Capítulo 3

Ecuaciones de orden superior

3.1. Resumen

Operador diferencial lineal.
Sea $C^n[I]$ el espacio vectorial de todas las funciones reales que admiten derivadas continuas en un intervalo I al menos hasta el orden n, $C[I]$, el espacio vectorial de las funciones continuas en I.
Una transformación lineal $L : C^n[I] \to C[I]$ se dice que es un **operador diferencial lineal** de orden n si puede expresarse de la forma:

$$L = a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \ldots + a_1(x)D + a_0(x)I$$

donde a_n, $a_{n-1}, \ldots, a_1$, a_0, son funciones reales continuas en algún intervalo I y $a_n(x) \neq 0$ para todo $x \in I$.
Los operadores diferenciales lineales con coeficientes variables no se pueden multiplicar algebraicamente usando las propiedades usuales del álgebra de polinomios. En cambio, cuando tienen solo coeficientes constantes se comportan como si fueran polinomios en D.

Ecuación lineal de orden superior.
Una ecuación diferencial lineal de orden n es una ecuación de la forma $L(y) = f(x)$, donde L es un operador diferencial lineal definido en algún intervalo real I y f una función real definida en I.
Si $f \equiv 0$ en I, decimos que la ecuación es **homogénea**.
Para una ecuación lineal de orden n un problema de valor inicial tiene además n condiciones iniciales $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$.

Teorema de existencia y unicidad. Si L es un operador diferencial lineal definido en un intervalo real I. El problema de valor inicial $L(y) = f(x)$ sujeto a las condiciones iniciales $y^{(i)}(x_0) = y_i$, $i = 0, \ldots, n-1$, tiene una única solución $y(x)$ en el intervalo I.

Principios de superposición.

1. **Ecuaciones homogéneas:** Sean $y_1, \ldots, y_k$ soluciones de la ecuación diferencial homogénea de orden n, $L(y) = 0$. Entonces toda combinación lineal $y = C_1 y_1 + \ldots + C_k y_k$, donde cada C_i, $i = 1, \ldots, k$, es una constante arbitraria, es también solución de la ecuación.

2. **Ecuaciones no homogéneas:** Sea y_{p_i} una solución particular de la ecuación no homogénea $L(y) = f_i(x)$, $i = 1, \ldots, k$. Entonces

$$y_p = y_{p_1} + \ldots + y_{p_k}$$

   es una solución particular de la ecuación no homogénea

$$L(y) = f_1(x) + \ldots + f_k(x)$$

Wronskiano.
Sean $y_1, \ldots, y_n \in C^{(n-1)}[I]$. Se define el Wronskiano de las funciones $y_1, \ldots, y_n$ como el determinante

$$W(y_1, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Conviene notar que $W(y_1, \ldots, y_n)$ es o bien idénticamente igual a 0 o nunca cero en I por lo que muchas veces resulta más cómodo evaluar primero las funciones y sus derivadas en algún punto x_0 del intervalo I y luego calcular el determinante.

Criterio para soluciones linealmente independientes.
Si $y_1, \ldots, y_n$ son soluciones de la ecuación homogénea de orden n, $L(y) = 0$, entonces el conjunto $\{y_1, \ldots, y_n\}$ es l.i. si y solo si $W(y_1, \ldots, y_n) \neq 0$.

Solución general de la ecuación diferencial lineal de orden n.
Si $y_1, \ldots, y_n$ son soluciones l.i. de la ecuación de orden n, $L(y) = 0$ en un intervalo I, entonces decimos que $\{y_1, \ldots, y_n\}$ es un sistema fundamental de soluciones y la solución general de la ecuación en I está dada por

$$y(x) = C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n$$

con $C_1, \ldots, C_n$ constantes reales arbitrarias.
Diremos que dos ecuaciones diferenciales son equivalentes si tienen el mismo sistema fundamental de soluciones.
Todo conjunto linealmente independiente $\{y_1, \ldots, y_n\}$ es el sistema fundamental de soluciones de la ecuación diferencial lineal de orden n

$$\begin{vmatrix} y & y' & \cdots & y^{(n)} \\ y_1 & y_1' & \cdots & y_1^{(n)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_n & y_n' & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} = 0$$

La solución general de la ecuación lineal no homogénea $L(y) = f(x)$ está dada por

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

donde $y_h(x)$ es la solución general de la ecuación homogénea $L(y) = 0$ e $y_p(x)$ es una solución particular de la ecuación no homogénea.

Fórmula de Abel.
Conociendo una solución de una ecuación homogénea de segundo orden, esta fórmula nos permite encontrar una segunda solución linealmente independiente.
Sea $y_1 \neq 0$ en un intervalo I, una solución no trivial de la ecuación diferencial de segundo orden $y'' + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = 0$. Entonces la solución general de la ecuación es $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, donde

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int a_1(x)dx}}{y_1^2(x)} dx$$

Ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes.
Sea L un operador diferencial lineal con coeficientes constantes. En tal caso, L se comporta como un polinomio real en la variable D y por tanto puede

escribirse como producto de factores lineales y/o cuadráticos irreducibles en $\mathbb{R}$, digamos $L = L_1 \cdot L_2 \cdots L_k$, $k \in \mathbb{N}$ y L_i irreducible en $\mathbb{R}$. Entonces toda solución de la ecuación lineal $L_i(y) = 0$, $i = 1, \ldots k$, es también solución de la ecuación $L(y) = 0$.

Caso 1. Si $L_i = (D - \alpha)$, entonces L_i tiene una solución

$$y_i(x) = e^{\alpha x}$$

Caso 2. Si $L_i = D^2 + aD + b$ es irreducible en $\mathbb{R}$ con raíces complejas $\alpha \pm \beta i$, entonces L_i tiene las dos soluciones l.i.

$$y_{i_1}(x) = e^{\alpha x} cos\, \beta\, x\,, \quad y_{i_2}(x) = e^{\alpha x} sen\, \beta\, x$$

Caso 3. Si $L_i = (D - \alpha)^p$, $p > 1$, entonces L_i tiene p soluciones l.i.

$$y_{i_1}(x) = e^{\alpha x},\ y_{i_2}(x) = x e^{\alpha x},\ \ldots,\ y_{i_p}(x) = x^{p-1} e^{\alpha x}$$

Caso 4. Si $L_i = (D^2 + aD + b)^p$, $p > 1$, $D^2 + aD + b$ irreducible en $\mathbb{R}$ con raíces complejas $\alpha + \beta i$, entonces L_i tiene $2p$ soluciones l.i.

$$\begin{array}{lcllcl}
y_{i_1}(x) & = & e^{\alpha x} \cos\, \beta\, x & y_{i_2}(x) & = & e^{\alpha x}\, \mathrm{sen}\, \beta\, x \\
y_{i_3}(x) & = & x e^{\alpha x} \cos\, \beta\, x & y_{i_4}(x) & = & x e^{\alpha x}\, \mathrm{sen}\, \beta\, x \\
\vdots & = & \vdots & \vdots & = & \vdots \\
y_{i_{2p-1}}(x) & = & x^{p-1} e^{\alpha x} \cos\, \beta\, x & y_{i_{2p}}(x) & = & x^{p-1} e^{\alpha x}\, \mathrm{sen}\, \beta\, x
\end{array}$$

Solución particular de una ecuación no homogénea con coeficientes constantes. Método del Aniquilador.

Sea L^* un operador diferencial lineal con coeficientes constantes y f una función definida en un intervalo I. Si $L^*(f(x)) = 0$ decimos que L^* es un **aniquilador** de f. Distinguimos los siguientes casos:

- El operador diferencial D^n aniquila todo polinomio de grado menor o igual a $n - 1$.
- El operador diferencial $(D - \alpha)^n$ aniquila toda función de la forma $p(x)e^{\alpha x}$, donde $p(x)$ es un polinomio de grado menor o igual a $n - 1$.
- El operador diferencial $(D^2 + aD + b)^n$, con $D^2 + aD + b$ irreducible en $\mathbb{R}$ con raíces complejas $\alpha + \beta i$, aniquila toda función de la forma $e^{\alpha x}(p(x)\, cos\, \beta x + q(x)\, sen\, \beta x)$, con p y q polinomios de grado menor o igual a $n - 1$.

Algoritmo para encontrar una solución particular $y_p(x)$ de una ecuación lineal no homogénea con coeficientes constantes.
Consideremos la ecuación no homogénea $L(y) = f(x)$.

- Paso 1: Encontrar la solución $y_h(x)$ de la ecuación homogénea $L(y) = 0$ y un aniquilador L^* de la función f.
- Paso 2: Aplicar el operador L^* a la ecuación $L(y) = f(x)$ y obtener la solución general $y^*(x)$ de la ecuación homogénea $L^*L(y) = 0$.
- Paso 3: Eliminar de y^* todos los términos que se repiten en la solución y_h. La combinación lineal con los términos restantes es $y_p(x)$, la solución particular de la ecuación original $L(y) = f(x)$.
- Paso 4: Calcular $L(y_p)$ e igualar a $f(x)$ para despejar las constantes en y_p. La solución general de la ecuación es entonces

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

Solución particular de una ecuación lineal no homogénea. Método de variación de parámetros.
Consideremos la ecuación diferencial lineal de orden n,

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)\, y' + a_0(x)y = f(x)$$

con $a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0, f$ funciones reales definidas en un intervalo I. Si la solución de la ecuación homogénea asociada es

$$y_h(x) = C_1 y_1(x) + \ldots + C_n\, y_n(x)$$

entonces, una solución particular de la ecuación no homogénea está dada por

$$y_p(x) = \mu_1(x)\, y_1(x) + \ldots + \mu_n(x)\, y_n(x)$$

donde, las funciones $\mu_i'(x)$ se determinan resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{array}{lclcl}
\mu_1'(x)\, y_1(x) & +\ldots+ & \mu_n'(x) y_n(x) & = & 0 \\
\mu_1'(x)\, y_1'(x) & +\ldots+ & \mu_n'(x) y_n'(x) & = & 0 \\
 & \vdots & & = & \vdots \\
\mu_1'(x)\, y_1^{(n-2)}(x) & +\ldots+ & \mu_n'(x)\, y_n^{(n-2)}(x) & = & 0 \\
\mu_1'(x)\, y_1^{(n-1)}(x) & +\ldots+ & \mu_n'(x) y_n^{(n-1)}(x) & = & f(x)
\end{array}\right|$$

y $\mu_i(x) = \int \mu_i'(x)\,dx$ para $i = 1, \ldots, n$.

Nota. Al hacer variación de parámetros hay que tener muy presente que el coeficiente de $y^{(n)}$ es 1. Si no es así, hay que dividir primero la ecuación por $a_n(x)$. Además, como buscamos una solución particular de la ecuación, para cada función μ_i al calcular la integral $\int \mu_i'(x)\,dx$ podemos considerar la constante aditiva igual a 0.

Ecuación (equidimensional) de Euler.
Llamamos ecuación de Euler (homogénea) a toda ecuación diferencial lineal de la forma

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 x\, y' + a_0\, y = 0$$

con a_i constantes reales para $i = 1, \ldots, n$ y $x \neq 0$.
La sustitución $x = e^t$ si $x > 0$ o $x = -e^t$, si $x < 0$, transforma la ecuación de Euler en la ecuación lineal de orden n con coeficientes constantes

$$\left[a_n D(D-1)\cdots(D-n+1) + \ldots + a_2 D(D-1) + a_1 D + a_0\right](t) = 0$$

Una vez que se ha resuelto esta ecuación, la solución de la ecuación homogénea de Euler se obtiene reemplazando cada t por $\ln|x|$.

Ecuación de Euler no homogénea.
Existen dos maneras estándar de obtener una solución particular de la ecuación de Euler no homogénea

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 x\, y' + a_0\, y = f(x)$$

Método 1. Trabajar con la variable t.
En este caso, resolvemos completamente la ecuación no homogénea con coeficientes constantes

$$[a_n D(D-1)\cdots(D-n+1) + \cdots + a_1 D + a_0](y(t)) = f^*(t)$$

donde $f^*(t)$ se obtiene reemplazando en la función f la variable x por e^t (o $-e^t$).

Una vez encontrada la solución general $(\, y_h(t) + y_p(t)\,)$, reemplazamos la variable t por $\ln|x|$.

Método 2. Trabajar con la variable x.
En este caso, debemos encontrar primero la solución $y_h(x)$ de la ecuación homogénea asociada. Luego, escribimos la ecuación en la forma:

$$y^{(n)} + \frac{a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)}}{a_n x^n} + \ldots + \frac{a_1 x\, y'}{a_n x^n} + \frac{a_0\, y}{a_n x^n} = \frac{f(x)}{a_n x^n}$$

y usamos variación de parámetros.

Método de series de potencias.
Recordemos que una función f es analítica en un punto x_0 si y solo si admite un desarrollo en serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

que representa a la función f en alguna vecindad de x_0. En tal caso,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, c_n (x - x_0)^{n-1} \text{ y } \int_0^x f(u)\, du = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}(x - x_0)^{n+1} + C$$

Consideremos la ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes variables

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = 0 \quad (*)$$

Entonces, si todas las funciones $a_n, \ldots, a_1, a_0$ son analíticas en el punto x_0, diremos que x_0 es un **punto ordinario** de la ecuación diferencial. Si x_0 no es un punto ordinario, diremos que es un **punto singular** de la ecuación diferencial.

Teorema. Sea x_0 un punto ordinario de la ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes variables

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = 0$$

y sean $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}$ constantes arbitrarias. Entonces existe una única función $y(x)$, analítica en x_0, que satisface la ecuación anterior y las condiciones iniciales $y(x_0) = \alpha_0, \ldots, y^{(n-1)}(x) = \alpha_{n-1}$. Además, si las representaciones en serie de potencias de las funciones $a_i(x)$, $i = 0, \ldots n-1$ son válidas para todo x tal que $|x - x_0| < R$, entonces también lo es el desarrollo en serie de potencias de la solución.

En lo que sigue, consideraremos $x_0 = 0$, pues en caso contrario hacemos el cambio de variables $u = x - x_0$ en la ecuación. Aún cuando el teorema vale siempre que las funciones a_i son todas analíticas, trabajaremos solo el caso donde todas las funciones a_i son funciones polinomiales. La clave del método de resolución usando series de potencias consiste en suponer que la ecuación $(*)$ admite una solución de la forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

Entonces $y', \ldots, y^{(n)}$ se obtienen derivando la serie término a término. Reemplazando cada uno de los desarrollos en serie en $(*)$ e igualando coeficientes podemos determinar cada uno de los coeficientes c_n de las soluciones.

Método de Fröbenius.
Consideremos la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden con coeficientes variables

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0 \quad , \ x > 0$$

Diremos que 0 es un **punto singular regular** de la ecuación si las funciones $x\,a(x)$ y $x^2b(x)$ son ambas analíticas en 0, es decir admiten ambas desarrollo en serie de potencias en torno a 0:

$$x\,a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n \quad \text{y} \quad x^2 b(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n\, x^n$$

La ecuación indicial asociada a la ecuación diferencial anterior es

$$r(r-1) + a_0 r + b_0 = 0$$

Teorema de Fröbenius. Si 0 es un punto singular regular de la ecuación

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

entonces existe al menos una solución de la forma

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, x^{n+r_1}\ ,\ \ c_0 = 1$$

en donde el número r_1 corresponde a la mayor de las soluciones de la ecuación indicial.

Sean r_1 y r_2 las dos soluciones de la ecuación indicial. Para encontrar la segunda solución l.i. consideramos los siguientes casos:

Caso 1: Si $r_1 - r_2 \notin \mathbb{Z}$ entonces las dos soluciones l.i. de la ecuación son de la forma:

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, x^{n+r_1}, \qquad y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n\, x^{n+r_2} \qquad \text{con } c_0 = d_0 = 1$$

Caso 2: Si $r_1 - r_2$ es un entero positivo entonces la segunda solución l.i. es de la forma:

$$y_2(x) = Cy_1(x)\ln x + \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^{n+r_2}$$

con $d_0 = 1$ y C una constante que podría ser 0.

Caso 3: Si $r_1 = r_2$ entonces la segunda solución l.i. es de la forma:

$$y_2(x) = y_1(x)\ln x + \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^{n+r_2}\ ,\ \ d_0 = 1$$

Nota. La segunda solución l.i. también se puede obtener a menudo usando la fórmula de Abel.

3.2. Problemas Resueltos

1. Resolver la ecuación homogénea $y^{(iv)} - y = 0$ y demostrar que la solución obtenida es, efectivamente, la solución general de la ecuación. Encontrar la solución particular (única) para las condiciones iniciales: $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = y'''(0) = 0$.

   La ecuación característica asociada es
   $$D^4 - 1 = (D^2+1)(D-1)(D+1) = 0$$
   Luego, la solución general está dada por
   $$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x + C_3 e^x + C_4 e^{-x}$$
   Para demostrar que y es la solución general, es suficiente verificar que $(D^4-1)(y_h(x)) = 0$ y que $\{\cos x, \operatorname{sen} x, e^x, e^{-x}\}$ es un conjunto l.i.. Como los operadores con coeficientes constantes se comportan como polinomios, podemos usar linealidad por un lado y conmutatividad por otro para verificar que:
   $$(D^2+1)(D-1)(D+1)(y_h(x)) = 0$$
   Usamos el Wronskiano para verificar la independencia lineal de las 4 funciones:
   $$W = \begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x & e^x & e^{-x} \\ -\operatorname{sen} x & \cos x & e^x & -e^{-x} \\ -\cos x & -\operatorname{sen} x & e^x & e^{-x} \\ \operatorname{sen} x & -\cos x & e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x & 1 & 2 \\ -\operatorname{sen} x & \cos x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -8$$
   Así, $W \neq 0$, lo que significa que las 4 soluciones son l.i. Para encontrar las constantes derivamos:
   $$\begin{array}{rcrcrcrcr} y(x) & = & C_1 \cos x & + & C_2 \operatorname{sen} x & + & C_3 e^x & + & C_4 e^{-x} \\ y'(x) & = & -C_1 \operatorname{sen} x & + & C_2 \cos x & + & C_3 e^x & - & C_4 e^{-x} \\ y''(x) & = & -C_1 \cos x & - & C_2 \operatorname{sen} x & + & C_3 e^x & + & C_4 e^{-x} \\ y_h'''(x) & = & C_1 \operatorname{sen} x & - & C_2 \cos x & + & C_3 e^x & - & C_4 e^{-x} \end{array}$$
   Ahora reemplazamos las condiciones iniciales y obtenemosel sistema
   $$\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} C_1 & + & & + & C_3 & + & C_4 & = & 1 \\ & & C_2 & + & C_3 & - & C_4 & = & -1 \\ -C_1 & + & & + & C_3 & + & C_4 & = & 0 \\ & & -C_2 & + & C_3 & - & C_4 & = & 0 \end{array}\right|$$

Resolviendo matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Luego, $C_1 = \dfrac{1}{2}$, $C_2 = -\dfrac{1}{2}$, $C_3 = 0$, $C_4 = \dfrac{1}{2}$.

Por lo tanto, la solución (única) del problema de valor inicial es

$$y(x) = \frac{1}{2}\left(\cos x - \operatorname{sen} x + e^{-x}\right)$$

2. Resolver el problema de valor inicial

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0, \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = -1,\ y''(0) = 0$$

Primero resolvemos la ecuación homogénea usando la ecuación característica asociada:

$$D^3 - 3D^2 + 3D - 1 = (D-1)^3$$

Luego, la solución general está dada por:

$$y(x) = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2)e^x$$

Ahora encontramos las constantes:

$$\begin{aligned} &y(x) = (C_1 + C_2x + C_3x^2)e^x \Rightarrow y(0) = 1 = C_1 \\ &y'(x) = (1 + C_2 + (C_2 + 2C_3)x + C_3x^2)e^x \Rightarrow y'(0) = -1 = 1 + C_2 \\ &y''(x) = (-3 + 2C_3 - (2 - 4C_3)x + C_3x^2)e^x \Rightarrow y''(0) = 0 = -3 + 2C_3 \end{aligned}$$

Luego, la solución (única) es:

$$y(x) = \left[1 - 2x + \frac{3}{2}x^2\right]e^x$$

3. Resolver el problema de valor inicial

$$y^{(iv)} + 2y'' + y = 0 \qquad y(0) = 1,\, y'(0) = -1,\, y''(0) = y'''(0) = 0$$

La ecuación característica asociada es

$$D^4 + 2D^2 + 1 = (D^2 + 1)^2$$

cuyas raíces son complejas conjugadas de multiplicidad 2.

Luego, la solución general de la ecuación homogénea es

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)\cos x + (C_3 + C_4 x)\operatorname{sen} x$$

Ahora buscamos el valor de las constantes derivando primero sucesivamente la solución

$$\begin{aligned}
y(x) &= (C_1 + C_2 x)\cos x + (C_3 + C_4 x)\operatorname{sen} x \\
y'(x) &= (C_2 + C_3 + C_4 x)\cos x - (C_1 - C_4 + C_2 x)\operatorname{sen} x \\
y''(x) &= -(C_1 - 2C_4 + C_2 x)\cos x - (2C_2 + C_3 + C_4 x)\operatorname{sen} x \\
y'''(x) &= -(3C_2 + C_3 + C_4 x)\cos x + (C_1 + C_4 + C_2 x)\operatorname{sen} x
\end{aligned}$$

Reemplazando las condiciones iniciales

$$\begin{aligned}
y(0) &= 1 &&= C_1 \\
y'(0) &= -1 &&= C_2 + C_3 \\
y''(0) &= 0 &&= -1 + 2C_4 \\
y'''(0) &= 0 &&= -3C_2 - C_3
\end{aligned}$$

De aquí, $C_1 = 1$, $C_2 = \dfrac{1}{2}$, $C_3 = -\dfrac{3}{2}$ y $C_4 = \dfrac{1}{2}$.

Luego, la solución única del problema de valor inicial dado es

$$y(x) = \left[1 + \frac{x}{2}\right]\cos x - \left[\frac{3}{2} - \frac{x}{2}\right]\operatorname{sen} x$$

4. Resolver el problema de valor inicial

$$y^{(iv)} - y' = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = -1, y''(0) = y'''(0) = 0$$

Como $D^4 - D = D(D-1)(D^2 + D + 1)$, tenemos que

$$y(x) = C_1 + C_2 e^x + e^{-\frac{1}{2}x}\left[C_3 \cos\frac{\sqrt{3}x}{2} + C_4 \operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}x}{2}\right]$$

Ahora calculamos constantes:

$$\begin{aligned}
y(x) &= C_1 + C_2 e^x + e^{-\frac{x}{2}}\left[C_3 \cos\frac{\sqrt{3}x}{2} + C_4 \operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}x}{2}\right] \\
y(0) &= 1 = C_1 + C_2 + C_3 \\
y'(x) &= C_2 e^x - \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\left(C_3 - \sqrt{3}C_4\right)\cos\frac{\sqrt{3}x}{2} \\
&\quad -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\left(\sqrt{3}C_3 + C_4\right)\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}x}{2} \\
y'(0) &= -1 = C_2 - \frac{1}{2}\left(C_3 - \sqrt{3}C_4\right) \\
y''(x) &= C_2 e^x - \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\left(C_3 + \sqrt{3}C_4\right)\cos\frac{\sqrt{3}x}{2} \\
&\quad +\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\left(\sqrt{3}C_3 - C_4\right)\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}x}{2} \\
y''(0) &= 0 = C_2 - \frac{1}{2}\left(C_3 + \sqrt{3}C_4\right) \\
y'''(x) &= C_2 e^x + e^{-\frac{x}{2}}\left[C_3 \cos\frac{\sqrt{3}x}{2} + C_4 \operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}x}{2}\right] \\
y'''(0) &= 0 = C_2 + C_3
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución es:

$$y(x) = 1 - \frac{1}{3}e^x + \frac{1}{3}e^{-\frac{x}{2}}\left[\cos\frac{\sqrt{3}x}{2} - \sqrt{3}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}x}{2}\right]$$

5. Resolver el problema de valor inicial

$$y'' - 5y' + 6y = \cos x, \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$$

La ecuación característica asociada es

$$D^2 - 5D + 6 = (D-3)(D-2) = 0.$$

Luego, la solución de la ecuación homogénea asociada es

$$y_h(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x}$$

Para encontrar la solución particular usamos el método de aniquiladores. El operador D^2+1 aniquila la función coseno, luego

$$(D^2+1)(D-3)(D-2) = 0$$

de donde

$$y^*(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x} + C_3 \cos x + C_4 \operatorname{sen} x$$

Como $C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x}$ es la solución de la homogénea, la solución particular es de la forma:

$$y_p(x) = C_3 \cos x + C_4 \operatorname{sen} x$$

Para encontrar las constantes, debemos derivar y reemplazar en la ecuación original:

$$y_p'(x) = -C_3 \operatorname{sen} x + C_4 \cos x$$
$$y_p''(x) = -C_3 \cos x - C_4 \operatorname{sen} x$$
$$y_p'' - 5y_p' + 6y_p = (5C_3 - 5C_4)\cos x + (5C_3 + 5C_4)\operatorname{sen} x = \cos x.$$

Entonces,

$$\left.\begin{array}{rcl} 5C_3 - 5C_4 & = & 1 \\ 5C_3 + 5C_4 & = & = 0 \end{array}\right|$$

De aquí, $C_3 = \dfrac{1}{10}$, $C_4 = -\dfrac{1}{10}$, y por tanto

$$y_p(x) = \frac{1}{10}(\cos x - \operatorname{sen} x)$$

La solución general de la ecuación es entonces

$$y(x) = C_1e^{3x} + C_2e^{2x} + \frac{1}{10}(\cos x - \operatorname{sen} x)$$

Reemplazando las condiciones iniciales,

$$\begin{aligned} y(0) &= 1 = C_1 + C_2 + \frac{1}{10} \\ y'(x) &= 3C_1e^{3x} + 2C_2e^{2x} - \frac{1}{10}(\operatorname{sen} x + \cos x) \\ y'(0) &= 0 = 3C_1 + 2C_2 - \frac{1}{10} \end{aligned}$$

obtenemos el sistema

$$\left.\begin{array}{rcrcl} C_1 & + & C_2 & = & \dfrac{9}{10} \\ 3C_1 & + & 2C_2 & = & \dfrac{1}{10} \end{array}\right|$$

Luego, $C_1 = -\dfrac{17}{10}$ y $C_2 = \dfrac{13}{5}$, por lo tanto la solución del problema de valor inicial es:

$$y(x) = -\frac{17}{10}e^{3x} + \frac{13}{5}e^{2x} + \frac{1}{10}(\cos x - \operatorname{sen} x)$$

6. Resolver la ecuación no homogénea $y'' + 4y' + 4y = 10x^2e^{-2x}$.

   Como la ecuación característica es

   $$D^2 + 4D + 4 = (D+2)^2$$

   la solución de la homogénea asociada es

   $$y_h(x) = (C_1 + C_2x)e^{-2x}$$

   La solución particular podemos encontrarla por aniquiladores o por variación de parámetros.

Camino 1. Aniquiladores.

El operador $(D+2)^3$ aniquila a la función $10x^2e^{-2x}$. Por lo tanto, debemos resolver la ecuación homogénea

$$(D+2)^5 = 0$$

que tiene como solución general

$$y^*(x) = (C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3 + C_5x^4)e^{-2x}$$

Descartando la parte de solución que corresponde a la homogénea, tenemos que la solución particular es de la forma:

$$y_p(x) = (C_3x^2 + C_4x^3 + C_5x^4)e^{-2x}$$

Derivando,

$$\begin{array}{rcl} y_p'(x) & = & \left[2C_3x + (3C_4 - 2C_3)x^2 + (4C_5 - 2C_4)x^3 - 2C_5x^4\right] e^{-2x}, \\ y_p''(x) & = & \left[2C_3 + (6C_4 - 8C_3)x - 4(3C_4 - C_3 - 3C_5)x^2\right] e^{-2x} \\ & & + \left[4(C_4 - 4C_5)x^3 + 4C_5x^4\right] e^{-2x} \end{array}$$

Reemplazando en la ecuación original:

$$y'' + 4y' + 4y = (2C_3 + 6C_4x + 12C_5x^2)e^{-2x} = 10x^2e^{-2x}$$

de donde, $C_3 = C_4 = 0\,,\ C_5 = \dfrac{5}{6}$.

Luego, la solución general es

$$y(x) = \left[C_1 + C_2x + \frac{5}{6}x^4\right] e^{-2x}$$

Camino 2. Variación de parámetros.

La solución particular es de la forma $y_p(x) = u_1(x)e^{-2x} + u_2(x)xe^{-2x}$.

Resolvemos el sistema

$$\left.\begin{array}{rcrcr} e^{-2x}u_1' & + & xe^{-2x}u_2' & = & 0 \\ -2e^{-2x}u_1' & + & (1-2x)e^{-2x}u_2' & = & 10x^2e^{-2x} \end{array}\right|$$

Entonces,

$$u_1 = -\int 10x^3\,dx = -\frac{5}{2}x^4 \quad \text{y} \quad u_2 = \int 10x^2\,dx = \frac{10}{3}x^3$$

Así, $y_p(x) = \dfrac{5}{6}\,x^4e^{-2x}$, como antes.

7. Resolver la ecuación no homogénea $y'' - y = \dfrac{2e^x}{e^x + e^{-x}}$.

   La solución de la ecuación homogénea asociada es

$$y_h(x) = C_1e^x + C_2e^{-x}$$

   y ahora estamos obligados a usar variación de parámetros para encontrar la solución particular, que es de la forma:

$$y_p(x) = u_1e^x + u_2e^{-x}$$

   Resolvemos el sistema

$$\left.\begin{array}{rcrcc} u_1'e^x & + & u_2'e^{-x} & = & 0 \\ u_1'e^x & - & u_2'e^{-x} & = & \dfrac{2e^x}{e^x+e^{-x}} \end{array}\right|$$

   Así,

$$\begin{aligned} u_1 &= \int \frac{1}{e^x+e^{-x}}dx &&= \int \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx &&= \arctan e^x \\ u_2 &= -\int \frac{e^{3x}}{e^{2x}+1}dx &&= -\int \frac{u^2}{u^2+1}du &&= -e^x + \arctan e^x \end{aligned}$$

   Luego,

$$y_p(x) = e^x \arctan e^x - e^{-x}\left(e^x - \arctan e^x\right) = \left(e^x + e^{-x}\right)\arctan e^x - 1$$

   de donde

$$y(x) = C_1e^x + C_2e^{-x} + \left(e^x + e^{-x}\right)\arctan e^x - 1$$

8. Resolver la ecuación $y'' + 2y' + y = e^{-x} \ln x$, $x > 0$.

   Resolviendo la ecuación característica obtenemos que la solución de la ecuación homogénea asociada es

   $$y_h(x) = (C_1 + C_2 x)e^{-x}$$

   Ahora usamos variación de parámetros para calcular la solución particular, que es de la forma

   $$y_p(x) = u_1 e^{-x} + u_2\, xe^{-x}$$

   Resolvemos el sistema

   $$\begin{array}{rcrcl|} e^{-x}u_1' & + & u_2'\, xe^{-x} & = & 0 \\ -e^{-x}u_1' & + & (1-x)e^{-x}u_2' & = & e^{-x}\ln x \\ \hline \end{array}$$

   Despejando,

   $$\begin{aligned} u_1 &= -\int x \ln x\, dx = \frac{x^2}{2}\left[\ln x - \frac{1}{2}\right] \\ u_2 &= \int \ln x\, dx = x\,(\ln x - 1) \end{aligned}$$

   Luego, $y_p(x) = \left[\dfrac{3}{2}\ln x - \dfrac{5}{4}\right] x^2 e^{-x}$, de donde

   $$y(x) = \left[C_1 + C_2 x + \left(\frac{3}{2}\ln|x| - \frac{5}{4}\right)x^2\right]e^{-x}$$

9. Resolver la ecuación $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$.

   La ecuación característica es $(D-2)(D-1) = 0$, luego, la solución de la ecuación homogénea asociada es

   $$y_h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$

   Para encontrar una solución particular de la ecuación no homogénea debemos utilizar variación de parámetros. La solución particular es de la forma

   $$y_p(x) = u_1(x)e^x + u_2(x)e^{2x}$$

Las funciones $u_1(x)$ y $u_2(x)$ se obtienen resolviendo el sistema

$$\left.\begin{array}{rcrcc} u_1'(x)e^x & + & u_2'(x)e^{2x} & = & 0 \\ u_1'(x)e^x & + & 2u_2'(x)e^{2x} & = & \dfrac{1}{1+e^{-x}} \end{array}\right|$$

Así,

$$\begin{aligned} u_2'(x) &= \frac{e^{-x}}{e^x+1} \Rightarrow u_2(x) = -\frac{1}{e^x} - x + \ln(e^x+1) \\ u_1'(x) &= \frac{-1}{e^x+1} \Rightarrow u_1(x) = -x + \ln(e^x+1) \end{aligned}$$

Luego,

$$y_p(x) = -e^x + \left(e^x + e^{2x}\right)\left(\ln(e^x+1) - x\right)$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación es:

$$y(x) = C_1e^x + C_2e^{2x} - e^x + \left(e^x + e^{2x}\right)\left(\ln(e^x+1) - x\right)$$

10. Resolver la ecuación $y'' + 5y' + 4y = 3 + 8x^2 + 2\cos 2x$.

Resolvemos primero la ecuación homogénea, cuya ecuación característica es

$$D^2 + 5D + 4 = (D+4)(D+1) = 0$$

Luego,

$$y_h(x) = C_1e^{-4x} + C_2e^{-x}$$

Ahora buscamos la solución particular por dos caminos.

Camino 1. Aniquiladores.

Como D^3 aniquila a $8x^2+3$ y D^2+4 aniquila a $2\cos 2x$, debemos usar el aniquilador $L^* = D^3(D^2+4)$. Luego,

$$y^*(x) = y_h(x) + Ax^2 + Bx + C + D\cos 2x + E\,\mathrm{sen}\, 2x$$

Entonces,

$$\begin{aligned} y_p(x) &= Ax^2 + Bx + C + D\cos 2x + E\,\text{sen}\,2x \\ y_p'(x) &= 2Ax + B - 2D\,\text{sen}\,2x + 2E\cos 2x \\ y_p''(x) &= 2A - 4D\cos 2x - 4E\,\text{sen}\,2x \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} y_p'' + 5y_p' + 4y_p &= 2A + 5B + 4C + (10A + 4B)x + 4Ax^2 \\ &\quad +10E\cos 2x - 10D\,\text{sen}\,2x \\ &= 3 + 8x^2 + 2\cos 2x \end{aligned}$$

Igualando,

$$\left.\begin{aligned} 2A + 5B + 4C &= 3 \\ 10A + 4B &= 0 \\ 4A &= 8 \\ 10E &= 2 \\ 10D &= 0 \end{aligned}\right|$$

Así, $D = 0$, $E = \dfrac{1}{5}$, $A = 2$, $B = -5$, $C = 6$ y una solución particular es

$$y_p(x) = 2x^2 - 5x + 6 + \frac{1}{5}\,\text{sen}\,2x$$

Camino 2. Variación de parámetros.

Resolvemos el sistema

$$\left.\begin{array}{rcrcl} \mu_1' e^{-4x} & + & \mu_2' e^{-x} & = & 0 \\ -4\mu_1' e^{-4x} & - & \mu_2' e^{-x} & = & 3 + 8x^2 + 2\cos 2x \end{array}\right|$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \int \left[-e^{4x} - \frac{8}{3}x^2 e^{4x} - \frac{2}{3}e^{4x}\cos 2x\right] dx \\ &= e^{4x}\left(-\frac{1}{3} - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{15}\cos 2x - \frac{1}{15}\,\text{sen}\,2x\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_2 &= \int \left[e^x + \frac{8}{3}x^2e^x + \frac{2}{3}e^x \cos 2x \right] dx \\
&= e^x \left(\frac{8}{3}x^2 - \frac{16}{3}x + \frac{19}{3} + \frac{2}{15}\cos 2x + \frac{4}{15}\operatorname{sen} 2x \right)
\end{aligned}$$

Luego,

$$y_p(x) = 6 - 5x + 2x^2 + \frac{1}{5}\operatorname{sen} 2x$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación es

$$y(x) = C_1e^{-4x} + C_2e^{-x} + 2x^2 - 5x + 6 + \frac{1}{5}\operatorname{sen} 2x$$

11. Resolver la ecuación $y'' - 4y' + 4y = x + e^{2x}$.

La ecuación característica es $(D-2)^2 = 0$, por tanto la solución de la ecuación homogénea asociada es

$$y_h(x) = (C_1 + C_2x)e^{2x}$$

Usaremos el método de aniquiladores para encontrar una solución particular. También es posible hallarla usando variación de parámetros.

Como D^2 aniquila a x y $(D-2)$ aniquila a e^{2x}, obtenemos la ecuación

$$D^2(D-2)^3 = 0$$

cuya solución general es

$$y^* = (C_1 + C_2x + C_3x^2)e^{2x} + C_4 + C_5x$$

Descartando la parte que corresponde a la solución de la homogénea, tenemos que la solución particular es de la forma:

$$y_p(x) = C_3x^2e^{2x} + C_4 + C_5x$$

Derivamos para reemplazar en la ecuación:

$$\begin{aligned}
y_p'(x) &= (2C_3x^2 + 2C_3x)e^{2x} + C_5 \\
y_p''(x) &= (4C_3x^2 + 8C_3x + 2C_3)e^{2x}
\end{aligned}$$

Así,

$$2C_3e^{2x} - 4C_5 + 4C_5x + 4C_4 = x + e^{2x},$$

de donde

$$C_3 = \frac{1}{2}\,,\; C_5 = \frac{1}{4}\,,\; C_4 = \frac{1}{4}.$$

Luego la solución general es,

$$y(x) = \left[C_1 + C_2x + \frac{1}{2}x^2\right]e^{2x} + \frac{1}{4}(x+1)$$

12. Resolver el problema de valor inicial $y^{(iv)} - y''' = x + e^x$, sujeto a las condiciones iniciales $y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$.

Camino 1. La ecuación característica es

$$D^4 - D^3 = D^3(D-1) = 0$$

Por lo tanto, la solución de la ecuación homogénea asociada es

$$y_h(x) = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4e^x$$

Ahora encontraremos la solución particular de la ecuación no homogénea usando el método de aniquiladores. Como D^2 aniquila a x y $(D-1)$ aniquila a e^x, $D^2(D-1)$ aniquila a $x + e^x$.
La ecuación se transforma en $D^5(D-1)^2 = 0$, cuya solución es

$$y^*(x) = A + Bx + Cx^2 + De^x + Ex^3 + Fx^4 + Gxe^x$$

Así, $y_p(x) = Ex^3 + Fx^4 + Gxe^x$.
Derivando, obtenemos

$$\begin{aligned} y_p' &= 3Ex^2 + 4Fx^3 + Ge^x + Gxe^x \\ y_p'' &= 6Ex + 12Fx^2 + 2Ge^x + Gxe^x \\ y_p''' &= 6E + 24Fx + 3Ge^x + Gxe^x \\ y_p^{(iv)} &= 24F + 4Ge^x + Gxe^x \end{aligned}$$

y reemplazando en la ecuación

$$y_p^{(4)} - y_p''' = 24F - 6E + Ge^x - 24Fx = x + e^x$$

Luego, $G = 1$, $E = -\dfrac{1}{6}$ y $F = -\dfrac{1}{24}$ y la solución general es

$$y(x) = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4e^x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{24}x^4 + xe^x$$

Usando las condiciones iniciales tenemos:

$$\left.\begin{array}{lcr} C_1 + C_4 & = & 0 \\ C_2 + C_4 & = & -1 \\ 2C_3 + C_4 & = & -2 \\ C_4 & = & -2 \end{array}\right|$$

de lo que se deduce $C_1 = 2$, $C_2 = 1$, $C_3 = 0$, $C_4 = -2$.

Por lo tanto la solución del problema de valor inicial es

$$y(x) = 2 + x - 2e^x + xe^x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{24}x^4$$

Camino 2. Haciendo la sustitución $u = y'''$, obtenemos la ecuación lineal de primer orden

$$u' - u = x + e^x$$

cuya solución es:

$$u(x) = e^{\int dx}\left[C + \int (x + e^x)e^{-\int dx}dx\right] = e^x(C - xe^{-x} - e^{-x} + x)$$

Luego, $y'''(x) = Ce^x - x - 1 + xe^x$, y como $y'''(0) = 0$, tenemos $C = 1$.

Integrando con respecto a x y utilizando las condiciones iniciales para calcular las constantes, tenemos:

$$\begin{aligned} y''(x) &= xe^x - \frac{x^2}{2} - x \\ y'(x) &= (x-1)e^x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + 1 \\ y(x) &= (x-2)e^x - \frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{6} + x + 2 \end{aligned}$$

13. Determinar la solución general de la ecuación

$$x^4y'' + x^3y' - 4x^2y = 1$$

sabiendo que $y_1 = x^2$ es una solución particular de la ecuación homogénea asociada.

Como la ecuación es de segundo orden, nos basta encontrar una segunda solución l.i. para obtener la solución general de la ecuación homogénea. Escribimos primero la ecuación de manera apropiada

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{4}{x^2}y = \frac{1}{x^4}$$

y usamos la Fórmula de Abel:

$$y_2 = x^2 \int \frac{e^{-\int \frac{dx}{x}}}{x^4} dx = x^2 \cdot \frac{-1}{4x^4} = -\frac{1}{4x^2}$$

Así, la solución general de la ecuación homogénea asociada es

$$y_h(x) = C_1x^2 + \frac{C_2}{x^2}$$

Usamos variación de parámetros para encontrar una solución particular de la forma

$$y_p(x) = \mu_1(x)x^2 + \mu_2(x)\frac{1}{x^2}$$

El sistema a resolver es:

$$\left.\begin{array}{rcrcl} x^2\mu_1' & + & \dfrac{\mu_2'}{x^2} & = & 0 \\ 2x\mu_1' & - & \dfrac{2\mu_2'}{x^3} & = & \dfrac{1}{x^4} \end{array}\right|$$

De aquí,

$$\mu_1' = \frac{1}{4x^5} \Rightarrow \mu_1 = -\frac{1}{16x^4}$$

$$\mu_2' = -\frac{1}{4x} \Rightarrow \mu_2 = -\frac{1}{4}\ln x$$

Así,

$$y_p(x) = -\frac{1}{16x^2} - \frac{1}{4x^2}\ln x$$

Finalmente, la solución general de la ecuación es:

$$y(x) = C_1x^2 + \frac{C_2}{x^2} - \frac{1}{4x^2}\left[\frac{1}{4} + \ln x\right]$$

14. Resolver la ecuación $(x^2+1)y'' - 2xy' + 2y = 6(x^2+1)^2$.

La ecuación anterior la podemos escribir como

$$y'' - \frac{2x}{x^2+1}y' + \frac{2y}{x^2+1} = 6(x^2+1)$$

Claramente, $y_1(x) = x$ es solución de la ecuación homogénea asociada. Por la fórmula de Abel sabemos que una segunda solución l.i. de la ecuación homogénea asociada está dada por:

$$y_2(x) = x\int \frac{e^{\int \frac{2x}{x^2+1}dx}}{x^2}\,dx = x\left(x - \frac{1}{x}\right) = x^2 - 1$$

Luego, la solución general de la ecuación homogénea asociada es:

$$y_h(x) = C_1x + C_2(x^2-1)$$

Ahora, usamos variación de parámetros para encontrar la solución particular de la ecuación no homogénea, que es de la forma

$$y_p(x) = u_1(x)x + u_2(x)(x^2-1)$$

Resolviendo el sistema

$$\left.\begin{array}{lcllcl} u_1'(x)x & + & u_2'(x)(x^2-1) & = & 0 \\ u_1'(x) & + & 2u_2'(x)x & = & 6(x^2+1) \end{array}\right|$$

obtenemos

$$\begin{aligned} u_2'(x) &= 6x \quad \Rightarrow \quad u_2(x) = 3x^2 \\ u_1'(x) &= 6-6x^2 \quad \Rightarrow \quad u_1(x) = 6x - 2x^3 \end{aligned}$$

Así, la solución general de la ecuación no homogénea es:

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1x + C_2(x^2-1) + (6x-2x^3)x + 3x^2(x^2-1) \\ &= C_1x + C_2(x^2-1) + 3x^2 + x^4 \end{aligned}$$

15. Resolver la ecuación $x^3y''' + 4x^2y'' - 2y = 0$ con $x > 0$.

La sustitución $x = e^t$ transforma esta ecuación de Euler en la ecuación lineal con coeficientes constantes

$$(D(D-1)(D-2) + 4D(D-1) - 2)\,(y(t)) = 0$$

Factorizando obtenemos $(D^2-2)(D+1) = 0$, por lo que la solución es

$$y(t) = C_1e^{\sqrt{2}\,t} + C_2e^{-\sqrt{2}\,t} + C_3e^{-t}$$

Reemplazando la variable t por $\ln x$ obtenemos la solución general de la ecuación de Euler

$$y(x) = C_1x^{\sqrt{2}} + C_2x^{-\sqrt{2}} + C_3x^{-1}$$

16. Resolver el problema de valor inicial $x^3y''' + 4x^2y'' + xy' - y = 0\,,\ x > 0$ con $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$, $y''(1) = -1$.

Como se trata de una ecuación de Euler, usamos la sustitución $x = e^t$ para obtener una ecuación lineal cuya ecuación característica es

$$\begin{aligned} D(D-1)(D-2) + 4D(D-1) + D - 1 &= (D-1)(D^2+2D+1) \\ &= (D-1)(D+1)^2 = 0 \end{aligned}$$

Así, la solución de la ecuación homogénea asociada es:

$$y(t) = C_1e^t + (C_2 + C_3t)e^{-t}$$

Reemplazando $t = \ln x$ obtenemos la solución general

$$y(x) = C_1x + (C_2 + C_3\ln x)x^{-1}$$

Ahora derivamos para calcular las constantes utilizando las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} y'(x) &= C_1 - C_2x^{-2} - C_3x^{-2}\ln x + C_3x^{-2} \\ y''(x) &= 2C_2x^{-3} + 2C_3x^{-3}\ln x - 3C_3x^{-3} \end{aligned}$$

Obtenemos el sistema

$$\left.\begin{array}{rcr} C_1 + C_2 &=& 1 \\ C_1 - C_2 + C_3 &=& 0 \\ 2C_2 - 3C_3 &=& -1 \end{array}\right|$$

Así, $C_3 = 1$, $C_2 = 1$, $C_1 = 0$.

Luego, la solución única del problema de valor inicial es

$$y(x) = (1 + \ln x)x^{-1}$$

17. Resolver la ecuación $x^3y'' - x^2y' + 3xy = 16\ln x$.

Claramente $x > 0$. Escribimos la ecuación como la ecuación de Euler

$$x^2y'' - xy' + 3y = \frac{16}{x}\ln x$$

La sustitución $x = e^t$ nos convierte esta ecuación en la ecuación lineal no homogénea:

$$(D(D-1) - D + 3)(y(t)) = 16te^{-t}$$

Ahora, $D(D-1) - D + 3 = D^2 - 2D + 3 = 0$, de donde $D = 1 \pm \sqrt{2}\,i$.

Luego, la solución de la homogénea (en la variable t) es

$$y_h(t) = e^t\left(C_1\cos\sqrt{2}\,t + C_2\operatorname{sen}\sqrt{2}\,t\right)$$

La solución particular es de la forma $y_p(t) = (At + B)e^{-t}$.

Derivando y reemplazando en la ecuación,

$$\begin{aligned} y_p'(t) &= (-At + A - B)e^{-t} \\ y_p''(t) &= (At - 2A + B)e^{-t} \end{aligned}$$

Reemplazando, $(6At - 4A + 6B)e^{-t} = 16te^{-t}$, por lo tanto $A = \frac{8}{3}$ y $B = \frac{16}{9}$. Luego,

$$y(t) = e^t \left[C_1 \cos \sqrt{2}\, t + C_2 \operatorname{sen} \sqrt{2}\, t \right] + \left[\frac{8t}{3} + \frac{16}{9} \right] e^{-t}$$

y reemplazando $t = \ln x$ obtenemos la solución general de la ecuación dada:

$$y(x) = x \left[C_1 \cos \left(\sqrt{2} \ln x \right) + C_2 \operatorname{sen} \left(\sqrt{2} \ln x \right) \right] + \frac{8}{9x}(3 \ln x + 2)$$

18. Resolver la ecuación $x^2 y'' - 3xy' + 13y = x^2 \sec(3 \ln x)$, $x \in (e^{-\pi/6}, e^{\pi/6})$.

Nuevamente una ecuación de Euler y $x > 0$. Resolvemos primero la ecuación homogénea:

$$\begin{aligned} D(D-1) - 3D + 13 &= D^2 - 4D + 13 \\ &= (D - 2 + 3i)(D - 2 - 3i) \end{aligned}$$

Luego,

$$y_h(t) = e^{2t}(C_1 \cos 3t + C_2 \operatorname{sen} 3t)$$

es decir:

$$y_h(x) = x^2(C_1 \cos(3 \ln\, x) + C_2 \operatorname{sen}(3\, \ln x))$$

Para encontrar la solución particular tenemos dos caminos:

Camino 1. Seguir en la variable t.

La ecuación quedó de la forma $y'' - 4y' + 13\, y = e^{2t} \sec 3t$ por lo que debemos usar variación de parámetros. Para ello, resolvemos el sistema

$$\left. \begin{aligned} e^{2t}(\cos 3t\, u_1' + \operatorname{sen} 3t\, u_2') &= 0 \\ e^{2t}(2\cos 3t - 3 \operatorname{sen} 3t)u_1' + e^{2t}(3\cos 3t + 2\operatorname{sen} 3t)u_2' &= e^{2t} \sec 3t \end{aligned} \right|$$

o equivalentemente

$$\left.\begin{array}{rcl} \cos 3t u_1' + \operatorname{sen} 3t u_2' & = & 0 \\ 3\cos 3t u_1' - 3\operatorname{sen} 3t u_2' & = & \sec 3t \end{array}\right|$$

Así,

$$\begin{array}{rcl} u_2' = \dfrac{1}{3} & \Rightarrow & u_2 = \dfrac{1}{3}t \\ u_1' = -\dfrac{1}{3}\tan 3t & \Rightarrow & u_1 = \dfrac{1}{9}\ln(\cos 3t) \end{array}$$

Luego, $y_p(t) = \dfrac{e^{2t}}{9}(\cos 3t\ \ln(\cos 3t) + 3t \operatorname{sen} 3t)$, de donde

$$y_p(x) = \frac{x^2}{9}\left[\cos(3\ln x)\ln(\cos(3\ln x)) + 3\ln x \operatorname{sen}(3\ln x)\right]$$

Finalmente la solución es

$$y(x) = x^2\left[(C_1 + \frac{1}{3}\ln(\cos(3\ln\ x)))\cos(3\ln\ x) + (C_2 + \ln\ x)\operatorname{sen}(3\ln x)\right]$$

Camino 2. Trabajar con la variable x.

$$x^2y'' - 3xy' + 13y = x^2\sec(3\ln x)$$

Primero dividimos por x^2 y obtenemos $y'' - \dfrac{3}{x}y' + \dfrac{13}{x^2}y = \sec(3\ln x)$.

Ahora hacemos variación de parámetros:

$$\left.\begin{array}{lcc} x^2\cos(3\ln x)u_1' + x^2\operatorname{sen}(3\ln x)u_2' & = & 0 \\ & & \\ (2x\cos(3\ln x) - 3x\operatorname{sen}(3\ln x))u_1' \quad + & & \\ (2x\operatorname{sen}(3\ln x) + 3x\cos(3\ln x))u_2' & = & \sec(3\ln x) \end{array}\right|$$

De la primera ecuación tenemos

$$u_1' = -\tan(3\ln x)\,u_2'$$

de donde

$$(3x\,\text{sen}(3\ln x)\tan(3\ln x) + 3x\cos(3\ln x))u_2' = \sec(3\ln x),$$

es decir,

$$\begin{aligned} u_2' &= \frac{1}{3x} \quad \Rightarrow \quad u_2 = \frac{1}{3}\ln x \\ u_1' &= -\frac{\tan(3\ln x)}{3x} \quad \Rightarrow \quad u_1 = \frac{1}{9}\ln(\cos(3\ln x)) \end{aligned}$$

Luego,

$$y_p(x) = \frac{x^2}{9}\left[\ln(\cos(3\ln\,x))\cos(3\ln\,x) + 3\ln x\;\text{sen}(3\ln x)\right]$$

19. Resolver la ecuación $x^3y''' + xy' - y = x\ln x$.

Ecuación de Euler. Claramente $x > 0$. Resolvemos primero la ecuación homogénea. La sustitución $x = e^t$ nos lleva a:

$$D(D-1)(D-2) + D - 1 = (D-1)^3 = 0$$

Luego, $y_h(t) = (C_1 + C_2t + C_3t^2)e^t$, es decir:

$$y_h(x) = (C_1 + C_2\ln x + C_3\ln^2 x)x$$

Ahora, para encontrar la solución particular, tenemos al menos tres caminos.

Método 1. Aniquiladores (en la variable t).

En la variable t, la ecuación es: $y''' - 3y'' + 3y' - y = te^t$.

$$(D-1)^2(D-1)^3 = 0 \Rightarrow y^*(t) = (C_1 + C_2t + C_3t^2 + C_4t^3 + C_5t^4)e^t$$

Así

$$y_p(t) = (C_4t^3 + C_5t^4)e^t$$

Derivando y reemplazando en la ecuación:

$$\begin{aligned}
y_p'(t) &= (3C_4t^2 + (C_4 + 4C_5)t^3 + C_5t^4)e^t \\
y_p''(t) &= (6C_4t + (6C_4 + 12C_5)t^2 + (C_4 + 8C_5)t^3 + C_5t^4)e^t \\
y_p'''(t) &= [6C_4 + (18C_4 + 24C_5)t + (9C_4 + 36C_5)t^2]e^t \\
&\quad + [(C_4 + 12C_5)t^3 + C_5t^4]e^t
\end{aligned}$$

Ahora, $(6C_4 + 24C_5t)e^t = te^t \Rightarrow C_4 = 0,\ C_5 = \dfrac{1}{24}$.

Luego, $y(t) = \left[C_1 + C_2t + C_3t^2 + \dfrac{1}{24}t^4\right] e^t$, de donde:

$$y(x) = \left[C_1 + C_2 \ln x + C_3 \ln^2 x + \frac{1}{24} \ln^4 x\right] x$$

Método 2. Variación de parámetros (usando la variable t).

El sistema

$$\left.\begin{aligned}
u_1'e^t + u_2'te^t + u_3't^2e^t &= 0 \\
u_1'e^t + u_2'(t+1)e^t + u_3'(t^2 + 2t)e^t &= 0 \\
u_1'e^t + u_2'(t+2)e^t + u_3'(t^2 + 4t + 2)e^t &= te^t
\end{aligned}\right|$$

es equivalente a

$$\left.\begin{aligned}
u_1' + tu_2' + t^2u_3' &= 0 \\
u_2' + 2tu_3' &= 0 \\
2u_3' &= t
\end{aligned}\right|$$

de donde

$$u_3 = \frac{t^2}{4},\ u_2 = -\frac{t^3}{3}\ u_1 = \frac{t^4}{8}$$

Luego, como antes,

$$y_p(t) = \left[\frac{t^4}{8} - \frac{t^4}{3} + \frac{t^4}{4}\right] e^t = \frac{t^4e^t}{24}$$

Camino 3. Variación de parámetros (usando la variable x).

Dividiendo, obtenemos la ecuación

$$y''' + \frac{1}{x^2}y' - \frac{1}{x^3}y = \frac{1}{x^2}\ln x$$

que tiene una solución particular de la forma

$$y_p(x) = xu_1(x) + x\ln x u_2(x) + x\ln^2 x U_3(x)$$

El sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} xu_1' + x\ln x\, u_2' + x\ln^2 x\, u_3' &=& 0 \\ u_1' + (\ln x + 1)u_2' + (\ln^2 x + 2\ln x)u_3' &=& 0 \\ \dfrac{1}{x}u_2' + \dfrac{2\ln x + 2}{x}\, u_3' &=& \dfrac{1}{x^2}\ln x \end{array}\right|$$

es equivalente a

$$\left.\begin{array}{rcl} u_1' + \ln x\, u_2' + \ln^2 x\, u_3' &=& 0 \\ u_2' + 2\ln x u_3' &=& 0 \\ 2u_3' &=& \dfrac{\ln x}{x} \end{array}\right|$$

De aquí,

$$\begin{array}{rcl} u_3' = \dfrac{1}{2x}\ln x & \Rightarrow & u_3 = \dfrac{1}{4}\ln^2 x \\ u_2' = -\dfrac{1}{x}\ln^2 x & \Rightarrow & u_2 = -\dfrac{1}{3}\ln^3 x \\ u_1' = \dfrac{1}{2x}\ln^3 x & \Rightarrow & u_1 = \dfrac{1}{8}\ln^4 x \end{array}$$

Por lo tanto, $y_p(x) = \dfrac{x}{24}\ln^4 x$, como esperábamos.

20. Resolver la ecuación $x^2y'' - xy' - 3y = x^2 + \ln x$.

Ecuación de Euler no homogénea. Usamos la sustitución $x = e^t$, transformando la ecuación en:

$$(D^2 - 2D - 3)(y(t)) = e^{2t} + t$$

La solución de la ecuación homogénea asociada es:

$$y_h(t) = Ae^{3t} + Be^{-t}$$

Como $(D-2)$ aniquila a e^{2t} y D^2 aniquila a t, el operador $D^2(D-2)$ aniquila a $e^{2t} + t$. Obtenemos:

$$D^2(D-2)(D-3)(D+1) = 0$$

cuya solución general es:

$$y^*(t) = Ae^{3t} + Be^{-t} + Ce^{2t} + D + Et.$$

Así, la solución particular de la ecuación no homogénea es de la forma:

$$y_p(t) = Ce^{2t} + D + Et.$$

Reemplazando y_p en la ecuación se obtienen los valores:

$$C = -\frac{1}{3};\ D = \frac{2}{9};\ E = -\frac{1}{3}$$

Luego

$$y(t) = Ae^{3t} + Be^{-t} - \frac{1}{9}(3e^{2t} - 2 + 3t).$$

Finalmente, reemplazando t por $\ln x$, la solución general de la ecuación dada es:

$$y(x) = Ax^3 + \frac{B}{x} - \frac{1}{9}(3x^2 - 2 + 3\ln x).$$

21. Resolver la ecuación $y^{(7)} - y^{(3)} = 12x$

Lo más práctico es hacer $u = y^{(3)}$ y resolver primero la ecuación

$$u^{(4)} - u = 12x$$

Entonces
$$u_h(x) = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3\cos x + C_4 \operatorname{sen} x$$

$u_p(x) = Ax + B \Rightarrow A = -12,\ B = 0.$

$$u(x) = y^{(3)} = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3\cos x + C_4\operatorname{sen} x - 12x$$

$y''(x) = C_1e^x - C_2e^{-x} - C_3\operatorname{sen} x + C_4\cos x - 6x^2 + C$
$y'(x) = C_1e^x + C_2e^{-x} - C_3\cos x - C_4\operatorname{sen} x - 2x^3 + Cx + C_6$
$y(x) = C_1e^x - C_2e^{-x} + C_3\operatorname{sen} x - C_4\cos x - \frac{1}{2}x^4 + C_5x^2 + C_6x + C_7$

22. Resolver la ecuación : $y'''y' = y''^2$

Hacemos la sustitución $y'' = uy'$.

Entonces,
$$y''' = u'y' + uy'' = (u' + u^2)y'$$

Luego, $(u' + u^2)y'^2 = y'^2$, de donde $y' = 0 \vee u' + u^2 = 0$.
Así,

$$\begin{aligned} y = C \ \vee\ \ u^{-1} = x + C \ \Rightarrow\ u = \frac{y''}{y'} &= \frac{1}{x+C} \\ \Rightarrow\ \ln y' &= \ln(x+C) + C_2 \\ \Rightarrow\ y(x) &= \int (C_2x + C_1)\,dx \\ \Rightarrow\ y(x) &= C_2x^2 + C_1x + C_3 \end{aligned}$$

23. Resolver la ecuación $1+y'^2=2yy''$

Camino 1. Hacemos la sustitución $y'=p$.

Usando regla de la cadena, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dp}\dfrac{dp}{dx}$, implica $p=y''\dfrac{dy}{dp}$

Reemplazando obtenemos la ecuación en variables separables :

$$1+p^2=2py\frac{dp}{dy}$$

Luego,

$$\ln y=\ln(1+p^2)+C\Rightarrow y=C(1+y'^2)\Rightarrow y'=\pm\sqrt{C_1y-1}$$

Resolviendo

$$\frac{dy}{\sqrt{C_1y-1}}=\pm dx\ \Rightarrow\ \frac{2}{C_1}\sqrt{C_1y-1}\ =\pm x+C_2,$$

Así la solución es

$$y(x)=\frac{C_1}{4}(\pm x+C_2)^{\,2}+\frac{1}{C_1}$$

Camino 2. Derivando.

$$2y'y''=2y'y''+2yy'''\ \Rightarrow\ 2yy'''=0\ \Rightarrow\ y=0\ \vee y'''=0.$$

Pero $y=0$ no es solución, luego $y(x)=\dfrac{C_1}{2}x^2+C_2x+C_3$.

Reemplazando en la ecuación:

$$1+(C_1x+C_2)^2=2(\frac{C_1}{2}x^2+C_2x+C_3)C_1$$

Luego, $1+C_2^2=2C_1C_3$, de donde $C_3=\dfrac{1+C_2^2}{2C_1}$.

Así, la solución general es:

$$y(x)=\frac{C_1}{2}x^2+C_2x+\frac{1+C_2^2}{2C_1}.$$

24. Resolver la ecuación $xy'' - y' \ln \frac{y'}{x} = 0$

Claramente $x \neq 0$. Podemos escribir la ecuación como:

$$y'' = \frac{y'}{x} \ln \frac{y'}{x}$$

Camino 1. Hagamos la sustitución $u = \ln \frac{y'}{x}$.
Entonces $\frac{y'}{x} = e^u \;\wedge\; u' = \frac{xy'' - y'}{xy'}$, de donde $y'' = xu'e^u + e^u$.
Reemplazando:

$$\begin{aligned} (xu' + 1)e^u = ue^u \quad &\Rightarrow \quad \frac{du}{u-1} = \frac{dx}{x} \\ &\Rightarrow \quad \ln(u-1) = \ln x + C \end{aligned}$$

Luego, $\ln \frac{y'}{x} = Cx + 1$, de donde $\frac{y'}{x} = e^{Cx+1}$, es decir:

$$y(x) = \frac{1}{C_1} e^{C_1 x + 1}(x - \frac{1}{C_1}) + C_2$$

Camino 2. Hagamos la sustitución $u = \frac{y'}{x}$.
Entonces $u' = \frac{xy'' - y'}{x^2}$, de donde $y'' = xu' + u$.
Reemplazando:

$$\begin{aligned} xu' + u = u \ln u \quad &\Rightarrow \quad \frac{du}{u(\ln u - 1)} = \frac{dx}{x} \\ &\Rightarrow \quad \ln(\ln u - 1) = \ln x + C \end{aligned}$$

Luego, $\ln u = Cx + 1$, de donde $\frac{y'}{x} = e^{C_1 x + 1}$, es decir:

$$y(x) = \frac{1}{C_1} e^{C_1 x + 1}(x - \frac{1}{C_1}) + C_2$$

25. Resolver la ecuación $y''' \cos x + y'' \operatorname{sen} x = 1$.

Camino 1. Usaremos la sustitución $u(x) = y''(x)$.

Entonces, la ecuación se convierte en: $u' \cos\, x + u \operatorname{sen} x = 1$.

Ahora, $u' \cos x + u \operatorname{sen} x = 1$ es una ecuación lineal, de donde

$$\begin{aligned} u(x) &= e^{-\int \tan x\, dx}\left(\int \sec\, x\, e^{\int \tan x\, dx} dx + C\right) \\ &= e^{\ln|\cos\, x|}\left(\int \sec^2 x\, dx + C\right). \end{aligned}$$

Luego, $u(x) = c_1 \cos x + \operatorname{sen} x$.

Integrando dos veces, obtenemos, $y'(x) = c_1 \operatorname{sen} x - \cos x + C_2$, de donde:

$$y(x) = -C_1 \cos x + C_2 x + C_3 - \operatorname{sen} x$$

Camino 2. Resolvemos primero la ecuación homogénea y le sumamos una solución particular:

$$y''' \cos x + y'' \operatorname{sen} x = 0 \;\Rightarrow\; \ln|y''| = \ln|\cos x| + C$$

Luego, $y'' = C_1 \cos x$, de donde

$$y_h(x) = -C_1 \cos x + C_2 x + C_3$$

Por simple inspección podemos ver que $y_p = -\operatorname{sen} x$ es una solución particular de la ecuación.

Luego,

$$y(x) = -C_1 \cos x + C_2 x + C_3 - \operatorname{sen} x$$

Camino 3. En este caso, también podemos encontrar por ensayo y error las tres soluciones l.i. de la ecuación homogénea asociada $y_1 = 1, y_2 = x$ e $y_3 = -\cos x$, y una solución particular $y_p = -\operatorname{sen} x$ para obtener la misma solución anterior.

26. Resolver la ecuación $4x^4y'' + 8x^3y' + y = \tan\dfrac{1}{2x}$

En este caso usamos la sustitución $x = \dfrac{1}{t}$.

Entonces, $\dfrac{dt}{dx} = -t^2$, de donde:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = -t^2\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}(-t^2\frac{dy}{dt}) \cdot \frac{dt}{dx} = 2t^3\frac{dy}{dt} + t^4\frac{d^2y}{dt^2}$$

Así la ecuación se transforma en $\dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{y}{4} = \dfrac{1}{4}\tan\dfrac{t}{2}$

La solución de la ecuación homogénea asociada es:

$$y_h(t) = A\cos\frac{t}{2} + B\operatorname{sen}\frac{t}{2}$$

Ahora buscamos la solución particular por dos métodos.

Camino 1. Variación de parámetros en la variable t.

Debemos resolver el sistema:

$$\begin{array}{rcl|} A'(t)\cos\frac{t}{2} + B'(t)\operatorname{sen}\frac{t}{2} & = & 0 \\ -\frac{1}{2}A'(t)\operatorname{sen}\frac{t}{2} + \frac{1}{2}B'(t)\cos\frac{t}{2} & = & \frac{1}{4}\tan\frac{t}{2} \\ \hline \end{array}$$

de donde:

$$B(t) = \int \frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{t}{2}\,dt = -\cos\frac{t}{2}$$

y

$$A(t) = -\int \left[\frac{1}{2}\sec\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{t}{2}\right]dt = -\ln(\sec\frac{t}{2} + \tan\frac{t}{2}) + \operatorname{sen}\frac{t}{2}$$

Luego, la solución general de la ecuación es

$$y(t) = A\cos\frac{t}{2} + B\,\mathrm{sen}\,\frac{t}{2} - \ln(\sec\frac{t}{2} + \tan\frac{t}{2})\cos\frac{t}{2}$$

Reemplazando la variable t por $\frac{1}{x}$, obtenemos la solución de la ecuación original en la variable x

$$y(x) = A\cos\frac{1}{2x} + B\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{2x} - \ln(\sec\frac{1}{2x} + \tan\frac{1}{2x})\cos\frac{1}{2x}$$

Camino 2. Variación de parámetros en la variable x.

Debemos resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{rcl} A'(x)\cos\frac{1}{2x} + B'(x)\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{2x} & = & 0 \\ A'(x)\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{2x} - B'(x)\cos\frac{1}{2x} & = & \frac{1}{2x^2}\tan\frac{1}{2x} \end{array}\right|$$

de donde:

$$\begin{aligned} B(x) &= -\int \frac{1}{2x^2}\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{2x}\,dx = -\cos\frac{1}{2x} \\ A'(x) &= \int \left[\frac{1}{2x^2}\sec\frac{1}{2x} - \frac{1}{2x^2}\cos\frac{1}{2x}\right] dx \\ &= -\ln(\sec\frac{1}{2x} + \tan\frac{1}{2x}) + \mathrm{sen}\,\frac{1}{2x} \end{aligned}$$

Luego, la solución general de la ecuación es:

$$y(x) = A\cos\frac{1}{2x} + B\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{2x} - \ln(\sec\frac{1}{2x} + \tan\frac{1}{2x})\cos\frac{1}{2x}$$

27. Resolver la ecuación:

$$4xy'' + (2 - 8\sqrt{x})y' - 5y = (3\sqrt{x} + 2)e^{-\sqrt{x}}, \quad x > 0$$

Usando la sustitución $x = t^2$, tenemos $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{2t}$, de donde

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} &&= \frac{1}{2t} \cdot \frac{dy}{dt} \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2t} \cdot \frac{dy}{dt}\right) \cdot \frac{dt}{dx} &&= -\frac{1}{4t^3}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{4t^2}\frac{d^2y}{dt^2} \end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación tenemos:

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} - 5y = (3t + 2)e^{-t}$$

Como $(D+1)^2$ aniquila a $(3t+2)e^{-t}$ la ecuación se transforma en:

$$(D+1)^3(D-5) = 0,$$

cuya solución es

$$y(t) = Ae^{5t} + Be^{-t} + Cte^{-t} + Dt^2e^{-t}$$

Así,

$$\begin{aligned} y_p(t) &= Cte^{-t} + Dt^2e^{-t} \\ y_p'(t) &= Ce^{-t} + (2D - C)te^{-t} - Dt^2e^{-t} \\ y_p''(t) &= (2D - 2C)e^{-t} - (4D - C)\, te^{-t} + Dt^2e^{-t} \end{aligned}$$

de donde obtenemos $C = -\dfrac{5}{12} \quad D = -\dfrac{1}{4}$.

La solución general de la ecuación es:

$$y(x) = Ae^{5\sqrt{x}} + Be^{-\sqrt{x}} - \frac{5}{12}\sqrt{x}e^{-\sqrt{x}} - \frac{1}{4}xe^{-\sqrt{x}}$$

28. Considere el problema de valor inicial

$$y'' + \frac{2}{x}y' + \frac{1}{x^4}y = \frac{1}{x^4}\cos\frac{1}{x}, \;\; y\left(\frac{2}{\pi}\right) = \pi, \;\; y'\left(\frac{2}{\pi}\right) = 0$$

Demuestre que la sustitución $u = \dfrac{1}{x}$ convierte esta ecuación en una ecuación de coeficientes constantes y úsela para resolver el problema dado.

De la sustitución $u = \dfrac{1}{x}$ se tiene

$$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{x^2} = -u^2$$

Usando regla de la cadena

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = -u^2\frac{dy}{du}$$

Ahora, la segunda derivada es

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{du}\left(-u^2\frac{dy}{du}\right) \cdot -u^2 = \left[2u\frac{dy}{du} + u^2\frac{d^2y}{du^2}\right]u^2$$

Reemplazando en la ecuación:

$$\begin{aligned} \left[2u\frac{dy}{du} + u^2\frac{d^2y}{du^2}\right]u^2 - 2u^3\frac{dy}{du} + +u^4y &= u^4\cos u \\ (D^2+1)y &= \cos u \end{aligned}$$

La solución de la ecuación homogénea asociada es:

$$y_h(u) = C_1\cos u + C_2 \operatorname{sen} u$$

Como el aniquilador de $\cos u$ es $D^2 + 1$, tenemos que la solución particular es de la forma:

$$y_p(u) = Au\cos u + Bu \operatorname{sen} u$$

Derivando y reemplazando en la ecuación tenemos

$$\begin{aligned}
y'_p(u) &= (A + Bu)\cos u + (-Au + B)\operatorname{sen} u \\
y''_p(u) &= (B - Au + B)\cos u + (-A - Bu - A)\operatorname{sen} u \\
y''_p + y_p &= 2B\cos u - 2A\operatorname{sen} u = \cos u
\end{aligned}$$

De aquí, $B = \dfrac{1}{2}$ y $A = 0$.
Luego, $y_p(u) = \dfrac{1}{2}u\operatorname{sen} u$, de donde

$$y(u) = C_1\cos u + C_2\operatorname{sen} u + \frac{1}{2}u\operatorname{sen} u$$

Volviendo a la variable original, la solución general de la ecuación es

$$y(x) = C_1\cos\frac{1}{x} + C_2\operatorname{sen}\frac{1}{x} + \frac{1}{2x}\operatorname{sen}\frac{1}{x}$$

Ahora debemos encontrar los valores de las constantes para el problema de valor inicial. Puesto que la derivada $y'(u)$ es más simple que $y'(x)$, usaremos la primera con las condiciones iniciales en el punto $u = \dfrac{\pi}{2}$. Entonces,

$$y'(u) = -C_1\operatorname{sen} u + C_2\cos u + \frac{1}{2}u\cos u + \frac{1}{2}\operatorname{sen} u$$

y reemplazando en las condiciones iniciales

$$\left.\begin{aligned}
\pi &= C_2 + \frac{\pi}{4} \\
0 &= -C_1 + \frac{1}{2}
\end{aligned}\right|$$

Luego, $C_1 = \dfrac{1}{2}$ y $C_2 = \dfrac{3\pi}{4}$ y la solución del problema de valor inicial es:

$$y(x) = \frac{1}{2}\cos\frac{1}{x} + \frac{3\pi}{4}\operatorname{sen}\frac{1}{x} + \frac{1}{2x}\operatorname{sen}\frac{1}{x}$$

29. Un circuito RLC en serie tiene una fueza electromotriz dada por la función $E(t) = 100 \operatorname{sen} 10t$ *Volts*, un resistor de 7 *Ohms*, un inductor de 1 *Henry* y un capacitor de 0.1 *Farad*. Si la corriente inicial y la carga inicial son cero, determinar la corriente del circuito.

    La ecuación diferencial que modela el problema está dada por

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} = E(t)$$

donde $I = \dfrac{dQ}{dt}$.

Reemplazando los valores tenemos:

$$I'(t) + 7\,I(t) + 10Q = 100 \operatorname{sen} 10t$$

Derivando, obtenemos la ecuación lineal de segundo orden :

$$I'' + 7\,I' + 10I = 1000 \cos 10t$$

La solución de la ecuación homogénea es:

$$I_h(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-5t}$$

Encontramos una solución particular de esta ecuación de la forma

$$I_p(t) = A \cos 10t + B \operatorname{sen} 10t$$

usando el aniquilador $D^2 + 100$:

$$I_p(t) = \frac{70}{13} \operatorname{sen} 10t - \frac{90}{13} \cos 10t$$

Así,

$$I(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-5t} + \frac{70}{13} \operatorname{sen} 10t - \frac{90}{13} \cos 10t$$

Como las condiciones iniciales son $I(0) = Q(0) = 0$, se tiene:

$$I'(0) + 7I(0) + 10Q(0) = 100 \operatorname{sen} 0 \Rightarrow I'(0) = 0$$

Obtenemos así :

$$\begin{array}{lllllll} 0 & = & I(0) & = & C_1 + C_2 - \dfrac{90}{13} & \Rightarrow & C_1 + C_2 & = & \dfrac{90}{13} \\ 0 & = & I'(0) & = & -2C_1 - 5C_2 + \dfrac{700}{13} & \Rightarrow & 2C_1 + 5C_2 & = & \dfrac{700}{13} \end{array}$$

lo que implica $C_2 = \dfrac{610}{39}, \quad C_1 = \dfrac{340}{39}$.

Por lo tanto:

$$I(t) = \frac{340}{39}e^{-2t} + \frac{610}{39}e^{-5t} + \frac{70}{13}\operatorname{sen} 10t - \frac{90}{13}\cos 10t$$

30. Un paracaidista cuyo peso es de 80 kg. se deja caer de un helicóptero a cierta altura. Suponemos que cae bajo la influencia de una fuerza de gravedad constante y que la resistencia del aire es proporcional a la velocidad del paracaidista. La constante de proporcionalidad es 10 kg/seg. cuando el paracaídas está cerrado y 100 kg/seg. cuando el paracaídas está abierto. Si el paracaídas se abre 1 m. después que el paracaidista abandona el helicóptero, determine la altura del paracaidista en cualquier instante t.

    La ecuación del movimiento de una partícula es $Mx'' = F$ donde M es la masa y F es la suma de las fuerzas que actúan sobre la partícula.

    Sea $x(t)$ la distancia al helicóptero en un instante t. Luego, la ecuación del movimiento está dada por:

    $$80x'' = 80 \cdot 9,8 - 10x'$$

    es decir,

    $$x'' + \frac{x'}{8} = 9,8,$$

    Además, sabemos que la velocidad v está dada por $x' = v$, luego la ecuación diferencial es:

    $$v' + \frac{v}{8} = 9,8$$

cuya solución es $v = 78,4 + Ce^{-\frac{t}{8}}$.

Como la velocidad en el instante $t = 0$ es 0 se tiene $C = -78,4$.

Reemplazando C y v obtenemos la ecuación de primer orden

$$x' = 78,4(1 - e^{-\frac{t}{8}})$$

Resolviendo nuevamente esta ecuación y considerando que $x(0) = 0$, tenemos:

$$x(t) = 78,4t + 627,2(e^{-\frac{t}{8}} - 1)$$

Luego, en el primer minuto el paracaidista ha caído aproximadamente 4089,15 mts.

Ahora la ecuación diferencial cuando el paracaídas se abre está dada por:

$$x'' + \frac{5x'}{4} = 9,8$$

Reemplazando x' por v se tiene que: $v' + \dfrac{5v}{4} = 9,8$.

Resolviendo la ecuación y dado que la velocidad inicial es aproximadamente $78,4$ tenemos:

$$v(t) = 7,84 + 70,56e^{-\frac{5t}{4}}$$

de donde:

$$x(t) = 7,84t - 56,448\,e^{-\frac{5t}{4}} + C.$$

Como $x(0) \approx 4089,15,$ tenemos que:

$$x(t) = 7,84t - 56,448e^{-\frac{5t}{4}} + 4145,598.$$

31. Hallar la solución general de la ecuación diferencial

$$(1-x^2)y'' - xy' + 4y = 0$$

en términos de series de potencias:

Si $y(x) = \sum_0^\infty c_n x^n$, tenemos que:

$$y'(x) = \sum_1^\infty n c_n x^{n-1} \quad , \quad y''(x) = \sum_2^\infty n(n-1) c_n x^{n-2}$$

Reemplazando en la ecuación :

$$\begin{aligned}
&(1-x^2)y'' - xy' + 4y = \\
&= \sum_2^\infty n(n-1)c_n x^{n-2} - \sum_2^\infty n(n-1)c_n x^n - \sum_1^\infty n c_n x^n + \sum_0^\infty 4 c_n x^n \\
&= \sum_0^\infty (n+2)(n+1)c_{n+2} x^n - \sum_2^\infty n(n-1)c_n x^n - \sum_1^\infty n c_n x^n + \sum_0^\infty 4 c_n x^n \\
&= \sum_2^\infty \left[(n+2)(n+1)c_{n+2} - (n^2-4)c_n\right] x^n + 2c_2 + 4c_0 + (6c_3 + 3c_1)x
\end{aligned}$$

Así,

$$c_2 = -2c_0, \quad c_3 = -\frac{1}{2}c_1, \quad \ldots, c_{n+2} = \frac{n-2}{n+1}c_n, \quad \text{para} \quad n \geq 2,$$

de donde

$$c_4 = 0, \quad c_{2n} = 0, \quad n \geq 2$$

$$c_5 = -\frac{1}{2\cdot 4}c_1, \quad c_7 = -\frac{3}{2\cdot 4\cdot 6}c_1, \quad c_9 = -\frac{3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}c_1, \ldots,$$

$$c_{2n-1} = -\frac{3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-5)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n-2)}c_1$$

Por lo tanto,

$$y(x) = c_0(1-2x^2) + c_1\left[x - \frac{1}{2}x^3 - \sum_3^\infty \frac{3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-5)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot 2(n-1)}x^{2n-1}\right]$$

32. Resolver el problema de valor inicial

$$y'' + y' - xy = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$$

usando series de potencias.

Si $y(x) = \sum_0^\infty c_n x^n$, tenemos que:

$$y'(x) = \sum_1^\infty n c_n x^{n-1}, \qquad y''(x) = \sum_2^\infty n(n-1) c_n x^{n-2}.$$

Como $y(0) = 1$, entonces $c_0 = 1$, y como $y'(0) = 0$, tenemos que $c_1 = 0$. Reemplazando en la ecuación:

$$\begin{aligned}
y'' + y' - xy &= \\
&= \sum_2^\infty n(n-1) c_n x^{n-2} + \sum_1^\infty n c_n x^{n-1} - \sum_0^\infty c_n x^{n+1} \\
&= \sum_0^\infty (n+2)(n+1) c_{n+2} x^n + \sum_0^\infty (n+1) c_{n+1} x^n - \sum_1^\infty c_{n-1} x^n \\
&= 2c_2 + c_1 + \sum_1^\infty \left[(n+2)(n+1) c_{n+2} + (n+1) c_{n+1} - c_{n-1}\right] x^n
\end{aligned}$$

Luego, $c_2 = 0$ y $(n+2)(n+1)c_{n+2} + (n+1)c_{n+1} - c_{n-1} = 0$ para $n \geq 1$, es decir

$$c_{n+2} = \frac{c_{n-1} - (n+1)c_{n+1}}{(n+2)(n+1)}$$

de donde,

$$c_3 = \frac{1}{3!}, \quad c_4 = -\frac{1}{4!}, \quad c_5 = \frac{1}{5!}, \quad c_6 = \frac{3}{6!}, \quad c_7 = -\frac{8}{7!}, \quad c_8 = \frac{14}{8!}$$

Vemos que no es posible encontrar una regla general para c_n, luego, escribimos los primeros términos de la solución:

$$y(x) = 1 + \frac{1}{3!}x^3 - \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{3}{6!}x^6 - \frac{8}{7!}x^7 + \frac{14}{8!}x^8 + \ldots$$

33. Usar el método de series de potencias para resolver la ecuación

$$(x^2+1)y''-6y=0.$$

Si $y(x)=\sum_0^\infty c_n x^n$, reemplazando en la ecuación :

$$\begin{aligned}
(x^2+1)y''-6y &= \\
&= \sum_2^\infty n(n-1)c_n x^n + \sum_2^\infty n(n-1)c_n x^{n-2} - \sum_0^\infty 6c_n x^n \\
&= \sum_2^\infty n(n-1)c_n x^n + \sum_0^\infty (n+2)(n+1)c_{n+2}x^n - \sum_0^\infty 6c_n x^n \\
&= 2c_2 - 6c_0 + (6c_3 - 6c_1)x + \\
&\qquad + \sum_2^\infty \left[(n^2-n-6)c_n + (n+2)(n+1)c_{n+2}\right] x^n
\end{aligned}$$

Esta última expresión es igual a cero y por lo tanto cada uno de los coeficientes es cero, de donde $c_2 = 3c_0, \quad c_3 = c_1$ y

$$(n-3)c_n + (n+1)c_{n+2} = 0$$

para $\quad n > 1$. Luego,

$c_4 = \frac{1}{3}c_2 = c_0, \quad c_6 = -\frac{1}{5}c_0\,, \quad c_8 = \frac{3}{5\cdot 7}c_0\,, \quad c_{10} = -\frac{3}{7\cdot 9}c_0\,, \ldots,$

$$c_{2n} = \frac{3(-1)^n}{(2n-3)(2n-1)}c_0,$$

$c_5 = c_7 = \ldots = c_{2n-1} = 0.$

Por lo tanto,

$$y(x) = c_1(x+x^3) + 3c_0 \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{(2n-3)(2n-1)}x^{2n}$$

Usamos fracciones parciales para escribir:

$$\frac{1}{(2n-3)(2n-1)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n-1}\right]$$

y separamos en dos series:

$$\begin{aligned}
y(x) = &\quad c_1x(1+x^2) + \frac{3}{2}c_0\left[\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{(2n-3)}x^{2n} - \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{(2n-1)}x^{2n}\right] \\
= &\quad c_1x(1+x^2) + \tfrac{3}{2}c_0\left[x^3\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{(2n-3)}x^{2n-3} - x\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{(2n-1)}x^{2n-1}\right] \\
= &\quad c_1x(1+x^2) - \frac{3}{2}c_0\left[x^3(\frac{1}{3x^3} - \frac{1}{x} - \arctan x) + \ x(\frac{1}{x} + \arctan x)\right] \\
= &\quad c_1x(1+x^2) + c_0\left[1 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}(x^3+x)\arctan x\right]
\end{aligned}$$

34. Determinar el o los valores de r para los cuales la ecuación

$$xy'' - (3+x)y' + 2y = 0,\ x > 0,$$

admite una solución de la forma $y(x) = x^r\sum_0^\infty c_nx^n$ y calcular la solución general.

Primero escribimos la ecuación en la forma:

$$y'' - \frac{(3+x)}{x}y' + \frac{2}{x}y = 0$$

Entonces, $x\,a(x) = -3-x$, es analítica en torno a $x=0$ y $a_0 = -3$ y $x^2b(x) = 2x$, es analítica en torno a $x=0$ y $b_0 = 0$.

Luego, $x=0$ es un punto singular regular y es posible aplicar el Método de Fröbenius para resolver la ecuación.

Ecuación indicial: $r(r-1) - 3r = 0 \ \Rightarrow r = 0 \vee r = 4.$

Como las raíces de la ecuación indicial difieren por un entero, la ecuación diferencial tiene dos soluciones de la forma:

$$y_1(x) = \sum_0^\infty c_nx^{n+4}, \quad y_2(x) = \sum_0^\infty d_nx^n$$

El problema es que ambas soluciones no son necesariamente l.i. Analizamos $y_1(x)$. Derivando,

$$y_1'(x) = \sum_0^\infty (n+4)c_n x^{n+3}\,, \qquad y_1''(x) = \sum_0^\infty (n+4)(n+3)c_n x^{n+2}$$

Reemplazando en la ecuación:

$$\begin{aligned}
&xy'' - (3+x)y' + 2y = \\
&= \sum_0^\infty (n+4)(n+3)c_n x^{n+3} - \sum_0^\infty 3(n+4)c_n x^{n+3} - \sum_0^\infty (n+4)c_n x^{n+2} \\
&= \sum_0^\infty n(n+4)c_n x^{n+3} - \sum_0^\infty (n+2)c_n x^{n+4} \\
&= \sum_1^\infty n(n+4)c_n x^{n+3} - \sum_1^\infty (n+1)c_{n+1} x^{n+3} \\
&= \sum_1^\infty (n(n+4)c_n - (n+1)c_{n-1})x^{n+3}
\end{aligned}$$

Luego, $c_n = \dfrac{(n+1)c_{n-1}}{n(n+4)}$, $n \geq 1$. Así,

$$c_1 = \frac{2}{5}c_0, \quad c_2 = \frac{3}{5\cdot 6}c_0, \quad c_3 = \frac{4}{5\cdot 6\cdot 7}c_0, \quad c_4 = \frac{5}{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}c_0\ ,$$

por lo tanto $c_n = \dfrac{4!(n+1)}{(n+4)!}c_0$.

Luego,

$$y_1(x) = 24\sum_0^\infty \frac{n+1}{(n+4)!}\,x^{n+4} = 24\sum_4^\infty \frac{n-3}{n!}\,x^n$$

Separando y haciendo cambio de índices,

$$y_1(x) = 24\left[\sum_4^\infty \frac{x^n}{(n-1)!} - 3\sum_4^\infty \frac{x^n}{n!}\right] = 24\left[x\sum_3^\infty \frac{x^n}{n! =} - 3\sum_4^\infty \frac{x^n}{n!}\right]$$

Entonces

$$\begin{aligned}
y_1(x) &= 24\left[x\frac{x^3}{3!} + (x-3)\sum_4^\infty \frac{x^n}{n!}\right] \\
&= 4x^4 + 24(x-3)\left[e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right] \\
&= 24(x-3)e^x + 12(6+4x+x^2).
\end{aligned}$$

Notemos que $y_1 = y_1^* + y_2^*$ es una combinación lineal de dos funciones l.i. que son soluciones de la ecuación. Luego no es necesario calcular más y la solución general de la ecuación está dada por:

$$y(x) = C_1(x-3)e^x + C_2(6+4x+x^2)$$

35. Hallar la solución general de la ecuación diferencial de segundo orden $x^2y'' + x(x-1)y' - (x-1)y = 0$ por el método de Fröbenius.

    Escribimos primero la ecuación como:

$$y'' + \frac{1}{x}(x-1)y' - \frac{1}{x^2}(x-1)y = 0$$

Entonces, $xa(x) = x-1$ y $x^2b(x) = -x+1$, son ambas analíticas en $x=0$ y $a_0 = -1$ y $b_0 = 1$.

Ecuación indicial: $r(r-1) - r + 1 = 0 \Rightarrow r = 1$.

Luego, la ecuación admite al menos una solución de la forma:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1}$$

Derivando: $y'(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)c_n x^n, \qquad y''(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n(n+1)c_n x^{n-1}$.

Reemplazando en la ecuación original:

$$\begin{aligned}
x^2y'' + x(x-1)y' - (x-1)y &= \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)c_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_n x^{n+2} \\
&\quad - \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+1}x^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_n x^{n+2} \\
&\quad - \sum_{n=-1}^{\infty}(n+2)c_{n+1}x^{n+2} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2} + \sum_{n=-1}^{\infty} c_{n+1}x^{n+2}
\end{aligned}$$

$$= -c_0 x + c_0 x + \sum_{n=0}^{\infty} [((n+2)(n+1) - (n+2) + 1)c_{n+1} + n\, c_n]\, x^{n+2}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1)^2 c_{n+1} + n\, c_n\right] x^{n+2}.$$

Luego, $c_{n+1} = -\dfrac{n}{(n+1)^2}\, c_n$, para todo n. Por lo tanto $c_1 = 0$, de donde $c_n = 0$, para todo $n > 0$ y como $c_0 = 1$ obtenemos $y_1(x) = x$.

La segunda solución l.i. es de la forma:

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^* x^{n+1} + x\, \ln x$$

Derivando,

$$y_2'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_n^* x^n + \ln x + 1\,, \qquad y_2''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) c_n^* x^{n-1} + \frac{1}{x}$$

Reemplazando en la ecuación original:

$$\begin{aligned}
& x^2 y'' + x(x-1)y' - (x-1)y = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[((n+1)^2 c_{n+1}^* + n\, c_n^*\right] x^{n+2} + x + x(x-1)(\ln x + 1 - \ln x) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[((n+1)^2 c_{n+1}^* + n\, c_n^*\right] x^{n+2} + x^2 \\
&= (c_1^* + 1)x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[((n+1)^2 c_{n+1}^* + n\, c_n^*\right] x^{n+2}
\end{aligned}$$

Luego, $c_1^* = -1$ y $c_{n+1}^* = -\dfrac{n}{(n+1)^2}\, c_n^*$, para todo $n \geq 1$.

$$c_2^* = \frac{1}{2^2}\,, \quad c_3^* = -\frac{2}{2^2 \cdot 3^2} = -\frac{1}{3 \cdot 3!}\,, \quad c_4^* = \frac{1}{4 \cdot 4!}\,, \; \ldots, \; c_n^* = \frac{(-1)^n}{n \cdot n!}$$

Ası, $y_2(x) = x + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot n!} x^{n+1} + x \ln x$

Por lo tanto, la solución general es:

$$y(x) = C_1 x + C_2 \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot n!} x^{n+1} + x \ln x\right]$$

36. Usar el Método de Fröbenius para resolver la ecuación

$$4x^2y'' - 8x^2y' + (4x^2+1)y = 0, \quad x > 0.$$

Primero escribimos la ecuación como:

$$y'' - 2y' + (1 + \frac{1}{4x^2})y = 0$$

Ahora, $x\,a(x) = -2x$ y $x^2 b(x) = x^2 + \frac{1}{4}$, son ambas analíticas por lo que el método es aplicable.

Ecuación indicial: $r(r-1) + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow r = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}
y_1(x) &= x^{1/2}\sum_0^\infty c_n x^n = \sum_0^\infty c_n x^{n+\frac{1}{2}} \\
y_1'(x) &= \sum_0^\infty c_n (n+\frac{1}{2}) x^{n-\frac{1}{2}} \\
y_1''(x) &= \sum_0^\infty c_n (n+\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2}) x^{n-\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

Reemplazamos en la ecuación e igualamos a 0:

$$\begin{aligned}
&4x^2y'' - 8x^2y' + (4x^2+1)y = \\
&= 4x^2\sum_0^\infty c_n(n+\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2})x^{n-\frac{3}{2}} - 8x^2\sum_0^\infty c_n(n+\frac{1}{2})x^{n-\frac{1}{2}} \\
&\quad +4x^2\sum_0^\infty c_n x^{n+\frac{1}{2}} + \sum_0^\infty c_n x^{n+\frac{1}{2}} \\
&= \sum_0^\infty 4c_n(n+\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2})x^{n+\frac{1}{2}} - \sum_0^\infty 8c_n(n+\frac{1}{2})x^{n+\frac{3}{2}} \\
&\quad + \sum_0^\infty 4c_n x^{n+\frac{5}{2}} + \sum_0^\infty c_n x^{n+\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_0^\infty 4c_n(n^2-\frac{1}{4})x^{n+\frac{1}{2}} - \sum_1^\infty 8c_{n-1}(n-\frac{1}{2})x^{n+\frac{1}{2}} \\
&\quad + \sum_2^\infty 4c_{n-2}x^{n+\frac{1}{2}} + \sum_0^\infty c_n x^{n+\frac{1}{2}} \\
&= -c_0x^{\frac{1}{2}} + 3c_1x^{\frac{3}{2}} - 4c_0x^{\frac{3}{2}} + c_0x^{\frac{1}{2}} + c_1x^{\frac{3}{2}} \\
&\quad + \sum_2^\infty \left[4c_n(n^2-\frac{1}{4}) - 8c_{n-1}(n-\frac{1}{2}) + 4c_{n-2} + c_n\right] x^{n+\frac{1}{2}} \\
&= 4(-c_0+c_1)x^{\frac{3}{2}} + \sum_2^\infty \left[c_n(4n^2-1+1) - 8c_{n-1}(n-\frac{1}{2}) + 4c_{n-2}\right] x^{n+\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Luego, $-c_0 + c_1 = 0$, de donde $c_1 = c_0 = 1$ y

$$n^2c_n - 2(n-\frac{1}{2})c_{n-1} + c_{n-2} = 0, \quad n > 1.$$

$$c_n = \frac{(2n-1)c_{n-1} - c_{n-2}}{n^2}.$$

$$c_2 = \frac{1}{2}, \quad c_3 = \frac{1}{2\cdot 3}, \quad c_4 = \frac{1}{4!}, \ldots$$

$$c_n = \frac{(2n-1)\dfrac{1}{(n-1)!} - \dfrac{1}{(n-2)!}}{n^2} = \frac{1}{n!}$$

Luego,

$$y(x) = x^{\frac{1}{2}} \sum_0^\infty \frac{x^n}{n!} = x^{\frac{1}{2}} e^x$$

Ahora usamos la Fórmula de Abel para encontrar $y_2(x)$.

$$\begin{aligned}
y_2(x) &= x^{\frac{1}{2}} e^x \int \frac{e^{\int 2\,dx}}{xe^{2x}} dx \\
&= x^{\frac{1}{2}} e^x \ln x
\end{aligned}$$

Así, la solución general de la ecuación es :

$$y(x) = (C_1 + C_2 \ln x) x^{\frac{1}{2}} e^x$$

3.3. Ejercicios propuestos

1. Demuestre que $y = \operatorname{sen}^3 x$ es solución de la ecuación diferencial
$$y'' + (\tan x)y' - 6(\cot^2 x)y = 0$$

2. Demuestre que $y_1(x) = \dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}$ es solución en el intervalo $(0, \infty)$ de la ecuación diferencial
$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0$$

3. Pruebe que dos soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial
$$xy'' + 2y' + xy = 0$$
son $y_1 = x^{-1} \operatorname{sen} x$ e $y_2 = x^{-1} \cos x$.

4. Demuestre que $y = C_1 \cos(\ln x) + C_2 \operatorname{sen}(\ln x)$, $x > 0$, es la solución general de la ecuación
$$x^2y'' + xy' + y = 0$$

5. Encuentre alguna ecuación diferencial cuya solución general sea

   a) $y(x) = C_1e^x + C_2e^{2x} + C_3x + C_4$
   b) $y(x) = C_1 \cos x - C_2 \operatorname{sen} x + e^{4x}$
   c) $y(x) = C_1x^{1/2} + C_2x^{-1/2},\ x > 0$
   d) $y(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{-4x} + x + 4$
   e) $y(x) = \dfrac{C_1}{x} + \dfrac{C_2}{x^2}$
   f) $y(x) = C_1 \sin\left(\sqrt{x}\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{x}\right) + 1$

6. Encuentre la ecuación diferencial de las siguientes familias de curvas:

   a) $y = C_1 + C_2e^{-x}$
   b) $y = C_1x + C_2\dfrac{1}{x}$
   c) $y(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \cos 3x$

7. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales usando el método de Abel:

   a) $y'' - \dfrac{6}{x}y' + \dfrac{12}{x^2}y = 0$

   b) $x^2y'' + xy' - y = 0$

   c) $(1 - 2x - x^2)y'' + (2 + 2x)y' - 2y = 0$

   d) $(1 - x^2)y'' + 2xy' = 0$

   e) $x^2y'' - (x^2 + 2x)y' + (x + 2)y = 0$, con $0 < x < 1$

   f) $y'' - \dfrac{y'}{x} + \dfrac{y}{x^2} = 0$

   g) $(1 + x^2)y'' + 2xy' - \dfrac{2}{x^2}y = 0,\ x > 0$

   h) $x^2y'' + xy' + x^2y - \dfrac{y}{4} = 0$, con $x > 0$.

   i) $y'' + (\tan x)y' - 6(\cot^2 x)y = 0$

8. Resuelva el problema de valor inicial con las condiciones dadas.

   a) $(x - 1)y'' - xy' + y = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 6$

   b) $x^2y'' - 2y = 0,\ y(1) = 1,\ \ y'(1) = 8$

9. Suponga que el Wronskiano de dos soluciones de la ecuación diferencial
$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$
es igual a 1 y que $y_1(x) = x^3$ es una solución. Determine la solución general de
$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = x$$

10. Resuelva las ecuaciones siguientes:

   a) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 3\dfrac{dy}{dt} + 3y = 0$

   b) $y^{(viii)} - 2y^{(iv)} + y = 0$

   c) $y''' - y'' + y' - y = 0$

   d) $3y'' - 6y' + 30y = 0$

   e) $2y''' - 3y'' - 3y' + 2y = 0$

   f) $y'' + y' + y = 0$

   g) $y''' + y' = 0$

   h) $y'' - 4y' + 4y = 0$

   i) $y^{(v)} - y^{(iv)} + y''' - y'' = 0$

   j) $y'' + 3y' - 10y = 0$

   k) $y'' + 4y = 0$

   l) $y'' + 10y' + 25y = 0$

m) $y'' - 3y' + 2y = 0$

n) $y'' + 9y = 0$

ñ) $y'' + 2y' + y = 0$

o) $y^{(iv)} - y'' = 0$

p) $y'' - 5y' + 6y = 0$

q) $y^{(vii)} - y''' = 0$

r) $y''' + y'' - y' - y = 0$

11. Resuelva los siguientes problemas de valores iniciales:

    a) $y'' + 2y' + y = 0, \;\; y(1) = \dfrac{2}{e}, \;\; y'(1) = -\dfrac{3}{e}$

    b) $y'' + y' = 0, \, y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1\,, \;\; y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

    c) $y''' - y = 0, \;\; y(0) = 1, \;\; y'(0) = -1, \;\; y''(0) = 0$

12. Sin calcular los coeficientes, dé la forma de una solución particular de la ecuación diferencial

$$(D^3 - 1)^3 y = (2x + 1)2e^x + \frac{1}{2} x \sin x$$

13. Resuelva las ecuaciones siguientes, usando el método del aniquilador.

    a) $y'' - 2y' + 2y = e^x \operatorname{sen} x$

    b) $y'' + 3y' - 10y = 6e^{4x}$

    c) $y'' + 3y' - 10y = 6e^{2x}$

    d) $y'' + 4y = 3 \operatorname{sen} x$

    e) $y'' + 10y' + 25y = 14e^{-5x}$

    f) $y'' - 3y' + 2y = 14 \operatorname{sen} 2x - 18 \cos 2x$

    g) $y'' - 4y' + 4y = x(2e^{2x} + \operatorname{sen} x)$

    h) $y^{(v)} - y^{(iv)} + y''' - y'' = 2e^x + 4x + 2x \cos x$

14. Halle la solución general de las siguientes ecuaciones usando variación de parámetros.

    a) $y'' + y = \sec x$

    b) $y'' + y' + y = x \operatorname{sen} x$

    c) $y''' + y' = \tan x$

    d) $y'' + 2y' + y = e^{-x} \ln x$

    e) $y'' - y = \dfrac{2e^x}{e^x + e^{-x}}$

    f) $y'' + y = \tan^2 x$

    g) $y'' - \dfrac{y'}{x} + \dfrac{y}{x^2} = \dfrac{x+1}{x}$

15. Resuelva las siguientes ecuaciones.

    a) $y'' + 9y = 2\operatorname{sen} 3x + 4\operatorname{sen} x - 26e^{-2x} + 27x^3$
    b) $y''' - y'' + y' - y = xe^x - e^{-x} + 7$
    c) $2y''' - 3y'' - 3y' + 2y = (e^x + e^{-x})^2$
    d) $3y'' - 6y' + 30y = e^x \tan(3x)$
    e) $y'' - 5y' + 6y = 2x - xe^{2x} + 4e^{-2x}$
    f) $y^{(iv)} - y'' = 4x + 2xe^{-x}$
    g) $y^{(vii)} - y''' = 12x$
    h) $y'' - \dfrac{6}{x}y' + \dfrac{12}{x^2}y = x^2 + 1$
    i) $y'' + \dfrac{y'}{x} + \dfrac{y}{x^2} = \dfrac{\sec(\ln x)}{x^2}$
    j) $y'' + \dfrac{y'}{x} - \dfrac{y}{x^2} = \dfrac{1}{x^2 + x^3}$

16. Dada la ecuación $xy'' + 2y' + xy = 0,\ x > 0$.

    a) Demuestre que $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ es solución de la ecuación.
    b) Demuestre, usando el Wronskiano que $\left\{\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, \dfrac{\cos x}{x}\right\}$ es un conjunto linealmente independiente.
    c) Resuelva la ecuación $xy'' + 2y' + xy = 1$.

17. Resuelva las siguientes ecuaciones de Euler para $x > 0$.

    a) $x^2y'' - 2xy' + 2y = x$
    b) $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^4e^x$
    c) $x^2y'' - xy' + y = x^3$
    d) $x^2y'' - 4xy' + 6y = 2x^4 + x^2$
    e) $x^2y'' - 3xy' = 2$
    f) $x^3y'' + x^2y' + xy = 1$
    g) $x^2y'' + xy' + 9y = \operatorname{sen}(\ln x^3)$
    h) $x^2y'' - 2xy' + 2y = \dfrac{\ln x}{x}$

18. Resuelva las ecuaciones siguientes:

a) $(x^2-1)y''-2xy'+2y=(x^2-1)^2$
b) $x^2y''-(x^2+2x)y'+(x+2)y=x^3$
c) $(1-x)y''+xy'-y=2(1-x)^2e^x \operatorname{sen} x$, con $0<x<1$
d) $x^2y''+xy'+\left(x^2-\dfrac{1}{4}\right)y=x^{3/2}$, con $x>0$
e) $x^2y''+xy'+\left(x^2-\dfrac{1}{4}\right)y=3x\sqrt{x}\operatorname{sen} x$, con $x>0$.
f) $(1-x^2)y''+2xy'=\ln x$

19. Resuelva la ecuación

$$x^2y''+4xy'+(x^2+2)y=x^4$$

sabiendo que una de las soluciones de la ecuación homogénea asociada es de la forma $y_1(x)=x^k\cos x$ para un cierto k.

20. Use una sustitución adecuada para resolver las ecuaciones siguientes.

a) $y''+2y(y')=0$
b) $2y^2y''+2y(y')^2=1$
c) $y''+x(y')^2=0$
d) $x=(y'')^2-(y'')^3$
e) $xy''-2(y'')^2+1=0$
f) $y''=2y(y')^3$
g) $yy''=y^2y'+(y')^2$
h) $yy''+4y^2-\dfrac{1}{2}(y')^2=0$
i) $x^2y''-3xy'=2(y')^2$

21. Estudie si el problema de valor inicial $y'y''-x=0$, $y(1)=2$, $y'(1)=1$ tiene una, varias o ninguna solución.

22. Use la sustitución $y'=uy$ para resolver la ecuación $y^2y''+(y')^3=0$.

23. Use la sustitución $z=x^2$ para transformar la ecuación

$$y''-\frac{1}{x}y'+4x^2y=x^4,\ x>0$$

en una ecuación con coeficientes constantes y resuelva de esta forma la ecuación.

24. Examine la ecuación de segundo orden con coeficientes constantes

$$y''+by'+cy=0$$

a) Si $y(x)$ es una solución de la ecuación, describa qué condiciones deben satisfacer b y c para que

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$$

b) Analice qué condiciones deben cumplir b y c para que la ecuación posea una solución no trivial que satisfaga las condiciones en la frontera

$$y(0) = 0,\ y(1) = 0$$

25. Dada la ecuación diferencial $(x-1)y'' - xy' + y = 0$

    a) Encuentre la solución de la ecuación en torno al punto ordinario $x = 0$.

    b) Si $y(0) = 2$ e $y'(0) = 6$, exprese la solución en serie de potencias en términos de funciones conocidas.

26. Resolver el siguiente problema de valor inicial usando series de potencias:

$$y'' + xy' + y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$$

27. Hallar la solución general de la siguiente ecuación diferencial de segundo orden por el método de Fröbenius:

$$x^2y'' - x^2y' + (x^2 - 2)y = 0$$

28. Demuestre que $x = 0$ es un punto singular irregular de la ecuación

$$x^3y'' - xy' + y = 0$$

Use el hecho que $y_1 = x$ es una solución para encontrar otra solución y_2 linealmente independiente y demuestre que y_2 no puede expresarse como una serie de la forma $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$.

Capítulo 4

Sistemas lineales

4.1. Resumen

Sistemas lineales. Sean $x_1, \ldots, x_n$ funciones de una variable t. Un sistema lineal normal de n ecuaciones diferenciales de primer orden tiene la forma:

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1'(t) & = & a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + \ldots + a_{1n}(t)x_n(t) + f_1(t) \\ x_2'(t) & = & a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) + \ldots + a_{2n}(t)x_n(t) + f_2(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n'(t) & = & a_{n1}(t)x_1(t) + a_{n2}(t)x_2(t) + \ldots + a_{nn}(t)x_n(t) \quad + f_n(t) \end{array}\right|$$

o abreviadamente, $X'(t) = A(t) \cdot X(t) + F(t)$, donde

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix},\ F(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix},\ A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \ldots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \ldots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \ldots & a_{nn(t)} \end{pmatrix}$$

Si $F(t)$ es el vector nulo, el sistema se dice homogéneo. En adelante omitimos la variable t para simplificar la notación.

Solución de un sistema. Una función $\phi(t) = \begin{pmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \\ \vdots \\ \phi_n(t) \end{pmatrix}$ es una solución del sistema $X' = AX + F$ si y solo si ϕ es una función derivable que satisface cada una de las ecuaciones del sistema.

La solución general del sistema de n ecuaciones $X' = AX + F$ está dada por

$$X(t) = X_h(t) + X_p(t)$$

donde $X_h(t)$ es la solución general del sistema homogéneo $X' = AX$ y $X_p(t)$ es una solución particular del sistema no homogéneo $X' = AX + F$.

Problemas de valor inicial. Teorema de existencia y unicidad. Sean $A(t)$ y $F(t)$ funciones matriciales continuas definidas sobre un intervalo $[a, b]$. Entonces, existe una única función $\phi(t)$ que es solución del problema de valor inicial

$$X' = AX + F,\ X(t_0) = X_0$$

en todo el intervalo $[a, b]$.

Sistemas homogéneos. Solución general. Un conjunto de n soluciones linealmente independientes de un sistema homogéneo de n ecuaciones se denomina **sistema fundamental de soluciones**.

Sean $\phi_1(t) = \begin{pmatrix} \phi_{11}(t) \\ \phi_{21}(t) \\ \vdots \\ \phi_{n1}(t) \end{pmatrix}, \ldots, \phi_n(t) = \begin{pmatrix} \phi_{1n}(t) \\ \phi_{2n}(t) \\ \vdots \\ \phi_{nn}(t) \end{pmatrix}$, n soluciones del sistema lineal homogéneo $X' = AX$. La matriz

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \phi_{11}(t) & \ldots & \phi_{n1}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_{n1}(t) & \ldots & \phi_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

se denomina una solución matricial del sistema.

Si además, $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ es un conjunto linealmente independiente, decimos que Φ es una **solución matricial fundamental**, o una **matriz fundamental** del sistema.

Wronskiano. Sea $\Phi(t)$ una solución matricial del sistema $X' = AX$. Definimos el wronskiano del sistema como $W(t) = |\Phi(t)|$.

Criterio para soluciones linealmente independientes. $\Phi(t)$ es una solución matricial fundamental si y solo si $W(t) \neq 0$ si y solo si $W(t_0) \neq 0$ para algún $t_0 \in [a, b]$.

Sistemas homogéneos con coeficientes constantes. Método matricial.
Caso 1: La matriz $\boldsymbol{A}$ es diagonalizable. En este caso la matriz tiene n vectores propios linealmente independientes, $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$, correspondientes a los valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (posiblemente repetidos). El sistema tiene n soluciones linealmente independientes de la forma $\phi_i(t) = \boldsymbol{v}_i e^{\lambda_i t}$.

Distinguimos dos casos.

- Si todos los valores propios de A son reales, entonces la solución general del sistema es
$$X_h(t) = C_1 \boldsymbol{v}_1 e^{\lambda_1 t} + \ldots + C_n \boldsymbol{v}_n e^{\lambda_n t}$$
- Si A tiene algún valor propio complejo $\lambda = a + b\,i$ entonces, como A tiene coeficientes reales, $\overline{\lambda}$ también es un valor propio de A y si $\boldsymbol{v}_\lambda$ es un vector propio de λ, $\overline{\boldsymbol{v}_\lambda}$ es un vector propio de $\overline{\lambda}$. Luego, obtenemos dos soluciones reales linealmente independientes

$$\begin{aligned}
\phi_1(t) &= \frac{\boldsymbol{v}_\lambda e^{\lambda t} + \overline{\boldsymbol{v}_\lambda} e^{\overline{\lambda} t}}{2} &&= e^{at}(\mathrm{Re}\,(\boldsymbol{v}_\lambda)\cos(bt) - \mathrm{Im}\,(\boldsymbol{v}_\lambda)\,\mathrm{sen}(bt)) \\
\phi_2(t) &= \frac{\boldsymbol{v}_\lambda e^{\lambda t} - \overline{\boldsymbol{v}_\lambda} e^{\overline{\lambda} t}}{2i} &&= e^{at}(\mathrm{Im}\,(\boldsymbol{v}_\lambda)\cos(bt) + \mathrm{Re}(\boldsymbol{v}_\lambda)\,\mathrm{sen}(bt))
\end{aligned}$$

Caso 2: La matriz A no es diagonalizable. Consideraremos únicamente el caso en que el valor propio λ de multiplicidad m tiene solo un vector propio linealmente independiente asociado v.

Los demás casos se encuentran en textos avanzados de ecuaciones diferenciales. La primera solución es entonces $\phi_1(t) = \boldsymbol{v_1} e^{\lambda t}$. Las $m - 1$ soluciones linealmente independientes restantes son de la forma:

$$\begin{aligned}
\phi_2(t) &= (t\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2)e^{\lambda t} \\
\phi_3(t) &= \left(\frac{t^2}{2!}\boldsymbol{v}_1 + t\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3\right)e^{\lambda t} \\
&\vdots \\
\phi_m(t) &= \left(\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\boldsymbol{v}_1 + \ldots + \frac{t^2}{2!}\boldsymbol{v}_{m-2} + t\boldsymbol{v}_{m-1} + \boldsymbol{v}_m\right)e^{\lambda t}
\end{aligned}$$

donde los vectores $\boldsymbol{v}_i$ con $i = 2, \ldots, m$ se construyen recursivamente resolviendo los sistemas:

$$(A - \lambda I)\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_{i-1}$$

Sistemas no homogéneos. Método de variación de parámetros.
Sea $\Phi(t)$ una matriz fundamental del sistema homogéneo $X' = AX$. Una solución particular del sistema no homogéneo $X' = AX + F$ está dada por:

$$X_p(t) = \Phi(t) \cdot U(t)$$

donde el vector columna $U(t)$ se determina resolviendo para U' el sistema:

$$\Phi(t) \cdot U'(t) = F(t)$$

e integrando componente a componente el vector U'.

Sistemas no homogéneos. Método de aniquiladores.
Este método resulta útil cuando el sistema no es de primer orden y en el caso de sistemas lineales que no están en forma normal. Utilizando operadores diferenciales podemos convertir el sistema diferencial en un sistema algebraico y resolverlo como tal. Ver ejercicios.

4.2. Ejercicios resueltos

1. Resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} x'' & = & y-3x \\ y'' & = & 2x-2y \end{array}\right|$$

Se trata de un sistema homogéneo de segundo orden con coeficientes constantes. Para aplicar el método matricial tendríamos que usar variables auxiliares de manera de escribirlo como un sistema lineal normal de primer orden. El método de aniquiladores resulta más eficiente en este caso. El sistema se puede escribir como:

$$\left.\begin{array}{rrcl} (D^2+3)x & -y & = & 0 \\ -2x & +(D^2+2)y & = & 0 \end{array}\right|$$

Aplicando (D^2+2) a la primera ecuación y sumándola a la segunda:

$$(D^4+5D^2+4)x = 0 \Rightarrow (D^2+1)(D^2+4)x = 0$$

Luego, $x(t) = C_1 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t + C_3 \cos 2t + C_4 \operatorname{sen} 2t$

Reemplazando en la primera ecuación obtenemos la solución para y:

$$y(t) = (D^2+3)x(t) = 2C_1 \cos t + 2C_2 \operatorname{sen} t - C_3 \cos 2t - C_4 \operatorname{sen} 2t$$

2. Resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} x'-4x+y'' & = & t^2 \\ x'+x+y' & = & 0 \end{array}\right|$$

Se trata de un sistema lineal no homogéneo de segundo orden con coeficientes constantes. Nuevamente conviene utilizar el método de aniquiladores:

$$\left.\begin{array}{rcl} (D-4)x+D^2y & = & t^2 \\ (D+1)x+Dy & = & 0 \end{array}\right|$$

Resolviendo este sistema algebraico obtenemos la ecuación no homogénea de segundo orden

$$(D^2+4)x = -t^2$$

La solución de la ecuación homogénea asociada es

$$x_h(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \operatorname{sen} 2t$$

Usando aniquiladores, tenemos que la solución particular es de la forma

$$x_p(t) = At^2 + Bt + C$$

Reemplazando en la ecuación tenemos $A = -\dfrac{1}{4}$, $B = 0$, $C = \dfrac{1}{8}$. Así,

$$x(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \operatorname{sen} 2t - \frac{t^2}{4} + \frac{1}{8}$$

Para encontrar $y(t)$ debemos reemplazar $x(t)$ y $x'(t)$ en la segunda ecuación del sistema.

$$y'(t) = -C_1 \cos 2t - C_2 \operatorname{sen} 2t + 2C_1 \operatorname{sen} 2t - 2C_2 \cos 2t + \frac{t^2}{4} + \frac{t}{2} - \frac{1}{8}$$

Integrando con respecto a t,

$$y(t) = \left(\frac{C_2}{2} - C_1\right) \cos 2t - \left(C_2 + \frac{C_1}{2}\right) \operatorname{sen} 2t + \frac{t^3}{12} + \frac{t^2}{4} - \frac{t}{8} + C_3$$

3. Usar método de eliminación para resolver el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{rcl} x' &=& -x+z \\ y' &=& -y+z \\ z' &=& -x+y \end{array}\right|$$

Se trata de un sistema homogéneo. Lo escribimos en términos de operadores diferenciales:

$$\left.\begin{array}{rrrr} (D+1)x & & -z & =0 \\ & (D+1)y & -z & =0 \\ x & -y & +Dz & =0 \end{array}\right|$$

Eliminamos la variable z para obtener el sistema de orden 2:

$$\left.\begin{array}{rcrcl} (D+1)x & - & (D+1)y & = & 0 \\ (D^2+D+1)x & - & y & = & 0 \end{array}\right|$$

Eliminamos ahora la variable y, de donde

$$-D(D+1)^2x = 0$$

Esta es una ecuación lineal homogénea de orden tres cuya solución general está dada por:

$$x(t) = C_1 + (C_2 + C_3 t)e^{-t}$$

Reemplazando en la segunda ecuación tenemos $y = (D^2 + D + 1)x$, de donde

$$y(t) = C_1 + (C_2 - C_3 + C_3 t)e^{-t}$$

Finalmente, del hecho que $z = (D+1)x$ obtenemos

$$z(t) = C_1 + C_3 e^{-t}$$

4. Usar método de aniquiladores para resolver el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{rcl} x'' + y'' + z'' & = & t \\ x' - y' - z' & = & 1 \\ x'' + y' & = & e^t + y - z - x \end{array}\right|$$

Se trata de un sistema no homogéneo y lo escribimos en términos de operadores:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} D^2x & + & D^2y & + & D^2z & = & t \\ Dx & - & Dy & - & Dz & = & 1 \\ (D^2+1)x & + & (D-1)y & + & z & = & e^t \end{array}\right|$$

Aplicamos D a la segunda ecuación y la sumamos con la primera:

$$2D^2x = t \Rightarrow Dx = \frac{t^2}{4} + C_1 \Rightarrow x(t) = \frac{t^3}{12} + C_1 t + C_2$$

Aplicamos D a la tercera ecuación y la sumamos con la segunda:

$$D(D^2+2)x + D(D-2)y = e^t + 1$$

Entonces,

$$D(D^2+2)x(t) = (D^2+2)\left[\frac{t^2}{4}+C_1\right] = \frac{1}{2}+\frac{t^2}{2}+2C_1$$

Reemplazando, $D(D-2)y = e^t + \frac{1}{2} - \frac{t^2}{2} - 2C_1$, luego

$$y(t) = C_3 + C_4e^{2t} + y_p(t)$$

donde y_p es de la forma

$$y_p = Ae^t + Bt + Ct^2 + Dt^3$$

Derivando y reemplazando en la ecuación, obtenemos

$$y_p'' - 2y_p' = -Ae^t + 2(C-B) - 2(2C-3D)t - 6Dt^2$$

Luego, $A=-1$, $C=\frac{1}{8}$, $D=\frac{1}{12}$, $B=C_1-\frac{1}{8}$, de donde:

$$y(t) = C_3 + C_4e^{2t} - e^t + \left[C_1 - \frac{1}{8}\right]t + \frac{t^2}{8} + \frac{t^3}{12}$$

Finalmente, reemplazando en la tercera ecuación, obtenemos:

$$\begin{aligned} z(t) &= e^t - (D^2+1)x - (D-1)y \\ &= e^t - \frac{7t}{8} - C_1 - C_2 + C_3 + \frac{1}{8} - C_4e^{2t} - \frac{t^2}{8} \end{aligned}$$

5. Resolver el sistema homogéneo de orden 2:

$$X' = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} X$$

Primero determinamos los valores propios resolviendo la ecuación característica de la matriz de coeficientes:

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} -6-\lambda & 2 \\ -3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+6)(\lambda-1)+6 \quad = \lambda^2+5\lambda$$

Valores propios: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -5$.

Buscamos los vectores propios resolviendo, para cada valor propio, el sistema $(A - \lambda I)X = 0$:

- $\lambda_1 = 0$:

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 3x - y = 0 \Rightarrow \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Luego, $\phi_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

- $\lambda_2 = -5$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x - 2y = 0 \Rightarrow \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Luego, $\phi_2(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-5t}$

Solución general del sistema

$$X(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-5t}$$

6. Resolver el sistema homogéneo:

$$X' = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} X$$

El polinomio característico de la matriz A es

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 \\ -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2$$

entonces $\lambda = 2$ es un valor propio de multiplicidad 2.

Busquemos el primer vector propio.

$$(A - 2I)X = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \; x = y \Rightarrow \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Luego, $\phi_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$

Como hay un solo vector propio,la matriz no es diagonalizable y debemos encontrar la segunda solución linealmente independiente $\phi_2(t)$, resolviendo la ecuación $(A - 2I)\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}$.

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \frac{3y-1}{3}$$

Para $y = 0$, se tiene que $x = -\dfrac{1}{3} \Rightarrow \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$

Luego, $\phi_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} = \begin{pmatrix} t - \frac{1}{3} \\ t \end{pmatrix} e^{2t}$

Así, la solución general del sistema es:

$$X(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} t - \frac{1}{3} \\ t \end{pmatrix} e^{2t}$$

7. Resolver el problema de valor inicial

$$X' = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} X\,,\ X(0) = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico es

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -1 \\ 5 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 10\lambda + 29$$

Entonces, $\lambda = \dfrac{10 \pm \sqrt{100-116}}{2} = 5 \pm 2i$, es decir, la matriz A tiene dos valores propios complejos conjugados. Para determinar las dos soluciones l.i. de nuestro sistema, basta encontrar un vector propio asociado al valor propio $5 + 2i$.

$$\begin{pmatrix} 1-2i & -1 \\ 5 & -1-2i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & -1-2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

luego, $5x - (1+2i)y = 0$, de donde $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1+2i \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} i$

Solución general del sistema:

$$\begin{aligned} X(t) &= C_1\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}\cos 2t - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\text{sen } 2t)\right]e^{5t} \\ &\quad + C_2\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\cos 2t + \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}\text{sen } 2t)\right]e^{5t} \end{aligned}$$

Usando la condición inicial

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow C_1 = \frac{8}{5}, C_2 = -\frac{9}{5}$$

Luego, la solución (única) del problema de valor inicial es:

$$X(t) = \left[\begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix}\cos 2t - \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}\text{sen}\, 2t\right]e^{5t}$$

8. Resolver el sistema no homogéneo:

$$X' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ \text{ctg}\, t \end{pmatrix},\ 0 < t < \pi$$

Primero buscaremos los valores propios:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -5 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 \Rightarrow \lambda = \pm i$$

Ahora buscamos el vector propio asociado a $\lambda = i$:

$$\begin{pmatrix} 2-i & -5 \\ 1 & -2-i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2-i \end{pmatrix}$$

Luego, $x = (2+i)y$, de donde un vector propio asociado a $\lambda = i$ es

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} i$$

Así,

$$\begin{aligned} X_h(t) &= C_1\left[\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\cos t - \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\operatorname{sen} t\right] + C_2\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cos t + \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\operatorname{sen} t\right] \\ &= C_1\begin{pmatrix}2\cos t - \operatorname{sen} t\\ \cos t\end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix}\cos t + 2\operatorname{sen} t\\ \operatorname{sen} t\end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ahora buscamos una solución particular de la forma:

$$X_p(t) = \begin{pmatrix}2\cos t - \operatorname{sen} t\\ \cos t\end{pmatrix} u_1(t) + \begin{pmatrix}\cos t + 2\operatorname{sen} t\\ \operatorname{sen} t\end{pmatrix} u_2(t)$$

Para encontrar $u_1(t)$ y $u_2(t)$ debemos resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{rcrcr} (2\cos t - \operatorname{sen} t)u_1'(t) & + & (\cos t + 2\operatorname{sen} t)u_2'(t) & = & 0 \\ \cos t\, u_1'(t) & + & \operatorname{sen} t\, u_2'(t) & = & \operatorname{ctg} t \end{array}\right|$$

Despejando $u_1'(t)$ de la primera ecuación obtenemos

$$u_1'(t) = \frac{\cos t + 2\operatorname{sen} t}{\operatorname{sen} t - 2\cos t} u_2'(t)$$

y reemplazando en la segunda, se tiene que

$$u_2'(t) = \operatorname{ctg} t(\operatorname{sen} t - 2\cos t) = \cos t - 2\frac{\cos^2 t}{\operatorname{sen} t} = \cos t - 2\csc t + 2\operatorname{sen} t$$

Así, $u_2(t) = \operatorname{sen} t - 2\ln|\csc t - \operatorname{ctg} t| - 2\cos t$. Ahora,

$$u_1'(t) = \frac{\cos t + 2\operatorname{sen} t}{\operatorname{sen} t - 2\cos t}\operatorname{ctg} t(\operatorname{sen} t - 2\cos t) = \csc t - \operatorname{sen} t + 2\cos t$$

Luego, $u_1(t) = \ln|\csc t - \operatorname{ctg} t| + \cos t + 2\operatorname{sen} t$.

La solución particular es entonces:

$$\begin{aligned}
X_p(t) &= \begin{pmatrix} 2\cos t - \operatorname{sen} t \\ \cos t \end{pmatrix} (\ln|\csc t - \operatorname{ctg} t| + \cos t + 2\operatorname{sen} t) + \\
&\quad + \begin{pmatrix} \cos t + 2\operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t \end{pmatrix} (\operatorname{sen} t - 2\ln|\csc t - \operatorname{ctg} t| - 2\cos t) \\
&= \begin{pmatrix} -5\operatorname{sen} t \cdot \ln|\csc t - \operatorname{ctg} t| \\ \\ 1 + (\cos t - 2\operatorname{sen} t)\ln|\csc t - \operatorname{ctg} t| \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución general del sistema es:

$$\begin{aligned}
X(t) &= \begin{pmatrix} 2C_1 + C_2 \\ C_1 \end{pmatrix} \cos\, t + \begin{pmatrix} -C_1 + 2C_2 \\ C_2 \end{pmatrix} \operatorname{sen} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&\quad + \begin{pmatrix} -5\operatorname{sen} t \\ \cos t - 2\operatorname{sen} t \end{pmatrix} \ln|\csc t - \operatorname{ctg} t|
\end{aligned}$$

9. Resolver el problema de valor inicial

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{1}{t}, \quad X(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t > 0$$

Primero buscamos los valores propios:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2$$

Luego, $\lambda = 0$ es un valor propio de multiplicidad 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = y \Rightarrow \boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \phi_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para encontrar $\phi_2(t)$ resolvemos el sistema:

$$(A - \lambda I)\boldsymbol{v_2} = \boldsymbol{v_1} \Rightarrow x = y + 1$$

Si hacemos $y = 0$, se tiene que $x = 1$, luego,

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \phi_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Así, $X_h(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} t+1 \\ t \end{pmatrix}$

La solución particular es de la forma:

$$X_p(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u_1(t) + \begin{pmatrix} t+1 \\ t \end{pmatrix} u_2(t)$$

donde u_1 y u_2 se obtienen resolviendo el sistema

$$\left.\begin{array}{rcrcr} u_1' & + & (t+1)u_2' & = & \dfrac{1}{t} \\ u_1' & + & tu_2' & = & -\dfrac{1}{t} \end{array}\right|$$

Restando las ecuaciones: $u_2' = \dfrac{2}{t} \Rightarrow u_2 = 2\ln t$

Reemplazando en la segunda ecuación:

$$u_1' = -\frac{1}{t} - 2 \Rightarrow u_1 = -\ln t - 2t$$

Así,

$$X_p(t) = \begin{pmatrix} 2t+1 \\ 2t-1 \end{pmatrix} \ln t - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} 2\,t$$

La solución general del sistema es:

$$X(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} t+1 \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2t+1 \\ 2t-1 \end{pmatrix} \ln t - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} 2\,t$$

Reemplazando la condición inicial:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow C_1 = -2,\, C_2 = 3$$

Luego, la solución del problema de valor inicial es:

$$\begin{aligned} X(t) &= -2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}t+1\\t\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2t+1\\2t-1\end{pmatrix}\ln t-\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}2\,t \\ &= \begin{pmatrix}(2t+1)\ln t+t+1\\(2t-1)\ln t+t-2\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}2t+1\\2t-1\end{pmatrix}\ln t+\begin{pmatrix}t+1\\t-2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

10. Resolver el sistema homogéneo $X' = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} X$

El polinomio característico es

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & 0\\ 2 & 2-\lambda & -1\\ 0 & 1 & -\lambda\end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2-2\lambda+1) = (1-\lambda)^3$$

Luego, $\lambda = 1$ es una valor propio de multiplicidad 3.

Buscamos una base del espacio propio:

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 2 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix} \Rightarrow x = 0,\, y = z \Rightarrow \boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

Así, una primera solución del sistema es

$$\phi_1(t) = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} e^t$$

Ahora debemos encontrar las soluciones $\phi_2(t)$ y $\phi_3(t)$.

Resolviendo el sistema $(A-\lambda I)\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v_1}$, obtenemos $x = 0$ e $y = z+1$. Haciendo $z = 0$ resulta $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, de donde

$$\phi_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} te^t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t = \begin{pmatrix} 0 \\ t+1 \\ t \end{pmatrix} e^t$$

Análogamente, resolviendo el sistema

$$(A - \lambda I)\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v}_2 \ \Rightarrow x = \frac{1}{2}, \ y = z$$

Para $z = 0 \Rightarrow \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, de donde

$$\phi_3(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{t^2 e^t}{2} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} te^t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{e^t}{2} = \begin{pmatrix} 1 \\ t^2 + 2t \\ t^2 \end{pmatrix} \frac{e^t}{2}$$

Así, la solución general es

$$X(t) = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ t+1 \\ t \end{pmatrix} e^t + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ t^2 + 2t \\ t^2 \end{pmatrix} \frac{e^t}{2}$$

11. Resolver el problema de valor inicial

$$X' = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} X, \qquad X(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Resolviendo la ecuación característica

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & -2 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} &= (\lambda+3)(\lambda^2 - 4\lambda + 5) \\ &= (\lambda+3)(\lambda - 2 - i)(\lambda - 2 + i) = 0 \end{aligned}$$

obtenemos un valor propio real $\lambda = -3$ y dos valores propios complejos conjugados $\lambda = 2 \pm i$. Ahora buscamos los vectores propios asociados.

$\lambda = -3$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -26 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos la solución del sistema

$$\phi_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-3t}$$

$\lambda = 2 + i$:

$$\begin{pmatrix} -5-i & 0 & 0 \\ 0 & 1-i & -2 \\ 0 & 1 & -1-i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1-i \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = (1+i)z \end{cases}$$

Así, $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1+i \\ 1 \end{pmatrix}$, de donde obtenemos las dos soluciones l.i.

$$\begin{aligned} \phi_2(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} \cos t - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} \operatorname{sen} t \\ \phi_3(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} \cos t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} \operatorname{sen} t \end{aligned}$$

Luego, la solución general está dada por:

$$\begin{aligned} X(t) &= C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-3t} + \left[C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] e^{2t} \cos t \\ &\quad + \left[-C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] e^{2t} \operatorname{sen} t \end{aligned}$$

Reemplazando las condiciones iniciales:

$$X(0)=\begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_1\\C_2+C_3\\C_2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{array}{c}C_1=3\\C_3=-1\\C_2=-1\end{array}$$

Así, la solución del problema de valor inicial es

$$X(t)=3\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}e^{-3t}+\left[\begin{pmatrix}0\\-2\\-1\end{pmatrix}\cos t+\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}\operatorname{sen} t\right]e^{2t}$$

12. Resolver el sistema no homogéneo

$$X'=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}2\\\cos t\\\cos t\end{pmatrix}$$

Resolvemos primero la ecuación característica:

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}1-\lambda&-1&-1\\1&-1-\lambda&0\\1&0&-1-\lambda\end{vmatrix}&=\begin{vmatrix}1-\lambda&-1&-1\\0&-1-\lambda&1+\lambda\\1&0&-1-\lambda\end{vmatrix}\\&=-(1+\lambda)(\lambda^2+1)=0\end{aligned}$$

Tenemos 3 valores propios: $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=i$, $\lambda_3=-i$, por lo que la matriz es diagonalizable y tenemos tres vectores propios l.i.

$\lambda_1=-1$:

$$\begin{pmatrix}2&-1&-1\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow x=0,\, y=-z\quad v_1=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$\lambda_2=i$:

$$\begin{pmatrix}1-i&-1&-1\\1&-1-i&0\\1&0&-1-i\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1-i\\0&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow x=(1+i)z,\, y=z$$

Obtenemos $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, luego, la solución de la ecuación homogénea asociada es:

$$\begin{aligned} X_h(t) &= C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \left[\cos t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \operatorname{sen} t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\ & \quad + C_3 \left[\cos t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \operatorname{sen} t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \end{aligned}$$

Para encontrar una solución particular resolvemos el sistema:

$$\left. \begin{array}{rcrcrcr} & & (\cos t - \operatorname{sen} t)\, u_2' & + & (\cos t + \operatorname{sen} t)\, u_3' & = & 2 \\ -e^{-t}\, u_1' & + & \cos t\, u_2' & + & \operatorname{sen} t\, u_3' & = & \cos t \\ e^{-t}\, u_1' & + & \cos t\, u_2' & + & \operatorname{sen} t\, u_3' & = & \cos t \end{array} \right|$$

Restando la tercera ecuación con la segunda: $2u_1' = 0 \Rightarrow u_1 = 0$.

Despejando u_2' de la tercera ecuación: $u_2' = \dfrac{\cos t - u_3' \operatorname{sen} t}{\cos t}$.

Reemplazando en la primera ecuación: $u_3' = 2\cos t - \cos t(\cos t - \operatorname{sen} t)$, de donde

$$u_3 = 2 \operatorname{sen} t - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2t - \frac{1}{2} t + \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 t$$

Ahora,

$$\begin{aligned} u_2' &= \frac{\cos t - (2\cos t - \cos t(\cos t - \operatorname{sen} t)) \operatorname{sen} t}{\cos t} \\ &= 1 - 2 \operatorname{sen} t + \cos t \operatorname{sen} t - \operatorname{sen}^2 t \end{aligned}$$

$$u_2 = \frac{t}{2} + 2\cos t + \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 t + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2t$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
X_p(t) &= \left(\frac{t}{2} + 2\cos t + \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 t + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2t\right)\begin{pmatrix}\cos t - \operatorname{sen} t\\ \cos t\\ \cos t\end{pmatrix}\\
&\quad + \left(2\operatorname{sen} t - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2t - \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 t\right)\begin{pmatrix}\cos t + \operatorname{sen} t\\ \operatorname{sen} t\\ \operatorname{sen} t\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

13. Resolver el sistema:

$$
X' = \begin{pmatrix}2 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 2 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} X + \begin{pmatrix}e^t\\ 1\\ t\\ 1\end{pmatrix} e^{2t}
$$

El polinomio característico de la matriz de coeficientes es

$$
\begin{vmatrix}2-\lambda & 2 & 3 & 4\\ 0 & 2-\lambda & 3 & 2\\ 0 & 0 & 1-\lambda & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda\end{vmatrix} = (\lambda-2)^2(\lambda-1)^2
$$

Tenemos dos valores propios, $\lambda = 2$ y $\lambda = 1$ ambos de multiplicidad 2.

$\lambda = 2:$

$$
\begin{pmatrix}0 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 3 & 2\\ 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y = 0\\ z = 0\\ u = 0\end{cases} \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}
$$

Así, la primera solución del sistema es: $\phi_1(t) = \begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} e^{2t}$

Como λ es de multiplicidad 2, debemos encontrar el otro vector:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{2} \\ z = 0 \\ u = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{ Tomando } x = 0,\ \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De aquí, una segunda solución l.i. del sistema es: $\phi_2(t) = \begin{pmatrix} t \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t}$

$\lambda = 1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x &=& 3z \\ y &=& -3z \\ z &=& z \\ u &=& 0 \end{cases} \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Una tercera solución l.i. del sistema es: $\phi_3(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{t}$

Buscamos el otro vector:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \vdots & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & \vdots & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & \vdots & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x &=& 3z + 9 \\ y &=& -3z - 5 \\ z &=& z \\ u &=& 1 \end{cases}$$

Tomando $z = 0$, $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \phi_4(t) = \begin{pmatrix} 3(t+3) \\ -3t - 5 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} e^{t}$

Así,

$$X_h(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} t \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} + C_3 \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{t} + C_4 \begin{pmatrix} 3(t+3) \\ -3t-5 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} e^{t}$$

Ahora, hacemos variación de parámetros para encontrar una solución particular:

$$\begin{array}{cccccccc|} u_1'e^{2t} & + & u_2'te^{2t} & + & u_3'3e^{t} & + & u_4'3(t+3)e^{t} & = & e^{3t} \\ & & \frac{1}{2}u_2'e^{2t} & - & u_3'3e^{t} & - & u_4'(3t+5)e^{t} & = & e^{2t} \\ & & & & u_3'e^{t} & + & u_4'te^{t} & = & te^{2t} \\ & & & & & & u_4'e^{t} & = & e^{2t} \\ \hline \end{array}$$

Despejando en el sistema:

$u_4' = e^t \Rightarrow u_4 = e^t$
$u_3' = 0 \Rightarrow u_3 = 0$ (cualquier constante).
$u_2' = 6(t+2) \Rightarrow u_2 = 3t^2 + 12t = 3t(t+4)$
$u_1' = e^t - 6t(t+2) - 3(t+3) \Rightarrow u_1 = e^t - 2t^3 - \dfrac{15}{2}t^2 - 9t$

Luego,

$$\begin{aligned} X_p(t) &= \left[\begin{pmatrix} e^t - 2t^3 - \frac{15}{2}t^2 - 9t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} 3t(t+4) + \begin{pmatrix} 3(t+3) \\ -(3t+5) \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \right] e^{2t} \\ &= \begin{pmatrix} e^t + t^3 + \frac{9}{2}t^2 - 6t + 9 \\ \dfrac{3}{2}t^2 + 3t - 5 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} \end{aligned}$$

Finalmente, la solución general está dada por

$$X(t) = X_h(t) + X_p(t)$$

14. Resolver el problema de valor inicial

$$X'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t^2 \\ t+1 \\ e^{-t} \\ e^t \end{pmatrix}, \; X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Primero buscamos los valores propios de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda-1)^2$$

Tenemos dos valores propios, ambos de multiplicidad dos.

$\lambda = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} x = 0 \\ y = 0 \\ 2z + u = 0 \end{array} \Rightarrow \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \phi_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Ahora buscamos el segundo vector:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2y = 1 \\ 2z + u = -2 \end{cases}$$

Haciendo $z = 0$, tenemos $u = -2$ y entonces

$$\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \phi_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 1$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \phi_3(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^t$$

La otra solución la obtenemos resolviendo el sistema:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2z = 1 \\ 2y - z = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{v}_4 = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego, $\phi_4(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t\, e^t + \dfrac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} e^t$

La solución del sistema homogéneo asociado es entonces

$$X_h(t) = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{C_2}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2t \\ -4(1+t) \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + C_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 8t \end{pmatrix} \frac{e^t}{8}$$

Buscamos la solución particular usando variación de parámetros:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcl} & & & & & & \frac{1}{8}u_4'e^t & = & t^2 \\ & & \frac{1}{2}u_2' & + & & & \frac{1}{4}u_4'e^t & = & t+1 \\ u_1' & + & tu_2' & + & & & \frac{1}{2}u_4'e^t & = & e^{-t} \\ -2u_1' & - & 2(1+t)u_2' & + & u_3'e^t & + & u_4'te^t & = & e^t \end{array}\right|$$

Luego,

$$\begin{aligned}
u_4' &= 8t^2e^{-t}\\
u_4 &= -8\left(t^2e^{-t}+2te^{-t}+2e^{-t}\right)\\
u_2' &= 2(t+1-2t^2)\\
u_2 &= t^2+2t-\frac{4t^3}{3}\\
u_1' &= e^{-t}-2t(t+1-2t^2)-4t^2 = e^{-t}-6t^2-2t+4t^3\\
u_1 &= -e^{-t}-2t^3-t^2+t^4\\
u_3' &= e^{-t}(e^t+2e^{-t}-16t^2+4t-8t^3+4)\\
u_3 &= t-e^{-2t}+e^{-t}(8t^3+40t^2+76t+72)
\end{aligned}$$

Luego,

$$X_p(t)=\begin{pmatrix} -(t^2+2t+2)\\ -(\frac{3t^2}{2}+3t+\frac{2t^3}{3}+4)\\ -(e^{-t}+t^3+3t^2+\frac{t^4}{3}+8t+8)\\ e^{-t}+te^t+\frac{2t^4}{3}+\frac{14t^3}{3}+20t^2+56t+72\end{pmatrix}$$

Como $X(t)=X_h(x)+X_p(t)$ y usando las condiciones iniciales:

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\-2\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-2\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{2}\\0\\-2\end{pmatrix}+C_3\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}+\frac{1}{8}C_4\begin{pmatrix}1\\2\\4\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\4\\8\\-72\end{pmatrix}$$

Despejando, $C_4=24$, $C_2=-6$, $C_1=-2$, $C_3=-90$.

Luego, la solución del problema de valor inicial es:

$$X(t)=\begin{pmatrix} 3e^t-(t^2+2t+2)\\ 6e^t-(\frac{3t^2}{2}+3t+\frac{2t^3}{3}+7)\\ 12e^t-(e^{-t}+t^3+3t^2+\frac{t^4}{3}+14t+10)\\ (25t-90)e^t+e^{-t}+\frac{2t^4}{3}+\frac{14t^3}{3}+20t^2+68t+88\end{pmatrix}$$

4.3. Ejercicios propuestos

1. Use el método de aniquiladores para resolver los siguientes sistemas:

   a) $\left.\begin{array}{lcl} x'' + y' & = & -5x \\ x' + y' & = & -x + 4y \end{array}\right|$

   b) $\left.\begin{array}{lcl} x' & = & -x + z \\ y' & = & -y + z \\ z' & = & -x + y \end{array}\right|$

   c) $\left.\begin{array}{lcl} x'' - y' & = & t \\ x' - y' & = & 2 + 3y - 3x \end{array}\right|$

   d) $\left.\begin{array}{lcl} x' + y'' & = & 1 + x - y \\ x' + y' & = & 2 + x - y \end{array}\right|$

   e) $\left.\begin{array}{lcl} x'' + y'' + z'' & = & t \\ x' - y' - z' & = & 1 \\ x'' + y' & = & e^t + y - z - x \end{array}\right|$

   f) $\left.\begin{array}{lcl} x' + z & = & e^t \\ x' + y' + z' - x & = & 0 \\ x + 2y + z' & = & e^t \end{array}\right|$

2. Resuelva los siguientes sistemas homogéneos utilizando valores propios:

   a) $X' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} X$

   b) $X' = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} X$

   c) $X' = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \end{pmatrix} X$

   d) $X' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} X$

   e) $X' = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X$

   f) $X' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} X$

   g) $X' = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} X$

   h) $X' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} X$

3. Resuelva los siguientes problemas de valor inicial:

   a) $X' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} X, \ X(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

   b) $X' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} X\,, \ X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

   c) $\begin{array}{rcl|l} x' & = & -x+y & x(0)=2 \\ y' & = & x+2y+z & y(0)=-1 \\ z' & = & 3y-z & z(0)=0 \end{array}$

   d) $\begin{array}{rcl|l} x' & = & 3x-y-z & x(0)=1 \\ y' & = & x+y-z & y(0)=1 \\ z' & = & x-y+z & z(0)=2 \end{array}$

4. Resuelva los siguientes sistemas no homogéneos utilizando valores propios:

   a) $X' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$

   b) $X' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} e^{2t}$

   c) $X' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} \cos 2t - \sin 2t - \cos t - 2\sin t \\ -4\sin 2t - \cos t \end{pmatrix}$

   d) $X' = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} e^{-t}$

   e) $X' = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 4t^2 - 2t + 20 + 11e^t \\ 4t^2 - 2t + 6 + 3e^t \end{pmatrix}$

   f) $X' = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 2e^t \end{pmatrix}$

   g) $X' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 3 \\ t \end{pmatrix} e^{2t}, \ X(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

h) $X' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ e^t \end{pmatrix}, \; X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

5. Resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x' & = & x & + & y & + & z \\ y' & = & 2x & + & y & - & z \\ z' & = & -3x & + & 2y & + & 4z \end{array}\right|$$

   a) Usando el método de eliminación.

   b) Usando el método matricial.

6. Resolver el sistema no homogéneo con coeficientes variables:

$$\left.\begin{array}{rcl} x' & = & \dfrac{3x}{t} - \dfrac{2y}{t} - 2 \\ y' & = & \dfrac{2x}{t} - \dfrac{2y}{t} + t^3 - \dfrac{1}{t} \end{array}\right|$$

7. Supongamos que un recipiente A contiene 50 litros de agua en los que hay disueltos 250 gramos de sal. Suponga que el recipiente B contiene 50 litros de agua pura. Al recipiente A entran 3 litros de agua pura por minuto y la mezcla, bien disuelta, fluye al recipiente B a razón de 4 litros por minuto. Desde el recipiente B, la mezcla vuelve al recipiente A a una rapidez de 1 litro por minuto y hacia un tercer recipiente a razón de 3 litros por minuto. Encuentre la cantidad de sal que hay en cada recipiente en cualquier instante t.

8. Tres recipientes grandes A, B y C contienen 100 litros de salmuera cada uno, con 10, 20 y 30 gramos de sal cada uno, respectivamente. Al primer tanque entra agua pura a razón de 4 litros por minuto. El líquido, bien agitado, se bombea al tanque B a razón de 6 litros por minuto. Desde el tanque B se devuelve mezcla al tanque A a razón de 2 litros por minuto y se bombea mezcla al tercer tanque a una rapidez de 5 litros por minuto. Desde el tanque C, se devuelve mezcla al tanque B a razón de 1 litro por minuto y se expulsan al exterior 4 litros por minuto de mezcla. Calcule la **concentración** de sal en cada uno de los tres tanques en cualquier instante t.

Capítulo 5

La transformada de Laplace

5.1. Resumen

Transformada de Laplace
Sea f una función real definida en el intervalo $[0, \infty)$. La Transformada de Laplace de $f(t)$ se define como

$$\mathfrak{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

para todos los valores de s para los cuales la integral converge.

Función continua por tramos
Una función real f se dice continua por tramos (o seccionalmente continua o continua a trozos) en un intervalo $[a, b]$ si:

1. f está definida y es continua en el intervalo $[a, b]$ excepto en un número finito de puntos $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$.

2. En cada punto de discontinuidad x_i los límites laterales existen.

La función f se dice continua por tramos en el intervalo $[0, \infty)$ si es continua por tramos en todo intervalo $[0, n]$, $n \in \mathbb{N}$.

Función de orden exponencial
Una función real f definida en $[0, \infty)$ se dice que es de orden exponencial α

en $[0, \infty)$ si y solo si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leq Me^{\alpha x}$ para todo $x \geq 0$.

Teorema. Existencia de la Transformada de Laplace. Condiciones suficientes. Si f es una función continua por tramos y de orden exponencial α en el intervalo $[0, \infty)$, entonces su transformada de Laplace existe.

Propiedades de la Transformada de Laplace.

Sean f, g funciones reales cuya transformada de Laplace existe y está dada por $F(s)$ y $G(s)$, respectivamente.

Linealidad. $\mathfrak{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha F(s) + \beta G(s)$, para todo α, $\beta \in \mathbb{R}$.

Primera propiedad de traslación. $\mathfrak{L}\left\{e^{at} f(t)\right\} = F(s-a)$, con $a \in \mathbb{R}$.

Segunda propiedad de traslación. $\mathfrak{L}\{\mathcal{U}_a(t) f(t-a)\} = e^{-as} F(s)$,
donde $a \in \mathbb{R}^+$ y $\mathcal{U}_a$ es la función escalón unitario definida por

$$\mathcal{U}_a(t) = \begin{cases} 1 & t \geq a \\ 0 & t < a \end{cases}$$

Cambio de escala. $\mathfrak{L}\{f(at)\} = \dfrac{1}{a} F\left(\dfrac{s}{a}\right)$, para todo $a \in \mathbb{R}^+$.

Diferenciación. Si f es continua y de orden exponencial α y f' existe y es continua por tramos en $[0, \infty)$, entonces existe la Transformada de Laplace de f' para $s > \alpha$ y está dada por:

$$\mathfrak{L}\left\{f'(t)\right\} = sF(s) - f(0^+)$$

Generalizando apropiadamente se obtiene:

$$\mathfrak{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0^+) - s^{n-2} f'(0^+) - \ldots - f^{(n-1)}(0^+)$$

Integración. Si f es de orden exponencial y continua por tramos, y a es un número real no negativo, la transformada de Laplace de la función g definida por $g(t) = \displaystyle\int_a^t f(u)du$ existe y está dada por:

$$\mathfrak{L}\left\{\int_a^t f(u)du\right\} = \frac{F(s)}{s} - \frac{1}{s}\int_0^a f(u)du$$

Multiplicación por t^n. $\mathfrak{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n F^{(n)}(s)$ para $n \in \mathbb{N}$.

División por t. $\mathfrak{L}\left\{\dfrac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(u)du$, siempre que $\lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{f(t)}{t}$ exista.

Convolución. Se define la convolución de f y g , $f * g$, como:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(u)g(t-u)du$$

Esta operación es conmutativa, asociativa y distributiva con respecto a la suma. Su transformada de Laplace está dada por:

$$\mathfrak{L}\left\{\int_0^t f(u)g(t-u)du\right\} = \mathfrak{L}\{(f * g)(t)\} = F(s)G(s)$$

Funciones periódicas. Si f es periódica de período $p > 0$, entonces:

$$\mathfrak{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-sp}} \int_0^p e^{-st} f(t)dt$$

Propiedades sobre límites.

1. $\lim\limits_{s \to \infty} F(s) = 0$
2. Teorema del valor inicial: $\lim\limits_{t \to 0} f(t) = \lim\limits_{s \to \infty} sF(s)$
3. Teorema del valor final: $\lim\limits_{t \to \infty} f(t) = \lim\limits_{s \to 0} sF(s)$
4. Generalización del Teorema del valor inicial:
   Si $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(t)}{g(t)} = 1$, entonces $\lim\limits_{s \to \infty} \dfrac{F(s)}{G(s)} = 1$
5. Generalización del Teorema del valor final:
   Si $\lim\limits_{t \to \infty} \dfrac{f(t)}{g(t)} = 1$, entonces $\lim\limits_{s \to 0} \dfrac{F(s)}{G(s)} = 1$,

Función de Bessel de primera especie de orden r.
Esta función aparece como solución de la ecuación de Bessel:

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - r^2)y = 0, \; r \geq 0$$

y está dada por:

$$J_r(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(r+n+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{r+2n}, \; J_0(0) = 1$$

Transformada Inversa de Laplace .
Si $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, decimos que f es la transformada inversa de la función F y escribimos $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$.

Transformadas elementales

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s}, \; s > 0$	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \; s > 0$
$\operatorname{sen} at$	$\frac{a}{(s^2+a^2)}, \; s > 0$	$\cos at$	$\frac{s}{(s^2+a^2)}, \; s > 0$
$\operatorname{senh} at$	$\frac{a}{(s^2-a^2)}, \; s > \lvert a \rvert$	$\cosh at$	$\frac{s}{(s^2-a^2)}, \; s > \lvert a \rvert$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}, \; s > a$	t^a	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}, \; s > 0, a > -1$
$J_0(at)$	$\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}, \; s > 0$	$J_n(at)$	$\frac{(\sqrt{s^2+a^2}-s)^n}{a^n\sqrt{s^2+a^2}}, \; s > 0$
$\mathcal{U}_a(t)$	$\frac{e^{-as}}{s}, \; s > 0$	$\delta(t)$	1

5.2. Problemas Resueltos

1. Demostrar la segunda propiedad de traslación: si $\mathcal{L}\{f(t)\}$ existe, entonces $\mathcal{L}\{\mathcal{U}_a(t)f(t-a)\} = e^{-as}F(s)$.

   Aplicamos directamente la definición:
   $$\mathcal{L}\{\mathcal{U}_a(t)f(t-a)\} = \int_0^\infty \mathcal{U}_a(t)f(t-a)e^{-st}dt = \int_a^\infty f(t-a)e^{-st}dt$$
   Haciendo el cambio de variable $u = t - a$:
   $$\mathcal{L}\{\mathcal{U}_a(t)f(t-a)\} = \int_0^\infty f(u)e^{-s(u+a)}du = e^{-as}F(s)$$

2. Sea $f(t) = \begin{cases} 2t & \text{si} \quad 0 \le t \le 1 \\ t & \text{si} \quad t > 1 \end{cases}$. Calcular $\mathcal{L}\{f(t)\}$ y $\mathcal{L}\{f'(t)\}$.

   Escribimos primero f en términos de la función escalón unitario:
   $$f(t) = 2t - t\,\mathcal{U}_1(t) = 2t - (t-1)\,\mathcal{U}_1(t) - \mathcal{U}_1(t)$$
   Entonces, $\Rightarrow \mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{2}{s^2} - \dfrac{e^{-s}}{s^2} - \dfrac{e^{-s}}{s}$

   Ahora bien, como f no es continua, no podemos usar directamente la fórmula $\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0^+)$ para calcular la transformada de f'. Pero
   $$f'(t) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad 0 \le t \le 1 \\ 1 & \text{si} \quad t > 1 \end{cases} = 2 - \mathcal{U}_1(t) \Rightarrow \mathcal{L}\{f'(t)\} = \frac{2}{s} - \frac{e^{-s}}{s}$$
   Por supuesto, también podríamos haber usado la fórmula para funciones con discontinuidad por saltos:
   $$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f'(t)\} &= sF(s) - f(0^+) - e^{-s}(f(1^+) - f(1^-)) \\ &= \frac{2}{s} - \frac{e^{-s}}{s} - e^{-s} + e^{-s} \\ &= \frac{2}{s} - \frac{e^{-s}}{s} \end{aligned}$$

3. Determinar la Transformada de Laplace de $f(t) = te^{-2t}\,\text{sen}\,\omega\, t$.

   Como $\mathcal{L}\left\{\text{sen}\,\omega\, t\right\} = \dfrac{\omega}{s^2+w^2}$ para $s > 0$, entonces

   $$\mathcal{L}\left\{e^{-2t}\,\text{sen}\,\omega\, t\right\} = \frac{\omega}{(s+2)^2+\omega^2}\,,\; s > 0$$

   Luego, para $s > 0$,

   $$F(s) = \mathcal{L}\left\{te^{-2t}\,\text{sen}\,\omega\, t\right\} - \frac{d}{ds}\left(\frac{\omega}{(s+2)^2+\omega^2}\right) = \frac{2\omega(s+2)}{((s+2)^2+\omega^2)^2}$$

4. Determinar $\mathcal{L}\{(t^2-3t+2)\,\text{sen}\,3t\}$.

   Aplicamos linealidad y multiplicación por t y t^2.

   $$\begin{aligned} F(s) &= \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{3}{s^2+9}\right) + 3\frac{d}{ds}\left(\frac{3}{s^2+9}\right) + 2\left(\frac{3}{s^2+9}\right) \\ &= \frac{-6(s^2+9)+24s^2}{(s^2+9)^3} - \frac{18s}{(s^2+9)^2} + \frac{6}{s^2+9} \\ &= \frac{18(s^2-3)}{(s^2+9)^3} - \frac{18s}{(s^2+9)^2} + \frac{6}{s^2+9} \end{aligned}$$

5. Calcular $\mathcal{L}\{f(t)\}$, donde $f(t) = \begin{cases} \text{sen}\, t & \text{si} \quad 0 < t < \pi \\ 0 & \text{si} \quad t > \pi \end{cases}$

   Aquí conviene simplemente aplicar la definición:

   $$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \\ &= \int_0^\pi \text{sen}\, t\, e^{-st}dt \\ &= -\frac{e^{-st}}{s^2+1}(s\,\text{sen}\, t + \cos t)\Big|_0^\pi \\ &= \frac{e^{-s\pi}+1}{s^2+1} \end{aligned}$$

6. Determinar $\mathcal{L}\{f(t)\}$, donde $f(t) = \begin{cases} \cos t & 0 < t < \pi \\ \operatorname{sen} t & t > \pi \end{cases}$

   También podríamos usar directamente la definición, pero es más cómodo escribir f en términos de la función escalón:

$$\begin{aligned} f(t) &= \cos t + \mathcal{U}_\pi(t)\,(\operatorname{sen} t - \cos t) \\ &= \cos t - \mathcal{U}_\pi(t)\,(\operatorname{sen}(t-\pi) - \cos(t-\pi)) \end{aligned}$$

   Luego,

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{s}{s^2+1} - \frac{e^{-s\pi}(1-s)}{s^2+1}$$

7. Si f es de orden exponencial y continua por tramos en $[0,\infty)$ y se sabe que $\mathcal{L}\{tf(t)\} = \dfrac{1}{s(s^2+1)}$, encontrar $\mathcal{L}\{e^{-t}f(2t)\}$.

   Usaremos la propiedad de división por t. Sea $g(t) = tf(t)$, entonces $G(s) = \dfrac{1}{s(s^2+1)}$.

   Por hipótesis, sabemos que $f(0^+)$ existe, luego

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{g(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty \frac{1}{u(u^2+1)}du = \ln \frac{u}{\sqrt{u^2+1}}\Big|_s^\infty \\ &= -\ln \frac{s}{\sqrt{s^2+1}} \end{aligned}$$

   Usando la propiedad de cambio de escala:

$$\mathfrak{L}\{f(2t)\} = \frac{1}{2}F\left(\frac{s}{2}\right) = -\frac{1}{2}\ln\frac{s}{\sqrt{s^2+4}} = \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{s^2+4}}{s}$$

   Finalmente, usando la primera propiedad de traslación:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{e^{-t}f(2t)\} &= \frac{1}{2}F\left(\frac{s+1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{(s+1)^2+4}}{s+1} \end{aligned}$$

8. Determinar $\mathcal{L}\{t - [t]\}$, con $t \in [0, \infty)$ ($[t]$ es la función parte entera).

Camino 1. Podemos escribir la función parte entera como una serie en términos de la función escalón:

$$[t] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n(t)$$

cuya transformada de Laplace es

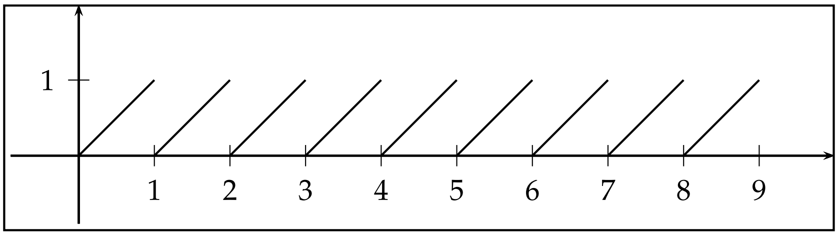
$$\mathcal{L}\{[t]\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-ns}}{s} = \frac{1}{s}\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{-s}\right)^n = \frac{1}{s}\left(\frac{1}{1-e^{-s}} - 1\right)$$

esto último por tratarse de una serie geométrica con coeficiente menor que 1 que parte en $n = 1$.

Luego,

$$\mathcal{L}\{t - [t]\} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s}\left(\frac{1}{1-e^{-s}} - 1\right) = \frac{1}{s}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{1-e^{-s}} + 1\right)$$

Camino 2. Otra forma de resolver este problema es graficar la función, notar que se trata de una función periódica y usar la propiedad correspondiente.



$$\mathcal{L}\{t - [t]\} = \frac{1}{1-e^{-s}} \int_0^1 e^{-st} t dt = \frac{1}{1-e^{-s}}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-s}}{s^2}\right)$$

y es un cálculo sencillo verificar que este resultado es igual al anterior.

9. *a*) Calcular $\mathcal{L}\{\text{sen}^2 t\}$.

$$\text{sen}^2 t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2t) \Rightarrow \mathcal{L}\{\text{sen}^2 t\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4}\right)$$

b) Usar *a*) para demostrar que $\mathcal{L}\left\{\frac{\text{sen}^2 t}{t}\right\} = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{s^2+4}{s^2}\right)$.

Como $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\text{sen}^2 t}{t} = 0$ existe, entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\frac{\text{sen}^2 t}{t}\right\} &= \frac{1}{2}\int_s^\infty \left(\frac{1}{u} - \frac{u}{u^2+4}\right) du \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{u}{\sqrt{u^2+4}}\right)\Big|_s^\infty \\
&= \frac{1}{4}\ln\left(\frac{s^2+4}{s^2}\right)
\end{aligned}$$

c) Usar *b*) para calcular $\int_0^\infty \frac{e^{-t}\,\text{sen}^2 t}{t} dt$.

Como $\int_0^\infty \frac{e^{-st}\,\text{sen}^2 t}{t} dt = \mathcal{L}\left\{\frac{\text{sen}^2 t}{t}\right\} = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{s^2+4}{s^2}\right)$, obtenemos el valor de la integral pedida evaluando en $s = 1$, es decir

$$\int_0^\infty \frac{e^{-t}\,\text{sen}^2 t}{t} dt = \frac{1}{4}\ln 5$$

10. Calcular usando propiedades $\mathcal{L}\{e^{-3t}\int_0^t u \cos 4u \, du\}$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\cos 4t\} &= \frac{s}{s^2+16} \\
\mathcal{L}\{t \cos 4t\} &= -\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+16}\right) \\
&= \frac{s^2-16}{(s^2+16)^2}
\end{aligned}$$

Luego, $\mathcal{L}\{e^{-3t}\int_0^t u \cos 4u \, du\} = \frac{(s+3)^2-16}{(s+3)((s+3)^2+16)^2}$.

11. Sea f tal que f y f' son continuas y f'' continua a trozos en $[0,\infty)$. Si $\mathcal{L}\left\{f''(t)\right\} = \arctan\left(\dfrac{1}{s}\right)$, $f(0) = 2$ y $f'(0) = -1$, encontrar $\mathcal{L}\{f(t)\}$.

    Usando la propiedad de la Transformada de Laplace de la segunda derivada:

$$\mathcal{L}\left\{f''(t)\right\} = s^2F(s) - sf(0^+) - f'(0^+) = \arctan\left(\frac{1}{s}\right)$$

    Luego,

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s^2}\left[\arctan\left(\frac{1}{s}\right) + 2s - 1\right]$$

12. Calcular $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-3s}}{s^2+6s+10}\right\}$.

    Usaremos la segunda propiedad de traslación:

$$\frac{1}{s^2+6s+10} = \frac{1}{(s+3)^2+1} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+6s+10}\right\} = e^{-3t}\operatorname{sen} t$$

    Luego,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-3s}}{s^2+6s+10}\right\} = \mathcal{U}_3(t)e^{-3(t-3)}\operatorname{sen}(t-3)$$

13. Calcular la Transformada Inversa de $F(s) = \ln\left(1+\dfrac{1}{s}\right)$.

    Camino 1. Usamos la propiedad de la multiplicación por t.

$$\begin{aligned}
F(s) &= \ln\left(1+\frac{1}{s}\right) &= \ln\frac{s+1}{s} \\
F'(s) &= -\frac{1}{s(s+1)} &= \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{tf(t)\right\} &= -\frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} \\
tf(t) &= 1 - e^{-t} \\
f(t) &= \frac{1-e^{-t}}{t}
\end{aligned}$$

Camino 2. Escribimos primero el desarrollo en serie de potencias de $\ln\left(1+\dfrac{1}{s}\right)$ y aplicamos la Transformada Inversa de Laplace:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\ln\left(1+\frac{1}{s}\right)\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\,s^n}\right\}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^n}\right\}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}t^{n-1}}{n!}\\
&= -\frac{1}{t}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}t^{n}}{n!}\\
&= \frac{1}{t}\left(1-e^{-t}\right)
\end{aligned}$$

14. Calcular $\mathcal{L}^{-1}\{\dfrac{1}{s^3+1}\}$.

Camino 1. Fracciones parciales.

$$\frac{1}{s^3+1}=\frac{1}{(s+1)(s^2-s+1)}=\frac{A}{s+1}+\frac{Bs+C}{s^2-s+1}$$

Entonces, debemos resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl}
A & + & B & & & = & 0\\
-A & + & B & + & C & = & 0\\
A & & & + & C & = & 1
\end{array}\right| \Rightarrow A=\frac{1}{3},\ B=-\frac{1}{3}\ ,\ C=\frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{s^3+1} &= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{s+1}+\frac{-s+2}{s^2-s+1}\right]\\
&= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{s+1}-\frac{s-\frac{1}{2}}{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}+\frac{\frac{3}{2}}{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right]
\end{aligned}$$

Luego,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3+1}\right\}=\frac{1}{3}\left[e^{-t}-e^{\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}t}{2}+\sqrt{3}\,e^{\frac{t}{2}}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}t}{2}\right]$$

Camino 2. Convolución.

$$\frac{1}{s^3+1} = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{s^2-s+1}.$$

$F(s) = \dfrac{1}{s+1} \Rightarrow f(t) = e^{-t}$.

$$G(s) = \frac{1}{s^2-s+1} = \frac{1}{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}.$$

Entonces, $g(t) = \dfrac{2}{\sqrt{3}} e^{\frac{t}{2}} \operatorname{sen} \dfrac{\sqrt{3}t}{2}$.
Luego

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3+1}\right\} &= \int_0^t \frac{2}{\sqrt{3}} e^{\frac{u}{2}} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}u}{2} e^{-(t-u)} du \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-t} \int_0^t e^{\frac{3u}{2}} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}u}{2} \, du \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-t} \left[\frac{e^{\frac{3u}{2}}}{3} \left(\frac{3}{2} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}u}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \frac{\sqrt{3}u}{2} \right) \right] \Bigg|_0^t \\
&= \frac{2e^{-t}}{\sqrt{3}} \left[\frac{e^{\frac{3}{2}t}}{3} \left(\frac{3}{2} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}t}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \frac{\sqrt{3}t}{2} \right) + \frac{\sqrt{3}}{6} \right] \\
&= \frac{e^{\frac{t}{2}}}{3} \left[\sqrt{3} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}t}{2} - \cos \frac{\sqrt{3}t}{2} \right] + \frac{e^{-t}}{3}
\end{aligned}$$

15. Demostrar que $\displaystyle\int_0^\infty J_0(x)\, dx = 1$.

El cálculo de esta integral es una aplicación directa de la Transformada de Laplace.
$\mathcal{L}\{J_0(t)\} = \displaystyle\int_0^\infty J_0(t)\, e^{-st} dt = \dfrac{1}{\sqrt{s^2+1}}$, $s > 0$ (ver Tabla).

Luego, $\displaystyle\int_0^\infty J_0(x)\, dx = \lim_{s\to 0^+} \int_0^\infty J_0(t)\, e^{-st} dt = \lim_{s\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{s^2+1}} = 1$.

16. Evaluar la integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-2t}-e^{-4t}}{t}\,dt$.

$f(t) = e^{-2t} - e^{-4t} \Rightarrow F(s) = \dfrac{1}{s+2} - \dfrac{1}{s+4}$.

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(t)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{e^{-2t}-e^{-4t}}{t} = -2+4 = 2\text{, existe.}$$

$$\mathfrak{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(u)du = \int_s^\infty \left(\frac{1}{u+2} - \frac{1}{u+4}\right) du = 0 - \ln\frac{s+2}{s+4}.$$

Luego, $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-2t}-e^{-4t}}{t} e^{-st}\,dt = \ln\frac{s+4}{s+2}$, de donde, tomando $s=0$,

$$\int_0^\infty \frac{e^{-2t}-e^{-4t}}{t}\,dt = \ln 2$$

17. Demostrar que $\displaystyle\mathcal{L}\{\operatorname{sen} t^2\} = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}(4n-2)!}{(2n-1)!s^{4n-1}}$.

Como $\displaystyle\operatorname{sen} t = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}t^{2n-1}}{(2n-1)!}$, tenemos que

$$\operatorname{sen} t^2 = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}t^{4n-2}}{(2n-1)!}$$

Luego, $\displaystyle\mathcal{L}\{\operatorname{sen} t^2\} = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}(4n-2)!}{(2n-1)!s^{4n-1}}$.

18. Demostrar que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-ax}\operatorname{sen} bx}{x}dx = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$, $a, b > 0$.

Como $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} bx}{x} = b$, existe, entonces para $s > 0$:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\operatorname{sen} bt}{t}\right\} = \int_s^\infty \frac{b}{u^2+b^2}du = \arctan\frac{u}{b}\Big|_s^\infty = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{s}{b} = \arctan\frac{b}{s}$$

Evaluando en $s=a$, obtenemos $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-ax}\operatorname{sen} bx}{x}dx = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$.

19. Demostrar que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{u \operatorname{sen} tu}{1+u^2} du = \frac{\pi}{2} e^{-t}$.

    Aplicamos Transformada de Laplace:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\int_0^\infty \frac{u \operatorname{sen} tu}{1+u^2} du\right\} &= \int_0^\infty e^{-st} \int_0^\infty \frac{u \operatorname{sen} tu}{1+u^2} du\, dt \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{u \operatorname{sen} tu}{1+u^2} e^{-st}\, du\, dt \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{u \operatorname{sen} tu}{1+u^2} e^{-st}\, dt\, du \\
&= \int_0^\infty \frac{u}{1+u^2} \mathcal{L}\{\operatorname{sen} ut\}\, du \\
&= \int_0^\infty \left[\frac{u}{1+u^2} \cdot \frac{u}{s^2+u^2}\right] du \\
&= \frac{1}{1-s^2} \int_0^\infty \left[\frac{1}{1+u^2} - \frac{s^2}{s^2+u^2}\right] du \\
&= \frac{1}{1-s^2} \left[\arctan\, u - s \arctan\left(\frac{u}{s}\right)\right] \Big|_0^\infty \\
&= \frac{1}{1-s^2}\, \frac{\pi}{2}(1-s) \\
&= \frac{\pi}{2(s+1)}
\end{aligned}$$

    Aplicando Transformada Inversa, $y(t) = \dfrac{\pi}{2}\, e^{-t}$.

20. Evaluar la integral: $\displaystyle\int_0^\infty \int_u^\infty (t-u)^3 e^{-(t-u)} \operatorname{sen} u\, dt\, du$.

    Primero cambiamos los límites de la integral:

$$\int_0^\infty \int_u^\infty (t-u)^3 e^{-(t-u)} \operatorname{sen} u\, dt\, du = \int_0^\infty \int_0^t (t-u)^3 e^{-(t-u)} \operatorname{sen} u\, du\, dt$$

    Ahora, $\displaystyle\int_0^t (t-u)^3 e^{-(t-u)} \operatorname{sen} u\, du = t^3 e^{-t} * \operatorname{sen} t$.

Aplicando Transformada de Laplace :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{t^3e^{-t} * \operatorname{sen} t\} &= \frac{6}{(s+1)^4} \cdot \frac{1}{s^2+1} \\ &= \int_0^\infty e^{-st} \int_0^t (t-u)^3 e^{-(t-u)} \operatorname{sen} u \, du \, dt\end{aligned}$$

Evaluando en $s = 0$ tenemos $\displaystyle\int_0^\infty \int_u^\infty (t-u)^3 e^{-t} \operatorname{sen} u \, dt \, du = 6.$

21. Resolver la ecuación integral:

$$y(x) = x - e^x \int_0^x e^{-t} y(t) dt$$

Aplicamos Transformada de Laplace a la expresión y obtenemos

$$Y(s) = \frac{1}{s^2} - \mathcal{L}\left\{e^x \int_0^x e^{-t} y(t) dt\right\}$$

Ahora,

$$\mathcal{L}\left\{e^x \int_0^x e^{-t} y(t) dt\right\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^x e^{x-t} y(t) dt\right\} = \frac{1}{s-1} Y(s)$$

Entonces, $\left(1 + \dfrac{1}{s-1}\right) Y(s) = \dfrac{1}{s^2}$, de donde $Y(s) = \dfrac{s-1}{s^3}$. Luego,

$$y(x) = x - \frac{1}{2}x^2$$

22. Resolver la ecuación $y(t) = t + \dfrac{1}{6} \displaystyle\int_0^t (t-u)^3 y(u) du.$

Aplicando Transformada de Laplace, $Y(s) = \dfrac{1}{s^2} + \dfrac{1}{s^4} Y(s)$. Despejando,

$$Y(s) = \frac{s^2}{s^4 - 1} = \frac{s^2}{(s^2-1)(s^2+1)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s^2-1} + \frac{1}{s^2+1}\right]$$

Luego, $y(t) = \dfrac{1}{2}(\operatorname{senh} t + \operatorname{sen} t)$.

23. Resolver la ecuación $e^{-x} = y(x) + 2\int_0^x \cos(x-t)y(t)dt$.

Aplicamos Transformada de Laplace:

$$\frac{1}{s+1} = Y(s) + 2\frac{s}{s^2+1}Y(s)$$

Despejando:

$$Y(s) = \frac{s^2+1}{(s+1)^3} = \frac{1}{s+1} - \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{2}{(s+1)^3}$$

Aplicando Transformada Inversa:

$$y(t) = e^{-t} - 2te^{-t} + t^2e^{-t}$$

24. Resolver usando Transformada de Laplace el problema de valor inicial

$$y'' - y = e^t \ , \ y(0) = 0 \ , \ y'(0) = 1$$

Aplicando Transformada de Laplace,

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - Y(s) = \frac{1}{s-1}$$

de donde

$$Y(s) = \frac{1}{s^2-1}\left[\frac{1}{s-1} + 1\right] = \frac{s}{(s+1)(s-1)^2}$$

Separando en fracciones parciales,

$$Y(s) = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{s-1} + \frac{2}{(s-1)^2} - \frac{1}{s+1}\right]$$

Aplicando Inversa:

$$y(t) = \frac{1}{4}(e^t + 2te^t - e^{-t})$$

25. Resolver el problema de valor inicial de segundo orden

$$y'' + 4y = f(t), \qquad y(0) = y'(0) = 0$$

donde

$$f(t) = \begin{cases} 3\,\mathrm{sen}\, t & 0 \leq t \leq 2\pi \\ 0 & t > 2\pi \end{cases}$$

Aplicando Transformada de Laplace,

$$(s^2 + 4)Y(s) = F(s)$$

Por supuesto, podemos calcular $\mathcal{L}\{f(t)\}$ directamente de la definición, es decir

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = 3 \int_0^{2\pi} e^{-st}\, \mathrm{sen}\, t\, dt$$

Sin embargo, resulta más conveniente aplicar la segunda propiedad de traslación, pues

$$f(t) = 3\,\mathrm{sen}\, t - 3\mathcal{U}_{2\pi}(t)\,\mathrm{sen}(t) = 3\,\mathrm{sen}\, t - 3\mathcal{U}_{2\pi}(t)\,\mathrm{sen}(t - 2\pi)$$

Luego

$$F(s) = \mathcal{L}\{3\,\mathrm{sen}\, t - 3\mathcal{U}_{2\pi}(t)\,\mathrm{sen}(t - 2\pi)\} = \frac{3}{s^2+1} - \frac{3e^{-2\pi s}}{s^2+1}$$

Así,

$$Y(s) = \frac{1}{s^2+4}\left[\frac{3}{s^2+1} - \frac{3e^{-2\pi s}}{s^2+1}\right] = \frac{3}{(s^2+4)(s^2+1)} - \frac{3e^{-2\pi s}}{(s^2+4)(s^2+1)}$$

Separando en fracciones parciales:

$$\frac{3}{(s^2+4)(s^2+1)} = \frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+4}$$

Luego,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{(s^2+4)(s^2+1)}\right\} = \mathrm{sen}\, t - \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\, 2t$$

de donde

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathrm{sen}\, t - \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\, 2t - \mathcal{U}_{2\pi}(t)\left(\mathrm{sen}(t - 2\pi) - \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\, 2(t - 2\pi)\right) \\ &= \begin{cases} \mathrm{sen}\, t - \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\, 2t & t < 2\pi \\ 0 & t > 2\pi \end{cases} \end{aligned}$$

26. Resolver el problema de valor inicial

$$y'' + 2y' - 3y = 3f(t),\ y(0) = y'(0) = 0$$

donde

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 1 \\ t^2 - 2t + 1 & 1 < t \leq 3 \\ 4t - 8 & t > 3 \end{cases}$$

Escribimos la función f en términos de la función escalón unitario:

$$f(t) = (t-1)^2\mathcal{U}_1(t) - (t-3)^2\mathcal{U}_3(t)$$

Aplicando Transformada de Laplace:

$$(s^2 + 2s - 3)Y = 3\left(\frac{e^{-s}}{s^3} - \frac{e^{-3s}}{s^3}\right)$$

de donde:

$$Y(s) = \frac{3e^{-s}}{s^3(s-1)(s+3)} - \frac{3e^{-3s}}{s^3(s-1)(s+3)}$$

Separando en fracciones parciales

$$\frac{3}{s^3(s-1)(s+3)} = \frac{As^2 + Bs + C}{s^3} + \frac{D}{s-1} + \frac{E}{s+3}$$

obtenemos

$$A = -\frac{7}{9}\, B = -\frac{2}{3},\ C = -1,\ D = \frac{3}{4},\ E = \frac{1}{36}$$

Luego,

$$\begin{aligned} Y(s) &= e^{-s}\left[-\frac{7}{9s} - \frac{2}{3s^2} - \frac{1}{s^3} + \frac{3}{4(s-1)} + \frac{1}{36(s+3)}\right] \\ &\quad -e^{-3s}\left[-\frac{7}{9s} - \frac{2}{3s^2} - \frac{1}{s^3} + \frac{3}{4(s-1)} + \frac{1}{36(s+3)}\right] \end{aligned}$$

de donde:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{U}_1(t)\left[-\frac{7}{9} - \frac{2(t-1)}{3} - \frac{(t-1)^2}{2} + \frac{3e^{t-1}}{4} + \frac{e^{-3(t-1)}}{36}\right] + \\ &\quad +\mathcal{U}_3(t)\left[\frac{7}{9} + \frac{2(t-3)}{3} + \frac{(t-3)^2}{2} - \frac{3e^{t-3}}{4} - \frac{e^{-3(t-3)}}{36}\right] \end{aligned}$$

27. La corriente i de un circuito RLC en serie está regida por la ecuación:

$$i''(t) + 4i(t) = g(t), \;\; i(0) = i'(0) = 0\,, \text{con } g(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < \pi \\ -1 & \pi \leq t < 2\pi \\ 0 & t > 2\pi \end{cases}$$

Determinar la corriente en cualquier instante.

Tenemos $g(t) = 1 - 2\mathcal{U}_\pi(t) + \mathcal{U}_{2\pi}(t)$.

Así, la ecuación queda expresada como

$$i''(t) + 4i(t) = 1 - 2\mathcal{U}_\pi(t) + \mathcal{U}_{2\pi}(t)$$

Aplicando Transformada de Laplace se tiene

$$\begin{aligned} s^2 I(s) + 4I(s) &= \frac{1}{s} - 2\frac{e^{-\pi s}}{s} + \frac{e^{-2\pi s}}{s} \\ I(s) &= \frac{1}{s(s^2+4)} - 2\frac{e^{-\pi s}}{s(s^2+4)} + \frac{e^{-2\pi s}}{s(s^2+4)} \end{aligned}$$

Ahora, como $\dfrac{1}{s(s^2+4)} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{s} - \dfrac{s}{s^2+4}\right)$, aplicando la Transformada Inversa se tiene:

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{1}{4}(1 - \cos 2t) - \frac{\mathcal{U}_\pi(t)}{2}[1 - \cos 2(t-\pi)] \\ &\qquad + \frac{\mathcal{U}_{2\pi}(t)}{4}[1 - \cos 2(t - 2\pi)] \\ &= \frac{1}{4}(1 - \cos 2t) - \frac{\mathcal{U}_\pi(t)}{2}(1 - \cos 2t) + \frac{\mathcal{U}_{2\pi}(t)}{4}(1 - \cos 2t) \\ &= \begin{cases} \dfrac{1 - \cos 2t}{4} & 0 < t < \pi \\ \\ \dfrac{\cos 2t - 1}{4} & \pi \leq t < 2\pi \\ 0 & t > 2\pi \end{cases} \end{aligned}$$

28. Resolver usando Transformada de Laplace el problema de valor inicial

$$ty'' + 2(t-1)y' + (t-2)y = 0 \quad , \quad y(0) = y'(0) = 0$$

Esta es una ecuación lineal de segundo orden con coeficientes variables, sin embargo el teorema de existencia y unicidad no es aplicable en $t = 0$.

Aplicando Transformada de Laplace y sus propiedades:

$$\frac{d}{ds}\left(s^2 Y(s)\right) + 2\frac{d}{ds}\left(sY(s)\right) + 2sY(s) + \frac{d}{ds}Y(s) + 2Y(s) = 0.$$

Reuniendo términos semejantes, $(s+1)^2 Y'(s) + 4(s+1)Y(s) = 0$, y separando variables:

$$\frac{Y'(s)}{Y(s)} = -\frac{4}{s+1}$$

Luego, $\ln|Y(s)| = -4\ln|s+1| + C$, de donde

$$Y(s) = \frac{C}{(s+1)^4}$$

Aplicando Transformada Inversa, se obtiene la familia de soluciones,

$$y(t) = Ct^3 e^{-t}$$

lo que significa que el problema de valor inicial tiene infinitas soluciones continuas que satisfacen las condiciones dadas.

29. Resolver el problema de valor inicial

$$ty'' + 2(t-1)y' + (t-2)y = 0 \quad , \quad y(0) = 1 \, , \, y'(0) = -1$$

Notemos que se trata de la misma ecuación anterior, pero distintas condiciones iniciales. Aplicando nuevamente Transformada de Laplace:

$$\begin{aligned} -\frac{d}{ds}(s^2 Y - s + 1) - 2\frac{d}{ds}(sY - 1) - 2sY + 2 - Y' - 2Y &= 0 \\ 2sY + s^2 Y' - 1 + 2Y + 2sY' + 2sY - 2 + Y' + 2Y &= 0 \\ (s+1)^2 Y' + 4(s+1)Y - 3 &= 0 \end{aligned}$$

Luego

$$Y'(s) + \frac{4}{s+1}Y(s) = \frac{3}{(s+1)^2}$$

Como se trata de una ecuación lineal su solución es:

$$Y(s) = e^{-\int \frac{4}{s+1}\,ds}\left[C + 3\int (s+1)^2 ds\right] = \frac{1}{(s+1)^4}\left[C + (s+1)^3\right]$$

Aplicando Transformada Inversa obtenemos nuevamente infinitas soluciones

$$y(t) = \frac{C}{6}t^3e^{-t} + e^{-t}$$

30. Resolver el problema de valor inicial

$$tx'' + (4t-2)x' + (13t-4)x = 0\,, \quad x(0) = 0,\ x'(0) = a,\ a \in \mathbb{R}$$

Aplicando Transformada de Laplace:

$$\begin{aligned}
-\frac{d}{ds}(s^2X - a) - 4\frac{d}{ds}(sX) - 2sX - 13X' - 4X &= 0 \\
-s^2X' - 2sX - 4sX' - 4X - 2sX - 13X' - 4X &= 0 \\
(s^2 + 4s + 13)X' + 4(s+2)X &= 0
\end{aligned}$$

Obtenemos una ecuación de variables separables:

$$\begin{aligned}
\frac{X'}{X} &= -\frac{4(s+2)}{(s^2+4s+13)} \\
&= -\frac{4(s+2)}{(s+2)^2+9} \\
\ln X &= -2\ln((s+2)^2+9) + C \\
X(s) &= \frac{C}{((s+2)^2+9)^2}
\end{aligned}$$

Luego, aplicando Transformada Inversa:

$$x(t) = \frac{Ce^{-2t}}{54}(\operatorname{sen} 3t - 3t\cos 3t)$$

Derivando,

$$x'(t) = \frac{C}{54}e^{-2t}\left[9t\operatorname{sen} 3t - 2\operatorname{sen} 3t - 6t\cos 3t\right]$$

Por lo tanto, $x'(0) = 0$, de donde el problema de valor inicial dado tiene infinitas soluciones para $a = 0$ y no tiene solución si $a \neq 0$.

31. Resolver el problema no homogéneo:

$$ty'' + (2t+1)y' + (t+1)y = 3e^{-t}\,,\; y(0) = 0$$

Aplicando la Transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación y derivando:

$$-2sY(s) - s^2Y'(s) - 2sY'(s) - 2Y(s) + sY(s) - Y'(s) + Y(s) = \frac{3}{s+1}$$

Simplificando y despejando obtenemos una ecuación lineal:

$$\begin{aligned} Y'(s)(s^2+2s+1) + Y(s)(s+1) &= -\frac{3}{s+1} \\ Y'(s) + \frac{Y(s)}{(s+1)} &= -\frac{3}{(s+1)^3} \end{aligned}$$

Resolviendo esta ecuación lineal y aplicando Transformada inversa,

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{s+1}\left[C + \frac{3}{s+1}\right] \\ y(t) &= Ce^{-t} + 3te^{-t} \end{aligned}$$

Como $y(0) = 0$, $C = 0$, de donde

$$y(t) = 3te^{-t}$$

Notemos que necesariamente, $y'(0) = 3$ y en este caso hay solución única. Si $y'(0) \neq 3$, el problema no tiene solución.

32. Resolver el problema

$$t(1-t)y'' + 2y' + 2y = 6t,\ y(0) = y(2) = 0$$

Ahora se trata de un problema de valores de contorno.

Aplicamos Transformada de Laplace,

$$\begin{aligned} -\frac{d}{ds}(s^2Y - y'(0)) - \frac{d^2}{ds^2}(s^2Y - y'(0)) + 2sY + 2Y &= \frac{6}{s^2} \\ -2sY - s^2Y' - 2Y - 4sY' - s^2Y'' + 2sY + 2Y &= \frac{6}{s^2} \\ -s^2Y''(s) - (s^2 + 4s)Y'(s) &= \frac{6}{s^2} \end{aligned}$$

Obtenemos la ecuación lineal de segundo orden:

$$Y''(s) + \left[1 + \frac{4}{s}\right] Y'(s) = -\frac{6}{s^4}$$

De aquí,

$$Y'(s) = e^{-\int\left(1+\frac{4}{s}\right)ds} \left[C - 6\int \frac{e^{\int\left(1+\frac{4}{s}\right)ds}}{s^4} ds\right] = \frac{e^{-s}}{s^4}\left[C - 6e^s\right]$$

Ahora, como $\mathcal{L}\{ty(t)\} = -Y'(s)$, entonces

$$t\,y(t) = -\mathcal{L}^{-1}\{Y'(s)\} = -\frac{C(t-1)^3}{6}\mathcal{U}_1(t) + t^3$$

de donde $y(t) = t^2 - \dfrac{C(t-1)^3}{6t}\mathcal{U}_1(t)$

Ahora, $y(2) = 0$, luego $C = 48$ y entonces:

$$y(t) = t^2 - \frac{8(t-1)^3}{t}\mathcal{U}_1(t)$$

33. Resolver la ecuación diferencial-integral:

$$x'(t) + 2x(t) + \int_0^t x(u)du = f(t), \qquad x(0) = 1$$

donde $f(t) = \begin{cases} t & t < 1 \\ 2-t & 1 < t < 2 \\ 0 & t > 2 \end{cases}$

Como siempre escribimos la función f en términos de la función escalón.

$$f(t) = t - 2\mathcal{U}_1(t)(t-1) + \mathcal{U}_2(t)(t-2)$$

Aplicando Transformada de Laplace:

$$\begin{aligned} sX - 1 + 2X + \frac{1}{s}X &= \mathcal{L}\{t - 2\mathcal{U}_1(t)(t-1) + \mathcal{U}_2(t)(t-2)\} \\ \frac{s^2+2s+1}{s}X(s) &= \frac{1}{s^2} - \frac{2e^{-s}}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{s^2} + 1 \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{1+s^2-2e^{-s}+e^{-2s}}{s(s+1)^2} \\ &= \frac{1+s^2}{s(s+1)^2} - \frac{2e^{-s}-e^{-2s}}{s(s+1)^2} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{2}{(s+1)^2} - (2e^{-s}-e^{-2s})\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2}\right] \end{aligned}$$

Aplicando Transformada inversa, obtenemos la solución de la ecuación.

$$\begin{aligned} x(t) &= 1 - 2te^{-t} - 2\mathcal{U}_1(t)\left(1 - e^{1-t} - (t-1)e^{1-t}\right) \\ &\qquad + \mathcal{U}_2(t)\left(1 - e^{2-t} - (t-2)e^{2-t}\right) \\ &= 1 - 2te^{-t} - 2\mathcal{U}_1(t)(1 - te^{1-t}) + \mathcal{U}_2(t)\left(1 + (1-t)e^{2-t}\right) \end{aligned}$$

34. Usar Transformada de Laplace para resolver el sistema con condiciones iniciales:

$$\left.\begin{array}{ccccc} x'' & - & y'' & = & e^t \\ x' & + & y' & = & t \end{array}\right| \left.\begin{array}{lrlr} x(0) = & 0, & x'(0) = & 1 \\ y(0) = & -1, & y'(0) = & -1 \end{array}\right|$$

Aplicamos Transformada de Laplace y despejamos:

$$\left.\begin{array}{ccccl} s^2X & - & s^2Y & = & \dfrac{1}{s-1} + s + 2 \\ \\ sX & + & sY & = & \dfrac{1}{s^2} - 1 \end{array}\right|$$

De aquí,

$$\begin{aligned} 2s^2X &= \frac{1}{s-1} + 2 + \frac{1}{s} \\ X(s) &= \frac{1}{2s^2(s-1)} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{2s^3} \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3}\right] \\ x(t) &= \frac{1}{2}\left[e^t - 1 + t + \frac{t^2}{2}\right] \end{aligned}$$

Despejando y' en la segunda ecuación:

$$y'(t) = t - x'(t) = t - \frac{1}{2}(e^t + 1 + t) = \frac{1}{2}(t - e^t - 1)$$

luego $y(t) = \dfrac{1}{4}t^2 - \dfrac{1}{2}e^t - \dfrac{t}{2} + C$ y como $y(0) = -1$, $C = -\dfrac{1}{2}$.

Por lo tanto, la solución del sistema es

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{2}\left[e^t - 1 + t + \dfrac{t^2}{2}\right] \\ y(t) = \dfrac{1}{4}(t^2 - 2e^t - 2t - 2) \end{cases}$$

35. Resolver el sistema

$$\begin{array}{rcrcr|rcrl|} x'' & - & y'' & = & e^{2t} & x(0) & = & x'(0) & = 0 \\ 2x' & + & y' & = & -e^{2t} & y(0) & = & y'(0) & = 0 \end{array}$$

Aplicando Transformada de Laplace:

$$\begin{array}{rcrcr|} s^2X & - & s^2Y & = & \dfrac{1}{s-2} \\ & & & & \\ 2sX & + & sY & = & -\dfrac{1}{s-2} \end{array}$$

Despejando la variable X:

$$X(s) = \frac{1-s}{3s^2(s-2)} = \frac{1}{12}\left[\frac{1}{s} - \frac{2}{s^2} - \frac{1}{s-2}\right]$$

Aplicando Transformada Inversa:

$$x(t) = \frac{1}{12}\left(1 - 2t - e^{2t}\right)$$

Derivando $x(t)$ y reemplazando en la segunda ecuación:

$$y'(t) = -e^{2t} - 2x'(t) = -e^{2t} + \frac{1}{3}\left(1 + e^{2t}\right) = \frac{1}{3}\left(1 - 2e^{2t}\right)$$

Integrando, $y(t) = \dfrac{1}{3}(t - e^{2t} + C)$ y como $y(0) = 0$, entonces $C = \dfrac{1}{3}$.

Luego, la solución del sistema es

$$\begin{cases} x(t) & = & \dfrac{1}{12}\left(1 - 2t - e^{2t}\right) \\ & & \\ y(t) & = & \dfrac{1}{3}(t - e^{2t} + 1) \end{cases}$$

36. Resolver

$$\left.\begin{array}{rcrcl} x'' & = & y & + & \operatorname{sen} t \\ y'' & = & -x' & + & \cos t \end{array}\right| \quad \left.\begin{array}{rcrrcr} x(0) & = & 1, & x'(0) & = & 0 \\ y(0) & = & -1, & y'(0) & = & -1 \end{array}\right|$$

Aplicando Transformada de Laplace y reordenando:

$$\left.\begin{array}{rcrcl} s^2X & - & Y & = & \dfrac{1}{s^2+1} + s \\[2ex] sX & + & s^2Y & = & \dfrac{s}{s^2+1} - s \end{array}\right|$$

Multiplicando la primera ecuación por s^2 y sumándola con la segunda obtenemos:

$$(s^4+s)X = \frac{s^2+s}{s^2+1} + s^3 - s$$

Luego,

$$\begin{array}{rcl} X(s) & = & \dfrac{s+1}{(s^3+1)(s^2+1)} + \dfrac{s^2-1}{s^3+1} \\ & = & \dfrac{1}{(s^2-s+1)(s^2+1)} + \dfrac{s-1}{s^2-s+1} \\ & = & \dfrac{1+s^3-s^2+s-1}{(s^2-s+1)(s^2+1)} \\ & = & \dfrac{s}{s^2+1} \\ x(t) & = & \cos t \end{array}$$

Reemplazando la segunda derivada de $x(t)$ en la primera ecuación del sistema original tenemos:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & \cos t \\ y(t) & = & -\cos t - \operatorname{sen} t \end{array}\right.$$

37. Resolver

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} x' & - & 4x & - & 2y & = & 2\mathcal{U}_1(t) \\ y' & - & 3x & + & y & = & \mathcal{U}_1(t) \end{array}\right| \begin{array}{l} x(0) = 0 \\ y(0) = \dfrac{1}{2} \end{array}$$

Aplicando Transformada de Laplace :

$$\begin{array}{rcrcl} (s-4)X & - & 2Y & = & \dfrac{2e^{-s}}{s} \\ -3X & + & (s+1)Y & = & \dfrac{e^{-s}}{s} + \dfrac{1}{2} \end{array}$$

Resolviendo el sistema:

$$\begin{aligned} (s^2-3s-10)Y &= \frac{6e^{-s}}{s} + \frac{(s-4)e^{-s}}{s} + \frac{s-4}{2} \\ Y(s) &= \frac{s-4}{2(s-5)(s+2)} + \frac{e^{-s}}{s(s-5)} \\ &= \frac{1}{14}\left[\frac{1}{s-5} + \frac{6}{s+2}\right] + \frac{1}{5}\left[\frac{1}{s-5} - \frac{1}{s}\right]e^{-s} \end{aligned}$$

Aplicando Transformada Inversa:

$$y(t) = \frac{1}{14}\left[e^{5t} + 6e^{-2t}\right] + \frac{1}{5}\mathcal{U}_1(t)\left[e^{5t-5} - 1\right]$$

Reemplazando $Y(s)$ en la segunda ecuación, se tiene

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{1}{3}\left[(s+1)\left(\frac{s-4}{2(s-5)(s+2)} + \frac{e^{-s}}{s(s-5)}\right) - \frac{e^{-s}}{s} - \frac{1}{2}\right] \\ &= \frac{1}{(s-5)(s+2)} + 2\frac{e^{-s}}{s(s-5)} \\ &= \frac{1}{7}\left[\frac{1}{s-5} - \frac{1}{s+2}\right] - \frac{2}{5}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s-5}\right]e^{-s} \end{aligned}$$

Aplicando Transformada Inversa:

$$x(t) = \frac{1}{7}\left(e^{5t} - e^{-2t}\right) - \frac{2}{5}\mathcal{U}_1(t)\left(1 - e^{5t-5}\right)$$

38. Resolver

$$\left.\begin{array}{rcl} x' & = & y - z' + 2t \\ 2x & = & y'' + z' \\ 2y & = & z'' \end{array}\right| \left.\begin{array}{ll} x(0) = 0 & \\ y(0) = 1 & y'(0) = 0 \\ z(0) == & z'(0) = 0 \end{array}\right|$$

Aplicando Transformada de Laplace:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} sX & - & Y & + & sZ & = & \dfrac{2}{s^2} \\ 2X & - & s^2Y & - & sZ & = & -s \\ & & 2Y & - & s^2Z & = & 0 \end{array}\right|$$

Eliminando X tenemos:

$$\left.\begin{array}{rcrcl} (s^3-2)Y & + & s(s+2)Z & = & \dfrac{4}{s^2} + s^2 \\ 2Y & - & s^2Z & = & 0 \end{array}\right|$$

Eliminando Z:

$$(s^4+4)Y = \frac{4+s^4}{s} \;\Rightarrow\; Y(s) = \frac{1}{s}$$

Reemplazando en la tercera ecuación obtenemos:

$$Z(s) = \frac{2}{s^3}$$

Ahora, reemplazando en la segunda ecuación:

$$X(s) = \frac{1}{s^2}$$

Aplicando la Transformada inversa:

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 1 \\ z(t) = t^2 \end{cases}$$

39. Resolver el sistema no homogéneo

$$\left.\begin{array}{rcr} tx+y+ty' &=& (t-1)e^{-t} \\ x'-y &=& e^{-t} \end{array}\right| \left.\begin{array}{c} x(0)=1 \\ y(0)=-1 \end{array}\right|$$

Aplicando Tranformada de Laplace:

$$\left.\begin{array}{rcrcl} -X' &-& sY' &=& \dfrac{1}{(s+1)^2}-\dfrac{1}{s+1} \\ \\ sX &-& Y &=& \dfrac{1}{s+1}+1 \end{array}\right|$$

Despejando y derivando Yde la segunda ecuación:

$$Y' = X + sX' + \frac{1}{(s+1)^2}$$

Reemplazando en la primera ecuación:

$$-X' - s\left(X + sX' + \frac{1}{(s+1)^2}\right) = \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{s+1}$$

Obtenemos la ecuación de variables separables:

$$(s^2+1)X' + sX = 0$$

Entonces:

$$X(s) = \frac{C}{\sqrt{s^2+1}} \Rightarrow x(t) = CJ_0(t)$$

Como $J_0(0) = 1$, tenemos que $C = 1$. Así,

$$x(t) = J_0(t)$$

Reemplazando:

$$Y(s) = \frac{s}{\sqrt{s^2+1}} - 1 - \frac{1}{s+1} = \frac{s-\sqrt{s^2+1}}{\sqrt{s^2+1}} - \frac{1}{s+1}$$

de donde

$$y(t) = -J_1(t) - e^{-t}$$

40. Resolver:

$$\left.\begin{array}{rcrcl} -3x'' & + & 3y'' & = & te^{-t} - 3\cos t \\ tx'' & - & y' & = & \operatorname{sen} t \end{array}\right| \begin{array}{rr} x(0) = -1 & x'(0) = 2 \\ y(0) = 4 & y'(0) = 0 \end{array}$$

Aplicando Transformada de Laplace y ordenando, tenemos

$$\begin{array}{rcl} 3s^2X - 3s^2Y & = & 6 - 15s + \dfrac{3s}{s^2+1} - \dfrac{1}{(s+1)^2} \\ 2sX + s^2X' + sY & = & 3 - \dfrac{1}{s^2+1} \end{array}$$

Despejando la variable X obtenemos la ecuación lineal

$$\begin{aligned} X' + \frac{3}{s}X &= \frac{2}{s^3} - \frac{2}{s^2} - \frac{1}{3s^3(s+1)^2} \\ X(s) &= \frac{1}{s^3}\left[C + \int\left(2 - 2s - \frac{1}{3(s+1)^2}\right) ds\right] \\ &= \frac{1}{s^3}\left[C + 2s - s^2 + \frac{1}{3(s+1)}\right] \\ &= \frac{C}{s^3} + \frac{2}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{3s^3(s+1)} \end{aligned}$$

Desarrollando en fracciones parciales

$$\frac{1}{s^3(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3} - \frac{1}{s+1}$$

Luego,

$$X(s) = \frac{3C+1}{3s^3} - \frac{2}{3s} + \frac{5}{3s^2} - \frac{1}{3(s+1)}$$

de donde

$$x(t) = \frac{3C+1}{6}t^2 - \frac{2}{3} + \frac{5}{3}t - \frac{1}{3}e^{-t}$$

Reemplazando el valor de $X(s)$ en la primera ecuación:

$$Y(s) = \frac{3C+1}{3s^3} + \frac{8}{3s} + \frac{1}{3(s+1)} + \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{3(s+1)^2}$$

Aplicando Transformada Inversa:

$$y(t) = \frac{3C+1}{6}t^2 + \frac{8}{3} + \frac{e^{-t}}{3} + \cos t + \frac{1}{3}te^{-t}$$

5.3. Ejercicios propuestos

1. Calcule la Transformada de Laplace de las siguientes funciones.

   a) $f(t) = e^{2t}(3\ \text{sen}\,4t - 4\cos 4t)$
   b) $f(t) = e^{-2t}\cos t$
   c) $f(t) = t^3\cos t$
   d) $f(t) = \cos^2 t$
   e) $f(t) = \dfrac{1-\cos 4t}{t}$
   f) $f(t) = t(e^{3t} + e^{-3t})$
   g) $f(t) = t\cos at$
   h) $f(t) = \dfrac{e^t - e^{-t}}{t}$
   i) $f(t) = e^{-t}\displaystyle\int_0^t e^u u\,\text{sen}^2 2u\,du$
   j) $f(t) = e^{-2t}\,\text{sen}(2t)\mathcal{U}_{\pi}(t)$
   k) $f(t) = \mathcal{U}_{\frac{\pi}{2}}(t)(t-\cos t)$
   l) $f(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{1-e^{-u}}{u}du$

2. Calcule la Transformada de Laplace de las siguientes funciones usando la segunda propiedad de traslación.

   a) $f(t) = \begin{cases} 0 & 0 < t < 2 \\ 4 & t > 2 \end{cases}$
   b) $f(t) = \begin{cases} 2t & 0 < t \leq 5 \\ 1 & t > 5 \end{cases}$
   c) $f(t) = \begin{cases} \cos 3t & 0 < t < \frac{\pi}{2} \\ \text{sen}\,3t & t > \frac{\pi}{2} \end{cases}$
   d) $f(t) = \begin{cases} 5\ \text{sen}\,3(t-\pi/4) & t > \pi/4 \\ 0 & t < \pi/4 \end{cases}$

3. Calcule la Transformada de Laplace inversa de las siguientes funciones.

   a) $F(s) = \dfrac{1}{s^2(s+1)^2}$
   b) $F(s) = \dfrac{1}{(s^2+1)(s+1)^2}$
   c) $F(s) = \dfrac{2s^3}{(s^2+1)^3}$
   d) $F(s) = \dfrac{s}{(s+2)(s-1)}$
   e) $F(s) = \dfrac{1}{(s+2)^2}$
   f) $F(s) = \dfrac{s+2}{s^2+2s+2}$
   g) $F(s) = \dfrac{e^{-2s}}{s-4}$
   h) $F(s) = \dfrac{1}{s^3-8}$
   i) $F(s) = \dfrac{s+3}{s^2+2s+5}$
   j) $F(s) = \dfrac{1}{(s^2+a^2)^2}$

k) $F(s) = \dfrac{2s^3 - s^2 - 4}{(s+2)^2(s^2+4)}$

l) $F(s) = \dfrac{e^{-s}(1-e^{-s})}{s(s^2+2s+2)}$

m) $F(s) = \ln\left(1 + \dfrac{4}{s^2}\right)$

n) $F(s) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{(s-1)^5}}$

4. Evalúe las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-at} \operatorname{sen} bt \, dt$

b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-at}(1-\cos bt)}{t} dt$

c) $\displaystyle\int_0^\infty \int_u^\infty e^{-t}(t-u)^2 \cos 3u \, dt \, du$

d) $\displaystyle\int_0^\infty \int_v^\infty e^{-xt} \frac{\operatorname{sen}(t-v)(1-\cos v)}{v} \, dt \, dv$

5. Use Transformada de Laplace para resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $y'' - 3y' + 2y = 4e^{2t}$, $y(0) = -3$, $y'(0) = 5$

b) $ty'' + 2(t-1)y' - 2y = 0\,,\ y(0) = y'(0) = 0$

c) $ty'' - (t+2)y' + 3y = t - 1,\ y(0) = 0, y'(0) = 1$

d) $y'' + y = 3\sin 2t - \mathcal{U}_{2\pi}(t) \operatorname{sen} 2t\,,\ y(0) = 1,\ y'(0) = -2$

e) $ty'' + 2(t-1)y' + (t-2)y = 0\,,\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1$

6. Resuelva los siguientes problemas de valor inicial usando Transformada de Laplace. Exprese la solución como una función definida por casos.

a) $y^{(iv)} + y = \begin{cases} 0 & t \leq 1 \\ t-1 & t > 1 \end{cases}\ ,\ y(0) = y'(0) = 1\,,\ y''(0) = y'''(0) = 0$

b) $y'' + 4y' + 4y = \begin{cases} 0 & t \leq 3 \\ e^{3-t} & t > 3 \end{cases}\ ,\ y(0) = 1\,,\ y'(0) = -1$

c) $y'' - 4y' + 4y = \begin{cases} t & 0 \leq t < 3 \\ t+2 & t \geq 3 \end{cases}\ ,\ y(0) = -2\ ,\ y'(0) = 1$

d) $y'' - 2y' + 2y = \begin{cases} t & t < 1 \\ 2-t & 1 \leq t \leq 2 \\ 3t-12 & t > 2 \end{cases}\ , y(0) = y'(0) = 0$

e) $y'' - y = \begin{cases} t & 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & 1 < t \leq 2 \\ 3-t & 2 < t \leq 3 \\ 0 & t > 3 \end{cases}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

7. Resuelva usando Transformada de Laplace, las siguientes ecuaciones integrales

   a) $\cos x = y(x) + 3\int_0^x \operatorname{sen}(x-t)e^{-t}y(t)dt$

   b) $y(t) = t^2 + 4\int_0^t y(u)(t-u)^2 du$

8. Resuelva las siguientes ecuaciones diferencial-integrales

   a) $y''(t) + 4\int_0^t y(u)\, du = 4e^{2t}$

   b) $y'(t) - 2\int_0^t \operatorname{sen}(t-u)y(u)du = 1,\ y(0) = -1.$

9. Use Transformada de Laplace para resolver los siguientes sistemas:

   a) $\begin{array}{rcl|ll} x'' + x - y & = & 0 & x(0) = 0 & y(0) = 0 \\ y'' + y - x & = & 0 & x'(0) = -2 & y'(0) = 1 \end{array}$

   b) $\begin{array}{rcl|l} x' - 4x + y''' & = & 6\operatorname{sen} t & x(0) = y(0) = 0 \\ x' + 2x - 2y''' & = & 0 & y'(0) = y''(0) = 0 \end{array}$

   c) $\begin{array}{rcl|ll} x' & = & y - z' + 2t & x(0) = 0 & \\ 2x & = & y'' + z' & y(0) = 1 & y'(0) = 0 \\ 2y & = & z'' & z(0) = 0 & z'(0) = 0 \end{array}$

   d) $\begin{array}{rcl|ll} x'' + y' - 4x + 2y & = & \mathcal{U}_{\frac{\pi}{2}}(t) & x(0) = 6 & x'(0) = 4 \\ x' - 2x - y'' & = & 0 & y(0) = -2 & y'(0) = 5 \end{array}$

   e) $\begin{array}{rcl|ll} x' + x - y'' + y' - z' & = & 0 & x(0) = 1 & \\ x' + y'' - x - y + z & = & 0 & y(0) = 0 & y'(0) = -1 \\ x + y' & = & te^{-t} & z(0) = 1 & \end{array}$

Apéndice A

Prueba de alternativas

I. A continuación se da una lista de tipos de ecuaciones de primer orden. Escriba junto a cada ecuación, la o las letras que corresponden:

a) Variables separables
b) Bernoulli
c) Algebraica en y'
d) Exacta
e) Ricatti
f) Homogénea
g) Lineal en y
h) Clairaut
i) Factor integrante

1. $(1-xy)y' = y^2$ $\boxed{}$
2. $xy' + y = x^2 \cos x$ $\boxed{}$
3. $x^2y' = x^2 + xy - y^2$ $\boxed{}$
4. $\cos(x+y)\,dx = x\,\operatorname{sen}(x+y)\,dx + x\,\operatorname{sen}(x+y)\,dy$ $\boxed{}$
5. $y - xy' = \tan y'$ $\boxed{}$
6. $y\ln y\,dx - x\,dy = 0$ $\boxed{}$
7. $x^2y' - y^2 = 2xy$ $\boxed{}$
8. $(y')^3 + y^2y' = 0$ $\boxed{}$

II. Selección múltiple.
En cada una de los siguientes ítemes, solo una alternativa es correcta.

1. Una solución particular de la ecuación $xy' + y = y'\sqrt{1 - x^2y^2}$ es:

   a) $x^2 = 2y^2 \ln y$
   b) $x + y = \arctan(y)$
   c) $y = \operatorname{arc\,sen}(xy)$
   d) $y = 3e^{\frac{y}{x}}$

2. La ecuación $(-xy \operatorname{sen} x + 2y \cos x)dx + 2x \cos x \, dy = 0$ tiene como factor integrante la función:

   a) $u(x,y) = \dfrac{1}{x+y}$
   b) $u(x,y) = xy$
   c) $u(x,y) = \dfrac{1}{xy}$
   d) $u(x,y) = x + y$

3. El problema de valor inicial $x^2y' - 2xy = 3y^4$, $y(1) = \dfrac{1}{2}$ tiene la solución implícita:

   a) $y^{-3} = \dfrac{7x}{47x^7 + 9}$
   b) $y^3 = \dfrac{5x^6}{49 - 9x^5}$
   c) $y^{-3} = \dfrac{5x^6}{49 - 9x^5}$
   d) $y^3 = \dfrac{7x}{47x^7 + 9}$

4. Las ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = -\dfrac{1}{\sqrt{1-p^2}} \\ y = -\dfrac{p}{\sqrt{1-p^2}} + \operatorname{arc\,sen}\, p \end{cases}$

   representan una solución de la ecuación:

   a) $xy' = y + \sqrt{1 - y'^2}$
   b) $y' = xy + \operatorname{arc\,sen}\, y$
   c) $y = xy' + \operatorname{arc\,sen}\, y'$
   d) $y = xy' + \sqrt{1 - y'^2}$

5. La ecuación diferencial de la familia uniparamétrica $y = x\,\mathrm{sen}(x + C)$ es:

   a) $y' = \mathrm{sen}(x + C) + x\cos(x + C)$
   b) $(xy' - y)^2 = x^2(x^2 - y^2)$
   c) $xy' = y + x^2(1 - y^2)$
   d) $(y - xy')^2 = 1 + y'^2$

6. La familia de trayectorias ortogonales a la familia $r = 2C\cos\theta$ es:

   a) La familia de todos los círculos tangentes al eje X en el origen.
   b) La familia de todos los círculos tangentes al eje Y en el origen.
   c) La familia de todas las rectas tangentes al círculo unitario.
   d) La familia $r^2 = C^2\,\mathrm{sen}\,2\theta$.

7. Los arqueólogos usaron trozos de madera quemada, es decir, de carbón vegetal, encontrados en el sitio, para fechar las pinturas prehistóricas y rupestres en las paredes y los techos de una caverna en Lascaux, Francia. Si el C-14 radiactivo tiene una semivida de unos 5.600 años, y se encontró que había desaparecido el 85,5 % del carbono 14 de un trozo de madera, su edad aproximada es:

   a) $5600\,\dfrac{\ln 85,5}{\ln 2} \approx 36000$ años
   b) $5600\,\dfrac{\ln 0,855}{\ln 2} \approx 1270$ años
   c) $5600\,\dfrac{\ln 14,5}{\ln 2} \approx 21600$ años
   d) $5600\,\dfrac{\ln 0,145}{\ln 2} \approx 15600$ años

8. La solución general de la ecuación $y^{(viii)} - 2y^{(iv)} + y = 0$ es:

   a) $y = (C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3 + C_5x^4 + C_6x^5 + C_7x^6 + C_8x^7)e^x$
   b) $y = (C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3)\,\mathrm{sen}\,x + (C_5 + C_6x + C_7x^2 + C_8x^3)\cos x$
   c) $y = e^x((C_1 + C_2x)^2\,\mathrm{sen}\,x + (C_3 + C_4x)^2\cos x)$
   d) $y = (C_1 + C_2x)e^x + (C_3 + C_4x)e^{-x} + (C_5 + C_6x)\,\mathrm{sen}\,x + (C_7 + C_8x)\cos x$

9. Si $y_1(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}$ es solución de la ecuación $x^2y'' + xy' + (x^2 - \dfrac{1}{4})y = 0$, entonces la otra solución linealmente independiente es:

a) $y_2(x) = \dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}$

b) $y_2(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}} \displaystyle\int \dfrac{x^2}{\operatorname{sen}^2 x}dx$

c) $y_2(x) = \sqrt{x}\operatorname{sen} x$

d) $y_2(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}} \displaystyle\int \dfrac{1}{x^2\operatorname{sen}^2 x}dx$

10. La solución particular de la ecuación $y'' - 4y' + 4y = x(2e^{2x} + \operatorname{sen}\, x)$ es de la forma:

a) $y(x) = x^2(A + Bx)e^{2x} + C\operatorname{sen} x + D\cos x$

b) $y(x) = (A + Bx)e^{2x} + (C + Dx)\operatorname{sen} x + (E + Fx)\cos x$

c) $y(x) = x^2(A + Bx)e^{2x} + (C + Dx)\operatorname{sen} x + (E + Fx)\cos x$

d) $y(x) = x^2(A + Bx)e^{2x} + Cx\operatorname{sen} x + Dx\cos x$

11. La ecuación $2xy'' - (x - 3)y' - y = 0$ admite una solución de la forma:

a) $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+\frac{1}{2}}$

b) $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n-\frac{1}{2}}$

c) $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1}$

d) $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+\frac{1}{3}}$

12. Si la ecuación $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$, tiene una solución de la forma $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, entonces:

a) $c_{2n} = \dfrac{-c_0}{2n-1}\,,\ c_{2n+1} = 0,\ n \geq 1$

b) $c_{2n+1} = \dfrac{-c_1}{2n+1}\,,\ c_{2n} = 0\,,\ n \geq 1$

c) $c_{2n} = \dfrac{-c_0}{(2n-1)!}\,,\ c_{2n+1} = 0,\ n \geq 1$

d) $c_{2n+1} = \dfrac{-c_1}{(2n+1)!}\,,\ c_{2n} = 0\,,\ n \geq 1$

13. Usando el método de eliminación para resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{rcrcr} x'' & = & y & - & 3x \\ y'' & = & 2x & - & 2y \end{array}\right|$$

se obtiene como solución general:

a) $x(t) = C_1 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t + C_3 \cos 2t + C_4 \operatorname{sen} 2t$
$y(t) = C_5 \cos t + C_6 \operatorname{sen} t + C_7 \cos 2t + C_8 \operatorname{sen} 2t$

b) $x(t) = C_1 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t + C_3 \cos 2t + C_4 \operatorname{sen} 2t$
$y(t) = 2C_1 \cos t + 2C_2 \operatorname{sen} t - C_3 \cos 2t - C_4 \operatorname{sen} 2t$

c) $x(t) = C_1 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t + C_3 \cos 2t + C_4 \operatorname{sen} 2t$
$y(t) = -2C_1 \cos t - 2C_2 \operatorname{sen} t + C_3 \cos 2t + C_4 \operatorname{sen} 2t$

d) $x(t) = C_1 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t + C_3 \cos 2t + C_4 \operatorname{sen} 2t$
$y(t) = C_1 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t + C_3 \cos 2t + C_4 \operatorname{sen} 2t$

14. Si el polinomio característico de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ es

$$p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$$

y los vectores propios asociados a $\lambda = 1$ y $\lambda = 2$ son respectivamente $(1, 0, 0)$ y $(0, 1, -1)$, la solución general del sistema es:

a) $X(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + C_3 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} te^{2t} \right]$

b) $X(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + C_4 \begin{pmatrix} ,0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} te^{2t}$

c) $X(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + C_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} te^{2t}$

d) $X(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + C_3 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} te^{2t} \right]$

15. Sabiendo que la matriz $A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ tiene un valor propio complejo $\lambda_1 = 5 + 2i$, la solución general del sistema $X' = AX$ es:

   a) $X(t) = e^{5t}\left[C_1 \begin{pmatrix} \cos 2t - 2\,\text{sen}\, 2t \\ 5\cos 2t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2\cos 2t + \text{sen}\, 2t \\ 5\,\text{sen}\, 2t \end{pmatrix}\right]$

   b) $X(t) = e^{2t}\left[C_1 \begin{pmatrix} \cos 5t - 2\,\text{sen}\, 5t \\ 5\cos 5t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2\cos 5t + \text{sen}\, 5t \\ 5\,\text{sen}\, 5t \end{pmatrix}\right]$

   c) $X(t) = e^{2t}\left[C_1 \begin{pmatrix} \cos 5t - 2\,\text{sen}\, 5t \\ 5\cos 5t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2\cos 5t - \text{sen}\, 5t \\ -5\,\text{sen}\, 5t \end{pmatrix}\right]$

   d) $X(t) = e^{5t}\left[C_1 \begin{pmatrix} \cos 2t - 2\,\text{sen}\, 2t \\ 5\cos 2t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2\cos 2t - \text{sen}\, 2t \\ -5\,\text{sen}\, 2t \end{pmatrix}\right]$

16. La solución general del sistema $X' = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -6 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} X$ es de la forma:

   a) $X(t) = C_1\boldsymbol{v}_1 e^{t} + C_2\boldsymbol{v}_2 e^{-t} + C_3\boldsymbol{v}_3 e^{2t}$
   b) $X(t) = C_1\boldsymbol{v}_1 e^{-t} + C_2\boldsymbol{v}_2 e^{2t} + C_3\boldsymbol{v}_3 e^{4t}$
   c) $X(t) = C_1\boldsymbol{v}_1 e^{-t} + C_2\boldsymbol{v}_2 e^{t} + C_3\boldsymbol{v}_3 e^{4t}$
   d) $X(t) = C_1\boldsymbol{v}_1 + C_2\boldsymbol{v}_2 e^{2t} + C_3\boldsymbol{v}_3 e^{3t}$

17. Sabiendo que la solución general del sistema $X' = AX + V$ es:

$$X(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \text{-}3 \end{pmatrix} e^{-2t} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t} + e^{-2t} \begin{pmatrix} 2t + 5 \\ t + 2 \end{pmatrix}$$

   entonces si $X(0) = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix}$ la solución particular es:

   a) $X(t) = \begin{pmatrix} (2t+3)e^{-2t} - 4e^{5t} \\ (t-8)e^{-2t} + 2e^{5t} \end{pmatrix}$ *c*) $X(t) = \begin{pmatrix} (t+8)e^{-2t} + 2e^{5t} \\ (2t+3)e^{-2t} + 4e^{5t} \end{pmatrix}$

   b) $X(t) = \begin{pmatrix} (2t+3)e^{-2t} + 4e^{5t} \\ (t+8)e^{-2t} + 2e^{5t} \end{pmatrix}$ *d*) $X(t) = \begin{pmatrix} (t+8)e^{-2t} - 2e^{5t} \\ (2t-3)e^{-2t} + 4e^{5t} \end{pmatrix}$

18. Sabiendo que $X(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} e^{-t}$ es la solución general del sistema homogéneo asociado a:

$$\left.\begin{array}{ccccccc} x' & = & 4x & - & y & + & 18te^{2t} \\ y' & = & 5x & - & 2y & + & 30te^{2t} \end{array}\right|$$

entonces una solución particular es:

a) $X_p(t) = -\dfrac{e^{2t}}{3} \begin{pmatrix} 42t + 46 \\ 30t + 50 \end{pmatrix}$

b) $X_p(t) = \dfrac{e^{6t}}{3} \begin{pmatrix} 3t - 1 \\ 3t - 1 \end{pmatrix} - 15e^{-2t} \begin{pmatrix} t + 1 \\ 5t + 5 \end{pmatrix}$

c) $X_p(t) = -\dfrac{e^{2t}}{3} \begin{pmatrix} 30t + 50 \\ 42t + 46 \end{pmatrix}$

d) $X_p(t) = \dfrac{e^{6t}}{3} \begin{pmatrix} t + 1 \\ 5t + 5 \end{pmatrix} - 15e^{-2t} \begin{pmatrix} 3t - 1 \\ 3t - 1 \end{pmatrix}$

19. Sea $f(t) = \begin{cases} t^3 + 5 & 0 \leq t < 3 \\ t^3 + t^2 + 4 & 3 \leq t < 5 \\ 0 & 5 \leq t < 6 \\ 7t^3 - t^2 & t \geq 6 \end{cases}$. Entonces $f(t) =$

a) $t^3 + 5 + (2t^3 + t^2 + 9)\mathcal{U}_3(t) + (t^3 + t^2 + 4)\mathcal{U}_5(t) + (7t^3 - t^2)\mathcal{U}_6(t)$

b) $t^3 + 5 - (t^2 - 1)\mathcal{U}_3(t) + (1 - t^2)\mathcal{U}_5(t) + (7t^3 - 1)\mathcal{U}_6(t)$

c) $t^3 + 5 + (t^2 - 1)\mathcal{U}_3(t) + (1 - t^2)\mathcal{U}_5(t) + (7t^3 - 1)\mathcal{U}_6(t)$

d) $t^3 + 5 + (t^2 - 1)\mathcal{U}_3(t) - (t^3 + t^2 + 4)\mathcal{U}_5(t) + (7t^3 - t^2)\mathcal{U}_6(t)$

20. Si a la ecuación $tx'' + (t - 2)x' + x = 0$, $x(0) = 0$ se le aplica Transformada de Laplace se obtiene:

a) $X(s) = \dfrac{(s+1)^2}{s^2}$

c) $X(s) = \dfrac{C}{(s+1)^4}$

b) $X(s) = -4\ln(s+1) + C$

d) $X(s) = (s+1)^4$

21. Si $X(s) = \dfrac{1}{(s+2)^2(s^2+4)}$, entonces:

a) $x(t) = \dfrac{1}{16}(e^{-2t} + 2te^{-2t} - \cos 2t)$

b) $x(t) = \dfrac{1}{16}(e^{2t} + 2te^{2t} - \cos 2t)$

c) $x(t) = \dfrac{1}{16}(e^{-2t} - 2te^{-2t} - \cos 2t)$

d) $x(t) = \dfrac{1}{16}(e^{2t} - 2te^{2t} - \cos 2t)$

22. Sea $X(s) = \dfrac{1}{s+1} + \dfrac{4e^{-2\pi s}}{s^2+4} - \dfrac{2e^{-4\pi s}}{s^2+4}$. Entonces:

a) $x(t) = \begin{cases} e^{-t} & 0 \le t < 2\pi \\ 2\,\text{sen}\,2t & 2\pi \le t < 4\pi \\ \text{sen}\,2t & t \ge 4\pi \end{cases}$

b) $x(t) = \begin{cases} e^{-t} & 0 \le t < 2\pi \\ e^{-t} + 2\,\text{sen}\,2t & 2\pi \le t < 4\pi \\ \text{sen}\,2t & t \ge 4\pi \end{cases}$

c) $x(t) = \begin{cases} e^{t} & 0 \le t < 2\pi \\ e^{t} + 2\,\text{sen}\,2t & 2\pi \le t < 4\pi \\ e^{t} + \text{sen}\,2t & t \ge 4\pi \end{cases}$

d) $x(t) = \begin{cases} e^{-t} & 0 \le t < 2\pi \\ e^{-t} + 2\,\text{sen}\,2t & 2\pi \le t < 4\pi \\ e^{-t} + \text{sen}\,2t & t \ge 4\pi \end{cases}$

Respuestas: I.$-$ $1i)$ $2c)$ $3e) - h)$ $4b)$ $5f)$ $6a)$ $7d)h)$ $8g)$
II. $1c - 2c - 3b - 4c - 5b - 6a - 7d - 8d - 9a - 10c - 11b - 12a - 13b - 14d - 15a - 16c - 17b - 18a - 19d - 20c - 21a - 22d$

Bibliografía

[1] Contreras, A., Cheuquepán, F., Cisternas, E., *Introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias*, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Concepción, 2001.

[2] Derrick, R., Grossman, S., *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones*, Fondo Educativo Interamericano, 1984.

[3] Nagle, K., Saff, E., Snider, A., *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*, Pearson Educación, 2005.

[4] Simmons, G., *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones y Notas Históricas*, McGraw-Hill, 1993.

[5] Spiegel, M., *Transformada de Laplace*, McGraw-Hill, 2000.

[6] Zill, D., *Ecuaciones Diferenciales con Problemas de Valores en la Frontera*, Thomson Learning, Quinta Edición, 2001.