BASES MATEMÁTICAS

Agronomía - Biotecnología
Ingeniería en Recursos Naturales

José Alejandro Labrin Parra

UNIVERSIDAD
DE LA FRONTERA

Departamento de Matemática y Estadística
Facultad de Ciencias Agropecuarias y Forestales
Universidad de La Frontera

,

BASES MATEMÁTICAS

Agronomía - Biotecnología
Ingeniería en Recursos Naturales

Profesor: José Labrin Parra

Departamento de Matemática y Estadística
Facultad de Ciencias Agropecuarias y Forestales
Universidad de La Frontera

Índice general

1

Números reales

1.1. Números naturales

Esta necesidad de cuantificar las cosas que han tenido las distintas culturas, la respondemos en la actualidad definiendo el siguiente conjunto de números, que llamaremos números naturales:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Una vez que se tienen cuantificadas nuestras pertenencias nace la necesidad de operar con estas cantidades. Formalmente, en los números naturales podemos definir dos operaciones: suma y multiplicación. Diremos que el conjunto de los números naturales es cerrado para la suma$(+)$ y la multiplicación $(\cdot)$, es decir, si a y b son números naturales entonces $a + b$ es un número natural y $a \cdot b$ también lo es.

Definición 1.1: Antecesor y sucesor

Sea $a \in \mathbb{N}$, entonces

1. al número $a + 1 \in \mathbb{N}$ lo llamaremos **sucesor** de a.
2. al número $a - 1 \in \mathbb{N}$ lo llamaremos **antecesor** de a.

Con estas definiciones es fácil observar que:

- El sucesor de 1 es 2, el sucesor de 2 es 3. El proceso de calcular "el sucesor del sucesor" se puede repetir un "sin fin de veces", esta idea intuitiva nos brinda la noción de que el conjunto de los números naturales es infinito.
- Dado cualquier número natural este siempre será menor que su sucesor, luego se puede demostrar que los naturales son ordenados. Debido a esto podemos representarlos en una recta numérica.

Definición 1.2: Divisibilidad

Sean $n, m \in \mathbb{N}$ con $n \neq 0$, diremos que n divide a m, si existe un único $k \in \mathbb{N}$ tal que $m = n \cdot k$. Se denota por. $n \mid m$.

En el caso que $n \mid m$ se dice que n es un divisor de m, o bien, que m es un múltiplo de n. En el caso que n no divida a m, se denota $n \nmid m$.

Ejemplo 1.

- 3 *divide a* 12*, pues,* $12 = 3 \cdot 4$ *y* $4 \in \mathbb{N}$.
- 57 *es un múltiplo de* 3*, pues* $57 = 3 \cdot 19$ *con* $19 \in \mathbb{N}$.

Un número a puede tener más de un divisor y también tener más de un múltiplo, por lo que, podemos hablar del conjunto de divisores, $D(a)$, y del conjunto de múltiplos de un número, $M(a)$.

Ejemplo 2.

- *El conjunto de divisores de* 36 *es:*
  $D(36) = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 9,\ 12,\ 18,\ 36\}$
- *El conjunto de múltiplos de* 15 *es*
  $M(15) = \{0,\ 15,\ 30,\ 45, \ldots\}$

Teorema 1.1: Divisivilidad

Sean $a, b, c \in \mathbb{N}$, entonces:

1. Todo número natural no nulo (distinto de cero) es divisor de si mismo.
2. 1 es divisor de todos los números naturales.
3. Ningún número tiene por divisor al cero.
4. Si $a \mid b$ y $a \mid c$, entonces $a \mid (b + c)$. (Si $3 \mid 12$ y $3 \mid 15$, entonces $3 \mid 27$.)
5. Si $a \mid b$ y $b \mid c$, entonces $a \mid c$. (Si $3 \mid 12$ y $12 \mid 24$, entonces $3 \mid 24$.)
6. Si $a \mid b$, entonces $a \mid (bx)$ con $x \in \mathbb{N}$. (Si $3 \mid 6$, entonces $3 \mid 12,\ \ 3 \mid 18 \ldots$)

Definición 1.3: Número par, impar, primo, compuesto

ea $a \in \mathbb{N}$, diremos que:

1. a es **par**, si es divisible por 2, luego tiene la forma $a = 2k$, con $k \in \mathbb{N}$.
2. a es **impar**, si no es divisible por 2, luego tiene la forma $a = 2k + 1$ o $a = 2k - 1$ con $k \in \mathbb{N}$.
3. a es **primo**, si posee exactamente 2 divisores naturales, a saber, 1 y a.
4. a es **compuesto** cuando no es primo.

Teorema 1.2: Teorema Fundamental de la Aritmética

Todo número natural puede ser expresado como producto de primos. Esta representación es única, salvo el orden de los factores.

Ejemplo 3.

- 6 *se puede escribir como* $6 = 2 \cdot 3$, *donde* 2 *y* 3 *son números primos.*
- 90 *se puede escribir como* $90 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$, *donde* 2, 3 *y* 5 *son números primos*
- 360 *se puede escribir como* $360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$, *donde* 2, 3 *y* 5 *son números primos.*

A esta forma de representar los números se le conoce como "*Descomposición en factores primos*".

1.1.1. Reglas de divisibilidad

Un número $a \in \mathbb{N}$ es divisible por:

- 2 si es par.
- 3 si la suma de sus dígitos es un múltiplo de 3.
- 4 si los últimos dos dígitos forman un número múltiplo de 4.
- 5 si termina en 0 ó 5.

- 6 si es divisible simultáneamente por 2 y por 3.
- 7 si la diferencia entre el número sin el dígito de las unidades y el doble del dígito de las unidades es 0 ó múltiplo de 7.
- 8 si los últimos tres dígitos forman un número múltiplo de 8.
- 9 si la suma de los dígitos es un múltiplo de 9.
- 10 si el dígito de la unidad es 0.

En el caso de la regla de divisibilidad por 7 a veces es más rápido realizar la división que aplicar el criterio.

Teorema 1.3: Algoritmo de la división

Para todo $a, b \in \mathbb{N}$, existen $q, r \in \mathbb{N}$, únicos, tales que $a = b \cdot q + r$, con $0 \leq r < b$. El número q se llama cuociente y r es el resto de la división.

Ejemplo 4. *Si $a = 47$ y $b = 7$, se tiene que el cuociente es $q = 6$, el resto es $r = 5$ y claramente:*

$$47 = 7 \cdot 6 + 5$$

Definición 1.4: M.C.M, m.c.d.

ean $a, b \in \mathbb{Z}$ distintos de cero. Entonces

1. El mayor natural que divide tanto a a como a b se llama el Máximo Común Divisor de a y b. Lo denotamos por $m.c.d.\,(a, b)$.
2. El menor natural positivo que es múltiplo de a y de b se llama Mínimo Común Múltiplo de a y b. Lo denotamos por $M.C.M.\,(a, b)$.

Ejemplo 5. *Calculemos el M.C.M y el m.c.d. entre los números* $24,\ 36$.

Comencemos calculando los divisores de ambos números:

- $D(24) = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 12,\ 24\}$ y
- $D(36) = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 9,\ 12,\ 18,\ 36\}$

Por lo cual el mayor divisor en común es 12.

Ahora, calculando los múltiplos de ambos números tenemos:

- $M(24) = \{24,\ 48,\ 72,\ 96,\ \ldots\}$
- $M(36) = \{36,\ 72,\ 108,\ \ldots\}$

Por lo que el menor múltiplo positivo en común es 72.

Notemos que el M.C.M y el m.c.d. de un conjunto de números puede ser calculado conociendo la descomposición prima de ellos, para este caso tenemos que $24 = 2^3 \cdot 3$ y $36 = 2^2 \cdot 3^2$. Luego, el M.C.M. debe contener a $2^3 \cdot 3$ y a $2^2 \cdot 3^2$, por lo tanto el M.C.M. es $2^3 \cdot 3^2 = 72$. Además, el m.c.d. debe contener los divisores comunes, es decir el m.c.d. es $2^2 \cdot 3 = 12$.

1.1.2. Ejercicios Resueltos

Ejercicio 1: Un turista va a Pucón cada 18 días, otro va a Pucón cada 15 días y un tercero va a Pucón cada 8 días. Hoy día 02 de abril han coincidido en Pucón los tres turistas. ¿Dentro de cuántos días como mínimo volverán a coincidir en Pucón?

Solución

Calculemos el $MCM(18, 15, 8)$, para esto obtengamos la descomposición prima de 18, 15 y 8:

- $18 = 2 \cdot 3^2$
- $15 = 3 \cdot 5$
- $8 = 2^3$

Luego $MCM(18, 15, 8) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$, por lo que volverán a encontrarse dentro de 360 días.

Ejercicio 2: Un jardinero desea colocar 720 plantas de violetas, 240 de pensamientos, 360 de jacintos y 480 de claveles en el menor número posible de maceteros que contengan el mismo número de plantas, sin mezclar las mismas (sin combinar especies). ¿Qué cantidad de plantas debe contener cada macetero?

Solución

Se trata de dividir el total de plantas en porciones iguales y de la misma especie, como queremos ocupar el menor número posible de maceteros, debemos lograr que las porciones de plantas sean lo más grande posible, es decir, calculemos el $mcd(720, 240, 360, 480)$, para esto obtengamos la descomposición prima de 720, 240, 360 y 480:

- $720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$
- $240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$
- $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$
- $480 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5$

Luego el $mcd(720, 240, 360, 480) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$, por lo que cada macetero puede llegar a contener 120 plantas.

Ejercicio 3: Un carpintero quiere cortar una plancha de madera de 256 cm de largo y 96 cm de ancho, en cuadrados lo más grandes posible. ¿Cuántos cuadrados se obtienen de la plancha de madera? ¿Cuál debe ser la longitud del lado de cada cuadrado?

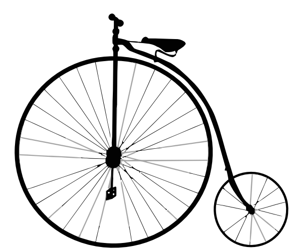
Solución

Calculemos el $mcd(96, 256)$, para esto obtengamos la descomposición prima de 96 y 256:

- $96 = 2^5 \cdot 3$
- $256 = 2^8$

Luego el $mcd(96, 256) = 2^5 = 32$. Por lo que de la plancha se pueden obtener 24 piezas cuadradas de lado 32 cm.

Ejercicio 4: La rueda grande de esta bicicleta tiene 4,2 metros de perímetro. La rueda pequeña tiene 0,9 metros de perímetro. En un determinado momento, las válvulas de las dos ruedas están en su punto más bajo.



Solución

Debemos encontrar el mínimo común múltiplo entre $4,2$ y $0,9$. Notemos que $42 = 7 \cdot 3 \cdot 2$ y $9 = 3 \cdot 3$, luego el mínimo común múltiplo entre 42 y 9 es $7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 = 126$, por lo tanto, después de $12,6$ metros estarán nuevamente las dos válvulas en su punto más bajo.

Definición 1.5: Primos relativos

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$, diremos que son Primos Relativos si $m.c.d.\,(a, b) = 1$.

Ejemplo 6. *Los números* 12 *y* 35 *son primos relativos pues* $12 = 2^2 \cdot 3$ *y* $35 = 5 \cdot 7$, *luego el* $mcd(12, 35) = 1$

1.2. Números enteros

Al avanzar la humanidad se ha encontrado con más problemáticas que no se pueden resolver usando solo números naturales, por ejemplo: "*la temperatura mínima de un frío día de invierno fue de* $5°C$ *bajo cero*" o que "*la deuda de una persona asciende a* $\$5000$". Esto nos lleva a manejar el concepto de números negativos.

La necesidad de responder a las preguntas anteriores, junto con razones algebraicas estructurales (que más adelante estudiaremos) nos lleva a definir el siguiente conjunto:

$$\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

que se denota por $\mathbb{Z}$ en honor al matemático alemán Ernst Zermelo. En $\mathbb{Z}$ se puede observar que:

- $\mathbb{Z}$ se puede separar en tres conjuntos disjuntos relevantes, $\mathbb{Z}^-$, $\mathbb{Z}^+$ y $\{0\}$, donde $\mathbb{Z}^-$ representa a los números negativos, es decir. $\{\ldots, -3, -2, -1\}$ y $\mathbb{Z}^+$ a los números positivos, es decir, $\{1, 2, 3, \ldots\}$.
- El conjunto de los naturales esta contenido en el conjunto de los números enteros, es decir, todo número natural también es entero.
- $\mathbb{Z}$ al igual que los números naturales es un conjunto ordenado que se puede representar en una recta numérica y es un conjunto cerrado para la suma y el producto.

1.3. Números racionales

Cuando tenemos una receta de cocina que rinde para 6 personas y queremos preparar una cena solo para dos, se debe tomar la tercera parte de cada ingrediente. Esta situación no se puede representar si solo se utilizan números enteros, por lo cual se necesita definir un nuevo conjunto llamado números racionales.

Definición 3.1

Se define el conjunto de los números racionales, simbolizado por $\mathbb{Q}$, como:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}.$$

Un número racional de la forma $\dfrac{a}{b}$ es también llamado fracción, donde a y b se llaman numerador y denominador respectivamente.

Definición 3.2: Fracciones equivalentes

Diremos que la fracción $\frac{a}{b}$ es equivalente a la fracción $\frac{c}{d}$ si y sólo si

$$a \cdot d = c \cdot b$$

Ejemplo 7.

- *La fracción* $\frac{4}{5}$ *es equivalente a* $\frac{12}{15}$ *pues* $4 \cdot 15 = 60 = 5 \cdot 12$
- *La fracción* $\frac{7}{28}$ *es equivalente a* $\frac{5}{20}$ *pues* $7 \cdot 20 = 140 = 5 \cdot 28$
- *La fracción* $\frac{3}{8}$ *no es equivalente a* $\frac{2}{5}$ *pues* $3 \cdot 5 \neq 8 \cdot 2$

Notemos que en los racionales el inverso aditivo de la fracción $\frac{a}{b}$ puede escribirse como:

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$$

Definición 3.3: Número decimal

Diremos que un número decimal es el cuociente entre a y b, es decir el resultado de la división $a : b$.

Ejemplo 8. *La expresión decimal de* $\frac{3}{8}$ *es* $0,375$*.*

Los números decimales se clasifican en:

1. **Decimal finito**: tiene un número finito de cifras decimales. Por ejemplo:

$$\frac{27}{20} = 1,35$$

.

2. **Decimal infinito**: tiene un número finito de cifras decimales. Por ejemplo:

$$\frac{5}{17} = 0,294117\ldots$$

.

Los números decimales infinitos se clasifican en:

1. **Decimal infinito periódico**: tiene inmediatamente después de la coma decimal una parte que se repite infinitamente. Por ejemplo:

$$\frac{12}{11} = 1,09090909\ldots = 1.\overline{09}$$

.

2. **Decimal infinito semiperiódico**: tiene después de la coma una o más cifras que no se repiten (llamadas anteperiodo), seguidas por una o más cifras que sí se repiten. Por ejemplo:
$$\frac{7}{36} = 0,1944444\ldots = 0,19\overline{4},$$

3. **Decimal infinito no periódico**. su parte decimal no es ni finita ni periódica, estos no pertencen a los números racionales, pues no pueden ser escritos como fracción. Por ejemplo:
$$\pi = 3,14159265\ldots$$

1.3.1. Transformación de decimal a fracción

Existen tres casos posibles:

Decimal finito a fracción: para transformar un número decimal finito a fracción se procede de la siguiente manera, el número decimal queda expresado como la fracción que en su numerador está formado por todo el número sin la coma decimal y el denominador por la potencia de 10 que tiene tantos ceros como cifras decimales existan.

Ejemplo 9.

- $0,123 = \dfrac{123}{1000}$
- $2,13 = \dfrac{213}{100}$
- $-3,1 = -\dfrac{31}{10}$.

Decimal periódico a fracción: para transformar un número decimal periódico a fracción, el numerador de la fracción resultante esta formado por la diferencia entre el número completo, sin la coma decimal y la parte entera del número decimal (todo lo que no está en el periodo) y el denominador corresponde a un número entero formado por tantos nueves como cifras tenga el periodo.

Ejemplo 10.

- $1,\overline{34} = \dfrac{134-1}{99} = \dfrac{133}{99}$
- $-2,\overline{321} = -\dfrac{2321-2}{999} = -\dfrac{2319}{999}$

Decimal semiperiódico a fracción: Para transformar un número decimal semiperiódico a fracción, el numerador de la fracción resultante está formado por la diferencia entre el número completo sin la coma decimal y la parte del número que no pertenece al periodo (sin la coma decimal) y el denominador está formado por tantos nueves como dígito tiene el periodo, seguido por tantos ceros como números hay entre la coma decimal y el periodo (anteperiodo).

Ejemplo 11.

- $0,42\overline{1} = \dfrac{421-42}{900} = \dfrac{379}{900}$
- $-1,5\overline{68} = -\dfrac{1568-15}{990} = -\dfrac{1553}{990}$

1.3.2. Amplificación y simplificación

Definición 3.4: Fracción irreducible

Diremos que una fracción es irreducible si el máximo común divisor entre el numerador y el denominador es 1, es decir, el numerador y el denominador son primos relativos entre sí.

Ejemplo 12. *La fracción* $\dfrac{35}{12}$ *es irreductible pues* 35 *y* 12 *no tienen divisores en común.*

Definición 3.5: Amplificación

La amplificación corresponde al proceso mediante el cual una fracción se trasforma en otra equivalente multiplicando el numerador y denominador por un mismo número natural no nulo.

Ejemplo 13. *Podemos amplificar la fracción* $\frac{3}{5}$ *por cualquier natural, por ejemplo, por 2, tal que:* $\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{6}{10}$.

Definición 3.6: Simplificación

La simplificación corresponde al proceso mediante el cual una fracción se transforma en otra equivalente dividiendo el numerador y el denominador por un mismo número natural no nulo. Para esto es necesario que el numerador y el denominador sean múltiplos de ese número. En caso contrario se dice que la fracción no se puede simplificar y la llamamos fracción irreductible.

Ejemplo 14. *Al simplificar la fracción* $\frac{18}{24}$ *la podemos simplificar por* 2, *por* 3 *y por* 6 *lo más conveniente en este caso es simplificar inmediatamente por* 6 *obteniéndose* $\frac{3}{4}$ *la cual es una fracción irreducible.*

1.3.3. Comparación de dos o más fracciones

Al comparar dos o más fracciones, tenemos dos casos posibles:

Todas las fracciones tiene el mismo denominador: en este caso sólo debemos comparar los numeradores y ordenar las fracciones según estos, es decir, a mayor numerador mayor será la fracción.

Fracciones con distinto denominador: para compararlas debemos transformarlas a fracciones con denominador común a través de la amplificación y luego proceder como el caso anterior.

Ejemplo 15. *Ordenemos de menor a mayor las siguientes fracciones:* $\frac{3}{8}, \frac{5}{12}, \frac{2}{3}$.
Primero escribimos cada fracción como su fracción equivalente, con denominador $mcm(3,8,12) = 24$,

$$P = \frac{3}{8} = \frac{9}{24}, \quad Q = \frac{5}{12} = \frac{10}{24}, \quad R = \frac{2}{3} = \frac{16}{24}$$

Comparando los numeradores de las fracciones equivalentes, se tiene que, P es menor que Q y Q es menor que R

El ejemplo anterior nos da indicios de que $\mathbb{Q}$ es un conjunto ordenado y sus elementos pueden ser representados en la recta numérica.

También podemos observar que $\mathbb{Q}$ contiene al conjunto $\mathbb{Z}$, pues $\mathbb{Z} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b = 1 \right\}$

1.3.4. Operatoria

Al igual que los números naturales y enteros, los números racionales son cerrados para la suma y la multiplicación.
Suma: Al sumar dos o más fracciones, tenemos dos casos posibles:

Todas las fracciones tiene el mismo denominador: en este caso solo debemos sumar los numeradores y conservar el denominador.

Fracciones con distinto denominador: para sumarlas debemos transformarlas a fracciones con denominador común a través de la amplificación (generalmente es el M.C.M. entre los denominadores) y luego proceder como el caso anterior.

Ejemplo 16. *Sumemos las siguientes fracciones que tienen igual denominador:*

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{4} - \frac{1}{4}.$$

Para esto debemos sumar los numeradores y conservar el denominador 4*, obteniendo:*

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3+5-1}{4} = \frac{7}{4}$$

Ejemplo 17. *Sumemos las siguientes fracciones que tienen distinto denominador:*

$$\frac{3}{4}+\frac{5}{6}-\frac{7}{3}.$$

Primeramente debemos notar que todas las fracciones involucradas pueden escribirse como fracciones equivalentes con denominador 12, *obteniendo:*

$$\frac{3}{4}=\frac{3\cdot 3}{4\cdot 3}=\frac{9}{12}, \qquad \frac{5}{6}=\frac{5\cdot 2}{6\cdot 2}=\frac{10}{12}, \qquad \frac{7}{3}=\frac{7\cdot 4}{3\cdot 4}=\frac{28}{12}$$

Luego, la suma de fracciones quedará escrita de la siguiente forma:

$$\frac{3}{4}+\frac{5}{6}-\frac{7}{3}=\frac{9}{12}+\frac{10}{12}-\frac{28}{12}.$$

De modo que el resultado es:

$$-\frac{9}{12}=-\frac{3}{4}.$$

Ejemplo 18. *Sumemos las siguientes fracciones:*

- $\frac{3}{4}+\frac{5}{6}-\frac{7}{3}=\frac{9}{12}+\frac{10}{12}+\frac{-28}{12}=\frac{9+10-28}{12}=-\frac{9}{12}=-\frac{3}{4}$
- $\frac{5}{11}-\frac{7}{11}+\frac{15}{11}+\frac{9}{11}=\frac{5-7+15+9}{11}=\frac{22}{11}=2$
- $\frac{5}{12}+\frac{1}{4}-\frac{7}{6}+\frac{5}{18}=\frac{15}{36}+\frac{9}{36}-\frac{42}{36}+\frac{10}{36}\frac{15+9-42+10}{36}=-\frac{8}{36}=-\frac{2}{9}$
- $\frac{3}{5}+\frac{2}{6}-\frac{4}{3}+\frac{1}{15}=\frac{18}{30}+\frac{10}{30}-\frac{40}{30}+\frac{2}{30}=-\frac{10}{30}=-\frac{1}{3}$

Multiplicación

En la multiplicación de fracciones, la fracción resultante es la que tiene en el numerador el producto de todos los numeradores de las fracciones involucradas y en su denominador el producto de todos los denominadores de las mismas fracciones involucradas, esto es:

$$\frac{a_1}{b_1}\cdot\frac{a_2}{b_2}\cdot\frac{a_3}{b_3}\cdot\ldots\cdot\frac{a_n}{b_n}=\frac{a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\ldots\cdot a_n}{b_1\cdot b_2\cdot b_3\cdot\ldots\cdot b_n}$$

Ejemplo 19. *Multipliquemos las siguientes fracciones:*

- $\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}=\frac{8}{15}$
- $\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{11}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{12}{5}\cdot\frac{20}{3}=\frac{16}{33}$

1.3.5. Ejercicios Resueltos

Ejercicio 1: Realicemos las siguientes operaciones combinadas:

- $0,\overline{4}+\frac{28}{9}\cdot\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{9}+\frac{28}{9}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{9}-\frac{28}{27}=\frac{12}{27}-\frac{28}{27}=-\frac{16}{27}$
- $\left(25,\overline{67}-12,\overline{34}\right)\cdot\frac{3}{4}=\left(\frac{2542}{99}-\frac{1222}{99}\right)\cdot\frac{3}{4}=\frac{1320}{99}\cdot\frac{3}{4}=\frac{40}{3}\cdot\frac{3}{4}=10$
- $\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{4}-\frac{4}{9}+\frac{7}{9}\right)\div\left(\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{4}\right)=\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{9}\right)\div\left(\frac{3}{20}\right)=\frac{2}{3}\div\frac{3}{20}=\frac{40}{9}$
- $$\begin{aligned}\frac{\left(0,\overline{15}-\frac{1}{33}\right)+\left(0,\overline{09}+\frac{1}{3}\right)}{0,5\overline{65}}&=\frac{\left(\frac{15}{99}-\frac{1}{33}\right)+\left(\frac{9}{99}+\frac{1}{3}\right)}{\frac{560}{990}}\\&=\frac{\left(\frac{5}{33}-\frac{1}{33}\right)+\left(\frac{3}{33}+\frac{11}{33}\right)}{\frac{56}{99}}\\&=\left(\frac{4}{33}+\frac{14}{33}\right)\div\frac{56}{99}\\&=\left(\frac{18}{33}\right)\cdot\frac{99}{56}\\&=\frac{27}{28}\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\frac{\frac{2}{15}+0,\overline{5}}{\frac{2}{25}+0,\overline{3}}&=\frac{\frac{2}{15}+\frac{5}{9}}{\frac{2}{25}+\frac{1}{3}}\\&=\frac{\frac{6+25}{45}}{\frac{6+25}{75}}\\&=\frac{31}{45}\div\frac{31}{75}\\&=\frac{5}{3}\end{aligned}$$

Ejercicio 2: Resolvamos los siguientes problemas: El barco MSC Fabiola tiene el récord de ser el mayor buque contenedor en cruzar el canal de Panamá. Lleva 12500 contenedores que si se ubicaran de extremo a extremo alcanzarían una distancia de 75 km. ¿Cuál es la longitud de un contenedor?

$\boxed{\text{Solución}}$

Notemos que 12500 contenedores en fila alcanzan una distancia de 75 km = 75000 m. Como $\dfrac{75000}{12500} = 6$, se tiene que un contenedor mide 6 m.

Ejercicio 3: Marcos y Luisa están parados en lados opuestos de una fuente circular. Empiezan a correr en el sentido de las agujas del reloj alrededor de la fuente. La rapidez de Marcos es $\dfrac{9}{8}$ de la rapidez de Luisa. ¿Cuantas vueltas ha dado Luisa antes de que Marcos la alcance por primera vez?

$\boxed{\text{Solución}}$

Como la velocidad de Marcos es $\dfrac{1}{8}$ más que la velocidad de Luisa, cuando Luisa ha dado 8 vueltas, Marcos ha dado 9 vueltas, ya que en cada vuelta Marcos avanza $\frac{1}{8}$ más.

Cuando Luisa da su primera vuelta, Marcos ya la ha dado y ha avanzado $\dfrac{1}{8}$ más que Luisa. Luego al dar Luisa su segunda vuelta, Marcos ya la ha dado y ha avanzado $\dfrac{1}{8}$ más, esto quiere decir, que Marcos desde el inicio hasta la segunda vuelta ya ha avanzado $\dfrac{2}{8}$ más que Luisa. Sin pérdida de la generalidad, se puede notar que en la tercera vuelta de Luisa, Marcos ha dado su vuelta y ha avanzado $\dfrac{3}{8}$ más que Luisa. A la cuarta vuelta de Luisa, Marcos ha dado su vuelta y ha avanzado $\dfrac{4}{8}$ más desde su punto de partida, pero $\dfrac{4}{8}$ equivale a $\dfrac{1}{2}$.

Esto nos indica que cuando Luisa cumple su cuarta vuelta, Marcos está frente a su punto de partida, donde se encuentra Luisa, por lo tanto, Marcos se encuentra con Luisa en la cuarta vuelta.

1.4. Números irracionales

Definición 4.1: Números irracionales

Los números irracionales, simbolizado por $\mathbb{Q}^c$, son aquellos cuya expresión decimal tiene infinitas cifras no periódicas.

De la definición anterior se desprende que los irracionales no tienen una representación como fracción.
A diferencia de los conjuntos estudiados anteriormente la suma y multiplicación de irracionales no es cerrada.

Ejemplo 20. *Notemos que* $\sqrt{2}$ *y* $\sqrt{8}$ *son números irracionales, pero* $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$ *no es un número irracional.*

Ejemplo 21. *Notemos que* $2 + \sqrt{2}$ *y* $2 - \sqrt{2}$ *son números irracionales, pero* $(2 + \sqrt{2}) + (2 - \sqrt{2}) = 4$ *no es un número irracional.*

1.5. Números reales

Definición 5.1: Números reales

La unión del conjunto de los números racionales y el conjunto de los números irracionales forma el conjunto de los números reales, denotado por $\mathbb{R}$.

La importancia de los números reales radica en sus propiedades aritméticas. Comenzaremos el estudio formal de los números reales, con los **axiomas de cuerpo**.

1.5.1. Axiomas de cuerpo

Los axiomas de cuerpo rigen las operaciones de adición y producto, éstos nos entregan una manipulación algebraica de los números en $\mathbb{R}$.

A.1. Clausura

La suma y la multiplicación son **cerradas** en $\mathbb{R}$, es decir,

- $\forall a, b \in \mathbb{R}, a + b \in \mathbb{R}$.
- $\forall a, b \in \mathbb{R}, a \cdot b \in \mathbb{R}$.

A.2. Conmutatividad

La suma y la multiplicación son **conmutativas** en $\mathbb{R}$, es decir,

- $\forall a, b \in \mathbb{R}, a + b = b + a$.
- $\forall a, b \in \mathbb{R}, a \cdot b = b \cdot a$.

A.3. Asociatividad

La suma y la multiplicación son **asociativas** en $\mathbb{R}$, es decir,

- $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, (a + b) + c = a + (b + c)$.
- $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

A.4. Neutros

El $0 \in \mathbb{R}$ cumple con la propiedad de **neutro aditivo**. Es decir,

$$\forall a \in \mathbb{R}, a + 0 = 0 + a = a.$$

El $1 \in \mathbb{R}$ cumple con la propiedad de **neutro multiplicativo**. Es decir,

$$\forall a \in \mathbb{R}, a \cdot 1 = 1 \cdot a = a.$$

A.5. Inversos

Para todo $a \in \mathbb{R}$, existe $(-a) \in \mathbb{R}$, llamado **opuesto aditivo o inverso aditivo**, tal que,

$$\forall a \in \mathbb{R}, a + (-a) = (-a) + a = 0.$$

Para todo $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, existe $a^{-1} \in \mathbb{R}$, llamado **inverso multiplicativo o recíproco**, tal que,

$$\forall a \in \mathbb{R}, a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1.$$

Por último, enunciamos el axioma que relaciona a las dos operaciones.

A.6. Distributividad

La adición se relaciona con la multiplicación mediante la propiedad **distributiva** de la multiplicación respecto a la suma:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}, a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Definición 5.2: Diferencia, Cuociente

ean $a, b \in \mathbb{R}$, definimos:

1. La **diferencia** o resta entre a y b como $a - b = a + (-b)$.
2. El **cuociente** o división entre a y b como $\dfrac{a}{b} = ab^{-1}$ para $b \neq 0$.

Notemos que la diferencia $a - b$ solo es una notación para representar la suma de a con el inverso aditivo de b. Lo mismo sucede con $\dfrac{a}{b}$ que denota la multiplicación entre a y el inverso multiplicativo de b, es decir, entre a y $b^{-1} = \frac{1}{b}$.
Además 0 no posee inverso multiplicativo, pues la división por 0 no está definida.

1.6. Potencias

Definición 6.1: Potencia

Para todo número real a y natural n, se define la n-ésima potencia de a, que se escribe a^n y se lee a elevado a n, como la multiplicación iterada (repetida) del número a por si mismo n veces, es decir:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n-\text{veces}}$$

el número a se llama **base** n se llama **exponente**

Ejemplo 22. *La escritura como potencia de* $(-7) \cdot (-7) \cdot (-7) \cdot (-7) \cdot (-7) \cdot (-7)$ *es* $(-7)^6$

Notemos que el valor de una potencia siempre es positivo excepto cuando la base de la potencia es negativa y el exponente es impar.

Ejemplo 23. *Calculemos el valor de las siguientes potencias:*

- $(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 81$
- $(-5)^3 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = -125$
- $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$

Teorema 6.1: Propiedades de las potencias

Sea $m, n \in \mathbb{Z}$, $a, b \in \mathbb{R}$, se tiene:

1. **Potencia de exponente 0:** todo real no nulo elevado a cero, da como resultado 1, es decir, $a^0 = 1, \quad a \neq 0$.

2. **Potencia de exponente 1:** toda potencia de exponente 1 es igual a la base, es decir, $a^1 = a$.

3. **Multiplicación de potencias de igual base:** se conserva la base y se suman los exponentes:
$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

4. **División de potencias de igual base:** se conserva la base y se resta al exponente del dividendo el exponente del divisor:
$$a^n \div a^m = a^{n-m}$$

5. **Multiplicación de potencias de igual exponente:** se multiplican las bases y se conserva el exponente:
$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

6. **División de potencias de igual exponente:** se dividen las bases y se conserva el exponente:
$$a^n \div b^n = (a \div b)^n$$

7. **Potencia de potencias:** se conserva la base y se multiplican los exponentes:
$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

8. **Potencia de exponente negativo:** la expresión equivalente a una potencia con exponente negativo es el recíproco de la base elevado al inverso aditivo del exponente original:
$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}, a \neq 0$$

9. **Igualdad de potencias con misma base:**
$$a^n = a^m \Rightarrow n = m, \quad a \neq 0, \; a \neq 1$$

1.6.1. Ejercicios Resueltos

Ejercicio 1: Realicemos las siguientes operaciones que involucran potencias:

- $\dfrac{5^2 \cdot 5^4}{10^6} = \dfrac{5^6}{10^6} = \left(\dfrac{5}{10}\right)^6 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^6 = 2^{-6}$
- $\dfrac{5^3}{5^4} + \dfrac{6^3}{5^3} = 5^{-1} + \left(\dfrac{6}{5}\right)^3$
- $5^3 + 5^3 + 5^3 + 5^3 + 5^3 = 5 \cdot 5^3 = 5^4$
- $\dfrac{4^3 \cdot 8^3}{32^4} = \dfrac{32^3}{32^4} = 32^{-1}$
- $\dfrac{2 \cdot 7^2 + 4 \cdot 7^2 + 7^2}{7^3} = \dfrac{7 \cdot 7^2}{7^3} = \dfrac{7^3}{7^3} = 1$
- $\dfrac{12 \cdot 5^4 + 9 \cdot 5^4 + 4 \cdot 5^4}{5^2 + 4 \cdot 5^2} = \dfrac{25 \cdot 5^4}{5 \cdot 5^2} = \dfrac{5 \cdot 5^4}{\cdot 5^2} = \dfrac{5^5}{5^2} = 5^3$
- $\dfrac{(4^2)^6 \cdot (3^4)^3 \cdot 5^{12}}{25^6} = \dfrac{4^{12} \cdot 3^{12} \cdot 5^{12}}{(5^2)^6} = \dfrac{60^{12}}{5^{12}} = \left(\dfrac{60}{5}\right)^{12} = 12^{12}$
- $\dfrac{2^{2014} - 2^{2013}}{2^{2013} - 2^{2012}} = \dfrac{2^{2014} - 2^{2013}}{2^{2013} - 2^{2012}} = \dfrac{2^{2013} \cdot (2-1)}{2^{2012} \cdot (2-1)} = \dfrac{2^{2013}}{2^{2012}} = 2$

Ejercicio 2: ¿Cuántas cifras tendrá el resultado de la multiplicación: $\left(2^{22}\right)^5 \cdot \left(5^{55}\right)^2$?

Solución

$$\left(2^{22}\right)^5 \cdot \left(5^{55}\right)^2 = 2^{110} \cdot 5^{110} = 10^{110}$$

Notemos que 10^0 tiene 1 cifra, 10^1 tiene 2 cifras, 10^2 tiene 3 cifras, 10^n tiene $n+1$ cifras. Por lo tanto 10^{110} tiene 111 cifras.

Ejercicio 3: Si $a^b = \dfrac{1}{2}$ ¿Cuál es el valor de a^{-3b}?.

Solución

Usando las propiedades de las potencias, se tiene que:

$$a^{-3b} = \left(a^b\right)^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 2^3 = 8$$

Ejercicio 4: Una abuela, su hija y su nieta pueden decir este año que la suma de sus edades es 100. ¿Qué edades tienen si cada una de las edades es una potencia de 2?

Solución

Notemos que $2 = 2^1, 4 = 2^2, 8 = 2^3, 16 = 2^4, 32 = 2^5, 64 = 2^6$ son las potencias de 2 menores a 100, de las cuales tres deben sumar 100, lo que solamente se logra con $2^2, 2^5, 2^6$. De este modo se tiene que las edades de la nieta, la hija y la abuela son $4, 32, 64$ respectivamente.

Ejercicio 5: ¿Cuántos decimales tiene el número $\dfrac{1}{1024000}$ escrito en su forma decimal?

Solución

Notemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1024000} = \frac{1}{1024 \cdot 1000} &= \frac{1}{2^{10} \cdot 10^3} \\
&= \overbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2}}^{10 \text{ veces}} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \\
&= \overbrace{0,5 \cdot 0,5 \cdot \ldots \cdot 0,5}^{10 \text{ veces}} \cdot 0,1 \cdot 0,1 \cdot 0,1
\end{aligned}$$

Si contamos los factores, todos con un decimal veremos que el número $\dfrac{1}{1024000}$ tiene 13 decimales.

Definición 6.2: Notación decimal

El sistema decimal es un sistema de numeración en el cual el valor de cada dígito depende de su posición dentro del número. Para números enteros, comenzando de derecha a izquierda, el primer dígito le corresponde el lugar de las unidades, de manera que el dígito se multiplica por 10^0 (es decir 1) ; el siguiente dígito corresponde a las decenas (se multiplica por $10^1 = 10$); el siguiente a las centenas (se multiplica por $10^2 = 100$); el siguiente a las unidades de mil (se multiplica por $10^3 = 1000$) y así sucesivamente, nombrándose este según su posición. El valor del número entero es la suma de los dígitos multiplicados por las correspondientes potencias de diez según su posición.

Ejemplo 24. *La escritura decimal del número* 32321 *es*

$$3 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$$

1.7. Raíces

Definición 7.1: Raíz

Sean $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces, la raíz de n-ésima de a es un número real b tal que $b^n = a$. La notación a seguir es:

$$\sqrt[n]{a} = b$$

Donde n se llama índice u orden de la raíz y a se denomina cantidad subradical o radicando.

La raíz de orden dos se llama raíz cuadrada y, por ser la más frecuente, se escribe sin superíndice, es decir $\sqrt[2]{a}$ se escribe como $\sqrt{a}$.

Ejemplo 25.

- $\sqrt[4]{81} = 3$, *porque* $3^4 = 81$
- $\sqrt[3]{-125} = -5$, *porque* $(-5)^3 = -125$
- $\sqrt{121} = 11$

Definición 7.2: Potencia de exponente racional

Toda potencia de exponente racional, de la forma $\dfrac{m}{n}$, corresponde a la raíz $n-$ésima de la $m-$ésima potencia de a. Así:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Ejemplo 26.

- $2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$
- $8^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{8}$

Teorema 7.1: Propiedades de las raíces

Sean $a, b \in \mathbb{R}_0^+$, $n, k, p \in \mathbb{Z}$ tales que $n, k \geq 1$, se tiene:

1. **Multiplicación de raíces con el mismo índice:** Se multiplican los radicandos y se mantiene el subíndice:
$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$
2. **División de raíces con el mismo índice:** Se dividen los radicandos y se mantiene el subíndice:
$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, \quad b \neq 0$$
3. **Raíz de otra raíz:** Una raíz elevada a otra raíz es igual a otra raíz cuyo índice es el producto los dos índices:
$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n \cdot k]{a}$$
4. **Anulación de la raíz:** Una potencia de exponente n que está dentro de una raíz con índice n, la potencia con la raíz se anula:
$$(\sqrt[n]{a})^n = \sqrt[n]{a^n} = a$$
5. **Multiplicación de raíces de distinto índice:** Se reducen los índices distintos a un índice común:
$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[k]{b} = \sqrt[nk]{a^k b^n}$$
6. **Simplificación de radicales:** Para simplificar un radical dividimos el 'ńdice y el exponente del radical por el *mcd* de ambos:
$$\sqrt[nk]{a^{pk}} = \sqrt[n]{a^p}$$

Ejemplo 27. *Realicemos las siguientes operaciones con raíces:*

- $(\sqrt[4]{17})^4 = 17$
- $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{64} = 4$
- $\sqrt{98} = \sqrt{49 \cdot 2} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{2} = 7\sqrt{2}$

- $\dfrac{\sqrt[3]{2000}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\dfrac{2000}{2}} = \sqrt[3]{1000} = 10$
- $\sqrt{\dfrac{15}{96}} = \dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{96}} = \dfrac{\sqrt{15}}{14}$
- $\sqrt[3]{\sqrt{17}} = \sqrt{\sqrt[3]{17}} = \sqrt[6]{17}$
- $\sqrt[3]{27^2} = (\sqrt[3]{27})^2 = 3^2 = 9$
- $\sqrt[6]{8^4} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$
- $(\sqrt[3]{-8})^3 = -8$
- $\sqrt[3]{-3} \cdot \sqrt[3]{-9} = \sqrt[3]{-3 \cdot -9} = \sqrt[3]{27} = 3$
- $\dfrac{\sqrt[3]{-250}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\dfrac{-250}{2}} = \sqrt[3]{-125} = -5$
- $\sqrt[3]{\sqrt[5]{-64}} = \sqrt[5]{\sqrt[3]{-64}} = \sqrt[15]{-64} = \sqrt[15]{(-4)^3} = \sqrt[5]{-4}$
- $\sqrt[5]{(-243)^3} = (\sqrt[5]{-243})^3 = (-3)^3 = -27$
- $\dfrac{\sqrt[3]{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[6]{8}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{2^2 \cdot 2}} \cdot \sqrt[6]{2^3}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt[6]{2^3} \cdot \sqrt[6]{2^3}}{\sqrt{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$
- $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[6]{5} = \sqrt[18]{5^9} = \sqrt{5}$
- $\dfrac{\sqrt[4]{7}}{\sqrt[3]{7}} = \sqrt[12]{7^{-1}}$
- $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[2]{2} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{30}$
- $\dfrac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{2}} + \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{\dfrac{8}{2}} + \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{4} = 2\sqrt[3]{4}$
- $\sqrt[3]{\sqrt[2]{\sqrt[4]{5}}} = \sqrt[24]{5}$
- $\sqrt{5\sqrt{25\sqrt{\sqrt{\sqrt{5}}}}} = \sqrt{\sqrt{5^2 \cdot 5^2 \sqrt[8]{5}}} = \sqrt[4]{5^4 \sqrt[8]{5}} = \sqrt[4]{\sqrt[8]{5^{32} \cdot 5}} = \sqrt[32]{5^{32} \cdot 5} = \sqrt[32]{5^{32}} \cdot \sqrt[32]{5} = 5\sqrt[32]{5}$
- $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{\sqrt{3}}}} = \sqrt{\sqrt{3^2 \cdot 3\sqrt[4]{3}}} = \sqrt[4]{3^3\sqrt[4]{3}} = \sqrt[4]{\sqrt[4]{3^{12} \cdot 3}} = \sqrt[16]{3^{13}}$

1.7.1. Suma de raíces

La adición entre raíces $n-$ésimas, se puede efectuar, si ellas tienen igual índice y cantidad subradical.

Ejemplo 28. *Calculemos las siguientes sumas de raíces:*

- $$3\sqrt{2}+4\sqrt{2}=7\sqrt{2}$$

- $$6\sqrt[3]{5}-8\sqrt[3]{5}=-2\sqrt[3]{5}$$

- $$\begin{aligned}\sqrt{18}+3\sqrt{8}-\sqrt{32}=&3\sqrt{2}+6\sqrt{2}-4\sqrt{2}\\ =&5\sqrt{2}\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\sqrt{108}+\sqrt{27}-\sqrt{75}=&\sqrt{36\cdot 3}+\sqrt{9\cdot 3}-\sqrt{25\cdot 3}\\ =&6\sqrt{3}+3\sqrt{3}-5\sqrt{3}\\ =&4\sqrt{3}\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}2\sqrt{5}+\sqrt{45}+\sqrt{180}-\sqrt{80}=&2\sqrt{5}+\sqrt{9\cdot 5}+\sqrt{36\cdot 5}-\sqrt{16\cdot 5}\\ =&2\sqrt{5}+3\sqrt{5}+6\sqrt{5}-4\sqrt{5}\\ =&7\sqrt{5}\end{aligned}$$

1.7.2. Racionalización

La racionalización es un proceso en donde se tiene que eliminar la raíz o raíces que están en el denominador de una fracción, encontrando otra expresión equivalente que no tenga raíces en el denominador. Para ello se multiplica el numerador y el denominador por una expresión adecuada, de forma que al operar, se elimine la raíz del denominador.

Cuando el denominador sea $\sqrt[n]{a^m}$, la fracción se debe amplificar por $\sqrt[n]{a^{n-m}}$. Cuando el denominador sea $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, la fracción se debe amplificar por $\sqrt{a}-\sqrt{b}$. Cuando el denominador sea $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, la fracción se debe amplificar por $\sqrt{a}+\sqrt{b}$. Para otro tipo de denominadores se debe hacer uso de los productos notables.

Ejemplo 29. *Racionalicemos las siguinetes fracciones*

- $\dfrac{14}{\sqrt{7}} \cdot \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \dfrac{14\sqrt{7}}{7} = 2\sqrt{7}$

- $\dfrac{6}{\sqrt[7]{8}} = \dfrac{6}{\sqrt[7]{2^3}} \cdot \dfrac{\sqrt[7]{2^4}}{\sqrt[7]{2^4}} = \dfrac{6\sqrt[7]{2^4}}{2} = 3\sqrt[7]{16}$

- $\dfrac{12}{3-\sqrt{7}} = \dfrac{12}{3-\sqrt{7}} \cdot \dfrac{3+\sqrt{7}}{3+\sqrt{7}} = \dfrac{12(3+\sqrt{7})}{9-7} = 6(3+\sqrt{7})$

- $\dfrac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \dfrac{2(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \dfrac{2(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{3-2} = 2(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

Ejemplo 30. *Calculemos las siguientes sumas racionalizando*

- $$\begin{aligned}
\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{250} + \sqrt[6]{4} - \frac{1}{\sqrt[3]{4}} &= \sqrt[3]{2\cdot 8} + \sqrt[3]{2\cdot 125} + \sqrt[6]{2^2} - \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{2}} \\
&= 2\sqrt[3]{2} + 5\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} - \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{8}} \\
&= 2\sqrt[3]{2} + 5\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} - \frac{\sqrt[3]{2}}{2} \\
&= \frac{15}{2}\sqrt[3]{2}
\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}
7\sqrt[3]{\frac{27}{56}} + \frac{7}{3\sqrt[3]{7}} - \frac{1}{2\sqrt[6]{49}} &= \sqrt[3]{\frac{27\cdot 7^3}{7\cdot 8}} + \frac{7\cdot\sqrt[3]{7^2}}{3\sqrt[3]{7}\cdot\sqrt[3]{7^2}} - \frac{1\cdot\sqrt[3]{7^2}}{2\sqrt[3]{7}\cdot\sqrt[3]{7^2}} \\
&= \frac{3\sqrt[3]{7^2}}{2} + \frac{7\sqrt[3]{7^2}}{3\cdot 7} - \frac{\sqrt[3]{7^2}}{2\cdot 7} \\
&= \frac{63\sqrt[3]{7^2}}{2\cdot 3\cdot 7} + \frac{14\sqrt[3]{7^2}}{2\cdot 3\cdot 7} - \frac{3\sqrt[3]{7^2}}{2\cdot 3\cdot 7} \\
&= \frac{74\sqrt[3]{7^2}}{2\cdot 3\cdot 7} \\
&= \frac{37\sqrt[3]{7^2}}{21}
\end{aligned}$$

1.8. Logaritmos

A partir del siglo XVI, debido principalmente a la expansión comercial y al perfeccionamiento de las técnicas de navegación, los cálculos que se precisaban, eran de tal magnitud que surge la necesidad de encontrar algoritmos menos laboriosos que los utilizados hasta entonces, es decir, algoritmos de la multiplicación, de la división, etc.
El descubrimiento de los logaritmos no se produjo aisladamente, por un único proceso. Dos caminos condujeron a su hallazgo: los cálculos trigonométricos para las investigaciones astronómicas aplicables a la navegación, y el cálculo de las riquezas acumuladas en lo que se refiere a las reglas de interés compuesto. Ambos caminos inspiraron respectivamente a John Napier y a Henry Briggs[1] en el descubrimiento de los logaritmos.

Definición 8.1: Logaritmo

Sea $a > 0$, $a \neq 1$. Si $x \in \mathbb{R}^+$, entonces el único exponente y tal que $a^y = x$ se denomina logaritmo de x en base a. Se denota por $\log_a x$.

1. En palabras y es el exponente al que hay que elevar la base a para obtener el número x.
2. Solamente se pueden calcular logaritmo de números reales positivos.
3. Cuando la base $a = 10$, se llama logaritmo decimal o logaritmo de Briggs y se denota por log, sin anotar la base.
4. Cuando la base $a = e \approx 2,7172$, se llama logaritmo natural o logaritmo neperiano (en honor a Napier) y se denota por ln

Ejemplo 31. *Calculemos los siguientes logaritmos:*

- $\log_2 128 = \log_2 2^7 = 7$
- $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{27} = \log_{\frac{1}{3}} 3^{\frac{3}{2}} = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{3}{2}$
- $\log_2 64 = 6$
- $\log_6 \dfrac{1}{216} = -3$
- $\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$

[1]John Napier, matemático escocés (1550 – 1617); Henry Briggs, matemático inglés (1561 – 1630)

- $\log_7 \sqrt{7} = \dfrac{1}{2}$
- $\log_2 \sqrt[5]{32} = 1$
- $\log_3 \sqrt{27} = \log_3 3^{\frac{3}{2}} = \dfrac{3}{2}$
- $\log_2 (\log_2 16) = \log_2 (4) = 2$

Ejemplo 32. *Calculemos* $\log_5 125 + \log_{\frac{1}{2}} 128 + \log_2 \dfrac{2}{\sqrt{2}} - \log_2 \sqrt[5]{32}$

$$\begin{aligned}
\log_5 125 + \log_{\frac{1}{2}} 128 + \log_2 \frac{2}{\sqrt{2}} - \log_2 \sqrt[5]{32} &= \log_5 5^3 + \log_{\frac{1}{2}} 2^7 + \log_2 \sqrt{2} - \log_2 \sqrt[5]{2^5} \\
&= 3 + (-7) + \frac{1}{2} - 1 \\
&= -\frac{9}{2}
\end{aligned}$$

Ejemplo 33. *Calculemos* $\log_{0,5} 16 + 2\log_2 \sqrt{8} - \log_{\sqrt{3}} 9$

$$\begin{aligned}
\log_{0,5} 16 + 2\log_2 \sqrt{8} - \log_{\sqrt{3}} 9 &= \log_{\frac{1}{2}} 16 + \log_2 \sqrt{8}^2 - \log_{\sqrt{3}} 3^2 \\
&= \log_{\frac{1}{2}} 16 + \log_2 8 - \log_{\sqrt{3}} 3^2 \\
&= -4 + 3 - 4 = -5
\end{aligned}$$

Ejemplo 34. *Calculemos* $\sqrt{(\log_5 15)(\log_3 15) - \log_3 5 - \log_5 3 + \log_3 9}$

$$\begin{aligned}
&\sqrt{(\log_5 15)(\log_3 15) - \log_3 5 - \log_5 3 + \log_3 9} \\
=&\sqrt{(\log_5 (3 \cdot 5))(\log_3 (3 \cdot 5)) - \log_3 5 - \log_5 3 + \log_3 9} \\
=&\sqrt{(\log_5 3 + \log_5 5)(\log_3 3 + \log_3 5) - \log_3 5 - \log_5 3 + \log_3 9} \\
=&\sqrt{(\log_5 3 + 1)(1 + \log_3 5) - \log_3 5 - \log_5 3 + 2} \\
=&\sqrt{\log_5 3 + \log_5 3 \cdot \log_3 5 + 1 + \log_3 5 - \log_3 5 - \log_5 3 + 2} \\
=&\sqrt{\log_5 3 \cdot \log_3 5 + 3} \\
=&\sqrt{1 + 3} \\
=&2
\end{aligned}$$

Teorema 8.1: Propiedades de los logaritmos

Sean $a, b \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$, $x, y \in \mathbb{R}^+$, se tiene:

1. **Logaritmo de la unidad:**
$$\log_a 1 = 0$$

2. **Logaritmo de la base:**
$$\log_a a = 1$$

3. **Logaritmo del producto:**
$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

4. **Logaritmo de la división:**
$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

5. **Logaritmo de una potencia:**
$$\log_a x^k = k \log_a x$$

6. **Cambio de base:**
$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

7. **Igualdad de logaritmos:**
$$\log_a x = \log_a y \Rightarrow x = y$$

Ejemplo 35. *Calculemos* $\log_a b + \log_a \frac{1}{b}$

Solución

$$\log_a b + \log_a \frac{1}{b} = \log_a b \cdot \frac{1}{b} = \log_a 1 = 0$$

Ejemplo 36. *Escribamos como un solo logaritmo la expresión* $\frac{1}{2}\log a - \frac{1}{2}\log b - \frac{1}{2}\log c$

$\boxed{\text{Solución}}$

Factorizamos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\log a - \frac{1}{2}\log b - \frac{1}{2}\log c &= \frac{1}{2}(\log a - \log b - \log c)\\
&= \frac{1}{2}(\log a - (\log b + \log c))\\
&= \frac{1}{2}(\log a - \log bc)\\
&= \frac{1}{2}\log \frac{a}{bc}\\
&= \log\left(\frac{a}{bc}\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Ejemplo 37. *Verifiquemos que* $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = 1$.

$\boxed{\text{Solución}}$

En este problema aplicaremos la propiedad 8), llamada cambio de base y escribiremos todos los logaritmos en una sola base, escogemos la base a.

$$\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = \log_a b \cdot \frac{\log_a c}{\log_a b} \cdot \frac{\log_a a}{\log_a c} = 1$$

Ejemplo 38. *Si* $\log 3 = a$ *y* $\log 2 = b$, *entonces* $\log 15 =$

$\boxed{\text{Solución}}$

$$\begin{aligned}
\log 15 &= \log \frac{3\cdot 10}{2}\\
&= \log 3 + \log 10 - log 2\\
&= a + 1 - b
\end{aligned}$$

1.9. Ejercicios propuestos

A) ¿Cuál es la descomposición prima de los siguientes números?:

1. *542*

2. *1805*

3. *320*

4. *648*

5. *2430*

6. *455*

7. *13800*

8. *43542*

9. *94820*

10. *2013*

11. *4728*

B) Determine el M.C.M y m.c.d entre los números:

12. *2, 4 y 8*

13. *5, 10 y 20*

14. *6, 8 y 12*

15. *12, 16 y 48*

16. *36, 48 y 60*

17. *12, 45 y 42*

18. *375, 135 y 36*

19. *60, 126, 24 y 270*

20. *49, 77, 168 y 1001*

C) Resuelva los siguientes problemas:

21. *Determine todas las maneras posibles de empaquetar 40 latas de tomate en cajas de igual número de latas.*

22. *Se tienen tres cámaras frigoríficas que contienen 1600 kilos, 2000 kilos y 3392 kilos de mantequilla, respectivamente. La mantequilla de cada cámara está dividida en bloques del mismo peso y el mayor posible. ¿Cuánto pesa cada bloque y cuántos bloques hay en cada cámara?*

23. *¿Cuál será la mayor longitud de una medida con la que se puedan medir exactamente tres dimensiones de 140 metros, 560 metros y 800 metros?*

24. *Se tienen extensiones de terrenos de 3675, 1575 y 2275 metros cuadrados de superficie y se quieren dividir en parcelas iguales. ¿Cuál ha de ser la superficie de cada parcela para que el número de parcelas de cada una sea el menor posible?*

25. *¿Cuál es la menor capacidad de un estanque que se puede llenar en un número exacto de minutos por tres llaves, donde la primera vierte 12 litros por minuto, la segunda 15 litros por minuto y la tercera 20 litros por minuto?*

26. *¿Cuál es la menor suma de dinero con la que se puede comprar un número exacto de libros de $1500, $1600, $4800 y $15000, cada uno y cuántos libros de cada precio podrían comprarse con esa suma?*

27. *¿Cuál será la menor longitud de una varilla que se puede dividir en secciones de 18 pulgadas y 40 pulgadas de longitud sin que sobre ni falte nada, y cuántas secciones de cada longitud se podrían sacar de esa varilla?*

28. *Tres ciclistas parten juntos en una carrera en la que la pista es circular. Si el primero tarda 12 segundos en dar una vuelta a la pista, el segundo 13 segundos y el tercero 15 segundos. ¿Al cabo de cuántos segundos pasarán juntos por el lugar de la partida y cuántas vueltas habrá dado cada uno en ese tiempo?*

D) Transforme a fracción los siguientes decimales y escriba dichas fracciones en su forma irreductible

29. 0,345

30. $0{,}1\overline{6}$

31. $3.\overline{121}$

32. $0{,}00\overline{6}$

33. 12,342

34. 3,26262626262...

35. 2,36

36. $21.\overline{3}$

37. $0{,}02\overline{4}$

38. 6,527272727...

39. 4,53

40. $23,1288888...$

41. $0,00\overline{65}$

42. $52,\overline{771}$

43. $2,12\overline{95}$

E) Ordena los siguientes números racionales de menor a mayor.

44. $0,41\overline{6};\ \dfrac{1}{3};\ 0,\overline{4};\ \dfrac{3}{8};\ \dfrac{1}{4}$

45. $\dfrac{2}{11};\ 0,1\overline{6};\ \dfrac{5}{18};\ \dfrac{8}{33};\ 0,\overline{21};\ \dfrac{3}{12}$

F) Realiza las siguientes operaciones de números racionales.

46. $\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} + \dfrac{1}{\frac{3}{4}} - \dfrac{\frac{3}{5}}{8}$

47. $\dfrac{3}{5} + \dfrac{7}{6} - 0,14 + 1,\bar{3} - \dfrac{2}{3}$

48. $\left(25,\overline{67} - 12,\overline{34}\right) \cdot \dfrac{3}{4}$

49. $\dfrac{32}{9} - 1,0\overline{3} - \left(\dfrac{4}{3} + 0,\overline{6}\right)$

50. $5,5 + \left(6,2 - 0,75 \div \dfrac{1}{4}\right) \cdot \dfrac{5}{4}$

51. $\dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1 + \frac{1}{2}}}$

52. $\left(\dfrac{8}{10} \cdot \left[\dfrac{1}{2} \cdot \left(\dfrac{1}{5} + \dfrac{3}{4}\right) + \dfrac{7}{16}\right]\right) \div \dfrac{2}{3}$

53. $\dfrac{\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{6}\right) \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{3} - \frac{1}{6}}{\left(\frac{3}{12} + \frac{1}{3} - \frac{2}{6} + \frac{1}{4}\right) \cdot 2}$

54. $\dfrac{12}{10} - \dfrac{2}{3} \cdot 3 + 2 - \dfrac{1}{\frac{1}{2} + 1}$

55. $\dfrac{5}{15} - \dfrac{6}{15} \cdot \dfrac{4}{3} + \dfrac{5}{2}$

56. $\dfrac{2}{3} - \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}\right) + \left(\dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{6}\right)$

57. $2 + \dfrac{2}{2 + \dfrac{2}{2 + \frac{2}{5}}} + \dfrac{1}{3 + \dfrac{5}{4}}$

58. $\dfrac{2,\overline{46} + \dfrac{1}{3}}{1\dfrac{1}{4} - 4,\overline{3}} + 2,1\overline{3}$

59. $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)$

60. $\frac{4}{5}:\left[\left(\frac{5}{8}-\frac{1}{3}\right)\cdot 12\right]$

61. $\left[\left(-\frac{2}{5}\right)\div(-4)\right]\cdot\left[\left(\frac{5}{-3}\right)\div\left(\frac{1}{-6}\right)\right]$

62. $\dfrac{(0,\overline{15}-\frac{1}{33})+(0,\overline{09}+\frac{1}{3})}{\frac{0,25}{0,55}+\frac{1}{9}+0,5\overline{65}}$

G) Responda las siguientes preguntas:

63. *Ricardo y Sebastián están construyendo un iglú. Por cada hora que pasa, Ricardo hace 8 ladrillos de hielo y Sebastián hace dos ladrillos menos que Ricardo. ¿Cuántos ladrillos hacen juntos en tres horas?*

64. *¿Cuál es la mitad de los* $\frac{3}{4}$ *de* 8*?*

65. *¿Cuál es el valor de* $\dfrac{x-10y}{z}$ *si* $x=0,\overline{2}$, $y=-0,2$ *y* $z=\frac{1}{2}$*?*

66. *¿Todos los números naturales son números racionales?*

67. *¿Todos los números reales son irracionales?*

68. *¿El cuadrado de un número par es un número par?*

69. *¿Puede un número primo, distinto de 2, terminar en cifra par? ¿Por qué?*

70. *¿Existe algún número primo terminado en cero? ¿Por qué?*

71. *Jorge compró una calculadora con los* $\frac{2}{7}$ *del dinero que tenía. Con la mitad de lo que le quedaba compró un diccionario de bolsillo. Tiene todavía \$1.250. ¿Cuánto dinero tenía antes de sus compras?*

72. *Un estanque de alcohol de quemar está lleno hasta los* $\frac{3}{5}$ *de su capacidad y tiene* 2250 *litros ¿Cuál es la capacidad total del estanque?*

73. *Se desean repartir* $83,5$ *litros de leche en jarros de* $2,5$ *litros ¿Cuántos jarros se necesitarían?*

74. *El dueño de un terreno de* $3000\ m^2$ *decidió vender* $\frac{1}{5}$ *de él, el resto lo subdividió en* 4 *sitios de igual superficie ¿De cuántos metros cuadrados quedó cada sitio?*

75. *Si una lámpara tiene* 40 *ampolletas que se encienden por medio de tres interruptores* A, B *y* C. *El interruptor* A *enciende los* $\frac{3}{5}$ *del total. Si accionamos* B *se encienden* $\frac{3}{4}$ *del resto ¿Cuántas ampolletas se encienden si accionamos el interruptor* C*?*

76. *El estanque de un auto está lleno de bencina al empezar el viaje. Al terminar la primera etapa le quedan los* $\frac{3}{5}$ *del estanque. En la segunda etapa ha gastado la mitad de lo que le quedaba. Le quedan aún 15 litros. ¿Cuál es la mitad de la capacidad del estanque? ¿Cuántos litros gastó en cada etapa?*

77. *Una pelota de caucho cae verticalmente desde una altura de* 15 *metros del techo de un edificio. Después de cada impacto con el piso rebota hasta una altura de* $4/5$ *de la altura anterior. ¿Cuántas veces aparecerá la pelota enfrente de una ventana regular cuyo borde inferior tiene una altura de* $5,5$ *metros y cuyo borde superior tiene una de* $6,5$ *metros?*

78. *La siguiente es la tabla de multiplicar de los números del 1 al 10. ¿Cuál es la suma de los 100 productos presentes en la tabla?*

$\times$	1	2	3	$\dots$	10
1	1	2	3	$\dots$	10
2	2	4	6	$\dots$	20
$\vdots$	$\vdots$				$\vdots$
10	10	20	30	$\dots$	100

79. *Varios puntos se marcan en una línea, y se trazan todos los segmentos posibles entre parejas de estos puntos. Uno de los puntos se encuentra en 80 de estos segmentos (no como extremo); otro punto se encuentra en 90 de estos segmentos (no como extremo). ¿Cuántos puntos fueron marcados en la línea?*

H) Escribe cada expresión como una sola potencia:

80. $2^6 \cdot 3^6$

81. $\dfrac{4^5}{2^5}$

82. $2^5 \cdot 3^5 \cdot 5^5$

83. $2^2 \cdot (-3)^2 \cdot 6^5$

84. $7^5 \cdot 11^5$

85. $\dfrac{7^2}{14^2} \cdot 4^2$

86. $(-8)^3 \cdot 10^3$

87. $\dfrac{15^3}{5^3} \div 3^2$

88. $4^4 \cdot (-5)^4$

89. $2^8 \cdot \dfrac{1^6}{2^6 \cdot 5^{-2}}$

90. $3^4 + 3^4 + 3^4$

91. $(-5)^3 \cdot 5^3 \cdot (-5)^3$

92. $\dfrac{5^4 \cdot 5^2}{10^6}$

93. $\dfrac{3^3}{3^9} \cdot (6^3)^2$

94. $(3^2)^{-2} \cdot (2^4)^2$

95. $(5^8)^0 \cdot (7^2)^2$

96. $(6^2)^3 \div (4^3)^2$

I) Completa con el número o la potencia que falta para que sea verdadera cada igualdad:

97. $10^7 \cdot \square = 10^5$

98. $(7^6)^4 = (7^2)^{\square}$

99. $6^5 \cdot 6^4 = \square$

100. $43^5 \div \square = 43^7 \cdot 43^{-8}$

101. $\square \cdot 9^8 = 9^3$

102. $17^4 \cdot \square = 17^{-1} \cdot 17^{-3}$

103. $11^3 \cdot \square \cdot 11^2 = 11^7$

104. $3^8 \div 3^4 = 3^4 \cdot \square$

105. $(9^4)^3 = (3^{\square})^6$

106. $(-5)^9 \div \square = (-5)^3 \cdot (-5)^4$

107. $(64^2)^5 = (2^{\square})^{10}$

108. $7^1 \div 7^8 = 7^{-2} \cdot \square$

109. $(10^{-2})^{25} = (10^{10})^{\square}$

110. $10^5 \cdot 10^{-3} = 10^5 \div \square$

111. $(27^4)^{\square} = (9^2)^3$

112. $(-12)^7 \cdot \square = (-12) \div (-12)^2$

113. $\square \div 11^3 = 11^4 \cdot 11^2$

J) Resuelve las siguientes adiciones y sustracciones de potencias:

114. $2^2 + 3^3 - 2^2$

115. $3^2 + 3^2 + 3^2$

116. $2^3 - 7^5 + 2^3 + 7^5 + 2^3 + 2^3$

117. $3^4 + 3^5 + 3^4 + 3^5 + 3^4$

118. $4^{-2} + 4^2 + 4^{-2} - 4^2$

119. $6^2 + 2^3 \cdot 3^2 + 6^2$

K) Calcule las siguientes raíces:

120. $\sqrt{64}$

121. $\sqrt{100}$

122. $\sqrt[3]{64}$

123. $\sqrt[5]{-32}$

124. $\sqrt[4]{81}$

125. $\sqrt{121}$

126. $\sqrt{\frac{81}{49}}$

127. $\sqrt[3]{\frac{1}{27}}$

128. $\sqrt[4]{\frac{1}{625}}$

129. $\sqrt[3]{-\frac{125}{216}}$

L) Usando propiedades de las raíces exprese en la forma más simple las siguientes raíces:

130. $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}$

131. $\sqrt[3]{10^2 \cdot 20} \cdot \sqrt[3]{2 \cdot 10^2 \cdot 5^2 \cdot 4}$

132. $\sqrt[3]{\sqrt{10} - \sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{10} + \sqrt{2}}$

133. $\dfrac{3\sqrt{128 \cdot 5^4}}{6\sqrt{64 \cdot 5^2}}$

134. $\sqrt[5]{\dfrac{7}{\sqrt[6]{7}}}$

135. $\left[\sqrt[3]{\dfrac{5a^2b^5}{c^4b}} : \sqrt{\dfrac{b^2c^3}{a^3}}\right]^{12}$

136. $\dfrac{\sqrt[3]{27 \cdot 2^7 \cdot 3^{12}}}{\sqrt[3]{2 \cdot 3^6}}$

M) Transforme las raíces que sean necesarias y reduzca a términos semejantes:

137. $\sqrt{18}+\sqrt{50}-2\sqrt{8}$

138. $\sqrt{2}+2\sqrt{8}+3\sqrt{18}$

139. $2\sqrt{5}-13\sqrt{20}+5\sqrt{45}$

140. $3\sqrt{8}+2\sqrt{32}+7\sqrt{50}-6\sqrt{162}+9\sqrt{98}$

141. $4\sqrt{20}-7\sqrt{45}+6\sqrt{80}$

142. $\dfrac{12\sqrt{20}-18\sqrt{45}}{6\sqrt{5}}$

143. $\sqrt{175}+\sqrt{243}-\sqrt{63}-2\sqrt{75}$

144. $\dfrac{3\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt[5]{27}}{\sqrt[10]{3^2}\cdot\sqrt[5]{3^4}}$

145. $\dfrac{2\cdot\sqrt{2\cdot\sqrt[3]{2}}\cdot\sqrt{\sqrt{2^7}}}{\sqrt[2]{8}\cdot\sqrt[3]{32}}$

146. $\dfrac{3\sqrt{8}+2\sqrt{32}+7\sqrt{50}}{6\sqrt{162}-9\sqrt{98}}$

N) Racionalice los denominadores en las siguientes fracciones:

147. $\dfrac{5}{\sqrt{2}}$

148. $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{18}}$

149. $\dfrac{7}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

150. $\dfrac{2}{3+\sqrt{7}}$

151. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{25}}$

152. $\dfrac{2}{\sqrt[4]{2}}$

153. $\dfrac{\sqrt{\sqrt{5}+1}}{\sqrt{\sqrt{5}-1}}$

154. $\dfrac{8}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$

155. $\dfrac{\sqrt{24}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$

156. $\dfrac{4}{\sqrt[5]{8}}$

157. $\dfrac{a}{\sqrt[7]{a^3b^2}}$

O) Calcule la base de los siguientes logaritmos:

158. $\log_{\square} 36 = 2$

159. $\log_{\square} 64 = 3$

160. $\log_{\square} 0,01 = -2$

161. $\log_{\square} 0,001 = 3$

162. $\log_{\square} 12345 = 1$

163. $\log_{\square} 8 = 3$

164. $\log_{\square} 3 = 1$

165. $\log_{\square} 1 = 0$

166. $\log_{\square} 0,25 = -2$

167. $\log_{\square} 2 = 2$

168. $\log_{\square} 121 = -1$

169. $\log_{\square} 8 = -3$

P) Calcule los siguientes logaritmos:

170. $\log_3 81$

171. $\log_3(\frac{1}{3})$

172. $\log_2 1$

173. $\log 0,01$

174. $\log_5\sqrt{5}$

175. $\log_2 32$

176. $\log 100$

177. $\log_4 1024$

178. $\log_{16} 256$

179. $\log_7 343$

180. $\log_{64} 8$

181. $\log_{625} 5$

182. $\log_{27} 3$

183. $\log_9 243$

184. $\log_{64} 256$

Q) Calcule el valor aproximado de los siguientes logaritmos, sabiendo que el $\log_2 3 \cong 1,60$:

185. $\log_2 6$

186. $\log_2 24$

187. $\log_2 \frac{2}{3}$

188. $\log_2 \frac{3}{4}$

189. $\log_2 15$ - $\log_2 5$

190. $\log_2 \frac{1}{9}$

191. $\log_2 0,5$

192. $\log_4 24$

R) Calcule el valor aproximado de los siguientes logaritmos, sabiendo que el $\log 2 \cong 0,301$:

193. $\log 8$

194. $\log 40$

195. $\log 25$

196. $\log 200$

197. $\log 0,04$

198. $\log 1,25$

199. $\log 0,008$

200. $\log 0,0016$

S) Calcule las siguientes expresiones sin hacer uso de la calculadora:

201. $\log_4 \left(\sqrt[3]{4^5}\right)^2$

202. $\log_{15} 5^2 + \log_{15} 3^2$

203. $\log_2 \sqrt[4]{2\sqrt[3]{2^2}}$

204. $\log_3 \dfrac{5\sqrt{3}}{\sqrt[3]{75}\ \sqrt[6]{225}}$

205. $\log_{\frac{1}{6}} \dfrac{\sqrt[4]{6}}{\sqrt[3]{36}\ \sqrt[5]{216}}$

206. $\log_2 \left(\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}} \cdot \sqrt[5]{\dfrac{1}{16}}\right)^{\dfrac{3}{2}}$

T) Reduzca los siguientes logaritmos utilizando las propiedades:

207. $\frac{1}{2}\log 8 - \frac{1}{2}\log 2 - \frac{1}{2}\log 4$

208. $5\log 2 - 3\log 2$

209. $\log_7 7^4 - \log_7 7^3$

210. $\log 3 + \log 4 - \log 2$

211. $(\log 27 + \log 64) - (\log 8 - \log 9) - 2\log 36$

1.9.1. Soluciones

A)

1 $2 \cdot 271$

2 $5 \cdot 19^2$

3 $2^6 \cdot 5$

4 $2^3 \cdot 3^4$

5 $2 \cdot 3^5 \cdot 5$

6 $5 \cdot 7 \cdot 13$

7 $2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 23$

8 $2 \cdot 3^2 \cdot 41 \cdot 59$

9 $2^2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 431$

10 $3 \cdot 11 \cdot 61$

11 $2^3 \cdot 3 \cdot 197$

B)

12 8 y 2

13 20 y 5

14 24 y 2

15 48 y 4

16 720 y 12

17 1260 y 3

18 13500 y 3

19 7560 y 6

20 168168 y 7

C)

21 8 maneras

22 16 kg. y hay 100, 225 y 212 bloques respectivamente

23 20 mt.

24 175 m^2

25 60 litros

26 \$120000 y podrían comprarse 80, 75, 25 u 8 libros respectivamente

27 360 y podrían sacarse hasta 20 ó 9 seciones respectivamente

28 780 segundos y habrán dado 65, 60 y 52 vueltas respectivamente

D)

29 $\frac{69}{200}$

30 $\frac{1}{6}$

31 $\frac{3118}{999}$

32 $\frac{1}{150}$

33 $\frac{6171}{500}$

34 $\frac{323}{99}$

35 $\frac{59}{25}$

36 $\frac{64}{3}$

37 $\frac{11}{450}$

38 $\frac{359}{55}$

39 $\frac{453}{100}$

40 $\frac{5204}{225}$

41 $\frac{13}{1980}$

42 $\frac{17573}{333}$

43 $\frac{21083}{9900}$

E)

44 $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{3}{8}$; $0,41\overline{6}$; $0,\overline{4}$

45 $0,1\overline{6}$; $\frac{2}{11}$; $0,\overline{21}$; $\frac{8}{33}$; $\frac{3}{12}$; $\frac{5}{18}$

F) **46** $\frac{77}{40}$

47 $\frac{172}{75}$

48 10

49 $\frac{47}{90}$

50 $\frac{19}{2}$

51 $\frac{3}{5}$

52 $\frac{219}{200}$

53 $-\frac{13}{48}$

54 $\frac{8}{15}$

55 $\frac{23}{10}$

56 $\frac{11}{6}$

57 $\frac{50}{17}$

58 $\frac{7484}{6105}$

59 $\frac{7}{32}$

60 $\frac{8}{35}$

61 1

62 $\frac{27}{56}$

G) **63** 42 ladrillos

64 3

65 $\frac{40}{9}$

66 Si

67 No

68 Si

69 No

70 No

71 Jorge tenía \$3.500

72 3750 litros

73 34 jarros

74 600 m^2

75 4

76 25 litros, 20 y 15 litros respectivamente

77 8 veces

78 3025 puntos

79 22 puntos

H) **80** 6^6

81 2^5

82 30^5

83 6^7

84 77^5

85 2^2

86 $(-80)^3$

87 3

88 $(-20)^4$

89 10^2

90 3^5

91 5^9

92 $\left(\frac{1}{2}\right)^6$

93 2^6

94 $(\frac{4}{3})^4$

95 7^4

96 $(\frac{3}{2})^6$

I) **97** 10^{-2}

98 12

99 6^9

100 43^6

101 9^{-5}

102 17^{-8}

103 11^2

104 3^0

105 4

106 $(-5)^2$

107 6

108 7^{-5}

109 -5

110 10^3

111 1

112 $(-12)^{-8}$

113 11^9

J)	**114** 3^3	**116** 2^5	**118** 2^{-3}	
	115 3^3	**117** 3^6	**119** 12^2	
K)	**120** 8	**123** -2	**126** $\frac{9}{7}$	**129** $-\frac{5}{6}$
	121 10	**124** 3	**127** $\frac{1}{3}$	
	122 4	**125** 11	**128** $\dfrac{1}{5}$	
L)	**130** $\sqrt[16]{2^{15}}$	**132** 2	**134** $\sqrt[6]{7}$	**136** $2^2 \cdot 3^3$
	131 $2^3\sqrt[3]{5^7}$	**133** $\frac{5\sqrt{2}}{2}$	**135** $\frac{5^4a^{26}b^4}{c^{34}}$	
M)	**137** $4\sqrt{2}$	**140** $58\sqrt{2}$	**143** $2\sqrt{7}-\sqrt{3}$	**146** $-\dfrac{49}{9}$
	138 $14\sqrt{2}$	**141** $11\sqrt{5}$	**144** $\sqrt[10]{3^11}$	
	139 $-9\sqrt{5}$	**142** -5	**145** $\sqrt[4]{2}$	
N)	**147** $\frac{5\sqrt{2}}{2}$	**150** $3-\sqrt{7}$	**153** $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	**156** $2\sqrt[5]{2^2}$
	148 $\frac{\sqrt{6}}{3}$	**151** $\frac{\sqrt[3]{5}}{5}$	**154** $2\sqrt{3}+2\sqrt{7}$	
	149 $\frac{7(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{2}$	**152** $\sqrt[4]{2^3}$	**155** $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$	**157**
O)	**158** 6	**161** $0,1$	**164** 3	**167** $\sqrt{2}$
	159 4	**162** 12345	**165** $\mathbb{R}$	**168** $\frac{1}{121}$
	160 10	**163** 2	**166** 2	**169** $\frac{1}{2}$
P)	**170** 4	**174** $\frac{1}{2}$	**178** 2	**182** $\frac{1}{3}$
	171 -1	**175** 5	**179** 3	**183** $\frac{5}{2}$
	172 0	**176** 2	**180** $\frac{1}{2}$	
	173 -2	**177** 5	**181** $\frac{1}{4}$	**184** $\frac{4}{3}$
Q)	**185** $2,6$	**187** $-0,6$	**189** $1,6$	**191** -1
	186 $4,6$	**188** $-0,4$	**190** $-3,2$	**192** $2,3$

R)	**193** $0,903$	**195** $1,398$	**197** $-1,398$	**199** $-2{,}097$
	194 $1,602$	**196** $2,301$	**198** $0,097$	**200** $-2,796$
S)	**201** $\frac{10}{3}$	**203** $\frac{5}{12}$	**205** $\frac{61}{60}$	
	202 2	**204** $-\frac{1}{6}$	**206** $-\frac{11}{5}$	
T)	**207** 0	**209** 1	**211** $\log\frac{3}{2}$	
	208 4	**210** 6		

2

Algebra elemental

2.1. Lenguaje algebraico

La importancia del álgebra radica en que constituye el cimiento de casi todas las ramas de la matemática y de la ingeniería; es una poderosa herramienta para desarrollar el pensamiento analítico. Con la ayuda del álgebra podemos ser capaces de modelar situaciones de índole práctico como teórico.
Por ejemplo, "si un sábado del mes pasado fui a la feria y compré una cierta cantidad de kilos de manzanas y naranja, donde el valor por kilo de cada una de ellas era \$400 y \$500 respectivamente, ¿cuál es la expresión que representa el dinero que gasté en la compra de tales frutas?"
Si x son los kilos de manzanas compradas e y es la cantidad de kilos de naranjas compradas, entonces $400x+500y$ representa la cantidad de dinero gastada en la compra de estas frutas.
A continuación se representan en lenguaje algebraico los siguientes enunciados:

Lenguaje cotidiano	**Lenguaje algebraico**
La mitad de un número a	$\frac{1}{2}a$
El triple de a, aumentado en el doble de b	$3a+2b$
El doble del cuociente entre a y b	$2\frac{a}{b}$
El cubo de la diferencia entre a y b	$(a-b)^3$
La diferencia entre los cubos de a y b	a^3-b^3
La suma de tres números enteros consecutivos	$n+(n+1)+(n+2)$
La suma de tres números impares consecutivos	$(2n+1)+(2n+3)+(2n+5)$
La cuarta parte del producto entre el cuadrado de a y el cubo de b	$\frac{1}{4}\cdot a^2\cdot b^3$

Para continuar debemos establecer algunos conceptos algebraicos básicos, los cuales nos ayudarán en la comprensión y desarrollo del tema.

2.1.1. Términos algebraicos

Definición 1.1: Término algebraico, grado

Se denomina término algebraico al producto de un factor numérico por una o más variables literales. En cada término algebraico se distinguen el *coeficiente numérico* (que incluye el signo y constantes) y el *factor literal* (que incluye las variables).
El *grado de un término algebraico* es la suma de los exponentes de las variables que componen cada factor literal.

Ejemplo 39.

Término algebraico	*Coeficiente numérico*	*Parte literal*	*Grado*
a^5bc	1	a^5bc	$5+1+1=7$
$\frac{3}{7}\frac{b^2x}{y}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{b^2x}{y} = b^2xy^{-1}$	$2+1+(-1)=2$
$-2,\overline{7}xy$	$-2,\overline{7}$	xy	$1+1=2$
$\frac{3}{4}\pi r^3$	$\frac{3}{4}\pi$	r^3	3
$2^{128}m^4n^a$	2^{128}	m^4n^a	$4+a$

2.1.2. Expresiones algebraicas

Definición 1.2: Expresiones algebraicas

Una *expresión algebraica* es la suma de términos algebraicos. De acuerdo con el número de términos que componen la expresión algebraica, estas se clasifican en:

Definición 1.3: Polinomio

Es una expresión algebraica que puede tener uno o más términos y donde los exponentes de la parte literal son todos enteros positivos. Algunos casos particulares son:

- Monomio: Expresión algebraica de un término.
- Binomio: Expresión algebraica de dos términos.

- Trinomio: Expresión algebraica de tres términos.

Definición 1.4: Multinomio

Es una expresión algebraica que puede tener uno o más términos y donde los exponentes pueden ser números reales.

Ejemplo 40.

- $3xy^2 + 4xy - \frac{x}{5}$ *es un trinomio.*
- $3xy^2 + 4xy$ *es un binomio.*
- $3x^5 + 5x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 5$ *es un polinomio.*
- $7x^{1/2}y^{-1/3} + 2z^2x + 3$ *es un multinomio*

Definición 1.5: Grado de una expresión algebraica

El *grado de una expresión algebraica* corresponde al mayor de los grados de los términos que la componen.

Ejemplo 41. *Los términos de la expresión*

$$x^3y^5z^9 - 3x^2yz^7 + \frac{x^{14}y}{z^2} - y^4 + 100x^3y^2z^8$$

tienen grados $17, 10, 13, 4$ *y* 13 *respectivamente. Luego el grado de la expresión algebraica anterior es 17.*

2.1.3. Valoración de expresiones algebraicas

Valorar una expresión algebraicas, consiste en asignar un valor numérico a cada variable que aparece en la expresión y resolver las operaciones aritméticas que correspondan para obtener el valor numérico final de la expresión.

Ejemplo 42. *Dados los valores de* $x = 2$*,* $y = -1$ *y* $z = -3$*, el valor numérico de* $5xy^2 - z^2$*, es*

$$5 \cdot 2 \cdot (-1)^2 - (-3)^2 = 5 \cdot 2 \cdot 1 - 9 = 1$$

2.1.4. Términos semejantes

Definición 1.6: Términos semejantes

Dos o más términos de una expresión algebraica se dicen semejantes si tienen el mismo factor literal.

Ejemplo 43. *Busquemos los términos semejantes en las siguientes expresiones:*

- *En* $2a^2b - ab - \sqrt{3}a^2b$*, los términos* $2a^2b$ *y* $-\sqrt{3}a^2b$ *son semejantes.*
- *En* $-0,2m^3n - 0,1mn^2 - 6mn^2 + m^3n$*, hay dos pares de términos semejantes:*$-0,2m^3n$ *con* m^3n *y* $-0,1mn^2$ *con* $-6mn^2$

Para reducir términos se suman según corresponda los coeficientes numéricos de los términos semejantes y conservando el factor literal.

Ejemplo 44. *En las siguientes expresiones algebraicas reduzcamos los términos semejantes.*

- $5xy + x + y - 3xy + 2x - 3y = 3x - 2y + 2xy$
- $2\sqrt{2}ab^2 + 3\sqrt{3}a^3 + 3\sqrt{2}ab^2 - 2\sqrt{3}a^3 = 5\sqrt{2}ab^2 + \sqrt{3}a^3$

2.1.5. Uso de paréntesis

El uso de paréntesis es frecuente en matemática y en especial en álgebra. Sirve para separar expresiones algebraicas y se elimina de acuerdo a las siguientes reglas:

- Si está precedido de un signo $+$ o no tiene signo escrito, se elimina sin hacer ningún cambio.
- Si esta precedido de un $-$ se elimina después de cambiar todos los signos de los términos del interior del paréntesis. Es importante hacer notar que al eliminar el paréntesis también se elimina el signo que lo antecede.
- Si se tienen paréntesis dentro de paréntesis se pueden eliminar de adentro hacia afuera o viceversa, aunque lo más utilizado es el primer caso.

Ejemplo 45. *En las siguinetes expresiones eliminemos los paréntesis y reduzcamos los términos semejantes.*

- $$\begin{aligned} -(a+b-c)-(-a-b+c)+(a-b+c) &= -a-b+c+a+b-c+a-b+c \\ &= a-b+c \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} 2ab-[3a-(-2ab+3a)-ab] &= 2ab-[3a+2ab-3a-ab] \\ &= 2ab-[ab] \\ &= 2ab-ab \\ &= ab \end{aligned}$$

2.2. Multiplicación algebraica

La multiplicación algebraica, productos notables y la completación de cuadrados son elementos esenciales en muchos desarrollos matemáticos, constituyen la base para problemas más complejos y son un conocimiento previo que necesitas adquirir para las materias que siguen.
En la multiplicación de dos expresiones algebraicas se pueden considerar los siguientes tres casos:

1. **Monomio por monomio:** usando la propiedad conmutativa se multiplican los coeficientes numéricos entre sí y sus factores literales utilizando las propiedades de potencias.

   Ejemplo 46. *Efectuemos las siguientes multiplicaciones de monomios.*

   - $$\begin{aligned} 5xy^2\cdot -6xy^3z &= (5\cdot -6)(xy^2\cdot xy^3z) \\ &= -30x^2y^5z \end{aligned}$$

   - $$\begin{aligned} \frac{2x^3y^4}{3}\cdot 11x^2y &= \left(\frac{2}{3}\cdot 11\right)(x^3y^4\cdot x^2y) \\ &= \frac{22x^5y^5}{3} \end{aligned}$$

2. **Monomio por polinomio:** se distribuye el monomio por sobre el polinomio, reduciendo el problema al caso anterior.

   Ejemplo 47. *Efectuemos los siguientes productos.*

   - $$\begin{aligned} 3x^3 \cdot (4xy - x^4 + 2y^3) &= 3x^3 \cdot 4xy - 3x^3 \cdot x^4 + 3x^3 \cdot 2y^3 \\ &= -3x^7 + 12x^4y + 6x^3y^3 \end{aligned}$$

   - $$\begin{aligned} 2x^2y^3 \cdot (3xyz^2 - 4xz^3 + 2y^3z) &= 2x^2y^3 \cdot 3xyz^2 - 2x^2y^3 \cdot 4xz^3 + 2x^2y^3 \cdot 2y^3z) \\ &= 6x^3y^4z^2 - 8x^3y^3z^3 + 4x^2y^6z \end{aligned}$$

3. **Multiplicación de polinomios:** la forma es multiplicar cada término del primer polinomio por todos los términos del segundo, para posteriormente reducir los términos semejantes.

   Ejemplo 48. *Efectuemos las siguientes multiplicaciones de polinomios.*

   - $$\begin{aligned} (2x + 3y)(x^2 - 3xy + y^3) &= 2x \cdot (x^2 - 3xy + y^3) + 3y(x^2 - 3xy + y^3) \\ &= 2x \cdot x^2 - 2x \cdot 3xy + 2x \cdot y^3 + 3y \cdot x^2 - 3y \cdot 3xy + 3y \cdot y^3 \\ &= 2x^3 - 6x^2y + 2xy^3 + 3yx^2 - 9xy^2 + 3y^4 \\ &= 2x^3 - 3x^2y - 9xy^2 + 2xy^3 + 3y^4 \end{aligned}$$

   - $$\begin{aligned} (2x + 3y)(x - 5y) &= 2x \cdot (x - 5y) + 3y \cdot (x - 5y) \\ &= 2x^2 - 10xy + 3xy - 15y^2 \\ &= 2x^2 - 7xy - 15y^2 \end{aligned}$$

2.2.1. Productos notables

Dentro de la multiplicación algebraica existen algunos productos que pueden ser desarrollados directamente. Debido a esto es primordial que conozcamos la estructura de ellas.

1. Cuadrado del Binomio:

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2.$$

2. Suma por diferencia:

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2.$$

3. Cubo del binomio:

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3.$$

4. Sumas de cubos:

$$(x+y)(x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3.$$

5. Diferencia de cubos:

$$(x-y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3.$$

6. Producto de dos binomios con un término común:

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab.$$

Ejemplo 49. *Reducir las siguientes expresiones:*

- $$\begin{aligned}(2x+3y^2)^2 &= (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3y^2 + (3y^2)^2 \\ &= 4x^2 + 12xy^2 + 9y^4\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}(3x^3-y^2)^2 &= (3x)^2 - 2 \cdot 3x^3 \cdot y^2 + (y^2)^2 \\ &= 9x^6 - 6x^3y^2 + y^4\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}(3x^3-y^2)(3x^3+y^2) &= (3x^3)^2-(y^2)^2\\ &= 9x^6-y^4\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}(-2x^4-y^3)(-2x^4+y^3) &= (-2x^4)^2-(y^3)^2\\ &= 4x^8-y^6\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\left(\frac{x^3}{y^2}-\frac{2y}{x^2}\right)\left(\frac{x^3}{y^2}+\frac{2y}{x^2}\right) &= \left(\frac{x^3}{y^2}\right)^2-\left(\frac{2y}{x^2}\right)^2\\ &=\frac{x^6}{y^4}-\frac{4}{x^4}y^2\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}(x+2)(x-12) &= x^2+(2+(-12))x+2\cdot -12\\ &= x^2-10x-24\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}(x^2+5)(x^2-3) &= (x^2)^2+(5+(-3))x^2+5\cdot -3\\ &= x^4+2x^2-15\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}(3x^2+2y)(3x^2-3y) &= (3x^2)^2+(2y+(-3y))3x^2+2y\cdot(-3y)\\ &= 9x^4-3x^2y-6y^2\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}(2x+3y)^3 &= (2x)^3+3\cdot(2x)^2\cdot 3y+3\cdot 2x\cdot(3y)^2+(3y)^3\\ &= 8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\left(\frac{x^2}{2z}-y^3\right)^3 &= \left(\frac{x^2}{2z}\right)^3-3\cdot\left(\frac{x^2}{2z}\right)^2\cdot y^3+3\cdot\frac{x^2}{2z}\cdot(y^3)^2-(y^3)^3\\ &= \frac{1}{8}\frac{x^6}{z^3}-y^9-\frac{3}{4}x^4\frac{y^3}{z^2}+\frac{3}{2}x^2\frac{y^6}{z}\end{aligned}$$

- $$(x-2)(x^2+2x+4) = x^3 - 8$$

- $$\begin{aligned}(2x+3y^2)(4x^2-6xy^2+9y^4) &= (2x)^3 + (3y^2)^3\\ &= 8x^3 + 27y^6\end{aligned}$$

- $$(2x^3+5y^4)(2x^3-5y^4) = 4x^6 - 10x^3y^4 + 10x^3y^4 - 25y^8 = 4x^6 - 25y^8$$

- $$\begin{aligned}\left(\frac{2x^3}{5} - \frac{4y^3}{3}\right)^2 &= \left(\frac{2x^3}{5}\right)^2 - 2\cdot\frac{2x^3}{5}\cdot\frac{4y^3}{3} + \left(\frac{4y^3}{3}\right)^2\\ &= \frac{4x^6}{25} - \frac{16x^3y^3}{15} + \frac{16y^6}{9}\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\left(\frac{3x^4}{2} - \frac{4y^2}{3}\right)^2 &= \left(\frac{3x^4}{2}\right)^2 - 2\cdot\frac{3x^4}{2}\cdot\frac{4y^2}{3}\left(\frac{4y^2}{3}\right)^2\\ &= \frac{9x^8}{4} - \frac{24}{6}x^4y^2 + \frac{16y^4}{9}\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}(x+2y+3z)^2 &= x^2 + (2y)^2 + (3z)^2 + 4xy + 6xz + 12yz\\ &= x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 4xy + 6xz + 12yz\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}&(a-2)^3 + (a-2)^2 + (\sqrt{5}a+2)(\sqrt{5}a-2)\\ =&a^3 - 6a^2 + 12a - 8 + a^2 - 4a + 4 + 5a^2 - 4\\ =&a^3 + 8a - 8\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{3}-3x\right)^3+\left(\frac{1}{3}+3x\right)\left(\frac{1}{3}-3x\right)\\
=&\left(\left(\frac{1}{3}\right)^3-3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot 3x+3\cdot\frac{1}{3}\cdot(3x)^2-(3x)^3\right)+\left(\left(\frac{1}{3}\right)^2-(3x)^2\right)\\
=&\frac{1}{27}-3\cdot\frac{1}{9}\cdot 3x+3\cdot\frac{1}{3}\cdot 9x^2-27x^3+\frac{1}{9}-9x^2\\
=&\frac{1}{27}-x+9x^2-27x^3+\frac{1}{9}-9x^2\\
=&-27x^3-x+\frac{4}{27}
\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}
(3x+2)^2-(3x+1)(3x-1)&=(9x^2+12x+4)-(9x^2-1)\\
&=9x^2+12x+4-9x^2+1\\
&=12x+5
\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}
\left(\frac{a}{2}+1\right)\left(\frac{a}{2}-1\right)-\left(a-\frac{3}{2}\right)^2&=\left(\frac{a^2}{4}-1\right)-\left(a^2-3a+\frac{9}{4}\right)\\
&=\frac{a^2}{4}-1-a^2+3a-\frac{9}{4}\\
&=-\frac{3}{4}a^2+3a-\frac{13}{4}
\end{aligned}$$

2.3. Factorización

La factorización de una expresión algebraica consiste en convertirla en producto de expresiones más simples.
Para llevarla a cabo se debe buscar un factor común, pues la factorización es el proceso inverso de aplicar el axioma de distributividad y los productos notables.

2.3.1. Factor común

En este caso todos los términos de la expresión algebraica presentan un factor común, que puede ser un monomio o polinomio, por el cual se factoriza.

Ejemplo 50. *Factoricemos:*

- $ax + ay - az = a(x + y - z)$
- $3xy^2 - 15x^3y^5 + 24x^4y^4 = 3xy^2(1 - 5x^2y^3 + 8x^3y^2)$
- $a(x + y) + b(x + y) = (x + y)(a + b)$
- $7a^2xy^3 - 14a^2x^2y^2 + 77a^{10}x^5y = 7a^2xy(y^2 - 2xy + 11a^8x^4)$
- $3x^2yz^4 + 2y^2z^3 - 4x^6y + yz = y(3x^2z^4 + 2yz^3 - 4x^6 + z)$
- $16p^3q^7 - 8p^2q^8r + 12p^6q^4 = 4p^2q^4 \cdot (4pq^3 - 2q^4r + 3p^4)$
- $\dfrac{1}{25}a^3b^8c^2 - \dfrac{1}{15}a^2b^{10}c^3 - \dfrac{1}{30}a^5b^5 = \dfrac{1}{5}a^2b^5 \cdot \left(\dfrac{1}{5}ab^3c^2 - \dfrac{1}{3}b^5c^3 - \dfrac{1}{6}a^3\right)$
- $x^2(a^2 - b^2) - y(a - b) = x^2(a + b)(a - b) - y(a - b) = (a - b)(x^2(a + b) - y)$

2.3.2. Factorización por agrupación

En este caso todos los términos de la expresión algebraica no presentan un único factor común, pero se pueden factorizar por grupos.

Ejemplo 51. *Factoricemos.*

- $$\begin{aligned} ax + ay - bx - by &= a(x + y) - b(x + y) \\ &= (x + y)(a - b) \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - 9y^3 =& x^2(x - 3y) + 3y^2(x - 3y) \\ =& (x - 3y)(x^2 + 3y^2) \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} p^5qr + 2p^2q^2 + 3p^3r + 6q =& p^2q(p^3r + 2q) + 3(p^3r + 2q) \\ =& (p^3r + 2q)(p^2q + 3) \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} a^7bc - 2a^3b^2 - 10a^4c + 20b =& a^3b(a^4c - 2b) - 10(a^4c - 2b) \\ =& (a^4c - 2b)(a^3b - 10) \end{aligned}$$

En el caso que la expresión algebraica corresponda al desarrollo de un producto notable para factorizar se utilizan las mismas fórmulas pero de manera inversa.

Ejemplo 52. *Factoricemos:*

- $a^2 - 16b^2 = (a+4b)(a-4b)$ *diferencia de cuadrados.*
- $$\begin{array}{rcl} 4x^2 - 12xy + 9y^2 &=& (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3y + (3y)^2 \quad \textit{desarrollo de un cuadrado perfecto} \\ &=& (2x-3y)^2 \end{array}$$
- $x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2)$ *(dos números que sumen* -5 *y multiplicados den* 6*).*

2.4. Completación de cuadrados

La completación de cuadrado es una técnica en la cual se utilizan operaciones algebraicas para expresar un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$ donde $a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0$ en una expresión equivalente con un cuadrado de binomio más otros términos.

Ejemplo 53.

- *Escribamos la expresión* $x^2 + 4x$ *de tal manera que aparezca un cuadrado de binomio: Sumando* 0 *a la expresión original:*

  $$x^2 + 4x$$

  Como debe aparecer una expresión de la forma $a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$ *se tiene*

  $$x^2 + 4x + 0 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \boxed{2}$$

  Nos damos cuenta que el término que falta es 4*, luego la expresión anterior puede ser escrita en la forma:*

  $$x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 0 = x^2 + 4x + 2^2 - 2^2$$

  Finalmente la expresión original queda escrita como:

  $$x^2 + 4x = (x+2)^2 - 4$$

  .

- $4x^2 + 24x + 3y^2 + 24y$. *En este caso podemos factorizar por 2 los dos primeros términos y por 3 los dos últimos términos.*
$$4(x^2 + 6x) + 3(y^2 + 8y),$$
sumamos nuestro cero conveniente en ambas expresiones pero eso sí, dentro de los paréntesis respectivos.
$$4(x^2 + 6x + 9 - 9) + 3(y^2 + 8y + 16 - 16) = 4((x + 3)^2 - 9) + 3((y + 4)^2 - 16),$$
que finalmente queda,
$$4\left(x + 3\right)^2 + 3\left(y + 4\right)^2 - 84$$
.

2.5. Fracciones algebraicas

Son expresiones racionales donde el numerador y denominador son multinomios. Para la operatoria asumiremos que estas fracciones están definidas, es decir, sus denominadores son distintos de cero.

Ejemplo 54.

- $\dfrac{x + y}{ab^2}, \qquad a, b \neq 0$
- $\dfrac{5xy^2 - 3x + y}{x - y}, \qquad x \neq y$

2.5.1. Operatoria de fracciones algebraicas

Estas expresiones racionales son las extensiones algebraicas de los números racionales y por lo tanto las reglas fundamentales del manejo de estos números abarcan las fracciones algebraicas (FA).

Ejemplo 55. *Simplifiquemos las siguientes fracciones algebraicas:*

- $$\begin{aligned}\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} &= \frac{(x - 2)(x - 1)}{(x + 1)(x - 1)} \\ &= \frac{x - 2}{x + 1}, \qquad x \neq \pm 1\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\frac{x^2-7x+12}{x^2-16} &= \frac{(x-4)(x-3)}{(x+4)(x-4)}\\ &= \frac{x-3}{x+4}, \qquad x \neq \pm -4\end{aligned}$$

Ejemplo 56. *Multipliquemos las siguientes fracciones algebraicas:*

- $$\begin{aligned}\frac{x-y}{a}\cdot\frac{xy}{b-c} &= \frac{(x-y)xy}{a(b-c)}\\ &= \frac{x^2y-xy^2}{ab-ac}, \quad a\neq 0,\ b\neq c\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\frac{x^2-y^2}{xa}\cdot\frac{ab^2}{x+y} &= \frac{(x-y)(x+y)ab^2}{xa(x+y)}\\ &= \frac{(x-y)b^2}{x}\\ &= \frac{xb^2-yb^2}{x}, \qquad x,\ a\neq 0,\ x\neq -y\end{aligned}$$

Ejemplo 57. *Sumemos las siguientes fracciones algebraicas:*

- $$\begin{aligned}\frac{5}{x^2-y^2}-\frac{4}{x+y} &= \frac{5}{(x+y)(x-y)}-\frac{4}{x+y}\cdot\frac{x-y}{x-y}\\ &= \frac{5}{(x+y)(x-y)}-\frac{4x-4y}{(x+y)(x-y)}\\ &= \frac{5-(4x-4y)}{(x+y)(x-y)}\\ &= \frac{5-4x+4y}{x^2-y^2}, \quad x\neq \pm y\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\frac{1}{x-3}+\frac{2}{x+5}-\frac{x-1}{x^2+2x-15} &= \frac{1(x+5)+2(x-3)-(x-1)}{(x-3)(x+5)}\\ &= \frac{x+5+2x-6-x+1}{(x-3)(x+5)}\\ &= \frac{2x}{(x-3)(x+5)}, \quad x\neq 3, x\neq -5\end{aligned}$$

2.6. Ejercicios resueltos

1. Completar cuadrado de binomio en las siguientes expresiones:

   a) $2x^2 + 8x$
   Lo primero que se puede hacer es factorizar por 2 obteniendo:
   $$2(x^2 + 4x),$$
   ahora sumamos 0 dentro del paréntesis como $4 - 4$,
   $$2(x^2 + 4x + 4 - 4) = 2\left((x+2)^2 - 4\right),$$
   finalmente podemos escribirlo como:
   $$2(x+2)^2 - 8$$
   .

   b) $2x^2 - 6x - 4y^2 + 24y$
   Procederemos de manera análoga a los anteriores, primero factorizamos por 2 las expresiones con x y luego factorizamos por -4 las expresiones con y.
   $$2(x^2 - 3x) - 4(y^2 - 6y),$$
   las expresiones con y la factorizamos por -4 debido a que el número que acompaña a y^2 debe ser siempre positivo para llevar a cabo la completación de cuadrados, ahora, seguimos como antes:
   $$\begin{aligned} & 2(x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4}) - 4(y^2 - 6y + 9 - 9) \\ =& 2((x - \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4}) - 4((y-3)^2 - 9) \\ =& 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - 4\,(y-3)^2 + \frac{63}{2} \end{aligned}$$

2. Factorizar las siguientes expresiones según corresponda:

   a) $10a^2 - 5a + 15a^3 = 5a(2a - 1 + 3a^2)$

   b)
   $$\begin{aligned} \frac{x^6}{8} - \frac{64y^3}{27} &= \left(\frac{x^2}{2}\right)^3 - \left(\frac{4y}{3}\right)^3 \\ &= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{4y}{3}\right)\left(\left(\frac{x^2}{2}\right)^2 + \left(\frac{x^2}{2}\right)\left(\frac{4y}{3}\right) + \left(\frac{4y}{3}\right)^2\right) \\ &= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{4y}{3}\right)\left(\frac{x^4}{4} + \frac{2x^2y}{3} + \frac{16y^2}{9}\right) \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \frac{225y^6}{16x^4} - \frac{49x^2}{9z^8} &= \left(\frac{15y^3}{4x^2}\right)^2 - \left(\frac{7x}{3z^4}\right)^2 \\ &= \left(\frac{15y^3}{4x^2} + \frac{7x}{3z^4}\right)\left(\frac{15y^3}{4x^2} - \frac{7x}{3z^4}\right) \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} a^2x - ax^2 - 2a^2x + 2axy + x^3 - 2x^2y &= (a^2x - ax^2 + x^3) - (2a^2x - 2axy + 2x^2y) \\ &= x(a^2 - ax + x^2) - 2y(a^2 - ax + x^2) \\ &= (a^2 - ax + x^2)(x - 2y) \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} 1 - 16ax^2 + 64a^2x^4 &= 1 - 2 \cdot 1 \cdot 8ax^2 + (8ax^2)^2 \\ &= (1 - 8ax^2)^2 \end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned} a^{2n} - 9b^{4m} &= (a^n)^2 - (3b^{2m})^2 \\ &= (a^n + 3b^{2m})(a^n - 3b^{2m}) \end{aligned}$$

g)

$$\begin{aligned} a^2 + 2ab + b^2 - 1 &= (a+b)^2 - 1 \\ &= (a+b+1)(a+b-1) \end{aligned}$$

3. Calcular el MCM de las siguientes expresiones algebraicas

a) $MCM(x^2 - x - 6,\ x^2 - 4,\ x^2 - 3x)$

Primeramente factorizemos las expresiones:

- $x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$ (producto de dos binomios con un término en común)
- $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$ (suma por diferencia)
- $x^2 - 3x = x(x-3)$ (factor común)

Luego $MCM(x^2 - x - 6,\ x^2 - 4,\ x^2 - 3x) = x(x+2)(x-2)(x-3)$

b) $MCM(9x^2y,\ 6xy^4,\ 12x^5y)$

Primeramente factorizemos las expresiones:

- $9x^2y = 3^2 \cdot x^2 \cdot y$ (producto de dos binomios con un término en común)
- $6xy^4 = 2 \cdot 3 \cdot x \cdot y^4$ (producto de dos binomios con un término en común)
- $12x^5y = 2^2 \cdot 3 \cdot x^5 \cdot y$ (producto de dos binomios con un término en común)

Luego $MCM(9x^2y,\ 6xy^4,\ 12x^5y) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot x^5 \cdot y^4 = 36x^5y^4$

c) $MCM(x^2 + 5x + 6,\ x^2 + 6x + 9,\ x^2 + 3x + 2,\ 3x + 6)$

Primeramente factorizemos las expresiones:

- $x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$ (producto de dos binomios con un término en común)
- $x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$ (producto de dos binomios con un término en común)

- $x^2+3x+2=(x+2)(x+1)$ (producto de dos binomios con un término en común)
- $x+2=3(x+2)$ (producto de dos binomios con un término en común)

Luego $MCM(x^2{+}5x{+}6,\ x^2{+}6x{+}9,\ x^2{+}3x{+}2,\ x{+}2)=3(x{+}2)(x{+}3)^2(x{+}1)$

d) $MCM(a-b,\ 3b-3a,\ a^2-b^2,\ -5a-5b)$

Primeramente factorizemos las expresiones:

- $a-b=(-1)(b-a)$ (producto de dos binomios con un término en común)
- $3b-3a=3(b-a)$ (producto de dos binomios con un término en común)
- $a^2-b^2=(-1)(a+b)(b-a)$ (producto de dos binomios con un término en común)
- $-5a-5b=(-1)5(a+b)$ (producto de dos binomios con un término en común)

Luego $MCM(a-b,\ 3b-3a,\ a^2-b^2,\ -5a-5b)=-1\cdot 3\cdot 5(b-a)(b+a)=-15\cdot(b^2-a^2)$

e) $MCM(6x^3-6y^3,\ x^2+xy+y^2,\ 2x-2y)$

Primeramente factorizemos las expresiones:

- $6x^3-6y^3=3\cdot 2\cdot(x-y)(x^2+xy+y^2)$ (producto de dos binomios con un término en común)
- $x^2+xy+y^2=x^2+xy+y^2$ (producto de dos binomios con un término en común)
- $2x-2y=2\cdot(x-y)$ (producto de dos binomios con un término en común)

Luego $MCM(6x^3-6y^3,\ x^2+xy+y^2,\ 2x-2y)=3\cdot 2(x-y)(x^2+xy+y^2)=6(x^3-y^3)$

f) $MCM(x^3-5x^2,\ x^2-4x-5,\ x^2-10x+25,\ x^4-x^3)$

Primeramente factorizemos las expresiones:

- $x^3-5x^2=x^2(x-5)$ (factor común)
- $x^2-4x-5=(x-5)(x+1)$(producto de dos binomios con un término en común)
- $x^2-10x+25=(x-5)^2$ (cuadrado de binomio)
- $x^4-x^3=x^3(x-1)$ (factor común)

Luego $MCM(x^3-5x^2,\ x^2-4x-5,\ x^2-10x+25,\ x^4-x^3)=x^3(x-5)^2(x+1)(x-1)$

g) $MCM(x^4-x^2,\ x^2-3x-4,\ x^2-2x+1,\ 2x^3-4x^2+2x)$

Primeramente factorizemos las expresiones:

- $x^4-x^2=x^2(x^2-1)=x^2(x+1)(x-1)$ (factor común y suma por diferencia)
- $x^2-3x-4=(x-4)(x+1)$(producto de dos binomios con un término en común)
- $x^2-2x+1=(x-1)^2$ (cuadrado de binomio)
- $2x^3-4x^2+2x=2x(x^2-2x+1)=2x(x-1)^2$ (factor común y cuadrado de binomio)

Luego $MCM(x^4-x^2,\ x^2-3x-4,\ x^2-2x+1,\ 2x^3-4x^2+2x)=2x^2(x-1)^2(x+1)(x-4)$

4. Reducir y simplificar las siguientes expresiones:

   a)

$$\begin{aligned}\frac{x^3-1}{x^2+x+1} &= \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)} \\ &= x-1\end{aligned}$$

   b)

$$\begin{aligned}\frac{3x^2+2xy}{9x^2-4y^2}\cdot\frac{15x-10y}{2x} &= \frac{x(3x+2y)}{(3x+2y)(3x-2y)}\cdot\frac{5(3x-2y)}{2x} \\ &= \frac{5}{2}\end{aligned}$$

   c)

$$\begin{aligned}&\frac{m^2-5m+6}{m^2-9}\cdot\frac{m^3-m}{m^3+2m^2-8m}\cdot\frac{7m+21}{7m^2-7} \\ =&\frac{(m-3)(m-2)}{(m+3)(m-3)}\cdot\frac{m(m+1)(m-1)}{m(m+4)(m-2)}\cdot\frac{7(m+3)}{7(m+1)(m-1)} \\ =&\frac{1}{m+4}\end{aligned}$$

   d)

$$\begin{aligned}&\left(1+\frac{x}{y}\right)\div\left(\frac{x^2-y^2}{xy-y^2}\right)+\frac{x^2-5x-14}{x+7} \\ =&\frac{y+x}{y}\div\frac{(x+y)(x-y)}{y(x-y)}+\frac{x^2-5x-14}{x+7} \\ =&\frac{y+x}{y}\cdot\frac{y(x-y)}{(x+y)(x-y)}+\frac{x^2-5x-14}{x+7} \\ =&1+\frac{x^2-5x-14}{x+7} \\ =&\frac{x+7+x^2-5x-14}{x+7} \\ =&\frac{x^2-4x-7}{x+7}\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}
\frac{\dfrac{x^3+x^2-6x}{x^2+x}-\dfrac{x^2-9}{x^3+6x^2+9x}}{\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+x}} &= \frac{\dfrac{x(x+3)(x-2)}{x(x+1)}-\dfrac{(x-3)(x+3)}{x(x+3)(x+3)}}{\dfrac{(x-3)(x-2)}{x(x+1)}} \\
&= \frac{\dfrac{(x+3)(x-2)}{(x+1)}-\dfrac{x-3}{x(x+3)}}{\dfrac{(x-3)(x-2)}{x(x+1)}} \\
&= \frac{\dfrac{(x+3)(x-2)x(x+3)-(x-3)(x+1)}{x(x+3)(x+1)}}{\dfrac{(x-3)(x-2)}{x(x+1)}} \\
&= \frac{(x+3)(x-2)x(x+3)-(x-3)(x+1)}{(x+3)(x-3)(x-2)} \\
&= \frac{x^4+4x^3-4x^2-16x+3}{(x+3)(x-3)(x-2)}
\end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned}
\frac{x^2+6x+5}{x^2-5x+4}\cdot\frac{x-2}{x^2-4}+\frac{x^3-2x}{x^2-4x} &= \frac{(x+5)(x+1)}{(x-4)(x-1)}\cdot\frac{x-2}{(x+2)(x-2)}+\frac{x(x^2-2)}{x(x-4)} \\
&= \frac{(x+5)(x+1)}{(x-4)(x-1)(x+2)}+\frac{x^2-2}{x-4} \\
&= \frac{(x+5)(x+1)+(x^2-2)(x-1)(x+2)}{(x-4)(x-1)(x+2)} \\
&= \frac{x^2+6x+5+(x^2-2)(x^2+x-2)}{(x-4)(x-1)(x+2)} \\
&= \frac{x^2+6x+5+x^4+x^3-2x^2-2x^2-2x+4}{(x-4)(x-1)(x+2)} \\
&= \frac{x^4+x^3-3x^2+4x+9}{(x-4)(x-1)(x+2)}
\end{aligned}$$

g)

$$
\begin{aligned}
&\frac{3}{x-5}+\frac{2x-1}{x^2-25}-\frac{x+1}{x^2-7x+10}\\
=&\frac{3}{x-5}+\frac{(2x-1)}{(x+5)(x-5)}-\frac{x+1}{(x-5)(x-2)}\\
=&\frac{3(x+5)(x-2)+(2x-1)(x-2)-(x+1)(x+5)}{(x+5)(x-5)(x-2)}\\
=&\frac{3x^2+9x-30+2x^2-4x-x+2-x^2-6x-5}{(x+5)(x-5)(x-2)}\\
=&\frac{4x^2-2x-33}{(x+5)(x-5)(x-2)}
\end{aligned}
$$

h)

$$
\begin{aligned}
\frac{\frac{x^2-1}{x^2+2x+1}\cdot\frac{2x^2-8x-10}{x-1}}{\frac{2x+2}{x^2+x-2}\div\frac{x+1}{x^3-4x^2-3x+12}}
=&\frac{\frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x+1)}\cdot\frac{2(x^2-4x-5)}{x-1}}{\frac{2(x+1)}{(x+2)(x-1)}\div\frac{x+1}{x^2(x-4)-3(x-4)}}\\
=&\frac{\frac{x-1}{x+1}\cdot\frac{2(x-5)(x+1)}{x-1}}{\frac{2(x+1)}{(x+2)(x-1)}\cdot\frac{(x-4)(x^2-3)}{x+1}}\\
=&\frac{\frac{2(x-5)}{1}}{\frac{2(x-4)(x^2-3)}{(x+2)(x-1)}}\\
=&\frac{(x-5)(x+2)(x-1)}{(x-4)(x^2-3)}
\end{aligned}
$$

i)

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{x+1}-\frac{x+1}{x^2-4x}+\frac{x+5}{x^2-3x-4}=&\frac{2}{x+1}-\frac{x+1}{x(x-4)}+\frac{x+5}{(x-4)(x+1)}\\
=&\frac{2x(x-4)-(x+1)(x+1)+x(x+5)}{x(x-4)(x+1)}\\
=&\frac{2x^2-8x-x^2-2x-1+x^2+5x}{x(x-4)(x+1)}\\
=&\frac{2x^2-5x-1}{x(x-4)(x+1)}
\end{aligned}
$$

j)

$$\begin{aligned}
&\frac{2x+6}{x^2-3x}-\frac{x+5}{x^2-4x+3}+\frac{x-1}{2x-6}\\
=&\frac{2x+6}{x(x-3)}-\frac{x+5}{(x-3)(x-1)}+\frac{x-1}{2(x-3)}\\
=&\frac{2(x-1)(2x+6)-2x(x+5)+x(x-1)(x-1)}{2x(x-3)(x-1)}\\
=&\frac{4x^2+12x-4x-12-2x^2-10x+x^3-2x^2+x}{2x(x-3)(x-1)}\\
=&\frac{x^3-x-12}{2x(x-3)(x-1)}
\end{aligned}$$

k)

$$\begin{aligned}
\frac{x-2}{x^2-6x+9}+\frac{x}{x^2-9}-\frac{2x}{x+3}=&\frac{x-2}{(x-3)^2}+\frac{x}{(x-3)(x+3)}-\frac{2x}{x+3}\\
=&\frac{(x+3)(x-2)+x(x-3)-2x(x-3)^2}{(x-3)^2(x+3)}\\
=&\frac{x^2+x-6+x^2-3x-2x^3+12x^2-18x}{(x-3)^2(x+3)}\\
=&\frac{-2x^3+14x^2-20x-6}{(x-3)^2(x+3)}
\end{aligned}$$

l)

$$\begin{aligned}
\frac{3}{x^2-4}+\frac{x}{x^2-3x-10}-\frac{1}{x-2}=&\frac{3}{(x+2)(x-2)}+\frac{x}{(x-5)(x+2)}-\frac{1}{x-2}\\
=&\frac{3(x-5)+x(x-2)-(x+2)(x-5)}{(x-2)(x+2)(x-5)}\\
=&\frac{3x-15+x^2-2x-x^2+3x+10}{(x-2)(x+2)(x-5)}\\
=&\frac{4x-5}{(x-2)(x+2)(x-5)}
\end{aligned}$$

m)

$$
\begin{aligned}
\frac{3}{x^2-4}+\frac{x}{x^2-3x-10}-\frac{1}{x-2} &= \frac{3}{(x+2)(x-2)}+\frac{x}{(x-5)(x+2)}-\frac{1}{x-2}\\
&= \frac{3(x-5)+x(x-2)-(x+2)(x-5)}{(x-2)(x+2)(x-5)}\\
&= \frac{3x-15+x^2-2x-x^2+3x+10}{(x-2)(x+2)(x-5)}\\
&= \frac{4x-5}{(x-2)(x+2)(x-5)}
\end{aligned}
$$

n)

$$
\frac{1+\dfrac{x-3}{x+3}}{\dfrac{3x}{3-x}}-\frac{\dfrac{x-3}{x+3}-1}{\dfrac{x+3}{x}-\dfrac{x+3}{3}}+\frac{\dfrac{2}{x+3}}{\dfrac{3}{x-3}}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\dfrac{x+3+x-3}{x+3}}{\dfrac{3x}{3-x}}-\frac{\dfrac{x-3-x-3}{x+3}}{\dfrac{3x+9-x^2-3x}{3x}}+\frac{\dfrac{2}{x+3}}{\dfrac{3}{x-3}}\\
&= \frac{\dfrac{2x}{x+3}}{\dfrac{3x}{3-x}}-\frac{\dfrac{-6}{x+3}}{\dfrac{(3+x)(3-x)}{3x}}+\frac{\dfrac{2}{x+3}}{\dfrac{3}{x-3}}\\
&= \frac{2x(3-x)}{3x(x+3)}-\frac{-18x}{(x+3)(x+3)(3-x)}+\frac{2(x-3)}{3(x+3)}\\
&= \frac{2(3-x)}{3(x+3)}-\frac{-18x}{(x+3)(x+3)(3-x)}+\frac{2(x-3)}{3(x+3)}\\
&= \frac{6-2x}{3(x+3)}+\frac{2x-6}{3(x+3)}+\frac{18x}{(x+3)(x+3)(3-x)}\\
&= \frac{6-2x+2x-6}{3(x+3)}+\frac{18x}{(x+3)(x+3)(3-x)}\\
&= \frac{18x}{(x+3)^2(3-x)}
\end{aligned}
$$

2.7. Ejercicios propuestos

A) Si $a = 2$, $b = -3$ y $c = -\dfrac{1}{3}$, evalúe las siguientes expresiones:

212. $2a - 3c - 2c$

213. $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + c$

214. $a^2 + b^2 + c^2$

215. $\dfrac{a+b}{a-b} + \dfrac{1}{c}$

216. $\dfrac{a+b}{c} - b$

217. $\dfrac{a + \frac{b+c}{a}}{b-c}$

218. $\dfrac{a+5}{2 - \frac{b}{c+b}} - \dfrac{ab}{\frac{1}{c} + \frac{1}{b-a}}$

B) Reduce las siguientes expresiones:

219. $2a^2b(3ab^2 - 5ab + 8a^2b)$

220. $\left(\dfrac{3}{4}a + 2b\right)(0,5b - a)$

221. $\left(\dfrac{a^2}{3} + 4\right)\left(\dfrac{a^2}{3} - 4\right)$

222. $\dfrac{3}{7}a^2b^3\left(\dfrac{7}{3}ab^{-3} - \dfrac{1}{3}a^{-2}b + \dfrac{14}{9}a^{-2}b^{-3}\right)$

223. $(2a-3)^2(a+3b-5)(a+3)$

224. $\dfrac{10}{3}x^4y^5(0,5x - 0,3y + 0,2xy + 0,5x^2y^2)$

C) Desarrolle los siguientes productos notables:

225. $(y-3)^2$

226. $(8n-5p)^2$

227. $(u-4,5)^2$

228. $(4y-7z)^2$

229. $\left(y - \dfrac{7}{2}\right)^3$

230. $(-7a+6b)^3$

231. $(2c - \dfrac{3}{4})^3$

232. $(-2x-3y)^2$

233. $\left(\dfrac{1}{2}e + \dfrac{1}{3}f\right)^2$

234. $(x+3y)(x-3y)$

235. $(4a-b)(4a+b)$

236. $(x^2-6)(x^2+6)$

237. $(uv+1)(uv-1)$

238. $(b-8)(b-9)$

239. $(c+6)(c-3)$

240. $(2m+5)(2m-1)$

241. $(pq+3)(pq-3)$

242. $(a^2x+3)(a^2x-2)$

243. $(5+x)(3+x)$

244. $(m^2-mn)(m^2+7mn)$

D) Resuelve las operaciones indicadas y reduce los términos semejantes

245. $(x-1)(x-6)+(x+7)(x-3)$

246. $2(a+1)^2-3(a+1)(a-1)$

247. $2(x+5)(x-4)-3(2x+4)(2x-3)$

248. $3(x-y)^2-2(2x+3y)^2$

249. $(x+2y)(x+3y)-3x(3x+4y)$

250. $\left(\frac{a^2}{3}+3\right)\left(\frac{a^2}{3}-3\right)-3\left(\frac{a}{3}-3\right)^2$

251. $\left(\frac{1}{2}a-\frac{1}{3}b\right)^2-\left(\frac{3}{2}a-\frac{2}{3}b\right)^2$

252. $\left(\frac{1}{3}-3x\right)^3+\left(\frac{1}{3}+3x\right)\left(\frac{1}{3}-3x\right)$

253. $(0,1x-0,2y)^2-(0,2x+0,4y)^2$

254. $(a-2)^3+(a-2)^2$

255. $7(3m-n)^2-(m+n)^2-8m^2$

256. $3xy(x^2-2xy+y)-2xy(2x-3y)$

257. $(3x-5)(3x-4)-(2x+4)(2x-6)$

258. $(3a-4)^2-(3a-4)(3a+4)$

259. $\left(\frac{2}{3}x-3\right)^2-\left(\frac{2}{3}x-3\right)\left(\frac{2}{3}x-2\right)$

260. $4\left(\frac{1}{2}a-3\right)^2+4\left(\frac{1}{2}a+3\right)$

E) Realice los pasos necesarios para escribir las siguientes expresiones de tal manera que aparezca uno o dos cuadrados de binomio:

261. u^2-u

262. $4a^2+b^2$

263. a^2x^2+bx

264. $4p^2-28pq$

265. $9x^2+72x+24y+16$

266. $3y^2-9y-5x-2$

267. $x^2+y^2-3x+6y-5$

268. $2y-8x-x^2$

269. $x^2-y^2-6x+8y$

270. $4x^2+4y^2+8x-20$

271. $4x^2+9y^2+32x-18y+37$

272. $-6x^2+4y^2-36x+16y+46$

273. $9x^2-4y^2-36x+32y+8$

274. $4x^2-9y^2+32x+36y+64$

F) Agrupe según factor común:

275. u^2-u

276. $3(x^2)^3-x^5$

277. $4(x^2)^3x^4-(2x)^2x^3$

278. $a^2x+a^3x^2-4a^2x^3$

279. $3ax^2-9a^2x^2+6a^3x^3$

280. $4ab^2c-8a^2b^3c$

281. $7a^2xy^3-14a^2x^2y^2$

282. $(a+2b)(c+3d)-(2a-b)(c+3d)$

283. $(4a-3b)a-(4a-3b)a^2+(4a-3b)a^3$

284. $a^2+ab+ac+bc$

285. $a^2+3b-ab-3a$

G) Factorice las siguientes expresiones algebraicas:

286. $a^2b^2 - 4$

287. $a^4 + 2a^2b^2 + b^4$

288. $9 - x^2 + 2xy - y^2$

289. $p^3 + 8 + 6p^2 + 12p$

290. $16m^2 - 8mn + n^2 - 49$

291. $x^3 + x^2 - x - 1$

292. $x^3 - 5x^2 - x + 5$

293. $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 6x + 4$

294. $(3x-6)(x^2-1)-(5x-10)(x-1)^2$

295. $27x^3 - 1$

H) Exprese en la forma más simple:

296. $\dfrac{2^{2m+3} - 3\left(2^m\right)^2}{3\left(2^{m+1}\right)^2 - 2^{2m+1}}$

297. $\dfrac{y^{-2} + 2x^{-1}y^{-1} + x^{-2}}{x^{-1}y^{-2} + x^{-2}y^{-1}}$

298. $\dfrac{xy^{-2} - x^{-1}}{y^{-2} + x^{-1}y^{-1}}$

299. $\dfrac{y^{-3} - x^{-3}}{x^{-2}y^{-3} - x^{-3}y^{-2}}$

I) Compruebe en cada caso si las fracciones dadas son equivalentes:

300. $\dfrac{x+2}{3x+5}$ y $\dfrac{1}{3}$

301. $\dfrac{x^2+x}{x^2}$ y $\dfrac{x+1}{x}$

302. $\dfrac{3x}{x^2-x}$ y $\dfrac{3}{x-2}$

303. $\dfrac{3x-3}{9x^2-9}$ y $\dfrac{1}{3x+3}$

J) Descomponga en factores y simplifique:

304. $\dfrac{x^2-3x}{2x-6}$

305. $\dfrac{x^2-1}{(x-1)^2}$

306. $\dfrac{x^2+4x+4}{x^2-4}$

307. $\dfrac{x^2-16}{x^2+8x+16}$

308. $\dfrac{x^2-9}{x^4-81}$

309. $\dfrac{x^2+3x}{x^2+x-6}$

310. $\dfrac{x^2+2x-3}{x^3-x^2}$

311. $\dfrac{x^3+4x^2+3x}{x^2+x-6}$

K) Realice las operaciones indicadas y simplifique:

312. $\dfrac{1}{3x}+\dfrac{3}{2x}-\dfrac{1}{x}$

313. $\dfrac{2}{3x}-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3}{2x^2}$

314. $\dfrac{3}{x}-\dfrac{x}{x-1}$

315. $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}$

316. $\left(\dfrac{4}{x}-x\right)\div\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2}\right)$

317. $\dfrac{x+2}{(x+2)^2}\cdot\dfrac{x^2-4}{x}$

318. $\dfrac{x^2}{2}\cdot\left(\dfrac{2}{x}\div\dfrac{1}{x+2}\right)$

319. $\left(\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x+1}\right)\div\left(x-\dfrac{1}{x+1}\right)\cdot x$

320. $\left(\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{x+2}{x}-\dfrac{x+1}{x-2}\right)\cdot 2x^2$

321. $\left(\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{x-y}{x+y}\right)\cdot\left(\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}\right)$

322. $\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}+\dfrac{x+y}{xy}\right)\cdot\dfrac{2xy}{x+y}$

323. $\left(\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{x}{x+1}\right)\cdot\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$

324. $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{x-1}{x^2-4x+3}$

325. $\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{3}{x-1}-\dfrac{x+1}{x^2+x-2}$

326. $\dfrac{x}{x^2-x-2}-\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{x-1}{x^2-3x+2}$

327. $\dfrac{x}{x^2}-\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{x+2}{x^2+x-2}$

328. $\dfrac{a^2+6a+9}{a^2-9}\div\dfrac{a^2+9}{a^4-81}$

329. $\dfrac{16-x^4}{4x+8}\div(32-8x^2)$

330. $\dfrac{\dfrac{36}{x+y}}{\dfrac{6}{x-y}}\div\dfrac{\dfrac{3x}{x+y}}{\dfrac{1}{x^2-y^2}}$

331. $\dfrac{2y}{y-1}-\dfrac{y-1}{3y}-\dfrac{3-y}{y}$

332. $\dfrac{y}{y-2}-\dfrac{y}{y^2-3y+2}-\dfrac{y}{y-1}$

333. $\dfrac{3+x}{3-x}-\dfrac{1}{-x-3}-\dfrac{x^2}{9-x^2}$

334. $\dfrac{1}{y^2-y}-\dfrac{2y+2}{y^2-1}+\dfrac{y}{y+1}-1$

335. $\dfrac{x^4-3x^3}{x^4-6x^3+9x^2}$

336. $\dfrac{2x+6}{x^2-3x}-\dfrac{x+5}{x^2-4x+3}+\dfrac{x-1}{2x-6}$

337. $\dfrac{x}{x^2-x}+\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{x-1}{x^2-1}$

338. $\dfrac{x-1}{x^2+x}-\dfrac{3(x-1)}{x}+\dfrac{2x}{x+1}$

339. $\left(1+\dfrac{x}{y}\right)\div\left(\dfrac{x^2-y^2}{xy-y^2}\right)$

340. $\dfrac{\dfrac{x^2-3x-10}{x^3-2x^2-4x+8}\cdot\dfrac{x^2-4}{x-5}}{\dfrac{x+2}{3-x}\cdot\dfrac{6x-2x^2}{2x^2-4x}}$

341. $\dfrac{\dfrac{9+6x+x^2}{9-x^2}\cdot\dfrac{3x^2-x^3}{3x^2+x^3}}{\dfrac{2x-4}{\frac{3}{4}+\frac{2}{8}}\div\dfrac{2x^2-8x+8}{x-2}}$

342. $\dfrac{x^2+6x+5}{x^2-5x+4}\cdot\dfrac{x-2}{x^2-4}+\dfrac{x^3-2x}{x^2-4x}$

343. $$\frac{\left(\frac{x^3+x^2-6x}{x^2+x}-\frac{x^2-9}{x^3+6x^2+9x}\right)}{\frac{x^2-5x+6}{x^2+x}}$$

345. $$\frac{\frac{x^2-1}{x^2+2x+1}\cdot\frac{2x^2-8x-10}{x-1}}{\frac{2x+2}{x^2+x-2}\div\frac{x+1}{x^3-4x^2-7x+10}}$$

344. $$\frac{\frac{x^2+2x+1}{x^2-1}\cdot\frac{4x^2-4x}{x+1}}{\frac{2x^2+14x+20}{x^3-50+2x^2-25x}\div\frac{x-5}{2x^3-20x^3+50x}}$$

2.7.1. Soluciones

A) **212** $\frac{17}{3}$

213 $-\frac{1}{6}$

214 $\frac{118}{9}$

215 $-\frac{16}{5}$

216 6

217 $-\frac{1}{8}$

218 $\frac{395}{88}$

B) **219** $-10a^3b^2 + 16a^4b^2 + 6a^3b^3$

220 $-\frac{3a^2}{4} - \frac{13ab}{8} + b^2$

221 $\frac{a^4}{9} - 16$

222 $\frac{2}{3} + a^3 - \frac{b^4}{7}$

223 $4a^4 + 12a^3b - 20a^3 - 27a^2 - 81ab + 162a + 81b - 135$

224 $\frac{5}{3}x^5y^5 - x^4y^6 + \frac{2}{3}x^5y^6 + \frac{5}{3}x^6y^7$

C) **225** $y^2 - 6y + 9$

226 $64n^2 - 80np + 25p^2$

227 $u^2 - 9u + 20{,}25$

228 $16y^2 - 56yz + 49z^2$

229 $y^3 - \frac{21}{2}y^2 + \frac{147}{4}y - \frac{343}{8}$

230 $216b^3 - 756ab^2 + 882a^2b - 343a^3$

231 $8c^3 - 9c^2 + \frac{27}{8}c - \frac{27}{64}$

232 $4x^2 + 12xy + 9y^2$

233 $\frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{3}ef + \frac{1}{9}f^2$

234 $x^2 - 9y^2$

235 $16a^2 - b^2$

236 $x^4 - 36$

237 $u^2v^2 - 1$

238 $b^2 - 17b + 72$

239 $c^2 + 3c - 18$

240 $4m^2 + 8m - 5$

241 $p^2q^2 - 9$

242 $a^4x^2 + a^2x - 6$

243 $x^2 + 8x + 15$

244 $m^4 + 6m^3n - 7m^2n^2$

D) **245** $2x^2 - 3x - 15$

246 $-a^2 + 4a + 5$

247 $-10x^2 - 4x - 4$

248 $-5x^2 - 30xy - 15y^2$

249 $-8x^2 - 7xy + 6y^2$

250 $\frac{a^4}{9} - \frac{a^2}{3} + 6a - 36$

251 $-2a^2 + \frac{5}{3}ab - \frac{b^2}{3}$

252 $-27x^3 - x + \frac{4}{27}$

253 $-\frac{3}{100}x^2 - \frac{xy}{5} - \frac{3}{25}y^2$

254 $a^3 - 5a^2 + 8a - 4$

255 $54m^2 - 44mn + 6n^2$

256 $3x^3y - 6x^2y^2 - 4x^2y + 9xy^2$

257 $5x^2 - 23x + 44$

258 $32 - 24a$

259 $-\frac{2}{3}x + 3$

260 $a^2 - 10a + 48$

E)

261 $(u-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}$

262 $(2a+b)^2-4ab$

263 $(ax+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2}{4a^2}$

264 $(2p-7q)^2-49q^2$

265 $9(x+4)^2+8(3y-16)$

266 $3(y-\frac{3}{2})^2-\frac{17}{4}-5x$

267 $(x-\frac{3}{2})^2+(y+3)^2-\frac{65}{4}$

268 $2(y+8)-(x+4)^2$

269 $(x-3)^2-(y+4)^2+7$

270 $(2x+2)^2$

271 $4(4+x)^2+9(-1+y)^2-36$

272 $6(x+3)^2+4(y+2)^2+84$

273 $9(x-2)^2-4(y-4)^2+36$

274 $4(x+4)^2-9(y-2)^2+36$

F)

275 $u(u-1)$

276 $x^5(3x-1)$

277 $4x^5(x^5-1)$

278 $a^2x(1+ax-4x^2)$

279 $3ax^2(2a^2x-3a+1)$

280 $4ab^2c(1-2ab)$

281 $7a^2xy^2(y-2x)$

282 $-(a-3b)(c+3d)$

283 $a(1-a+a^2)(4a-3b)$

284 $(a+b)(a+c)$

285 $(a-3)(a-b)$

G)

286 $(ab-2)(ab+2)$

287 $(a^2+b^2)^2$

288 $(3+x-y)(3-x+y)$

289 $(p+2)^3$

290 $(4m-n-7)(4m-n+7)$

291 $(x-1)(x+1)^2$

292 $(x-5)(x-1)(x+1)$

293 $(x-2)(x-1)(x^2+2)$

294 $-2(x-4)(x-2)(x-1)$

295 $(3x-1)(9x^2+3x+1)$

H)

296 $\dfrac{1}{2}$

297 $x+y$

298 $x-y$

299 x^2+xy+y^2

I)

300 no equivalentes

301 equivalentes

302 no equivalentes

303 equivalentes

J)

304 $\dfrac{x}{2}$

305 $\dfrac{x+1}{x-1}$

306 $\dfrac{x+2}{x-2}$

307 $\dfrac{x-4}{x+4}$

308

309 $\dfrac{1}{x^2+9}$

310 $\dfrac{x(x+3)}{x^2}$

311 $\dfrac{x(x+1)}{x-2}$

K)

312 $\dfrac{5}{6x}$

313 $\dfrac{4x+3}{6x^2}$

314 $\dfrac{-x^2+3x-3)}{x(x-1)}$

315 $\dfrac{2}{x^2-1}$

316 $4-2x$

317 $\dfrac{x-2}{x}$

318 $x(x+2)$

319 $\dfrac{3x+2}{x^2+x-1}$

320 $\dfrac{-2x^2-2x-12}{x-2}$

321 4

322 $\dfrac{4y}{x+y}$

323 $\dfrac{3x+1}{x}$

324 $\dfrac{1}{x-1}$

325 $\dfrac{3x+4}{x^2+x-2}$

326 $\dfrac{5-3x}{(x-2)(x+1)}$

327 $\dfrac{3x^2-2x+1}{x-x^3}$

328 $(a+3)^2$

329 $\dfrac{x^2+4}{32(x+2)}$

330 $\dfrac{2}{x(x+y)}$

331 $\dfrac{2(4y^2-5y+3)}{3y(y-1)}$

332 0

333 $\dfrac{5x+12}{9-x^2}$

334 $\dfrac{3y^2-1}{y-y^3}$

335 $\dfrac{x}{x-3}$

336 $\dfrac{x^3-x-12}{2x(x-3)(x-1)}$

337 $\dfrac{3x+1}{x^2-1}$

338 $\dfrac{2-x}{x}$

339 1

340 1

341 1

342 $\dfrac{x^4+x^3-3x^2+4x+9}{(x-4)(x-1)(x+2)}$

343 $\dfrac{x^4+4x^3-4x^2-16x+3}{(x-3)(x-2)(x+3)}$

344 $\dfrac{(x-5)^2}{25-9x^2}$

345 1

3 Ecuaciones

3.1. Definición

Definición 1.1: Ecuación

Una ecuación es una igualdad de dos expresiones, denominadas miembros en las que hay una o más variables llamadas incógnitas.

Resolver una ecuación consiste en determinar el o los valores de la incógnita para los cuales se satisface la igualdad, a éste conjunto se le llama solución. Cuando una igualdad se cumple para cualquier valor de la incógnita, ésta igualdad se denomina identidad.
Para resolver una ecuación haremos uso de los axiomas de cuerpo y de la siguinete propiedad.

Proposición 1. *Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ entonces se cumple la ley de cancelación:*

1. $a + b = a + c \Rightarrow b = c$.
2. $a \cdot b = a \cdot c \Rightarrow b = c$, $a \neq 0$.

Ejemplo 58. *Las siguientes igualdades representan ecuaciones:*

- $3x^2 - 3x + 1 = 0$
- $3t - 16 = 4t - 5$

El **grado** de una ecuación con una incógnita corresponde al valor del mayor exponente que tiene la incógnita una vez que la ecuación ha sido reducida a su más mínima expresión.

3.2. Ecuaciones lineales

Definición 2.1: Ecuación de primer grado

Una ecuación lineal o de primer grado en una incógnita es aquella que se puede reducir a la forma
$$ax + b = 0, \quad a \neq 0$$

Es fácil notar que toda ecuación de primer grado de la forma $ax + b = 0$, tiene como única solución $x = -\dfrac{b}{a}$.

Ejemplo 59. *Resolvamos las siguientes ecuaciones:*

- $6x - 10 = 2(4x - 6) + 10$

  Solución:

$$\begin{aligned}
6x - 10 &= 2(4x-6) + 10 \quad \text{/utilizamos la propiedad distributiva}\\
6x - 10 &= 8x - 12 + 10 \quad \text{/sumamos el inverso aditivo de } 8x \text{ y } -10\\
6x - 8x - 10 + 10 &= 8x - 8x + 10 + 10 \quad \text{/reducimos los términos semejantes}\\
-2x &= 8 \quad \text{/multiplicamos por } -\frac{1}{2} \text{ ambas partes de la igualdad}\\
x &= -4
\end{aligned}$$

- $2x^2 + 3x - 5 = 2x^2 - 7x + 8$

  Solución:

$$\begin{aligned}
2x^2 + 3x - 5 &= 2x^2 - 7x + 8\\
2x^2 - 2x^2 + 3x + 7x &= 8 + 5\\
10x &= 13\\
x &= \frac{13}{10}
\end{aligned}$$

- $(x+2)^2 + (x-5)(x+5) = 2(x^2 - 8) + 5x + 1$

Solución:

$$\begin{aligned}
(x+2)^2+(x-5)(x+5) &= 2(x^2-8)+5x+1\\
x^2+4x+4+x^2-25 &= 2x^2-16+5x+1\\
x^2+x^2-2x^2+4x-5x &= -16+1-4+25\\
-x &= 6\\
x &= -6
\end{aligned}$$

- $2x(x-7)+(x+3)(x-3)=3(x+1)^2+2(x+4)$

  Solución:

$$\begin{aligned}
2x(x-7)+(x+3)(x-3) &= 3(x+1)^2+2(x+4)\\
2x^2-14x+x^2-9 &= 3(x^2+2x+1)+2x+8\\
2x^2-14x+x^2-9 &= 3x^2+6x+3+2x+8\\
2x^2+x^2-3x^2-14x-6x-2x &= 3+8+9\\
-22x &= 20\\
x &= -\frac{20}{22}=-\frac{10}{11}
\end{aligned}$$

3.2.1. Ecuaciones fraccionarias

Son aquellas ecuaciones que involucran fracciones algebraicas. Para resolverlas se factoriza cada denominador, luego se multiplica la ecuación por el MCM de estos. Se resuelve la ecuación resultante excluyendo dentro de las soluciones aquellos valores que anulan los denominadores.

Ejemplo 60. *Resolvamos las siguientes ecuaciones:*

- $\dfrac{x}{3}+\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{5-2x}{4}$.

  Solución:

  Multiplicamos por el MCM de los denominadores que es 12 obteniendo:

$$\begin{aligned}
\frac{x}{3}+\frac{x+1}{2} &= \frac{5-2x}{4} \qquad / \cdot 12\\
12\cdot\frac{x}{3}+12\cdot\frac{x+1}{2} &= 12\cdot\frac{5-2x}{4}\\
4\cdot x+6\cdot(x+1) &= 3\cdot(5-2x)\\
4x+6x+6 &= 15-6x\\
4x+6x+6x &= 15-6\\
16x &= 9\\
x &= \frac{9}{16}
\end{aligned}$$

- $\dfrac{2x-1}{x+2}-\dfrac{x+3}{x-5}=\dfrac{x^2-3}{x^2-3x-10}$.

  Solución:

  Factorizamos los denominadores y multiplicamos por el MCM que es $(x+2)(x-5)$ obteniendo:

$$\begin{aligned}
\frac{2x-1}{x+2}-\frac{x+3}{x-5} &= \frac{x^2-3}{(x+2)(x-5)}\\
(2x-1)(x-5)-(x+3)(x+2) &= x^2-3\\
2x^2-10x-x+5-x^2-5x-6 &= x^2-3\\
-16x &= -3-5+6\\
x &= \frac{-2}{-16}\\
x &= \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

- $\dfrac{x+2}{3}+\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{3x+1}{6}-\dfrac{2x+3}{2}$.

  Solución:

  Multiplicamos por el MCM de los denominadores que es 12 obteniendo:

$$\begin{aligned}
\frac{x+2}{3} + \frac{x-1}{4} &= \frac{3x+1}{6} - \frac{2x+3}{2} \quad / \cdot 12 \\
12 \cdot \frac{x+2}{3} + 12 \cdot \frac{x-1}{4} &= 12 \cdot \frac{3x+1}{6} - 12 \cdot \frac{2x+3}{2} \\
4 \cdot (x+2) + 3 \cdot (x-1) &= 2 \cdot (3x+1) - 6 \cdot (2x+3) \\
4x + 8 + 3x - 3 &= 6x + 2 - 12x - 18 \\
4x + 3x - 6x + 12x &= 2 - 18 - 8 + 3 \\
13x &= -21 \\
x &= -\frac{21}{13}
\end{aligned}$$

- $\dfrac{x+6}{x-2} - \dfrac{x+3}{x-10} = \dfrac{11}{x^2 - 12x + 20}$.

  Solución:

  Factorizamos los denominadores y multiplicamos por el MCM que es $(x-2)(x-10)$ obteniendo:

$$\begin{aligned}
\frac{x+6}{x-2} - \frac{x+3}{x-10} &= \frac{11}{(x-2)(x-10)} \\
(x+6)(x-10) - (x+3)(x-2) &= 11 \\
x^2 - 4x - 60 - x^2 - x + 6 &= 11 \\
-5x &= 65 \\
x &= -13
\end{aligned}$$

- $\dfrac{(x-1)^2}{5} - \dfrac{(2x+1)(x-3)}{10} = \dfrac{x-7}{5}$.

  Solución:

  Multiplicamos por el MCM de los denominadores que es 10 obteniendo:

$$\begin{aligned}
\frac{(x-1)^2}{5} - \frac{(2x+1)(x-3)}{10} &= \frac{x-7}{5} \quad / \cdot 10 \\
10 \cdot \frac{(x-1)^2}{5} - 10 \cdot \frac{(2x+1)(x-3)}{10} &= 10 \cdot \frac{x-7}{5} \\
2 \cdot (x-1)^2 - (2x+1)(x-3) &= 2(x-7) \\
2 \cdot (x^2 - 2x + 1) - (2x^2 - 6x + x - 3) &= 2 \cdot (x-7) \\
2x^2 - 4x + 2 - 2x^2 + 6x - x + 3 &= 2x - 14 \\
-4x + 6x - x - 2x &= -14 - 2 - 3 \\
-x &= -19 \\
x &= 19
\end{aligned}$$

- $\dfrac{x^2+1}{x+2} - \dfrac{3}{2} = \dfrac{x^2+3}{x-2} - \dfrac{11x^2}{2x^2-8}$

  Solución:

  Factorizamos los denominadores y multiplicamos por el MCM que es $2(x+2)(x-2)$ obteniendo:

$$\begin{aligned}
\frac{x^2+1}{x+2} - \frac{3}{2} &= \frac{x^2+3}{x-2} - \frac{11x^2}{2x^2-8} \\
\frac{x^2+1}{x+2} - \frac{3}{2} &= \frac{x^2+3}{x-2} - \frac{11x^2}{2(x+2)(x-2)} \quad / \cdot 2(x+2)(x-2) \\
2(x-2)(x^2+1) - 3(x+2)(x-2) &= 2(x+2)(x^2+3) - 11x^2 \\
2x^3 + 2x - 4x^2 - 4 - 3x^2 + 12 &= 2x^3 + 6x + 4x^2 + 12 - 11x^2 \\
-4x &= 4 \\
x &= -1
\end{aligned}$$

- $\dfrac{2}{4x-5} - \dfrac{6x+5}{16x^2-25} = \dfrac{3}{4x+5}$

  Solución:

  Factorizamos y multiplicamos por el MCM que es $(4x+5)(4x-5)$ obteniendo:

$$\begin{aligned}
\frac{2}{4x-5} - \frac{6x+5}{16x^2-25} &= \frac{3}{4x+5} \\
\frac{2}{4x-5} - \frac{6x+5}{(4x+5)(4x-5)} &= \frac{3}{4x+5} \quad / \cdot (4x+5)(4x-5) \\
2(4x+5) - (6x+5) &= 3(4x-5) \\
8x + 10 - 6x - 5 &= 12x - 15 \\
8x - 6x - 12x &= -15 - 10 + 5 \\
-10x &= -20 \\
x &= 2
\end{aligned}$$

- $\dfrac{10x+1}{2x+2} - \dfrac{8x^2+6x-8}{4x^2+8x+4} = 3$

  $\boxed{\text{Solución:}}$

  Factorizamos los denominadores y multiplicamos por el MCM que es $(2x+2)(2x+2)$ obteniendo:

$$\begin{aligned}
\frac{10x+1}{2x+2} - \frac{8x^2+6x-8}{4x^2+8x+4} &= 3 \\
\frac{10x+1}{2x+2} - \frac{8x^2+6x-8}{(2x+2)(2x+2)} &= 3 \ / \cdot (2x+2)(2x+2) \\
(10x+1)(2x+2) - (8x^2+6x+8) &= 3(2x+2)(2x+2) \\
20x^2 + 20x + 2x + 2 - 8x^2 - 6x + 8 &= 12x^2 + 24x + 12 \\
20x^2 - 8x^2 - 12x^2 + 20x + 2x - 6x - 24x + 2 + 8 - 12 &= 0 \\
-8x - 2 &= 0 \\
-8x &= 2 \\
x &= -\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

- $\dfrac{3}{x-1} = \dfrac{-1}{x^2-1}.$

  $\boxed{\text{Solución:}}$

Como ambas fracciones son equivalentes podemos multiplicar cruzado obteniendo:

$$\begin{aligned}
\frac{3}{x-1} &= \frac{-1}{(x+1)(x-1)} \\
3(x+1)(x-1) &= -1(x-1) \\
3(x+1) &= -1 \\
3x+3 &= -1 \\
3x &= -4 \\
x &= -\frac{4}{3}
\end{aligned}$$

3.3. Ecuaciones cuadráticas

Definición 3.1: Ecuación Cuadrática

Una ecuación cuadrática con una incógnita es aquella en la que el mayor exponente de la incógnita es dos, es decir, tiene la forma $ax^2 + bx + c = 0$ con a, b y c reales, y $a \neq 0$.

Ejemplo 61. *Las siguientes ecuaciones son cuadráticas*

- $3x^2 - 5x + 6 = 0$
- $2x^2 + 3x = 0$
- $x^2 - 4 = 0$

Teorema 3.1

Sean a, b, c reales donde $a \neq 0$. La ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, tiene como máximo dos soluciones reales, las cuales se expresan:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ y } x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplo 62. *Resolvamos la ecuación $x^2 - 3x + 2 = 0$ aplicando la fórmula cuadrática.*

Solución:

Utilizando la formula, con $a = 1$, $b = -3$ y $c = 2$:

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1}$$
$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2}$$

Luego $x_1 = 1 \vee x_2 = 2$
Notemos que también podemos resolver la ecuación factorizando:

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$
$$(x - 1)(x - 2) = 0$$

Luego, para que el producto sea igual a 0, al menos uno de los factores debe ser igual a cero, es decir,$x - 1 = 0 \vee x - 2 = 0$. Por lo tanto, $x_1 = 1 \vee x_2 = 2$

Ejemplo 63. *Resolvamos las siguientes ecuaciones cuadráticas.*

- $x^2 + 5x = 0$

  Solución:

  Factorizando por x se tiene:

  $$x^2 + 5x = 0$$
  $$x(x + 5) = 0$$

  Luego, para que el producto sea igual a cero, al menos uno de los factores debe ser igual a cero, es decir:
  $$x = 0 \vee x + 5 = 0.$$
  Luego las soluciones son:
  $$x_1 = 0 \vee x_2 = -5.$$

- $x^2 - 1 = 0$

  Solución:

  Despejando se tiene:

$$x^2 - 1 = 0$$
$$x^2 = 1$$

Luego las soluciones son:

$$x_1 = 1 \vee x_2 = -1.$$

- $2x^2 - x + 1 = 0$

  $\boxed{\text{Solución:}}$

  Usando la formula cuadrática obtenemos

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1) - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2}$$
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{-7}}{4}$$

  Pero $\sqrt{-7}$ no pertenece a los reales. Por lo tanto, no tiene solución en el conjunto de los números reales.

- $\dfrac{x+4}{x+5} - \dfrac{x+2}{x+3} = \dfrac{1}{24}$.

  $\boxed{\text{Solución:}}$

$$\begin{aligned}
\frac{x+4}{x+5} - \frac{x+2}{x+3} &= \frac{1}{24} \\
\frac{(x+3)(x+4) - (x+5)(x+2)}{(x+5)(x+3)} &= \frac{1}{24} \\
\frac{x^2 + 7x + 12 - x^2 - 7x - 10}{(x+5)(x+3)} &= \frac{1}{24} \\
\frac{2}{(x+5)(x+3)} &= \frac{1}{24} \\
48 &= (x+5)(x+3) \\
x^2 + 8x - 33 &= 0 \\
(x+11)(x-3) &= 0
\end{aligned}$$

  Luego, para que el producto sea igual a cero, al menos uno de los factores debe ser igual a cero, es decir:

$$x + 11 = 0 \vee x - 3 = 0$$

Por lo tanto, las soluciones son $x = -11$ y $x = 3$.

- $\dfrac{x+2}{6x+4} = \dfrac{x+4}{15x+10}$

  Solución:

$$\begin{aligned}
(x+2)(15x+10) &= (x+4)(6x+4) \\
15x^2 + 40x + 20 &= 6x^2 + 28x + 16 \\
9x^2 + 12x + 4 &= 0 \\
(3x+2)^2 &= 0 \\
3x + 2 &= 0 \\
3x &= -2 \\
x &= -\frac{2}{3}
\end{aligned}$$

  Pero $x = -\dfrac{2}{3}$ anula los denominadores, luego debe ser descartada. Por lo tanto esta ecuación no tiene solución.

- $(x+2)(x-2) - (x^2 - 4) = 2 - x^2$

  Solución

$$\begin{aligned}
(x+2)(x-2) - (x^2-4) &= 2 - x^2 \\
x^2 - 4 - x^2 + 4 &= 2 - x^2 \\
x^2 &= 2 \quad \text{aplicando raiz cuadrada} \\
x &= \pm\sqrt{2}
\end{aligned}$$

- $\dfrac{x+2}{4} - \dfrac{x^2-4}{3} = 2 - \dfrac{x^2+2}{6}$

  Solución

$$
\begin{aligned}
\frac{x+2}{4} - \frac{x^2-4}{3} = 2 - \frac{x^2+2}{6} \quad & \cdot 12 \\
3(x+2) - 4(x^2-4) &= 24 - 2(x^2+2) \\
3x + 6 - 4x^2 + 16 &= 24 - 2x^2 - 4 \\
-2x^2 + 3x + 2 &= 0
\end{aligned}
$$

Notemos que esta ultima ecuación la podemos resolver de dos maneras:

1. Multiplicamos ambos miembros por (-2) para luego factorizar:

$$
\begin{aligned}
-2x^2 + 3x + 2 &= 0 \\
(2x)^2 - 3(2x) - 4 &= 0 \\
(2x-4)(2x+1) &= 0
\end{aligned}
$$

   Luego, para que el producto sea igual a cero, al menos uno de los factores debe ser igual a cero, es decir:

$$2x - 4 = 0 \vee 2x + 1 = 0$$

   Por lo tanto, las soluciones son $x_1 = -\frac{1}{2}$ y $x_2 = 2$.

2. Aplicamos la fórmula cuadrática para obtener las soluciones:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 2}}{2 \cdot (-2)} = \frac{-3 \pm 5}{-4}$$

   Obteniendo las mismas soluciones que en el caso anterior, $x_1 = -\frac{1}{2}$ y $x_2 = 2$.

- $\dfrac{30}{x^2-1} - \dfrac{13}{x^2+x+1} = \dfrac{7+18x}{x^3-1}$

  Solución

$$\begin{aligned}
\frac{30}{x^2-1}-\frac{13}{x^2+x+1} &= \frac{7+18x}{x^3-1}\\
\frac{30}{(x+1)(x-1)}-\frac{13}{x^2+x+1} &= \frac{7+18x}{(x-1)(x^2+x+1)}\\
30(x^2+x+1)-13(x+1)(x-1) &= (7+18x)(x+1)\\
30x^2+30x+30-13x^2+13 &= 7x+7+18x^2+18x\\
30x^2-13x^2-18x^2+30x-7x-18x+30+13-7 &= 0\\
-x^2+5x+36 &= 0\\
x^2-5x-36 &= 0\\
(x-9)(x+4) &= 0
\end{aligned}$$

Luego las soluciones son $x_1 = 9$ y $x = -4$.

- $\dfrac{x^2+4x}{3}-\dfrac{2x^2-1}{4}=\dfrac{(x+1)(x-1)}{6}$

  Solución

$$\begin{aligned}
\frac{x^2+4x}{3}-\frac{2x^2-1}{4} &= \frac{(x+1)(x-1)}{6} \quad / \cdot 12\\
4\cdot(x^2+4x)-3\cdot(2x^2-1) &= 2\cdot(x^2-1)\\
4x^2+16x-6x^2+3 &= 2x^2-2\\
4x^2-6x^2-2x^2+16x+3+2 &= 0\\
-4x^2+16x+5 &= 0
\end{aligned}$$

$$x=\frac{-16\pm\sqrt{16^2-4\cdot(-4)\cdot 5}}{2\cdot(-4)}=\frac{-16\pm\sqrt{336}}{-8}$$

$$x_1 = -0,29$$
$$x_2 = 4,29$$

- $\dfrac{x+1}{x-2}-\dfrac{x+7}{x+3}=\dfrac{1}{5}$

  Solución

$$\begin{aligned}
\frac{x+1}{x-2}-\frac{x+7}{x+3} &= \frac{1}{5} \ / \cdot 5(x-2)(x+3) \\
5(x+3)(x+1)-5(x-2)(x+7) &= (x-2)(x+3) \\
5x^2+20x+15-5x^2-25x+70 &= x^2+x-6 \\
-x^2+20x-25x-x+15+70+6 &= 0 \\
-x^2-6x+91 &= 0 \\
x^2+6x-91 &= 0 \\
(x+13)(x-7) &= 0 \\
x_1 &= -13 \\
x_2 &= 7
\end{aligned}$$

- $\dfrac{3}{x-2}+\dfrac{2x+1}{x^2-5x+6}+\dfrac{x}{x-3}=-\dfrac{4}{3}$

  Solución

$$\begin{aligned}
\frac{3}{x-2}+\frac{2x+1}{x^2-5x+6}+\frac{x}{x-3} &= -\frac{4}{3} \\
\frac{3}{x-2}+\frac{2x+1}{(x-2)(x-3)}+\frac{x}{x-3} &= -\frac{4}{3} \quad \cdot 3(x-2)(x-3) \\
9(x-3)+3(2x+1)+3x(x-2) &= -4(x-2)(x-3) \\
9x-27+6x+3+3x^2-6x &= -4x^2+20x-24 \\
3x^2+4x^2+9x-20x-27+3+24 &= 0 \\
7x^2-11x &= 0 \\
x(7x-11) &= 0 \\
x_1 &= 0 \\
x_2 &= \frac{11}{7}
\end{aligned}$$

- $\dfrac{14}{x^2-9}+\dfrac{4-x}{3+x}=\dfrac{7}{x+3}-\dfrac{1}{3-x}$

  Solución

$$\begin{aligned}
\frac{14}{x^2-9}+\frac{4-x}{3+x} &= \frac{7}{x+3}-\frac{1}{3-x} \\
\frac{14}{x^2-9}+\frac{4-x}{x+3}-\frac{7}{x+3} &= -\frac{1}{3-x} \\
\frac{14}{x^2-9}+\frac{-3-x}{x+3} &= \frac{1}{x-3} \quad / \cdot (x+3)(x-3) \\
14-(x+3)(x-3) &= x+3 \\
14-x^2+9 &= x+3 \\
0 &= x^2+x-20 \\
0 &= (x+5)(x-4) \\
x_1 &= -5 \\
x_2 &= 4
\end{aligned}$$

- $(x^2-5x+9)\cdot\log 2+\log 125=3$

  Solución

$$\begin{aligned}
(x^2-5x+9)\cdot\log 2+\log 125 &= 3 \\
(x^2-5x+9)\cdot\log 2 &= \log 1000-\log 125 \\
x^2-5x+9 &= \frac{\log\dfrac{1000}{125}}{\log 2} \\
x^2-5x+9 &= \frac{\log 8}{\log 2} \\
x^2-5x+9 &= \log_2 8 \\
x^2-5x+9 &= 3 \\
x^2-5x+6 &= 0 \\
(x-3)(x-2) &= 0 \\
x_1 &= 2 \\
x_2 &= 3
\end{aligned}$$

Definición 3.2: Discriminante

Sean a, b y c reales, y $a \neq 0$. El discriminante de la ecuación $ax^2+bx+c=0$ es el valor numérico $b^2 - 4ac$, denotado como Δ.

Definición 3.3: Multiplicidad

Diremos que la solución $x = a$ de una ecuación cuadrática es de multiplicidad dos, cuando podemos escribir dicha ecuación de la forma $(x - a)^2 = 0$.

Dependiendo del discriminante de la ecuación cuadrática, la naturaleza de las soluciones pueden clasificarse según:

- Si $\Delta > 0$ entonces existen dos soluciones reales y distintas.
- Si $\Delta = 0$ entonces existe una única solución de multiplicidad 2.
- Si $\Delta < 0$ entonces no existe solución real.

Ejemplo 64. *Determinemos los valores de k para que la ecuación $x^2 - 3x + 2k = 0$:*

1. Posea dos soluciones reales distintas,
2. Posea una solución real de multiplicidad 2
3. No tenga solución real.

Solución:

El discriminante de la ecuación es $\Delta = 9 - 8k$ y por tanto

1. Si $9 - 8k > 0$, $k > \frac{9}{8}$ entonces existen dos soluciones reales distintas.
2. Si $9 - 8k = 0$, $k = \frac{9}{8}$ entonces existe una única solución de multiplicidad 2.
3. Si $9 - 8k < 0$, $k < \frac{9}{8}$ entonces no hay solución real.

Teorema 3.2: Propiedades de las soluciones de una ecuación cuadrática

Sean x_1 y x_2 las soluciones de la ecuación cuadática $ax^2 + bx + c = 0$, entonces se cumple que:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \quad \text{y} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Ejemplo 65. *Determinemos la ecuación cuadrática que tiene por soluciones a* $\alpha = \dfrac{3}{4}$ *y* $\beta = -\dfrac{1}{2}$

Solución:

$$\begin{aligned} \left(x-\frac{3}{4}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right) &= 0 \qquad / \cdot 8 \\ 4\cdot\left(x-\frac{3}{4}\right)2\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right) &= 0 \\ (4x-3)(2x+1) &= 0 \\ 8x^2+4x-6x-3 &= 0 \\ 8x^2-2x-3 &= 0 \end{aligned}$$

3.4. Ecuaciones irracionales

Definición 4.1: Ecuación irracional

Una ecuación irracional es aquella donde la incógnita se encuentra presente en la cantidad subradical de alguna de las raíces involucradas en la igualdad.

Para resolver una ecuación irracional se debe elevar cada miembro de ella una o más veces a las potencias que correspondan para eliminar sucesivamente las raíces que contienen a la incógnita. Luego se debe ver la pertinencia de los valores encontrados y serán soluciones aquellas que satisfagan la ecuación original.

Ejemplo 66. *Resolvamos las siguientes ecuaciones:*

- $\sqrt{2x-5} = 7$

  Solución:

  Elevando al cuadrado

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{2x-5}\right)^2 &= 7^2\\ 2x-5 &= 49\\ 2x &= 54\\ x &= 27\end{aligned}$$

Comprobación: $\sqrt{2\cdot 27-5} = \sqrt{54-5} = \sqrt{49} = 7$, finalmente la solución es $x=7$.

- $\sqrt{\sqrt{2x}-\sqrt{x-1}} = 1$.

Solución:

$$\begin{aligned}\sqrt{\sqrt{2x}-\sqrt{x-1}} &= 1 \quad /(\ )^2\\ \sqrt{2x}-\sqrt{x-1} &= 1\\ \sqrt{2x} &= 1+\sqrt{x-1} \quad /(\ )^2\\ 2x &= \left(1+\sqrt{x-1}\right)^2\\ 2x &= 1+2\sqrt{x-1}+x-1\\ x &= 2\sqrt{x-1} \quad /(\ )^2\\ x^2 &= 4(x-1)\\ x^2-4x+1 &= 0\\ (x-2)^2 &= 0\\ x &= 2\end{aligned}$$

Verificando, se tiene: $\sqrt{\sqrt{2\cdot 2}-\sqrt{2-1}} = \sqrt{\sqrt{4}-\sqrt{1}} = \sqrt{2-1} = \sqrt{1} = 1$. Luego, $x=2$ es solución de la ecuación.

- $\dfrac{5}{\sqrt{x+5}-\sqrt{x}} = 1$

Solución

$$\begin{aligned}
5 &= \sqrt{x+5} - \sqrt{x} \quad /(\ )^2 \\
25 &= x + 5 - 2\sqrt{x+5}\sqrt{x} + x \\
20 - 2x &= -2\sqrt{x(x+5)} \quad / \div (-2) \\
-10 + x &= \sqrt{x^2 + 5x} \quad /(\ )^2 \\
100 - 20x + x^2 &= x^2 + 5x \\
100 &= 25x \\
x &= 4
\end{aligned}$$

Verificando, se tiene: $\dfrac{5}{\sqrt{4+5} - \sqrt{4}} = \dfrac{5}{\sqrt{9} - \sqrt{4}} = \dfrac{5}{3-2} = 5 = 1$. Luego, $x = 4$ no es solución de la ecuación.

- $\sqrt{x+2} + \sqrt{2x} = \sqrt{18 - x}$

  Solución

  Resolviendo:

$$\begin{array}{rcl}
\left(\sqrt{x+2} + \sqrt{2x}\right)^2 & = & (\sqrt{18-x})^2 \\
\left(\sqrt{x+2}\right)^2 + 2\sqrt{x+2} \cdot \sqrt{2x} + (\sqrt{2x})^2 & = & (\sqrt{18-x})^2 \\
x + 2 + 2\sqrt{(x+2)x} + 2x & = & 18 - x \\
2\sqrt{(x+2)x} & = & 16 - 4x \\
\sqrt{(x+2)x} & = & 8 - 2x \\
2x^2 + 4x & = & (8 - 2x)^2 \\
2x^2 + 4x & = & 64 - 32x + 4x^2 \\
2x^2 - 36x + 64 & = & 0 \\
x^2 - 18x + 32 & = & 0 \\
(x - 16)(x - 2) & = & 0 \\
x = 16 & \vee & x = 2
\end{array}$$

Verificando:

- Con $x = 16$

$$\begin{aligned}
\sqrt{16+2}+\sqrt{16\cdot 2} &= \sqrt{18-16}\\
\sqrt{18}+\sqrt{42} &= \sqrt{2}\\
3\sqrt{2}+4\sqrt{2} &= \sqrt{2}\\
7\sqrt{2} &= \sqrt{2}
\end{aligned}$$

(Contradicción): Por lo tanto $x = 16$ no es solución.

- Con $x = 2$

$$\begin{aligned}
\sqrt{2+2}+\sqrt{2\cdot 2} &= \sqrt{18-2}\\
\sqrt{4}+\sqrt{4} &= \sqrt{16}\\
2+2 &= 4
\end{aligned}$$

Por lo tanto $x = 2$ es solución.

- $\sqrt{5x-3}-\sqrt{x+1} = 2\sqrt{x-1}$

Solución

$$\begin{aligned}
\sqrt{5x-3}-\sqrt{x+1} &= 2\sqrt{x-1}\\
5x-3-2\sqrt{5x-3}\sqrt{x+1}+x+1 &= 4(x-1)\\
-2\sqrt{5x^2+5x-3x-3} &= 4x-4-5x+3-x-1\\
-2\sqrt{5x^2+2x-3} &= -2x-2\\
\sqrt{5x^2+2x-3} &= x+1\\
5x^2+2x-3 &= x^2+2x+1\\
4x^2-4 &= 0\\
x^2-1 &= 0\\
x_1 &= 1\\
x_2 &= -1 \quad \text{No es solución}
\end{aligned}$$

- $\sqrt{2x+1} = 3x+1$

Solución

$$\begin{aligned}
\sqrt{2x+1} &= 3x+1 \quad /(\ )^2 \\
2x+1 &= (3x+1)^2 \\
2x+1 &= 9x^2+6x+1 \\
0 &= 9x^2+4x \\
0 &= x\cdot(9x+4) \\
x_1 &= 0 \\
x_2 &= -\frac{4}{9} \quad \text{No es solución}
\end{aligned}$$

- $\sqrt{\sqrt{x+1}} = 1$

  Solución

$$\begin{aligned}
\sqrt{\sqrt{x+1}} &= 1 \quad /(\ )^4 \\
x+1 &= 1 \\
x &= 0
\end{aligned}$$

- $\sqrt[3]{2\sqrt{3x+4}} = 2$

  Solución

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{2\sqrt{3x+4}} &= 2 \quad /(\ )^3 \\
2\sqrt{3x+4} &= 8 \\
\sqrt{3x+4} &= 4 \quad /(\ )^2 \\
3x+4 &= 16 \\
3x &= 12 \\
x &= 4
\end{aligned}$$

- $\sqrt[3]{x^3-3x^2} = x+1$

  Solución

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{x^3 - 3x^2} &= x + 1 \quad /(\ )^3 \\
x^3 - 3x^2 &= (x+1)^3 \\
x^3 - 3x^2 &= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \\
0 &= 6x^2 + 3x + 1
\end{aligned}$$

Aplicamos la fórmula general para resolver la ecuación cuadrática, obteniendo:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 6}}{2 \cdot 6} = \frac{-3 \pm \sqrt{-15}}{12}$$

Luego la ecuación no tiene solución.

- $\sqrt{x-3} + 2 = \sqrt{x+5}$

  Solución

$$\begin{aligned}
x - 3 + 4\sqrt{x-3} + 4 &= x + 5 \\
4\sqrt{x-3} &= 4 \quad /(\ )^2 \\
16(x-3) &= 16 \\
x - 3 &= 1 \\
x &= 4
\end{aligned}$$

- $\sqrt{x+5} + \sqrt{3} = \sqrt{x+7}$

  Solución

$$\begin{aligned}
\sqrt{x+5} + \sqrt{3} &= \sqrt{x+7} \quad /(\ )^2 \\
\left(\sqrt{x+5} + \sqrt{3}\right)^2 &= \sqrt{x+7}^2 \\
\sqrt{x+5}^2 + 2\sqrt{x+5}\sqrt{3} + \sqrt{3}^2 &= x + 7 \\
x + 5 + 2\sqrt{3 \cdot (x+5)} + 3 &= x + 7 \\
2\sqrt{3 \cdot (x+5)} &= -1 \quad /(\ )^2 \\
4 \cdot 3 \cdot (x+5) &= 1 \\
12x + 60 &= 1 \\
12x &= -59 \\
x &= -\frac{59}{12} \quad \text{No es solución}
\end{aligned}$$

Luego la ecuación no tiene solución.

3.5. Ecuaciones logarítmicas

Son aquellas ecuaciones en las que al menos una de las incógnitas aparece en el argumento de un logaritmo. Para resolverlas se eliminan los logaritmos presentes en la ecuación haciendo uso de la definición:

$$log_b x = a \Rightarrow b^a = x.$$

O bien, de la propiedad:

$$\log_b x = \log_b y \Rightarrow x = y.$$

Notemos que para hacer uso de la definición o de la propiedad, muchas veces es necesario utilizar las otras propiedades de los logarítmos para reducir la ecuación. Una vez encontradas las soluciones de la ecuación debemos analizar la pertenencia de estas.

Ejemplo 67. *Resolvamos las siguientes ecuaciones:*

- $\log(2x+4) - \log(x-1) = 1$

  Como es una resta de logaritmos, podemos utilizar la propiedad 7.:

  $$\log\left(\frac{2(x+2)}{x-1}\right) = 1 \Rightarrow \log\left(\frac{2x+4}{x-1}\right) = \log 10$$

  Luego, ultilizamos la definición. y como el logarítmo del miembro izquierdo esta en base 10, obtenemos que:

  $$10^1 = \frac{2x+4}{x-1}$$

  Simplificamos:

  $$\begin{array}{rcl} 2x+4 & = & 10(x-1) = 10x-10 \\ 2x-10x & = & -4-10 \\ -8x & = & -14 \\ x & = & \frac{7}{4} = 1{,}75 \end{array}$$

- $\log(3x+5) + \log(2x-1) = \log x^2$

  Solución:

  En este problema, reescribiremos el lado izquierdo utilizando la propiedad 6.:

  $$\log(6x^2 + 10x - 3x - 5) = \log x^2$$

  Y ahora, el problema se reduce a una ecuación cuadrática al aplicar la propiedad 9.:

  $$\begin{array}{rcl} 6x^2+7x-5 & = & x^2 \\ 5x^2+7x-5 & = & 0 \end{array}$$

  utilizando la fómula cuadrática obtenemos las siguientes soluciones:

  $$x = \frac{-7 \pm \sqrt{149}}{10}$$

  con lo cual obtenemos: $x_1 = \dfrac{-7+\sqrt{149}}{10} \approx 0{,}52$ y $x_2 = \dfrac{-7-\sqrt{149}}{10} \approx -1{,}92$

  La solución negativa en este caso debemos descartarla, pues al ser reemplazada en la ecuación original, nos queda un argumento negativo, lo cual no esta definido.

- $2\log x = \log(10-3x)$

  Solución:

  Comenzamos utilizando la propiedad $\log_a x^k = k\log_a$ al lado izquierdo:

  $$\log x^2 = \log(10-3x)$$

  Utilizando la propiedad $\log_b x = \log_b y \Rightarrow x = y$ obtenemos:

  $$\begin{aligned} x^2 &= 10-3x \\ x^2+3x-10 &= 0 \end{aligned}$$

  Las soluciones de la ecuación cuadrática son:

  $$x = \frac{-3\pm 7}{2}$$

  con lo que obtenemos: $x_1=-5$ y $x_2=2$

  Descartaremos la solución $x_1=-5$, pues indefine la ecuación original, al quedar argumento negativo en el logaritmo.

- $\log(x+1)-\log\sqrt{x-1} = \log(x-2)$

  Solución:

  $$\begin{aligned} \log(x+1)-\log\sqrt{x-1} &= \log(x-2) \\ \log\left(\frac{x+1}{\sqrt{x-1}}\right) &= \log(x-2) \\ \frac{x+1}{\sqrt{x-1}} &= x-2 \\ x+1 &= (x-2)\cdot\sqrt{x-1} \\ (x+1)^2 &= (x-2)^2\cdot(x-1) \\ x^2+2x+1 &= (x^2-4x+4)(x-1) \\ x^2+2x+1 &= x^3-4x^2+4x-x^2+4x-4 \\ 0 &= x^3-6x^2+6x-5 \\ 0 &= (x-5)(x^2-x+1) \\ x &= 5 \end{aligned}$$

- $\log_{x+1}(6x+1) = 2$

  Solución:

$$\begin{aligned} \log_{x+1}(6x+1) &= 2 \\ (x+1)^2 &= 6x+1 \\ x^2+2x+1 &= 6x+1 \\ x^2-4x &= 0 \\ x(x-4) &= 0 \end{aligned}$$

  Luego, los valores de x que anulan la expresión $x(x-4)$ son $x_1 = 0$ y $x_2 = 4$.

- $\log_2(\log_2(x-4)) = 3$

  Solución:

$$\begin{aligned} \log_2(\log_2(x-4)) = 3 \log_2(x-4) &= 2^3 \\ \log_2(x-4) &= 8 \\ x-4 &= 2^8 \\ x-4 &= 256 \\ x &= 260 \end{aligned}$$

- $\log x = \dfrac{2-\log x}{\log x}$

  Solución:

$$\begin{aligned} \log x &= \frac{2-\log x}{\log x} \\ (\log x)^2 &= 2-\log x \\ (\log x)^2 + \log x - 2 &= 0 \\ (\log x + 2)(\log x - 1) &= 0 \end{aligned}$$

  Luego para que el producto sea igual cero, al menos uno de los factores debe ser igual a cero, es decir $\log x = -2$ o $\log(x) = 1$. Por lo tanto las soluciones de la ecuación son $x_1 = 10^{-2}$ y $x_2 = 10$.

- $\dfrac{\log(35-x^2)}{\log(3x-4)} = 2$

  Solución:

$$\begin{aligned}
\frac{\log(35-x^2)}{\log(3x-4)} &= 2\\
\log(35-x^2) &= 2\log(3x-4)\\
\log(35-x^2) &= \log(3x-4)^2\\
35-x^2 &= (3x-4)^2\\
35-x^2 &= 9x^2-24x+16\\
10x^2-24x-19 &= 0
\end{aligned}$$

$$x = \frac{24 \pm \sqrt{(-24)^2 - 4\cdot 10\cdot 19}}{2\cdot 10} = \frac{24 \pm \sqrt{1336}}{20} = \frac{12 \pm \sqrt{334}}{10}$$

$$\begin{aligned}
x_1 &= 3,03\\
x_2 &= -0,63
\end{aligned}$$

- $\log 2 + \log(11-x^2) = 2\log(5-x)$

  Solución:

$$\begin{aligned}
\log 2 + \log(11-x^2) &= 2\log(5-x)\\
\log 2\cdot(11-x^2) &= \log(5-x)^2\\
2\cdot(11-x^2) &= (5-x)^2\\
22-2x^2 &= 25-10x+x^2\\
3x^2-10x+3 &= 0
\end{aligned}$$

Utilizamos la fórmula general para resolver la ecuación cuadrática obteniendo:

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4\cdot 3\cdot 3}}{2\cdot 3} = \frac{10 \pm 8}{6}.$$

Luego las soluciones son $x_1 = 3$ y $x_2 = \dfrac{1}{3}$.

- $2 - \log_3(\log_3(x^2 - 5x + 7)) = 1$

  Solución:

$$\begin{aligned}
2 - \log_3(\log_3(x^2 - 5x + 7)) &= 1\\
-\log_3(\log_3(x^2 - 5x + 7)) &= -1\\
\log_3(\log_3(x^2 - 5x + 7)) &= 1\\
\log_3(x^2 - 5x + 7) &= 3^1\\
\log_3(x^2 - 5x + 7) &= 3\\
x^2 - 5x + 7 &= 3^3\\
x^2 - 5x + 7 &= 27\\
x^2 - 5x - 20 &= 0
\end{aligned}$$

  Utilizamos la fórmula general para resolver la ecuación cuadrática obteniendo:

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-20)}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{105}}{2}$$

  Luego las soluciones son $x_1 = 7,62$ y $x_2 = -2,62$.

- $\log(3x + 1) - \log(2x - 3) = 1 - \log 5$

  Solución:

$$\begin{aligned}
\log(3x + 1) - \log(2x - 3) &= 1 - \log 5\\
\log(3x + 1) - \log(2x - 3) &= \log 10 - \log 5\\
\log\left(\frac{3x+1}{2x-3}\right) &= \log\left(\frac{10}{5}\right)\\
\frac{3x+1}{2x-3} &= 2\\
3x + 1 &= 4x - 6\\
x &= 7
\end{aligned}$$

- $\log x + \log(x+3) = 2\log(x+1)$

  Solución:

$$
\begin{aligned}
\log x + \log(x+3) &= 2\log(x+1)\\
\log(x(x+3)) &= \log(x+1)^2\\
x(x+3) &= (x+1)^2\\
x^2+3x &= x^2+2x+1\\
x &= 1
\end{aligned}
$$

- $4\log\dfrac{x}{5} + \log\dfrac{625}{4} = 2\log x$

  Solución:

$$
\begin{aligned}
4\log\frac{x}{5} + \log\frac{625}{4} &= 2\log x\\
\log\left(\frac{x}{5}\right)^4 + \log\frac{625}{4} &= \log x^2\\
\log\left(\frac{x^4}{625}\cdot\frac{625}{4}\right) &= \log x^2\\
\log\left(\frac{x^4}{4}\right) &= \log x^2\\
\frac{x^4}{4} &= x^2\\
x^4 &= 4x^2\\
x^4-4x^2 &= 0\\
x^2(x^2-4) &= 0\\
x_1 &= 0\\
x_2 &= 2\\
x_3 &= -2
\end{aligned}
$$

En este caso $x_1 = 0$ y $x_3 = -2$ indeterminan el logarítmo presente en la ecuación, por lo que las descartamos. Luego, la ecuación tiene solución única, $x = 2$.

- $(\log x)^2 + \log x - 2 = 0$

  Solución:

  Esta ecuación se reduce a resolver una ecuación cuadrática, mediante la sustitución $u = \log x$, obteniendo la ecuación:

$$u^2 + u - 2 = 0$$

  La que resolvemos usando la fórmula general:

$$u = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 + 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

  Por lo tanto, las soluciones son:

$$\begin{aligned} u_1 = 2 &\Longrightarrow \log x = 2 \Rightarrow x = 10^{-2} = \frac{1}{100} \\ u_2 = \frac{3}{2} &\Longrightarrow \log x = 1 \Rightarrow x = 10 \end{aligned}$$

- $\log_5 x + \dfrac{\log_5 125}{\log_5 x} = \dfrac{7}{2}$

  Solución:

$$\begin{aligned} \log_5 x + \frac{\log_5 125}{\log_5 x} &= \frac{7}{2} \quad 2 \cdot \log_5 x \\ 2 \cdot \log_5 x \cdot \log_5 x + 2 \cdot 3 &= 7 \cdot \log_5 x \end{aligned}$$

  Haciendo el cambio de variable $\log_5 x = z$, obtenemos la ecuación:

$$2z^2 - 7z + 6 = 0$$

  La que resolvemos usando la fórmula general:

$$z = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6}}{2 \cdot 2} = \frac{7 \pm 1}{4}.$$

  Obteniendo como soluciones:

$$\begin{aligned} z_1 = 2 &\Longrightarrow x_1 = 25 \\ z_2 = \frac{3}{2} &\Longrightarrow x_2 = 5^{\frac{3}{2}} = 5\sqrt{5} \end{aligned}$$

Ejemplo 68. *Determina la base del sistema de logaritmos en que el logaritmo de 567 excede al logaritmo de 7 en 4 unidades.*

Definimos x como la base del logaritmo:

$$\begin{aligned} \log_x 567 - \log_x 7 &= 4 \\ \log_x \frac{567}{7} &= 4 \\ \log_x 81 &= 4 \end{aligned}$$

Luego, $x = 3$, pues $3^4 = 81$.

3.6. Ecuaciones exponenciales

Una ecuación exponencial es aquella que posee la incógnita en al menos uno de los exponentes involucrados en las potencias que conforman la ecuación. Para resolverla, se utilizan las propiedades de las potencias, en particular la propiedad $a^x = a^y \iff x = y$. Debemos tener presente que no existe ninguna fórmula general que indique cómo resolver cualquier ecuación exponencial. Sólo la práctica ayuda a decidir, en cada caso, qué camino tomar. Generalmente, si los dos miembros de la igualdad tienen distinta base, debemos reducirlos a la misma base, una vez que tenemos la misma base en los dos miembros, igualamos los exponentes y resolvemos la ecuación.

Ejemplo 69. *Resolvamos las siguientes ecuaciones exponenciales igualndo bases e igualando exponentes:*

- $4^{2x-1} = 2^{8-x}$

  Solución:

  Igualamos las bases:

$$\begin{aligned} \left(2^2\right)^{2x-1} &= 2^{8-x} \\ 2^{2(2x-1)} &= 2^{8-x} \\ 2^{4x-2} &= 2^{8-x} \end{aligned}$$

  Igualamos los exponentes:

$$4x - 2 = 8 - x$$

  Resolviendo la ecuación de primer grado obtenemos la solución $x = 2$.

- $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{4x-3} = \left(\dfrac{81}{16}\right)^{-x+5}$

  $\boxed{\text{Solución:}}$

  Igualamos las bases:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{2}{3}\right)^{4x-3} &= \left(\frac{16}{81}\right)^{-1(-x+5)} \\
\left(\frac{2}{3}\right)^{4x-3} &= \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{4}\right]^{5-x} \\
\left(\frac{2}{3}\right)^{4x-3} &= \left(\frac{2}{3}\right)^{4(5-x)}
\end{aligned}$$

  Igualamos los exponentes:

$$\begin{aligned}
4x-3 &= 20-4x \\
x &= \frac{23}{8}
\end{aligned}$$

- $3 \cdot 27^{x-2} = 9^{x}$

  $\boxed{\text{Solución:}}$

  Igualamos las bases:

$$\begin{aligned}
3 \cdot 27^{x-2} &= 9^{x} \\
3 \cdot \left(3^{3}\right)^{x-2} &= \left(3^{2}\right)^{x} \\
3 \cdot 3^{3x-6} &= 3^{2x} \\
3^{3x-5} &= 3^{2x}
\end{aligned}$$

  Igualamos los exponentes:

$$\begin{aligned}
3x-5 &= 2x \\
x &= 5
\end{aligned}$$

- $125^{2x-5} = \left(\sqrt{5}\right)^x$

  Solución:

  Igualamos las bases:

$$\begin{aligned} 125^{2x-5} &= \left(\sqrt{5}\right)^x \\ \left(5^3\right)^{2x-5} &= \left(5^{\frac{1}{2}}\right)^x \\ 5^{6x-15} &= 5^{\frac{x}{2}} \end{aligned}$$

  Igualamos los exponentes:

$$\begin{aligned} 6x - 15 &= \frac{x}{2} \\ 12x - 30 &= x \\ 11x &= 30 \\ x &= \frac{30}{11} \end{aligned}$$

- $9^{2x-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+7}$

  Solución:

  Igualamos las bases:

$$\begin{aligned} 9^{2x-1} &= \left(\frac{1}{3}\right)^{x+7} \\ \left(3^2\right)^{2x-1} &= \left(3^{-1}\right)^{x+7} \\ 3^{4x-2} &= 3^{-x-7} \end{aligned}$$

  Igualamos los exponentes:

$$\begin{aligned} 4x - 2 &= -x - 7 \\ 5x &= -5 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Ejemplo 70. *Resolvamos las siguientes ecuaciones exponenciales factorizando por la potencia común.*

- $2^{x+1} + 2^x + 2^{x-1} = 28$

  Solución:

  Factorizamos por 2^x e igualamos las bases:

$$\begin{aligned}
2 \cdot 2^x + 2^x + 2^{-1} \cdot 2^x &= 28 \\
2^x \left(2 + 1 + \frac{1}{2}\right) &= 28 \\
2^x \cdot \left(\frac{7}{2}\right) &= 28 \\
2^x &= 28 \cdot \left(\frac{2}{7}\right) \\
2^x &= 8 \\
2^x &= 2^3 \\
x &= 3
\end{aligned}$$

- $5^{2x+1} - 3 \cdot 5^{2x-1} = 550$

  Solución:

  Factorizamos por 5^{2x} e igualamos las bases:

$$\begin{aligned}
5^{2x+1} - 3 \cdot 5^{2x-1} &= 550 \\
5^{2x} \cdot 5^1 - 3 \cdot 5^{2x} \cdot 5^{-1} &= 550 \\
5^{2x} \left(5 - \frac{3}{5}\right) &= 550 \\
5^{2x} \left(\frac{22}{5}\right) &= 550 \\
22 \cdot 5^{2x} &= 2750 \\
5^{2x} &= 125 \\
5^{2x} &= 5^3 \\
2x &= 3 \\
x &= \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

- $3^{x+2} - 4 \cdot 3^{x+1} = -729$

  $\boxed{\text{Solución:}}$

  Factorizamos por 3^x e igualamos las bases:

$$\begin{aligned}
3^x \cdot 3^2 - 4 \cdot 3^x \cdot 3 &= -729 \\
3^x \cdot (3^2 - 4 \cdot 3) &= -729 \\
3^x \cdot (9 - 12) &= -729 \\
3^x \cdot (-3) &= -729 \\
3^x &= \frac{-729}{-3} \\
3^x &= 243 \\
3^x &= 3^5 \\
x &= 5
\end{aligned}$$

Ejemplo 71. *Resolvamos las siguientes ecuaciones exponenciales haciendo uso de una incógnita auxiliar.*

- $3^{2x} - 3^{x+3} = 3^x - 27$

  $\boxed{\text{Solución:}}$

  Notemos que $3^{x+3} = 3^x \cdot 3^3 = 27 \cdot 3^x$, Luego:

$$\begin{aligned}
3^{2x} - 3^{x+3} &= 3^x - 27 \\
3^{2x} - 27 \cdot 3^x &= 3^x - 27 \\
3^{2x} - 27 \cdot 3^x - 3^x + 27 &= 0
\end{aligned}$$

  Notemos que $27 \cdot 3^x$ y 3^x son términos semejantes. Además $3^{2x} = (3^x)^2$. Obteniendo la siguiente ecuación cuadrática:

$$(3^x)^2 - 28 \cdot 3^x + 27 = 0$$

  Sea $3^x = z$. luego:

$$\begin{aligned}
z^2 - 28z + 27 &= 0 \\
(z - 27)(z - 1) &= 0 \\
z_1 = 27 &\Longrightarrow 3^x = 27 \Longrightarrow x_1 = 3 \\
z_2 = 1 &\Longrightarrow 3^x = 1 \Longrightarrow x_2 = 0
\end{aligned}$$

- $3 \cdot 9^{x-1} + 2 \cdot 3^{x-1} = 1$

  Solución:

$$\begin{aligned} 3 \cdot 9^{x-1} + 2 \cdot 3^{x-1} &= 1 \\ 3 \cdot (9)^x \cdot 9^{-1} + 2 \cdot 3^x \cdot 3^{-1} - 1 &= 0 \\ \frac{3}{9} \cdot \left(3^2\right)^x + \frac{2}{3} \cdot 3^x - 1 &= 0 \\ \frac{1}{3} \cdot (3^x)^2 + \frac{2}{3} \cdot 3^x - 1 &= 0 \\ (3^x)^2 + 2 \cdot 3^x - 3 &= 0 \end{aligned}$$

  Sea $3^x = z$, luego:

$$\begin{aligned} z^2 + 2z - 3 &= 0 \\ (z-1)(z+3) &= 0 \\ z_1 = 1 &\Longrightarrow 3^{x_1} = 1 \Longrightarrow x_1 = 0 \\ z_2 = -3 &\Longrightarrow 3^{x_2} = -3 \end{aligned}$$

  Notemos que la ecuación $3^{x_2} = -3$ no tiene solución pues una potencia de base positiva como 3^{x_2} no puede tomar un resultado negativo como -3.

- $2 - 3^{-x} + 3^{x+1} = 0$

  Solución:

$$2 - (3^x)^{-1} + 3 \cdot 3^x = 0$$

  Hacemos la sustitución $3^x = t$, luego:

$$\begin{aligned} 2 - \frac{1}{t} + 3t &= 0 \\ 2t - 1 + 3t^2 &= 0 \\ (3t-1)(t+1) &= 0 \\ 3t - 1 = 0 &\vee t + 1 = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos las siguientes soluciones:

$$\begin{aligned} t = \frac{1}{3} &\Longrightarrow 3^x = \frac{1}{3} \Longrightarrow x = -1 \\ t = -1 &\Longrightarrow 3^x = -1 \Longrightarrow \quad \text{No existe solución.} \end{aligned}$$

- $4^{x+1} + 2^{x+1} = 72$

  Solución:

$$\begin{aligned} 4^{x+1} + 2^{x+1} &= 72 \\ \left(2^2\right)^{x+1} + 2^{x+1} &= 72 \\ 2^{2x+2} + 2^{x+1} &= 72 \\ 2^{2x} \cdot 2^2 + 2^x \cdot 2^1 &= 72 \\ 4 \cdot (2^x)^2 + 2 \cdot (2)^x - 72 &= 0 \qquad\qquad \text{sea } 2^x = z \\ 4z^2 + 2z - 72 &= 0 \end{aligned}$$

  Usando la fórmula general se tiene:

$$z = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-72)}}{2 \cdot 4} = \frac{-2 \pm 34}{8}$$

$$\begin{aligned} z_1 &= -\frac{9}{2} \quad \text{No existe solución.} \\ z_2 &= 4 \Rightarrow x_2 = 2 \end{aligned}$$

  Solución:

- $4^x + 4^3 = 5 \cdot 2^{x+2}$

$$\begin{aligned} (2^2)^x + 64 &= 5 \cdot 2^x \cdot 2^2 \\ \left(2^2\right)^x + 64 &= 20 \cdot 2^x \\ (2^x)^2 - 20 \cdot 2^x + 64 &= 0 \qquad\qquad \text{sea } 2^x = z \\ z^2 - 20z + 64 &= 0 \\ (z-16)(z-4) &= 0 \\ z_1 &= 16 \Rightarrow x_1 = 4 \\ z_2 &= 4 \Rightarrow x_2 = 2 \end{aligned}$$

3.7. Sistemas de Ecuaciones

Un sistema de ecuaciones es un conjunto de dos o más ecuaciones que comparten dos o más incógnitas. Las soluciones de un sistema de ecuaciones son todos los valores que son válidos para todas las ecuaciones.
Un sistema de ecuaciones sobre puede clasificarse según sus tipos de soluciones:

- **Sistema Incompatible**: Sistema que no admite solución.
- **Sistema Compatible**: Sistema que admite una o más soluciones. Estos se clasifican en:
  - **Sistemas Compatibles Indeterminados**:Sistemas que tienen un número infinito de soluciones.
  - **Sistemas Compatibles Determinados**: Sistemas que admiten un conjunto finito de soluciones

Resolver un sistema de ecuaciones es encontrar las incóngintas que satisfacen las ecuaciones que lo conforman. Empezaremos viendo los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

3.7.1. Método de Reducción

1. Multiplicar una o ambas ecuaciones por números apropiados para obtener, en una de las incógnitas, coeficientes que difieran solo en el signo, de modo que la suma de los coeficientes de x o de y sea 0.
2. Sumar las ecuaciones nuevas con el fin de eliminar una de las incógnitas. La suma debe resultar en una ecuación con solo una variable.
3. Resolver la ecuación resultante.
4. Calcular el valor de la otra incógnita reemplazando en una de las ecuaciones originales o en alguna de las ecuaciones equivalentes de las que se hayan obtenido en el proceso.

Ejemplo 72. *Resolvamos el siguiente sistema de ecuaciones:* $\left.\begin{array}{rcl} x+3y & = & 5 \\ 2x-y & = & 3 \end{array}\right|$

Solución:

Amplificamos la segunda ecuación por 3 para que al sumarlas se reduzca la incógnita y. Así obtenemos el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{rcl} x+3y & = & 5 \\ 6x-3y & = & 9 \end{array}\right|$$

Al sumar ambas ecuaciones se obtiene que:

$$7x = 14.$$

Luego $x = 2$. Para encontrar el valor de la otra incógnita se reemplaza el valor encontrado en cualquiera de las ecuaciones. En la primera ecuación se obtiene que:

$$2 + 3y = 5$$

Luego $y = 1$. Finalmente, expresamos la solución como el par ordenado (x, y). $S = (2, 1)$.

3.7.2. Método de sustitución

1. Despejar una de las incógnitas en función de la otra, en una de las ecuaciones.
2. La expresión obtenida se sustituye en la otra ecuación, obteniendo una ecuación de primer grado con una incógnita.
3. Resolver la ecuación con una incógnita.
4. Calcular el valor de la otra incógnita reemplazando en una de las ecuaciones originales o en alguna de las ecuaciones equivalentes de las que se hayan obtenido en el proceso.

Ejemplo 73. *Resolvamos el sistema:* $\begin{array}{|rcl|} 2x - 3y & = & 2 \\ 5x + 2y & = & 4 \end{array}$

Solución

Desde la primera ecuación despejamos x obteniendo:

$$x = \frac{2 + 3y}{2}.$$

Reemplazando esta expresión en la segunda ecuación obtenemos:

$$5\left(\frac{2 + 3y}{2}\right) + 2y = 4$$

Resolviendo ésta ecuación de primer grado se obtiene que $y = \dfrac{-2}{19}$ y reemplazando en la primera ecuación se tiene que $x = \dfrac{16}{19}$. Luego $S = \left(\dfrac{16}{19}, \dfrac{-2}{19}\right)$

3.7.3. Resolución de sistemas con tres incógnitas

1. Usar el método de reducción para eliminar una de las incógnitas de cualquiera de las ecuaciones. El resultado será una ecuación de dos incógnitas.
2. Usar el método de reducción para eliminar la misma incógnita de cualquiera de las otras dos ecuaciones. El resultado será una nueva ecuación con las mismas incógnitas de la ecuación del paso anterior.
3. Resolver el sistema de dos incógnitas formado con las dos ecuaciones obtenidas en los dos pasos anteriores, obteniendo las soluciones para dos de las tres incógnitas.
4. Sustituir los dos valores anteriores en alguna de las ecuaciones originales con el objetivo de encontrar el valor de la tercera incógnita.

Ejemplo 74. *Resolvamos el siguiente sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas:*

$$\begin{array}{rcl|} 3x - y + z & = & 2 \\ x + 2y + 2z & = & 11 \\ 2x + y + z & = & 7 \\ \hline \end{array}$$

Solución:

Reduciremos una incógnita para obtener un sistema de dos ecuaciones con dos in'cógnitas. En este caso podemos sumar la primera ecuación con la tercera ecuación para reducir la incógnita y. Obteniendo la ecuación $5x + 2z = 9$. Para obtener otra ecuación con las mismas incógnitas, amplificaremos la primera por 2 para también reducir la incógnita y:

$$\begin{array}{rcl|} 6x - 2y + 2z & = & 4 \\ x + 2y + 2z & = & 11 \\ \hline \end{array}$$

Luego, sumamos estas ecuaciones obteniendo la ecuación $7x + 4z = 15$.

El nuevo sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas es:

$$\begin{array}{r} 5x + 2z = 9 \\ 7x + 4z = 15 \\ \hline \end{array}$$

Dicho sistema lo resolveremos por reducción amplificando la primera ecuación por (-2):

$$\begin{array}{r} -10x - 4z = -18 \\ 7x + 4z = 15 \\ \hline \end{array}$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos la ecuación $-3x = -3$. Luego, $x = 1$. Podemos reemplazar este valor en la ecuación $7x + 4z = 15$, obteniendo $z = 2$.
Luego reemplazamos $x = 1$ y $z = 2$ en cualquiera de las ecuaciones originales del sistema de 3 por 3 y encontraremos el valor de la tercera incógnita. En este caso expresamos la solución como el trio ordenado (x, y, z). $S = (1, -\frac{1}{2}, 2)$.

Ejemplo 75. *¿Cuántos litros de leche con un 10 % de materia grasa tenemos que mezclar con otra leche que tiene un 4 % de materia grasa para obtener 18 litros con un 6 % de materia grasa?*

Solución:

Sean x el número de litros de leche con un 10 % de materia grasa e y el número de litros de leche con un 4 % de materia grasa. Luego:

$$x + y = 18$$

Además la suma de los porcentajes de grasa de las leches a mezclar nos dará el porcentaje de grasa de la mezcla. Luego:

$$0,1x + 0,04y = 18 \cdot 0,06$$

Multiplicando la primera ecuación por 10 y la segunda ecuación por 100 obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 10x + 10y &= 180 \\ 10x + 4y &= 108 \end{aligned}$$

Restando las ecuaciones se obtiene que $6y = 72$, es decir $y = 12$. Como $x + y = 18$ se tiene que $x = 6$, luego para lograr la leche deseada se deben mezclar 6 litros de leche con un 10 % de materia grasa con 12 litros de leche con un 4 % de materia grasa.

3.8. Problemas de planteo

En la vida cotidiana existen problemas que pueden ser modelados usando ecuaciones. Resolver un problema de éste tipo consiste en encontrar la o las soluciones que satisfacen las ecuaciones involucradas, teniendo presente que dicha solución debe ser una respuesta lógica al problema.

Estrategias para resolver problemas de planteamiento

1. Lea el problema haciendo una lista de la información disponible.

2. Teniendo claro qué es lo que se debe determinar, introduzca una variable y defina lo que representa (indicando unidades si es necesario).

3. Formule una ecuación para la situación descrita en el problema.

4. Resuelva la ecuación.

5. Verifique que las soluciones sean pertinentes al contexto del problema.

6. Describa la solución obtenida.

Ejemplo 76. *En un avión viajan 330 pasajeros de tres países: españoles, alemanes y franceses. Hay 30 franceses más que alemanes y el número de españoles es el doble que el de franceses y alemanes juntos. ¿Cuántos hay de cada país?*

Solución

Sea x el número de alemanes, como hay 30 franceses más que alemanes hay $x + 30$ franceses. Por otra parte, como el número de españoles es el doble que el de franceses y alemanes juntos, se tiene que el número de españoles es $2(x + x + 30) = 4x + 60$ juntos. Luego planteamos la siguiente ecuación.

$$\begin{aligned} x + x + 30 + 4x + 60 &= 330 \\ 6x &= 240 \\ x &= 40 \end{aligned}$$

Por lo tanto, hay 40 alemanes, 70 franceses y 220 españoles.

Ejemplo 77. *En una ferretería se venden tornillos en cajas de tres tamaños: pequeña, mediana y grande. La caja grande contiene el doble que la mediana y la mediana 25 tornillos más que la pequeña. He comprado una caja de cada tamaño y en total hay 375 tornillos, ¿cuántos tornillos hay en cada caja?*

Solución

Supongamos que la caja pequeña contiene x tornillos, luego la caja mediana contiene $25 + x$, y la caja grande contienen $2(25 + x)$. Como he comprado una caja de cada tamaño, entonces tendremos $(x) + (25 + x) + 2(25 + x)$ y como en total tengo 375 tornillos podemos plantear la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} (x) + (25 + x) + 2(25 + x) &= 375 \\ x + 25 + x + 50 + 2x &= 375 \\ 4x &= 300 \\ x &= 75 \end{aligned}$$

Luego la caja pequeña tiene 75 tornillos, la caja mediana tiene 100 tornillos y 200 la caja grande.

Ejemplo 78. *Si el lado de un cuadrado es aumentado en 8 unidades, su perímetro se triplica. ¿Cuánto mide el lado original del cuadrado?*

Solución

Sea x el lado original del cuadrado, entonces el perímetro de este será $4x$. Como el lado del cuadrado es aumentado en 8 unidades, el lado del cuadrado nuevo será $x+8$, y su nuevo perímetro será el triple del perímetro anterior, es decir $12x$. Luego se tiene que:

$$\begin{aligned} 4(x+8) &= 12x \\ 4x+32 &= 12x \\ 32 &= 8x \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Finalmente el lado del cuadrado original es de 4 unidades.

Ejemplo 79. *En una parcela el número de nogales es el doble que el número de naranjos y el número de almendros es el triple que el de nogales, si los árboles son 180, calcule la cantidad de almendros que hay.*

Solución

Sea x el número de naranjos, entonces como el número de nogales es el doble, este será $2x$, luego el número de almendros es $6x$, pues este es el triple que del número de nogales. De este modo se tiene la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} x+2x+6x &= 180 \\ 9x &= 180 \\ x &= 20 \end{aligned}$$

Finalmente el número de almendros es 120.

Ejemplo 80. *Había algunos dulces en un frasco, Sara tomó la mitad de los dulces, entonces Tomás tomó la mitad de los dulces restantes en el frasco, después de eso, Clara tomó la mitad de los dulces que quedaban. Al final, quedaron 6 dulces en el frasco. ¿Cuántos dulces había en el frasco al comienzo?*

Solución

Supongamos que x es el número de dulces que había en el frasco, pudiendo expresar el problema con la siguiente ecuación:

$$\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 6 \Rightarrow x = 48$$

Ejemplo 81. *En una actividad de finalización de año organizada por una empresa asistió el doble de mujeres que hombres (adultos) y el triple de niños que hombres y mujeres juntos, si el total de personas es de 156 ¿cuantos niños, mujeres y hombres asistieron?*

Solución:

Sea x el número de hombres, $2x$ el número de mujeres y $9x$ el número de niños. Como la suma de hombres, mujeres y niños es 156, entonces

$$\begin{aligned} x + 2x + 9x &= 156 \\ 12x &= 156 \\ x &= 13 \end{aligned}$$

Por tanto habían 13 hombres, 26 mujeres y 117 niños que en total suman 156.

Ejemplo 82. *El sismólogo F. Richter (1900-1985) ideó en 1935 la Escala de Richter que compara la fuerza de los diferentes terremotos. En ella la magnitud R de un terremoto se define por: $R = log\left(\frac{A}{A_0}\right)$, donde A es la amplitud de la onda sísmica mayor y A_0 es una amplitud de referencia que corresponde a una magnitud $R = 0$.*
La magnitud del terremoto de Chillán del año 1939 fué de $7,8$ en la escala de Richter. El terremoto de San Francisco de 1979 fué de $5,95$ y el terremoto de Turquía de 2003 fué de $6,4$. ¿Cuántas veces mayor fue la amplitud de la onda en el terremoto de Chillán comparado con los terremotos de San Francisco y de Turquía?.

Solución

Establezcamos las siguientes igualdades:

$$
\begin{aligned}
7,8 &= \log\left(\frac{A_C}{A_0}\right) && \text{(Chillán)}\\
5,95 &= \log\left(\frac{A_F}{A_0}\right) && \text{(San Francisco)}\\
6,4 &= \log\left(\frac{A_T}{A_0}\right) && \text{(Turquía)}
\end{aligned}
$$

Es decir:

$$
\begin{aligned}
7,8 &= \log A_C - \log A_0 && \text{(Chillán)}\\
5,95 &= \log A_F - \log A_0 && \text{(San Francisco)}\\
6,4 &= \log A_T - \log A_0 && \text{(Turquía)}
\end{aligned}
$$

Comparemos la amplitud de Chillán con la amplitud de San Francisco.

$$
\begin{aligned}
7,8 &= \log A_C - \log A_0 && \text{(Chillán)}\\
5,95 &= \log A_F - \log A_0 && \text{(San Francisco)}
\end{aligned}
$$

Restamos ambas ecuaciones obteniendo:

$$
\begin{aligned}
1,85 &= \log A_C - \log A_F\\
1,85 &= \log\left(\frac{A_C}{A_F}\right)\\
\frac{A_C}{A_F} &= 70,79\\
A_C &= 70,79A_F
\end{aligned}
$$

Luego la onda en el terremoto de Chillán fue $70,79$ veces mayor que la onda en el terremoto de San Francisco.
Comparemos ahora la amplitud la onda en el terremoto de Chillán con la amplitud de la onda en el terremoto de San Turquía.

$$
\begin{aligned}
7,8 &= \log A_C - \log A_0 && \text{(Chillán)}\\
6,4 &= \log A_T - \log A_0 && \text{(San Francisco)}
\end{aligned}
$$

Restamos ambas ecuaciones obteniendo:

$$
\begin{aligned}
1,4 &= \log A_C - \log A_T\\
1,4 &= \log\left(\frac{A_C}{A_T}\right)\\
\frac{A_C}{A_F} &= 25,12\\
A_C &= 25,12A_F
\end{aligned}
$$

Luego la onda en el terremoto de Chillán fue $25,12$ veces mayor que la onda en el terremoto de Turquía.

Ejemplo 83. *La presión sanguínea sistólica normal de un niño se puede aproximar mediante la fórmula* $p = 19{,}4(\ln x) + 18$*. Donde* p *se mide en milímetros de mercurio y* x *se mide en libras. Determine el peso aproximado de un niño dado que su presión sanguínea sistólica es de 105 milímetros de mercurio.*

Solución

Dado que la presión es de 105 milímetros de mercurio se tiene que:

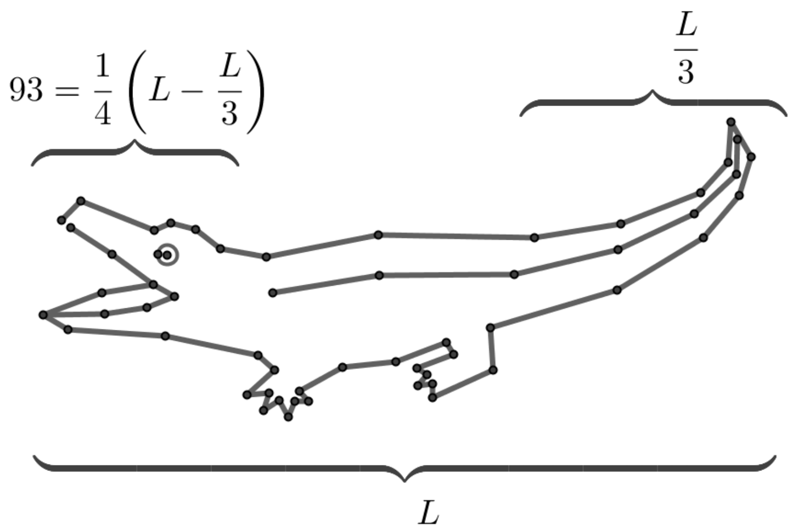
$$\begin{aligned} 105 &= 19,4 \ln x + 18 \\ 87 &= 19,4 \ln x \\ 4,48 &= \ln x \\ x &= e^{4,48} \\ x &= 88,64 \end{aligned}$$

Luego se tiene que un niño que pesa aproximadamente $88,64$ libras tiene presión sanguínea sistólica es de 105 milímetros de mercurio.

Ejemplo 84. *Una nueva especie de cocodrilo ha sido descubierta en África. La longitud de la cola es de un tercio de toda su longitud. Su cabeza es de 93 cm de largo y esta corresponde a la cuarta parte de la longitud del cocodrilo sin su cola. ¿Cuánto mide este cocodrilo en cm?*

Solución

Sea L la longitud del cocodrilo, entonces la longitud de la cola es $\frac{L}{3}$ y la de su cabeza es de $\frac{1}{4}\left(L - \frac{L}{3}\right)$.



Por lo tanto debemos resolver la siguiente ecuación :

$$\begin{aligned} 93 &= \frac{1}{4}\left(L - \frac{L}{3}\right) \\ 93 &= \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}L \\ 93 &= \frac{L}{6} \\ 558 &= L \end{aligned}$$

Finalmente, la longitud del cocodrilo es de 558 cm.

Ejemplo 85. *Si dos números suman 11 y su producto entre ellos es 18. ¿Cuáles son los números?*

Solución:

Sean x e y los números a determinar. Luego se tienen las siguientes ecuaciones

$$x \cdot y = 18 \quad (3.1)$$
$$x + y = 11 \quad (3.2)$$

Despejando la variables y desde la ecuación (2) reemplazando en (1) obtenemos

$$\begin{aligned} x\cdot(11-x) &= 18 \\ 11x - x^2 &= 18 \\ 0 &= x^2 - 11x + 18 \\ 0 &= (x-9)(x-2) \end{aligned}$$

- Si $x = 9 \Longrightarrow y = 11 - x = 2$
- Si $x = 2 \Longrightarrow y = 11 - x = 9$

Por lo tanto, las soluciones son los números 2 y 9.

Ejemplo 86. *Hay 48 pelotas colocadas en tres canastas de diferentes tamaños. La canasta más pequeña junto con la más grande, contienen dos veces el número de pelotas que contiene la canasta mediana. La canasta más pequeña contiene la mitad de número de pelotas que tiene la canasta del centro. ¿Cuántas pelotas hay en la canasta grande?*

Solución

Sea a el número de pelotas en la canasta pequeña, b el número de pelotas en la canasta mediana y c el número de pelotas en la canasta grande, entonces:

$$\begin{aligned} a + c &= 2b \\ a &= \frac{b}{2} \\ a + b + c &= 48 \end{aligned}$$

Al resolver el sistema de ecuaciones se obtiene que $a = 8$, $b = 16$ y $c = 24$.

Ejemplo 87. *Un automóvil sale de cierta ciudad a mediodía y se dirige hacia el este a* $40Km/h$. *A las 13 hrs. sale de la ciudad otro automóvil que viaja en la misma dirección a una velocidad de* $50Km/h$. *¿Cuantas horas tarda el segundo vehículo en alcanzar el primero?*

Solución:

Sea x las horas que demora el segundo vehículo en alcanzar el primero. Como éste viaja a $50Km/h$ la distancia recorrida hasta alcanzar el primer automóvil será $50 \cdot x$.
Ahora bien, como el primer vehículo lleva una hora más de viaje a una velocidad de $40KM/h$, la distancia que recorrió hasta ser alcanzado por el segundo vehículo será $40 \cdot (x + 1)$
Al igualar las distancias llegamos a la ecuación

$$50 \cdot x = 40 \cdot (x + 1)$$

Resolviendo esta ecuación lineal obtenemos que $x = 4$, es decir, el segundo vehículo alcanza al primero 4 horas después de salir de la ciudad.

Ejemplo 88. *Angélica tiene un salario base de* \$250000 *semanales. Además recibe una comisión del* 12 % *de lo que venda. La semana anterior, sus ingresos totales fueron de* \$520000 *¿Cuales fueron sus ventas totales durante esa semana?*

Solución:

Sea x el número de ventas totales de la semana. Luego, la comisión que obtuvo la semana anterior fue $0{,}12 \cdot x$ (12 % de x). Estableciendo la igualdad

$$250000 + 0{,}12x = 520000$$

Resolviendo esta ecuación obtenemos que $x = 2250000$ y por tanto, Angélica vendió un total de \$2250000 la semana anterior.

Ejemplo 89. *El producto de dos números es 36 y la suma es 37. ¿Cuál es la diferencia positiva entre ellos?*

Solución

Sean x y $37 - x$ los números buscados, por lo tanto $x \cdot (37 - x) = 36$, al resolver esta ecuación cuadrática se obtienen como soluciones 1 y 36. Al considerar $x = 1 \Longrightarrow 37 - x = 36$, al considerar $x = 36 \Longrightarrow 37 - x = 1$ y en ambos casos la diferencia positiva es 35.

Ejemplo 90. *Juan tiene una lección de piano dos veces en la semana y Alejandra tiene una lección de piano cada dos semanas. En un momento determinado, Juan tiene 15 lecciones más que Alejandra. ¿Cuántas semanas de lecciones lleva?*

Solución

Observemos que por cada lección de Alejandra Juan toma 4 lecciones, por lo que la cantidad de lecciones que toma Alejandra y la cantidad de lecciones que toma Juan están en la razón $\frac{1}{4}$.
Sea x la cantidad de lecciones que ha tomado Alejandra queremos que Juan haya tomado $x + 15$ lecciones, por lo que debe ocurrir que:

$$\frac{1}{4} = \frac{x}{x+15}$$

Resolviendo la ecuación se tiene $x = 5$, o sea Alejandra ha tomado 5 lecciones, es decir han transcurrido 10 semanas, por lo tanto Juan ha tomado 20 lecciones.

Ejemplo 91. *El Capitán Sparrow y su tripulación pirata desenterraron varias monedas de oro. Ellos dividen las monedas entre sí de manera que cada persona recibe el mismo número de monedas. Si hubiera cuatro piratas menos en la tripulación, entonces cada persona recibiría 10 monedas más. Sin embargo, si hubiera 50 monedas menos, cada persona recibiría 5 monedas menos. ¿Cuántas monedas desenterraron?*

Solución

Sea x el número de monedas por tripulantes, y el número de tripulantes. Entonces $x \cdot y$ será el número total de monedas. Con los datos se puede plantear el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} (y-4)\cdot(x+10) &= x\cdot y \\ y\cdot(x-5) &= x\cdot y - 50 \end{aligned}$$

Dicho sistema tiene como solución $x = 15$ e $y = 10$. Finalmente se desenterraron $x \cdot y = 150$ monedas.

Ejemplo 92. *Un cateto de un triángulo rectángulo excede al otro en 7 unidades. Sabiendo que el área es 30. ¿Cuánto mide la hipotenusa?*

Solución:

Sea x el cateto menor involucrado en el problema, luego se cumple que:

$$\begin{aligned} \frac{x\cdot(x+7)}{2} &= 30 \\ x^2+7x &= 60 \\ x^2+7x-60 &= 0 \\ (x+12)(x-5) &= 0 \end{aligned}$$

Con lo cual la única solución admisible es $x = 5$ y por lo tanto los catetos del triángulo rectángulo son 5 y 12. Aplicando el teorema de pitágoras concluimos que la hipotenusa mide 13 unidades.

Ejemplo 93. *Ana ha caminado 8 kilómetros con una velocidad de 4km/h. Ahora ella correrá algún tiempo con una velocidad de 8 km/h. ¿Cuánto tiempo le queda por correr para que su velocidad promedio global sea de 5 km/h?*

Solución

Si Ana ha caminado 8 kilómetros a 4 km/h, entonces ha caminado durante 2 horas, y aún le queda por recorrer t horas a una velocidad de 8 km/h, es decir, le queda por recorrer $8t$ km luego se cumple que:

$$\frac{8+8t}{2+t} = 5$$

Por lo que $t = \frac{2}{3}\text{hr} = 40$ min.

Ejemplo 94. *Un jugador de ajedrez jugó 40 partidos y acumuló 25 puntos (una victoria cuenta como un punto, un empate cuenta como medio punto, y una derrota cuenta como cero puntos). ¿Cuál es la diferencia entre los partidos ganados y los partidos perdidos?*

Solución

Sea G el número de partidos ganados, E el número de partidos empatados, y P el número de partidos perdidos, entonces:

$$\begin{aligned} G + E + P &= 40 \\ G + \frac{E}{2} &= 25 \end{aligned}$$

Restando ambas ecuaciones obtenemos que:

$$P + E - \frac{E}{2} = 40 - 25 \Longrightarrow P + \frac{E}{2} = 15 \tag{3}$$

Finalmente, obtenemos que $G - P = 10$.

Ejemplo 95. *Las trillizas Javiera, Daniela y Luisa querían comprar sombreros idénticos. Sin embargo, a Javiera le faltaba un tercio del precio, a Daniela un cuarto y a Luisa un quinto. Cuando los sombreros estuvieron \$ 940 más baratos, las hermanas juntaron sus ahorros y cada una de ellas compró un sombrero. No les sobró ni un peso. ¿Cuál era el precio de un sombrero antes de que su precio disminuyera?*

Solución

Sea P el precio del sombrero antes de bajar, entonces:

- Si a Javiera le faltaba $\frac{1}{3}$ de P, entonces tenía $\frac{2}{3}P$.
- Si a Daniela le faltaba $\frac{1}{4}$ de P, entonces tenía $\frac{3}{4}P$.
- Si a Luisa le faltaba $\frac{1}{5}$ de P, entonces tenía $\frac{4}{5}P$.

Cuando los sombreros estuvieron \$ 940 más baratos, es decir cuando costaban $\$p-940$, cada una de ellas compró un sombrero, luego, cuando juntaron sus ahorros obtuvieron $\$3(P-940)$. Esta situación puede ser representada por la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}P+\frac{3}{4}P+\frac{4}{5}P &= 3(P-940)\\ \frac{133}{60}P &= 3P-2820\\ P &= 3600\end{aligned}$$

Luego, el precio del sombrero antes de que este disminuyera era de \$3600.

Ejemplo 96. *Sean p, q, r números enteros positivos y $p+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{r}}=\frac{25}{19}$. ¿Cuál es el valor del producto pqr?*

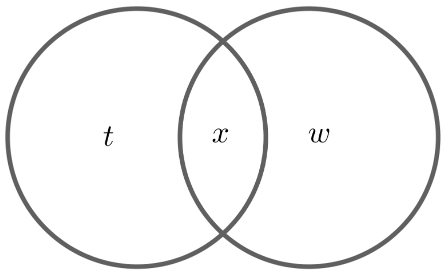
Solución

$$\begin{aligned}p+\frac{1}{q+\frac{1}{r}} &= \frac{25}{19}\\ p+\frac{1}{\frac{qr+1}{r}} &= \frac{25}{19}\\ p+\frac{r}{qr+1} &= \frac{25}{19}\\ \frac{p(qr+1)+r}{qr+1} &= \frac{25}{19}\end{aligned}$$

De este modo $qr+1=19 \Longrightarrow qr=18$ y $p(qr+1)+r=19p+r=25$, por lo tanto, $p=1$. Finalmente, el valor de $pqr=18$

Ejemplo 97. *Liz y María compiten en la resolución de problemas. A cada una de ellas se les da la misma lista de 100 problemas. La primera en resolver cualquiera de estos problemas obtiene 4 puntos, mientras que la segunda en resolverlo obtiene 1 punto. Liz resolvió 60 problemas, y María también resolvió 60 problemas. Juntas, consiguieron 312 puntos. ¿Cuántos problemas fueron resueltos por ambas?*

Solución



Sea t la cantidad de problemas que resuelve solamente Liz, w la cantidad de problemas que resuelve solamente María y x la cantidad de problemas que resuelve tanto Liz como María.

De este modo Liz ha resuelto $t + x = 60$ problemas y María ha resuelto $w + x = 60$ problemas. Por los $t+w$ problemas resueltos por solo una de ellas han acumulado $4t+4w$ puntos, por lo problemas resueltos por ambas han acumulado $5x$ puntos (la primera en resolver cualquiera de estos problemas obtiene 4 puntos, mientras que la segunda en resolverlo obtiene 1 punto).

Como juntas consiguieron 312 puntos, se tiene que:

$$4t + 4w + 5x = 312$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned} t + x = 60 &\Longrightarrow t = 60 - x \\ w + x = 60 &\Longrightarrow w = 60 - x \end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned} 4t + 4w + 5x &= 312 \\ 240 - 4x + 240 - 4x + 5x &= 312 \\ -3x &= -168 \\ x &= 56 \end{aligned}$$

Finalmente, 56 problemas fueron resueltos por Liz y María a la vez.

3.9. Ejercicios propuestos

A) Resolver las siguientes ecuaciones:

346. $(x-7)^2-(1-x^2)=2(3x+15)$

347. $2(x-2)^2+3x=2x^2-(x+1)(x-1)$

348. $\dfrac{7x-4}{2}-\dfrac{3x-2}{5}+2=\dfrac{6x-3}{4}$

349. $2x^2-2(x+1)(x-1)=(x-3)^2-(x+2)(x-5)+1$

350. $9x-12-(2x+3)-(3x-4)=9$

351. $(x+5)(x-3)=(x-8)(x+1)$

352. $2(3m-1)^2+(3m-1)=1$

353. $u^4+5u^3=-6u^2$

354. $(2x-9)^2+(3x-14)^2=(x-1)^2$

355. $\dfrac{x^2+1}{x+2}-\dfrac{3}{2}=\dfrac{x^2+3}{x-2}-\dfrac{11x^2}{2x^2-8}$

356. $\dfrac{2}{3}x^2-\sqrt{8}x+3=0$

357. $\dfrac{7}{2x}-\dfrac{8}{3x}+\dfrac{9}{4x}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{31-7x}{6x}$

358. $x^4-x^2-12=0$

359. $(2x+1)^2=4x+1$

360. $\dfrac{x^2-6}{2}-\dfrac{x^2+4}{4}=5$

361. $3x^2+2x=3+2x$

362. $\dfrac{2x^2-1}{2}-\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{1-2x}{6}$

363. $\left(3x-\dfrac{1}{2}\right)^2+3x=\dfrac{5}{4}$

364. $\dfrac{x}{3}+\dfrac{3}{x}=\dfrac{x}{12}+\dfrac{12}{x}$

365. $\dfrac{3^{2x}+9}{3^x}=10$

366. $\dfrac{2x}{3}+\dfrac{3}{2x}=\dfrac{13}{6}$

367. $\dfrac{x+4}{x+5}-\dfrac{x+2}{x+3}=\dfrac{1}{24}$

368. $\dfrac{5x-8}{x-1}=\dfrac{7x-4}{x+2}$

B Resuelva los siguientes sitemas de ecuaciones:

369.
$$\begin{aligned}2x+3y&=-1\\3x+4y&=0\end{aligned}$$

370.
$$\begin{aligned}\frac{x+y}{2}&=x-1\\\frac{x-y}{2}&=y+1\end{aligned}$$

371.
$$\begin{aligned}\frac{x+3y}{2}&=5\\3x-y&=5y\end{aligned}$$

372.
$$\begin{aligned}3x+2y&=7\\4x-3y&=-2\end{aligned}$$

373.
$$\begin{aligned}\frac{x}{2}+\frac{y}{3}&=4\\\frac{x}{3}+y&=1\end{aligned}$$

374.
$$\begin{aligned}\frac{x+1}{3}+\frac{y-1}{2}&=0\\\frac{x+2y}{3}-\frac{x+y+2}{4}&=0\end{aligned}$$

375.

$$\begin{aligned} \frac{x+3y}{2} &= 5 \\ 4 - \frac{2x-y}{2} &= 1 \end{aligned}$$

376.

$$\begin{aligned} 5x - 3y &= 6 \\ 3x + 4y &= 21 \end{aligned}$$

377.

$$\begin{aligned} 2x + y &= 1 \\ x + y &= 4 \\ x + y + z &= 6 \end{aligned}$$

C Resuelva las siguientes ecuaciones irracionales

378. $\sqrt{2x + \sqrt{x+3}} = 2$

379. $\sqrt[3]{\sqrt{x+2}} = 2$

380. $\sqrt{(x+1)^2 + (x-1)^2} = 2$

381. $\dfrac{\sqrt{5+2\sqrt{x}}}{\sqrt{5-2\sqrt{x}}} = 2$

382. $\sqrt{12 + \sqrt{6x-1}} = 4$

383. $\sqrt{x+4} - \sqrt{x-3} = 1$

384. $\dfrac{4x}{3} = \sqrt{100 - x^2}$

385. $\dfrac{\sqrt{x+6}}{\sqrt{x+3}} = \dfrac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+1}}$

386. $\dfrac{5}{\sqrt{x+5} - \sqrt{x}} = 1$

387. $\sqrt{\dfrac{2x^2 - 2x + 5}{2}} = x$

388. $\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-x} = 1$

389. $\dfrac{3 + \sqrt[3]{27x}}{3 - \sqrt[3]{27x}} = 3$

D Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales.

390. $4^{2x+1} - 3 \cdot 4^x = 10$

391. $2^{1-x^2} = \dfrac{1}{8}$

392. $3^x + 3^{2x} = 2$

393. $2^{2x-1} = 4$

394. $\sqrt[2x-1]{3^{x-3}} = \sqrt{27}$

395. $\dfrac{4}{2^{x-1}} = 4 \cdot 2^{x+1} - 63$

396. $6^x - 9 \cdot 6^{-x} + 8 = 0$

397. $4^{x^2-6x} = 16384$

398. $4^{\sqrt{x+1}} - 2^{\sqrt{x+1}+2} = 0$

399. $3^{x+2} + 3^{x+1} + 3^x + 3^{x-1} = 120$

400. $3^{2(x+1)} - 18 \cdot 3^x + 9 = 0$

401. $2^{x+1} + 2^x + 2^{x-1} = 28$

402. $3^{1-x} - 3^x = 2$

403. $2 - 3^{-x} + 3^{x+1} = 0$

404. $5^{2x+1} - 3 \cdot 5^{2x-1} = 550$

405. $2 - 3^{-x} + 3^{x+1} = 0$

406. $2^{2x} - 10 \cdot 2^x + 2^4 = 0$

E) Resolver las siguientes ecuaciones logarítmicas:

407. $\log(x-2)=2$

408. $\log_3(\log_5 x)=-1$

409. $\log(x+6)-\log(2x-1)=0$

410. $\log_3(x+2)+\log_3(x-4)=3$

411. $\log_{10}16-2\log_{10}x=\log_{10}100$

412. $3\log x-\log 30=\log\dfrac{x^2}{5}$

413. $4\log\left(\dfrac{x}{5}\right)+\log\left(\dfrac{625}{4}\right)=2\log x$

414. $2\log x-2\log(x+1)=0$

415. $\log_3\left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)=2$

416. $\log x=\dfrac{2-\log x}{\log x}$

417. $2+\log_2(1+\log_3(x-1))=3$

418. $\log(25-x^3)-3\log(4-x)=0$

419. $\log_{x^2+1}\left(\dfrac{x^4+2}{x^2+1}\right)=1$

420. $\dfrac{\log(35-x^3)}{\log(5-x)}=3$

421. $\log_3(3^x-8)=2-x$

422. $\log_5 x+\dfrac{\log_5 125}{\log_5 x}=\dfrac{7}{2}$

423. $(\log_3 x)^2+\log_3 x^2-\log_3 27=0$

F Resuelva los problemas de planteo que involucran ecuaciones cuadráticas:

424. *El área de una cancha rectangular de fútbol es 1600 metros cuadrados. Si el largo de la cancha es de 60 metros más que el ancho, ¿cuál es el ancho de la misma?*

425. *Dentro de 11 años la edad de Pedro será la mitad del cuadrado de la edad que tenía hace 13 años. Calcula la edad de Pedro.*

426. *Los tres lados de un triángulo rectángulo son proporcionales a los números 3, 4 y 5. Halla la longitud de cada lado sabiendo que el área del triángulo es 24 metros cuadrados.*

427. *Dos números naturales se diferencian en dos unidades y la suma de sus cuadrados es 580. ¿Cuáles son esos números?*

428. *Halla un número entero sabiendo que la suma con su inverso es la fracción* $\dfrac{26}{5}$

429. *Los lados de un triángulo rectángulo tienen por medidas en centímetros tres números pares consecutivos. Halla los valores de dichos lados. (Utilice Pitágoras)*

430. *Un terreno rectangular mide 15 metros de largo y 8 metros de ancho. ¿En cuántos metros habría que disminuir, simultáneamente, el largo y el ancho para que la diagonal sea 4 metros menor?.*

431. *Hallar dos números consecutivos cuya suma sea 17 y su producto 72.*

432. *Un fabricante de envases de lata desea construir una lata cilíndrica de 20cm de altura y capacidad de 300cm cúbicos. Hallar el radio de la lata.*

433. *El doble del cuadrado de un número entero excede en siete al quíntuple del número. ¿Cual es el número?*

434. *La suma de un numero entero con su reciproco es de 26/5 . Hallar el número.*

435. *Se reparten 76 balones entre 3 grupos, el segundo recibe 3 veces el número de balones que el primero y el tercero recibe 4 balones menos que el primero ¿cuántos balones recibe cada grupo?*

436. *Un número entero excede a otro en 4 unidades. Si el producto de ambos es 285, ¿cuáles son los números?.*

437. *El numerador de una fracción tiene una unidad menos que el denominador. Aumentando el numerador en 14 y el denominador en 4, el valor de la fracción se duplica. ¿Cuál es la fracción?.*

438. *El largo de una sala rectangular es 3 metros mayor que el ancho. Si el ancho aumenta 3 metros y el largo aumenta 2 metros, el área se duplica. Encontrar el área original de la sala.*

439. *En las reparaciones de un edificio, el número de carpinteros duplica al número de electricistas. Al mes, cada carpintero gana \$280000 y cada electricista \$240000. Si en un mes la suma de los sueldos de todos ellos es \$4800000, ¿Cuántos carpinteros hay?*

440. *Dos buses transportan* 120 *pasajeros, si del bus con más pasajeros se trasladan los* $\frac{2}{5}$ *de ellos al otro bus, ambos tendrían igual número de pasajeros. ¿Cuántos pasajeros transporta cada bus?*

441. *En el Estadio Nacional un hincha de la"Amenaza Verde"subió las gradas de 2 en 2 y bajó de 3 en 3; dando un total de 90 pasos. ¿Cuántos pasos empleó en la subida?*

442. *Un grupo de estudiantes tuvo una prueba. Si cada niño hubiese tenido 3 puntos más en su prueba, entonces el promedio del curso hubiese sido 1,2 puntos más alto de lo que fue. ¿Cuál es el porcentaje de niñas en el curso?*

443. *Considere un rectángulo, en el que uno de sus lados mide 5 unidades. El rectángulo puede ser cortado en un cuadrado y un rectángulo de lados enteros, uno de los cuales tiene área 4. ¿Cuántos rectángulos existen que cumplan con esto?*

3.9.1. Soluciones

A) **346** $x_1 = 1, \quad x_2 = 9$

347 $\emptyset$

348 $x = -\frac{23}{28}$

349 $x = 6$

350 $x = 5$

351 $x = \frac{7}{9}$

352 $x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{1}{2}$

353 $u_1 = -3, \quad u_2 = -2, \quad u_3 = 0$

354 $x_1 = 6, \quad x_2 = \frac{23}{6}$

355 $x = -1$

356 $x = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

357 $x = \frac{5}{2}$

358 $x_1 = 2, \quad x_2 = -2$

359 $x = 0$

360 $x_1 = 6, \quad x_2 = -6$

361 $x = \pm 1$

362 $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

363 $x = \pm \frac{1}{3}$

364 $x = \pm 6$

365 $x_1 = 0, \quad x_2 = 2$

366 $x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{9}{4}$

367 $x_1 = -11, \quad x_2 = 3$

368 $x_1 = 4, \quad x_2 = \frac{5}{2}$

B) **369** $x = 4, \; y = -3$

370 $x = 2, \; y = 0$

371 $x = 4, \; y = 2$

372 $x = 1, \; y = 2$

373 $x = \frac{66}{7}, \; y = -\frac{15}{7}$

374 $x = -\frac{13}{7}, \; y = \frac{11}{7}$

375 $x = 4, \; y = 2$

376 $x = 3, \; y = 3$

377 $x == -3, \; y = 7, \; z = 2$

C) **378** $x = 1, x = \frac{13}{4}$

379 $x = 62$

380 $x = \pm 1$

381 $x = \frac{9}{4}$

382 $x = \frac{17}{6}$

383 $x = 12$

384 $x = 6$

385 $x = 3$

386 $\emptyset$

387 $\frac{5}{2}$

388 $x = 0$

389 $x = \frac{1}{8}$

D) **390** $x = \frac{1}{2}$

391 $x = \pm 2$

392 $x = 0$

393 $x = \frac{3}{2}$

394 $x = -\frac{3}{4}$

395 $x = 3$

396 $x = 0$

397 $x_1 = 7, \; x_1 = -1$

398 $x = 3$

399 $x = 2$

400 $x = 0$

401 $x = 3$

402 $x =$

403 $x = -1$

404 $x = \frac{3}{2}$

405 $x = -1$

406 $x = 1, \quad x = 3$

E) **407** $x = 102$

408 $x = \sqrt[3]{5}$

409 $x = 7$

410 $x = 7$

411 $x = \frac{2}{5}$

412 $x = 6$

413 $x = 2$

414 Sin solución

415 $x = \frac{10}{17}$

416 $x_1 = 10,\ x_2 = 10^{-2}$

417 $x = 4$

418 $x = 2 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

419 $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

420 $x_1 = 2,\ x_2 = 3$

421 $x = 2$

422 $x_1 = 25, x_2 = 5\sqrt{5}$

423 $x_1 = 3, x_2 = \dfrac{1}{27}$

F) **424** 20 m

425 21 años

426 6 m. 8 m. y 10 m.

427 16 y 18

428 5

429 6, 8, 10

430 3 metros

431 8 y 9

432 $\sqrt{\dfrac{15}{\pi}}$

433 -1

434 5

435 16, 48 y 12 balones respectivamente

436 15 y 19

437 $\frac{7}{8}$

438 40 m^2

439 12 carpinteros.

440 100 y 20 pasajeros respectivamente

441 54

442 60 %

443 60 %

4

Inecuaciones

4.1. Axiomas de orden

Este grupo de axiomas establece un orden en el conjunto de los números reales. Según esto podremos decidir si un número es mayor, menor o igual que otro. Esta relación de orden se introduce a partir del concepto de "*positivo*". Consideremos la existencia de un subconjunto de $\mathbb{R}$, denotado por $\mathbb{R}^+$, llamado conjunto de **números reales positivos** caracterizado por los siguientes axiomas,

O.1. Clausura

$\mathbb{R}^+$ es cerrado para la adición y multiplicación. Es decir, para todo $a, b \in \mathbb{R}^+$,

(i) $a + b \in \mathbb{R}^+$ (ii) $a \cdot b \in \mathbb{R}^+$

O.2. Tricotomía

Para todo $a \in \mathbb{R}$, tenemos solo una de las siguientes posibilidades:

(i) $a \in \mathbb{R}^+$. (ii) $a = 0$. (iii) $-a \in \mathbb{R}^+$.

Como el conjunto de los números reales es ordenado, entonces sus elementos los podemos comparar usando las siguientes desigualdades:

Menor que: lo que denotamos $a < b$, si la diferencia $b - a$ es un número positivo, es decir,

Menor que: lo que denotamos $a < b$, si la diferencia $b - a$ es un número o positivo o nulo

La relación $a < b$ es equivalente a la relación $b > a$ que se lee "*b es mayor que a*". De igual forma $a \leq b$ es equivalente con $b \geq a$, cuya lectura es "*b es mayor o igual que a*". Con todo lo anterior, un número $b \in \mathbb{R}$ es positivo si y sólo si $b > 0$. Si $b < 0$ se dice **negativo**. Si $b \geq 0$ se dice **no Negativo**.

Teorema 1.1

Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, entonces:

1. Dados a y b se verifica solo una de las alternativas $a < b$, $b = a$ o $b < a$.
2. $a < b$ y $b < c \Rightarrow a < c$.
3. $a < b \Rightarrow a + c < b + c$.
4. $a < b$ y $c < d \Rightarrow a + c < b + d$.
5. $a < b$ y $c > 0 \Rightarrow ac < bc$.
6. $a < b$ y $c < 0 \Rightarrow ac > ac$.
7. $0 < a < b$ y $0 < c < d \Rightarrow ac < bd$.
8. $0 < a < b \Rightarrow b^{-1} < a^{-1}$.

Para las desigualdades simultaneas $a < b$ y $b < c$ escribimos $a < b < c$. De igual forma se interpretan $a \leq b < c$, $a < b \leq c$ y $a \leq b \leq c$.

4.2. Intervalos

Definición 2.1: Intervalos

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a < b$. Definimos,

1. **Intevalo abierto** de extremos a y b al subconjunto de $\mathbb{R}$

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}.$$

2. **Intervalo cerrado** de extremos a y b al subconjunto de $\mathbb{R}$

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}.$$

3. **Intervalo semiabierto o semicerrado** de extremos a y b a los subconjuntos de $\mathbb{R}$

   a) $[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$.

   b) $(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$.

4. **Intevalo Infinito** a los subconjuntos de $\mathbb{R}$

   a) $(a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$.

   b) $[a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$.

   c) $(-\infty,a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$.

   d) $(-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$.

   e) $(-\infty,\infty) = \{x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$.

4.3. Inecuaciones

Una inecuación es una expresión que compara dos cantidades que contienen una incógnita.
Decimos que un número es una solución de una inecuación si obtenemos una desigualdad que se cumple cuando sustituimos la incógnita de la inecuación por este número. El conjunto de todas las soluciones de una inecuación se llama conjunto solución. Así, resolver una inecuación es encontrar su conjunto solución.
La forma de resolver una inecuación es similar a la que usamos para resolver ecuaciones lineales con una incógnita, pero con una diferencia importante, pues cuando Multiplicamos ambos miembros de la inecuación por un mismo número negativo, debemos invertir el signo de desigualdad.
Para resolver una inecuación hacemos uso de las propiedades de las desigualdades y/o de la ley de tricotomía.

Ejemplo 98. . *Resolvamos las siguientes inecuaciones:*

- $3x + 8 \geq 5x - 4$

  Solución:

  Despejando x tenemos:

$$\begin{aligned} 3x - 5x &\geq -4 - 8 \\ -2x &\geq -12. \end{aligned}$$

Multiplicando por $-\frac{1}{2}$ y teniéndo presente que al multiplicar por un número negativo la desigualdad se invierte obtenemos:

$$x \leq 6.$$

Es decir, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 6\} = (-\infty, 6]$.

- $\dfrac{x+3}{5-x} + \dfrac{x-5}{x+5} + \dfrac{2x^2+30}{x^2-25} \geq 2$

  Solución:

  Notemos que en una inecuación con fracciones algebraicas no podemos multiplicar por el mínimo común múltiplo de los denominadores, pues como estos contienen incógnitas no podemos asegurar que son positivos, recordemos que si multiplicamos una ecuación por un número negativo debemos invertir la desigualdad. Luego agrupamos todas las expresiones en el miembro izquierdo de la inecuación:

$$\begin{aligned}
\frac{x+3}{5-x} + \frac{x-5}{x+5} + \frac{2x^2+30}{x^2-25} &\geq 2 \\
\frac{x+3}{5-x} + \frac{x-5}{x+5} + \frac{2x^2+30}{x^2-25} - 2 &\geq 0 \\
\frac{1}{x+5} &\leq 0 \\
x+5 &< 0 \\
x &< -5
\end{aligned}$$

  Luego la solución es:

$$S = (-\infty, -5)\,.$$

- $x^2 + x - 2 > 0$

  Solución:

  La inecuación es equivalente a $(x+2)(x-1) > 0$, ahora de los axiomas de orden tenemos que las únicas alternativas para que el producto de dos cantidades sea positivo, es que ambas tengan el mismo signo. Por lo cual tenemos los siguientes casos:

  - $x+2 > 0 \wedge x-1 > 0$ implica $x > -2 \wedge x > 1$, por tanto $x > 1$, es decir, la solución al caso es $S_1 = (1, \infty)$

- $x+2<0 \wedge x-1<0$ implica $x<-2 \wedge x<1$, por tanto $x<-2$, es decir, la solución al caso es $S_2=(-\infty,-2)$

Por lo tanto, la solución a la inecuación es:

$$S=S_1 \cup S_2=(-\infty,-2) \cup (1,\infty).$$

Notemos que para la inecuación:

$$(x+2)(x-1) > 0.$$

Podemos realizar el análisis anterior usando la siguinete tabla de signos:

	$(-\infty,-2)$	$(-2,1)$	$(1,\infty)$
$x+2$	$-$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$
$(x+2)(x-1)$	$(+)$	$(-)$	$(+)$

Concluyendo que la expresión $(x+2)(x-1)$ es positiva en el primer y tercer intervalo, obteniendo como solución:

$$S = (-\infty,-2) \cup (1,\infty).$$

- $(x-2)^3 < 4(7x-2)$.

$\boxed{\text{Solución:}}$

$$\begin{aligned}
(x-2)^3 &< 4(7x-2)\\
x^3-6x^2+12x-8 &< 28x-8\\
x^3-6x^2-16x &< 0\\
x(x^2-6x-16) &< 0\\
x(x-8)(x+2) &< 0
\end{aligned}$$

Vemos que la expresión es cero para $x = -2$, $x = 0$ y $x = 8$. Con esto construimos la siguiente tabla donde analizamos el signo que tiene cada factor en cada intervalo,

	$(-\infty,-2)$	$(-2,0)$	$(0,8)$	$(8,\infty)$
x	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-8$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x+2$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x(x-8)(x+2)$	$(-)$	$(+)$	$(-)$	$(+)$

Por lo tanto, la solución es:

$$S = (-\infty,-2) \cup (0,8)$$

- $\dfrac{x+4}{x+1} \leq \dfrac{2}{x-1}$.

Solución:

Para encontrar el conjunto solución de la inecuación dada procedemos como sigue,

$$\begin{aligned}
\frac{x+4}{x+1} &\leq \frac{2}{x-1} \\
\frac{x+4}{x+1} - \frac{2}{x-1} &\leq 0 \\
\frac{x^2+x-6}{(x+1)(x-1)} &\leq 0 \\
\frac{(x+3)(x-2)}{(x+1)(x-1)} &\leq 0
\end{aligned}$$

Vemos que el numerador de la última fracción se anula solo en $x=-3$ y $x=2$, por otra parte, el denominador solo se hace cero para $x=-1$ y $x=1$. Con esto construimos la siguiente tabla donde analizamos el signo que tiene cada factor en cada intervalo,

	$(-\infty,-3)$	$(-3,-1)$	$(-1,1)$	$(1,2)$	$(2,\infty)$
$x+3$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$\dfrac{(x+3)(x-2)}{(x+1)(x-1)}$	$(+)$	$(-)$	$(+)$	$(-)$	$(+)$

Como la desigualdad no es estricta, se consideran en el conjunto solución los puntos que anulan el numerador. Así, tenemos $S=[-3,-1)\cup(1,2]$.

- $\dfrac{2}{x} + \dfrac{x-1}{x+1} \geq 1$.

Solución:

Tenemos,

$$\begin{aligned}
\frac{2}{x} + \frac{x-1}{x+1} &\geq 1 \\
\frac{2}{x} + \frac{x-1}{x+1} - 1 &\geq 0 \\
\frac{2}{x(x+1)} &\geq 0.
\end{aligned}$$

Los puntos que anulan los factores son $x = 0$ y $x = -1$. Luego, la tabla de signos queda como:

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, \infty)$
x	$-$	$-$	$+$
$x + 1$	$-$	$+$	$+$
$x\,(x + 1)$	$(+)$	$(-)$	$(+)$

De donde $S = (-\infty, -1) \cup (0, \infty)$.

- $\dfrac{x}{x+2} - \dfrac{x-1}{x^2-4} \leq \dfrac{x-2}{x+2}$.

Solución

$$\begin{aligned}
\frac{x}{x+2} - \frac{x-1}{x^2-4} &\leq \frac{x-2}{x+2} \\
\frac{x}{x+2} - \frac{x-1}{(x+2)(x-2)} - \frac{x-2}{x+2} &\leq 0 \\
\frac{2}{x+2} - \frac{x-1}{(x+2)(x-2)} &\leq 0 \\
\frac{2(x-2)-(x-1)}{(x+2)(x-2)} &\leq 0 \\
\frac{2x-4-x+1)}{(x+2)(x-2)} &\leq 0 \\
\frac{x-3}{(x+2)(x-2)} &\leq 0
\end{aligned}$$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, 3)$	$(3, \infty)$
$x + 2$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x - 2$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x - 3$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\dfrac{x-3}{(x+2)(x-2)}$	$(-)$	$(+)$	$(-)$	$(+)$

Como la desigualdad no es estricta, se consideran en el conjunto solución los puntos que anulan el numerador. Así, tenemos $S = [-3, -1) \cup (1, 2]$.

- $\dfrac{x+6}{x-2} - \dfrac{x+3}{x-10} \leq \dfrac{11}{x^2-12x+20}$

$\boxed{\text{Solución:}}$

$$\begin{aligned}
\frac{x+6}{x-2} - \frac{x+3}{x-10} - \frac{11}{x^2-12x+20} &\leq 0 \\
\frac{x+6}{x-2} - \frac{x+3}{x-10} - \frac{11}{(x-2)(x-10)} &\leq 0 \\
\frac{(x+6)(x-10)-(x+3)(x-2)-11}{(x-2)(x-10)} &\leq 0 \\
\frac{x^2-4x-60-x^2-x+6-11}{(x-2)(x-10)} &\leq 0 \\
\frac{-5x-65}{(x-2)(x-10)} &\leq 0 \\
\frac{(x+13)}{(x-2)(x-10)} &\geq 0
\end{aligned}$$

	$(-\infty,-13)$	$(-13,2)$	$(2,10)$	$(10,\infty)$
$x+13$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-10$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\dfrac{(x+13)}{(x-2)\,(x-10)}$	$(-)$	$(+)$	$(-)$	$(+)$

Luego la solución es:

$$S = [-13, 2) \cup (10, \infty[$$

Notemos que $x = 2$ y $x = 10$ no pertencen al conjunto solución, pues en dichos valores se anula el denominador.

- $\dfrac{1}{x^2-3x+1}<1.$

  Solución:

  Tenemos,

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2-3x+1}&<1\\ \frac{1}{x^2-3x+1}-1&<0\\ \frac{1-x^2+3x-1}{x^2-3x+1}&<0\\ \frac{x\,(x-3)}{x^2-3x+1}&>0\end{aligned}$$

  Para ver los puntos críticos que anulan el denominador haremos uso de la fórmula general:

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$

  Luego debemos resolver la ecuación:

$$\frac{x\,(x-3)}{\left(x-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)}>0$$

  Donde los puntos que anulan los factores son $x=0$, $x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$, $x=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ y $x=3$, con los cuales construimos la siguiente tabala:

	$(-\infty,0)$	$\left(0,\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$	$\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2},\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$	$\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2},3\right)$	$(3,\infty)$
x	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\left(x-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$\left(x-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$\frac{x(x-3)}{\left(x-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)}$	$(+)$	$(-)$	$(+)$	$(-)$	$(+)$

  Por tanto, el conjunto solución es:

$$S=(-\infty,0)\cup\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2},\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\cup(3,\infty)\,.$$

- $\dfrac{7}{x-1} - \dfrac{6}{x^2-1} - 5 < 0$

  Solución:

$$\begin{aligned}
\frac{7}{x-1} - \frac{6}{x^2-1} - 5 &< 0\\
\frac{7}{x-1} - \frac{6}{(x+1)(x-1)} - 5 &< 0\\
\frac{7(x+1) - 6 - 5(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)} &< 0\\
\frac{7x+7-6-5x^2+5}{(x+1)(x-1)} &< 0\\
\frac{-5x^2+7x+6}{(x+1)(x-1)} &< 0 / \cdot (-5)\\
\frac{(5x)^2 - 7(5x) - 30}{(x+1)(x-1)} &> 0\\
\frac{(5x-10)(5x+3)}{(x+1)(x-1)} &> 0
\end{aligned}$$

Luego los puntos que anulan los factores son $x = 2, x = -\dfrac{3}{5}, x = -1, x = 1$, con ellos construimos la siguiente tabla:

	$(-\infty,-1)$	$\left(-1,-\frac{3}{5}\right)$	$\left(-\frac{3}{5},1\right)$	$(1,2)$	$(2,\infty)$
$5x-10$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$5x+3$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$\dfrac{(5x-10)(5x+3)}{(x+1)(x-1)}$	$(+)$	$(-)$	$(+)$	$(-)$	$(+)$

Luego la solución es:

$$S = (-1,0) \cup (1,\infty).$$

- $5x^2 - 2x + 1 < x^2 + 2x.$

  Solución:

  Transponiendo y reduciendo a términos semejantes obtenemos:

$$4x^2 - 4x + 1 < 0$$

que es equivalente a:

$$(2x-1)^2 < 0.$$

Que no admite solución, pues todo cuadrado de un número real es no negativo. Luego, $S = \emptyset$. En cambio, si se hubiera querido resolver

$$4x^2 - 4x + 1 \leq 0$$

Entonces la única solución es $S = \{\frac{1}{2}\}$.

- $4x^2 + 16x - 1 \geq 4x - 5x^2 - 5$.

Solución:

Transponiendo y reduciendo a términos semejantes obtenemos:

$$9x^2 + 12x + 4 \geq 0$$

Que es equivalente a:

$$(3x+2)^2 \geq 0.$$

Como el cuadrado de un número real es siempre no negativo tenemos que $S = \mathbb{R}$.

Observación 1. *Cuando la expresión cuadrática $ax^2 + bx + c$ tiene discriminante negativo, pueden ocurrir dos situaciones: si $a > 0$, entonces $ax^2 + bx + c > 0$ y si $a < 0$ entonces $ax^2 + bx + c < 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Ejemplo 99. *Se han sugerido varias reglas para modificar las dosis de medicamento para un adulto y así encontrar la dosis para niños pequeños. Sea a la dosis para un adulto (en mg), y t la edad del niño (en años). Algunas reglas típicas son las siguientes:*

$$y = \frac{(t+1)a}{24} \text{ (Regla de Cowling)}, \quad y = \frac{2ta}{25} \text{ (Regla de Friend)},$$

¿Para qué edad aproximadamente la dosis según la Regla de Friend es menor que la dosis según la Regla de Cowling?.

$\boxed{\text{Solución}}$

Debemos resolver la inecuación $\dfrac{2ta}{25} < \dfrac{(t+1)a}{24}$.
Por lo que podemos dividir a ambos lados de la desigualdad por a, pues $a > 0$.

$$\begin{aligned} \frac{2t}{25} &< \frac{(t+1)}{24} \\ 48t &< 25t + 25 \\ 23t &< 25 \\ t &< \frac{25}{23} \end{aligned}$$

Concluimos que para 13 meses o menos la dosis según Regla de Friend es menor que la dosis según la Regla de Cowling.

Ejemplo 100. *Pasados t minutos después de introducir un bactericida experimental en cierto cultivo el número de bacterias está dado por:*

$$N = \frac{10000}{t^2 + 1} + 2000.$$

Determine el momento en que el número de bacterias está por debajo de 4000.

$\boxed{\text{Solución}}$

Debemos resolver la inecuación:

$$\frac{10000}{t^2 + 1} + 2000 < 4000$$

Notemos que el denominador $t^2 + 1$ es positivo, luego podemos multiplicar a ambos lados de la inecuación por $t^2 + 1$.

$$\begin{aligned} \frac{10000}{t^2 + 1} - 2000 &< 0 \\ 10000 - 2000t^2 - 2000 &< 0 \\ 8000 - 2000t^2 &< 0 \\ 2000(4 - t^2) &< 0 \\ (2 + t)(2 - t) &< 0 \end{aligned}$$

Vemos que la expresión es cero para $t = -2$ y $t = 2$. Con esto construimos la siguiente tabla donde analizamos el signo que tiene cada factor en cada intervalo,

	$(-\infty,-2)$	$(-2,2)$	$(2,\infty)$
$2+t$	$-$	$+$	$+$
$2-t$	$+$	$+$	$-$
$(2+t)(2-t)$	$(-)$	$(+)$	$(-)$

Por lo tanto, la solución es $S=(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$, pero como t corresponde al tiempo medido en minutos, concluimos que el número de bacterias está por debajo de 4000 después de los 2 minutos.

Ejemplo 101. *Un determinado fármaco que se usa para controlar la temperatura se inyecta vía intramuscular. Su efecto (en horas) es dado por la fórmula:*

$$E=\frac{74x}{8x+3}$$

Donde x corresponde a los mg de la dosis. Calcule la cantidad que se debe inyectar para que el fármaco tenga efecto más de 4 horas y menos de 8 horas.

Solución

Debemos resolver la inecuación $4<\dfrac{74x}{8x+3}<8$, para esto resolvemos cada inecuación por separado:

1.

$$\begin{aligned}4&<\frac{74x}{8x+3}\\ 0&<\frac{74x}{8x+3}-4\\ 0&<\frac{42x-12}{8x+3}\end{aligned}$$

Obteniendo los puntos críticos: $x=\dfrac{2}{7}$ y $x=-\dfrac{3}{8}$

	$\left(-\infty,-\frac{3}{8}\right)$	$\left(-\frac{3}{8},\frac{2}{7}\right)$	$\left(\frac{2}{7},\infty\right)$
$42x-12$	$-$	$-$	$+$
$8x+3$	$-$	$+$	$+$
	$(+)$	$(-)$	$(+)$

Luego la solución es: $S=\left(-\infty,-\frac{3}{8}\right)\cup\left(\frac{2}{7},\infty\right)$, pero como la dosis debe ser positiva, entonces $x>\dfrac{2}{7}$

2.

$$\begin{aligned} \frac{74x}{8x+3} &< 8 \\ \frac{74x}{8x+3} - 8 &< 0 \\ \frac{10x-24}{8x+3} &< 0 \end{aligned}$$

Obteniendo los puntos críticos: $x = \dfrac{12}{5}$ y $x = -\dfrac{3}{8}$.

	$\left(-\infty, -\frac{3}{8}\right)$	$\left(-\frac{3}{8}, \frac{12}{5}\right)$	$\left(\frac{12}{5}, \infty\right)$
$42x - 12$	$-$	$-$	$+$
$8x + 3$	$-$	$+$	$+$
	$(+)$	$(-)$	$(+)$

Luego la solución es: $S = \left(-\dfrac{3}{8}, \dfrac{12}{5}\right)$, pero como la dosis debe ser positiva, entonces:

$$0 < x < \frac{12}{5}.$$

Finalmente para que el fármaco tenga efecto más de 4 horas y menos de 8 horas, la dosis debe ser mayor que que 0,28 mg y menor que 2,4 mg.

Ejemplo 102. *Para que cualquier medicamento tenga un efecto benéfico, su concentración en el torrente sanguíneo debe exceder un cierto valor llamado nivel terapéutico mínimo. Suponga que la concentración C de un fármaco al trascurrir t horas después de ser ingerido es:*

$$C = \frac{20t}{t^2+4} mg/lt$$

Si el nivel terapéutico mínimo es $4mg/lt$, determine cuando se ha excedido este nivel.

$\boxed{\text{Solución}}$

Se trata de resolver la inecuación

$$\frac{20t}{t^2+4} > 4.$$

Notemos que el denominador $t^2 + 4$ es positivo, luego podemos multiplicar por esta expresión a ambos lados de la desigualdad:

$$\begin{aligned}
\frac{20t}{t^2+4} &> 4 \\
20t &> 4(t^2+4) \\
20t &> 4t^2+16 \\
20t - 4t^2 - 16 &> 0 \\
-4t^2 + 20t - 16 &> 0 \\
-4(t^2 - 5t + 4) &> 0 \\
-4(t-1)(t-4) &> 0 \\
(t-1)(t-4) &< 0
\end{aligned}$$

Obteniendo los puntos críticos: $t = 1$ y $t = 4$

	$(-\infty, 1)$	$(1, 4)$	$(4, \infty)$
$t-1$	$-$	$+$	$+$
$t-4$	$-$	$-$	$+$
	$(+)$	$(-)$	$(+)$

Por lo tanto, la solución de la inecuación es $S = (1, 4)$, es decir, el nivel terapéutico mínimo se ha excedido entre las 1 y 4 horas.

4.4. Ejercicios propuestos

A) Resolver las siguientes inecuaciones:

444. $3 - 9x < 6$

445. $3x + 5 < x - 7$

446. $x + 8 \geq 5x - 12$

447. $\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{3} \leq \dfrac{2}{3}x$

448. $-(1 - 2x) > x - 1$

449. $4 < \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{3} < 5$

450. $-2 < \dfrac{6 - \frac{x}{3}}{5} \leq 4$

451. $\dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{4} < \dfrac{7}{2}x - \dfrac{1}{4}$

452. $-x^2 + x + 6 > 0$

453. $2x^2 - 5x - 3 \geq 0$

454. $x(3x + 2) > (x + 2)^2$

455. $-5 \leq 2x - 4 < 2$

456. $5x - 4 < x^2 + x \leq x^3 + 1$

457. $\dfrac{4}{5}x - \dfrac{2}{3}(4x - 3) \geq \dfrac{5}{9}x - \dfrac{2}{5}$

458. $3x - 5 \leq \dfrac{3}{4}x + \dfrac{1 - x}{3}$

459. $\dfrac{4}{x} - 3 > \dfrac{2}{x} - 7$

460. $\dfrac{7x + 2}{4} - 1 < \dfrac{2x + 5}{2} + x$

461. $\dfrac{x + 1}{2 - x} < \dfrac{x}{3 + x}$

462. $4(x - 3)(x + 2)(x + 5) \geq 0$

463. $\dfrac{x}{2} + \dfrac{2}{x} + 1 > 0$

464. $\dfrac{x + 1}{6} + 3 < \dfrac{x - 1}{8} + \dfrac{1}{2}$

465. $-6 < \dfrac{3x + 5}{2} \leq 4$

466. $\dfrac{2}{1 - x} > \dfrac{4}{14x}$

467. $\dfrac{x - 5}{x^2 + 4x + 4} \geq 1 - \dfrac{x}{x + 2}$

B) Resuelva las siguientes desigualdades, exprese el conjunto solución como intervalo y grafique éste:

468. $\dfrac{(x + 3)(3 - x)(4x + 8)}{(2x - 6)(x - 2)^2} \geq 0$

469. $0 < \dfrac{1}{2}(8 - 4x) < 6$

470. $-2 < \dfrac{6 - 5x}{5} \leq 4$

471. $\dfrac{2}{(1 - x)^2} > 0$

472. $\dfrac{4}{3x + 2} \geq 0$

473. $\dfrac{-2}{4 - 3x} < 0$

474. $\dfrac{4}{x^2 + 6} < 0$

475. $x^2 - 2x - 15 > 0$

476. $x^2 + 2x - 8 \leq 0$

477. $\dfrac{x}{x^2-16} \geq 0$

478. $\dfrac{x+3}{3} - \dfrac{4}{x+2} > \dfrac{x}{3}$

479. $\dfrac{x^2-2x-7}{2x-1} \leq -1$

480. $\dfrac{40}{x^2+x-12} < 4$

481. $\dfrac{x+6}{x-2} - \dfrac{x+3}{x-10} \leq \dfrac{11}{x^2-12x+20}$

C) Resuelva las siguientes desigualdades, exprese el conjunto solución como intervalo y grafique éste:

482. $\dfrac{x}{x+1} > \dfrac{x-1}{x+2}$

483. $\dfrac{x^2+x+1}{x(x-1)(x-2)} > 0$

484. $x < x^2 - 12 < 4x$

485. $\sqrt{x+1} > 2$

486. $\sqrt{1-x} > 2$

487. $\sqrt{x+5} + \sqrt{x} > 5$

488. $\dfrac{(x^2-2x+5)(2x+3)}{3x^2+4x+1} \geq 0$

489. $(3x-2)\dfrac{x^2+4x+2}{9x^2-6x+1} < 0$

490. $\left(x+\dfrac{1}{3}\right)(x-8) \geq 0$

491. $x^2 - 5x + 6 < 0$

492. $\dfrac{(x+3)(x-6)(x+2)}{(x-1)(x+9)} \geq 0$

493. $\dfrac{5}{x+3} + \dfrac{1}{x-1} > 2$

494. $\dfrac{2x-1}{3} + 1 > \dfrac{x+1}{2}$

495. $\dfrac{7}{x-1} - \dfrac{6}{x^2-1} < 5$

496. $\dfrac{x^2-6x-7}{x^2+2x+1} < 3$

497. $\dfrac{6}{x+3} + \dfrac{1}{x-2} > 2$

498. $\dfrac{x^2+3}{x^2+4x+5} < 1 \leq \dfrac{3}{1-x}$

D) Resuelva las siguientes inecuaciones con valor absoluto, exprese el conjunto solución como intervalo y grafique éste:

499. $|x+5| > 3$

500. $\left|\dfrac{x-2}{3}\right| \geq \dfrac{1}{2}$

501. $|x-4| > -6$

502. $|2x+7| < 4$

503. $\left|x - \dfrac{1}{100}\right| \geq -1$

504. $|(x-1)(x+2)| < 0$

505. $\left|\dfrac{x^2-x}{x^2-1}\right| < 1$

506. $\left|\dfrac{x(5-3x)}{x^2-2x+8}\right| < 3$

507. $\dfrac{|x+1|-x}{x^2-1} \leq 0$

508. $\left|\dfrac{2x-3}{4x+1}\right| \leq 1$

509. $\left|x+\dfrac{1}{x}\right| > 2$

510. $|x+1| \leq |x-3|$

511. $|x+2| \leq |2x+1|$

512. $|-4x| < |5+4x|$

513. $|3+x| > 7$

514. $|x^2-x|+x > 1$

515. $|17x-3| \leq -3$

516. $|2x+3|-|x-1| < 6$

517. $|3x+1|-|4-2x| > 2$

518. $|x-2|+|4-3x| < 20$

519. $||x-2|-|x-1|| \geq 1$

E) Resuelva los siguientes sistemas de inecuaciones:

520.

$$\begin{aligned} 2x+3 &\geq 1 \\ -x+2 &\geq -1 \end{aligned}$$

521.

$$\begin{aligned} 2x+3 &\geq 1 \\ -x+2 &< -1 \end{aligned}$$

522.

$$\begin{aligned} 2x+3 &< 1 \\ -x+6 &< 3 \end{aligned}$$

523.

$$\begin{aligned} 5x+1 &\leq \frac{3}{2}x+5 \\ 2(x+3) &\geq x \end{aligned}$$

524.

$$\begin{aligned} \frac{x+3}{2}-2x &> \frac{4-2x}{2} \\ \frac{x-2}{3}+1 &< \frac{x+3}{2}+x \end{aligned}$$

525.

$$\begin{aligned} 2-\frac{3+5x}{4} &> x \\ x^2-3x-10 &\leq 0 \end{aligned}$$

526.

$$\begin{aligned} x^2-4x-21 &> 0 \\ 4-2x &< 14 \end{aligned}$$

527.

$$\begin{aligned} |x-2| &> 3 \\ 2x-6 &< 4 \end{aligned}$$

528.

$$\begin{aligned} |x+6| &> 5 \\ |x-8| &< 20 \end{aligned}$$

529.

$$\begin{aligned} x^2+x-6 &\leq 0 \\ \left|1-\frac{x}{3}\right| &> \frac{1}{2} \end{aligned}$$

530.

$$\begin{aligned} (x-5)^2 &\geq x^2 \\ \left|2-\frac{5}{3}x\right| &> 1 \end{aligned}$$

F) Resuelva los siguientes problemas:

531. *Una fábrica de galletas vende a* \$100 *cada unidad producida. Si produce* x *galletas diariamente, los costos totales en un día están dados por* $C = x^2+20x+700$ *¿Cuántas galletas debe vender diariamente para producir utilidades?*

532. *Si* x *unidades pueden venderse a un precio* p *cada una, en donde* $p = 80-x$ *¿Cuántas unidades deben venderse para obtener un ingreso de por lo menos* \$1500*?*

533. *En una determinada región se introdujo una población de* 100 *ardillas. Suponiendo que el número de ardillas está dado al cabo de* t *años por* $p = -t^4 + 21t^2 + 100$ *(para* t *positivo). Determine en cuánto tiempo la población de ardillas será mayor de* 180.

534. *En un instituto de meteorología encontraron que la temperatura en Fahrenheit de un cierto día de frío de invierno, está dado por* $T = 0{,}05\,(t-12)\,(t-24)$*, donde* t *es el tiempo en horas y* $t = 0$ *corresponde a las* 6 *a.m. ¿A qué hora la temperatura está por encima de cero y a qué hora por debajo de cero (entre* 0 *y* 24*)?*

535. *Generalmente se considera que una persona tiene fiebre si presenta una temperatura mayor de* $37°C$ *¿Qué temperatura en la escala Fahrenheit indica fiebre si ambas escalas se relacionan mediante* $T_C = \dfrac{5}{9}\,(T_F - 32)$.

536. *Algunos rectángulos miden de largo, una unidad más que el doble de su ancho. Encuentre las posibles medidas del ancho y del área si su perímetro es menor que 100.*

537. *Una compañia A arrienda autos por $6.000 diarios más $140 por cada kilómetro recorrido, mientras que la compañía B los arrienda por $12.000 diarios y cobra $80 por cada kilometro. En un día cualquiera, ¿Cuántos kilómetros habrá de recorrer para que convenga arrendar en la compañia B?.*

538. *Al realizar un estudio en un sector minero se encontró un gran porcentaje de personas con niveles elevados de plomo en la sangre. El instituto de salud pública decidió comenzar un tratamiento con un costoso medicamento a las personas que tengan un 6 % de sangre contaminada. El porcentaje que describe la cantidad del plomo en la sangre como efecto de* x *gramos del medicamento, viene dado por la relación*

$$P = \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + x + 1},$$

Con P *expresado en %. ¿Al menos cuántos gramos deben administrarse para que el porcentaje de plomo sea menor que 2 %?*

539. *A la señora Juanita Lorca, vendedora de un Multimarket, le pagan $1440000 pesos al año más una comisión del 8 % sobre sus ventas ¿Qué ventas anuales corresponderían a un ingreso anual entre $2300000 y $2700000?*

540. *Se diseña una balanza que sea precisa hasta* $0{,}25$ *grs. Si en la balanza se colocan juntas dos latas de sopa idénticas y se halla que tienen un peso combinado de* $33{,}15$ *grs. ¿Cuál es el mayor y el menor peso posible de una de las latas?*

541. *El número de millas, M, que puede viajar determinado auto compacto con un galón de gasolina, se relaciona con su velocidad, v, en mi/hr, mediante $M = -\dfrac{1}{30}v^2 + \dfrac{5}{2}v$ cuando $0 < v < 70$ ¿Para qué velocidad v, M será cuando menos 45?*

542. *Para determinada población de salmones, la relación entre el número S, de padres y el número R de descendientes que sobreviven hasta la madurez es $R = \dfrac{4500S}{S+500}$ ¿Bajo qué condiciones $R > S$?*

543. *El número de diagonales de D de un polígono de n lados está dado por: $D = \frac{n(n-3)}{2}$ ¿Para que polígonos pasará de 27 el número de diagonales?*

544. *La concentración de cierto calmante suministrado mediante suero, varía en su efectividad en el tiempo según la expresión $C = t^2 - 2t + 5$, donde C se mide en miligramos por litro y el tiempo t en horas. Se determinó que el calmante no produce daños colaterales y es efectivo si la concentración es de por lo menos 8 miligramos por litro y a lo más 13 miligramos por litro ¿Durante cuánto tiempo es efectivo el calmante?*

545. *Para una poblaci ? on particular de salmón, la relación entre el número de hembras x y el número de crías y que sobreviven hasta la edad madura está dada por la fórmula:*

$$y = \frac{4|7-x| - |x-3|}{2}$$

¿Cuándo el número de hembras es menor o igual que el número de crías que sobreviven?

4.4.1. Soluciones

A)

444 $x > -\frac{1}{3}$

445 $x < -6$

446 $x \leq 5$

447 $x \geq -2$

448 $x > 0$

449 $\frac{26}{3} < x < \frac{32}{3}$

450 $-42 \leq x < 48$

451 $x > \frac{1}{3}$

452 $-2 < x < 3$

453 $x \leq -\frac{1}{2} \vee x \geq 3$

454 $x < -1 \vee x > 2$

455 $-\frac{1}{2} \leq x < 3$

456 $-1 \leq x < 2 \vee x > 2$

457 $x \leq \frac{108}{109}$

458 $x \leq \dfrac{64}{31}$

459 $x < -\frac{1}{2} \vee x > 0$

460 $x > -12$

461 $x < -3 \vee x > 2$

462 $-5 \leq x \leq -2 \vee x > 3$

463 $x > 0$

464 $x < -67$

465 $-\frac{17}{3} < x \leq 1$

466 $\frac{1}{8} < x < 1$

467 $x \leq -9$

B)

468 $-3 \leq x \leq -2$

469 $-1 < x < 2$

470 $-\dfrac{14}{5} \leq x < \dfrac{16}{5}$

471 $x < 1 \vee x > 1$

472 $x > -\frac{2}{3}$

473 $x < \frac{4}{3}$

474 $\emptyset$

475 $x > 5 \vee x < (-3)$

476 $-4 \leq x \leq 2$

477 $-4 < x \leq 0 \vee x > 4$

478 $x > 2 \vee x < -2$

479 $x \leq -2\sqrt{2} \vee \frac{1}{2} < x \leq 2\sqrt{2}$

480 $x > \frac{1}{2}\left(\sqrt{89} - 1\right) \vee -4 < x < 3 \vee x < \frac{1}{2}\left(-\sqrt{89} - 1\right)$

481 $x > 10 \vee -13 \leq x < 2$

C)

482 $x > -\frac{1}{2} \vee -2 < x < -1$

483 $0 < x < 1 \vee x > 2$

484 $4 < x < 6$

485 $x > 3$

486 $x < -3$

487 $x > 4$

488 $-\frac{3}{2} \leq x \vee x > -\frac{1}{3}$

489 $x < (-2 - \sqrt{2}) \vee (\sqrt{2} - 2 < x < \frac{1}{3} \vee \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3})$

490 $x \leq -\frac{1}{3} \vee x \geq 8$

491 $2 < x < 3$

492 $-9 < x \leq -3 \vee -2 \leq x < 1 \cup x \geq 6$

493 $-3 < x < -1 \vee 1 < x < 2$

494 $x > -1$

495 $x < -1 \vee -\frac{3}{5} < x < 1 \vee x > 2$

496 $x < -5 \vee x > -1$

497 $-3 < x < -\frac{1}{2} \vee 2 < x < 3$

498 $-\dfrac{1}{2} < x < 1$

D)

499 $x < -8 \vee x > -2$

500 $x > \frac{7}{2} \vee x \leq \frac{1}{2}$

501 $\mathbb{R}$

502 $-\frac{11}{2} < x < -\frac{3}{2}$

503 $\mathbb{R}$

504 $\emptyset$

505 $-\frac{1}{2} < x < 1 \vee x > 1$

506 $x < -\frac{133}{6} \vee -\frac{133}{6} < x < 24$

507 $-1 < x < 1$

508 $-2 \leq x \vee x > \frac{1}{3}$

509 $x > \sqrt{2} \vee x < -\sqrt{2}$

510 $x \leq 1$

511 $x > 1 \vee x \leq -1$

512 $x > -\frac{5}{8}$

513 $x > 4 \vee x < -10$

514 $x < -1 \vee x > 1$

515 $\emptyset$

516 $-10 < x < 2$

517 $x < -7 \vee x > 1$

518 $-\dfrac{7}{2} < x < \dfrac{13}{2}$

519 $x \leq 1 \vee x \geq 2$

E)

520 $-1 \leq x \leq 3$

521 $x > 3$

522 No tiene solución

523 $-6 \leq x \leq \frac{8}{7}$

524 $-1 < x < \frac{27}{19}$

525 $-2 \leq x < \frac{5}{9}$

526 $-5 < x < -3 \vee x > 7$

527 $x < -1$

528 $-12 < x < -11 \vee -1 < x < 28$

529 $-3 < x < \frac{3}{2}$

530 $x < \frac{3}{5} \vee \frac{9}{5} < x \leq \frac{5}{2}$

F)

531 $10 < x < 70$

532 $30 < x < 50$

533 $3 < t < 4$

534 Entre las 6am y las 18pm la temperatura es sobre 0°F y entre las 18pm y las 6am la temperatura esta bajo los 0°F

535 $T_F > 98,6°$

536 El ancho es menor que $\frac{49}{3}$ y su área es menor que $\frac{4949}{9}$

537 Más de 100 kilómetros.

538 Más de 4 gramos

539 $1075000 < x < 15750000$

540 $16{,}45 \leq x \leq 16{,}7$

541 $30 \leq x \leq 45$

542 Para $S < 4000$

543 $n \geq 10$

544 Entre 3 y 4 horas después de haberse administrado.

545 Cuando está entre 0 y 4 (aproximadamente) o es al menos 25

5

Razones y proporciones

5.1. Razón

Definición 1.1: Razón

Se llama razón de dos cantidades cualesquiera a y b, a la comparación por cociente de ellas. La razón de a y b se puede escribir como: $a : b$ o $\frac{a}{b}$, donde a se denomina antecedente y b consecuente.

Toda razón tiene asociado un cociente llamado *valor de la razón*. Así, $\frac{a}{b} = k$, donde k es el valor de la razón.

Ejemplo 103. *El ancho y el largo de un rectángulo miden* $10\ cm$ *y* $30\ cm$ *respectivamente. Luego, la razón de la medida del ancho y el largo es de* $\dfrac{ancho}{largo} = \dfrac{10\ cm}{30\ cm} = \dfrac{1}{3}$

Ejemplo 104. *En un rebaño el valor de la razón entre machos y hembras es* $7 : 2$*. Si el número de machos es 140. Calcule el número de hembras en el rebaño.*

Solución

Como la razón entre machos y hembras es $7 : 2$, concluimos que por cada 7 machos hay 2 hembras, es decir, hay $7x$ machos y $2x$ hembras, luego:

$$\begin{aligned} 7x &= 140 \\ x &= 20 \end{aligned}$$

Por lo tanto hay $2x = 2 \cdot 40 = 80$ hembras.

Ejemplo 105. *En un huerto la razón entre el número de plantas de tomate, lechuga y repollo es* $2:5:6$ *, si en total hay 143 plantas. Determine cuantas plantas son de tomate.*

Solución

Si la razón entre el número de plantas de tomate, lechuga y repollo es $2:5:6$, concluimos que hay $2x$ plantas de tomate, $5x$ plantas de lechuga y $6x$ plantas de repollo. Luego como en el huerto hay 143, se cumple que:

$$\begin{aligned} 2x + 5x + 6x &= 143 \\ 13x &= 143 \\ x &= 11 \end{aligned}$$

Por lo tanto hay $2x = 2 \cdot 11 = 22$ plantas de tomate.

Ejemplo 106. *Las masas de sal y agua en el mar de Pitágoras están en la razón* $7:193$. *¿Cuántos kilogramos de sal hay en 1000 kilogramos de agua de mar?*

Solución

Consideremos lo siguiente, dada la razón entre las masas de sal y agua, se tiene que por cada 7 kilos de sal hay 193 kilos de agua y en total $7 + 193 = 200$ kilos de agua de mar. En consecuencia por cada 200 kilos de agua de mar, hay 7 kilos son de sal.

Luego, como $1000 = 200 \cdot 5$, habrá $7 \cdot 5 = 35$ kilos de sal.

Ejemplo 107. *En un pueblo, la razón entre hombres adultos y mujeres adultas es de* $2:3$ *y la razón entre las mujeres adultas y los niños es de* $8:1$. *¿Cuál es la razón entre los adultos (hombres y mujeres) y los niños?*

Solución

Como la razón entre hombres adultos y mujeres adultas es de $2:3$, entonces hay $2k$ hombres y $3k$ mujeres. Como la razón entre las mujeres y los niños es de $8:1$, entonces hay $8j$ mujeres y j niños. Luego:

$$8j = 3k \Longrightarrow j = \frac{3}{8}k$$

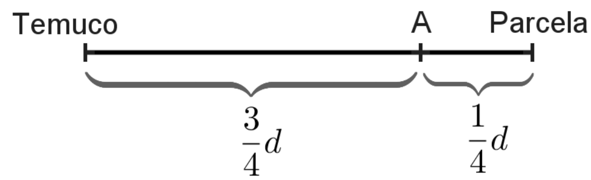
Por lo tanto, la razón entre los adultos (hombres y mujeres) y los niños es de:

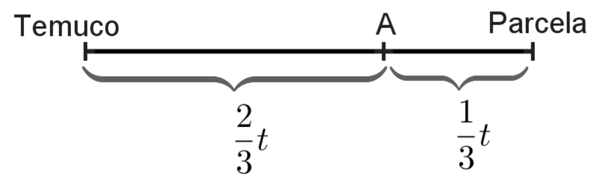
$$\frac{2k + 3k}{\frac{3}{8}k} = \frac{40}{3}$$

Ejemplo 108. *David viaja en su bicicleta desde Temuco a su parcela. Él debía llegar a las* $15:00$*, pero gastó* $\frac{2}{3}$ *del tiempo planeado cubriendo* $\frac{3}{4}$ *de la distancia. Después de eso, pedaleó más lentamente y llegó justo a tiempo. ¿Cuál es la razón entre la velocidad de la primera parte del viaje y la velocidad de la segunda parte del viaje?*

Solución

Sea d la distancia desde Temuco a la parcela, y t el tiempo que demora David en cubrir dicha distancia en bicicleta. Notemos que en el primer trayecto David recorre $\dfrac{3}{4}d$ en $\dfrac{2}{3}t$.





Como la velocidad $v = \dfrac{d}{t}$, la velocidad de David en el primer trayecto es:

$$v_1 = \frac{\frac{3}{4}d}{\frac{2}{3}t} = \frac{9d}{8t}$$

Y la velocidad de David en el segundo trayecto es:

$$v_2 = \frac{\frac{1}{4}d}{\frac{1}{3}t} = \frac{3d}{4t}$$

Luego:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\frac{9d}{8t}}{\frac{3d}{4t}} = \frac{36}{24} = \frac{3}{2}$$

Finalmente, la razón entre las velocidades de la primera y segunda parte del viaje es $3:2$.

5.2. Proporción

Definición 2.1: Proporción

Se define proporción como la igualdad de dos razones. Dada una proporción $a : b = c : d$ o bien $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se lee "a es a b como c es a d".
Los términos a y d se llaman extremos, c y b se llaman medios.

Observación 1. *En toda proporción, el producto de los términos medios es igual al producto de los términos extremos.*

Definición 2.2: Proporcionalidad directa e inversa

Dos variables a y b son

- **Directamente proporcionales** si y solo si la razón entre ellas es constante, es decir, existe una constante k tal que $\frac{a}{b} = k$ o bien $a = k \cdot b$.

  Ejemplo 109. *La siguiente tabla muestra el redimiento de semillas de césped de alto rendimiento, de modo que el crecimiento sea óptimo.*

Número de kg	1	2	3	4	5
m^2 de rendimiento	30	60	90	120	150

  Notemos que la razón entre dichas cantidades es constante, pues

  $$\frac{1}{30} = \frac{2}{60} = \frac{3}{90} = \frac{4}{120} = \frac{5}{150}.$$

  Luego, las cantidades son directamente proporcionales.

- **Inversamente proporcionales** si y solo el producto entre ellas es constante, es decir, existe una constante k tal que $a \cdot b = k$ o bien $a = \frac{k}{b}$.

Ejemplo 110. *La siguiente tabla muestra los meses de rendimiento de 4.380 kg. de materia seca para cierta cantidad de bovinos adultos.*

Número de bovinos	1	2	3	4	5	6
Número de meses	12	6	4	3	2,4	2

Notemos que el producto entre dichas cantidades es constante, pues

$$1 \cdot 12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4 = 4 \cdot 3 = 5 \cdot 2,4 = 6 \cdot 2.$$

Luego, las cantidades son inversamente proporcionales.

Observación 2. *En general, decimos que dos cantidades son directamente proporcionales cuando una magnitud aumenta y la otra también aumenta en la misma medida, o bien, decimos que dos cantidades son inversamente proporcionales cuando una magnitud aumenta, y la otra disminuye en la misma medida.*

Ejemplo 111. *Un libro tiene 75 páginas de 40 líneas cada una. Una nueva edición del libro tiene 50 líneas por cada página y se quiere saber con cuantas páginas quedó el libro.*

Solución:

Como es una proporción inversa se calcula el producto de las cantidades en razón (líneas y páginas del libro) para obtener la constante de proporcionalidad. Así, $k = 75 \cdot 40 = 3000$ entonces el número de páginas necesarias es de $\dfrac{300}{50} = 60$.

5.3. Porcentaje

Definición 3.1: Porcentaje

Un porcentaje es un caso particular de razón, en la cual el consecuente es 100. Para el cálculo de porcentajes se puede plantear la proporción:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{100}$$

Donde, a es parte del total, b es el total, c porcentaje del total al cual equivale a.

Ejemplo 112. *El* $20\,\%$ *de* 300 *corresponde a* 60*, ya que* $\dfrac{60}{300} = \dfrac{20}{100}$

Un porcentaje también se puede expresar como un número decimal transformando la expresión $\dfrac{c}{100}$ a su expresión decimal equivalente, por ejemplo, el $40\,\%$ equivale a tomar 40 partes de un total de 100 partes iguales. Esto se puede expresar como $\dfrac{40}{100}$ ó $0,4$.

Ejemplo 113. *En el periódico de la escuela se publicó que el 60 % de los profesores vienen a la escuela en bicicleta. Esos son 45 profesores. Sólo el 12 % de nuestros profesores vienen en automovil. Ese número es*

Solución:

El problema se resuelve utilizando la siguiente proporción:

$$\begin{aligned} 60 &\to 45 \text{ profesores} \\ 12 &\to x \text{ profesores} \end{aligned}$$

Luego, $x = \dfrac{45 \cdot 12}{60} = 9$ profesores.

Equivalentemente si 45 es el 60 %, el 12 %, que es la quinta parte de 60, será la quinta parte de 45, es decir, 9.

Ejemplo 114. *En una isla, las ranas son siempre verdes o azules, cuando el número de ranas verdes se redujo el 60 %, el número de ranas azules aumentó el 60 %. Resultó que la nueva relación de las ranas azules a las ranas verdes es igual a la relación anterior pero en el orden opuesto (ranas verdes a las ranas azules). ¿En qué porcentaje se modificó el número total de las ranas?*

Solución

Sea a el número de ranas azules y v el número de ranas verdes, entonces el número de ranas azules aumentó el 60 %, ahora hay $a + 0,6a = 1,6a$. Como las ranas verdes disminuyeron el 60 %, ahora hay $v - 0,6v = 0,4v$. Como la nueva relación de las ranas azules a las ranas verdes es igual a la relación anterior pero en el orden opuesto, se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{v}{a} &= \frac{1,6a}{0,4v} \\ \frac{v}{a} &= 4\frac{a}{v} \\ \frac{v^2}{a^2} &= 4 \\ \frac{v}{a} &= 2 \\ v &= 2a \end{aligned}$$

Como inicialmente había a ranas azules al aumentar el 60 % ahora hay $1,6a$. Por otra parte, inicialmente había $2a$ ranas verdes al disminuir el 60 % ahora hay $0,8a$. Finalmente, pasamos de tener $3a$ ranas, a tener $2,4a$ ranas, por lo que las ranas disminuyeron el 20 %.

5.4. Ejercicios propuestos

A) Resuelva los siguientes problemas que involucran el concepto de razón:

546. *Dos números están a razón* $\frac{3}{5}$ *. Si el menor de ellos es* 189 *¿Cuál es el otro?*

547. *La suma de dos números es* 2920 *y se encuentra en razón* $\frac{5}{3}$*. ¿Cuáles son los números?*

548. *Dos números se encuentran en razón* $\frac{1}{4}$*. Si se sabe que uno es* 6 *unidades mayor que el otro, ¿cuáles son los números?*

549. *En un triángulo rectángulo, los ángulos agudos están en razón* $\frac{1}{2}$ *y. ¿Cuánto mide cada uno de ellos?*

550. *En un triángulo isósceles el lado desigual está en razón* $\frac{1}{3}$ *a la suma de los dos iguales. Si el lado desigual mide* 1,8 *centímetros. ¿Cuál es perímetro del triángulo?*

551. *Si en el triángulo las medidas de los ángulos están en razón* $1 : 2 : 3$*. Determinar las medidas de los ángulos.*

552. *En un pueblo, la razón entre hombres adultos y mujeres adultas es de* $2 : 3$ *y la razón entre las mujeres adultas y los niños es de* $8 : 1$*. ¿Cuál es la razón entre los adultos (hombres y mujeres) y los niños?*

553. *Las edades actuales de Benjamin, Nicole y Pedro están en la razón* $4 : 7 : 5$*. Si hace* 15 *años estaban en la razón* $3 : 9 : 5$*. Calcule la edad de Nicole dentro de* 7 *años.*

554. *En un examen los problemas resueltos y no resueltos están en la razón* $2 : 3$*. Dentro de los problemas contestados, el número de problemas resueltos correctamente y los que no, están en la razón* $1 : 2$*. ¿Cuál es la razón de los problemas mal contestados con respecto al total?*

555. *En una conferencia regional, la razón de mujeres y hombres es de* $\frac{2}{3}$*. En un momento dado se retiran* 8 *mujeres y llegan* 4 *hombres, con lo que la razón es ahora de* $\frac{3}{5}$*. ¿Cuántas mujeres deben llegar para que el número de mujeres sea igual al número de hombres?.*

556. *La razón entre dos números es* $8 : 3$ *y su diferencia es* 55*. Hallar los números.*

B) Indica los pares de magnitudes que son directamente proporcionales, los que son y los que no guardan relación de proporcionalidad:

557. *El peso de las manzanas compradas y el precio pagado por ellas.*

558. *La edad de una persona y su estatura.*

559. *El número de obreros que construyen una valla y el tiempo invertido en su construcción.*

C) Resuelva los siguientes problemas relativos a proporcionalidad:

560. *En una quinta hay naranjos, manzanos y duraznos que suman en total* 300 *árboles. Si hay* 120 *naranjos y la razón entre los duraznos y manzanos es* $7:3$, *entonces ¿cuántos duraznos hay en la quinta?*

561. *Sea* p *inversamente proporcional al cuadrado de* q, *cuando* $p = 16$, $q = 1$. *Calcula el valor de* p *cuando* $q = 8$.

562. *Se desea cortar un alambre de* 720 *mm., en tres trozos de modo que la razón de sus longitudes sea* $8 : 6 : 4$. *¿Cuánto mide cada trozo de alambre, de acuerdo al orden de las razones dadas?*

563. *Se sabe que* a *es directamente proporcional al número* $\dfrac{1}{b}$ *y cuando* a *toma el valor* 15, *el valor de* b *es* 4. *Calcula el valor de* b *cuando* a *toma el valor* 6.

564. *En un mapa (a escala) se tiene que* 2 *cm. en él corresponden a* 25 *km. en la realidad. Si la distancia en el mapa entre dos ciudades es* $5,4$ *cm., entonces ¿Cuál es la distancia real?*

565. *Dos variables* N *y* M *son inversamente proporcionales entre sí. Para mantener el valor de la constante de proporcionalidad, si* M *aumenta al doble. ¿Que debe ocurrir con* N*?*

566.

z	8	a	1	1/4
y	2	4	16	b

En la tabla anterior z *es directamente proporcional a* $\dfrac{1}{y}$ *, según los datos registrados calcula el valor de* $\dfrac{a}{b}$.

567. *La escala de un mapa es* 1*:* 500,000. *Si en el mapa la distancia entre dos ciudades es* $3,5$ *cm, ¿cuál es la distancia real entre ellas?*

568. *Los cajones* M *y* S *pesan juntos* K *kilogramos. Si la razón entre los pesos de* M *y* S *es* 3*:*4, *entonces la razón* $S : K$ *es*

569. *Una nutricionista mezcla tres tipos de jugos de fruta de modo que sus volúmenes están en la razón* $1 : 2 : 3$. *Si el volumen del segundo tipo es de* 4 *litros, ¿cuántos litros tiene la mezcla total?*

570. *En un curso de* 40 *estudiantes, la razón entre mujeres y hombres es* m: h. *¿Cuál es la expresión que representa el número de mujeres?*

571. *A un evento asistieron 56 personas. Si había 4 mujeres por cada 3 hombres, ¿cuántas mujeres asistieron al evento?*

572. *Si* h *hombres pueden fabricar* 50 *artículos en un día, ¿cuántos hombres se necesitan para fabricar* x *artículos en un día?*

573. *En un balneario, hay* 2,500 *residentes permanentes. En el mes de febrero, de cada seis personas solo una es residente permanente, ¿cuántas personas hay en febrero?*

574. *Cierto número de prótesis se han comprado por* 100 UF *Si el precio por ejemplar hubiera sido* 1 UF. *menos, se tendrían* 5 *prótesis más por el mismo precio. ¿Cuántas prótesis se compró?*

575. *En una carrera de* 120 *m. Ana le gana a Bety por* 30 *m y a Karla por* 20 *m . En una carrera de* 240 *m. ¿Por cuánto gana Carla a Betty?*

576. *Una llave* X, *llena un estanque en* 20 *minutos, otra llave* Y *se demora* 30 *minutos en llenar el mismo estanque. ¿Cuánto demorarán ambas llaves trabajando juntas?*

577. *Un trabajador* X, *trabajando solo se demora* t *días en hacer un jardín, otro trabajador* Y *se demora* $t+15$ *días en hacer el mismo jardín, y si ambos trabajan juntos se demoran* 10 *días. ¿Cuántos días se demorará* Y *trabajando solo?*

578. *Si el índice de crecimiento* C *de una población es inversamente proporcional al índice* D *de desempleo y en un instante en que* $C = 0,5$ *se tiene que* $D = 0,25$, *entonces entre ambos índices. ¿Cuál es el valor de* D*?.*

579. *Un agricultor siembra* 2 *hectáreas en* 20 *días, ¿Cuántas hectáreas siembran cinco agricultores en* 12 *días.*

580. *La mitad de una parcela de* 10,000 m^2, *está dividida en dos partes que están en la razón* 1:4. *La parte menor será utilizada para cultivo, ¿cuántos metros cuadrados serán usados para este fin?*

581. *Entre tres hermanos compran un número de rifa que cuesta* \$1,000. *Juan aporta con* \$240, *Luis con* \$360 *y Rosa aporta el resto. El premio es de* \$60,000 *Deciden, en caso de ganarlo repartirlo en forma directamente proporcional al aporte de cada uno, ¿Qué cantidad de dinero le correspondería a Rosa?*

582. *Con* 17 *kg de pienso alimentamos a* 204 *gallinas. ¿Cuántos kilos de pienso son necesarios para alimentar a* 600 *gallinas?*

583. *Un depósito cuenta con tres válvulas de desagüe. Si se abren las tres, el depósito se vacía en* 90 *minutos. ¿Cuánto tardará en vaciarse si solo se abren dos de las válvulas?*

584. *Un taller, trabajando* 8 *horas diarias, ha necesitado* 5 *días para fabricar* 1000 *piezas. ¿Cuántos días tardará en hacer* 3000 *piezas trabajando* 10 *horas diarias?*

585. *La suma de los términos de una razón cuyo valor es menor que* 1 *es* 137*. Si al mayor se le resta* 29 *y al menor se le suma* 29*, la relación inicial se invierte. Calcule la suma de cifras de ambos términos*

586. *En un salón de clase el número de varones es al número de mujeres como* 3 *es a* 5 *pero si se considera al profesor y a una alumna menos la nueva relación será* $\frac{2}{3}$*.¿Cuántas alumnas hay en el salón?*

D) Resuelva los siguientes problemas relativos a porcentajes:

587. *En una tienda se decide subir todos los precios en un* 15 %*. ¿Por cuál número se deben multiplicar los precios antiguos para obtener el nuevo precio?*

588. *En una liquidación de invierno un abrigo vale* \$16,500 *el cual ya ha sido rebajado en un* 70 %*. ¿Cuánto costaba el abrigo antes de la liquidación?*

589. *En un negocio un cliente recibe, por cada* \$5,000 *de compra, una estampilla de descuento equivalente al* 4 % *de esa cantidad. Si el cliente compra un artículo en* \$19,800*, ¿a cuánto asciende el valor de las estampillas de descuento?*

590. *En un curso de* 30 *alumnos, la razón entre los alumnos que practican teatro y los que no practican teatro, es de* 1 : 5*. ¿Qué porcentaje de alumnos practica teatro con respecto al total de alumnos del curso?*

591. *Si un número* n *se divide por* 6 *resulta* 2*. ¿Cuál es el* 50 % *de* n*?*

592. *Un agricultor siembra* 2 *hectáreas en* 20 *días. ¿Cuántas hectáreas siembran cinco agricultores en* 12 *días.*

593. *En un supermercado hay supervisores, cajeros y reponedores. Si el* 60 % *de los trabajadores son reponedores,* 18 *son supervisores y éstos son un tercio de los cajeros. ¿Cuál es el total de trabajadores?*

594. *Un par de zapatos más dos pantalones valen* \$70,000 *en una tienda. Se ofrece una oferta, al comprar dos o más pares de zapatos del mismo precio se descuenta un 10 % en cada par y por tres o más pantalones del mismo precio un 15 % en cada pantalón. Juan paga por tres pantalones* \$38,250 *y luego, compra dos pares de zapatos. ¿Cuánto pagó Juan por los dos pares de zapatos?*

595. *Un vendedor recibe* 215,000 *de sueldo, al mes, más un 8 % de las ventas por comisión. ¿Cuánto debe vender para ganar* 317,000 *en el mes?*

596. *Un depósito contiene* 20 *litros que equivalen al* 25 % *de su capacidad, entonces para que llegue al* 30 % *de su capacidad ¿Cuántos litros hay que agregar?*

597. *En una asignatura se toman tres pruebas con las ponderaciones* 30 %, 30 % *y* 40 %, *respectivamente. Un alumno obtiene un* $5,0$ *en la primera y un* $4,0$ *en la segunda. ¿Qué nota debe obtener en la tercera prueba para que su promedio final sea un* $5,1$*?*

598. *Si uno de los catetos de un triángulo rectángulo isósceles aumenta su largo en un 20 % y el otro disminuye en el mismo porcentaje, ¿Qué ocurre con el área del triángulo rectángulo resultante, respecto del área original?*

599. *En un colegio se necesita colocar en la cocina* $70m^2$ *de cerámica y* $100m^2$ *de piso flotante para la sala de computación. Si el metro cuadrado de cerámica cuesta* $\$C$ *y el metro cuadrado de piso flotante es un* 75 % *más caro que la cerámica. Calcula el costo total.*

600. *Si el* 35 % *de* a *es* 4 *y el* 12 % *de* b *es* 6*. Calcule el valor de* $\dfrac{b}{a}$.

601. *Un niño aumenta su peso de* 15 *kg a* 18 *kg. ¿En qué porcentaje aumentó?*

602. *Un folleto consta de* 40 *páginas. De ellas el* 20 % *es geometría, el* 10 % *es álgebra y el resto astronomía. ¿Cuántas páginas son dedicadas a la astronomía?*

603. *En una casa comercial hacen un descuento de un* 15 % *de la mitad del precio marcado de una mercadería. Si la mercadería tiene un precio marcado de* \$600*. ¿Cuánto me descuentan?*

604. *En una vitrina de un negocio se observa lo siguiente: "Antes* \$400*, ahora* \$300*". Con respecto al precio original. ¿Cuál es el porcentaje de rebaja?*

605. *En un curso hay 30 alumnos. La relación entre los que practican teatro y los que no practican es* 1*:* 5 *respectivamente. ¿Qué porcentaje practica teatro en relación al total del curso?*

606. *Una tienda paga a sus dos empleados* M *y* P *de la siguiente manera:* M *recibe el* 8 % *de las ganancias de las ventas del mes y* P *recibe un sueldo base de* \$100,000 *más un* 2 % *de las ganancias de las ventas del mes. Si en total el negocio, en un mes, vende* \$12,000,000 *y solo el* 30 % *corresponde a ganancias. ¿Cuánto recibe como sueldo, ese mes, cada empleado?*

607. *Un banco paga un interés simple con una tasa anual del* 80 %*. Si se abrió una cuenta el* 01 *de enero del año pasado con* \$1,000*, calcula cuánto habrá en la cuenta al* 31 *de diciembre del próximo año.*

608. *¿A qué interés simple anual debe colocarse un capital de* \$3,200*, durante 6 años, para obtener una ganancia de* $\$157,5$*?*

609. *¿Qué capital hay que invertir al interés compuesto del* 2 % *trimestralmente para obtener al cabo de 2 años* \$1,300,000?*?*

610. *¿A qué interés compuesto anual debe colocarse un capital de* \$10,000*, durante tres años, para obtener una ganancia de* \$7,280*?*

E)

A	10	15	20
B	3	x	$1,5$

Diga cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) verdadera(s) para la tabla anterior.

611. *A y B son directamente proporcionales.*

612. *El valor de x es* 2*.*

613. *La constante de proporcionalidad inversa es* 30*.*

F) Diga cuál de las siguientes afirmaciones son verdaderas si se sabe que 2 electricistas hacen un trabajo en 6 días, trabajando 8 horas diarias.

614. 4 *electricistas harán el trabajo en* 3 *días, trabajando* 8 *horas diarias.*

615. *Los electricistas y las horas son directamente proporcionales.*

616. *La constante de proporcionalidad es* 3*.*

G) La ley combinada que rige el comportamiento ideal de un gas es $\dfrac{P \times V}{T} =$ constante, donde P es la presión del gas, V su volumen y T su temperatura absoluta. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

617. *A volumen constante la presión es directamente proporcional a la temperatura.*

618. *A temperatura constante la presión es inversamente proporcional al volumen.*

619. *A presión constante el volumen es inversamente proporcional a la temperatura.*

I) Para hacer arreglos en un edificio se contratará un cierto número de electricistas. Si se contratara 2 electricistas, ellos se demorarían 6 días, trabajando 8 horas diarias. ¿Cuál de las siguientes aseveraciones son verdaderas?

620. *Si se contrataran* 4 *electricistas, se demorarían* 3 *días, trabajando* 8 *horas diarias.*

621. *El número de electricistas y el numero de días son variables directamente proporcionales.*

622. *La constante de proporcionalidad entre las variables es* 3.

J) Con 5 vasos de 250 cc cada uno, se llena un jarro. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

623. *Si la capacidad de cada vaso fuera de* 125 *cc, se necesitarían* 10 *vasos para llenar el jarro.*

624. *Si la capacidad de cada vaso aumentara en un* 25 %*, se necesitarían* 44 *vasos para llenar el jarro.*

625. *Con* 2 *vasos de* 250*cc se llena el* 40 % *de la capacidad del jarro.*

K) El estadio A de una ciudad tiene capacidad para 40,000 personas sentadas y otro B para 18,000. Se hacen eventos simultáneos; el A ocupa hasta el 25 % de su capacidad y el B llena sólo el 50 %. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

626. *El estadio A registró mayor asistencia que el B.*

627. *Si se hubiese llevado a los asistentes de ambos estadios al A, habría quedado en éste, menos del* 50 % *de sus asientos vacíos.*

628. *Los espectadores que asistieron en conjunto a los dos estadios, superan en* 1000 *la capacidad de B.*

L) En un corral, p gallinas son blancas, las que corresponden a la quinta parte del total T de gallinas. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

629. *Las gallinas que no son blancas son* $\frac{4}{5}T$.

630. *El* 20 % *de las gallinas son blancas.*

631. *El número total de gallinas que no son blancas es cuatro veces el número de gallinas que son blancas.*

5.4.1. Soluciones

A)

546 315

547 1825 y 1095.

548 2 y 8

549 30° y 60°

550 7,2 cm.

551 30°, 60° y 90°

552 $\frac{40}{3}$

553 49 años

554 $\frac{4}{15}$

555 64 mujeres

556 33 y 88

B)

557 directamente proporcionales

558 no guardan relación

559 inversamente proporcionales

C)

560 126 duraznos

561 $p = \frac{1}{4}$

562 $320mm$ $240mm$ $160mm$

563 $b = 10$

564 $67,5$ km

565 N debe disminuir a la mitad

566 $\frac{1}{16}$

567 $17,5$ km

568 $S : K = 4 : 7$

569 12 litros

570 $\frac{40m}{m+h}$

571 32 mujeres

572 $\frac{hx}{50}$

573 15,000 personas

574 20 prótesis

575 por 20 metros

576 12 minutos

577 30 días

578 $D = 0,125C$

579 6 hectáreas

580 1,250 m^2

581 24,000

582 50 kg

583 270 minutos

584 12 días

585 20

586 25 alumnas

D)

587 por $1,15$

588 \$55,000

589 \$600

590 5 alumnos

591 6

592 6 hectáreas

593 180 trabajadores

594 pagó \$72,000

595 \$1,275,000

596 4 litros

597 $6,0$

598 Disminuye en un $4\,\%$

599 $\$245C$

600 $\dfrac{35}{8}$

601 En $20\,\%$

602 28 páginas

603 $45

604 $25\,\%$

605 $16,6\,\%$

606 M recibe $960.000
P recibe $340.000

607 $3,400

608 $6,03\,\%$

609 $1,249,520

610 $20\,\%$

E) **611** Falsa **612** Verdadera **613** Verdadera

F) **614** Falsa **615** Verdadera **616** Verdadera

G) **617** Verdadera **618** Verdadera **619** Falsa

H) **615** Verdadera **616** Verdadera **617** Verdadera

I) **620** Verdadera **621** Falsa **622** Falsa

J) **623** Verdadera **624** Verdadera **625** Verdadera

K) **626** Verdadera **627** Falsa **628** Verdadera

L) **629** Verdadera **630** Verdadera **631** Verdadera