

Topología

Conceptos Básicos

Dr. Cristián Mallol Comandari

APOYO ACADÉMICO A PREGRADO



EDICIONES UNIVERSIDAD DE LA FRONTERA

55t
1

Topología
Conceptos Básicos

Topología

Conceptos Básicos

Cristián Mallol Comandari

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA
FACULTAD DE INGENIERÍA CIENCIAS Y ADMINISTRACIÓN

EDICIONES UNIVERSIDAD DE LA FRONTERA

Para mis hijas

Carola Bernardita, Florentina Daniela, Regina Tatiana y Ana Emilia

Estas Notas introductorias surgen después de más de diez años de experiencia docente impartiendo el curso de Topología en la Carrera de Ingeniería Matemática de la Universidad de La Frontera, materia que ha representado para los estudiantes una de sus primeras incursiones en niveles de abstracción, con sus delicias y dificultades: les agradezco a ellos, de todo corazón, el interés y la paciencia.

Las ideas básicas que aquí se exponen constituyen los primeros pasos en el estudio del Análisis, propio de programas de Licenciatura en Matemáticas, de Pedagogía en Matemáticas y de algunas Ingenierías. Los ejercicios resueltos que se encuentran al final de esta monografía deben ser utilizados como apoyo por los estudiantes y en caso alguno buscan reemplazar la reflexión personal, única manera de madurar en los tópicos de la abstracción.

Estas Notas no hubieran sido lo mismo sin el trabajo de mis ayudantes Ruben Martínez, Adrialy Muci y Rodrigo Garcés, estudiantes destacados que aportaron frescura y pasión en la enseñanza de los conceptos que aquí se exponen: para ellos toda mi gratitud.

Quiero agradecer también a mis colegas por su lectura y sugerencias, particularmente al Doctor Julio López.

Finalmente expreso todo mi reconocimiento a las Ediciones de la Universidad de La Frontera y a su Dirección de Extensión por atreverse a publicar estas páginas.

Contenidos

1. Preamblelo Conjuntista, 9

Ejercicios, 14

2. Introducción, 19

Ejercicios, 20

3. Espacios topológicos, primeras nociones, 21

Ejercicios, 27

4. Continuidad, construcción de espacios, 31

Ejercicios, 38

5. Conexidad, 43

Ejercicios, 47

6. Compacidad, 49

Ejercicios, 55

7. Espacios Métricos, 57

Ejercicios, 65

8. Problemas resueltos, 69

Capítulo 1, 69

Capítulo 3, 76

Capítulo 4, 82

Capítulo 5, 88

Capítulo 6, 91

Capítulo 7, 94

9. Apéndice, 103

El infinito un sueño humano

Referencias, 119

1. Preambulo Conjuntista

Un conjunto es una colección de objetos de cualquier naturaleza; este está determinado por los elementos que lo componen, es decir por los elementos que pertenecen a tal conjunto, noción que denotamos por el símbolo $\in$. Darse un conjunto es por tanto conocer la **lista** de los elementos que lo conforman (por ejemplo, $M = \{1, 2, 4, 8\}$) o la **propiedad** que deben satisfacer sus elementos (por ejemplo $S = \{s ; s \text{ número entero múltiplo de } 4\}$).

A partir de esto, podemos establecer las **operaciones conjuntistas** bien conocidas: sean A y B dos conjuntos

- $A \cup B = \{x ; x \in A \text{ o } x \in B\}$: la **reunión** de A y B .
- $A \cap B = \{x ; x \in A \text{ y } x \in B\}$: la **intersección** de A y B . Si A y B no tienen elementos comunes decimos que son disjuntos; en tal caso la intersección es el **conjunto vacío**: $A \cap B = \emptyset$.

De la definición de las operaciones, se infiere que estas son **conmutativas**, es decir que se tiene: $A \cup B = B \cup A$ y $A \cap B = B \cap A$. También son **asociativas**, es decir que $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ y $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, por lo que podemos escribir sin problemas de ambigüedad $A \cup B \cup C$ y $A \cap B \cap C$. Por último, estas operaciones se **distribuyen** (una respecto de la otra), es decir: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ y $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

Otra operación es la siguiente:

- $A \setminus B = \{x \in A ; x \notin B\}$: la **diferencia** de A y B .

No es difícil demostrar, utilizando ejemplos, que aquí no hay conmutatividad ni asociatividad.

Un conjunto A es **subconjunto** de un conjunto B , cuestión que denotamos por $A \subset B$, si todo elemento de A es también un elemento de B , lo que escrito en notación matemática se expresa como:

$$A \subset B \quad \text{si y sólo si} \quad \left(\begin{array}{c} \text{para todo} \\ \forall \quad x, \text{ si } x \in A \end{array} \Rightarrow x \in B \right).$$

Es claro que se tiene la equivalencia $A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ y } B \subset A$. También es inmediato que se tiene $A \cap B \subset A, B \subset A \cup B$ y por último no es difícil

establecer que la inclusión ($\subset$) es compatible con las operaciones conjuntistas recién señaladas, es decir que si $A \subset B$ se tiene $A \cup C \subset B \cup C$, $A \cap C \subset B \cap C$ y $A \setminus C \subset B \setminus C$, para cualquier conjunto C .

Dado un conjunto E denotamos por $\wp(E)$ el conjunto cuyos elementos son todos los subconjuntos de E ; este se denomina conjunto de las **partes** de E . Si $A \in \wp(E)$ se define el **complemento** de A respecto de E por $\complement_E A = E \setminus A$; es claro que $\complement_E A = \{x \in E ; x \notin A\}$. No presenta problemas ver que se tiene: $A \cup \complement_E A = E$ y $A \cap \complement_E A = \emptyset$. Si no hay ambigüedad posible en cuanto al conjunto respecto del cual se complementa, podemos denotar simplemente $\complement A$. La acción de complementar invierte la inclusión, es decir si A y B son subconjuntos de E y $A \subset B$ entonces $\complement B \subset \complement A$; respecto de las operaciones conjuntistas no es difícil establecer también que si $A, B \in \wp(E)$ entonces se tiene: $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$, $\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$ y $A \setminus B = A \cap \complement B$; las dos primeras identidades se conocen como las leyes de De Morgan.

Dados $a \in E$ y $b \in F$ se define el **par ordenado** de estos elementos por la escritura (a, b) y la propiedad: $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c$ y $b = d$. Esto quiere decir que el orden en que aparecen los elementos en la escritura es esencial; no es el caso de $\{a, b\}$ donde el orden de escritura no importa; por lo demás, una definición conjuntista de par ordenado está dada por $(a, b) = \{a, \{a, b\}\}$. El conjunto de todos los pares ordenados, $\{(x, y) ; x \in E, y \in F\}$, se llama el **producto cartesiano** de E y F y se denota por $E \times F$; es claro que en general, salvo si $E = F$, se tiene $E \times F \neq F \times E$. Respecto de las operaciones conjuntistas, si $A, A' \subset E$ y $B, B' \subset F$ se tiene:

- $A \subset A' \subset E$ y $B \subset B' \subset F \Rightarrow A \times B \subset A' \times B' \subset E \times F$,
- $(A \times B) \cup (A' \times B') \subset (A \cup A') \times (B \cup B')$,
- $(A \times B) \cap (A' \times B') = (A \cap A') \times (B \cap B')$,
- $\complement A \times \complement B \subset \complement(A \times B) = (\complement A \times F) \cup (E \times \complement B)$.

Una **relación** de E en F es cualquier manera de asociar elementos de E con elementos de F ; esto lo denotamos por $R : E \rightarrow F$ y decimos que E es el conjunto de salida y F el conjunto de llegada de la relación. No hay restricción alguna para definir una relación, salvo el orden en la escritura: si $a \in E$ está en relación R con $b \in F$ escribimos aRb . Es claro que dado el orden inherente, podemos identificar aRb con (a, b) ; esto nos lleva a entender que

una relación R puede concebirse también como un subconjunto R de $E \times F$ y usar una u otra escritura dependiendo del contexto en que se trabaje.

Un caso particular son las relaciones definidas sobre un conjunto, es decir $R : E \rightarrow E$; entre las propiedades que puede tener este tipo de relación destacamos las siguientes:

- Reflexividad: $\forall a \in E$ se tiene aRa .
- Simetría: si $a, b \in E$ y aRb entonces también se tiene bRa .
- Antisimetría: si $a, b \in E$, $a \neq b$ y aRb entonces no se tiene bRa .
- Transitividad: si $a, b, c \in E$ tal que aRb y bRc entonces se tiene aRc .

Ahora bien, la gran mayoría de las relaciones no satisface ninguna de estas propiedades. Sin embargo, aquellas que verifican la primera, tercera y cuarta se llaman **relaciones de orden** y sirven para establecer comparaciones entre los elementos del conjunto. También están las **relaciones de equivalencia**, que son aquellas que verifican la primera, segunda y cuarta propiedad y se utilizan para clasificar objetos (elementos, conjuntos, etc.) que tienen ciertos grados de similaridad; la clasificación es dada por **las clases de equivalencia**, lo que se define $\forall a \in E$ como $cl(a) = \{x \in E ; xRa\}$. Las clases de equivalencia constituyen una partición de E , es decir son conjuntos no vacíos, disjuntos y cuya reunión da la totalidad de E .

Tanto las relaciones de orden como las de equivalencia aparecen en diversos temas de la matemática (álgebra, análisis, teoría de grafos, etc.) y son herramientas importantes.

Una **función** de E en F es un caso particular de relación, en el sentido de que todo elemento de E tiene un y sólo un elemento asociado en F . Si $\varphi : E \rightarrow F$ es una función y $x \in E$, el único elemento de F relacionado con x a través de φ se denota por $\varphi(x)$ y se llama la **imagen** de x . Si tenemos funciones $\varphi : E \rightarrow F$ y $\psi : F \rightarrow G$, la función **compuesta** de φ y ψ se define por $\psi \circ \varphi : E \rightarrow G$, cuya acción sobre $x \in E$ está dada por $(\psi \circ \varphi)(x) =: \psi(\varphi(x))$. La escritura $\psi \circ \varphi$ no es conmutativa: por ejemplo tomemos $\varphi, \psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definidas por $\varphi(n) = 1 + n$ y $\psi(n) = n^2$; se tiene $(\psi \circ \varphi)(n) = 1 + 2n + n^2$ y $(\varphi \circ \psi)(n) = 1 + n^2$. Más aun, en general, si tenemos la compuesta $\psi \circ \varphi$ escribir $\varphi \circ \psi$ puede no tener sentido alguno,

pués la composición de funciones requiere que el conjunto de llegada para una función sea el conjunto de salida para la otra.

Como vimos, todas las funciones salen de la misma manera del conjunto que hace de dominio: de cada elemento sale una y sólo una flecha. En cuanto a como llegan, se puede hacer una clasificación : una función es **inyectiva** si cada elemento del conjunto de llegada recibe a lo más una flecha (dicho de otra manera, elementos distintos de E tienen imágenes distintas en F); es **sobreyectiva** si cada elemento del conjunto de llegada recibe a lo menos una flecha; por último, es **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva, es decir si cada elemento del conjunto de llegada recibe una y solo una flecha. Escrito en lenguaje matemático tenemos: sea $\varphi : E \rightarrow F$; entonces

- φ es inyectiva $\Leftrightarrow \forall a, b \in E, (a \neq b \Rightarrow \varphi(a) \neq \varphi(b))$.
- φ es sobreyectiva $\Leftrightarrow \forall c \in F, \exists a \in E$ tal que $\varphi(a) = c$.
- φ es biyectiva $\Leftrightarrow \forall c \in F, \exists ! a \in E$ tal que $\varphi(a) = c$.

Demás está decir que la mayoría de las funciones no corresponde a ninguno de estos tres grupos. Sin embargo, este tipo de funciones juega un importante rol en cuanto a establecer equivalencias o comparaciones entre estructuras (conjuntistas, algebraicas, etc.).

Si entre dos conjuntos existe una biyección, decimos que tienen el mismo **cardinal**; si existe una inyección entre A y B o, lo que es equivalente, una sobrección entre B y A (ver ejercicios) decimos que $\text{card}(A) \leq \text{card}(B)$. El cardinal de $\mathbb{N}$ se denota $\aleph_0$ (alef cero); si $\text{card}(A) = \aleph_0$ decimos que A es numerable; para estos tópicos recomendamos el documento “*El Infinito: un Sueño Humano*” que se anexa en apéndice.

Dado un conjunto E le asociamos su **función identidad** $Id_E : E \rightarrow E$ definida por $Id_E(x) = x$ para todo $x \in E$; es claro que se tiene $\varphi \circ Id_E = \varphi$ para toda función φ que sale de E y $Id_E \circ \psi = \psi$ para toda función ψ que llega a E . Si se tiene $E \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\rightleftarrows}} F$ de manera que $\psi \circ \varphi = Id_E$ y $\varphi \circ \psi = Id_F$ decimos que φ y ψ son **inversas** una de otra; utilizando la asociatividad de la composición de funciones, no es difícil mostrar que la inversa, de existir, es única, por lo que denotamos $\psi = \varphi^{-1}$ (evidentemente que también se tiene $\varphi = \psi^{-1}$). Es un buen ejercicio demostrar que decir “ φ tiene inversa que” es equivalente decir “ φ es biyectiva”.

Si $\varphi : E \rightarrow F$ es una función, $A \subset E$ y $B \subset F$ definimos la **imagen directa** de A por φ y la **imagen recíproca** de B por φ a los respectivos conjuntos $\varphi(A) =: \{\varphi(a) ; a \in A\}$ y $\varphi^{-1}(B) =: \{x \in E ; \varphi(x) \in B\}$; llamamos la atención de que esta escritura no significa que φ tenga inversa (es una notación molesta), sin embargo, cuando existe φ^{-1} hay coincidencia entre la imagen recíproca de φ y la imagen directa de φ^{-1} . Las imágenes directas son subconjuntos de F y las imágenes recíprocas son subconjuntos de E ; esto significa que al darse una función de E en F nos damos también aplicaciones de $\wp(E)$ en $\wp(F)$ (la imagen directa) y de $\wp(F)$ en $\wp(E)$ (la imagen recíproca).

El comportamiento de estas nuevas aplicaciones respecto de las operaciones conjuntistas es disímil: la imagen directa es solo compatible con la reunión, es decir, si A_1 y A_2 son subconjuntos de E se tiene entonces que $\varphi(A_1 \cup A_2) = \varphi(A_1) \cup \varphi(A_2)$; en cambio, con respecto a la intersección sólo se tiene la inclusión $\varphi(A_1 \cap A_2) \subset \varphi(A_1) \cap \varphi(A_2)$. La imagen recíproca funciona bien con todas las operaciones conjuntistas, es decir, si $B_1, B_2 \subset F$ se tiene $\varphi^{-1}(B_1 \cup B_2) = \varphi^{-1}(B_1) \cup \varphi^{-1}(B_2)$, $\varphi^{-1}(B_1 \cap B_2) = \varphi^{-1}(B_1) \cap \varphi^{-1}(B_2)$ y $\varphi^{-1}(B_1 \setminus B_2) = \varphi^{-1}(B_1) \setminus \varphi^{-1}(B_2)$.

Terminamos este capítulo con el concepto de **familia**: una familia de objetos (conjuntos, elementos, estructuras, etc.) está dada por la escritura $(Objeto_i)_{i \in I}$; el conjunto I se llama el conjunto de índices; este conjunto puede ser finito o infinito, ordenado o sin orden. En definitiva una familia no es más que las imágenes de una función del conjunto de índices al conjunto que contiene los objetos que se quieren indiciar; así por ejemplo, $(b_j)_{j \in J}$ es una aplicación $f : J \rightarrow B$ y $f(j) = b_j$. Si el conjunto de índices es $\mathbb{N}$ en vez de familia también comunmente se habla de sucesión

Si $(A_i)_{i \in I}$ es una familia de conjuntos (o subconjuntos de un conjunto) la reunión y la intersección de los elementos de la familia se denotan y definen por: $\bigcup_{i \in I} A_i = \{a ; a \in A_i, \text{ algún } i \in I\}$, $\bigcap_{i \in I} A_i = \{a ; a \in A_i, \forall i \in I\}$. No

presenta dificultad ver que se tiene: $B \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} (B \cap A_i)$ y también

$B \cup \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} (B \cup A_i)$; luego $\left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \cap \left(\bigcup_{j \in J} B_j \right) = \bigcup_{i \in I, j \in J} (A_i \cap B_j)$ y

$\left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) \cup \left(\bigcap_{j \in J} B_j \right) = \bigcap_{i \in I, j \in J} (A_i \cup B_j)$.

Por último, las leyes de De Morgan respecto de los complementos:

$$\complement\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} \complement A_i \text{ y } \complement\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} \complement A_i.$$

Ejercicios

1. Sea U un conjunto y definamos los conjuntos: $\{n \in \mathbb{N} / n^2 < 0\}$; $\{A \subset U / A = \complement A\}$; $\{u \in U / u \neq u\}$; $\{x \in \mathbb{R} / x^3 \leq 125\}$. Dé razones y argumentos que prueben que los tres primeros son iguales y que están contenidos estrictamente en el último.
2. Sean $A, B \subset U$.
 - a) Demuestre las leyes de Morgan:
 $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$; $\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$
 - b) Demuestre las siguientes expresiones son equivalentes a $A \subset B$:
 $\complement B \subset \complement A$; $\wp(A) \subset \wp(B)$; $A \cap B = A$; $A \cup B = B$;
 $A \cap X \subset B \cap X, \forall X \in \wp(U)$; $A \cup X \subset B \cup X, \forall X \in \wp(U)$.
3. Sean E, F dos conjuntos y $E * F = \{A \times B / A \subset E \text{ y } B \subset F\}$. Compare y estudie condiciones para que haya igualdad, entre los conjuntos: $E * F$, $\wp(E \times F)$ y $\wp(E) \times \wp(F)$.
4. Sean $A, B \subset E$, $C, D \subset F$ y $f : E \rightarrow F$ una función.
 - a) Estudie si hay relación entre: $f(\complement A)$ y $\complement f(A)$.
 - b) Demuestre que: $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$; $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;
 $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
 - c) Pruebe que f es inyectiva si y sólo si $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ para todo $A, B \subset E$.
 - d) Además demuestre que:
 - 1) f es inyectiva si y sólo si $f(\complement A) \subset \complement f(A)$ para todo $A \subset E$.
 - 2) f es sobreyectiva si y sólo si $\complement f(A) \subset f(\complement A)$ para todo $A \subset E$.

5. Sean $f : E \rightarrow F$ una función y $C, D \subset F$. Demuestre que:

$$C \subset D \Rightarrow f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D); \quad f^{-1}(\mathbb{C}D) = \mathbb{C}f^{-1}(D);$$
$$f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D); \quad f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D).$$

6. Demuestre que para todo $A \subset E$, y $D \subset F$ se tiene:

- a) $A \subset f^{-1}(f(A))$ y $f(f^{-1}(D)) \subset D$.
- b) f es inyectiva si y sólo si $A = f^{-1}(f(A))$ para todo $A \subset E$.
- c) f es sobreyectiva si y sólo si $f(f^{-1}(D)) = D$ para todo $D \subset F$.

7. Sean $f : E \rightarrow F$ y $h : E \rightarrow H$ funciones. Demuestre que se tiene:

- a) Si $h \circ f$ es inyectiva entonces f es inyectiva .
- b) Si $h \circ f$ es sobreyectiva entonces g es sobreyectiva.

8. Sean $f : E \rightarrow F$ y $h, k : F \rightarrow E$ funciones tales que $h \circ f = Id_E$ y $f \circ k = Id_F$. Demuestre que f es biyectiva y $h = k$.

9. Concluya del ejercicio anterior que f es biyectiva si y solamente si admite una función inversa, es decir, $f^{-1} : F \rightarrow E$ tal que

$$f^{-1} \circ f = Id_E \quad \text{y} \quad f \circ f^{-1} = Id_F.$$

10. Sea $f : E \rightarrow F$ una función. Demuestre que se tiene:

- a) Si f es inyectiva entonces existe $g : F \rightarrow E$ sobreyectiva tal que $g \circ f = Id_E$.
- b) Si f es sobreyectiva entonces existe $g : F \rightarrow E$ inyectiva tal que $f \circ g = Id_F$.

11. Sean F un conjunto finito totalmente ordenado y $f : F \rightarrow F$ una función. Demuestre que:

- a) Si f es creciente, entonces existe $a \in F$, tal que $f(a) = a$ (es decir, f tiene un punto fijo).

- b) Si f es decreciente, entonces tiene un punto fijo o existen $a, b \in F$, tales que $f(a) = b$ y $f(b) = a$ (es decir, un ciclo de orden 2).
12. Estudie el ejercicio anterior en el caso en que F sea infinito.
13. Sean E un conjunto y $\varphi : \wp(E) \rightarrow \wp(E)$ creciente (según el orden dado por la inclusión). Demuestre que φ admite un punto fijo.
14. Demuestre que no existe una función sobreyectiva de E en $\wp(E)$.
15. Sea F un conjunto finito. Si $|F| = n$ demuestre que $|\wp(F)| = 2^n$.
16. Demuestre o dé una idea de demostración de los enunciados siguientes:
- a) Dados dos conjuntos, existe una función inyectiva o una sobreyectiva de uno en el otro (primera parte del teorema de Cantor-Schröder-Bernstein).
- b) Si dados dos conjuntos existen funciones inyectivas de uno en el otro, entonces existe una biyección entre ellos (segunda parte del teorema de Cantor-Schröder-Bernstein).
17. Muestre que $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ no son racionales.
18. Dados $x, y \in \mathbb{R}$ demuestre que:
- a) Existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $x < r < y$.
- b) Existe $s \notin \mathbb{Q}$ tal que $x < s < y$.

Los ejercicios que siguen requieren de la lectura del artículo:

“El Infinito: un Sueño Humano”,

Matemática Educacional, Revista Cubo, Vol. 3, No 2, 2001,

que se encuentra al final de esta Monografía, como Apéndice

19. Demuestre que un conjunto A es finito si y sólo si para todo $B \subsetneq A$, se tiene $\text{card}(B) < \text{card}(A)$. Deduzca y enuncie una proposición análoga si A es infinito.
20. Sean A un conjunto, y $\{0, 1\}^A$ el conjunto de todas las funciones de A en $\{0, 1\}$. Demuestre que $\wp(A)$ y $\{0, 1\}^A$ son equipotentes.
21. Si $p, q \in \mathbb{N}$ con $p \neq 0$, demuestre que $\text{card}(p\mathbb{Z} + q) = \aleph_0$ donde $p\mathbb{Z} + q = \{px + q \mid x \in \mathbb{Z}\}$
22. Si A es finito o numerable y B es numerable, demuestre que $A \cup B$ es numerable. ¿Qué puede decir de $A \cap B$?
23. Demuestre que si A es numerable, entonces A^2 es numerable.
24. Demuestre que la reunión de una familia numerable de conjuntos finitos o numerables es numerable.
25. Demuestre que $\text{card}(\mathbb{N} \cup \wp(\mathbb{N})) = \aleph_1$
26. Si $A \subset \mathbb{R}$ y $\text{card}(A) \leq \aleph_0$, demuestre que $\text{card}(\mathbb{R} - A) = \aleph_1$. (esto demuestra en particular que el cardinal del conjunto de los irracionales es infinitamente "mas grande" que aquel de los racionales).
27. Dados $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, demuestre que se tiene

$$\text{card}(]a, b[) = \text{card}([a, b[) = \text{card}(]a, b]) = \text{card}([a, b]) = \aleph_1$$

2. Introducción

Textualmente, la topología es el estudio de superficies; dicho más precisamente, es la disciplina de las matemáticas que estudia la contextura de los conjuntos en el sentido del comportamiento de sus elementos respecto de nociones tales como la “proximidad” entre estos y posibles atributos que dicen relación con “el lugar que ocupan” dentro de los conjuntos en juego.

Cuando nos damos un conjunto, es decir conocer la lista de los elementos que lo componen o la propiedad que nos permite determinar tales elementos, nada a priori nos permite decir si tal elemento está en el “borde” de tal conjunto o bien al “interior” de este. Ahora bien, es verdad que ciertos conjuntos clásicos vienen con propiedades internas que permiten desarrollar este tipo de ideas: por ejemplo en los números reales, el conjunto $\mathbb{R}$, tenemos una estructura algebraica (suma, resta, etc.) y una estructura de orden total ($\leq$) lo que nos permite contar con el concepto de valor absoluto y por tanto definir “naturalmente” la distancia entre dos elementos: $|x - y|$. Sin embargo, para acercarnos a la idea de proximidad entre elementos, no requerimos de algo tan especializado como la noción de distancia: podemos apreciar la “cercanía” entre dos elementos si se nos entrega el dato de que ambos pertenecen a un cierto intervalo abierto $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} ; a < x < b\}$, cuya “longitud” está dada por $|a - b|$.

Así las cosas, dado un subconjunto X de $\mathbb{R}$ y un elemento $x \in X$ es atendible decir que x está al “interior” de X si existe un intervalo abierto I tal que $x \in I$ y se tenga $I \subset X$; por ejemplo, si $X = [1, 9[= \{x \in \mathbb{R} ; 1 \leq x < 9\}$ podemos decir que el elemento 3 está al “interior” de X ; no así el 1 (siendo un elemento de X) ni el 9 (no siendo de X), los cuales podríamos decir que están al “borde”, puesto que cualquier intervalo que contenga a uno de estos puntos corta (o intercepta) al complemento de X ($\mathbb{C}X =]-\infty, 1[\cup]9, +\infty[$).

Ahora bien, la propiedad

“ existe un intervalo abierto I tal que se tiene $x \in I \subset X$ ”

es algo que satisfacen el conjunto $\mathbb{R}$ (trivialmente) y el conjunto vacío (puesto que no teniendo elementos tal propiedad no puede ser contradecida....); es inmediato que también la satisfacen todos los intervalos abiertos. Por otro lado, no es difícil establecer que esta propiedad también es compatible con las operaciones conjuntistas de reunión e intersección, es decir que si X e Y

verifican tal propiedad, también la verifican los conjuntos $X \cup Y$ y $X \cap Y$; sin embargo, la compatibilidad de estas operaciones con dicha propiedad tiene grados distintos: respecto de la reunión no hay restricciones: la propiedad se preserva en reuniones con una cantidad finita o infinita de conjuntos que la tienen (demuéstrelo); respecto de la intersección, sólo podemos afirmar la compatibilidad cuando hablamos de colecciones finitas de subconjuntos en juego: no es difícil demostrar que si $a \in \mathbb{R}$ y $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de reales positivos que converge a 0 (es decir, $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = 0$) y consideramos los intervalos abiertos $I_n =]a - s_n, a + s_n[$, $n \in \mathbb{N}$, se tiene $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{a\}$, conjunto que obviamente no cumple con la propiedad en cuestión.

En lo que viene veremos que la “textura” o la “contextura” de un conjunto no son características *per se*. Si bien, como lo vimos, hay conjuntos clásicos que poseen cierta riqueza estructural que permiten el estudio del “topos”, en general debemos darnos los instrumentos para medir los atributos ligados a nociones de cercanía o de proximidad y clasificar los comportamientos respecto de ellas (por ejemplo, en lo que se refiere a la acción de funciones); como veremos, el darnos tales “herramientas de medición” determina los roles de los objetos que queremos “medir”. En el capítulo que sigue, inspirados del comportamiento que emerge de la propiedad estudiada más arriba, definiremos lo que es darse una topología para un conjunto.

Ejercicios

1. Demuestre las siguientes desigualdades respecto del valor absoluto:

Para todo $a, b \in \mathbb{R}$ se tiene:

- $|a + b| \leq |a| + |b|$;
- $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

2. Sea X un subconjunto de $\mathbb{R}$; demuestre que la propiedad:

..Para todo $x \in X$ existe un intervalo abierto I tal que se tiene $x \in I \subset X$

la verifican el conjunto $\mathbb{R}$ y toda reunión de intervalos abiertos, como también las intersecciones finitas de estos..

3. Espacios Topológicos: Primeras Nociones

Proveer de una topología a un conjunto es escoger una colección de subconjuntos que verifique ciertas propiedades o axiomas.

Definición 1 Sea E un conjunto y $\tau \subset \wp(E)$. Se dice que τ es una **topología** para el conjunto E si :

- Los conjuntos E y $\emptyset$ son elementos de τ
- τ es estable para reuniones arbitrarias, es decir para toda familia $(O_i)_{i \in I}$ donde $O_i \in \tau$ para todo $i \in I$, se tiene $\bigcup_{i \in I} O_i \in \tau$.
- τ es estable para intersecciones finitas, es decir si $O_1, O_2, \dots, O_n \in \tau$ entonces $\bigcap_{k=1}^n O_k \in \tau$.

El conjunto E provisto de esa topología se llama **espacio topológico** y se denota (E, τ) .

Notemos que dado un conjunto E siempre podemos escoger $\tau_G = \{\emptyset, E\}$, llamada la topología grosera, y $\tau_D = \wp(E)$, conocida como la topología discreta; estas topologías “extremas” no presentan mayor interés. Es claro que sobre un conjunto se pueden definir muchas topologías y las propiedades topológicas, como veremos, varían ostensiblemente eligiendo una u otra. Por de pronto, un conjunto de dos elementos, $\{a, b\}$ admite cuatro topologías: aparte de la grosera y la discreta, tenemos $\tau_a = \{\emptyset, E, \{a\}\}$ y $\tau_b = \{\emptyset, E, \{b\}\}$; usted puede entretenerse determinando todas las topologías de un conjunto de tres elementos.

Dadas τ_1 y τ_2 , dos topologías sobre E decimos que τ_1 es más gruesa τ_2 que (o que τ_2 es más fina que τ_1) si $\tau_1 \subset \tau_2$; la más gruesa de las topologías es la grosera, la más fina es la discreta y las topologías interesantes para un conjunto, en general, se encuentran entre una y otra. Hacemos notar que la intersección de topologías (de un mismo conjunto) es una topología; no es el caso de la reunión de topologías, aunque siempre se puede construir la menor topología (es decir, la menos fina) que contenga todas las otras definiendo sus elementos como todas las reuniones arbitrarias de los conjuntos de todas las topologías en juego en la reunión (usted puede demostrar estas afirmaciones).

Consideremos ahora un espacio topológico (E, τ) y $A \subset E$. En lo que sigue daremos una serie de definiciones sobre el rol que juegan ciertos elementos de E en el sentido de la “proximidad” con respecto al conjunto A ; evidentemente que estas propiedades dependen de la topología con la que se “midan” las cosas.

Definición 2 Se dice que un elemento x es **interior** de A si existe $O \in \tau$ tal que $x \in O$ y $O \subset A$. El conjunto $\{x ; x \text{ interior de } A\}$ se denota por $\overset{\circ}{A}$ y se llama el **interior** de A .

De la definición, es inmediato que $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} \subset \overset{\circ}{A}$ y que si $A \subset B$ entonces $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$. Ahora bién, respecto del comportamiento de la operación “interior de un conjunto” tenemos:

Proposición 3 Sean (E, τ) un espacio topológico y $A \subset E$. Entonces:

$$(i) \quad \overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A}; \quad (ii) \quad \overset{\circ}{A} \text{ es un elemento de } \tau; \quad (iii) \quad A = \overset{\circ}{A} \Leftrightarrow A \in \tau.$$

$$(iv) \quad \overset{\circ}{A} \text{ es el mayor elemento de } \tau \text{ contenido en } A. \quad (v) \quad \widehat{\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$$

Demostración. Para (i) basta demostrar que $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{\overset{\circ}{A}}$: si $x \in \overset{\circ}{A}$ entonces existe $O \in \tau$ tal que $x \in O$ y $O \subset A$; ahora bien, todo elemento de O verifica la misma propiedad, (es decir para todo $y \in O$ se tiene trivialmente: $y \in O \subset A$) por lo que $O \subset \overset{\circ}{A}$ de donde se infiere que $x \in \overset{\circ}{\overset{\circ}{A}}$.

Para demostrar (ii) retengamos de lo anterior que para todo elemento $a \in \overset{\circ}{A}$ existe $O_a \in \tau$ tal que $a \in O_a \subset \overset{\circ}{A}$; de $O_a \subset \overset{\circ}{A}$ para todo $a \in A$ se obtiene $\bigcup_{a \in \overset{\circ}{A}} O_a \subset \overset{\circ}{A}$ y de $a \in O_a$ para todo $a \in A$ sale la inclusión inversa;

por tanto $\overset{\circ}{A} = \bigcup_{a \in \overset{\circ}{A}} O_a$ es decir $\overset{\circ}{A}$ es reunión de elementos de τ .

La tercera afirmación sale de (ii) y de la definición de interior de un conjunto.

Respecto de (iv), si $O \in \tau$ y $O \subset A$ entonces se tiene $\overset{o}{O} \subset \overset{o}{A}$; aplicando (ii) y (iii) se infiere que $O \subset \overset{o}{A}$.

Por último, de $\overset{o}{A} \subset A$ y $\overset{o}{B} \subset B$ tenemos $\overset{o}{A} \cap \overset{o}{B} \subset A \cap B$ de donde, por (ii), los axiomas topológicos y (iv), se infiere que $\overset{o}{A} \cap \overset{o}{B} \subset \overset{o}{A \cap B}$; la inclusión recíproca viene de: $\overset{o}{A \cap B} \subset A \cap B \subset A, B$ luego, por (i), se tiene $\overset{o}{A \cap B} \subset \overset{o}{A}, \overset{o}{B}$ y por tanto $\overset{o}{A \cap B} \subset \overset{o}{A} \cap \overset{o}{B}$. ■

Notemos que la tercera afirmación significa que en todo conjunto de τ todos sus puntos son interiores. Así las cosas, es inmediato que en la topología grosera todo subconjunto propio tiene interior vacío y que en la topología discreta se va al otro extremo, es decir que el interior de todo conjunto es igual al conjunto mismo.

En cualquier otra topología existen conjuntos $A \subsetneq E$ tales que $\emptyset \neq \overset{o}{A} \neq A$ (demuéstrelo), lo que es equivalente a decir que en tales conjuntos siempre existen puntos que no son interiores; ahora bien, sea cual sea la situación si $a \in A$ para todo $O \in \tau$ tal que $a \in O$ se tiene trivialmente que $O \cap A \neq \emptyset$, con la salvedad de que si a no es un punto interior podemos asegurar además que O no está contenido en A . Ahora bien, tal como se aprecia en la topología natural de $\mathbb{R}$ exhibida en la introducción, en donde los conjuntos de τ son reuniones arbitrarias de intervalos abiertos (esta topología es inducida por la estructura de orden de los reales y puede definirse de manera similar en cualquier conjunto totalmente ordenado), vemos que no es obligatorio que un elemento x pertenezca al conjunto A para satisfacer la propiedad “para todo $O \in \tau$ tal que $x \in O$ se tiene $O \cap A \neq \emptyset$ ”: se puede ver esto tomando en $\mathbb{R}$ el extremo abierto de un intervalo. Todo esto nos lleva a la siguiente definición.

Definición 4 Sean (E, τ) un espacio topológico $x \in E$ y $A \subset E$. Se dice que x es un elemento **adherente** de A si para todo $O \in \tau$ tal que $x \in O$ se tiene $O \cap A \neq \emptyset$. El conjunto $\{x ; x \text{ adherente de } A\}$ se denota por $\overline{A}$ y se llama la **adherencia** de A .

Es claro que $A \subset \overline{A}$, como también que si $A \subset B$ entonces $\overline{A} \subset \overline{B}$. Ahora bien, antes de estudiar el comportamiento de la operación “adherencia de un conjunto” reflexionemos en lo siguiente: dado un punto x adherente que no

es interior de A , todo $O \in \tau, x \in O$, no sólo corta al conjunto A sino que también intercepta al complemento de A ; es decir, x pertenece también a la adherencia de $\complement A$. Surge aquí la noción de borde de un conjunto; como es esperable, tal “borde” debe ser el mismo para el complemento. Tenemos:

Definición 5 La **frontera** de A está dada por $\overline{A} \cap \overline{\complement A}$ y se denota $Fr(A)$.

Dada la conmutatividad de la intersección y de la involutividad de la operación complemento ($\complement \complement A = A$), es inmediato que $Fr(A) = Fr(\complement A)$. Ahora bien, en función de la relación que tiene un conjunto con su frontera vienen naturalmente los conceptos siguientes:

Definición 6 Diremos que un conjunto A es **abierto** si no contiene punto alguno de su frontera (es decir si $A \cap Fr(A) = \emptyset$); por el contrario, diremos que es **cerrado** si contiene toda su frontera (es decir si $Fr(A) \subset A$).

Es claro que un conjunto no tiene porqué ser abierto o cerrado (este puede contener sólo una parte de su frontera). ¿Cuales son los abiertos del espacio (E, τ) ? ¿Cuales sus cerrados?. Lo que sigue responde a esto:

Teorema 7 Sea $A \subset E$; se tienen las equivalencias:

$$(i) \ A \text{ es abierto} \Leftrightarrow A \in \tau. \quad (ii) \ A \text{ es cerrado} \Leftrightarrow \complement A \text{ es abierto.}$$

Demostración. Si A es abierto no posee ningún punto frontera; una pequeña reflexión permite establecer que eso es equivalente a decir que todo punto es interior, o sea que $A = \overset{\circ}{A}$ y por tanto $A \in \tau$ (Proposición 3, iii). El recíproco es inmediato puesto que en tal caso todos los elementos de A son interiores (de nuevo por la Proposición 3, iii), y por tanto no posee puntos frontera.

$$\begin{array}{l} \text{Para la segunda equivalencia, tenemos: } A \text{ es cerrado} \stackrel{def}{\Leftrightarrow} Fr(A) \subset A \\ Fr(A) = Fr(\complement A) \Leftrightarrow Fr(\complement A) \subset A \Leftrightarrow \complement A \cap Fr(\complement A) = \emptyset \stackrel{def}{\Leftrightarrow} \complement A \text{ es abierto. } \blacksquare \end{array}$$

De ahora en adelante nos referiremos a los elementos de τ como los abiertos del espacio topológico, que es lo habitual en el estudio de estos tópicos.

Hacemos notar que el teorema que acabamos de establecer nos entrega una axiomática de cerrados para la definición de un espacio topológico, transformando la Definición 1 con la operación complemento:

- Los conjuntos E y $\emptyset$ son cerrados.
- Las intersecciones arbitrarias de cerrados es un cerrado.
- Las reuniones finitas de cerrados es un cerrado.

Veamos ahora las propiedades de la adherencia. Podemos facilitarnos las cosas estableciendo el vínculo estructural entre la adherencia y el interior:

Proposición 8 Sea $A \subset (E, \tau)$. Se tiene: $\overset{\circ}{A} = \complement \overline{\complement A}$ y $\overline{A} = \complement \overset{\circ}{\complement A}$.

Demostración. Estas identidades son duales por acción de la complementación; más precisamente, la segunda se obtiene de la primera reemplazando A por $\complement A$ y complementando). Demostremos por tanto la primera: $x \in \overset{\circ}{A} \Leftrightarrow$ existe O abierto tal que $x \in O \subset A \Leftrightarrow$ existe O abierto tal que $x \in O$ y $O \cap \complement A = \emptyset \Leftrightarrow x \notin \overline{\complement A} \Leftrightarrow x \in \complement \overline{\complement A}$. ■

Este resultado nos lleva a “dualizar” la proposición 3, es decir:

Proposición 9 Sean (E, τ) un espacio topológico y $A \subset E$. Entonces:

$$(i) \quad \overline{\overline{A}} = \overline{A}; \quad (ii) \quad \overline{A} \text{ es cerrado}; \quad (iii) \quad A = \overline{A} \Leftrightarrow A \text{ es cerrado};$$

$$(iv) \quad \overline{A} \text{ es el menor cerrado que contiene a } A; \quad (v) \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Demostración. Se deja al lector. Para hacerlo, utilice el Teorema 7 y las Proposiciones 3 y 8 entre otras herramientas. ■

En la adherencia de un conjunto hay elementos de comportamientos disímiles. Para ilustrar lo que aquí se dice, consideremos en los reales, con su topología natural, al conjunto $A = [a, b[\cup \{c\}$: es claro que los puntos a, b y c están en $\overline{A}$; ahora bien, todo abierto O que contiene al elemento a satisface $A \cap (O \setminus \{a\}) \neq \emptyset$ y la misma propiedad cumple el elemento b (que no pertenece a A), no así el elemento c (que sí pertenece):

Definición 10 Sean (E, τ) un espacio topológico y $A \subset E$. Se dice que $x \in E$ es un **punto de acumulación** de A si para todo abierto O que contiene al elemento x se tiene $A \cap (O \setminus \{x\}) \neq \emptyset$; el conjunto de los puntos de acumulación de A se denota A' .

Por otro lado, se dice que x es un **punto aislado** de A si existe un abierto O tal que $x \in O$ y $A \cap O = \{x\}$.

Es claro que todo punto aislado es un elemento de A y, por otro lado, no es difícil establecer que $\overline{A} = A \cup A'$ y por tanto que A es cerrado $\Leftrightarrow A$ contiene todos sus puntos de acumulación.

Veamos ahora lo siguiente: sabemos que dados dos números reales a, b siempre podemos encontrar intervalos abiertos disjuntos I, J tales que $a \in I$, y $b \in J$ (cosa que usted puede demostrar).

Todo lo anterior nos lleva a introducir:

Definición 11 Sea (E, τ) un espacio topológico. Se dice que E es **debilmente separado** si para todo $x, z \in E$ existe un abierto O tal que $x \in O$ y $z \notin O$. Además, si para todo $x, x' \in E$ existen abiertos O y O' , disjuntos, tales que $x \in O$ y $x' \in O'$, diremos que E es **separado** o de **Hausdorff** (es claro que todo espacio de Hausdorff es debilmente separado).

Al respecto tenemos:

Proposición 12 Sea (E, τ) un espacio topológico. Entonces E es debilmente separado si y sólo si todo subconjunto finito de E es cerrado.

Demostración. Como todo conjunto es reunión de sus singletons, basta demostrar que todo singleton es cerrado, pues la reunión finita de cerrados es un cerrado. Sea x un elemento del espacio y demostremos que $E \setminus \{x\}$ es un abierto: como E es debilmente separado, para todo $a \in E, a \neq x$, existe un abierto O tal que $a \in O$ y $x \notin O$; dicho de otra manera, $O \subset E \setminus \{x\}$ y por tanto todo punto de $E \setminus \{x\}$ es interior, o sea, $E \setminus \{x\}$ es un abierto. Veamos el recíproco: sean $x, y \in E$, distintos; como $\{x\}$ es cerrado, $E \setminus \{x\}$ es un abierto y como $y \in E \setminus \{x\}$, el espacio es debilmente separado. ■

Corolario 13 En un espacio topológico debilmente separado un conjunto finito no tiene puntos de acumulación (o de manera equivalente, todo conjunto con puntos de acumulación es infinito).

Demostración. Si A es finito, por la Proposición anterior es cerrado y contendría todos sus puntos de acumulación ($A' \subset A = \overline{A}$). Ahora bien, sea $a \in A$: dado que $B = A \setminus \{a\}$ también es cerrado (pues es finito) $\complement B$ es un abierto que contiene al elemento a y que verifica $(\complement B \setminus \{a\}) \cap A = \emptyset$, lo que significa que a no es punto de acumulación de A . Por tanto $A' = \emptyset$. ■

Terminamos este capítulo, introduciendo una noción motivada por lo siguiente: dados dos reales a y b , siempre existe un racional y un irracional entre ellos (usted puede aprovechar la ocasión para demostrar esto); para la topología natural de los reales, esta propiedad hace que la adherencia del conjunto $\mathbb{Q}$ de los racionales sea $\mathbb{R}$.

Definición 14 Sea $D \subset E$: se dice que D es **denso en** E si $\overline{D} = E$.

Proposición 15 D es **denso en** E si y sólo si todo abierto no vacío de E corta a D .

Demostración. Para el directo: sea O un abierto no vacío y $x \in O$; por hipótesis todo elemento de E es adherente a D y por tanto $O \cap D \neq \emptyset$. Recíprocamente, sea $x \in E$ y O cualquier abierto que lo contenga (en el peor de los casos, el abierto E); se tiene por hipótesis que $O \cap D \neq \emptyset$ y por tanto $x \in \overline{D}$, o sea, $E = \overline{D}$. ■

Ejercicios

1. ¿Cuántas topologías se pueden definir sobre un conjunto de tres elementos? ¿De cuatro elementos?
2. Demuestre que la intersección de dos topologías sobre E es una topología sobre E . ¿Qué puede decir de la reunión?
3. De un ejemplo de espacio topológico, ni grosero ni discreto, en donde todos los abiertos sean también cerrados.
4. Sea $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, extensión formal de $\mathbb{N}$, ordenado por $n < +\infty$ y suma: $+\infty + x = +\infty$ para todo $x \in \overline{\mathbb{N}}$. Demuestre que los subconjuntos $A_\alpha = \{k \in \overline{\mathbb{N}}; k + 1 > \alpha\}$ constituyen una topología para $\overline{\mathbb{N}}$.
5. En un conjunto E se considera:

$$\tau_f = \{A / A \subset X, \text{ tal que } A = \emptyset \text{ o } \mathbb{C}A \text{ finito}\}.$$

Muestre que τ_f define una topología sobre E (la cual se llama topología co-finita).

6. Defina seis topologías distintas sobre el conjunto $\mathbb{R}$ de números reales.

7. Sea $\mathbb{R}$ provisto de la topología “natural”. Si $\tau \subset \wp(\mathbb{R})$ está formado por los conjuntos $B = A \setminus F$, donde A es un abierto de $\mathbb{R}$ y F un conjunto finito, demuestre que τ es una topología de $\mathbb{R}$. Compare esta topología a la “natural”.
8. Estudie el problema anterior tomando un espacio topológico arbitrario (E, τ) .
9. En $\mathbb{R}^2$ demuestre que los conjuntos $A_k = \{(x, y) / x > y + k\}, k \in \mathbb{R}$, constituyen los abiertos de una topología. Caracterice los conjuntos cerrados de esa topología.
10. Incorporamos el concepto siguiente:

Definición 16 Sean (E, τ) un espacio topológico, $x \in E$. Se llama **vecindad** de x a todo conjunto que contenga un abierto que contiene a x ; el conjunto de las vecindades de x se denota $v(x)$ y se llama **sistema de vecindades** de x .

Demuestre que $A \subset E$ es abierto si y solamente si es vecindad de cada uno de sus puntos (este es un resultado importante). Pruebe además que se tiene:

- a) para todo $x \in E$, $v(x) \neq \emptyset$ y para todo $V \in v(x)$, $x \in V$;
- b) si $V \subset W$ y $V \in v(x)$ entonces $W \in v(x)$;
- c) si $V, W \in v(x)$ entonces $V \cap W \in v(x)$;
- d) para todo $V \in v(x)$ existe $W \in v(x)$ tal que $V \in v(W)$.

Por último, demuestre que con (a), (b) y (c) se puede definir una topología τ' . Compare τ' a τ . ¿Que pasa si además se agrega (d).

11. Si (E, τ) es un espacio topológico separado y finito, determine τ .
12. Si (E, τ) es un espacio topológico no discreto y separado, demuestre que existe un conjunto abierto que no es cerrado.
13. Si (E, τ) es un espacio topológico debilmente separado, demuestre que τ contiene a la topología co-finita τ_f . Concluya que la topología τ_f es debilmente separada. ¿Es τ_f separada?

14. Demuestre las inclusiones siguientes y en cada caso dé un ejemplo de inclusión estricta:

$$(a) \quad \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B} \quad (b) \quad \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{A \cup B}$$

15. Si V es una vecindad de x demuestre que $\overline{V}$ y $\overset{\circ}{V}$ también lo son.
16. Compare los conjuntos A , $\overline{\overset{\circ}{A}}$ y $\overset{\circ}{\overline{A}}$ cuando: A es abierto; A es cerrado; A es arbitrario.
17. ¿Puede darse la situación $\overline{\overset{\circ}{A}} \subset A \subset \overset{\circ}{\overline{A}}$? Argumente. Dé ejemplos
18. Demuestre que $Fr(A) = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A} = E \setminus (\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{\overline{A}}) = (A \cap \overline{\overline{A}}) \cup (\overline{A} \setminus A)$.
¿Se tiene $\overline{A} = A \cup Fr(A)$?
19. Compare los conjuntos y dé ejemplos, cuando corresponda, de inclusiones estrictas:
- $Fr(A)$ y $Fr(B)$ cuando $A \subset B$
 - $Fr(A \cup B)$ y $Fr(A) \cup Fr(B)$
 - $Fr(A \cap B)$ y $Fr(A) \cap Fr(B)$
20. Demuestre que $Fr(A) = \emptyset$ si y sólo si A es abierto y cerrado.
21. Demuestre que $Fr(\overset{\circ}{A}) \subset Fr(A)$ y $Fr(\overline{A}) \subset Fr(A)$. Dé un ejemplo en donde los tres conjuntos sean distintos.
22. Demuestre que $Fr(Fr(A)) \subset Fr(A)$. Dé un ejemplo donde la inclusión sea estricta.
23. Sean $A, O \subset E$, O abierto. Demuestre que si $O \cap \overline{A} \neq \emptyset$ entonces $O \cap A \neq \emptyset$.
24. Demuestre que si $\overset{\circ}{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$ entonces $A \cap B \neq \emptyset$
25. Si $A \cap B \neq \emptyset$, ¿qué se puede decir de $\overset{\circ}{A} \cap B$ cuando B es abierto; cerrado; arbitrario?

26. Demuestre que si $\overset{o}{\overline{A}} = \emptyset$ entonces $\mathbb{C}A$ es denso. Muestre que el recíproco no es necesariamente cierto.
27. Demuestre que se tiene: $\overset{o}{A}$ denso $\Leftrightarrow \overline{\mathbb{C}A} = \emptyset$.
28. Si A y B son densos ¿qué se puede decir de $A \cup B$ y $A \cap B$?
29. Si A es denso y O abierto, demostrar que $O \subset \overline{O \cap A}$.
30. Si A, B son densos y abiertos entonces $A \cap B$ es denso.
31. Demuestre que con la topología natural de $\mathbb{R}$ se tiene $\overset{o}{\mathbb{Q}} = \emptyset$ y $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.
32. Sea (E, τ) un espacio topológico debilmente separado que admite un subconjunto propio denso. Demuestre que E es infinito.
33. Sea E un espacio topológico. Demuestre que:
- $O \subset E$ es abierto $\Leftrightarrow \overline{O \cap \overline{Y}} = \overline{O \cap Y}$ para todo $Y \subset E$.
 - $X \subset E$ es denso $\Leftrightarrow \overline{X \cap O} = \overline{O}$ para todo abierto O .
34. Sea E un espacio topológico. Demuestre que son equivalentes:
- Todo conjunto denso es cerrado.
 - Existe un único conjunto denso.
 - La topología de E es la discreta.

En un espacio se llama **base de la topología** a un conjunto mínimo de abiertos, de manera que todo abierto pueda obtenerse como reunión de elementos de la base.

35. Demuestre que si un espacio topológico posee una base numerable de abiertos entonces contiene un subconjunto denso numerable.
36. Demuestre que si un espacio topológico contiene un subconjunto denso numerable entonces toda familia de abiertos no vacíos y disjuntos es finita o numerable.
37. Sea $D \subset E$. Demuestre que si D es el único conjunto denso distinto de E entonces D es abierto.

4. Continuidad, Construcción de Espacios

En este capítulo veremos como podemos medir y clasificar el comportamiento de funciones utilizando las topologías de los espacios en juego. Introduciremos aquí las nociones de continuidad y de límite, caracterizadas por la idea de “proximidad” que nos brindan los conjuntos abiertos. La idea subyacente es que elementos que son “cercaños” según la topología del espacio de partida tengan imágenes “cercañas” según la topología del espacio de llegada. Tenemos:

Definición 17 Sean $(E, \tau_E), (F, \tau_F)$ espacios topológicos y $f : E \rightarrow F$. Se dice que f es **continua** en $a \in E$ si para todo $O \in \tau_F$ tal que $f(a) \in O$, existe $U \in \tau_E$ tal que $a \in U$ y $f(U) \subset O$, o, lo que es lo mismo, $U \subset f^{-1}(O)$.

Si f es continua en todo punto decimos que f es **continua en E** o, simplemente, que es continua.

Hacemos notar que esta definición se puede dar utilizando el concepto de vecindades (ejercicio 10, capítulo 3); así por ejemplo, f es continua en el punto a si para toda vecindad $V \in \nu(f(a))$ existe $W \in \nu(a)$ tal que $f(W) \subset V$; esto es equivalente a decir que para toda vecindad V de $f(a)$ la imagen recíproca $f^{-1}(V)$ es una vecindad de a .

En el caso de $\mathbb{R}$, con la topología natural, sabemos que, en lo que concierne a los abiertos, para un punto dado ($y \in \mathbb{R}$) podemos restringirnos a intervalos abiertos que lo contengan y, más aún, cosa que usted puede demostrar, a intervalos abiertos centrados en el punto cuestión, es decir de tipo $]y-r, y+r[$ donde $r > 0$. Así las cosas, decir que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en a significa que para todo abierto $]f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon[$ existe un abierto $]a - \delta, a + \delta[$ tal que $f(]a - \delta, a + \delta[) \subset]f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon[$; dicho de otra manera, si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in]a - \delta, a + \delta[$ entonces se tiene $f(x) \in]f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon[$ o sea, finalmente, si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$, recuperando así la definición que se entrega en un primer curso de cálculo.

Veamos ahora algunas propiedades relativas al concepto de continuidad:

Proposición 18 Sean $(E, \tau_E), (F, \tau_F)$ espacios topológicos y $f : E \rightarrow F$. Entonces f es continua si y sólo si para todo abierto O de F la imagen recíproca $f^{-1}(O)$ es un abierto de E .

Demostración. Supongamos f continua y sea $O \in \tau_F$. Si $f^{-1}(O) = \emptyset$ no hay nada que demostrar; en caso contrario, sea $a \in f^{-1}(O)$: se tiene que $f(a) \in O$ y por tanto $f^{-1}(O)$ es vecindad de a , es decir, $f^{-1}(O)$ es vecindad de cada uno de sus puntos y por tanto es un abierto de E (ver el ejercicio 10 del capítulo anterior). El recíproco es igual de inmediato puesto que si $a \in E$ y O es un abierto de F tal que $f(a) \in O$ entonces $a \in f^{-1}(O)$; como por hipótesis $f^{-1}(O)$ es un abierto de E y dado que $f(f^{-1}(O)) \subset O$, concluimos que f es continua en cualquier punto del espacio. ■

Utilizando este resultado es inmediato que la aplicación identidad de (E, τ_E) así como toda función constante de (E, τ_E) en (F, τ_F) son continuas.

Proposición 19 $(E, \tau_E), (F, \tau_F), (G, \tau_G)$ espacios topológicos $f : E \rightarrow F$ y $g : F \rightarrow G$. Si f es continua en $a \in E$ y g continua en $f(a)$ entonces $g \circ f : E \rightarrow G$ es continua en a .

Demostración. Sea O un abierto de G tal que $(g \circ f)(a) \in O$. Ahora bien, como g es continua en $f(a)$ existe W , abierto de F , tal que $f(a) \in W$ y $g(W) \subset O$; luego, como f es continua en a existe U , abierto de E , tal que $a \in U$ y $f(U) \subset W$. Se concluye que $g(f(U)) = (g \circ f)(U) \subset O$, es decir, $g \circ f$ es continua en a . ■

Corolario 20 Si $f : E \rightarrow F$ y $g : F \rightarrow G$ son continuas, la compuesta $g \circ f$ también lo es.

En general, en matemática, cuando proveemos a conjuntos de estructuras (algebraicas, topológicas, etc.) debemos también preocuparnos de las características de las funciones que operan preservando aspectos de tales estructuras. Al igual que los homomorfismos en relación a los grupos o las aplicaciones lineales respecto de los espacios vectoriales, las funciones continuas son las aplicaciones ad-hoc (o los morfismos) de los espacios topológicos, es decir aquellas que operan teniendo en cuenta las estructuras de los espacios en juego; no tiene mucho sentido en ámbitos topológicos trabajar con funciones que no sean continuas. Son estas herramientas las que nos sirven para decir cuando un espacio es sub-estructura de otro o cuando dos espacios son topológicamente indistinguibles (es decir, topologicamente equivalentes). Con respecto a esto último, es intuitivamente claro que para la equivalencia entre dos espacios necesitamos funciones continuas y biyectivas; ahora bien,

a diferencia de lo que ocurre con los homomorfismos de grupos o las aplicaciones lineales, en donde la biyectividad de una función implica la misma riqueza estructural para la función inversa, nada en la definición de continuidad permite asegurar lo mismo en el caso de los espacios topológicos: tomemos por ejemplo un conjunto E y proveámoslo de topologías τ_1 y τ_2 ; no es difícil ver que $Id_E : (E, \tau_1) \rightarrow (E, \tau_2)$ es continua si y solamente si $\tau_2 \subset \tau_1$. Todo esto nos permite introducir:

Definición 21 *Dos espacios topológicos (E, τ_E) y (F, τ_F) son **homeomorfos** si existe una biyección $f : (E, \tau_E) \rightarrow (F, \tau_F)$ tal que f y f^{-1} sean continuas. Una aplicación con esas características se llama **homeomorfismo** o, también, **función bicontinua**.*

Dos espacios homeomorfos son topológicamente indistinguibles; en definitiva el homeomorfismo entre ellos no hace más que transformar los abiertos de un espacio en los abiertos del otro, cuestión fácil de constatar.

Pasemos ahora al tema de la construcción de espacios; nos referimos con ello a las nociones de subespacio topológico, espacio producto, espacio cociente, etc.. La idea que obviamente debemos utilizar para estas construcciones es que allí donde hayan aplicaciones canónicas (es decir, que vengan implícitas en las estructuras dadas) estas deben ser necesariamente continuas.

Consideremos un subconjunto A de E y proveámoslo de una estructura topológica determinada por τ_E ; ¿como definir una topología sobre A de manera que su estructura sea coherente con la de E ? Para responder a esto, observemos que darse el subconjunto A implica darse la inclusión canónica $\iota_A : A \rightarrow E$, $x \mapsto x$ (es decir, a x pensado en A se le asocia x pensado en E); necesitamos pues que esta función sea continua, es decir que para todo abierto O de E el conjunto $\iota_A^{-1}(O)$ sea un abierto de A ; dado el comportamiento de las imágenes recíprocas, es claro que el conjunto $\{\iota_A^{-1}(O) ; O \in \tau_E\}$ satisface los axiomas de una topología para el conjunto A . Como $\iota_A^{-1}(O) = A \cap O$ tenemos:

Definición 22 *La topología sobre A definida por $\tau_{E|A} = \{A \cap O ; O \in \tau_E\}$ se llama la **traza** de la topología τ_E en A , o, también, la topología inducida en A por el espacio (E, τ_E) . Se dice que el espacio $(A, \tau_{E|A})$ es un **subespacio topológico** de (E, τ_E) .*

Es inmediato que $\tau_{E|A}$ es la menor de las topologías sobre A para la cual la inclusión canónica ι_A es una función continua; por esta razón, cualquier

topología sobre A que contenga a $\tau_{E|A}$ le entrega al espacio A caracter de subespacio de (E, τ_E) . En todo caso, para que no haya confusión alguna, cada vez que hablemos de subespacios consideraremos que la topología del subconjunto en cuestión es la de la traza.

Veamos ahora ciertas características de los subespacios: sean (E, τ_E) un espacio topológico y A un subconjunto de E :

Nota 23 *Algunas propiedades de los subespacios son las siguientes:*

1. *Los cerrados de $(A, \tau_{E|A})$ están dados por la traza de los cerrados de E en A , es decir son los conjuntos de la forma $A \cap C$, donde C es un cerrado de E : en efecto, esto se infiere de $A \setminus (A \cap O) = A \setminus O = A \cap \complement O$.*
2. *Se tiene: $\tau_{E|A} \subset \tau_E$ si y solamente si $A \in \tau_E$: en efecto, si $\tau_{E|A} \subset \tau_E$ entonces $A \cap E = A \in \tau_E$ y, recíprocamente, si A es un abierto de E entonces para todo $O \in \tau_E$ se tiene $A \cap O \in \tau_E$ y por tanto $\tau_{E|A} \subset \tau_E$.*
3. *De lo anterior se infiere que todo cerrado de A es un cerrado de E si y solamente si A es un cerrado de E .*
4. *Si $B \subset A$ se tiene $\tau_{E|B} = (\tau_{E|A})|_B$; es decir las topologías inducidas sobre B por E y por A coinciden: en efecto, esto viene de $B \cap O = (B \cap A) \cap O = B \cap (A \cap O)$.*
5. *Si E es separado también lo es todo subespacio A . En efecto, dados $a, a' \in A \subset E$ existen O y O' , abiertos de E disjuntos, tales que $a \in O$ y $a' \in O'$; es claro que $A \cap O$ y $A \cap O'$ son abiertos de A que separan a los elementos a y a' . Estudie el recíproco de esta afirmación.*

En cuanto al comportamiento de funciones respecto de subespacios, si (F, τ_F) es otro espacio topológico, tenemos:

6. *Si $f : F \rightarrow A$ es continua, también lo es pensada de F a E , es decir $g : F \rightarrow E$, $g(x) = f(x)$, es continua. Esto sale inmediatamente ya que en tal caso $g = i_A \circ f$, que es composición de dos funciones continuas.*
7. *Si $h : E \rightarrow F$ es continua, también lo es $h|_A : A \rightarrow F$, su restricción al subespacio A . Para esto basta ver que $h|_A = h \circ i_A$. El recíproco de esto no es válido: podemos tener funciones no continuas cuyas restricciones*

sobre un subespacio si lo sean. A modo de ejemplo, consideremos la función $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\rho(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ y $\rho(x) = 0$ si $x \notin \mathbb{Q}$; esta función no es continua en punto alguno de $\mathbb{R}$ y sin embargo su restricción a $\mathbb{Q}$ es constante y por tanto continua en todo punto de $\mathbb{Q}$.

El último punto de la Nota nos lleva a la siguiente reflexión: si X es un subespacio de E y $f : X \rightarrow F$ es continua, dado $a \in E \setminus X$ ¿como deberíamos definir $f(a)$ para establecer una extensión de f sobre $X \cup \{a\}$ que sea continua? Para ello deberíamos escoger un elemento b de F de manera que se cumpla lo que se exige para la continuidad en un punto. Ahora bien, un tal elemento b puede no existir o bien, pueden haber muchos elementos en el espacio F que satisfagan este requerimiento. Esto nos lleva al concepto de límite:

Definición 24 Sean $(E, \tau_E), (F, \tau_F)$ dos espacios topológicos, a un elemento de E y $f : E \rightarrow F$. Se dice que $b \in F$ es un **límite** de f en $a \in E$ si para todo $O \in \tau_F$ tal que $b \in O$, existe $U \in \tau_E$ tal que $a \in U$ y $f(U) \subset O$.

Otra manera de establecer esto es la siguiente: $b \in F$ es un límite de f en $a \in E$ si para todo $O \in \tau_F$ tal que $b \in O$, $f^{-1}(O)$ es una vecindad de a . Es claro según la definición, que decir f es continua en a es equivalente a decir que $f(a)$ es un límite de f en a . Por último, también es inmediato deducir que si $b \in F$ es un límite de f en $a \in E$ entonces $b \in \overline{f(E)}$.

En el ámbito de las funciones reales, dada $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ decir que b es límite de la función g en el elemento a significa que para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|x - a| < \delta \Rightarrow |g(x) - b| < \epsilon$; en este caso los límites son únicos. Al respecto tenemos:

Proposición 25 Sean $f : E \rightarrow F$, F separado, y $a \in E$. Si existe límite de f en a este es único.

Demostración. Sean $b, b' \in F$ distintos y O y O' abiertos de F tales que $b \in O$ y $b' \in O'$. Si b y b' fueran límites de f en $a \in E$ existirían U y U' , abiertos de E , que contienen al elemento a , tales que $f(U) \subset O$ y $f(U') \subset O'$; como $a \in U \cap U'$ y $f(U \cap U') \subset f(U) \cap f(U')$ se tendría entonces $\emptyset \neq f(U \cap U') \subset O \cap O'$ lo que contradice la separación de b y b' . ■

Veamos ahora la idea de límite de una sucesión. Veremos que en definitiva es un caso particular de límite de una función:

Definición 26 Sean (F, τ_F) un espacio topológico y $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de F . Se dice que $x \in F$ es **límite de la sucesión** si para todo O abierto de F tal que $x \in O$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in O$ para todo $n \geq m$.

Proveamos a $\bar{\mathbb{N}}$ de la extensión de la topología definida para $\bar{\mathbb{N}}$ en el ejercicio 4 del capítulo 3: los abiertos son los conjuntos $A_\alpha = \{\beta \in \bar{\mathbb{N}}; \beta + 1 > \alpha\}$, $\alpha \in \bar{\mathbb{N}}$. Si tomamos cualquier función $s : \bar{\mathbb{N}} \rightarrow F$, la restricción de esta a $\mathbb{N}$ es una sucesión de elementos de F : a saber $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en donde $x_n = s(n)$; decir que x es límite de la sucesión, según la definición que acabamos de entregar, es equivalente a decir que x es un límite de la función s en $+\infty$. Obviamente, teniendo en cuenta lo dicho para límites de funciones, que todo límite de la sucesión es un elemento de la adherencia del conjunto $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$; además, si el espacio F es separado la sucesión admite a lo más un límite.

Retomemos, ahora, la construcción de espacios. Veremos en lo que sigue como proveer de una topología ad-hoc al producto cartesiano de espacios topológicos. Trabajaremos con dos espacios: la dificultad de hacerlo con un número finito arbitrario es solamente de escritura y en caso alguno conceptual.

En el marco conjuntista, al darnos el producto $E_1 \times E_2$ implícitamente nos estamos dando un par de funciones: las proyecciones $\pi_k : E_1 \times E_2 \rightarrow E_k$, definidas por $\pi_k(x_1, x_2) = x_k$ para $k = 1, 2$. Estas aplicaciones canónicas, sobreyectivas, nos dirán como construir la topología producto pues la mínima exigencia estructural es que para esa topología estas proyecciones sean continuas. Con esta premisa, si O_1 es un abierto de E_1 y O_2 es un abierto de E_2 necesitamos que $\pi_1^{-1}(O_1)$ y $\pi_2^{-1}(O_2)$ sean abiertos de $E_1 \times E_2$ y a fortiori que $\pi_1^{-1}(O_1) \cap \pi_2^{-1}(O_2)$ también lo sea; ahora bien, no es difícil establecer que este último conjunto es igual a $O_1 \times O_2$: estos abiertos serán llamados los abiertos elementales de la topología producto. Tenemos:

Definición 27 Sean (E_1, τ_1) y (E_2, τ_2) espacios topológicos. Llamamos **topología producto** a aquella definida sobre $E_1 \times E_2$ y en la cual los abiertos son reuniones arbitrarias de abiertos elementales.

Es claro que esta topología es la menor que se puede definir sobre $E_1 \times E_2$ de manera que las proyecciones sean continuas. Veamos ahora algunas características de la topología producto, pero antes precisemos algunos conceptos: si $f : Y \rightarrow E_1 \times E_2$, $f(y) = (y_1, y_2)$, las funciones $f_k = \pi_k \circ f$,

$f_k(y) = y_k$ con $k = 1$ y 2 se llaman las **funciones coordenadas** de f ; como $f(y) = (f_1(y), f_2(y))$ podemos escribir $f = (f_1, f_2)$. Caso particular de esto son las sucesiones $(\mathbf{s}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $E_1 \times E_2$: aquí tenemos las sucesiones coordenadas asociadas, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E_1 y $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E_2 , donde $\mathbf{s}_n = (a_n, b_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por otro lado, si $g : E_1 \times E_2 \rightarrow X$ para todo $a \in E_1$ se define la **función parcial** $g_a : E_2 \rightarrow X$, $g_a(y) = g(a, y)$; es claro que se tiene $g_a = g \circ \iota_a$ donde $\iota_a : E_2 \rightarrow E_1 \times E_2$, $\iota_a(y) = (a, y)$. Obviamente lo mismo hacemos con $b \in E_2$: $g_b : E_1 \rightarrow X$, $g_b(z) = g(z, b)$ y $g_b = g \circ \iota_b$ donde $\iota_b : E_1 \rightarrow E_1 \times E_2$, $z \mapsto (z, b)$.

Nota 28 *Algunas consideraciones sobre el espacio producto:*

1. *Para operar con abiertos en el espacio producto, en general, bastará utilizar abiertos elementales; así por ejemplo si consideramos un punto de $E_1 \times E_2$ y un abierto que lo contenga, como este abierto es reunión de abiertos elementales, el punto en cuestión estará necesariamente en uno de ellos.*
2. *Si A_1 y A_2 son respectivamente subespacios de E_1 y E_2 la topología producto de $A_1 \times A_2$ coincide con la topología del subespacio $A_1 \times A_2$ inducida por $E_1 \times E_2$. En efecto, esto resulta de la identidad conjuntista $(A_1 \cap O_1) \times (A_2 \cap O_2) = (A_1 \times A_2) \cap (O_1 \times O_2)$, por lo que los abiertos elementales del espacio $A_1 \times A_2$ no son otros que los producidos por la traza de la topología de $E_1 \times E_2$ sobre $A_1 \times A_2$.*
3. *Si E_1 y E_2 son separados entonces el espacio producto $E_1 \times E_2$ también lo es. En efecto, si $(a_1, a_2) \neq (b_1, b_2)$ obligadamente se tiene $a_1 \neq b_1$ o $a_2 \neq b_2$; si $a_1 \neq b_1$, puesto que E_1 es separado, existen O_1 y U_1 abiertos disjuntos de E_1 que separan a los elementos a_1 y b_1 . Así las cosas, los conjuntos $O_1 \times E_2$ y $U_1 \times E_2$ son abiertos disjuntos de $E_1 \times E_2$ que separan a (a_1, a_2) y (b_1, b_2) . Estudie el recíproco de esta afirmación.*

En lo que sigue veremos el comportamiento del espacio producto respecto de funciones; sean Y, Z otros espacios topológicos:

4. *La función $f : Y \rightarrow E_1 \times E_2$ es continua si y solamente si las respectivas funciones coordenadas también lo son. En efecto, por un lado*

tenemos $f_1 = \pi_1 \circ f$ y $f_2 = \pi_2 \circ f$, composición de funciones continuas; recíprocamente, con un pequeño cálculo conjuntista se establece que $f^{-1}(O_1 \times O_2) = f_1^{-1}(O_1) \cap f_2^{-1}(O_2)$, lo que muestra que si las funciones coordenadas son continuas, la imagen recíproca de un abierto elemental por f es un abierto de Y .

5. Apoyándose en el punto anterior, puede usted establecer que toda sucesión de elementos de $E_1 \times E_2$ tiene un límite (a_1, a_2) si y solamente si las sucesiones coordenadas tienen límites a_1 y a_2 respectivamente.
6. Para todo $a \in E_1$ las funciones $\iota_a : E_2 \rightarrow E_1 \times E_2$, $\iota_a(y) = (a, y)$ son inyectivas y continuas. En efecto, la inyectividad de ι_a es inmediata y su continuidad resulta de $\iota_a^{-1}(O_1 \times O_2) = O_2$. Obviamente que lo mismo verifican las funciones $\iota_b : E_1 \rightarrow E_1 \times E_2$ para $b \in E_2$.
7. Si $g : E_1 \times E_2 \rightarrow X$ es continua, toda función parcial también lo es. Esto viene de que tales funciones son del tipo $g_a = g \circ \iota_a$ y $g_b = g \circ \iota_b$, composición de funciones continuas. El recíproco de esto no es válido: por ejemplo la función $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x, y) = xy/x^2 + y^2$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ y $\varphi(0, 0) = 0$ no es continua en $(0, 0)$ y sin embargo todas sus funciones parciales son continuas en todo el dominio.

La construcción de espacios topológicos cocientes, sus características y comportamientos, es tema propuesto como ejercicio.

Ejercicios

1. Sea E un espacio topológico que tiene una base de abiertos numerable y sea $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Si $M = \{a \in E \mid f(a) \text{ es un máximo local } (*)\}$ demuestre que $f(M)$ es finito o numerable.
(*) Significa que existe V , vecindad de a , tal que $f(x) \leq f(a)$ para todo $x \in V$.
2. De una condición necesaria y suficiente para que la función identica, $Id_E : (E, \tau_1) \rightarrow (E, \tau_2)$, sea continua.
3. Sea $f : E \rightarrow F$ continua. Caracterice f sabiendo que E tiene la topología grosera y F la topología discreta.

4. Sean (E, τ) un espacio topológico, R una relación de equivalencia sobre E , $\overline{E} = E/R$ el conjunto cociente, y $p_R : E \rightarrow \overline{E}$, $x \rightarrow \overline{x}$, la proyección canónica. Se define $\overline{\tau} = \{A \subset \overline{E} / p_R^{-1}(A) \in \tau\}$.

Demuestre que:

- a) La familia $\overline{\tau}$ es una topología para $\overline{E}$; el par $(\overline{E}, \overline{\tau})$ se llama **espacio topológico cociente**.
 - b) $\overline{\tau}$ es la topología mas fina tal que p_R es una función continua.
 - c) Sean F es un espacio topológico y $f : E \rightarrow F$. Demuestre que f es continua si y solamente si $f \circ p_R$ también lo es.
 - d) Sean (E, τ) y (F, τ) espacios topológicos, R y S relaciones de equivalencia sobre E y F respectivamente, $f : E \rightarrow F$ una función compatible con las relaciones (es decir, $xRy \Rightarrow f(x)Sf(y)$). Demuestre que existe $\overline{f} : \overline{E} \rightarrow \overline{F}$ tal que $\overline{f} \circ p_R = p_S \circ f$ y que f es continua si y sólo si $\overline{f}$ también lo es.
5. Sean $f : E \rightarrow F$ una aplicación continua y $B \subset F$.
- a) Estudie las relaciones de inclusión entre los conjuntos:
 $f^{-1}(B)$ y $f^{-1}(\overset{\circ}{B})$; $\overline{f^{-1}(B)}$ y $f^{-1}(\overline{B})$; $Fr(f^{-1}(B))$ y $f^{-1}(Fr(B))$.
 - b) ¿Que puede decir de $f^{-1}(B)$ si B es denso?
6. Sea X el conjunto de los números reales provisto de la topología cofinita. Demuestre que la función $f : \mathbb{R} \rightarrow X$, $f(x) = x$, es continua pero no es un homeomorfismo
7. Determine la topología de un espacio topológico E sabiendo que toda función con valores reales definida en E es continua.
8. Sea F un espacio topológico y E un subespacio de F . Si $A \subset E$ estudie la relación del interior, la adherencia y la frontera de A respecto del espacio E y del espacio F .

9. Reflexione los siguientes preguntas:
- ¿Existe un espacio topológico no separado que admita subespacios separados no triviales?
 - ¿Si todo subespacio propio de E es separado, se tiene E separado?.
10. Si A es un subconjunto de E , la **función característica** de A se define como sigue : $c_A : E \rightarrow \{0, 1\}$, $c_A(x) = 1$ si $x \in A$ y $c_A(x) = 0$ si $x \notin A$. Estudie la continuidad de c_A .
11. Si A y B son subconjuntos de un espacio topológico E , demuestre que:
- $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$, $A \overset{\circ}{\times} B = \overset{\circ}{A} \times \overset{\circ}{B}$
 - $Fr(A \times B) = (Fr(A) \times \overline{B}) \cup (\overline{A} \times Fr(B))$.
12. Sean E_1, E_2 espacios topológicos. Demuestre que las proyecciones π_1 y π_2 son **funciones abiertas**, es decir transforman abiertos en abiertos.
13. Sean E y F dos espacios topológicos, $E \times F$ el espacio producto y $x \in F$. Demuestre que E es homeomorfo a $E \times \{x\} \subset E \times F$.
14. Sea E un espacio topológico. La **diagonal** Δ_E de $E \times E$ se define por $\Delta_E = \{(x, x) / x \in E\}$. Demuestre que:
- E es homeomorfo a Δ_E .
 - E es separado si y sólo si Δ_E es cerrado.
15. Sean E y F dos espacios topológicos, $f : E \rightarrow F$ continua. Se define $\Gamma_f \subset E \times F$, $\Gamma_f = \{(x, f(x)) / x \in E\}$ **el grafo** de la función f . Demuestre que:
- E es homeomorfo a Γ_f
 - Si F es separado entonces Γ_f es cerrado.

16. Sean E y F espacios topológicos, F separado, y $f, g : E \rightarrow F$ dos aplicaciones continuas. Demuestre que:
- a) $\{x \in E \mid f(x) \neq g(x)\}$ es abierto
 - b) $\{x \in E \mid f(x) = g(x)\}$ es cerrado.
17. Sean E y F espacios topológicos, F separado, y $f, g : E \rightarrow F$ dos aplicaciones continuas. Demuestre que si f y g coinciden en un subconjunto denso $D \subset E$ (i.e. $f(x) = g(x)$ para todo $x \in D$) entonces $f = g$.
18. Sean E un espacio separado y $f : E \rightarrow E$ una aplicación continua. Demuestre que el conjunto de los puntos fijos de f es cerrado.
19. Sean E un espacio topológico y $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ dos aplicaciones continuas. Demuestre que:
- a) $\{x \in E \mid f(x) < g(x)\}$ es abierto
 - b) $\{x \in E \mid f(x) \leq g(x)\}$ es cerrado.
20. Sean E un espacio topológico, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación continua y $\lambda \in \mathbb{R}$. Demuestre que :
- a) $\{x \in E \mid f(x) < \lambda\}$ es abierto
 - b) $\{x \in E \mid f(x) \leq \lambda\}$ y $\{x \in E \mid f(x) = \lambda\}$ son cerrados.
21. Sean E un espacio topológico y $f : E \rightarrow \mathbb{R}$. Muestre que si para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $\{x \in E \mid f(x) < \lambda\}$ y $\{x \in E \mid f(x) > \lambda\}$ son abiertos, entonces f es continua.
22. Sean $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación continua e $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo. Demuestre que:
- a) $f(I)$ es un intervalo.
 - b) Si $f(I)$ tiene elementos positivos y negativos entonces existe $x \in I$ tal que $f(x) = 0$.
 - c) Si $f(I) \subset I$ entonces existe $x \in I$ tal que $f(x) = x$.
23. ¿ Puede existir $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continua de manera que $f(x)$ sea irracional si x es racional y racional si x es irracional ?

5. Conexidad

Intuitivamente no es difícil percibir cuando un objeto, de la naturaleza que sea, está constituido, formado o estructurado, de un sólo pedazo o componente. En este capítulo vamos a formalizar este concepto en lo que respecta a espacios topológicos. Evidentemente que nos vamos a apoyar en los abiertos de la topología. Tenemos:

Definición 29 *Se dice que un espacio topológico (E, τ) es **conexo** si no puede descomponerse como partición de dos abiertos. Además diremos que un subconjunto de espacio topológico es conexo si en tanto subespacio lo es.*

Es claro por la definición, y dado que la reunión arbitraria de abiertos es un abierto, que un espacio conexo no puede descomponerse como partición arbitraria de abiertos. Así mismo, si un subconjunto conexo $A \subset E$ es recubierto por una reunión de abiertos no vacíos y disjuntos, $A \subset \bigcup_{i \in I} O_i$, obligadamente existe $j \in I$ tal que $A \subset O_j$.

Es inmediato que los singletons son trivialmente conexos. Por último, de la definición se infiere también que los espacios discretos con más de un punto no son conexos; de esto sale que salvo los singletons, los subconjuntos conexos de un espacio separado son necesariamente infinitos.

Veamos ahora que la conexidad podemos expresarla de otras formas, muy útiles según el contexto en que se trabaje. Tenemos:

Proposición 30 *Sea (E, τ) un espacio topológico. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

- i) No existe partición de E en dos abiertos.*
- ii) No existe partición de E en dos cerrados.*
- iii) Los únicos abiertos y cerrados del espacio son E y $\emptyset$.*
- iv) Toda función continua de E en un espacio discreto con más de un elemento es constante.*

Demostración. Demostremos, primero que $(i) \Leftrightarrow (iv)$: en efecto, supongamos E conexo y sea $f : E \rightarrow \{\alpha, \beta\}$; si f es continua entonces $f^{-1}(\{\alpha\})$ y

$f^{-1}(\{\beta\})$ son abiertos de E , evidentemente disjuntos y que verifican trivialmente $E = f^{-1}(\{\alpha\}) \cup f^{-1}(\{\beta\})$; como E es conexo, uno de esos abiertos debe ser vacío: si, por ejemplo $f^{-1}(\{\alpha\}) = \emptyset$ entonces $f^{-1}(\{\beta\}) = E$ es decir, $f(x) = \beta$ para todo $x \in E$. Recíprocamente, si $E = O_1 \cup O_2$ con O_1, O_2 abiertos disjuntos, obligadamente uno de los dos abiertos debe ser vacío pues en caso contrario podríamos definir la función $f : E \rightarrow \{\alpha, \beta\}$ por $f(x) = \alpha$ si $x \in O_1$ y $f(x) = \beta$ si $x \in O_2$, la que es obviamente continua.

En cuanto al resto, veamos que la negación de las tres primeras afirmaciones enunciadas nos da:

- i) $E = O_1 \cup O_2$ con O_1, O_2 abiertos no vacíos disjuntos.
- ii) $E = C_1 \cup C_2$ con C_1, C_2 cerrados no vacíos disjuntos.
- iii) Existe $A \subset E$, subconjunto no trivial, que es abierto y cerrado.

Mostremos que ellas son equivalentes: es claro que (i) $\Rightarrow$ (ii) pues si $E = O_1 \cup O_2$ donde O_1 y O_2 son abiertos no vacíos y disjuntos, entonces $A = \complement O_1 \cup \complement O_2$ es una partición de cerrados. Por otro lado, (ii) $\Rightarrow$ (iii) pues basta tomar $A = C_1$ ya que $C_1 = \complement C_2$ y por tanto es también un abierto. Finalmente, (iii) $\Rightarrow$ (i), ya que si A es abierto y cerrado no trivial, también lo es $\complement A$; luego $E = A \cup \complement A$ es en particular una partición de abiertos. ■

Utilicemos estas caracterizaciones y resultados anteriores para lo que sigue. Veamos primero que, bajo ciertas condiciones, las reunión de conexos es un conexo:

Proposición 31 *Sea $(A_i)_{i \in I}$ es una familia de subconjuntos conexos de un espacio topológico. Si existe $k \in I$ tal que $A_i \cap A_k \neq \emptyset$ para todo $i \in I$, entonces $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ es un conexo.*

Demostración. Si $f : A \rightarrow \{\alpha, \beta\}$ es continua, entonces la restricción a A_k también lo es y como es un subconjunto conexo, $f|_{A_k}$ es constante: por ejemplo, $f(x) = \alpha$ para todo $x \in A_k$. Ahora bien, dado $i \in I$ se tiene $A_i \cap A_k \neq \emptyset$; si $a \in A_i \cap A_k$ se infiere que $f(a) = \alpha$ y como A_i también es conexo deducimos que $f(x) = \alpha$ para todo $x \in A_i$. Como i es arbitrario concluimos que f toma los mismos valores en todos los A_i y por tanto en A , reunión de estos. ■

Llamamos la atención de que si $(A_i)_{i \in I}$ es una familia de subconjuntos, la situación (1): $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$ implica que (2): $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ para todo $i, j \in I$, situación que a su vez implica que existe $k \in I$ tal que $A_i \cap A_k \neq \emptyset$ para todo $i \in I$. Esto quiere decir que bajo las condiciones (1) y (2) también se verifica la proposición anterior. Por otro lado, no siempre la intersección de conexos es un conexo: la intersección de dos círculos en el plano puede dar dos puntos.

Respecto de conjuntos conexos, tenemos también:

Proposición 32 *Sea (E, τ) un espacio topológico:*

- i) *Si $D \subset E$ es un subconjunto denso conexo, entonces E es conexo*
- ii) *Si $A \subset E$ es un subconjunto conexo, entonces todo conjunto B tal que $A \subset B \subset \overline{A}$ es conexo.*

Demostración. Supongamos que $E = O_1 \cup O_2$, reunión de abiertos disjuntos y demostremos que uno de esos abiertos es necesariamente vacío. Se tiene $D = (O_1 \cup O_2) \cap D = (O_1 \cap D) \cup (O_2 \cap D)$; como D es conexo y $(O_1 \cap D), (O_2 \cap D)$ son abiertos de D uno de ellos es vacío. Supongamos que $O_1 \cap D = \emptyset$: ahora bien, sabemos que todo abierto no vacío corta a cualquier conjunto denso por lo que obligadamente $O_1 = \emptyset$.

La segunda parte sale de la primera pues si $A \subset B \subset \overline{A}$ entonces A es denso en B . ■

Proposición 33 *La imagen de un conexo por una aplicación continua es un conexo.*

Demostración. En efecto, sean E y F espacios topológicos, E conexo y $f : E \rightarrow F$ continua. Supongamos que $g : f(E) \rightarrow \{\alpha, \beta\}$ es continua; como $g \circ f : E \rightarrow \{\alpha, \beta\}$ es continua y E es conexo se infiere que $g \circ f$ es constante y por tanto g también. Se concluye que $f(E)$ es conexo. ■

Intuitivamente, entre las primeras ideas de un espacio conexo no trivial aparece $\mathbb{R}$. Al respecto tenemos:

Teorema 34 *Aparte de los singletones, los únicos conexos de $\mathbb{R}$ son $\mathbb{R}$ y todo intervalo.*

Demostración. Supongamos que $\mathbb{R}$ no es conexo: por la Proposición 30 existe un subconjunto A , abierto y cerrado de $\mathbb{R}$ no trivial.

En tal caso, si $x \in \mathbb{R} - A$ entonces al menos uno de los conjuntos $A \cap [x, +\infty[$ o $A \cap]-\infty, x]$ es no vacío; supongamos que $A \cap [x, +\infty[\neq \emptyset$. Como A es cerrado, $A \cap [x, +\infty[$ es cerrado; puesto que además es acotado inferiormente, tiene un mínimo $m \in A \cap [x, +\infty[$; pero como $x \notin A$, $A \cap [x, +\infty[= A \cap]x, +\infty[$, es decir $A \cap [x, +\infty[$ es también un abierto; luego existe $\epsilon > 0$ tal que $]m - \epsilon, m + \epsilon[\subset A \cap [x, +\infty[$, lo que contradice la definición de m . Luego $\mathbb{R}$ es conexo.

En cuanto a los intervalos, veamos primero que $]a, b[$ es imagen de $\mathbb{R}$ bajo la acción de la función continua:

$$x \mapsto \frac{b+a}{2} + \frac{(b-a)x}{2(1+|x|)} \quad (\text{la que en definitiva es un homeomorfismo})$$

y aplicando la Proposición 33 resulta que $]a, b[$ es conexo; respecto a un intervalo acotado cualquiera tenemos $]a, b[\subset]a, b]$, $[a, b[\subset [a, b] = \overline{]a, b[}$ por lo que basta aplicar la Proposición 32 para establecer la conexidad. Finalmente, en cuanto a los intervalos semi-acotados, abiertos o cerrados, por ejemplo $[a, +\infty[$, se tiene $[a, +\infty[= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [a, a+n[$, reunión que satisface las condiciones de la Proposición 31.

Queda por demostrar que si A es un conexo de $\mathbb{R}$, distinto de $\mathbb{R}$ y con más de un punto, entonces es un intervalo, es decir, que para todo $a, b \in A$, $a < b$, se tiene: si $x \in \mathbb{R}$ y $a < x < b$ entonces $x \in A$: en efecto, si tal no fuera el caso, los conjuntos $] - \infty, x[\cap A$ y $]x, +\infty, c[\cap A$ constituirían una partición de abiertos de A , lo que es imposible. ■

También, intuitivamente, es esperable que $\mathbb{R}^2$ sea conexo. Más generalmente tenemos:

Proposición 35 *$E \times F$ es conexo si y solamente si E y F lo son.*

Demostración. El directo es inmediato por la Proposición 33, pues cada espacio es imagen de su respectiva proyección canónica. Recíprocamente, sea $b \in F$: el espacio $E \times \{b\}$ es homeomorfo a E y por tanto conexo; por las mismas razones, para todo $a \in E$ los espacios $\{a\} \times F$ son conexos. Ahora bien, la colección de conjuntos $\{E \times \{b\}; \{a\} \times F, a \in E\}$ verifica las condiciones de la Prop. 31 pues $E \times \{b\}$ corta a cada $\{a\} \times F$ en el punto

(a, b) ; como la reunión de esta familia es todo espacio producto se concluye que $E \times F$ es conexo. ■

Terminamos esta parte con una idea muy natural: un espacio no conexo está formado en definitiva por partes conexas, en el peor de los casos, sus singletons.

Definición 36 Sean E un espacio topológico y $x \in E$. Se llama **componente conexa** de x , y se denota por $C(x)$, al mayor conjunto conexo que contiene a x .

El sentido que tiene la palabra mayor lo da el orden de la inclusión ($\subset$), es decir, que si K es conexo y $C(x) \subset K$ entonces $C(x) = K$: se tiene:

Proposición 37 Sea $x \in E$.

- i) Si $A \subset E$ es conexo y $x \in A$ entonces $A \subset C(x)$.
- ii) Las componentes conexas son conjuntos cerrados.
- iii) Las componentes conexas constituyen una partición del espacio.

Demostración. Bajo las condiciones de (i), por la Proposición 31 se tiene que $A \cup C(x)$ es un conexo; como $C(x) \subset A \cup C(x)$, por la maximalidad de la componente se tiene $C(x) = A \cup C(x)$, de donde $A \subset C(x)$.

Por otro lado, por la Proposición 32, la conexidad de $C(x)$ nos da la conexidad de $\overline{C(x)}$ y, por lo anterior, $C(x) = \overline{C(x)}$; luego $C(x)$ es un cerrado.

Finalmente, es claro que por definición $C(x) \neq \emptyset$ para todo $x \in E$; además, si $z \in C(x) \cap C(y)$ el conjunto $C(x) \cup C(y)$ es un conexo (Prop. 31) y como $C(x)$ y $C(y)$ son subconjuntos de $C(x) \cup C(y)$ obligadamente, por (i), concluimos que $C(x) = C(x) \cup C(y) = C(y)$. Que E es igual a $\bigcup_{x \in E} C(x)$ es inmediato pues $x \in C(x)$ para todo $x \in E$. ■

Ejercicios

1. Demuestre $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ no son conexos; para cada conjunto exhiba una partición de abiertos.

2. Sea E un espacio topológico y consideremos a $\mathbb{Z}$ provisto de la topología discreta. Demuestre que E es conexo si y solamente si las únicas funciones continuas de E en $\mathbb{Z}$ son las funciones constantes.
3. Sea E un espacio topológico conexo y $F \subset E$. Entonces el conjunto $A = (E \times F) \cup (F \times E)$ es conexo.
4. Sea $A \subset \mathbb{R}^2$, $A = \{(x, y) / x \text{ o } y \text{ es irracional}\}$. Demuestre que A es conexo.
5. Sea E un espacio topológico. Demuestre que E es conexo si y solamente si sus únicas funciones características continuas son las asociadas a los conjuntos E y $\emptyset$.
Recordamos que si $A \subset E$, la función característica asociada a A está definida por $c_A : E \rightarrow \{0, 1\}$, $c_A(x) = 1$ si $x \in A$ y $c_A(x) = 0$ si $x \notin A$.
6. Demuestre que un espacio E es conexo si y solamente si no existe función continua sobreyectiva de E en un espacio discreto con más de un elemento.
7. Sea E un conjunto infinito provisto de la topología cofinita. Estudie si E es conexo; estudie las componentes conexas de ese espacio.
8. Sea E un espacio topológico y $A \subset E$. Demuestre que si B es conexo tal que $B \cap \overset{o}{A}$ y $B \cap \overset{o}{\complement A}$ son no vacíos entonces $B \cap Fr(A) \neq \emptyset$.
9. Sean E conexo y $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Demuestre que si $a, b \in f(E)$ entonces $[a, b] \subset f(E)$.
10. En $\mathbb{R}^2$ encuentre las componentes conexas de $\{(x, y) / x^2 y^2 = xy\}$.
11. Un espacio E es **arco-conexo** si para todo par de elementos a, b de E , existe $f_{a,b} : [0, 1] \rightarrow E$, continua, tal que $f(0) = a$ y $f(1) = b$.
Demuestre que:
 - (i) Un espacio arco-conexo es conexo.
 - (ii) $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$ son espacios arco-conexos.
 - (iii) Si $A \subset \mathbb{R}^2$ es finito, $\mathbb{R}^2 - A$ es arco-conexo.

6. Compacidad

En este capítulo nos abocaremos a estudiar un aspecto estructural muy importante y sus consecuencias en los objetos topológicos. Esta propiedad, en nada intuitiva y bastante escondida, la entrega el resultado sobre intervalos cerrados y acotados de $\mathbb{R}$, conocido como el Teorema de Heine-Borel:

Teorema 38 Sea $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervalo cerrado. Si $(O_i)_{i \in I}$ es una familia de abiertos de $\mathbb{R}$ que verifica $[a, b] \subset \bigcup_{i \in I} O_i$ entonces existe $J \subset I$, J finito, tal que $[a, b] \subset \bigcup_{j \in J} O_j$.

Es claro que el enunciado es equivalente reemplazando “abierto de $\mathbb{R}$ ” por “intervalo abierto”, ya que los primeros son reuniones arbitrarias de los últimos. Dicho de otra manera, el teorema establece que toda familia de abiertos que recubre a un intervalo cerrado y acotado posee una sub-familia finita que también lo recubre; esto, que se abrevia diciendo que todo recubrimiento por abiertos de $[a, b]$ posee un sub-recubrimiento finito, lo llamaremos la Propiedad del Recubrimiento Finito (**PRF**). Precisemos dos cosas:

- No se trata de probar que podemos recubrir un intervalo $[a, b]$ con un número finito de abiertos; eso es siempre trivialmente posible con todo subconjunto de $\mathbb{R}$.
- Los intervalos no cerrados no cumplen esta propiedad; así por ejemplo la familia de abiertos $O_n =]a, b - \frac{1}{n}[$, $n \geq 1$, recubre al intervalo $]a, b[$ y sin embargo no existe una sub-familia finita de los O_n que lo recubra.

Probemos el teorema:

Demostración. Como $[a, b] \subset \bigcup_{i \in I} O_i$ definamos A como el conjunto de los $x \in [a, b]$ tales que $[a, x]$ verifica PRF, es decir, es recubierto por un número finito de los O_i . Es claro que $a \in A$ y que A es acotado; luego, si $m = \sup(A)$ se tiene $a \leq m \leq b$ puesto que b es un mayorante de A . Así las cosas, existe $k \in I$ tal que $m \in O_k$ y, como estamos trabajando con abiertos de $\mathbb{R}$, podemos escoger $\epsilon > 0$ de manera que $a \leq m - \epsilon$ y además $]m - \epsilon, m + \epsilon[\subset O_k$; ahora bien, dada la definición de m es claro que $m - \epsilon$ es un elemento de A , es decir $[a, m - \epsilon]$ satisface PRF y a fortiori m también está en A (pues basta agregar O_k a la sub-familia finita que recubre $[a, m - \epsilon]$).

La demostración se termina estableciendo que $m = b$: en efecto, si se tuviera $m < b$ podríamos ajustar ϵ para tener $m + \epsilon < b$ y en tal caso $m + \frac{\epsilon}{2}$ estaría en A lo que contradice la maximalidad de m . ■

Es interesante ver en la demostración como se utilizan los datos de la hipótesis (cerrado y acotado); hacemos notar que también se utiliza, implícitamente, el hecho que $\mathbb{R}$ sea separado.

Definición 39 *Un espacio topológico es **compacto** si es separado y si para todo recubrimiento del espacio por una familia de abiertos existe una subfamilia finita que lo recubre. Es decir, si $(O_i)_{i \in I}$ es una familia de abiertos de E que verifica $E = \bigcup_{i \in I} O_i$ entonces existe $J \subset I$, J finito, tal que $E = \bigcup_{j \in J} O_j$.*

En lo que sigue estudiaremos consecuencias estructurales de la compacidad; notaremos que muchos resultados no requieren de la separación. Veamos primero otras versiones de la propiedad PRF:

Proposición 40 *Sea (E, τ) un espacio topológico. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

- i) Para toda familia $(O_i)_{i \in I}$ de abiertos de E que verifica $E = \bigcup_{i \in I} O_i$ existe $J \subset I$, J finito, tal que $E = \bigcup_{j \in J} O_j$.*
- ii) Para toda familia $(C_i)_{i \in I}$ de cerrados de E que verifica $\bigcap_{i \in I} C_i = \emptyset$ existe $J \subset I$, J finito, tal que $\bigcap_{j \in J} C_j = \emptyset$.*
- iii) Para toda familia $(C_i)_{i \in I}$ de cerrados de E que verifica $\bigcap_{j \in J} C_j \neq \emptyset$ para todo $J \subset I$, J finito, se tiene $\bigcap_{i \in I} C_i \neq \emptyset$.*

Demostración. La demostración es inmediata: en efecto $(i) \Leftrightarrow (ii)$ por la dualidad de la complementación y $(ii) \Leftrightarrow (iii)$ por la negación. El desarrollo y detalles se dejan al lector. ■

Si A es un subespacio de E decir que recubrimos A por abiertos de A es equivalente a decir que A está contenido en una reunión de abiertos de E ; esto viene de la forma de los abiertos de A (la topología de la traza) y de que $A = \bigcup_{i \in I} (A \cap O_i) \Leftrightarrow A \subset \bigcup_{i \in I} O_i$. Esto nos dice que para estudiar la compacidad de un subespacio separado basta utilizar recubrimientos por abiertos del espacio.

De esta manera vemos que todo subespacio finito y separado es compacto y, por el Teorema 38, que todo intervalo cerrado y acotado de $\mathbb{R}$ es un compacto; en fin, aunque es evidente no está demás decirlo, $\mathbb{R}$ no es compacto.

Proposición 41 *Sean E un espacio compacto y $A \subset E$. Entonces A es infinito si y sólo si A posee puntos de acumulación.*

Demostración. Sabemos que el recíproco es verdadero en todo espacio separado. Mostremos, pues, el directo: supongamos que A no tiene puntos de acumulación; esto quiere decir que para todo $x \in E$ existe un abierto O_x , $x \in O_x$, tal que $A \cap O_x$ es vacío (si $x \notin A$) o es igual a $\{x\}$, (si $x \in A$); la familia $(O_x)_{x \in E}$ es evidentemente un recubrimiento por abiertos de E y como el espacio es compacto podemos encontrar un sub-recubrimiento finito $O_{x_1}, O_{x_2}, \dots, O_{x_n}$. Se infiere de esto que $A \subset \{x_1, \dots, x_n\}$ lo que contradice la hipótesis. ■

No es difícil ver que en un espacio separado la reunión de una familia infinita de compactos no es necesariamente un compacto (basta dar un ejemplo); sin embargo, para un número finito de compactos la respuesta es afirmativa, pues cualquier recubrimiento por abiertos de la reunión también será un recubrimiento para cada uno de los factores de la reunión y por tanto para cada uno de los compactos en juego tendremos un sub-recubrimiento finito (usted puede redactar formalmente la demostración). ¿Que pasa con la intersección de compactos? Para responder a esto tenemos:

Proposición 42 *Sea E un espacio topológico separado y $A \subset E$. Entonces A compacto $\Rightarrow A$ cerrado. El recíproco es verdadero si E es compacto.*

Demostración. Sea A un compacto de E ; mostremos que $\mathbb{C}A$ es un abierto: si $x \in \mathbb{C}A$, por la separación del espacio, para todo $a \in A$ existen abiertos X_a y O_a disjuntos tales que $x \in X_a$ y $a \in O_a$; como $A \subset \bigcup_{a \in A} O_a$ y A es compacto existe un sub-recubrimiento finito $A \subset O_{a_1} \cup \dots \cup O_{a_n} = O$. Ahora bien, $X = X_{a_1} \cap \dots \cap X_{a_n}$ es un abierto de E que contiene a x , disjunto con O : es decir, $X \subset \mathbb{C}A$ y por tanto $\mathbb{C}A$ es un abierto.

En cuanto a la segunda afirmación, basta observar que dado cualquier recubrimiento de un cerrado S por abiertos de E podemos extenderlo a uno de E agregando el abierto $\mathbb{C}S$. Por compacidad de E existe un recubrimiento finito de E y a fortiori de S . Otras demostraciones de este resultado, igual de simples, pueden hacerse utilizando la Proposición 40 (ii) o (iii). ■

Podemos ahora responder a la pregunta sobre intersecciones de compactos, pues en definitiva cualquier intersección de compactos nos dará un cerrado dentro de un compacto, es decir, la intersección arbitraria de compactos de un espacio separado es un compacto.

Veamos ahora cuales son los compactos de $\mathbb{R}$. Tenemos la clasificación:

Teorema 43 *Los únicos compactos de $\mathbb{R}$ son los conjuntos cerrados y acotados.*

Demostración. En efecto, puesto que $\mathbb{R}$ es separado, por la Proposición anterior sabemos que si A es compacto entonces es cerrado; por otro lado, como la familia de abiertos crecientemente encajonados $] -n, n[$, $n \in \mathbb{N}$, es un recubrimiento de A (dado que recubre $\mathbb{R}$), la compacidad de A nos provee de un $m \in \mathbb{N}$ de manera que $A \subset] -m, m[$, es decir, A es acotado.

Recíprocamente, decir que A es un conjunto acotado de $\mathbb{R}$, significa que existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $A \subset [a, b]$; si además A es cerrado de $\mathbb{R}$ entonces es un cerrado de $[a, b]$ (intervalo que, por Heine-Borel, sabemos es un compacto) y por la Proposición anterior, A es un compacto. ■

La compacidad se transporta bien por aplicaciones continuas; más aún, esta incide fuertemente, cuando corresponde, en la bi-continuidad. Tenemos:

Proposición 44 *Sean E, F espacios topológicos separados y $f : E \rightarrow F$ una función continua. Entonces si E es compacto su imagen $f(E)$ es un compacto de F . Además, si f es biyectiva entonces f es un homeomorfismo.*

Demostración. Sea $(O_i)_{i \in I}$ una familia de abiertos de F que recubre $f(E)$, es decir $f(E) \subset \bigcup_{i \in I} O_i$; luego, por las propiedades de la imagen recíproca, $E = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(O_i)$ y como f es continua, la familia $(f^{-1}(O_i))_{i \in I}$ es una familia de abiertos de E . La compacidad de E nos garantiza la existencia de un sub-recubrimiento finito $E = f^{-1}(O_{i_1}) \cup \dots \cup f^{-1}(O_{i_n})$, de donde se infiere que $f(E) \subset O_{i_1} \cup \dots \cup O_{i_n}$, es decir, $f(E)$ es un compacto.

En cuanto a la segunda afirmación, debemos demostrar que f^{-1} es continua; para ello mostremos que las imágenes recíprocas de cerrados de F por f^{-1} son cerrados de E . Ahora bien, por tratarse de una función biyectiva, las imágenes recíprocas de f^{-1} no son otras que las imágenes directas de f : sea S es un cerrado de F ; como E es compacto S también es compacto y, por lo que acabamos de demostrar, el conjunto $f(S)$ es un compacto de F , por tanto cerrado puesto que F es separado. ■

Corolario 45 Sean E compacto y $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces f es acotada y logra su máximo y su mínimo en puntos de su dominio.

Demostración. Sabemos que $f(E)$ es un compacto de $\mathbb{R}$ y por tanto acotado. Pero además es cerrado por lo que existen $a, b \in E$ tales que se tiene: $a = \min(f(E))$ y $b = \max(f(E))$. ■

Dispongámonos ahora a estudiar la compacidad en el producto de espacios. Dado lo que ya hemos visto, puesto que las proyecciones canónicas π_E y π_F son continuas, si $E \times F$ es compacto es inmediato que E y F también lo son. Por otro lado, no es difícil intuitivamente aceptar que el producto de los compactos reales $[a, b] \times [c, d]$ sea un compacto de $\mathbb{R}^2$; si bien la generalización de esto es cierta, la demostración es sin duda la más técnica de este capítulo y su escritura bastante engorrosa.

Teorema 46 Si los espacios E y F son compactos, el producto $E \times F$ también lo es.

Demostración. Sabemos que E y F son separados si y solamente si $E \times F$ es separado. Además, como todo abierto de $E \times F$ es reunión de abiertos elementales, podemos restringir la demostración a recubrimientos de $E \times F$ por este tipo de abiertos.

Supongamos E y F compactos y sea $(O_i)_{i \in I}$, donde $O_i = U_i \times V_i$ para todo i , un recubrimiento por abiertos elementales del producto $E \times F$. Para cada $(a, b) \in E \times F$ sea $i(a, b) \in I$ tal que $(a, b) \in O_{i(a, b)}$; es claro que $a \in U_{i(a, b)}$ y $b \in V_{i(a, b)}$. Sabemos que para todo $e \in E$, el subespacio $\{e\} \times F$ de $E \times F$ es homeomorfo a F y por tanto es compacto; como los abiertos $O_{i(e, b)}$ de $E \times F$ recubren $\{e\} \times F$, existen $b_1(e), \dots, b_n(e) \in F$ tales que $\{e\} \times F \subset O_{i(e, b_1(e))} \cup \dots \cup O_{i(e, b_n(e))}$.

Ahora bien, como $O_{i(e, b_j(e))} = U_{i(e, b_j(e))} \times V_{i(e, b_j(e))}$ para todo $1 \leq j \leq n$, el conjunto definido por $A_e = U_{i(e, b_1(e))} \cap \dots \cap U_{i(e, b_n(e))}$ es un abierto de E que contiene a e ; notemos que si $(a, b) \in A_e \times F$, existe k tal que (e, b) está en $O_{i(e, b_k(e))} = U_{i(e, b_k(e))} \times V_{i(e, b_k(e))}$ y, por tanto, $(a, b) \in A_e \times V_{i(e, b_k(e))} \subset O_{i(e, b_k(e))}$. Se concluye así que $A_e \times F$ está contenido en $O_{i(e, b_1(e))} \cup \dots \cup O_{i(e, b_n(e))}$ (*).

Por otro lado, variando $e \in E$, los abiertos A_e recubren E ; como E es compacto podemos extraer un recubrimiento finito $E = A_{e_1} \cup \dots \cup A_{e_m}$; es decir, tenemos que: $E \times F = (A_{e_1} \times F) \cup \dots \cup (A_{e_m} \times F)$ (**).

De (*) y (**) se infiere directamente que $E \times F$ es recubierto por un número finito de abiertos O_i . ■

Corolario 47 *Los conjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$ son los cerrados y acotados.*

Demostración. Aclaremos que acotado en $\mathbb{R}^n$ significa estar contenido en un producto de n conjuntos reales acotados. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un compacto; como $\mathbb{R}^n$ es separado A es cerrado; por otro lado las imágenes $\pi_k(A)$ son compactos de $\mathbb{R}$ por tanto acotadas y es claro que $A \subset \pi_1(A) \times \cdots \times \pi_n(A)$. Recíprocamente, si B es un cerrado acotado de $\mathbb{R}^n$ podemos acotarlo por un compacto (por ejemplo, producto de intervalos cerrados y acotados); es decir B es un cerrado contenido en un compacto. ■

Terminamos este capítulo con las nociones de valor de adherencia y subsucesión de una sucesión:

Definición 48 *Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de un espacio topológico E .*

- $x \in E$ es un **valor de adherencia** de la sucesión si todo abierto que contiene a x contiene una infinidad de términos de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una **subsucesión** de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si $y_n = x_{k_n}$ imponiendo la condición de que la función $n \rightarrow k_n$ sea estrictamente creciente.

Es evidente que los valores de adherencia de una subsucesión son también valores de adherencia de la sucesión (en el estudio de los espacios métricos, que veremos en el próximo capítulo, se establece la equivalencia entre existencia de valores de adherencia de una sucesión y subsucesiones de ella que convergen). También es claro que todo límite de una sucesión es valor de adherencia de ella; sin embargo no son conceptos equivalentes: así sea una sucesión admita un sólo valor de adherencia, este no tiene porqué ser límite de la sucesión; por ejemplo en $\mathbb{R}$, la sucesión $0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, \dots$ no posee límite pero el 0 es (el único) valor de adherencia. Llamamos la atención de que una sucesión puede tener muchos, incluso una infinidad, valores de adherencia (no es mala idea fabricar algunos ejemplos que ilustren lo que aquí se dice). Por último, es claro que en un espacio separado el límite de una sucesión es su único valor de adherencia (veremos en lo que sigue un recíproco a esto en el caso de compactos).

Precisemos ahora el conjunto V de los valores de adherencia de una sucesión: si $S_n = \{x_k; k \geq n\}$, de la definición se infiere que $V \subset \overline{S_n}$ para todo n , es decir que $V \subset \overline{S_0} \cap \overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cdots$; por otro lado, si $x \in \overline{S_0} \cap \overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cdots$ todo abierto O que contenga a x intercepta a S_n para todo n ; como se trata de conjuntos encajonados en forma decreciente ($S_0 \supset S_1 \supset S_2 \supset \dots$) hay una infinidad de x_k en O . Luego, V es el cerrado $\overline{S_0} \cap \overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cdots$.

Lo que sigue es un importante resultado. Tenemos:

Teorema 49 *En un espacio topológico compacto toda sucesión admite valores de adherencia. Si admite solo un valor de adherencia este es el límite de la sucesión.*

Demostración. La primera afirmación se deduce de la Proposición 40 (iii) puesto que los cerrados $\overline{S_n}$ son no vacíos y encajonados.

En cuanto a la segunda afirmación, si x es el único valor de adherencia de la sucesión, entonces $\{x\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{S_n}$. Luego, para todo abierto O que contenga a x se tiene $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (\overline{S_n} \cap \mathbb{C}O) = \emptyset$, lo que es una intersección de cerrados. Puesto que el espacio es compacto, existe una subfamilia finita de tales cerrados, $\overline{S_{m_1}} \cap \mathbb{C}O, \dots, \overline{S_{m_r}} \cap \mathbb{C}O$, con intersección vacía; como se trata de cerrados encajonados de manera decreciente, si $m = \min(m_1, \dots, m_r)$ se tiene que $\overline{S_m} \cap \mathbb{C}O = \emptyset$, lo que conlleva a que $\overline{S_m} \subset O$ y en particular $\{x_k; k \geq m\} \subset O$ lo que muestra que x es el límite de la sucesión. ■

Ejercicios

1. ¿Cuales son los subconjuntos que verifican la propiedad PRF en un espacio topológico grosero?. ¿En uno discreto?.
2. Demuestre que en un espacio separado la unión finita de compactos y la intersección arbitraria de compactos es un conjunto compacto. ¿Son válidas estas propiedades en un espacio cualquiera si cambiamos en el enunciado la palabra “compacto” por “espacio que verifica la propiedad PRF”?.
3. Sea E un conjunto infinito provisto de la topología cofinita. Estudie si E verifica la propiedad PRF; caracterice sus subconjuntos que que verifican la propiedad PRF.
4. Sea E un espacio topológico separado. Si A y B son dos subconjuntos compactos de E , demuestre que tienen vecindades disjuntas (basta mostrar que existen abiertos $O_A, O_B \subset E$ disjuntos tales que $A \subset O_A$ y $B \subset O_B$) ¿Es válida esta propiedad en un espacio cualquiera si cambiamos “compacto” por “que verifica la propiedad PRF”?.

5. Sea E un espacio topológico separado y $A \subset E$, compacto. Estudie si los conjuntos $\overline{\underset{o}{A}}$ y $\underset{o}{\overline{A}}$ son compactos..
6. Sean E un espacio separado y $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión que converge a x . Demuestre que el conjunto $\{x, x_1, x_2, \dots\}$ es compacto.
Estudie esta situación si el espacio no es separado, testeando solamente la validación de la propiedad del recubrimiento finito (PRF).
7. Sean E, F espacios topológicos.
Demuestre que si $A \subset E \times F$ es un abierto, $\pi_E(A)$ y $\pi_F(A)$ son abiertos.
Demuestre que si E compacto y $C \subset E \times F$ es cerrado, entonces la proyección de C en F es un conjunto cerrado.
8. Sean E compacto, F separado y $f : E \rightarrow F$ una función.
Demuestre que f es continua si y solamente si Γ_f (el grafo de f) es un cerrado de $E \times F$.
9. Construya una sucesión en un espacio separado que tenga una infinidad de valores de adherencia.
10. Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de $\mathbb{R}$. Demuestre que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tiene valores de adherencia si y sólo si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admite una subsucesión que converge.

7. Espacios Métricos

En este último capítulo iniciamos el estudio de estructuras que constituyen una de las clases más importante de espacios topológicos: los espacios métricos.

Con ellos se generaliza la noción de distancia entre elementos, basada en las propiedades de aquella utilizada naturalmente en la recta real: $|x - y|$.

Definición 50 Se llama **métrica** o **distancia** sobre un conjunto no vacío E toda función $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ que verifica:

- La **definición positiva**:
$$\begin{cases} d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in E \\ d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \end{cases}$$
- La **simetría**: $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in E$
- La **desigualdad triángular**: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \forall x, y, z \in E$.

El número real $d(x, y)$ expresa la distancia entre los elementos x e y (medida con esa métrica); dados $A, B \subset E$ se define la distancia entre tales conjuntos como: $d(A, B) = \inf \{d(a, b); a \in A, b \in B\}$; la distancia entre un elemento $x \in E$ y $A \subset E$ está dada por $d(x, A) = d(\{x\}, A)$; por último, el diámetro de un conjunto se define como $\text{diam}(A) = \sup \{d(x, y); x, y \in A\}$.

Definición 51 Un **espacio métrico** es un conjunto no vacío E provisto de una distancia d ; lo designaremos por (E, d) . La noción de subespacio es inmediata pues si $A \subset E$ basta tomar la restricción de la métrica sobre $A \times A$.

Entre los ejemplos de espacios métricos están $\mathbb{R}$ con la distancia $|x - y|$ y más generalmente, todo espacio vectorial normado con $d(u, v) = \|u - v\|$. Un conjunto E puede ser provisto de muchas métricas; por lo demás, para todo $\lambda > 0$, $d_\lambda(a, b) = \lambda$ si $a \neq b$ y $d_\lambda(a, b) = 0$ en caso contrario, es una distancia para E (conocida como distancia discreta; generalmente se toma $\lambda = 1$ y en ese caso la distancia entre a y b es $\delta(a, b)$, el delta de Kronecker). Más aún, si α_1, α_2 son reales no negativos y no ambos nulos y d_1, d_2 son distancias sobre E entonces $\alpha_1 d_1 + \alpha_2 d_2$ también lo es. Usted puede demostrar todo lo que aquí se ha afirmado.

Otro ejemplo es $\mathbb{R}^2$ con $d_0((x, y), (z, t)) = \text{Max}(|x - z|, |y - t|)$ (la distancia euclidiana) o también con $d_1((x, y), (z, t)) = |x - z| + |y - t|$ o, por último, con la métrica $d_2((x, y), (z, t)) = \sqrt{(x - z)^2 + (y - t)^2}$.

Nota 52 Más generalmente, si (E, d) y (F, δ) son espacios métricos podemos dar una estructura de espacio métrico a $E \times F$ de varias maneras:

- $d_0((x, y), (z, t)) = \text{Max}(d(x, z), \delta(y, t))$
- $d_1((x, y), (z, t)) = d(x, z) + \delta(y, t)$
- $d_2((x, y), (z, t)) = \sqrt{d(x, z)^2 + \delta(y, t)^2}$

No es difícil demostrar que tenemos aquí métricas (salvo, quizás, la desigualdad triángular para d_2) y es claro como ellas se generalizan para un producto de n espacios. Estas distancias de $E \times F$ son equivalentes, en el sentido topológico que veremos más adelante.

En lo que sigue introduciremos algunos conceptos, inspirados de los intervalos reales, que nos permitirán construir una topología para E , la topología inducida por su métrica.

Definición 53 Sea (E, d) un espacio métrico, $a \in E$ y $r \in \mathbb{R}^+$. El conjunto: $B(a, r) = \{x \in E; d(a, x) < r\}$ se llama **bola abierta** de radio r y centro a . Así mismo, se denomina **bola cerrada** de radio r y centro a al conjunto $\overline{B}(a, r) = \{x \in E; d(a, x) \leq r\}$; estos nombres se justifican por las propiedades de la topología que luego asociaremos a la distancia d .

Es claro que $B(a, 0) = \emptyset$ y $\overline{B}(a, 0) = \{a\}$. Como además es evidente que si $r > 0$ se tiene que $E = \bigcup_{x \in E} B(x, r)$, el conjunto de todas las bolas abiertas constituye un buen candidato para ser base de una topología. Veamos entonces el comportamiento de estas respecto de las intersecciones. Tenemos:

Proposición 54 Toda intersección finita de bolas abiertas es reunión de bolas abiertas.

Demostración. Veamos primero que si $r > 0$ y $x \in B(a, r)$ existe $s > 0$ tal que $B(x, s) \subset B(a, r)$; para ello basta tomar $s = r - d(a, x)$: en efecto, si $y \in B(x, s)$ por la desigualdad triángular se tiene: $d(a, y) \leq d(a, x) + d(x, y)$; pero como $d(x, y) < s$ se llega a $d(a, y) < d(a, x) + s = r$, es decir $y \in B(a, r)$.

Ahora bien, sean $B(a_1, r_1), \dots, B(a_n, r_n)$ bolas abiertas y $B = \bigcap_i B(a_i, r_i)$. Si $B = \emptyset$ la afirmación se trivializa. En caso contrario, si $x \in B$ sabemos, por la primera parte, que existen reales positivos s_i tales que $B(x, s_i) \subset B(a_i, r_i)$;

tomando $s_x = \min(s_i ; i = 1, \dots, n)$ se tiene que $B(x, s_x) \subset B$. Así las cosas, B es igual a la reunión de todas las bolas abiertas $B(x, s_x)$, con $x \in B$. ■

Recomendamos reflexionar por qué este resultado no es válido para intersecciones arbitrarias de bolas abiertas.

Con todo lo dicho hasta aquí, podemos proveer a un espacio métrico de una topología asociada a su distancia:

Definición 55 Sea (E, d) un espacio métrico. Llamamos **topología asociada a la distancia** y que designamos por $\tau(d)$ aquella engendrada por las bolas abiertas. Diremos que dos métricas son **equivalentes** si generan la misma topología. Por último, un espacio topológico es **metrizable** si su topología proviene de una distancia.

Por definición, para esta topología, toda bola abierta es un conjunto abierto; entre otras propiedades topológicas, tenemos:

Proposición 56 Sea (E, d) un espacio métrico. Entonces toda bola cerrada es un cerrado, el espacio es separado y todo elemento admite una base numerable de vecindades.

Demostración. Probemos que el complemento de una bola cerrada $\overline{B}(a, r)$ es un conjunto abierto: en efecto, si $x \in \mathbb{C}\overline{B}(a, r)$ entonces $d(a, x) > r$ y sea $s = d(a, x) - r$; ahora bien, la bola abierta $B(x, s)$ no corta a $\overline{B}(a, r)$ pues si $y \in B(x, s)$ se tiene $r = d(a, x) - s < d(a, x) - d(y, x) \leq d(a, y)$. Concluimos que $B(x, s) \subset \mathbb{C}\overline{B}(a, r)$, es decir todo punto de $\mathbb{C}\overline{B}(a, r)$ es interior. Con respecto a la separación del espacio, si a y b son dos elementos diferentes de E y $d(a, b) = 2r > 0$, las bolas abiertas $B(a, r)$ y $B(b, r)$ son - por la desigualdad triangular - trivialmente disjuntas. En cuanto a la última afirmación, si $a \in E$ basta considerar las bolas abiertas $B(a, \frac{1}{n})$, $n \geq 1$; es claro que si $V \in \mathcal{v}(a)$ y O es abierto tal que $a \in O \subset V$, existe n tal que $B(a, \frac{1}{n}) \subset O$. ■

Si d y δ son distancias equivalentes sobre E , esto significa en particular que todo abierto de $\tau(d)$ es reunión de abiertos de $\tau(\delta)$ y vice-versa; o sea que para todo $a \in E$ cualquier bola abierta centrada en a construida con una distancia contiene una bola abierta, también centrada en a , construida con la otra distancia.

Al respecto tenemos lo siguiente:

Proposición 57 Sean d y δ dos distancias sobre E ; entonces:

- d y δ son equivalentes si y sólo si $Id : (E, d) \rightarrow (E, \delta)$ es un homeomorfismo.
- Si existen reales positivos p, q tales que: $pd(x, y) \leq \delta(x, y) \leq qd(x, y)$, para todo $x, y \in E$, entonces d y δ son equivalentes

Demostración. La primera afirmación no presenta mayor dificultad. En cuanto a la segunda, tenemos que demostrar que toda bola abierta $B_d(x, r)$ contiene una bola abierta $B_\delta(x, s)$ y recíprocamente. Ahora bien, dada $B_d(x, r)$, para todo $y \in B_d(x, r)$ se tiene $d(x, y) < r$ por lo que $\delta(x, y) < qr$; luego, tomando $s = qr$ se tiene $B_\delta(x, s) \subset B_d(x, r)$. Recíprocamente, dada $B_\delta(x, s)$, se llega a que $B_d(x, r) \subset B_\delta(x, s)$ cuando $r = sp^{-1}$. ■

Las distancias d_0, d_1 y d_2 definidas en la Nota 52 para el espacio métrico producto $E \times F$ son equivalentes: en efecto, es inmediato que se verifica la cadena de desigualdades: $d_0 \leq d_2 \leq d_1 \leq 2d_0 \leq 2d_2$.

Para lo que sigue necesitamos traducir ciertos conceptos topológicos a la escritura ad-hoc de los espacios métricos. Veamos, primero, la noción de límite de una sucesión: si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en el espacio (E, d) , decir que x es el límite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ significa que para toda bola abierta $B(x, \epsilon)$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq m \Rightarrow x_n \in B(x, \epsilon)$, es decir, que dado $\epsilon > 0$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq m \Rightarrow d(x, x_n) < \epsilon$.

Tenemos los resultados siguientes:

Proposición 58 Sea (E, d) un espacio métrico:

- i) Si $A \subset E$ entonces: $x \in \overline{A} \Leftrightarrow$ existe una sucesión de elementos de A que converge a x .
- ii) x es valor de adherencia de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $\Leftrightarrow$ existe una subsucesión de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que converge a x .

Demostración. Dado que $x \in \overline{A}$, para todo entero positivo n podemos escoger un $x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap A$; por construcción la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a x . El recíproco es trivialmente válido en cualquier espacio topológico pues por la definición de límite todo abierto O que contiene a x contiene elementos de la sucesión y por tanto corta a A . La afirmación (ii) se hace de manera análoga y se deja al lector. ■

Proposición 59 Sean E un espacio métrico y X un cerrado de E . Si toda sucesión en X tiene una subsucesión que converge entonces para todo recubrimiento abierto $(O_i)_{i \in I}$ de X existe $r > 0$ tal que para todo $x \in X$, la bola abierta $B(x, r)$ está contenida en algún O_i .

Demostración. En efecto, si tal no fuera el caso, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ existiría $x_n \in X$ tal que para todo $i \in I$ se tenga $B(x_n, \frac{1}{n}) \not\subset O_i$. Sabemos que la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ convergente : sea x su límite; como X es cerrado, $x \in X$. Ahora bien, x pertenece a un abierto O_j y por ende existe $s > 0$ tal que $B(x, s) \subset O_j$; si denotamos $\delta_k = d(x, x_{n_k})$, como $\delta_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$, para m suficientemente grande se tiene $s - \delta_m > 0$ y por tanto $B(x, s - \delta_m) \subset B(x, s)$. Por la desigualdad triángular se deduce que $B(x_{n_m}, \frac{1}{n_m}) \subset O_j$, lo que contradice la hipótesis inicial. ■

Con lo anterior podemos enunciar un importante resultado:

Teorema 60 En un espacio métrico son equivalentes:

- i) Todo subconjunto infinito tiene un punto de acumulación.
- ii) Toda sucesión tiene un valor de adherencia.
- iii) Toda sucesión tiene una subsucesión que converge.
- iv) E es compacto.

Demostración. Que $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$ así como que $(iv) \Rightarrow (i)$ ya ha sido tratado o se infiere de lo hecho anteriormente.

$(iii) \Rightarrow (iv)$: sea $(O_i)_i$ un recubrimiento de E por abiertos. Como E es cerrado, por el ejercicio anterior existe $r > 0$ de manera que para todo $x \in E$ la bola $B(x, r)$ está contenida en algún O_i . Tomemos $y_1 \in E$: si $B(y_1, r)$ no recubre E , escogemos $y_2 \in E$ tal que $d(y_1, y_2) \geq r$. Si aún $B(y_1, r) \cup B(y_2, r)$ no recubre E , sea $y_3 \in E$ tal que $d(y_1, y_3), d(y_2, y_3) \geq r$. Y así sucesivamente, mientras sea necesario, vamos escogiendo puntos $y_1, y_2, y_3, y_4, \dots$ tales que $d(y_i, y_j) \geq r$; sin embargo, este conjunto de puntos no puede ser infinito pues, si tal fuese el caso, la construcción realizada excluiría de plano la posibilidad de que la sucesión $(y_n)_n$ tenga una subsucesión convergente.

Todo esto significa que E será recubierto por un conjunto finito de bolas abiertas $B(y_k, r)$, $1 \leq k \leq m$; como cada una de estas bolas está contenida en algún abierto O_i se infiere la compacidad de E . ■

Definición 61 Sea (E, d) un espacio métrico.

Una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es de **Cauchy** si para todo $\epsilon > 0$ existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $n, m \geq r \Rightarrow d(x_n, x_m) < \epsilon$.

El espacio E se dice **completo** si toda sucesión de Cauchy es convergente.

Toda sucesión convergente es de Cauchy: en efecto, si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión que converge a $x \in E$, entonces para todo $\epsilon > 0$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $d(x, x_n) < \epsilon$ para todo $n \geq m$; por la desigualdad triángular, esto significa que si $p, q \geq m$ entonces $d(x_p, x_q) \leq d(x_p, x) + d(x, x_q) < 2\epsilon$, lo que demuestra que la sucesión es de Cauchy. Además tenemos:

Proposición 62 En un espacio métrico, una sucesión de Cauchy converge si y sólo si admite una subsucesión convergente.

Demostración. Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy y $(x_{n_k})_{n_k \in \mathbb{N}}$ una subsucesión convergente de límite x ; se tiene: $d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x)$ de donde se infiere que $x_n \rightarrow x$. ■

Proposición 63 Sea (E, d) un espacio métrico. Demuestre que:

- Si E es completo, todo subespacio cerrado de E es completo.
- Si $A \subset E$ es un subespacio completo, entonces A es cerrado.

Demostración. Sea C un cerrado de E . Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy de C , también es de Cauchy en E ; como E es completo la sucesión converge a un $x \in E$, pero tratándose de una sucesión de elementos de C , por la Proposición 58 se tiene que $x \in \overline{C} = C$. Luego C es completo.

En cuanto a la segunda afirmación, sea $x \in \overline{A}$; de nuevo por la Proposición 58 existe una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de A que converge a x . Por ser una sucesión convergente es una sucesión de Cauchy de A y como A es completo, esta sucesión converge en A . Luego, por la unicidad del límite en un espacio separado, $x \in A$ y por tanto $A = \overline{A}$. ■

Corolario 64 Todo espacio métrico compacto es completo.

Demostración. Es consecuencia inmediata del Teorema 60 y de la Proposición 62. ■

No todo espacio completo es compacto. Sabemos que $\mathbb{R}$ no es compacto, sin embargo:

Teorema 65 $\mathbb{R}$ es completo.

Demostración. Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy, dado $\epsilon > 0$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para todo $p, q \geq m$, $|x_p - x_q| < \epsilon$. Sean $\sigma = \max(|x_r - x_s|; r, s \leq m)$ y $\rho = \max(\epsilon, \sigma)$: el conjunto $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ está contenido en el intervalo $[a, b]$, donde $a = x_m - \rho$ y $b = x_m + \rho$. Es decir, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión del compacto $[a, b]$ y, por el Teorema 60, tiene una subsucesión que converge; como además $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy, por la Proposición 62 ella converge. ■

Reescribamos, ahora, los conceptos de límite de una función y de continuidad con el lenguaje de los espacios métricos: sean (E, d) y (F, δ) dos espacios y $f : E \rightarrow F$; entonces decir que $b \in F$ es el límite de f en $a \in E$ significa que para toda bola abierta $B(b, \epsilon)$ existe una bola abierta $B(a, \mu)$ tal que $f(B(a, \mu)) \subset B(b, \epsilon)$, es decir, finalmente, dado $\epsilon > 0$ existe $\mu > 0$ tal que $d(a, x) < \mu \Rightarrow \delta(b, f(x)) < \epsilon$. En cuanto al concepto de continuidad en a , análogamente, esta se expresa por: dado $\epsilon > 0$ existe $\mu > 0$ tal que $d(a, x) < \mu \Rightarrow \delta(f(a), f(x)) < \epsilon$. Tenemos:

Proposición 66 Sean (E, d) un espacio métrico, F un espacio topológico y $f : E \rightarrow F$. Entonces:

- i) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow$ para toda sucesión de E tal que $x_n \rightarrow a$ se tiene $f(x_n) \rightarrow b$.
- ii) f es continua $\Leftrightarrow$ para toda sucesión de E tal que $x_n \rightarrow a$ se tiene $f(x_n) \rightarrow f(a)$.

Demostración. Es claro que (ii) es un colorario directo de lo primero. Mostremos (i): sabemos que $(\Rightarrow)$ es verdadero en todo espacio topológico. Respecto de $(\Leftarrow)$, supongamos que se tenga $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq b$: entonces existe un abierto O de b tal que para todo abierto U de a se tiene $f(U) \not\subseteq O$; en particular $f(B(x, \frac{1}{n})) \not\subseteq O$ lo que nos permite escoger $x_n \in B(x, \frac{1}{n})$ tal que $f(x_n) \notin O$. Habremos construido así una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que converge hacia a pero la sucesión imagen no converge a b , contradiciendo la hipótesis. ■

La estructura de espacio métrico nos brinda un concepto más fuerte de continuidad:

Definición 67 Sean (E, d) y (F, δ) dos espacios métricos y $f : E \rightarrow F$.

Decimos que:

- f es **uniformemente continua** si para todo $\epsilon > 0$ existe $\mu > 0$ tal que para todo $a \in E$ se tiene $d(a, x) < \mu \Rightarrow \delta(f(a), f(x)) < \epsilon$.
- f es **lipschitziana de orden** $k \geq 0$ si para todo $x, y \in E$ se tiene: $\delta(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$.

No está demás en hacer notar que la diferencia de la continuidad uniforme con la mera continuidad está en que la existencia del $\mu > 0$ depende solamente del $\epsilon > 0$ escogido y en caso alguno del elemento $a \in E$ sobre el cual se está operando, como si es el caso de la continuidad simple. Es claro que la función identidad y cualquier función contante son uniformemente continuas y, más aun, lipschitzianas. Respecto de estas dos propiedades para una función tenemos:

Proposición 68 Toda función lipschitziana es uniformemente continua.

Demostración. Sea $f : (E, d) \rightarrow (F, \delta)$ lipschitziana de orden k . Si $k = 0$, para todo $x, y \in E$ se tiene $\delta(f(x), f(y)) = 0$, luego f es constante y por tanto uniformemente continua. Si $k > 0$, dado $\epsilon > 0$ basta tomar $\mu = \frac{\epsilon}{k}$ para constatar que la condición de continuidad uniforme se infiere. ■

Terminamos este capítulo con un resultado muy importante:

Teorema 69 Sean (E, d) , (F, δ) espacios métricos y $f : E \rightarrow F$ una función continua. Entonces si E es compacto f es uniformemente continua.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$; en lo que sigue construiremos $\mu > 0$ de manera que para todo $y, z \in E$ si $d(y, z) < \mu$ entonces $\delta(f(y), f(z)) < \epsilon$.

Pongamos $\epsilon = 2\alpha$. Como f es continua, para todo $x \in E$ existe μ_x tal que $d(x, t) < 2\mu_x$ entonces $\delta(f(x), f(t)) < \alpha$.

Es claro que la familia de bolas abiertas $((B(x, \mu_x))_{x \in E}$ es un recubrimiento de E ; como E es compacto existen $x_i \in E$, $1 \leq i \leq n$, tales que las bolas $B(x_i, \mu_{x_i})$ son un subrecubrimiento abierto finito de E . Definamos ahora $\mu = \min(\mu_{x_i}; 1 \leq i \leq n)$: si $y, z \in E$ verifican $d(y, z) < \mu$, como existe i entre 1 y n tal que $y \in B(x_i, \mu_{x_i})$, se tiene $d(x_i, y) < \mu_{x_i}$ (*). Por otro lado, tenemos $d(x_i, z) \leq d(x_i, y) + d(y, z) < \mu_{x_i} + \mu \leq 2\mu_{x_i}$ (**).

Dado que f es continua, las desigualdades $(*)$ y $(**)$ implican que se tiene $\delta(f(x_i), f(y)) < \alpha$ y $\delta(f(x_i), f(z)) < \alpha$; aplicando la desigualdad triángular obtenemos: $\delta(f(y), f(z)) \leq \delta(f(y), f(x_i)) + \delta(f(x_i), f(z)) < 2\alpha = \epsilon$. ■

Ejercicios

1. Sea $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}^+$ definida positiva y simétrica. Demuestre que son equivalentes:

- i) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ para todo $x, y, z \in E$.
- ii) $|d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z)$ para todo $x, y, z \in E$.
- iii) $|d(x, y) - d(t, z)| \leq d(x, t) + d(y, z)$, para todo $x, t, y, z \in E$.

2. Sean E un conjunto y $d : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

- i) $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$;
- ii) $d(x, z) \leq d(y, x) + d(y, z)$.

Demuestre que d es una métrica sobre E .

3. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función estrictamente monótona. Demuestre que $d(x, y) = |f(x) - f(y)|$ es una distancia en $\mathbb{R}$.

4. Sea E un conjunto y $d : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

- i) $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$;
- ii) $d(x, y) = d(y, x)$;
- iii) $d(x, z) = \text{Max}(d(x, y), d(y, z))$

Demuestre que:

- d es una métrica;
- todo triángulo de E es equilátero;
- todo elemento de una bola es centro de la bola;
- toda bola abierta es un conjunto cerrado.

5. Sea (E, d) un espacio métrico, $x \in E$, A y B dos subconjuntos de E . Demuestre que:
 - i) $x \in \overline{A}$ si y sólo si $d(x, A) = 0$
 - ii) Si A y B son cerrados y disjuntos entonces $d(A, B)$ es mayor que cero.
6. Demuestre que un espacio métrico compacto tiene diámetro finito.
7. Sea (E, d) un espacio métrico. Demuestre que $d_1 = \frac{d}{1+d}$ es una distancia en E . Pruebe que las distancias d y d_1 son equivalentes.
8. Sea (E, d) un espacio métrico. Para todo entero n , defina sobre E una distancia d_n (que depende de d y de n) equivalente con d , de manera que $d_n(x, y) \leq \frac{1}{n}$.
9. Sean (E_k, d_k) , $k = 1, 2, \dots, n$, una familia finita de espacios métricos. Demuestre que: $\text{Sup}(d_k)$, $\sum d_k$ y $\sqrt{\sum d_k^2}$ son métricas equivalentes del espacio producto $\prod E_k$.
10. Sean (E, d) y (F, δ) dos espacios métricos. Una función $f : E \rightarrow F$ se llama isométrica si para todo $x, y \in E$ se tiene $d(x, y) = \delta(f(x), f(y))$. Demuestre que f es uniformemente continua e inyectiva (si f es biyectiva, entonces se habla de una isometría).
11. Sea (E, d) un espacio métrico. Demuestre que $(x, y) \rightarrow d(x, y)$ es una función lipschitziana de orden 1.
12. En $\mathbb{R}^n$ (o $\mathbb{C}^n$) si $x = (x_k)_k$ demuestre que las siguientes son normas: $\|x\|_0 = \text{Sup}(|x_k|)$, $\|x\|_1 = \sum |x_k|$ y $\|x\|_2 = \sqrt{\sum |x_k|^2}$
13. Del ejercicio anterior, demuestre que se tiene
 - a) $\|x\|_0 \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_0$.
 - b) $d_i(x, y) = \|x - y\|_i$ (con $i = 0, 1, 2$) son distancias en $\mathbb{R}^n$
 - c) $d_0(x, y) \leq d_2(x, y) \leq d_1(x, y) \leq n d_0(x, y)$.
14. Sea A un subconjunto compacto de un espacio métrico E . Si $B \subset E$ existe $a \in A$ tal que $d(A, B) = d(a, B)$.

15. Sean (E, d) un espacio métrico, $x \in E$, A y B dos subconjuntos de E . Demuestre que:
- i) $x \in \overline{A}$ si y sólo si $d(x, A) = 0$.
 - ii) Sean A y B disjuntos. Si A es cerrado y B es compacto, entonces $d(A, B)$ es mayor que cero.
16. Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Demuestre que $x \rightarrow \|x\|$ es una función lipschitziana de orden 1.
17. Sea (E, d) un espacio métrico. Demuestre que:
18. Sean A un conjunto, $|A| > 1$, $n \in \mathbb{N}^*$ y $d_n : A^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$d_n((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = |\{k; x_k \neq y_k\}|.$$

Demuestre que:

- La función d_n es una distancia.
 - (A^n, d_n) es acotado y no es conexo.
 - El espacio (A^n, d_n) es completo.
19. Sea (E, d) un espacio métrico infinito no numerable. Demuestre que si todo subespacio propio de E es completo entonces E es completo.

8. Ejercicios Resueltos

Capítulo 1: Preambulo Conjuntista

1. Sea U un conjunto y definamos los conjuntos: $\{n \in \mathbb{N} / n^2 < 0\}$; $\{A \subset U / A = \mathbb{C}A\}$; $\{u \in U / u \neq u\}$; $\{x \in \mathbb{R} / x^3 \leq 125\}$. Dé razones y argumentos que prueben que los tres primeros son iguales y que están contenidos estrictamente en el último.

Solución. Los primeros tres conjuntos son conjuntos vacíos; el último no lo es ya que contiene al número 5. Lo que hay que demostrar aquí es que un conjunto vacío está contenido en todo otro conjunto y deducir de ello que existe un único conjunto vacío por lo que podemos denotarlo sin ambigüedad por $\emptyset$. En efecto, si V es un conjunto vacío y A cualquier conjunto, postular que $V \not\subset A$ obliga, por la definición de subconjunto, a suponer que existe $x \in V$ tal que $x \notin A$, lo que contradice la definición de V . Por otro lado si V y V' son vacíos, dado lo que acabamos de ver se tiene $V \subset V'$ y $V' \subset V$, es decir $V = V'$.

2. Sean $A, B \subset U$. Demuestre las leyes de De Morgan:

$$\mathbb{C}(A \cup B) = \mathbb{C}A \cap \mathbb{C}B; \mathbb{C}(A \cap B) = \mathbb{C}A \cup \mathbb{C}B$$

Solución. Se tiene: $x \in \mathbb{C}(A \cup B) \iff x \notin A \cup B \iff x \notin A \text{ y } x \notin B \iff x \in \mathbb{C}A \text{ y } x \in \mathbb{C}B \iff x \in \mathbb{C}A \cap \mathbb{C}B$. La segunda igualdad se deduce aplicando la primera sobre los subconjuntos $\mathbb{C}A$ y $\mathbb{C}B$.

3. Sean $A, B \subset E$ y $f : E \rightarrow F$ una función.

- a) Demuestre que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$;
- b) Pruebe que f es inyectiva si y sólo si $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ para todo $A, B \subset E$.
- c) Además demuestre que:
 - i) f es inyectiva si y sólo si $f(\mathbb{C}A) \subset \mathbb{C}f(A)$ para todo $A \subset E$.
 - ii) f es sobreyectiva si y sólo si $\mathbb{C}f(A) \subset f(\mathbb{C}A)$ para todo $A \subset E$.

Solución. Se tiene:

(a): Como $A \cap B \subset A$ se tiene $f(A \cap B) \subset f(A)$ y, de manera análoga, $f(A \cap B) \subset f(B)$; de todo ello se infiere que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. Lo siguiente nos muestra que la igualdad no se establece siempre: si $A = \{a\}$, $B = \{b\}$, con $a \neq b$ y $f(a) = f(b) = x$, se tiene $f(A \cap B) = \emptyset$ y $f(A) \cap f(B) = \{x\}$.

(b): ($\Rightarrow$) Por (a), basta demostrar que $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$: si $x \in f(A) \cap f(B)$, existen $a \in A$ y $b \in B$ tales que $y = f(a) = f(b)$; como f es inyectiva, $a = b$ y por tanto $x \in f(A \cap B)$.

($\Leftarrow$) Si $a \neq b$, $\emptyset = f(\{a\} \cap \{b\}) = f(\{a\}) \cap f(\{b\}) = \{f(a)\} \cap \{f(b)\}$, es decir $f(a) \neq f(b)$.

(c (i)): ($\Rightarrow$) Como f es inyectiva, aplicando (b) se tiene $f(A) \cap f(\mathbb{C}A) = \emptyset$ y, por ende $f(\mathbb{C}A) \subset \mathbb{C}f(A)$.

($\Leftarrow$) Si $a \neq b$ entonces $b \in \mathbb{C}\{a\}$ donde, por hipótesis:

$$f(b) \in f(\mathbb{C}\{a\}) \subset \mathbb{C}f(\{a\}) = \mathbb{C}\{f(a)\}$$

es decir $f(a) \neq f(b)$, luego f es inyectiva.

(c (ii)): ($\Rightarrow$) Sabemos que siempre se tiene $f(A \cup \mathbb{C}A) = f(A) \cup f(\mathbb{C}A)$; como f es sobreyectiva $f(A) \cup f(\mathbb{C}A) = F$ de donde se infiere que $\mathbb{C}f(A) \subset f(\mathbb{C}A)$.

($\Leftarrow$) Como $f(\emptyset) = \emptyset$, $F = \mathbb{C}f(\emptyset)$; ahora bien, por hipótesis tenemos $\mathbb{C}f(\emptyset) \subset f(\mathbb{C}\emptyset) = f(E)$ por tanto f es sobreyectiva.

4. Sean $f : E \rightarrow F$ y $h : F \rightarrow H$ funciones. Demuestre que se tiene:

a) Si $h \circ f$ es inyectiva entonces f es inyectiva.

b) Si $h \circ f$ es sobreyectiva entonces h es sobreyectiva.

Solución. Si $f(a) = f(b)$ entonces $h(f(a)) = h(f(b))$ y como $h \circ f$ es inyectiva se tiene $a = b$. En cuanto a la segunda afirmación, si $h \circ f$ es sobreyectiva se tiene $h(f(E)) = H$ y como $f(E) \subset F$, a fortiori $h(F) = H$.

5. Sean $f : E \rightarrow F$ y $h, k : F \rightarrow E$ funciones tales que $h \circ f = Id_E$ y $f \circ k = Id_F$. Demuestre que f es biyectiva y $h = k$.

Solución. Como Id_E y Id_F por el ejercicio precedente se infiere que f es inyectiva y sobreyectiva, es decir biyectiva. Se tiene además que:
 $h = h \circ Id_F = h \circ f \circ k = Id_E \circ k = k$.

6. Sea $f : E \rightarrow F$ una función. Demuestre que se tiene:

- a) Si f es inyectiva entonces existe $g : F \rightarrow E$ sobreyectiva tal que $g \circ f = Id_E$.
- b) Si f es sobreyectiva entonces existe $g : F \rightarrow E$ inyectiva tal que $f \circ g = Id_F$.

Solución. Veamos la primera afirmación: como f es inyectiva, todo $a \in A$ se tiene a lo más una pre-imagen; fijemos $b \in E$ y definamos $g : F \rightarrow E$ de la manera siguiente:

$$g(x) = \begin{cases} a & \text{si } \exists a \in E, f(a) = x \\ b & \text{en caso contrario} \end{cases}.$$

La función g es sobreyectiva por construcción.

En cuanto a la segunda, como para todo $y \in F$, $f^{-1}(\{x\}) \neq \emptyset$, escogemos $a_x \in f^{-1}(\{x\})$ y definimos $g : F \rightarrow E$ de la manera siguiente: $g(x) = a_x$. Esta función es inyectiva por construcción ya que si $x \neq y$ se tiene $f^{-1}(\{x\}) \neq f^{-1}(\{y\})$.

7. Sean F un conjunto finito totalmente ordenado y $f : F \rightarrow F$ una función. Demuestre que:

- a) Si f es creciente, entonces existe $a \in F$, tal que $f(a) = a$ (es decir, f tiene un punto fijo).
- b) Si f es decreciente, entonces tiene un punto fijo o existen $a, b \in F$, tales que $f(a) = b$ y $f(b) = a$ (es decir, un ciclo de orden 2).

Solución. Sin pérdida de generalidad, podemos considerar que F es el conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$. Como $1 \leq f(1)$ y f es una función creciente se tiene $1 \leq f(1) \leq f^2(1) \leq \dots \leq f^n(1)$; esta cadena no puede estar constituida sólo por desigualdades estrictas (pues hay $n + 1$ elementos)

por tanto para algún k , $0 \leq k \leq n-1$, se tiene $f^{k+1}(1) = f^k(1)$, es decir $f^k(1)$ es un punto fijo.

Para la segunda afirmación utilizamos la primera: en efecto, si f es decreciente entonces f^2 es creciente y por tanto tiene un punto fijo k ; esto significa que f tiene al menos un ciclo de largo 2:

$$k \rightarrow f(k) \rightarrow f^2(k) = k$$

8. Demuestre que no existe una función sobreyectiva de E en $\wp(E)$.

Solución. Supongamos lo contrario y sea $\varphi : E \rightarrow \wp(E)$ sobreyectiva.

En tal caso existen $a, b \in E$ tales que $\varphi(a) = \emptyset$ y $\varphi(b) = E$.

Esto quiere decir que podemos particionar E con los conjuntos:

$$S = \{x \in E / x \in \varphi(x)\} \text{ y } N = \{x \in E / x \notin \varphi(x)\}$$

Por hipótesis existe $c \in E$ tal que $\varphi(c) = N$; ahora bien las dos alternativas posibles llevan a contradicción:

$$c \in N \implies c \notin N \text{ y } c \notin N \implies c \in N$$

Luego no podemos suponer una sobreyección de E en $\wp(E)$.

9. Sea F un conjunto finito. Si $|F| = n$ demuestre que $|\wp(F)| = 2^n$.

Solución. Si $A_k = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ es inmediato que:

$$\wp(A_{n+1}) = \wp(A_n) \cup \{S \cup \{a_{n+1}\} / S \in \wp(A_n)\}$$

De esto se infiere que $|\wp(A_{n+1})|$ es el doble de $|\wp(A_n)|$; como $|\wp(\emptyset)| = 1$ se deduce que $|\wp(A_n)| = 2^n$.

10. Sean E un conjunto y $\varphi : \wp(E) \rightarrow \wp(E)$ creciente (según el orden dado por la inclusión). Demuestre que φ admite un punto fijo.

Solución. Obviamente se tiene $\emptyset \subset \varphi(\emptyset)$, cuestión que cumple cualquier función $\wp(E) \rightarrow \wp(E)$. Esto nos permite asegurar que el conjunto $F = \{M \subset E / M \subset \varphi(M)\}$ no es vacío.

Sea $A = \bigcup_{M \in F} M$; es claro que para todo $M \in F$ se tiene $M \subset A$. Como φ es creciente para el orden de la inclusión, $\varphi(M) \subset \varphi(A)$; así tenemos:

$$A = \bigcup_{M \in F} M \subset \bigcup_{M \in F} \varphi(M) \subset \varphi(A), \text{ es decir, } A \in F.$$

Pero de $A \subset \varphi(A)$ viene que $\varphi(A) \subset \varphi(\varphi(A))$ o sea $\varphi(A) \in F$ y, en tal caso, $\varphi(A) \subset A$. Se concluye que $\varphi(A) = A$.

11. Demuestre que:

- a) Dados dos conjuntos, existe una función inyectiva o una sobreyectiva de uno en el otro (primera parte del teorema de Cantor-Schröder-Bernstein).
- b) Si dados dos conjuntos existen funciones inyectivas de uno en el otro, entonces existe una biyección entre ellos (segunda parte del teorema de Cantor-Schröder-Bernstein).

Solución.

(a) (Bosquejo de demostración) Sean E y F tales conjuntos y supongamos que no existe sobreyección de E en F ; esto es equivalente a decir que no existe sobreyección de un subconjunto de E en F . Para todo $x \in E$ escogemos $z_x \in F$ de manera que si $x \neq y$ se tenga $z_x \neq z_y$. La posibilidad de esta elección de elementos de F es garantizada por la suposición de que no hay sobreyección de E en F ; en efecto, si A fuera el máximo subconjunto de E que permite escoger para sus elemento $x \in A$ sus respectivos $z_x \in F$ con las condiciones señaladas, la función $x \rightarrow z_x$ sería una inyección de A en F ; obligadamente $A = E$ ya que en caso contrario, si $A \neq E$, esto significaría que para todo $y \in \mathbb{C}A$ no tendríamos la posibilidad de escoger un $z_y \in F$ distinto de los anteriormente escogidos, dicho de otra manera, se tendría entonces que $F = \{z_x / x \in A\}$ por lo que la función $x \rightarrow z_x$ sería una biyección (por tanto una sobreyección) de A en F , lo que contradice la hipótesis.

(b) Sean $f : E \rightarrow F$ y $g : F \rightarrow E$ funciones inyectivas. El problema queda resuelto si encontramos $A \subset E$ que $g(\mathbb{C}f(A)) = \mathbb{C}A$, pues en tal caso definiríamos $h : E \rightarrow F$ biyectiva, de la manera siguiente:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ z & \text{si } x \notin A \text{ y } g(z) = x \end{cases}$$

Ahora bien, tal subconjunto verificaría $A = \mathfrak{C}(g(\mathfrak{C}f(A)))$; como es inmediato establecer que la aplicación:

$$\wp(E) \rightarrow \wp(E), X \rightarrow \mathfrak{C}(g(\mathfrak{C}f(X)))$$

es creciente para el orden de la inclusión y que por tanto admite un punto fijo, la existencia de A está garantizada.

12. Si A es finito o numerable y B es numerable, demuestre que $A \cup B$ es numerable.

Solución. Sin pérdida de generalidad podemos suponer A y B disjuntos, ya que en caso contrario trabajaríamos con A y $B - A$, manteniendo las condiciones de la hipótesis. Sea $B = \{b_0, b_1, b_2, \dots\}$; si A es finito, $A = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$, la función $f : A \cup B \rightarrow \mathbb{N}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} k & \text{si } x = a_k \\ n + k + 1 & \text{si } x = b_k \end{cases} \quad \text{es biyectiva.}$$

Si A es infinito, $A = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ la función $g : A \cup B \rightarrow \mathbb{N}$ definida por:

$$g(x) = \begin{cases} 2k & \text{si } x = a_k \\ 2k + 1 & \text{si } x = b_k \end{cases} \quad \text{es biyectiva.}$$

13. Si $A \subset \mathbb{R}$ y $\text{card}(A) \leq \aleph_0$, demuestre que $\text{card}(\mathbb{R} - A) = \aleph_1$ (esto demuestra en particular que el cardinal conjunto de los irracionales es infinitamente mas "grande" que aquel de los racionales).

Solución. Es claro que $\text{card}(\mathbb{R} - A) \leq \aleph_1$. Si $\text{card}(\mathbb{R} - A) \leq \aleph_0$, como $\text{card}(A) \leq \aleph_0$ se inferiría que $\mathbb{R} = A \cup (\mathbb{R} - A)$ tendría a lo sumo $\aleph_0$ como cardinal, lo que es imposible.

14. Demuestre que $\text{card}(\mathbb{N} \cup \wp(\mathbb{N})) = \aleph_1$.

Solución. Del ejercicio anterior se infiere que si A es finito o numerable, entonces $\text{card}(A \cup \mathbb{R}) = \aleph_1$. En el caso que nos ocupa, esto se aplica de inmediato ya que $\wp(\mathbb{N})$ es equipotente a $\mathbb{R}$.

15. Demuestre que si A es numerable, entonces A^2 es numerable.

Solución. Como A es equipotente a $\mathbb{N}$ basta demostrar que $\mathbb{N}^2$ es numerable.

Ya que la función $n \mapsto (n, 0)$ es inyectiva, es inmediato que se tiene $\text{card}(\mathbb{N}) \leq \text{card}(\mathbb{N}^2)$; basta entonces demostrar que $\text{card}(\mathbb{N}^2) \leq \text{card}(\mathbb{N})$, lo que se establece con la función inyectiva $\mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$, $(n, m) \rightarrow 2^n 3^m$.

16. Demuestre que la reunión de una familia numerable de conjuntos finitos o numerables es numerable.

Solución. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que tenemos una familia disjunta de conjuntos numerables $A_n = \{a_{n0}, a_{n1}, a_{n2}, \dots\}$.

La función $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \rightarrow \mathbb{N}^2$, $a_{nm} \rightarrow (n, m)$, es biyectiva.

17. Dados $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, demuestre que se tiene

$$\text{card}(]a, b[) = \text{card}([a, b[) = \text{card}(]a, b]) = \text{card}([a, b]) = \aleph_1$$

Solución. Pruebe que la función $\mathbb{R} \rightarrow]0, 1[$, $y \mapsto \frac{y}{1 + |y|}$ es biyectiva.

Por otro lado, es claro que la función $f(x) = \frac{x - a}{b - a}$ establece una biyección entre los intervalos $]a, b[$ y $]0, 1[$.

De lo anteriormente expuesto deducimos que todo intervalo abierto tiene cardinalidad $\aleph_1$.

El resultado demandado se establece por la cadena de inclusiones:

$$]a, b[\subset [a, b[,]a, b] \subset [a, b] \subset]a - 1, b + 1[.$$

Capítulo 3: Espacios Topológicos, Primeras Nociones

En lo que sigue, salvo mención contraria, A_x indica un conjunto que contiene a x

1. Si τ' y τ'' son dos topologías sobre E , demuestre que $\tau' \cap \tau''$ es una topología sobre E y que $\tau' \cup \tau''$ no lo es.

Pruebe además que $\tau = \{O' \cap O'' / O' \in \tau', O'' \in \tau''\}$ es una topología sobre E .

Solucion. Veamos la última afirmación: el conjunto $\tau \subset \wp(E)$, es una topología ya que:

- es inmediato que $\emptyset$ y E pertenecen a τ .
- si tenemos una familia $O'_i \cap O''_i, i \in I$, entonces $\bigcup_{i \in I} (O'_i \cap O''_i) \in \tau$ ya que $\bigcup_{i \in I} (O'_i \cap O''_i) = (\bigcup_{i \in I} O'_i) \cap (\bigcup_{i \in I} O''_i)$.
- análogamente, como $\bigcap_{i \in I} (O'_i \cap O''_i) = (\bigcap_{i \in I} O'_i) \cap (\bigcap_{i \in I} O''_i)$, por lo que si I es finito entonces $\bigcap_{i \in I} (O'_i \cap O''_i) \in \tau$.

2. Dé un ejemplo de espacio topológico, ni grosero ni discreto, en donde todos los abiertos sean también cerrados.

Solucion. Varias topologías de un conjunto finito (por ejemplo con tres elementos) cumplen lo demandado.

3. Sean E un conjunto y $\tau_f = \{A / A \subset E, \text{tal que } A = \emptyset \text{ o } \mathfrak{L}A \text{ finito}\}$. Muestre que τ_f define una topología sobre E (la cual se llama topología co-finita).

Solucion. Sean $A_i \in \tau_f, i \in I$, una familia arbitraria de elementos no vacíos y distintos de E y $A = \bigcup_{i \in I} A_i$. Si $A = E$ no hay nada que demostrar; en caso contrario $\mathfrak{L}A$ es finito ya que $\bigcap_{i \in I} \mathfrak{L}A_i$ es una intersección de conjuntos finitos.

Por otro lado, si I es finito y $B = \bigcap_{i \in I} A_i$ entonces $B \in \tau_f$ ya que $\bigcup_{i \in I} \mathfrak{L}A_i$ es una reunión finita de conjuntos finitos.

4. Sea $\mathbb{R}$ provisto de la topología natural. Si $\tau \subset \wp(\mathbb{R})$ está formado por los conjuntos $B = A \setminus F$, donde A es un abierto de $\mathbb{R}$ y F un conjunto finito, demuestre que τ es una topología de $\mathbb{R}$. Compare esta topología a la topología natural.

Solucion. Si a un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ se le saca un conjunto finito de puntos lo que queda es una reunión finita de intervalos abiertos. Concluimos que τ es la topología natural de $\mathbb{R}$.

5. Sea (E, τ) un espacio topológico. Para todo $x \in E$ sea $v(x) \subset \wp(E)$ su sistema de vecindades. Sabemos que se verifica:

- a) Para todo $x \in E$, $v(x) \neq \emptyset$ y para todo $V \in v(x)$, $x \in V$.
- b) Si $V \subset W$ y $V \in v(x)$ entonces $W \in v(x)$.
- c) Si $V, W \in v(x)$ entonces $V \cap W \in v(x)$.
- d) Para todo $V \in v(x)$ existe $W \in v(x)$ tal que $V \in v(W)$.

Demuestre que con (a), (b) y (c) se puede definir una topología τ' . Compare τ' a τ .

¿Que se puede decir si además se agrega la propiedad (d).

Solucion. Es claro que con la axiomática de vecindades, además de darnos $\emptyset$ y E , debemos definir los abiertos como aquellos conjuntos que son vecindad de cada uno de sus puntos: $O' \in \tau'$ si $O' \in v(x)$ para todo $x \in O'$. Así definida, utilizando (a), (b) y (c) se demuestra sin dificultad que τ' cumple con los tres axiomas de abiertos. Si se agrega la propiedad (d) entonces se debe deducir que $\tau' = \tau$.

6. En $\mathbb{R}^2$ demuestre que $\emptyset$, $\mathbb{R}^2$ y $A_k = \{(x, y) / x > y + k\}, k \in \mathbb{R}$, constituyen los abiertos de una topología. Caracterice los conjuntos cerrados de esa topología..

Solucion. El axioma de la intersección finita de abiertos es verificado ya que se tiene $A_m = \bigcap_{i \in F} A_i$ donde $F \subset \mathbb{R}$ es un conjunto finito y $m = \max(F)$: en efecto, es inmediato que para todo $k \in F$ se tiene $x > y + m > y + k$ por lo que $A_m \subset A_k$.

En cuanto al axioma de la reunión arbitraria, sea $J \subset \mathbb{R}$.

Si es J acotado inferiormente, sea $i = \inf(J)$. Se tiene $x > y + i > y + j$, es decir, $A_j \subset A_i$ para todo $j \in J$; concluimos que $A_i = \bigcup_{j \in J} A_j$.

Si es J no es acotado inferiormente, entonces para todo $x, y \in \mathbb{R}$ existe $j \in J$ tal que $j < x - y$; esto quiere decir que $(x, y) \in A_j$. Concluimos que $\bigcup_{j \in J} A_j = \mathbb{R}^2$.

La caracterización de los cerrados no presenta mayor problema.

7. Si (E, τ) es un espacio topológico separado y finito, determine τ .

Solucion. Como E es finito, a fortiori τ también lo es y, por ende, todas las intersecciones de abiertos son conjuntos abiertos.

Sean $x \in E$ y I_x la intersección de todos los abiertos que contienen a x ; como E es separado, obligadamente $I_x = \{x\}$, ya que en caso contrario si $y \in I_x$ existirían abiertos O_x, O_y tales que $O_x \cap O_y = \emptyset$. De esta situación se deduciría que $O_x \cap I_x$ es un abierto (que contiene al elemento x) mas pequeño que I_x , lo que es imposible.

Como $\{x\}$ es un abierto para todo $x \in E$, τ es la topología discreta.

8. Si (E, τ) es un espacio topológico no discreto y separado, demuestre que existe un conjunto abierto que no es cerrado.

Sugerencia. Suponga que todo conjunto abierto es cerrado e inspirese en la solución del ejercicio anterior para llegar a una contradicción.

9. Si (E, τ) es un espacio topológico separado, demuestre que τ contiene a la topología co-finita τ_f .

Solucion. Aquí se trata de demostrar que todo conjunto finito es cerrado y para ello basta demostrar que todo singleton es cerrado (¿por qué?). Sea $x \in E$: como E es separado, para todo $y \neq x$ existe un abierto O_y que no contiene a x , es decir $O_y \subset \complement\{x\}$. De esto se infiere de inmediato que $\complement\{x\} = \bigcup_{y \neq x} O_y$; luego $\complement\{x\}$ es un abierto.

10. Demuestre las inclusiones siguientes y en cada caso dé un ejemplo de inclusión estricta: $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$; $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{A \cup B}$.

Solucion. De $A \cap B \subset A, B$ se deduce inmediatamente la inclusión $\overline{A \cap B} \subset \overline{A}, \overline{B}$ y luego $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$; una inclusión estricta se obtiene en $\mathbb{R}$ con los intervalos $[a, b[$ y $]b, c[$. La segunda parte se hace de forma análoga y una inclusión estricta se obtiene en $\mathbb{R}$ con $\mathbb{I}$ y $\mathbb{Q}$.

11. Si V es una vecindad de x demuestre $\overline{V}$ y $\overset{o}{V}$ también lo son.

Solucion. Lo primero es inmediato ya que $V \subset \overline{V}$. Para la segunda afirmación, por definición de vecindad, si V es una vecindad de x entonces x es interior a V .

12. ¿Puede darse la situación $\overline{\overset{o}{A}} \subset A \subset \overset{o}{\overline{A}}$? Argumente. Dé ejemplos.

Solucion. Se tiene la inclusión estricta $\emptyset = \overline{\overset{o}{\mathbb{Q}}} \subset \mathbb{Q} \subset \overset{o}{\overline{\mathbb{Q}}} = \mathbb{R}$.

13. Demuestre que $Fr(\overset{o}{A}) \subset Fr(A)$ y $Fr(\overline{A}) \subset Fr(A)$. Dé un ejemplo en donde los tres conjuntos sean distintos.

Solucion. Demostremos que $Fr(\overline{A}) \subset Fr(A)$; el resto se deja al lector. Se tiene $Fr(\overline{A}) = \overline{\overline{A}} \cap \overline{\mathbb{C}\overline{A}} = \overline{A} \cap \overline{\mathbb{C}\overline{A}}$ pero como $\mathbb{C}\overline{A} \subset \mathbb{C}A$ obtenemos que $\overline{A} \cap \overline{\mathbb{C}\overline{A}} \subset Fr(A)$.

14. Demuestre que $Fr(Fr(A)) \subset Fr(A)$. Dé un ejemplo donde la inclusión sea estricta.

Solucion. $Fr(Fr(A)) = \overline{Fr(A)} \cap \overline{\mathbb{C}Fr(A)} \subset \overline{Fr(A)} = Fr(A)$ puesto que $Fr(A)$ es un cerrado. El ejemplo se le deja al lector.

15. Sean $A, O \subset E$, O abierto. Demuestre que si $O \cap \overline{A} \neq \emptyset$ entonces $O \cap A \neq \emptyset$.

Solucion. Sea $x \in O \cap \overline{A}$. Esto significa que todo abierto que contiene a x , corta al conjunto A . En particular se llega a que $O \cap A \neq \emptyset$.

16. Demuestre que si $\overset{o}{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$ entonces $A \cap B \neq \emptyset$

Solucion. Inmediato a partir del resultado anterior.

17. Si A es denso y O abierto, demostrar que $O \subset \overline{O \cap A}$.

Solucion. Sea $x \in O$; si $x \notin \overline{O \cap A}$ entonces existe un abierto O_x tal que $\emptyset = O_x \cap (O \cap A) = (O_x \cap O) \cap A$, lo que es imposible puesto que $O_x \cap O$ es un abierto y A es denso.

18. Si A, B son densos y abiertos entonces $A \cap B$ es denso.

Solucion. Por el ejercicio anterior se tiene $A, B \subset \overline{A \cap B}$ y por tanto $E = \overline{A}, \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$.

19. Sea E un espacio topológico. Demuestre que:

- a) $O \subset E$ es abierto si y solamente si $\overline{O \cap \overline{Y}} = \overline{O \cap Y}$ para todo conjunto $Y \subset E$.
- b) $X \subset E$ es denso si y solamente si $\overline{X \cap O} = \overline{O}$ para todo conjunto abierto O .

Solucion. (a): Basta demostrar que $\overline{O \cap \overline{Y}} \subset \overline{O \cap Y}$. Si $x \in \overline{O \cap \overline{Y}}$ para todo abierto O_x se tiene $O_x \cap (O \cap \overline{Y}) = (O_x \cap O) \cap \overline{Y} \neq \emptyset$ luego por el ejercicio 16, $\emptyset \neq (O_x \cap O) \cap Y = O_x \cap (O \cap Y)$ lo que demuestra que $x \in \overline{O \cap Y}$. Recíprocamente, tomando $Y = \mathbb{C}O$ se tiene: $\mathbb{C}(\overline{O \cap \mathbb{C}O}) = \mathbb{C}(\overline{O \cap \mathbb{C}O}) = E$.

Como $\overline{\mathbb{C}O} = \mathbb{C}\overset{\circ}{O}$ se tiene $\overline{O \cap \mathbb{C}\overset{\circ}{O}} = \emptyset$, luego $O \cap \mathbb{C}\overset{\circ}{O} = \emptyset$, es decir $\mathbb{C}\overset{\circ}{O} \subset \mathbb{C}O$, o sea $O \subset \overset{\circ}{O}$ y por tanto O es un abierto.

(b): Como X es denso se tiene $\overline{X \cap \overline{O}} \subset \overline{O \cap X} = \overline{O}$, por lo que falta demostrar que $\overline{O} \subset \overline{X \cap O}$. Si $x \in \overline{O}$ entonces para todo abierto O_x se tiene $O_x \cap O \neq \emptyset$; ahora bien, $O_x \cap O$ es un abierto por lo que $(O_x \cap O) \cap X = O_x \cap (O \cap X) \neq \emptyset$, lo que significa que $x \in \overline{X \cap O}$.

El recíproco es inmediato tomando $O = E$.

20. Sea E un espacio topológico. Demuestre que son equivalentes:

- a) Todo conjunto denso es cerrado.
- b) Existe un único conjunto denso.
- c) La topología es discreta.

Solucion. Si existe un único conjunto denso, este es obligadamente E . Que $(a) \Leftrightarrow (b)$ es inmediato, ya que si todo conjunto denso X es cerrado, a fortiori $X = E$. Por otro lado, si la topología es discreta todo conjunto es abierto y cerrado, por lo que el único conjunto denso es E ; luego $(c) \Rightarrow (b)$. En cuanto a la implicación $(b) \Rightarrow (c)$, para todo $x \in E$, se tiene $\overline{E - \{x\}} \neq E$; luego $\overline{E - \{x\}} = E - \{x\}$, es decir $\{x\}$ es un abierto: se concluye que la topología de E es la discreta.

21. Si E es separado y $A \subset E$. Demuestre que:

- a) Si A es el único conjunto denso distinto de E entonces A es abierto.
- b) Si A es denso de interior vacío entonces E es infinito.

Solución. Como $A \neq E$ existe $x \in E - A$; ahora bien, puesto que $A \subset E - \{x\}$ obligadamente $E - \{x\}$ es denso de donde se concluye que $A = E - \{x\}$. Sea $a \in A$: como E es separado, existen abiertos disjuntos O_x y O_a lo que obligadamente implica que $O_a \subset A$, es decir, que A es abierto.

En cuanto a la segunda pregunta, como A tiene interior vacío, $A \neq E$: luego existe $x \in E - A$. Como A es denso, todo abierto que contiene a x corta el conjunto A ; esto significa que x es un punto de acumulación de A y, por resultado de curso, A es infinito y, a fortiori, también lo es E .

22. Demuestre que si un espacio topológico posee una base numerable de abiertos entonces contiene un subconjunto denso numerable.

Solucion. Sea $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una base numerable de abiertos que podemos suponer disjunta (¿por qué?). Escojamos un elemento por abierto de esta base: $b_n \in B_n$ tal que $b_n \neq b_m$ si $n \neq m$ (reflexione por qué podemos hacer esto). El conjunto $B = \{b_n, n \in \mathbb{N}\}$ es por construcción numerable y como todo abierto O contiene un elemento de la base, $O \cap B \neq \emptyset$, lo que prueba que B es denso.

23. Demuestre que si un espacio topológico contiene un subconjunto denso numerable entonces toda familia de abiertos no vacíos y disjuntos es finita o numerable.

Solucion. Sea X tal conjunto denso y sea $(O_j)_{j \in J}$ una familia de abiertos no vacíos y disjuntos. Como $X \cap O_j \neq \emptyset$ para todo $j \in J$ podemos elegir $x_j \in X \cap O_j$. Como los abiertos son disjuntos, la función $J \rightarrow X, j \rightarrow x_j$, es inyectiva por construcción. Esto significa que $\text{card}(J) \leq \text{card}(X)$, es decir que J es finito o numerable.

Capítulo 4: Continuidad, Construcción de Espacios

1. Sea $f : E \rightarrow F$ una aplicación continua. Estudie las relaciones de inclusión entre los conjuntos:

$$f^{-1}(\overset{\circ}{A}) \text{ y } f^{-1}(\overset{\circ}{\bar{A}}); \overline{f^{-1}(A)} \text{ y } f^{-1}(\bar{A}); Fr(f^{-1}(A)) \text{ y } f^{-1}(Fr(A)).$$

Solución. Como $\overset{\circ}{A}$ es un abierto y f es continua $f^{-1}(\overset{\circ}{A})$ es un abierto contenido en $f^{-1}(A)$, luego $f^{-1}(\overset{\circ}{A}) \subset f^{-1}(A)$. Por dualidad entre abiertos y cerrados, $\overline{f^{-1}(A)} \subset f^{-1}(\bar{A})$ (también puede hacerlo con: $f^{-1}(\bar{A})$ es un cerrado que contiene a $f^{-1}(A)$, ..etc., etc.).

Por último, puesto que la imagen recíproca es compatible con todas las operaciones conjuntistas, se infiere que $Fr(f^{-1}(A)) \subset f^{-1}(Fr(A))$. Para ver que las igualdades no se establecen siempre, basta tomar una función f constante y un conjunto $A \subset F$ de interior vacío.

2. Sea F un espacio topológico y E un subespacio de F . Si $A \subset E$ estudie la relación del interior, la adherencia y la frontera de A respecto del espacio E y del espacio F .

Solución. Llamemos $\overset{\circ}{A}_F$ el interior de A en tanto subconjunto del espacio topológico F . Como $\overset{\circ}{A} \subset A \subset F$, $\overset{\circ}{A}$ es un abierto de F contenido en A , luego $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{A}_F$. Es claro que la inclusión recíproca es válida si F es un abierto de E , ya que, en tal caso, todo abierto de F es un abierto de E .

Por dualidad (hágalo) se demuestra que $\bar{A}_F \subset \bar{A}$, y que $\bar{A}_F = \bar{A}$ si y solamente si F es cerrado.

3. Demuestre que si E es separado entonces todo subespacio propio A es separado. Estudie el recíproco.

Solución. Sean $A \subset E$, $x, y \in A$; como E es separado y existen O_x, O_y abiertos de E tales que $O_x \cap O_y = \emptyset$; luego, $(A \cap O_x) \cap (A \cap O_y) = \emptyset$, lo que muestra que el subespacio A es separado.

Supongamos ahora que todo subespacio propio A es separado. Observe-mos primero que si todo singleton es un conjunto cerrado entonces el recíproco es válido: en efecto, si E es finito, tendríamos la topología discreta; en caso contrario para todo x, y, z distintos dos a dos, x e y son separables en $E \setminus \{z\}$ por abiertos O_x y O_y de $E \setminus \{z\}$; como $\{z\}$ es cerrado, $E \setminus \{z\}$ es un abierto de E y por tanto los conjuntos O_x y O_y también lo son.

Queda entonces por estudiar cuando todo singleton de E es un cerrado.

Ahora bien, es inmediato que el recíproco no es válido para un espacio de dos elementos con topología grosera; impongamos entonces que E tenga al menos tres elementos y sean $x, x_1, x_2 \in E$, distintos.

Dada la hipótesis, $\{x\}$ es un cerrado en los subespacios $E_i = E \setminus \{x_i\}$; luego existen C_1 y C_2 cerrados de E tales que $E_1 \cap C_1 = E_2 \cap C_2 = \{x\}$. Todo esto nos lleva a que $C_1 = \{x\}$ o $\{x, x_1\}$ y $C_2 = \{x\}$ o $\{x, x_2\}$, de donde, sea cual sea la situación, se infiere que $\{x\}$ es un cerrado de E .

4. Si A y B son subconjuntos de un espacio topológico E , demuestre que:
 $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$, $A \overset{\circ}{\times} B = \overset{\circ}{A} \times \overset{\circ}{B}$.

Solución. Como $A \times B \subset \overline{A} \times \overline{B}$ y este último es un cerrado de E^2 se infiere que $\overline{A \times B} \subset \overline{A} \times \overline{B}$.

Recíprocamente, sea $(a, b) \in \overline{A} \times \overline{B}$ y $O_{(a,b)}$ un abierto arbitrario de E^2 que contiene (a, b) ; sabemos que $O_{(a,b)}$ es reunión de abiertos elementales de tipo $O_a \times O_b$ y como $a \in \overline{A}$ y $b \in \overline{B}$, se tiene $O_a \cap A \neq \emptyset$ y $O_b \cap B \neq \emptyset$, es decir $O_{(a,b)} \cap (A \times B) \neq \emptyset$: luego $(a, b) \in \overline{A \times B}$.

Análogamente, se establece que $A \overset{\circ}{\times} B = \overset{\circ}{A} \times \overset{\circ}{B}$.

5. Sean E y F dos espacios topológicos, $A \subset E$ y $B \subset F$. Compare las topologías que se obtienen sobre $A \times B$ ya sea como producto de los subespacios A y B , ya sea como subespacio de $E \times F$.

Solución. Si tomamos $A \times B$ como producto de espacios, sus abiertos son reuniones de abiertos elementales de la forma $O_A \times O'_B$ donde $O_A =$

$O \cap A$ con $O \in \tau_E$ y $O'_B = O' \cap B$ con $O' \in \tau_F$. Ahora bien, como $O_A \times O'_B = (O \times O') \cap (A \times B)$ se deduce que las dos topologías coinciden.

6. Sea E un espacio topológico que tiene una base de abiertos numerable y sea $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Si $M = \{a \in E \mid f(a) \text{ es un máximo local } (*)\}$ demuestre que $f(M)$ es finito o numerable.

(*) Significa que existe V , vecindad de a , tal que $f(x) \leq f(a)$ para todo $x \in V$.

Solución. Sea $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una base de abiertos numerable de E ; es claro, por definición de base de abiertos, que para todo $x \in E$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B_k$.

Ahora bien, si a, b son dos elementos distintos de M , existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $a \in B_j$ y $b \notin B_j$, ya que en caso contrario la condición de máximo local nos llevaría a que $a = b$.

Esto hace de M un conjunto numerable y por tanto $f(M)$ es finito o numerable.

7. Sean (E, τ) un espacio topológico, R una relación de equivalencia sobre E , $\bar{E} = E/R$ el conjunto cociente y $\pi : E \rightarrow \bar{E}$, $x \rightarrow \bar{x}$, la proyección canónica.

Se define $\bar{\tau} = \{A \subset \bar{E} \mid \pi^{-1}(A) \in \tau\}$. Demuestre que:

- a) $(\bar{E}, \bar{\tau})$ es un espacio topológico.
- b) $\bar{\tau}$ es la topología mas fina tal que π es una función continua.

Solución. (a) es inmediato, pues la imagen recíproca es compatible con todas las operaciones conjuntistas. En cuanto a (b), basta remitirse al ejercicio 45.

8. Con la notación del ejercicio anterior: sean F un espacio topológico y $f : \bar{E} \rightarrow F$. Demuestre que f es continua si y solamente si $f \circ \pi$ también lo es.

Solución. La demostración directa es inmediata, pues la composición de funciones continuas es continua.

Recíprocamente, sea O un abierto de F ; por tanto $(f \circ \pi)^{-1}(O)$ es un abierto de E ; pero $(f \circ \pi)^{-1}(O) = \pi^{-1}(f^{-1}(O))$ lo que significa,

por definición de $\bar{\tau}$, que $f^{-1}(O)$ es un abierto de $\bar{E}$, es decir que f es continua.

9. Si $A \subset E$, la función característica de A se define de la siguiente manera:

$$C_A : E \rightarrow \{0, 1\}, C_A(x) = 1 \text{ si } x \in A \text{ y } C_A(x) = 0 \text{ si } x \notin A.$$

Estudie la continuidad de C_A .

Solución. Es claro que la topología de $\{0, 1\}$ es la discreta.

Como $C_A^{-1}(\{0\}) = \mathbb{C}A$ y $C_A^{-1}(\{1\}) = A$, la aplicación C_A es continua si y sólo si A es un conjunto abierto y cerrado a la vez..

10. Sean E y F dos espacios topológicos, $E \times F$ el espacio producto y $b \in F$. Demuestre que E es homeomorfo a $E \times \{b\} \subset E \times F$.

Solución. La aplicación $f : E \rightarrow E \times F$, $f(x) = (x, b)$ es trivialmente inyectiva y continua ya que las funciones coordenadas son definidas por: $f_E(x) = x$ y $f_F(x) = b$, para todo $x \in E$.

11. Sea E un espacio topológico. La diagonal Δ_E de $E \times E$ se define por $\Delta_E = \{(x, x) / x \in E\}$. Demuestre que:

a) E es homeomorfo a Δ_E

b) E es separado si y sólo si Δ_E es cerrado.

Solución. La función $f : E \rightarrow \Delta_E$, $x \rightarrow (x, x)$, es trivialmente un homeomorfismo.

En cuanto a la segunda parte, E es separado $\Leftrightarrow$ para todo $x, y \in E$ distintos, existen abiertos O_x, O_y tales que $O_x \cap O_y = \emptyset \Leftrightarrow$ para todo $(x, y) \in \mathbb{C}\Delta_E$ existe abierto elemental $O_x \times O_y$ contenido en $\mathbb{C}\Delta_E \Leftrightarrow \Delta_E$ es cerrado.

12. ¿ Si $f : (E, \tau_1) \rightarrow (E, \tau_2)$, $f(x) = x$, es una aplicación continua, que puede decir de las topologías τ_1 y τ_2 ?

Solución. La topología τ_1 es más fina que τ_2 ; es decir, $\tau_2 \subset \tau_1$

13. Sea X el conjunto de los números reales provisto de la topología cofinita. Demuestre que la función $f : \mathbb{R} \rightarrow X$, $f(x) = x$, es continua pero no es un homeomorfismo.

Solución. Esto se deduce del hecho que $\tau_f \subsetneq \tau_{\mathbb{R}}$

14. Determine la topología de un espacio topológico E sabiendo que toda función con valores reales definida en E es continua.

Solución. Para que toda función definida en el espacio E con valores en $\mathbb{R}$ sea continua, es necesario que su topología sea la más vasta posible, por tanto es la discreta (dado $a \in E$, defina una función $E \rightarrow \mathbb{R}$ de manera de obtener que $\{a\}$ sea un conjunto abierto).

15. Sean E y F espacios topológicos, F separado, y $f, g : E \rightarrow F$ dos aplicaciones continuas. Demuestre que:

- a) $\{x \in E \mid f(x) \neq g(x)\}$ es abierto
- b) $\{x \in E \mid f(x) = g(x)\}$ es cerrado.

Solución Puesto que f y g son continuas, la función definida por $h : E \rightarrow F \times F$, $h(x) = (f(x), g(x))$ es continua; como Δ_F es cerrado (ya que F es separado) $h^{-1}(\Delta_F)$ es un cerrado de E . Ahora bien, es claro que $h^{-1}(\Delta_F) = \{x \in E \mid f(x) = g(x)\}$.

16. Sean E y F dos espacios topológicos, $f : E \rightarrow F$ continua. Se define $\Gamma_f \subset E \times F$, $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in E\}$ el grafo de la función f . Demuestre que:

- a) E es homeomorfo a Γ_f
- b) Si F es separado entonces Γ_f es cerrado.

Solución Al igual que el ejercicio anterior, es inmediato que la función $g : E \rightarrow \Gamma_f$, $x \rightarrow (x, f(x))$ es un homeomorfismo. Por otro lado, las funciones $h, l : E \times F \rightarrow F$ definidas por $h((x, y)) = f(x)$, $l((x, y)) = y$ son continuas (¿por qué?).

Como $\Gamma_f = \{(x, y) \in E \times F \mid h((x, y)) = l((x, y))\}$, por el ejercicio anterior concluimos que Γ_f es cerrado

17. Sean E y F espacios topológicos, F separado, y $f, g : E \rightarrow F$ dos aplicaciones continuas. Demuestre que si f y g coinciden en un subconjunto denso $D \subset E$ (i.e. $f(x) = g(x)$ para todo $x \in D$) entonces $f = g$.

Solución Por el ejercicio 43(b), $\{x \in E / f(x) = g(x)\}$ es cerrado. Como por hipótesis $D \subset \{x \in E / f(x) = g(x)\}$ lo requerido se infiere sin dificultad.

18. Sean E un espacio separado y $f : E \rightarrow E$ una aplicación continua. Demuestre que el conjunto de los puntos fijos de f es cerrado.

Solución Simple aplicación del ejercicio anterior tomando $f = Id_E$.

19. Sean E un espacio topológico y $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ dos aplicaciones continuas. Demuestre que:

- a) Si $\{x \in E / f(x) < g(x)\}$ es abierto
b) $\{x \in E / f(x) \leq g(x)\}$ es cerrado.

Solución Basta demostrar que $\{x \in E / f(x) < g(x)\}$ es un abierto, ya que por analogía $\{x \in E / f(x) > g(x)\}$ también lo sería y por tanto su complemento $\{x \in E / f(x) \leq g(x)\}$ es un cerrado.

Si $y \in \{x \in E / f(x) < g(x)\}$; como $\mathbb{R}$ es separado existen intervalos abiertos disjuntos $I_{f(y)}$ y $I_{g(y)}$.

Dado que f y g son continuas, $f^{-1}(I_{f(y)}) \cap g^{-1}(I_{g(y)})$ es un abierto no vacío de E .

Ahora bien, si $z \in f^{-1}(I_{f(y)}) \cap g^{-1}(I_{g(y)})$, entonces se tiene $f(z) \in I_{f(y)}$ y $g(z) \in I_{g(y)}$ por lo que $f(z) < g(z)$, es decir:

$$f^{-1}(I_{f(y)}) \cap g^{-1}(I_{g(y)}) \subset \{x \in E / f(x) < g(x)\}.$$

20. Sean E un espacio topológico, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación continua y $\lambda \in \mathbb{R}$. Demuestre que :

- a) $\{x \in E / f(x) < \lambda\}$ es abierto
b) $\{x \in E / f(x) \leq \lambda\}$ y $\{x \in E / f(x) = \lambda\}$ son cerrados.

Solución Se infiere de lo anterior tomando $g(x) = \lambda$ para todo $x \in E$.

21. Sean E un espacio topológico y $f : E \rightarrow \mathbb{R}$. Muestre que si para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $\{x \in E / f(x) < \lambda\}$ y $\{x \in E / f(x) > \lambda\}$ son abiertos, entonces f es continua.

Solución Se tiene que $f^{-1}(]a, b]) = f^{-1}(]-\infty, b]) \cap f^{-1}(]a, +\infty[)$ lo que, por hipótesis, es una intersección de abiertos. Por tanto la función f es continua.

22. Sean $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación continua, $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo.

Demuestre que:

- a) $f(I)$ es un intervalo.
- b) Si $f(I)$ tiene elementos positivos y negativos entonces existe $x \in I$ tal que $f(x) = 0$.
- c) Si $f(J) \subset J$ y J es un intervalo cerrado, entonces existe $x \in J$ tal que $f(x) = x$.

Solución Sean $a, b \in I$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que $f(a) < \lambda < f(b)$.

Si se tuviera $\lambda \notin f(I)$ entonces I sería la unión disjunta de los abiertos $\{x \in I / f(x) < \lambda\}$ y $\{x \in I / f(x) > \lambda\}$ lo que es imposible (intuitivamente, esto es totalmente admisible; en el próximo capítulo lo formalizaremos); por tanto $\lambda \in f(I)$, es decir $f(I)$ es un intervalo. La segunda afirmación es inmediata utilizando la primera. En cuanto a la última, basta aplicar la segunda afirmación en la función continua definida por $g(x) = f(x) - x$: en efecto, si $J = [a, b]$ entonces $g(a) \geq 0$ y $g(b) \leq 0$.

23. ¿ Puede existir $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continua de manera que $f(x)$ sea irracional si x es racional y racional si x es irracional ?

Solución Si tal fuera el caso, por 22(c) existiría un punto fijo lo que es imposible.

Capítulo 5: Conexidad

1. Demuestre que: $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ no son conexos.

Solución Es claro que si consideramos $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ provistos de la topología discreta el problema es trivial. Igualmente fácil es la solución si consideramos a tales conjuntos provistos con la topología inducida por la

de $\mathbb{R}$: en efecto, en tal caso $\mathbb{Z} = (\mathbb{Z} \cap]-\infty, \frac{1}{2}[) \cup (\mathbb{Z} \cap]\frac{1}{2}, +\infty[)$ y $\mathbb{Q} = (\mathbb{Q} \cap]-\infty, \sqrt{2}[) \cup (\mathbb{Q} \cap]\sqrt{2}, +\infty[)$

2. Sea E un espacio topológico y sea D cualquier espacio topológico discreto con más de un elemento. Demuestre que E es conexo si y solamente si las únicas funciones continuas de E en D son las funciones constantes.

Solución Si E es conexo y $f : E \rightarrow D$ es continua, como D tiene la topología discreta $E = f^{-1}(D)$ sería reunión de abiertos disjuntos; la única posibilidad no contradictoria con la conexidad de E es que f sea constante. Recíprocamente, recordemos que para todo $A \subset E$ la función característica asociada a A está definida por $C_A : E \rightarrow \{0, 1\}$, $C_A(x) = 1$ si $x \in A$ y $C_A(x) = 0$ si $x \notin A$. Luego, si suponemos E no conexo, entonces $E = V \cup W$ reunión disjunta de abiertos no vacíos y en tal caso la función $C_V : E \rightarrow \{0, 1\}$ sería continua y no constante, lo que contradice la hipótesis.

3. Sea E un espacio topológico conexo y $F \subset E$. Entonces el conjunto $A = (E \times F) \cup (F \times E)$ es conexo.

Solución Sean $I = F^2$ y $A_i = (\{a\} \times E) \cup (E \times \{b\})$ donde $i = (a, b)$. Es claro que A es la reunión de todos los conjuntos A_i .

Ahora bien, como $\{a\} \times E$ y $E \times \{b\}$ son homeomorfos a E , luego conexos, y además $(a, b) \in (\{a\} \times E) \cap (E \times \{b\})$, concluimos que cada conjunto A_i es conexo.

Por último, ya que para todo A_j y A_k se tiene $A_j \cap A_k \neq \emptyset$ (verifíquelo), por la Proposición 31 se infiere que A es conexo.

4. Sea $A \subset \mathbb{R}^2$, $A = \{(x, y) / x \text{ o } y \text{ es irracional}\}$. Demuestre que A es conexo.

Solución Se deduce del ejercicio precedente.

5. Sea E un conjunto infinito provisto de la topología cofinita. Estudie si E es conexo; estudie las componentes conexas de ese espacio.

Solución En tal topología, dos abiertos no vacíos son jamás disjuntos; luego E es conexo y por tanto no tiene sentido de hablar de componentes conexas.

6. Sea E un espacio topológico con al menos tres elementos. Demuestre que si todo subespacio propio de E es conexo entonces el espacio E también lo es.

Solución Si $a, b, c \in E$ se tiene $c \in (E - \{a\}) \cap (E - \{b\})$ y obviamente $E = (E - \{a\}) \cup (E - \{b\})$, lo que prueba que E es conexo.

7. Sea E un espacio topológico y $A \subset E$. Demuestre que si B es conexo tal que $B \cap \overset{\circ}{A}$ y $B \cap \overset{\circ}{\complement}A$ son no vacíos, entonces $B \cap Fr(A) \neq \emptyset$.

Solución Si se tuviera $B \cap Fr(A) = \emptyset$ entonces $B \subset \overset{\circ}{\complement}Fr(A)$. Pero $\overset{\circ}{\complement}Fr(A) = \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{\complement}A$ y como por hipótesis $B \cap \overset{\circ}{A}$ y $B \cap \overset{\circ}{\complement}A$ son abiertos no vacíos de B , estaríamos contradiciendo la conexidad de B .

8. Sean E conexo y $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Demuestre que si $a, b \in f(E)$ entonces $[a, b] \subset f(E)$.

Solución Sabemos que $f(E)$ es un conjunto conexo de $\mathbb{R}$, por tanto $f(E)$ es $\mathbb{R}$ o un intervalo, luego si $a, b \in f(E)$ entonces $[a, b] \subset f(E)$.

9. En $\mathbb{R}^2$ encuentre las componentes conexas del conjunto

$$A = \{(x, y) / x^2 y^2 = xy\}.$$

Solución Es claro que $A = \{(x, y), xy = 0 \text{ o } xy = 1\}$. Luego, las componentes conexas son: $\{(x, y), xy = 0\}$, $\{(x, y), xy = 1, x > 0\}$ y $\{(x, y), xy = 1, x < 0\}$.

10. Un espacio E es arco-conexo si para todo par de elementos a, b de E , existe $f_{a,b} : [0, 1] \rightarrow E$, continua, tal que $f(0) = a$ y $f(1) = b$.

Demuestre que:

- (i) Un espacio arco-conexo es conexo. (ii) $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$ son arco-conexos.
(iii) Si $A \subset \mathbb{R}^2$ es finito, $\mathbb{R}^2 - A$ es conexo.

Solución.

Sea $a \in E$; como E es arco-conexo, para todo $b \in E$ existe una aplicación continua $f_{a,b} : [0, 1] \rightarrow E$ tal que $f(0) = a$ y $f(1) = b$. Como $[0, 1]$ es conexo, los conjuntos $A_b = f_{a,b}([0, 1])$ son conexos. Es claro que $a \in \bigcap_{b \in E} A_b$ y que $E = \bigcup_{b \in E} A_b$, de donde se infiere que E es conexo.

En cuanto a (ii), la arco-conexidad de $\mathbb{R}$ se establece al tomar las funciones continuas $f_{a,b}$ de $[0, 1]$ en $\mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, definidas por:

$$f_{a,b}(x) = (b - a)x + a.$$

De la misma manera, si $\alpha = (k, l)$ y $\beta = (p, q)$, obtenemos la arco-conexidad de $\mathbb{R}^2$ por las funciones $g_{\alpha,\beta} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definidas por

$$g_{\alpha,\beta}(x) = ((p - k)x + k, (q - l)x + l);$$

estas funciones son continuas pues las funciones coordenadas lo son.

Por último, para dar una idea respecto de (iii), supongamos que se tiene: $A = \{(0, 0)\}$.

Lo más fácil es demostrar que $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ es arco-conexo, lo que no presenta dificultad.

En efecto, dados $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ tales que la recta que une (a, b) con (c, d) no pasa por $(0, 0)$, sabemos que la función:

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}, \quad f(x) = ((c - a)x + a, (d - b)x + b)$$

es continua y $f(0) = (a, b)$, $f(1) = (c, d)$.

En caso contrario, si $(c, d) = \lambda(a, b)$ con $\lambda < 0$, hacemos un camino de (a, b) hasta $(\lambda a, b)$ y luego de este punto hasta $(\lambda a, \lambda b)$ con la función continua $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, definida por:

$$g(x) = \begin{cases} (2(\lambda - 1)ax + a, b) & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ (\lambda a, 2(\lambda - 1)bx + (2 - \lambda)b) & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Es claro que $g(0) = (a, b)$, $g(\frac{1}{2}) = (\lambda a, b)$ y $g(1) = (\lambda a, \lambda b)$.

Capítulo 6: Compacidad

1. Demuestre que en un espacio separado la unión finita de compactos y la intersección arbitraria de compactos es un conjunto compacto. ¿Son válidas estas propiedades en un espacio cualquiera si cambiamos en el enunciado la palabra “compacto” por “verifica PRF”?

Solución Basta comprobar el primer enunciado para la reunión de dos subconjuntos compactos A y B del espacio E . Si $(O_i)_{i \in I}$ es una familia de abiertos de E que recubre $A \cup B$, obviamente recubre los conjuntos A y B ; como estos son compactos, existen subfamilias $(O_j)_{j \in J}$ y $(O_k)_{k \in K}$ con $J, K \subset I$, finitos, que rescubren respectivamente A y B . Luego, $(O_l)_{l \in L}$ con $L = J \cup K$ es un recubrimiento finito de $A \cup B$.

Respecto de la intersección, si $(A_i)_{i \in I}$ es una familia arbitraria de subconjuntos compactos de un espacio separado E , ellos son cerrados y por tanto $\bigcap_{i \in I} A_i$ también es un cerrado de E (¿por qué?) y, a fortiori, es un cerrado de cualquier espacio A_i ; como este último es compacto, $\bigcap_{i \in I} A_i$ también lo es (¿por qué?).

2. Sea E un espacio topológico separado. Si A y B son dos subconjuntos compactos y disjuntos de E , demuestre que tienen vecindades disjuntas (basta mostrar que existen abiertos $O_A, O_B \subset E$ disjuntos tales que $A \subset O_A$ y $B \subset O_B$) ¿Es válida esta propiedad en un espacio cualquiera si cambiamos “compacto” por “paracompacto”?

Solución Primero vamos a demostrar que dado $x \notin B$ existen abiertos disjuntos $x \in O_x$ y $U_{B,x} \supset B$: en efecto, como E es separado, para todo $b \in B$ existen abiertos disjuntos $O_{x,b}$ y U_b ; como $(U_b)_{b \in B}$ es un recubrimiento abierto de B , y B es compacto, existe un subrecubrimiento $(U_b)_{b \in K}$ con K subconjunto finito de B , es decir que $B \subset U_{B,x} = \bigcup_{b \in K} U_b$.

Se infiere que $O_x = \bigcap_{b \in K} O_{x,b}$ es un abierto (¿por qué?), que contiene a x , disjunto con $U_{B,x}$.

Para resolver el problema propuesto, sabemos por lo anterior que para todo $a \in A$ existen abiertos disjuntos $a \in O_a$ y $U_{B,a} \supset B$. Como A es compacto, existe un subrecubrimiento finito $(O_a)_{a \in L}$ de A ; luego se tiene $A \subset O_A = \bigcup_{a \in L} O_a$ y $B \subset U_B = \bigcap_{a \in L} U_{B,a}$; los abiertos O_A y U_B son disjuntos.

3. Sea E un espacio topológico separado y $A \subset E$, compacto. Estudie si los conjuntos $\overline{\overset{o}{A}}$ y $\overset{o}{\overline{A}}$, son compactos.

Solución $\overline{\overset{o}{A}}$ es un subconjunto cerrado del compacto A , por tanto es

compacto. Por el mismo tipo de argumentos, $\frac{o}{A}$ no lo es.

4. Sea E un conjunto infinito provisto de la topología cofinita. Estudie si E verifica PRF; caracterice los subconjuntos que verifican PRF.

Solución Sea $(O_i)_{i \in I}$ un recubrimiento abierto no trivial de E (es decir, para todo $i \in I$, $O_i \neq E$). Sea $k \in I$: sabemos por definición de topología cofinita que $\mathbb{C}O_k = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Como $(O_i)_{i \in I}$ recubre E existen O_{i_j} , $j = 1, 2, \dots, n$, tales que $x_j \in O_{i_j}$. Es claro que los abiertos $O_k, O_{i_1}, O_{i_2}, \dots, O_{i_n}$ recubren E .

5. Sean E un espacio separado y $(x_n)_n$ una sucesión que converge a x . Demuestre que el conjunto $\{x, x_1, x_2, \dots\}$ es compacto. Estudie esta situación si el espacio no es separado.

Solución Sean $X = \{x, x_1, x_2, \dots\}$ y $(O_i)_{i \in I}$ una familia de abiertos de E que recubre X ; luego existe $j \in I$ tal que $x \in O_j$. Como la sucesión x_n converge a x , existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in X \cap O_j$ para todo $n > m$. Es claro que $X \subset O_j \cup O_{i_1} \cup \dots \cup O_{i_m}$ donde $x_k \in O_{i_k}$.

6. Sean E, F espacios topológicos.

Demuestre que si $A \subset E \times F$ es un abierto, $\pi_E(A)$ y $\pi_F(A)$ son abiertos.

Demuestre que si E compacto y $C \subset E \times F$ es cerrado, entonces la proyección de C en F es un conjunto cerrado.

Solución Si A es un abierto de $E \times F$, entonces $A = \bigcup_j V_j \times W_j$ donde los conjuntos V_j y W_j son abiertos de E y F respectivamente.

Como $p_E(\bigcup_j V_j \times W_j) = \bigcup_j p_E(V_j \times W_j) = \bigcup_j V_j$, $p_E(A)$ es abierto.

Con respecto a la segunda afirmación, demostraremos que $\mathbb{C}p_F(C)$ es un abierto.

Sea $b \in \mathbb{C}p_F(C)$; es claro que $E \times \{b\}$ es un subconjunto del abierto $\mathbb{C}C$.

Para cada $(x, b) \in E \times \{b\}$ existen abiertos elementales $V_x \times W_x$ tales que $(x, b) \in V_x \times W_x \subset \mathbb{C}C$. La familia $(V_x \times W_x)_{x \in E}$ recubre a $E \times \{b\}$, conjunto que es un compacto (¿por qué?). Concluimos que $E \times \{b\}$ se puede recubrir con una subfamilia finita $(V_{x_i} \times W_{x_i})_{i \in I}$.

El conjunto $W_b = \bigcap_{i \in I} W_{x_i}$ es un abierto de F que contiene al elemento b , disjunto con $p_F(C)$.

7. Sean E y F compactos y $f : E \rightarrow F$ una función. Demuestre que f es continua si y solamente si Γ_f (el grafo de f) es un cerrado de $E \times F$.

Solución Si B es un cerrado de F entonces $p_F^{-1}(B) \cap \Gamma_f$ es un cerrado de $E \times F$ y, a fortiori, compacto; luego $p_E(p_F^{-1}(B) \cap \Gamma_f) = f^{-1}(B)$ es un compacto de E , por tanto cerrado. Esto prueba que f es continua.

Capítulo 7: Espacios Métricos

1. Sean E un conjunto y $d : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

a) $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$; b) $d(x, z) \leq d(y, x) + d(y, z)$.

Demuestre que d es una métrica sobre E .

Solución Utilizando (b) y luego (a) se tiene:

$$d(x, y) \leq d(y, x) + d(y, y) = d(y, x)$$

Por simetría, podemos concluir que $d(x, y) = d(y, x)$. Con esto, (b) se reescribe como $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, lo que demuestra que d es una métrica.

2. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función estrictamente monótona. Demuestre que $d(x, y) = |f(x) - f(y)|$ es una distancia en $\mathbb{R}$.

Solución Una función estrictamente monótona es necesariamente inyectiva, por lo que si $0 = d(x, y) = |f(x) - f(y)|$ se concluye que $f(x) - f(y) = 0$ y por tanto que $x = y$. El resto no tiene mayor problema; en efecto, por ejemplo $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ sale de la desigualdad triangular $|a + b| \leq |a| + |b|$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$.

3. Sea E un conjunto y $d : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

a) $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$;

b) $d(x, y) = d(y, x)$;

c) $d(x, z) = \max(d(x, y), d(y, z))$ si x, y, z son distintos dos a dos.

Demuestre que:

- a) d es una métrica.
- b) Todo triángulo de E es equilátero.
- c) Todo elemento de una bola es centro de la bola.
- d) Toda bola abierta es un conjunto cerrado.

Solución Que d es una métrica es inmediato.

Para la segunda afirmación, supongamos que se tiene $d(x, y) \leq d(y, z)$; en tal caso, $d(x, z) = d(y, z)$. Pero como $d(x, y) = \text{Max}(d(x, z), d(z, y))$ se llega a que $d(x, z) = d(y, z) = d(x, y)$.

Lo anterior quiere decir que dado $x \in E$, para todo par de puntos $y, z \neq x$ se tiene $d(x, y) = d(x, z)$. Dicho de otra manera, d es constante sobre $E^2 - \Delta_E$: esto prueba la tercera afirmación y, más aún, que la topología engendrada por la métrica d es la discreta (¿por qué). En tal espacio, todo abierto es cerrado.

4. Demuestre que un espacio métrico compacto tiene diámetro finito.

Solución Sea E tal espacio. La familia de bolas abiertas $(B(x, 1))_{x \in E}$ recubre trivialmente a E ; como este es un compacto, existe una subfamilia finita de n de esas bolas que recubre E . Es claro que para cualquier $x \in E$ se tiene $B(x, 2n) = E$.

5. En $\mathbb{R}^n$ (o $\mathbb{C}^n$) si $x = (x_k)_k$ demuestre que las funciones siguientes son normas

a) $\|x\|_0 = \text{Sup}(|x_k|)$

b) $\|x\|_1 = \sum_k |x_k|$

c) $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_k |x_k|^2}$

Solución Lo haremos en $\mathbb{R}^n$. La principal dificultad la encontramos en la desigualdad triangular de la norma $\|x\|_2$. Esta equivale a demostrar que se tiene:

$$\sqrt{\sum_k (x_k + y_k)^2} \leq \sqrt{\sum_k x_k^2} + \sqrt{\sum_k y_k^2}$$

lo que se conoce como la desigualdad de Minkowski, la que es equivalente a:

$$\left(\sum_k x_k \cdot y_k \right)^2 \leq \left(\sum_k x_k^2 \right) \cdot \left(\sum_k y_k^2 \right)$$

que se llama la desigualdad de Schwartz.

Para demostrar esta desigualdad, tengamos presente que la función real $f(t) = \sum_k (x_k + y_k t)^2$ es mayor o igual a cero.

Esto obliga a que la ecuación de segundo grado $f(t) = 0$ tenga un discriminante $\Delta \leq 0$. Ahora bien, un pequeño cálculo nos muestra que:

$$\Delta = \left(\sum_k x_k \cdot y_k \right)^2 - \left(\sum_k x_k^2 \right) \cdot \left(\sum_k y_k^2 \right)$$

6. Del ejercicio anterior, demuestre que se tiene

- a) $\|x\|_0 \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_0$.
- b) $d_i(x, y) = \|x - y\|_i$ (con $i = 0, 1, 2$) son distancias en $\mathbb{R}^n$
- c) $d_0(x, y) \leq d_2(x, y) \leq d_1(x, y) \leq n d_0(x, y)$.

Solución El punto (a) no presenta mayor dificultad. El punto (b) es una propiedad general de las normas: siempre en un espacio vectorial normado, $d(x, y) = \|x - y\|$ define una métrica. Por último, (c) es una inferencia inmediata de (a).

7. Sea (E, d) un espacio métrico. Demuestre que:

$$d_1 = \frac{d}{1 + d}$$

es una distancia en E . Pruebe que las distancias d y d_1 son equivalentes.

Solución De nuevo aquí la dificultad mayor la encontramos en la desigualdad triangular. Lo conveniente es escoger una notación liviana: sean $x, y, z \in E$ y escribamos $d(x, z) = a$, $d(x, y) = b$ y $d(y, z) = c$; es claro que $a, b, c \geq 0$ y que $a \leq b + c$. Demostrar que d_1 verifica la desigualdad triangular es establecer que

$$\frac{a}{1 + a} \leq \frac{b}{1 + b} + \frac{c}{1 + c}$$

es decir, que: $a(1+b)(1+c) \leq b(1+a)(1+c) + c(1+a)(1+b)$, lo que se reduce a: $a \leq b + c + bc(2+a)$, desigualdad que es inmediata ya que por hipótesis: $a \leq b + c$ y $bc(2+a) \geq 0$.

En cuanto a establecer que las distancias d y d_1 son equivalentes, basta verificar que toda bola abierta $B_d(x, r)$ contiene la bola abierta $B_{d_1}(x, s)$ con $s = \frac{r}{1+r}$ y, reciprocamente, que toda bola abierta $B_{d_1}(x, s)$, $s < 1$, contiene la bola abierta $B_d(x, r)$ donde $r = \frac{s}{1-s}$.

8. Sea (E, d) un espacio métrico. Para todo entero n , defina sobre E una distancia d_n (que depende de d y de n) equivalente con d , de manera que $d_n(x, y) < \frac{1}{n}$.

Solución Basta definir:

$$d_1 = \frac{d}{1+d} \quad \text{y} \quad d_k = \frac{d_{k-1}}{1+d_{k-1}}$$

Es bueno notar que en definitiva se tiene $d_n = \frac{d}{1+nd}$, por lo que es inmediato que para todo $x, y \in E$ se tiene: $d_n(x, y) < \frac{1}{n}$. Estas distancias son equivalentes por los argumentos del ejercicio anterior.

9. Sean (E_k, d_k) , $k = 1, 2, \dots, n$, una familia finita de espacios métricos. Demuestre que:

$$\text{Max}(d_k), \quad \sum_k d_k \quad \text{y} \quad \sqrt{\sum_k d_k^2}$$

son métricas equivalentes del espacio producto $\prod_k E_k$.

Solución Hagámoslo para $n = 2$ con la distancia:

$$\delta((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{d_1(x_1, y_1)^2 + d_2(x_2, y_2)^2}$$

Como siempre, la dificultad es verificar la desigualdad triangular,

$$\delta((x_1, x_2), (z_1, z_2)) \leq \delta((x_1, x_2), (y_1, y_2)) + \delta((y_1, y_2), (z_1, z_2)) \quad (*)$$

Para ello hay que demostrar que $\sqrt{d_1(x_1, z_1)^2 + d_2(x_2, z_2)^2}$ es menor o igual a $\sqrt{d_1(x_1, y_1)^2 + d_2(x_2, y_2)^2} + \sqrt{d_1(y_1, z_1)^2 + d_2(y_2, z_2)^2}$.

Como trabajamos con cantidades no negativas, podemos operar con los respectivos cuadrados. Veamos:

Del primer miembro obtenemos que: $d_1(x_1, z_1)^2 + d_2(x_2, z_2)^2$ lo que es menor o igual a:

$$(d_1(x_1, y_1) + d_1(y_1, z_1))^2 + (d_2(x_2, y_2) + d_2(y_2, z_2))^2$$

Del segundo sale:

$$d_1(x_1, y_1)^2 + d_2(x_2, y_2)^2 + d_1(y_1, z_1)^2 + d_2(y_2, z_2)^2 + \\ 2\sqrt{d_1(x_1, y_1)^2 + d_2(x_2, y_2)^2} \cdot \sqrt{d_1(y_1, z_1)^2 + d_2(y_2, z_2)^2}$$

Esto nos lleva a comparar:

$$d_1(x_1, y_1) \cdot d_1(y_1, z_1) + d_2(x_2, y_2) \cdot d_2(y_2, z_2) \quad (1)$$

con la expresión:

$$\sqrt{d_1(x_1, y_1)^2 + d_2(x_2, y_2)^2} \cdot \sqrt{d_1(y_1, z_1)^2 + d_2(y_2, z_2)^2} \quad (2)$$

Ahora bien, por la desigualdad de Schwartz. se tiene: $(1) \leq (2)$ por lo que la desigualdad $(*)$ es válida.

10. Sean (E, d) y (F, δ) dos espacios métricos. Una función $f : E \rightarrow F$ se llama isométrica si para todo $x, y \in E$ se tiene $d(x, y) = \delta(f(x), f(y))$. Demuestre que f es uniformemente continua e inyectiva (si f es biyectiva, entonces se habla de una isometría).

Solución Una tal función es uniformemente continua puesto que es lipschitziana de orden 1. Es inyectiva puesto que si $x \neq y$ entonces $0 \neq d(x, y) = \delta(f(x), f(y))$ lo que implica que $f(x) \neq f(y)$.

11. Sea $(V, \| \cdot \|)$ un espacio normado. Demuestre que la aplicación $x \rightarrow \|x\|$ es lipschitziana de orden 1.

Solución Como sabemos, de la desigualdad axiomática de una norma, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, válida para todo $x, y \in V$, se infiere la desigualdad $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$, lo que establece lo pedido.

12. En un espacio métrico E , demuestre que:

- a) La aplicación $(x, y) \rightarrow d(x, y)$ es lipschitziana de orden 1.
 b) Si $B \subset E$, la aplicación $x \rightarrow d(x, B)$ es uniformemente continua.

Solución Utilicemos en $E \times E$ la distancia:

$$\delta((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = d(x_1, y_1) + d(x_2, y_2).$$

Como se tiene: $d(x_1, y_1) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, y_2) + d(y_2, y_1)$, deducimos que $d(x_1, y_1) - d(x_2, y_2) \leq d(x_1, x_2) + d(y_2, y_1)$; análogamente, por simetría, se obtiene: $d(x_2, y_2) - d(x_1, y_1) \leq d(x_1, x_2) + d(y_2, y_1)$. Es decir, que se tiene: $|d(x_2, y_2) - d(x_1, y_1)| \leq \delta((x_1, x_2), (y_1, y_2))$, lo que establece la primera afirmación.

En cuanto a la segunda, recordemos que: $d(x, B) = \inf\{d(x, b), b \in B\}$. Sabemos que si $x, y \in E$, $b \in B$ se tiene: $d(x, b) \leq d(x, y) + d(y, b)$. Luego, $d(x, B) \leq \inf\{d(x, y) + d(y, b), b \in B\} = d(x, y) + d(y, B)$; dicho de otra manera: $d(x, B) - d(y, B) \leq d(x, y)$, y, por simetría se logra: $d(y, B) - d(x, B) \leq d(y, x)$. Obtenemos así la desigualdad lipschitziana de orden 1: $|d(x, B) - d(y, B)| \leq d(x, y)$

13. Sea A un subconjunto compacto de un espacio métrico E . Si $B \subset E$ existe $m \in A$ tal que $d(A, B) = d(m, B)$.

Solución Recordemos que $d(A, B) = \inf\{d(a, b), a \in A, b \in B\}$. Por el ejercicio anterior sabemos que la función $f: A \rightarrow \mathbb{R}, a \rightarrow d(a, B)$, es uniformemente continua por lo que $f(A)$ es un compacto de $\mathbb{R}$, luego el ínfimo de $f(A)$, que no es otra cosa que $d(A, B)$, pertenece a $f(A)$. Esto quiere decir que existe $m \in A$ tal que $d(A, B) = d(m, B)$.

14. Sean (E, d) un espacio métrico, $x \in E$, A y B dos subconjuntos de E . Demuestre que:

- a) $x \in \overline{A}$ si y sólo si $d(x, A) = 0$.
 b) Sean A y B disjuntos. Si A es cerrado y B es compacto, entonces $d(A, B)$ es mayor que cero.

Solución Recordemos que $d(x, A) = \inf\{d(x, a), a \in A\}$. Ahora bien, se tiene: $x \in \overline{A} \Leftrightarrow$ toda bola abierta $B(x, \frac{1}{n})$ corta al conjunto $A \Leftrightarrow$ para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $a_n \in A$ tal que $d(x, a_n) < \frac{1}{n} \Leftrightarrow d(x, A) = 0$.

En cuanto a la segunda afirmación, como A es compacto, por el ejercicio anterior existe $m \in A$ tal que $d(m, B) = d(A, B)$. Obligadamente se tiene $d(A, B) > 0$ ya que en caso contrario, si $0 = d(A, B) = d(m, B)$ entonces $m \in \overline{B} = B$ y por tanto $A \cap B \neq \emptyset$, lo que contradice la hipótesis.

15. Sea $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ con la norma euclidiana, $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

Se define $x \bullet y = \frac{1}{2} (\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$. Demuestre que:

- a) El producto $x \bullet y$ es conmutativo y es bilineal.
- b) $x \perp y \Leftrightarrow x \bullet y = 0$.

Solución Sean $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$; un cálculo sin problemas muestra que $x \bullet y = x_1 y_1 + x_2 y_2$ por lo que la primera afirmación se comprueba fácilmente. La segunda es inmediata.

16. Sea $\mathbb{R}^2$ provisto con la norma euclidiana. Sean $x, y \in \mathbb{R}^2$ y consideremos los vectores $z_\alpha = x + \alpha y$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

- a) Determine β de manera que $\|z_\beta\|$ sea el mínimo.
- b) Demuestre que en tal caso $y \perp z_\beta$.

Solución Para que el ejercicio tenga sentido, es menester que $y \neq 0$. Por ser cantidades no negativas, minimizar $\|z_\alpha\|$ equivale a minimizar $\|z_\alpha\|^2$. Por el ejercicio anterior deducimos que para todo $v \in \mathbb{R}^2$ se tiene $\|v\|^2 = v \bullet v$. Utilizando esto, tenemos:

$$\|x + \alpha y\|^2 = (x + \alpha y) \bullet (x + \alpha y) = \|x\|^2 + 2\alpha(x \bullet y) + \alpha^2 \|y\|^2$$

Ahora bien, la función real $f(\alpha) = \|y\|^2 \alpha^2 + 2(x \bullet y)\alpha + \|x\|^2$ tiene como primera y segunda derivada, respectivamente:

$$f'(\alpha) = 2(x \bullet y) + 2\|y\|^2 \alpha \quad \text{y} \quad f''(\alpha) = 2\|y\|^2$$

por lo que el mínimo se obtiene para: $\alpha = \beta = -\frac{x \bullet y}{\|y\|^2}$

En cuanto a la segunda afirmación, basándonos en la parte (b) del ejercicio anterior, basta constatar que $z_\beta \bullet y = 0$. Tenemos:

$$\left(x - \frac{x \bullet y}{\|y\|^2} y\right) \bullet y = x \bullet y - \frac{x \bullet y}{\|y\|^2} (y \bullet y) = x \bullet y - \frac{x \bullet y}{\|y\|^2} \|y\|^2 = 0$$

17. Sean A un conjunto, $|A| > 1$, $n \in \mathbb{N}^*$ y $d_n : A^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$d_n((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = |\{k; x_k \neq y_k\}|.$$

Demuestre que: a) La función d_n es una métrica. b) El espacio (A^n, d_n) es acotado y no conexo. c) El espacio (A^n, d_n) es completo.

Solución. Denotemos $U_n = (u_1, \dots, u_n) \in A^n$. De la definición de la función d_n sale inmediatamente que

$$0 \leq d_n(X_n, Y_n) = d_n(Y_n, X_n) \text{ y } d_n(X_n, Y_n) = 0 \Leftrightarrow X_n = Y_n$$

En cuanto a la desigualdad triángular, como $|B \cup C| \leq |B| + |C|$ basta constatar que $\{k; x_k \neq y_k\} \subset \{k; x_k \neq z_k\} \cup \{k; z_k \neq y_k\}$ (hágalo).

Ahora bien, como es inmediato que $d_n(X_n, Y_n) \leq n$ el espacio (A^n, d_n) es acotado.

Como además la bola abierta $B(X_n, \frac{1}{2})$ se reduce a $\{X_n\}$, la topología inducida es la discreta y por tanto el espacio, que tiene más de un elemento, no es conexo.

Finalmente, es claro que la distancia mínima entre dos elementos distintos del espacio (A^n, d_n) es 1.

Esto nos dice que las únicas sucesiones de Cauchy posibles son aquellas que a partir de cierto momento devienen constantes y por tanto convergentes. El espacio es trivialmente completo.

18. Sea (E, d) un espacio métrico infinito no numerable. Demuestre que si todo subespacio propio de E es completo entonces E es completo.

Solución. Sea $(x_n)_n$ una sucesión de Cauchy de E .

El conjunto definido por: $X = \{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ es un subconjunto distinto de E , por tanto completo. Luego $(x_n)_n$ converge en X y, por ende, también en E .

9. Apendice

EL INFINITO : UN SUEÑO HUMANO

Dr. Cristián Mallol Comandari

Matemática Educacional, Revista Cubo, Vol. 3, Nº 2, 2001

Universidad de La Frontera

...Las obras del Señor son más de las que pueden contarse..

Rey David (salmo 40)

*La realidad de las cosas es una esfera infinita
cuyo centro está en todas partes
y la circunferencia en ninguna*

Pascal

¡Oh amores, oh promesas infinitas!

Baudelaire

Al sobrepasar las barreras ya no hay más límites

El Bombero Camamber, Tira cómica francesa, 1900

Introducción

Desde siempre la idea del infinito, el abismo absoluto, la magnitud sin comienzo ni fin, interesó e intrigó al común de los mortales. Desde la construcción de la Torre de Babel hasta la búsqueda del movimiento perpetuo, ya sea en el plano místico o en las explicaciones divinas, sea en ropajes poéticos o en previsiones apocalípticas, éste se ha manifestado cruzando la historia humana y, fiel a su nombre, escapándose inexorablemente.

Ya en la Antigüedad, los griegos expresaron una noción del infinito, pragmática y con dimensiones cósmicas, representada por el número de granos de arena que se requerían para llenar el universo; es claro de que allí estaba la idea de que no pueden haber más cosas de las que existen. Si bien se sabe que

Arquímedes utilizaba codificaciones especiales para realizar grandes cálculos, ciertos problemas de índole combinatorio (organizar el conteo de cosas bajo ciertas condiciones) propuestos por él, han podido ser solucionados recientemente con la ayuda de grandes computadores. Sea como sea, utilizando métodos sorprendentes pues no tenían las eficaces herramientas de la escritura decimal y de sus operaciones ad-hoc, los griegos estimaron que el número de granos de arena era 10^{60} (es decir un 1 seguido de sesenta 0). Más sorprendente aún es esta estimación, sabiendo que con los conocimientos actuales de física y astronomía se ha constatado que ese cálculo es correcto en lo que respecta a nuestro sistema solar. Es claro que basta sumar algo a esa cantidad para sobrepasarla. Sin embargo sería una gran falta de respeto creer que los griegos no se dieron cuenta de eso: muy por el contrario, se encuentra allí la idea, primero intuitiva y mucho tiempo después formalizada, de que infinito mas algo finito sigue siendo el mismo infinito.

Los matemáticos, con el colosal y solitario trabajo de Georg Cantor, comenzaron a fines del siglo XIX a organizar y conceptualizar el infinito, dejando cosas sin responder y, qué duda cabe, no despojándolo de su aura de misterio. La provisión de sorpresas que éste conlleva es ineludible cuando la intuición humana se desarrolla en un mundo “vasto y ajeno” pero definitivamente finito; nuestros primitivos sentidos se fueron acomodando con el devenir de los tiempos para percibir, luego interpretar y construir realidades, por cierto terrenales y muchas veces complejas, pero siempre concretas. Es por ello que el Infinito, así como la aventura del Número, pertenece quizás a los primeros intentos de abstracciones humanas aunque realizadas en épocas muy distintas.

La formalización de este problema comienza por la pregunta ¿cómo podemos establecer o estimar la idea intuitiva de talla, de porte, de magnitud de una colección de objetos? La cuestión no presenta mayor dificultad que la del tiempo necesario, si estamos enfrentados a colecciones finitas, pues se trata entonces de contar objetos, acción que necesariamente tiene un comienzo y un final. ¿Pero como hacerlo cuando las colecciones no son finitas?.

Lo que hacemos es comparar una colección con otra que usamos de referente, precisando la noción de comparación empleada y utilizando referentes admitidos en nuestra cultura colectiva. Hablamos aquí de comparar infinidades, primer salto hacia la abstracción.

Las herramientas que requerimos para aventurarnos en esta empresa la entregan los rudimentos del lenguaje conjuntista y la noción de función.

Una de las primeras sorpresas que aquí aparece, y que tiene mucho que ver con el tema que estamos desarrollando, es lo que se conoce como la paradoja de Russell y que, en términos simples, puede ejemplarizarse por la paradoja del barbero (no necesariamente de Sevilla...) y que trata de lo siguiente: los habitantes de un pueblo se dividen en aquellos que son afeitados por el barbero y aquellos que se afeitan a sí mismos; ¿dónde ubicamos al barbero?. Más elaboradamente, esto se expresa por la afirmación de que no hay nada que clasifique todo desde el punto de vista de la creación humana en su más vasto concepto, lo que en definitiva nos hace saludablemente humildes.

De una manera más sorprendente, también podemos enunciar esta paradoja diciendo que sólo la Nada contiene al Todo, cuestión que a los estudiosos de la Cábala filosófica les recordará las ideas de Isaac Luria sobre la contracción divina (Tsimtsoum o Zim-zum), la cual, dicho de una manera simple, postula que YAHVE (Dios) para poder crear el mundo tuvo que retirarse, dejar el vacío que entonces ocuparía su creación. El que Luria haya desarrollado su teoría a mediados del siglo XVI, no puede más que dejarnos perplejos y admirativos, pues hoy encuentra su paradigma en la visión contemporánea de la Mecánica Cuántica, en la cual las partículas (materia y antimateria) se crean a partir del vacío absoluto. Por lo demás una de las grandes preguntas de la Física Moderna, es en definitiva averiguar donde fue a parar toda la Antimateria.

Volviendo a la paradoja de Russell, para entenderla es preciso darse cuenta que suponer la existencia de un (conjunto) Universo Absoluto nos lleva irremediablemente a una contradicción. En efecto, si U fuera nuestro universo, definido como el conjunto que contiene todo lo que se pueda imaginar y crear, tenemos que inferir que $U \in U$, lo que es una rara pero obligada consecuencia de nuestra suposición. Como el conjunto vacío $\emptyset$ verifica trivialmente lo contrario, es decir $\emptyset \notin \emptyset$, podemos enunciar que en tal caso los conjuntos se deben organizar en dos clases disjuntas y no vacías: $S = \{A / A \in A\}$ (formada por aquellos que si se contienen a sí mismos) y $N = \{B / B \notin B\}$ (formada por aquellos que no se contienen a sí mismos). Siendo S y N nuevos conjuntos, cabe hacerse la pregunta: ¿en cuales de las dos clases los clasificamos?: si suponemos que $N \in S$, se infiere por la propiedad de los elementos de S que $N \in N$; se tendría entonces, por la propiedad de los elementos de N , que $N \notin N$, de la misma manera, es claro que suponer $N \in N$ obliga por definición de N a que $N \notin N$. Concluimos que el suponer un Universo Absoluto nos lleva a una contradicción.

Este resultado, establecido a comienzos del siglo pasado por el filósofo y matemático inglés Bertrand Russell, provocó serios remezones más allá de las matemáticas y provoca aún mucho desconcierto en jóvenes estudiantes, pues la idea del Universo Absoluto se tiende a asociarla con la existencia de un Ser Supremo o Dios. Sin embargo, en aras de no provocar indebidos problemas que tienen que ver con la fe, lo que hay que extrapolar de esta paradoja es que por más que el ser humano imagine, tanto individual como colectivamente, siempre quedará fuera de su alcance una inmensidad no imaginable ni comprensible.

Preliminares

Desde el punto de vista del trabajo matemático, la imposibilidad de contar con un Universo Absoluto no provoca problema alguno, pues en cada contexto podemos escoger o definir un conjunto de referencia (universo local) que sea completamente apto para las necesidades del tema específico en el cual se trabaja. En lo que sigue, suponemos que el lector domina los conceptos elementales del lenguaje conjuntista: nos referimos a las nociones de pertenencia, inclusión y de conjunto de las partes de un conjunto.

En cuanto a la noción de función, necesaria para lo que viene, recordemos que si A y B son conjuntos arbitrarios, una función $f : A \rightarrow B$ es una manera de relacionar, sin ambigüedad alguna, los elementos de A con elementos de B ; dicho más explícitamente, a cada elemento $a \in A$ se le asocia un único elemento de B que denotamos por $f(a)$.

Si tenemos funciones $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$, podemos tomar un elemento a de A y “llevarlo” a B a través de la función f y la imagen resultante “llevarla” a C utilizando g . Obtenemos así una nueva función de A en C llamada la compuesta de f y g , denotada por $g \circ f$, que se define formalmente por $(g \circ f)(a) = g(f(a))$ para todo $a \in A$.

Notemos también que cada conjunto A viene provisto de una función particular muy importante, llamada la función identidad, $Id_A : A \rightarrow A$, definida trivialmente por $Id_A(a) = a$ para todo $a \in A$.

Una función $A \rightarrow B$ es:

- inyectiva si cada elemento de B tiene a lo más un antecesor;
- sobreyectiva si cada elemento de B tiene a lo menos un antecesor;

- biyectiva si cada elemento de B tiene un único antecesor.

Es claro que una función es biyectiva si y solamente si es inyectiva y sobreyectiva a la vez.

La mayoría de las funciones que podemos definir no responden a ninguna de estas tres categorías, lo que no nos debe sorprender: tratándose de funciones con un cierto grado de complejidad, por tanto especializadas, son obligadamente escasas. Sin embargo, ellas nos brindan el concepto que necesitamos para la comparación de conjuntos.

Desde el punto de vista intuitivo, de las definiciones entregadas mas arriba podemos inferir que una función inyectiva va de un conjunto “pequeño” a uno “grande”, una sobreyectiva de uno “grande” a uno “pequeño” y que la biyectiva relaciona conjuntos de “dimensiones equivalentes”.

No es difícil demostrar que la existencia de una función inyectiva de A en B es equivalente a que exista una sobreyectiva de B en A .

Dejando al lector la segunda implicación, demostremos la primera: la idea es “devolvernos” de B hacia A utilizando los caminos establecidos por la función f (a través de las flechas) y construirlos allí donde no existan. En efecto, definamos una función $g : B \rightarrow A$ como sigue: sabemos que por ser f una función inyectiva, un elemento de B recibe a lo más una flecha; sea $b \in B$: si $b = f(a)$ para un cierto $a \in A$, definimos $g(b) = a$. Nos va quedando definir la función g en aquellos elementos de B que no tienen antecesor; ello nos lleva a optar: escojamos un elemento $x \in A$ y decidamos que $g(b) = x$ para todo elemento $b \in B$ que no es imagen de un elemento de A . La función g así construida es claramente sobreyectiva.

Otro resultado que puede ser vislumbrado por la intuición, pero que sin embargo no es nada de trivial, es aquel que se conoce como el teorema de Bernstein: si existen funciones inyectivas $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow A$, entonces existe una biyección entre A y B .

Obviamente, teniendo en cuenta lo dicho más arriba, en este enunciado podemos cambiar “inyectiva” por “sobreyectiva”. No expondremos aquí la demostración (nada de simple) de este resultado.

Por otro lado, no es difícil establecer que darse una función biyectiva $f : A \rightarrow B$ equivale a darse una biyección $g : B \rightarrow A$ de manera que las composiciones de estas funciones, para un lado y para el otro, den respectivamente las funciones identidades, es decir que $f \circ g = Id_B$ y $g \circ f = Id_A$ (dicho

de otra manera, $g(f(a)) = a$ para todo $a \in A$ y $f(g(b)) = b$ para todo $b \in B$). Como sabemos, la función g se llama la inversa de f y se denota por f^{-1} . Demostrar este resultado no tiene mayor complicación, pues dada $f : A \rightarrow B$ biyectiva, entonces si $b \in B$ existe un único $a \in A$ tal que $f(a) = b$; basta entonces proponer que $g(b) = a$. Como conclusión de todo esto, decir que una función es biyectiva o decir que tiene inversa es, en definitiva, la misma cosa.

Para Domar el Infinito

Hablamos aquí de domar en el sentido noble, es decir, de conocer y en un cierto modo, de desmistificarlo. En lo que sigue presentaremos las herramientas conceptuales simples que nos pueden llevar a ese entendimiento.

Dada la manifiesta dualidad expuesta en la última parte del capítulo anterior, diremos que en tal caso los conjuntos A y B son equipotentes. Más precisamente, el lector podrá sin dificultad demostrar que el enunciado “existe una biyección de A hacia B ” es una relación de equivalencia (es decir una relación refleja, simétrica y transitiva). Todo esto nos permite organizar a los conjuntos en paquetes (que se llaman clases de equivalencia) conformados por conjuntos equipotentes; diremos de aquellos conjuntos que tienen la misma cardinalidad. La cardinalidad de un conjunto hace referencia al paquete (clase) al que pertenece. En el caso finito, este concepto puede ser asimilado sin problemas al número de elementos de un conjunto. Sin embargo, sin complicarnos mucho, en general hablaremos de la cardinalidad de un conjunto A , que denotaremos por $card(A)$, para referirnos a la “talla” de ese conjunto, entendiendo por “talla” un recurso intuitivo.

Habiendo aclarado estos aspectos, existe naturalmente una relación de orden en los cardinales: diremos que $card(A) \leq card(B)$ si existe una función inyectiva $f : A \rightarrow B$ (o, lo que es equivalente, una función sobreyectiva de B hacia A). Escribiremos $card(A) < card(B)$ para señalar que si bien existe una función inyectiva de A en B , no existe una biyectiva.

Entendiendo que no se trata de números, sin prestarnos a confusión hablaremos de los símbolos “ $\leq$ ” y “ $<$ ” como menor o igual y estrictamente menor respectivamente.

Con esta definición, se verifican las propiedades de un orden :

- Reflexividad: $card(A) \leq card(A)$, pues basta tomar $f = Id_A$.

- Antisimetría: si $\text{card}(A) \leq \text{card}(B)$ y $\text{card}(B) \leq \text{card}(A)$, por el teorema de Bernstein existe una biyección entre A y B , es decir, $\text{card}(A) = \text{card}(B)$.
- Transitividad: si $\text{card}(A) \leq \text{card}(B)$ y $\text{card}(B) \leq \text{card}(C)$, esto significa que tenemos funciones inyectivas $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$. Es fácil ver que la compuesta $g \circ f : A \rightarrow C$ es una función inyectiva, dicho de otra manera, $\text{card}(A) \leq \text{card}(C)$.

Respecto de todo esto, agreguemos que la noción de cardinalidad es compatible con la inclusión conjuntista, lo que significa que si $A \subset B$ entonces $\text{card}(A) \leq \text{card}(B)$. La simple verificación de esto se le deja al lector.

Terminamos este capítulo con un teorema muy importante: para todo conjunto A siempre $\text{card}(A) < \text{card}(\wp(A))$, donde $\wp(A) = \{X \mid X \subset A\}$ es el conjunto de las partes de A .

Antes de mostrar en general este resultado, no es difícil establecer que en el caso finito $\wp(A)$ tiene 2^n elementos si A tiene n elementos: en efecto, basta notar que si a un conjunto A se le agrega un elemento, los nuevos subconjuntos que se obtienen resultan de agregarle ese elemento a los subconjuntos de A ; es decir, el número de subconjuntos se duplica. Partiendo por el conjunto vacío y agregando sucesivamente un elemento, el conjunto de partes tendrá respectivamente $1, 2, 2^2, 2^3, \dots$ elementos. Es por esta propiedad que en ciertos textos se habla de $\wp(A)$ como el conjunto potencia.

Demostremos pues el teorema: el lector no tendrá mayor complicación en establecer que $\text{card}(A) \leq \text{card}(\wp(A))$. Mostremos que $\text{card}(A) \neq \text{card}(\wp(A))$, cuestión que haremos por el absurdo, es decir vamos a suponer que pueden haber casos en donde $\text{card}(A) = \text{card}(\wp(A))$. En tal situación podemos considerar la existencia de una función biyectiva $f : A \rightarrow \wp(A)$. Como f es sobreyectiva por añadidura, existen $a, a' \in A$ tales que $f(a) = A$ y $f(a') = \emptyset$. Como $a \in f(a)$ y $a' \notin f(a')$, podemos particionar al conjunto A en dos conjuntos (no vacíos y disjuntos): $A = S \cup N$, donde $S = \{x \mid x \in f(x)\}$ y $N = \{x \mid x \notin f(x)\}$; ahora bien, como $N \subset A$ y f es biyectiva existe $n \in A$ tal que $f(n) = N$. Las dos posibles suposiciones $n \in S$ o $n \in N$ desembocan en una contradicción.

Como se puede fácilmente percibir, la estructura de esta demostración es análoga a aquella realizada en torno a la paradoja de Russell. Esto no nos debería sorprender pues el concepto de conjunto de partes necesariamente

echa por tierra suponer la existencia de un Universo Absoluto U , ya que como vimos $\text{card}(U) < \text{card}(\wp(U))$.

A esta altura, ya disponemos de las herramientas para abordar el tema que nos interesa.

En la Búsqueda del Aleph

Lo primero que podemos inferir de lo recién expuesto, es que no hay un solo infinito, sino que una infinidad. Esto se deduce de $\text{card}(A) < \text{card}(\wp(A))$, de manera que si A es un conjunto infinito a fortiori $\wp(A)$ también lo es, y su “magnitud” es infinitamente “más grande”. La sucesión iterada $A, \wp(A), \wp(\wp(A)), \wp(\wp(\wp(A))), \dots$ etc. nos brinda una infinidad de infinitos, cada uno “infinitamente más grande” que el que le antecede.

Si bien, por tanto, no tiene sentido hablar del infinito “mas grande”, cabe preguntarse por el “más pequeño”.

Desde el punto de vista cultural, la primera idea de infinito fue naturalmente entregada por aquella representada por la sucesión de números: $1, 2, 3, \dots$, entes que nos acompañan desde los albores de la humanidad. Más allá de conceptualizar este fenómeno, fue el desarrollo de la vida en familia y la organización de éstas en grupos y tribus, imprescindible a la sobrevivencia de la especie, los que llevaron a nuestros ancestros a la necesidad de contar; rápidamente (hablamos de tiempo histórico) se tomó conciencia de que se estaba enfrentando algo ilimitado. Menos rápido fue el proceso de nombrar (darle nombre) a estos objetos intuitivamente perceptibles pero después de todo intangibles: los números. Se entraba así en un primer plano de la abstracción. Llegar a establecer la nomenclatura más apta y a desarrollar algoritmos eficientes de cálculo (sumar, restar, multiplicar, etc.) demoró mucho más y ese paso sólo es posibilitado por la “aparición” del Cero en el siglo X; esta elaboración realizada por los árabes, de ideas que venían de los hindúes, requiere de un plano de abstracción más complejo y constituye una conquista humana comparable, por sus consecuencias, al dominio del fuego y a la invención de la rueda. Hoy por hoy nos referimos a esos números como los enteros naturales, conjunto que denotamos por $\mathbb{N}$.

Este conjunto es central en el desarrollo de las matemáticas y de las ciencias. El gran matemático Leopoldo Kronecker expresa esta importancia con su hermosa frase: “Dios creó los números enteros; el hombre hizo el resto”. Después de todo el número es lenguaje y dicho está que “al comienzo estaba el verbo”.

El conjunto de los enteros naturales posee dos propiedades intuitivamente claras: todo elemento $n \in \mathbb{N}$ tiene un sucesor (el número $n + 1$) y todo subconjunto de $\mathbb{N}$ tiene un elemento mínimo. Estas propiedades, establecidas axiomáticamente, permiten el desarrollo de la idea de inducción y de las técnicas de la recurrencia matemática. Los otros conjuntos de números que utilizamos comúnmente no verifican simultáneamente estas propiedades; sin ir más lejos, una fracción (que también llamamos número racional) no posee sucesor (es decir, no existe “la fracción siguiente”).

Volviendo a la pregunta enunciada más arriba, podemos afirmar que el infinito más pequeño es aquel representado por $\mathbb{N}$.

Para demostrar esto, supongamos que A es un conjunto infinito tal que $\text{card}(A) \leq \text{card}(\mathbb{N})$. Existe entonces una función inyectiva $f : A \rightarrow \mathbb{N}$. La imagen de esa función, $f(A)$, es un subconjunto de $\mathbb{N}$ equipotente con A puesto que $f : A \rightarrow f(A)$ es trivialmente sobreyectiva.

De esta manera, podemos replantear el problema de la manera siguiente: todo subconjunto infinito de $\mathbb{N}$ tiene el mismo cardinal que $\mathbb{N}$.

Sea entonces $S \subset \mathbb{N}$, infinito; recordemos que por ser S subconjunto de $\mathbb{N}$ se tiene que $\text{card}(S) \leq \text{card}(\mathbb{N})$; demostremos que en tal caso $\text{card}(S) = \text{card}(\mathbb{N})$: en efecto, sabemos que S tiene un elemento mínimo s_0 ; consideremos el conjunto $S_1 = S \setminus \{s_0\}$ cuyo elemento mínimo es s_1 . Sucesivamente, de esta manera, para todo $k \in \mathbb{N}$ definamos entonces los conjuntos $S_{k+1} = S_k \setminus \{s_k\}$ con elemento mínimo s_{k+1} ; como S es infinito, este proceso no se detiene y es claro que $\{s_0, s_1, s_2, \dots, s_k, \dots\} \subset S$. Podemos entonces definir la función, inyectiva por construcción, $g : \mathbb{N} \rightarrow S$, $g(n) = s_n$ con lo que se establece el resultado requerido.

El lector podrá constatar que en realidad lo que se obtiene con el procedimiento llevado a cabo es la igualdad $S = \{s_0, s_1, s_2, \dots, s_k, \dots\}$, pues nos lleva simplemente a describir al conjunto S , ordenándolo de manera ascendente (ya que $s_0 < s_1 < s_2 < \dots$).

Conocemos pues, el “más pequeño” de los infinitos. Es pertinente entonces darle un nombre: diremos que el cardinal de $\mathbb{N}$ es $\aleph_0$. A su vez, diremos que un conjunto es numerable si su cardinal es $\aleph_0$; este adjetivo se sustenta en el hecho que en tal caso los elementos del conjunto pueden ser enumerados (indexados) por los enteros.

Aprovechamos de adoptar el símbolo $\aleph_1$ para referirnos al cardinal de $\wp(\mathbb{N})$, así sea no tengamos muy claro aún el tipo de magnitud infinita que

representa: lo único que sabemos hasta aquí es que $\aleph_0 < \aleph_1$. Inspirados del caso finito anteriormente estudiado, adoptaremos la notación $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$, entendiendo que no tiene ningún sentido numérico.

En general, tanto en las matemáticas como en las ciencias, el acto de darle un nombre a un objeto o a una situación no es algo que se haga al azar. El símbolo $\aleph$ corresponde a la primera letra del alfabeto hebraico y se llama Aleph. Desde el punto de vista del hebreo, esta letra encierra tres conceptos esenciales: por un lado, expresa la idea de ser el primero por su rango, poder o potencia; después encierra la idea de estudio y aprendizaje; y, por último, desde el punto de vista numérico, conlleva la noción de miles de miles. Más aún, en el estudio de las combinaciones de las letras hebreas que componen el vocablo Aleph (aleph-lamed-phe), erudición que nace de viejas tradiciones hebraicas, aparece la idea de lo extraordinario en el sentido de lo escondido, lo no revelado y lo invisible.

Ahora bien, desde el punto de vista de la Cábala filosófica, el sentido del Aleph representa entre otras cosas al espíritu creador de donde surge el pensamiento abstracto, el punto de partida, la individualización por la cual la creación se perpetúa multiplicándose hasta el infinito : ¿cómo no relacionar esto con la frase de Kronecker anteriormente mencionada? Quizás cabe recordar aquí, sin intención alguna de hacer “proselitismo disciplinario”, que insignes personajes tales como Isaac Newton dedicaron gran tiempo al estudio de la Cábala.

Con este primer infinito conceptualizado, comienzan las sorpresas que golpean fuertemente al sentido común que se desarrolla, como dijimos anteriormente, en un mundo finito.

Así por ejemplo, con $\mathbb{Z} = \{\dots - 2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$, si bien la primera y natural impresión es que tal conjunto tiene “el doble de magnitud” que $\mathbb{N}$, la verdad es que $\mathbb{Z}$ es numerable. Esto se demuestra definiendo la función biyectiva (cosa que el lector comprobará) $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ de la manera siguiente: $f(n) = n/2$ si n es par y $f(n) = -(n+1)/2$ si n es impar.

Mucho más sorprendente aún, es lo que pasa con el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales (las fracciones), pues es evidente que entre dos enteros hay una infinidad de racionales. Así por ejemplo, todas las fracciones del tipo $1/n + 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, se encuentran entre 0 y 1.

Sin embargo, pese a nuestra incredulidad, $\mathbb{Q}$ también es numerable.

En efecto, como $\mathbb{N} \in \mathbb{Q}$ sabemos que $\text{card}(\mathbb{N}) \leq \text{card}(\mathbb{Q})$. Antes de establecer la desigualdad contraria, tomemos las siguientes precauciones de

escritura: las fracciones n/m se tratarán simplificadas (n y m sin divisores comunes), el número 0 se representará por y y las fracciones negativas por $-n/m$; De esta manera, la función $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{N}$, definida por $f(n/m) = 2^n 3^m$ si $n \leq 0$ y $f(n/m) = 5^n 7^m$ si $n > 0$, es inyectiva. La demostración de esta afirmación no presenta mayor dificultad.

Los ejemplos expuestos nos llevan a la pregunta: ¿hasta donde llega la infinitud de $\mathbb{N}$?

Para Superar a $\aleph_0$: De la Razón al Caos

Decir que $\aleph_0 < \aleph_1$ o, de otro modo que el infinito representado por $\mathbb{N}$ es infinitamente menor a aquel representado por $\wp(\mathbb{N})$, nos dice poco o nada desde el punto de vista de un referente admitido culturalmente. Es por ello que a partir de aquí, tenemos que encontrarnos con otro conjunto paradigmático: los números reales, conjunto que denotamos $\mathbb{R}$.

Este conjunto, que se representa a nivel de dibujo por una recta infinita totalmente ordenada y plena (sin hoyos), nos lleva a la más pura abstracción. Su nombre fue dado en oposición a otro conjunto de números igualmente abstractos e incorporados mucho tiempo después en el desarrollo de la matemática, los denominados números imaginarios. Más allá de estimar si los respectivos bautismos fueron los más acertados, hay viejas tradiciones que inclusive en las ciencias se respetan.

El conjunto de los números reales está formado por las fracciones (los racionales) y por aquellos números que no pueden ser representados por una fracción (los irracionales). Ya en la antigüedad, particularmente en las escuelas griegas, se llegó a la conclusión de que ciertas magnitudes no podían ser representadas por fracciones, es decir por una razón entre enteros. Viejos problemas tales como la imposibilidad de la cuadratura del círculo nacen de esas reflexiones. Sin embargo, quizás el ejemplo más simple que elaboraron fue el de la magnitud representada por la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles: se encontraron allí con algo indefinible y no mesurable, que hoy por hoy nosotros conocemos y manipulamos sin problema: la raíz cuadrada de 2: $\sqrt{2}$.

Demostrar que no puede ser representada por una fracción requiere de conocimientos simples: operaciones algebraicas elementales y el hecho de que la paridad de un número entero es compatible con la operación de elevar al cuadrado (es decir, que el entero n es par si y solo si n^2 también lo es) comprobación que le dejamos al lector.

De esta manera, suponer que se tiene $n/m = \sqrt{2}$ (fracción simplificada: es decir, n y m sin divisores comunes), nos llevaría a una contradicción.

En efecto, eso es equivalente a tener $n^2 = 2m^2$ (*) de donde deducimos que n es par, luego podemos escribir $n = 2r$. Reemplazando en (*) se obtiene $m^2 = 2r^2$ y por ende concluimos también que m es par. Resultaría entonces que el número 2 sería divisor común de n y m , lo que contradice la hipótesis.

¿Qué estructura tienen en nuestra escritura decimal los números irracionales?

Para responder a esta pregunta, caractericemos la escritura decimal de un racional: un número es racional si y sólo si su escritura decimal admite, a partir de cierto momento, una estructura periódica.

En efecto, darse una fracción n/m es proponer implícitamente la división de n por m . Ahora bien, al efectuar tal división con el algoritmo que aprendimos desde niños, van apareciendo restos sucesivos; si los cálculos han sido bien ejecutados, tales restos deben ser siempre menores que m (el divisor). Concluimos que una vez que ha aparecido la coma en el cociente, al cabo de aplicar el algoritmo m veces, obligadamente tiene que haber repetición de restos: a partir de la primera repetición comienza a formarse la sucesión de dígitos que formará el periodo, el cual quedará constituido al llegar a la segunda repetición y así sucesivamente.

Recíprocamente, denotemos una escritura decimal con periodo de la manera siguiente: A, BP^∞ donde A es la parte entera del número en tanto que B y P están formados por una serie de dígitos; P es el periodo que se repite ad infinitum (así por ejemplo en el número 254, 85679908290829082...., $A = 254$, $B = 85679$ y el periodo $P = 9082$).

Supongamos que B está formado por r dígitos y P por s dígitos. Es claro entonces que $A, BP^\infty = A + B/10^r + 0, P^\infty/10^r$ (en el ejemplo anterior se tiene $254 + 85679/10^5 + 0, 9082^\infty/10^8$); nos queda, en definitiva, solamente encontrar la fracción correspondiente a $0, P^\infty$. Ahora bien, como P tiene s dígitos, resulta que $10^s \cdot 0, P^\infty = P, P^\infty$ (en el ejemplo, $10^4 \cdot 0, 9082^\infty = 9082, 9082^\infty$) luego $10^s 0, P^\infty = P + 0, P^\infty$ de donde $0, P^\infty = P/(10^s - 1)$.

Los racionales se caracterizan entonces por una fuerte especialización, dada por la existencia de un periodo en su desarrollo decimal. Como todo lo especializado es raro (en el sentido de lo escaso) no es difícil prever que tal tipo de número conforma una pequeña infinidad de $\mathbb{R}$. El resto, una gran infinidad, es ocupado por los irracionales.

El resultado recién demostrado nos dice que el desarrollo decimal de un irracional no posee periodo.

En definitiva tales números tienen desarrollos caóticos e imprevisibles y es singular que el nombre que se les otorgó, aunque por otras razones, tenga también una dimensión de locura.

En general estos números no permiten vislumbrar escritura alguna, sino que aproximaciones de escritura (cálculo de cierta cantidad de dígitos utilizando grandes recursos de computación, como es el caso del irracional π). Sin embargo, algunos pueden ser descritos, como por ejemplo el número $0,101001000100001000001\dots$ (claramente irracional) en donde las posiciones del tipo $1, 1+2, 1+2+3, \dots, 1+2+3+\dots+n$ son ocupadas por el 1 y las restantes por el 0: es claro que este tipo de irracional, construido ex professo, no tiene mayor interés, salvo el de la ilusión de dominar lo que se escapa.

Teniendo más claro como son los números reales, pasemos a estudiar su cardinalidad.

Enunciamos que $\mathbb{R}$ no es numerable.

Para preparar la demostración de esta afirmación, que debemos a Georg Cantor, veamos que $\text{card}(\mathbb{R}) = \text{card}(]0, 1[)$, donde el intervalo abierto $]0, 1[$ es el conjunto formado por los números reales x que están estrictamente entre 0 y 1. Esto se establece con la función biyectiva $f : \mathbb{R} \rightarrow]0, 1[$, definida por $f(x) = x/(1 + |x|)$, donde $|x|$ es el valor absoluto de x .

Demostremos entonces que el intervalo abierto $]0, 1[$ no es numerable; la técnica empleada se conoce como el método de la diagonal de Cantor.

Supongamos que $]0, 1[$ fuera numerable. Esto quiere decir que podemos enumerar los elementos de $]0, 1[$ con los enteros, es decir, que se tiene $]0, 1[= \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$. Ahora bien, por ser elementos de $]0, 1[$, cada uno de ellos tiene una representación decimal de tipo $0,abcd\dots$. De manera que podemos darnos la escritura $a_n = 0, a_{0n}a_{1n}a_{2n}a_{3n}a_{4n}\dots$, donde los dígitos a_{kn} varían entre 0 y 9 con k y n tomando todos los valores enteros posibles.

Con esta preparación de notación que nos permite el suponer la numerabilidad de $]0, 1[$, vamos a construir un número $x \in]0, 1[$ distinto de todos los a_n , lo que es una contradicción.

En efecto, sea $x = 0, x_0x_1x_2x_3x_4\dots$, donde los dígitos x_n se determinan de la manera siguiente: $x_n = 1$ si $a_{nn} = 0$; en caso contrario, si $a_{nn} \neq 0$, ponemos $x_n = 0$. El número x así construido difiere de cada a_n en al menos un dígito, pues siempre tendremos que $x_n \neq a_{nn}$.

Por tanto, $\mathbb{R}$ no es numerable. Pero . . . ¿qué infinito representa este conjunto?

Los Números Conquistán a $\aleph_1$

Este último capítulo será dedicado a establecer que el infinito de $\mathbb{R}$ es $\aleph_1$, es decir que los cardinales de $\mathbb{R}$ y de $\wp(\mathbb{N})$ son los mismos.

Hemos decidido sacrificar un poco la formalización para ganar en claridad de las ideas que se expondrán en lo que sigue.

Lo que vamos a hacer es ver que tanto $\wp(\mathbb{N})$ como $\mathbb{R}$ se pueden concebir biunívocamente como un lenguaje formado por todas las palabras infinitas que se puedan escribir con un alfabeto de dos letras. Esto establecerá la igualdad de cardinales.

Como sabemos, $\wp(\mathbb{N})$ está formado por todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$. De esta manera, si $T \subset \mathbb{N}$, asociemos al conjunto T una palabra escrita con las letras s y n de la manera siguiente: si 0 está en T escribimos s (sí), en caso contrario escribimos n (no); seguimos con el 1 haciendo la misma pregunta y respondiendo de la manera indicada y, luego con el 2 y así sucesivamente con todos los enteros. Así, por ejemplo, al conjunto de los números impares se le asociará la palabra $nsnsnsnsns...$ (que podemos denotar por $(ns)^\infty$); de la misma manera, asociamos al conjunto $\{3, 6, 10, 12\}$ la palabra $nnnsnnnsnnnsnsnnnn..$ (o, si se quiere, $nnnsnnnsnnnsnsn^\infty$). Recíprocamente, es claro que darse una palabra infinita escrita con eses y enes nos determina sin ambigüedad un subconjunto de $\mathbb{N}$, pues basta con descodificar al revés: si la letra que está en la k -ésima posición (teniendo la precaución de comenzar por la 0 -ava posición) es la letra s , entonces decimos que el número k pertenece a ese conjunto, si la letra es n , no pertenece.

En cuanto a $\mathbb{R}$, sabemos que es equipotente al intervalo abierto $]0, 1[$. El lector podrá convencerse que también lo es con el intervalo semi-abierto $]0, 1]$ que se obtiene agregando el número 1 a $]0, 1[$; después de todo, habiendo demostrado que hay tantas fracciones como números enteros, podemos estar moralmente convencidos de que la cardinalidad del conjunto $]0, 1[$ no varía si se le agrega un número finito de elementos.

Para codificar $\mathbb{R}$ con un conjunto de las palabras infinitas escritas con dos letras, procedemos de la siguiente manera: escogemos un elemento de $]0, 1]$; acto seguido dividimos el intervalo en la mitad, obteniendo dos nuevos intervalos semi-abiertos, a saber $]0, 1/2]$ y $]1/2, 1]$. La pregunta que hacemos

entonces es la siguiente: ¿el número escogido previamente, se encuentra en el intervalo de la izquierda? Si es así, escribimos la letra *s* (sí), en caso contrario la letra *n* (no). Recomenzamos el proceso dividiendo en parte iguales el intervalo en el cual se encuentra nuestro número, rehacemos la pregunta y nos damos la respuesta. Y así, continuamos sucesivamente.

Así, por ejemplo, si hemos escogido el número 1 el lector podrá constatar que la palabra infinita asociada es: *nnnnn . . .* (o, como sabemos, n^∞). De la misma manera si escogemos el número $1/4$ encontramos la palabra *ssn* $^\infty$. Recíprocamente, si bien formalmente es más complicado descodificar, es decir, darse una palabra infinita y encontrar el número asociado correspondiente, geoméricamente no es difícil percibir que cortando en mitades el intervalo $]0, 1]$, y escogiendo la mitad que corresponda según lo que indique la letra en cuestión para recomenzar con los cortes, nos vamos inexorablemente acercando a un punto, en un proceso de infinitos pasos.

Entre dos Aleph, el Límite Humano

Como era de esperar, el matemático Georg Cantor se hizo la pregunta de la posible existencia de un infinito entre $\aleph_0$ y $\aleph_1$. Trabajó arduamente en ese tema, dejando en ello su salud física y mental, terminando la vida en un asilo psiquiátrico.

Otros matemáticos gastaron sus destrezas en ese problema, pero jamás pudo establecerse una respuesta, positiva o negativa.

Se decidió entonces axiomatizar: se estipuló que no había otros infinitos entre $\aleph_0$ y $\aleph_1$. Tal axioma se conoce como la Hipótesis del Continuo.

De esta manera, las Matemáticas, en sus distintas ramas y teorías, se fueron desarrollando confiando en la solidez de tal axioma. Felizmente y para alivio de todos, la magnífica obra de Kurt Gödel, complementada por los importantes trabajos de Paul Cohen, establece la consistencia de la Hipótesis del Continuo, demostrándose por un lado que se estaba frente a un problema indecidible y por el otro, que toda teoría construida bajo la aceptación de éste axioma no producía contradicción alguna.

Sin embargo, sabemos que no sabemos, y desde el infinito abismal que separa a estos dos Aleph emerge dignificada la condición humana.

Es por ello que no podemos dejar de pensar que esta maravillosa aventura del infinito se la debemos a la extraordinaria lucidez, pero también al terrible dolor y a la infinita errancia, de Georg Cantor.

Referencias

- G. Choquet. *Cours d'Analyse, Topologie*. Paris, Masson, 1964.
- J. Dujundji. *Topology*. Allyn and Bacon, Boston, 1966.
- G. Simmons. *Introduction to topology and modern analysis*. MacGraw Hill, New York, 1963.
- L. Schwartz. *Cours d'Analyse*, Hermann, Paris, 1966.

Esta publicación es el fruto de más de diez años de experiencia docente impartiendo el curso de Topología en la Carrera de Ingeniería Matemática de la Universidad de La Frontera, materia que ha representado para los estudiantes una de sus primeras incursiones en niveles de abstracción, con sus delicias y dificultades.

Las ideas básicas que aquí se exponen constituyen los primeros pasos en el estudio del Análisis, propio de programas de Licenciatura en Matemáticas, de Pedagogía en Matemáticas y de algunas Ingenierías. Los ejercicios resueltos que se encuentran al final de esta monografía deben ser utilizados como apoyo por los estudiantes y en caso alguno buscan reemplazar la reflexión personal, única manera de madurar en los tópicos de la abstracción.

DIBRI - UFRO



003276