MATEMATICA

CÁLCULO INTEGRAL

2

PEDRO H. VALENZUELA T.

2009

MATEMATICA

VOLUMEN II

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y
ESTADÍSTICA

PEDRO H. VALENZUELA T.

2009

.

Introducción

Esta versión la he revisado, corregido y aumentado. Espero que sea de tu agrado. He tratado de mejorar algunos aspectos deficientes en cuanto a forma y estilo que había en las vesiones anteriores, he corregido algunos errores, pero de seguro, quedan algunos, que espero me ayudes a corregir para que tus "nietos" puedan trabajar más a gusto.

Rebobinando un poco la cinta de la memoria, creo que el primer curso de matemática en la Universidad debió haber sido algo así como el primer episodio de la "Guerra de las galaxias", con naves interplanetarias, gobernadas por el "malvado" valor absoluto, invadiendo la recta real, dando origen a resolver desigualdades por montones, averiguando la cantidad de "paracaidístas" que se dejaban caer, pero afortunadamente la topología permitió dejar en la frontera del universo e incluso más allá a esa pandilla intergaláctica. Pero eso no fue todo, en una segunda oleada llenaron el plano cartesian con parábolas, elipses e hipérbolas que no lograron hacer flaquear tus ansias de victoria, te armaste hasta los dientes con las funciones y fuiste más allá de los límites permitidos, te "volaste" hasta el infinito. Con las funciones y sus derivadas lograste la artillería necesaria para vencer al "lado oscuro" del primer curso de matemática. Ahora estás por entrar al segundo episodio "El retorno del Jedi", ya sabes que serás el actor principal, tu reina la **integral**, te será fiel hasta morir, vivirás con ella batallas memorables y al final, te darás cuenta que siempre triunfa el bien sobre el mal.

Recuerda que tú eres el principal responsable de tu aprendizaje, el "profe" es solo un elemento de apoyo que estará dispuesto a ayudarte en la medida que vea tu interés en aprender. Otra cosa, no olvides que debes complementar tu estudio con un texto de Cálculo Integral, no te voy a recomendar uno en particular, pero te conviene uno que tenga la materia, que contenga ejercicios resueltos y propuestos, y que si además, trae problemas de pruebas que se han tomado en semestre anteriores, entonces házla corta ¡usa ese!

La historia de estos apuntes es de larga data, se inicia en Marzo de 1984 y se escriben en una vieja pero fiel máquina de escribir *Olimpia*. Esta es la octava edición y por supuesto, han desaparecido mucho errores. Se han incrementado los ejercicios resueltos y agregado problemas considerados en pruebas como complementación y ayuda a la parte teórica. Así mismo, la modernidad nos obliga a estar al día, por tanto, el editor de texto que estamos usando es el *Texniccenter* en conjunto con *Miktex* que es un compilador para **Latex**, y los gráficos se han realizado en *Pstricks*. Todos esto programas están disponibles para bajar en la Internet de manera absolutamente gratuita.

El texto se distribuye en 6 unidades didácticas, la primera es la iniciación en el Cálculo Integral, su objetivo básico es que aprendas a calcular la *Integral Indefinida*, entregándote para ello métodos de integración y sugerencias mediante ejemplos. La segunda unidad tiene que ver con la *Integral de Riemann* y su conexión con el área bajo una curva. En la tercera unidad se muestran variadas aplicaciones de la integral definida, tales como área, volumen, momentos y centros. En la cuarta unidad se estudian las *Integrales Impropias*, incluyendo las famosas funciones beta y gamma, con el fin de generalizar el concepto de integración a intervalos no finitos y a funciones no continuas. La quinta unidad está dedicada al estudio de las *Series Númericas* y a las *Series de Funciones*, dando respuesta a un problema fundamental, su convergencia. La sexta unidad contiene problemas que han sido considerados en pruebas, examenes y talleres.

Este es un texto relativamente corto, por lo que espero que resulte de fácil comprensión. El objetivo primordial sigue siendo el facilitar tu aprendizaje, en atención a que:

- Tienes un texto guía, con el cual no estás obligado a peregrinar por múltiples libros para seguir el programa de la asignatura.
- Puedes repasar en tu casa los contenidos, anotar dudas y hacer consultas, aún cuando no asistas a clases.
- El profesor podrá enfocar la clase hacia aspectos más generales y desarrollar localmente aquellos que considere relevantes.

Cualquier error u omisión que se detecte en estos apuntes es "casi" de exclusiva responsabilidad de la persona que los digitó. Sin embargo, cabe considerar importantes aportes y correcciones de mi colega Manuel González, quien leyó los originales de pé a pá y corrigió hasta los puntos y comas.

Finalmente, agradezco a mis colegas del Departamento que hacen posible la divulgación de este texto y que contribuyen con la formación de los estudiantes. Entre ellos menciono a Ricardo Leal, Herme Soto, Abdón Catalán y Fernando Marchant.

Pedro H. Valenzuela T.
Peache
Agosto de 2017

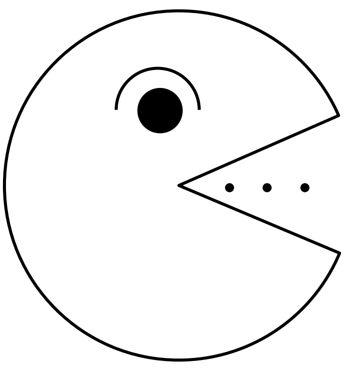
Índice general

.

Los encantos de esta ciencia sublime,las matemáticas, sólo se le revelan a aquellos que tienen el valor de profundizar en ella.
Carl Friedrich Gauss

CAPÍTULO 1

INTEGRAL INDEFINIDA



$\int x^3 dx \cdots \int sen x dx \cdots \int x e^x dx \cdots \int \frac{sen x\, dx}{1+cos x}$

Capítulo 1

INTEGRAL INDEFINIDA

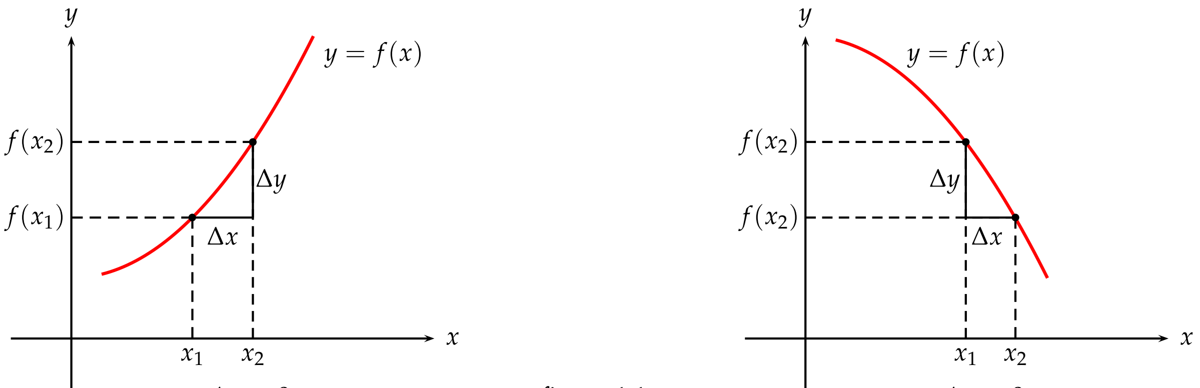
1.1. Introducción

Existen muchas situaciones, tanto en matemática como en otras áreas, en las que es necesario estimar una *diferencia*, por ejemplo, aproximar los valores de una función, calcular errores al efectuar mediciones, etc. ¿Cómo hacerlo?, muy sencillo, empleando la *recta tangente*, y la *diferencial* de una función.

No se piense que sólo en matemática se emplea esta idea de diferencial, para nosotros será habitual hablar de diferencial de área, de arco y de volumen, todo ello para hacer referencia a una pequeña porción de área, arco o volumen, pero en física se habla de diferencial de carga para comenzar a analizar la carga total, en electricidad de diferencial de línea, etc.

1.2. Incrementos

Se considera la función $y = f(x)$ que muestra la figura 1.1.



caso $\Delta y > 0$ figura 1.1 caso $\Delta y < 0$

- Si hacemos variar el argumento x, desde una posición x_1 a otra x_2, este cambio se llama "*incremento*" del argumento x, y se anota
$$\Delta x = x_2 - x_1$$
- Si hemos producido un incremento en el argumento x, es evidente, que como consecuencia, se tenga un cambio en la función. Éste se conoce con el nombre de "*incremento*" de la función, se anota
$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$

Estos incrementos puede ser positivos, negativos o nulos, la figura 1.1 muestra los casos $\Delta y > 0$ y $\Delta y > 0$, que correponden a que la función sea creciente o decreciente.

Ejemplo 1.2.1. *Un móvil se mueve de acuerdo con $s = 4t^2 + t$, donde s es el espacio recorrido, en metros, y t el tiempo en segundos. La distancia* ***exacta*** *que recorre este móvil en el tiempo comprendido entre 3 y 3,5 segundos es*
$$\Delta s = [\, 4 \cdot (3{,}5)^2 + 3{,}5 \,] - [\, 4 \cdot 3^2 + 3 \,] = 13{,}5 \; mt$$

1.3. La recta tangente

La historia de la recta tangente a una curva definida por una función $y = f(x)$ en un punto es conocida del estudio de la derivada. Recordemos que la definición de derivada es
$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$
y representa, "*la pendiente*" de la recta tangente en un punto x cualquiera. La figura 1.2 muestra la recta tangente a la curva en el punto $(x_0, f(x_0))$. Si $(x_0, f(x_0))$ es el punto de tangencia, la ecuación de la recta tangente es
$$y - f(x_0) = f'(x_0)\,(x - x_0)$$

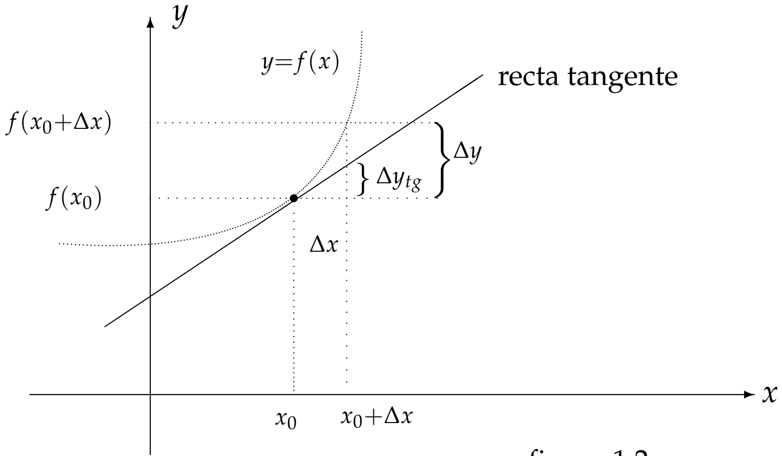


figura 1.2

1.4. La aproximación

Vamos a aproximar la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en el punto $x_0 + \Delta x$, conociendo $f(x_0)$, $f'(x_0)$, y un incremento Δx pequeño. Como punto de partida se considera la figura 1.2, en la cual

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta y$$

Como aproximación a $f(x_0 + \Delta x)$ se considera la distancia hasta la recta tangente. Esto es,

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + \Delta y_{tg}$$

donde Δy_{tg} es la elevación de la recta tangente entre el punto x_0 y $x_0 + \Delta x$. La pendiente de la recta tangente es

$$f'(x_0) = \frac{\Delta y_{tg}}{\Delta x}$$

De esto se sigue que

$$\Delta y_{tg} = f'(x_0) \cdot \Delta x \tag{1.1}$$

Se concluye que la aproximación es

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x \tag{1.2}$$

Ejemplo 1.4.1. *Sea $f(x) = x^2$, si el argumento x varía de 3 a 3,1, entonces se elige, como valor inicial 3, y como incremento $\Delta x = 0,1$. El valor exacto del incremento de la función es*

$$\triangle y = f(3,1) - f(3) = 0,61$$

Por otra parte, un valor aproximado a $f(3,1)$ lo hallamos usando la fórmula recién establecida. Se tiene

$$f(3 + 0,1) \sim f(3) + f'(3) \cdot 0,1 = 9,6$$

dado que el valor exacto de $f(3,1)$ es $9,61$, se observa que el error en la aproximación es $0,01$. En general, si Δx es pequeño, el error en la aproximación también es pequeño.

Definición 1.4.2.

1. *Se llama* **diferencial** *del argumento x a su incremento Δx. Se anota $dx = \Delta x$*

2. *Se llama* **diferencial** *de la función $y = f(x)$, al producto de la derivada $f'(x)$ por el incremento Δx del argumento. Se anota $dy = f'(x)\,dx$*

Con esta notación la ecuación de aproximación se transforma en

$$f(x + \Delta x) \sim f(x) + dy$$

- Si bien, en el contexto de la derivada, la expresión $\dfrac{dy}{dx}$ no fue pensada como un cociente, con la noción de diferencial es posible dar sentido a dy y a dx en forma separada, teniéndose que la derivada de la función f en el punto x es igual a la razón de la diferencial de la función respecto a la diferencial del argumento en el punto. Esto, de paso, permite justificar la conocida notación de Leibnitz para derivadas

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

Ejemplo 1.4.3. *Para aproximar $\sqrt{5}$ se considera la función $f(x) = \sqrt{x}$. El punto adecuado es $x = 4$, de modo que el incremento $\Delta x = 1$. La derivada de la función viene dada por $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. En consecuencia*

$$f(5) = \sqrt{5} \approx f(4) + \frac{1}{2\sqrt{4}} \cdot 1 = 2,25$$

Ejemplo 1.4.4. *Para hallar un valor aproximado de sen $46°$, por diferenciales se considera la función $f(x) =$ sen x, con $x = 45° = \dfrac{\pi}{4}$, $\triangle x = 1° = \dfrac{\pi}{180}$. Como $f'(x) = \cos x$, entonces por la fórmula de aproximación tenemos*

$$sen(x + \triangle x) \approx sen\, x + (\cos x)\, \triangle x$$

Luego,

$$sen\, 46° \approx sen\, 45° + (\cos \frac{\pi}{4}) \cdot \frac{\pi}{180} \approx \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{180} \approx 0,7194$$

Veamos otro tipo de problemas de aproximación.

Ejemplo 1.4.5. *Calcular aproximadamente el incremento en el volumen de un silo cilíndrico de 20 metros de altura, si el radio aumenta de 3 a 3,4 mt. (figura 1.3)*

Sean $r = 3$, $\triangle r = 0{,}4$. Con ello $V = \pi \cdot r^2 \cdot h = 20\, \pi\, r^2$. De esto, la diferencial del volumen (dV) que es la que "mide" el cambio aproximado, es $dV = 40\, \pi\, r\, dr$, de donde se obtiene

$$dV = 40 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 0,4 = 48\, \pi$$

El cambio "exacto" que se produce en el volumen es

$$\triangle V = V(3,4) - V(3,0) = 51,6\, \pi$$

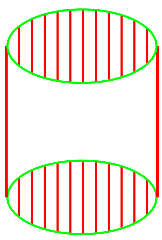


figura 1.3

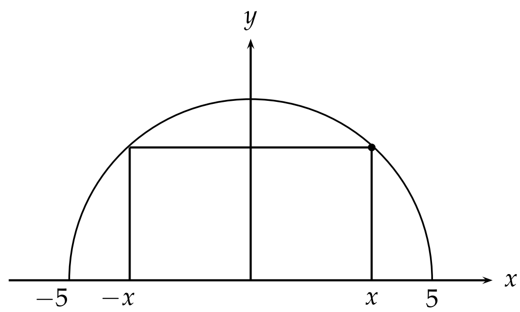


figura 1.4

Ejemplo 1.4.6. *Se inscribe un rectángulo en un semicírculo de radio* 5 *mt. Calcular el incremento aproximado en el área del rectángulo si la longitud de la base sobre el diámetro se incrementa de* 6 *a* 6, 16 *(figura 1.4).*

El área del rectángulo corresponde al producto de la base por la altura. Suponemos que el rectángulo está ubicado "estratégicamente", de tal manera que la base tiene longitud $2x$, quedando la altura determinada por $y = \sqrt{25 - x^2}$. Como la base tiene longitud $2x$, se tiene que $x = 3$, y que $\Delta x = 0,08$. Dado que el área del rectángulo es

$$A = 2x \cdot \sqrt{25 - x^2}$$

entonces

$$dA = \left(2\sqrt{25 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{25 - x^2}}\right) dx = \frac{7}{25} \approx 0{,}28$$

El valor exacto es $\triangle A = 0{,}27$.

En determinados problemas se tienen mediciones aproximadas del argumento x, y se desea determinar el error que presenta la función $y = f(x)$. Tal error se denomina **relativo** y corresponde al valor absoluto del cociente entre la diferencial y la función. Esto es

$$\textbf{error relativo} \;=\; \left|\frac{dy}{y}\right|$$

Ejemplo 1.4.7. *Al medir el radio de una esfera se encuentra que este es de* $2 \pm 0{,}04$ *mts. El* **porcentaje** *de error máximo en el cálculo del volumen de la esfera, en forma aproximada, es*

$$V \;=\; \frac{4}{3}\pi r^3 \;\Longrightarrow\; \left|\frac{dV}{V}\right| \;=\; \frac{6}{100} \;=\; 6\,\%$$

se hizo uso del hecho que $dV = 4\pi r^2 dr$, $dr = 0,04$

1.5. Propiedades de la diferencial

Proposición 1.5.1. *Sean* $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *funciones, entonces*

1. $d(u + v) = du + dv$
2. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}$
3. $d(uv) = u \cdot dv + v \cdot du$
4. $df[g(x)] = f'[\, g(x)\,] \cdot g'(x)\, dx$

Se prueba la tercera de estas propiedades

Sean u y v funciones de la variable x. Si $y = u \cdot v$, entonces

$$\begin{aligned} dy \;=\; y' \cdot dx \;&\Longrightarrow\; dy \;=\; (u' \cdot\, v + v' \cdot u) \cdot dx \\ &\Longrightarrow\; dy \;=\; u' \cdot v\, dx + v' \cdot u\, dx \end{aligned}$$

Como $v'\, dx \;=\; dv$, $u'\, dx \;=\; du$, concluímos que

$$d(uv) \;=\; dy \;=\; u \cdot dv + v \cdot du$$

1.6. Diferencial de orden superior

Teniendo en cuenta que $dy = f'(x) \cdot dx$, entonces

$$\begin{aligned} d^2y &= d(dy) = d[\, f'(x) \cdot dx \,] = [\, f'(x)\, dx \,]'\, dx \\ &= [\, f''(x)\, dx + f'(x) \cdot 0 \,]\, dx = f''(x) \cdot (dx)^2 \end{aligned}$$

Si convenimos que $(dx)^2 = dx^2$, entonces

$$d^2y = f''(x) \cdot dx^2$$

NOTA $\triangleright$: Al derivar la expresión dx, se tuvo en cuenta que ella no depende de x ($dx = \Delta x$ es constante), por lo que su derivada es cero. En general, usando el mismo procedimiento se encuentra que

$$d^n y = f^{(n)}(x) \cdot dx^n$$

A partir de esto se obtiene la notación de **Leibnitz** para derivadas

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f^{(n)}(x)$$

1.7. Integral indefinida

El proceso de hallar $f'(x)$ a partir de $f(x)$ se conoce con el nombre de *derivación*. La integración consiste en que dada una función $f(x)$ se deben buscar las funciones $F(x)$ tales que $F'(x) = f(x)$. Este es el problema que pasamos a estudiar.

Definición 1.7.1. *Una función F se llama* **primitiva** *o* **antiderivada** *de la función f, si $F'(x) = f(x)$*

Una función con derivada x^2 es $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$. Es claro que una función primitiva **no es única**, ya que por ejemplo

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + 1, \quad F(x) = \frac{x^3}{3} - 7, \quad F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}$$

también son primitivas de $f(x) = x^3$. Este hecho conduce a un primer resultado interesante

Teorema 1.7.2. *Si F_1 y F_2 son primitivas de f, entonces su diferencia es una constante*

Para probar esto, suponemos que la diferencia de las primitivas es

$$F_1(x) - F_2(x) = \varphi(x)$$

siendo $\varphi(x)$ una función. Al derivar, respecto de x, se tiene que

$$F'_1(x) - F'_2(x) = \varphi'(x) = 0$$

pues, F_1 y F_2 son primitivas de f, esto es, satisfacen que

$$F'_1(x) = f(x) \qquad \text{y} \qquad F'_2(x) = f(x)$$

Por tanto, se sigue que $\varphi(x) = c$, una constante. En consecuencia

$$F_1(x) - F_2(x) = c$$

Definición 1.7.3. *Si F es primitiva de la función f, entonces $F(x) + c$ se llama* **integral indefinida** *de f. Se anota*

$$F(x) + c = \int f(x)\, dx$$

$f(x)$ se denomina **integrando**, $f(x) \cdot dx$ **elemento de integración** y $\int$ es el **signo de integración**.

1.8. Integrales Inmediatas

Se verifica de inmediato, por un proceso de derivación, las siguientes integrales:

- $\displaystyle\int dx = x + c$
- $\displaystyle\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x}\, dx = \ln\, x + c$
- $\displaystyle\int sen\, x\, dx = -cos\, x + c$
- $\displaystyle\int e^x\, dx = e^x + c$
- $\displaystyle\int cos\, x\, dx = sen\, x + c$
- $\displaystyle\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln\, a} + c$
- $\displaystyle\int tg\, x\, dx = -\ln\, cos\, x + c$
- $\displaystyle\int sec^2\, x\, dx = tg\, x + c$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \cdot arctg\, \frac{x}{a} + c$
- $\displaystyle\int csc^2\, x\, dx = -ctg\, x + c$
- $\displaystyle\int sec\, x\, dx = \ln(sec\, x + tg\, x) + c$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = arcsen\, \frac{x}{a} + c$
- $\displaystyle\int csc\, x\, dx = -\ln(csc\, x + ctg\, x) + c$

1.9. Propiedades de la integral

Proposición 1.9.1. *Sea F función primitiva de f, entonces*

1. $\displaystyle\frac{d}{dx}\left(\int f(x)\, dx\right) = f(x)$
2. $\displaystyle\int k \cdot f(x)\, dx = k \cdot \int f(x)\, dx$

3. $\int (\, f(x) + g(x)\,) \quad dx \quad = \quad \int f(x) \quad dx + \qquad \int g(x)\, dx$

Demostraciones:

1. Usemos el que F es primitiva de f

$$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)\, dx\right) = \frac{d}{dx}\,(F(x) + c) = F'(x) = f(x)$$

2. Derivamos ambos miembros en forma separada

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(\int k \cdot f(x)\, dx\right) &= k \cdot f(x) \\ \frac{d}{dx}\left(k \cdot \int f(x)\, dx\right) &= k \cdot \frac{d}{dx}\left(\int f(x)\, dx\right) = k \cdot f(x) \end{aligned}$$

En consecuencia

$$\int k \cdot f(x)\, dx = k \cdot \int f(x)\, dx$$

3. En virtud de la primera propiedad se tiene

$$\frac{d}{dx}\left(\int (f(x) + g(x))\, dx\right) = f(x) + g(x)$$

y también

$$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx\right) = \frac{d}{dx}\left(\int f(x)\, dx\right) + \frac{d}{dx}\left(\int g(x)\, dx\right) = f(x) + g(x)$$

1.10. Técnicas de integración

Para el cálculo de integrales no inmediatas se puede usar uno de los siguientes métodos: Integración por sustitución o cambio de variable, integración por partes, integración por fracciones parciales, por reducción o recurrencia, otras. Veamos algunas de ellas.

1.10.1. Método de sustitución

Este método de cálculo sirve para "simplificar" integrandos, en el sentido de que una sustitución de variable haga la integral que se está calculando semejante a una integral básica.

Teorema 1.10.1. *Sea f función de la variable z, y sea $z = \varphi(x)$, entonces*

$$\int f(z)\, dz \;=\; \int f(\varphi(x))\, \varphi'(x)\, dx$$

Demostración

Del hecho que $z = \varphi(x)$ se deduce que $dz = \varphi'(x) \cdot dx$. Luego,

$$\int f(z)\, dz = \int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\, dx$$

En la práctica este método opera facilmente. Sólo se debe tener presente que el integrando corresponda a una función compuesta, y que al tomar una sustitución, la diferencial de ella esté presente en el integrando, salvo el producto por una constante.

Ejemplo 1.10.2. *Para hallar* $\int \frac{dx}{3x+5}$. *Sea* $z = 3x+5$, $dz = 3dx$.

$$\int \frac{dx}{3x+5} = \frac{1}{3}\int \frac{dz}{z} = \frac{1}{3}\ln z = \frac{1}{3}\ \ln(3x+5) + c$$

Ejemplo 1.10.3. *Para hallar* $\int (2x-3)^{1/2}\ dx$, *introducimos la variable auxiliar* $z = 2x-3$, *ya que el integrando es una función compuesta. La diferencial* $dz = 2dx$, *de manera que*

$$\int (2x-3)^{1/2}\, dx = \frac{1}{2}\int z^{1/2}\, dz = \frac{1}{2}\, z^{3/2}\cdot\frac{2}{3} + c = \frac{1}{3}\ (2x-3)^{3/2} + c$$

Ejemplo 1.10.4. *Para* $\int \frac{dx}{(2x-1)^2}$, *la sustitución* $z = 2x-1$ *es la adecuada, ya que entonces* $dz = 2dx$, *y por lo tanto, la integral es más sencilla de calcular.*

$$\int (2x-1)^{-2}\, dx = \frac{1}{2}\int z^{-2}\, dz = -\frac{1}{2}\, z^{-1} + c = -\frac{1}{2}\ (2x-1)^{-1} + c$$

Ejemplo 1.10.5. *Para* $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{5+2x^2}}$, $z = 2x^2+5 \Longrightarrow\ dz = 4x\, dx$.

$$\int \frac{x\, dx}{\sqrt{5+2x^2}} = \frac{1}{4}\int \frac{dz}{z^{1/2}} = \frac{1}{2}\ \sqrt{5+2x^2} + c$$

Ejemplo 1.10.6. *Para hallar* $\int \cos 5x\, dx$, $z = 5x$, $dz = 5\, dx$.

$$\int \cos 5x\, dx = \int \frac{1}{5}\cos z\, dz = \frac{1}{5}\operatorname{sen} z + c = \frac{1}{5}\operatorname{sen} 5x + c$$

Ejemplo 1.10.7. *Para calcular* $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 3x}$, $z = 3x \Longrightarrow dz = 3\ dx$.

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 3x} = \frac{1}{3}\int \frac{dz}{\operatorname{sen}^2 z} = \frac{1}{3}\int \csc^2 z\, dz = -\frac{1}{3}\ \operatorname{ctg} z + c = -\frac{1}{3}\ \operatorname{ctg} 3x + c$$

Ejemplo 1.10.8. *Para hallar* $\int x\, sen\,(5x^2)\,dx$, *la sustitución* $z = 5x^2$ *lleva a que* $dz = 10x\,dx$. *Luego,*

$$\int x\, sen\, 5x^2\,dx = \frac{1}{10}\int sen\, z\,dz = -\frac{1}{10}\,cos\,z + c = -\frac{1}{10}\,cos\,5x^2 + c$$

Ejemplo 1.10.9. *Para* $\int sen^3 x \cdot cos\,x\,dx$, *la sustitución* $z = sen\,x$ *conduce a que* $dz = cos\,x\,dx$. *Luego,*

$$\int sen^3 x \cdot cos\,x\,dx = \int z^3\,dz = \frac{1}{4}\,z^4 + c = \frac{1}{4}\,sen^4 x + c$$

1.10.2. Integrales trigonométricas

Se consideran ahora ciertas integrales, cuyos integrandos son funciones trigonométricas, los cuales requieren de sustituciones ad - hoc. Dentro de este grupo se encuentran:

Integral de la forma: $\boxed{\int R(sen\,x, cos\,x)\,dx}$

En este caso R es una función racional que contiene expresiones senos y cosenos. La sustitución $tg\,\frac{x}{2} = t$, transforma el integrando en una función racional en la variable t. Para determinar la equivalencia en la nueva variable t, de las funciones seno y coseno del ángulo, se utiliza un triángulo como el que indica la figura 1.5. De aquí:

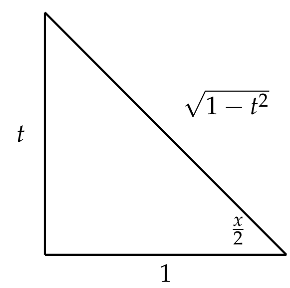


figura 1.5

$$sen\,\frac{x}{2} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad cos\,\frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

Al multiplicar estas expresiones entre sí y por 2, se tiene

$$2\,sen\frac{x}{2}\,cos\frac{x}{2} = \frac{2t}{1+t^2} \Longrightarrow sen\,x = \frac{2t}{1+t^2}$$

Para determinar la expresión el coseno usemos la identidad, $sen^2 x\; +\; cos^2 x = 1$.

$$\begin{aligned} sen^2 x\; +\; cos^2 x\; =\; 1 \;\Longrightarrow\; cos^2 x \;&=\; 1 - \frac{4t^2}{(1+t^2)^2} \\ \Longrightarrow\; cos\,x \;&=\; \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{aligned}$$

Por último, la diferencial dx del integrando se obtiene a partir de la sustitución empleada. Esto es

$$tg\frac{x}{2} = t \Longrightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

En consecuencia
$$\int R(sen\,x, cos\,x)\,dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}$$

Ejemplo 1.10.10. *Para hallar* $\int \frac{dx}{1+sen\,x}$, *sea* $tg\,\frac{x}{2} = t$, *entonces*

$$\int \frac{dx}{1+sen\,x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}} = 2\int \frac{dt}{(1+t)^2}$$

Esta última integral es inmediata, de manera que

$$\int \frac{dx}{1+sen\,x} = \frac{-2}{1+tg\left(\frac{x}{2}\right)} + c$$

NOTA $\triangleright$: Si $R(sen\,x, cos\,x) = R(-sen\,x, -cos\,x)$, es decir, si el integrando es par, entonces la sustitución $tg\,x = t$ conduce a

$$sen\,x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad cos\,x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

Ejemplo 1.10.11. *Para* $\int \frac{dx}{2-sen^2x}$, *la sustitución* $tg\,x = t$ *implica*

$$\int \frac{dx}{2-sen^2x} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{2-\frac{t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{2+t^2}$$

Esta última integral está en tabla y corresponde a

$$\int \frac{dt}{2+t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,arctg\,\frac{t}{\sqrt{2}} + c$$

En consecuencia
$$\int \frac{dx}{2-sen^2x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,arctg\,tg\,\frac{x}{\sqrt{2}} + c$$

Integral de la forma: $\boxed{\int sen^m x\, cos^n x\, dx \ \ m \text{ y } n \text{ enteros}}$

En este tipo de integrales se debe tener en cuenta la paridad o imparidad de m y n. Se distinguen los siguientes casos:

a) **caso m o n impar**

Consideremos $n = 2k+1$, si $m = 2k+1$ es lo mismo. Se tiene

$$\int sen^m x\, cos^n x\, dx = \int sen^m x\, cos^{2k} x\, cos\, x\, dx = \int sen^m x\, (1 - sen^2 x)^k\, cos\, x\, dx$$

Usando la sustitución $sen\, x = t$, se obtiene $dt = cos\, x\, dx$, con lo que la integral toma la forma

$$\int sen^m x\, cos^n x\, dx = \int t^m (1 - t^2)^k\, dt$$

lo cual corresponde a una integral menos complicada que la original.

Ejemplo 1.10.12. *En* $\int cos^3 x\, sen^{-4} x\, dx$ *la función coseno tiene exponente impar* $n = 3$. *Luego,*

$$\int cos^3 x\, sen^{-4} x\, dx = \int cos^2 x\, cos\, x\, sen^{-4} x\, dx = \int (1 - sen^2 x)\, cos\, x\, sen^{-4} x\, dx$$

Ahora, $sen\, x = t \Longrightarrow dt = cos\, x\, dx$, *por tanto*

$$\begin{aligned} \int cos^3 x\, sen^{-4} x\, dx &= \int (1 - t^2)\, t^{-4}\, dt = \int t^{-4}\, dt - \int t^{-2}\, dt \\ &= -\frac{t^{-3}}{3} + t^{-1} + c = -\frac{1}{3sen^3 x} + \frac{1}{sen\, x} + c \end{aligned}$$

Ejemplo 1.10.13. *En* $\int sen^3 x\, cos^2 x\, dx$ *la función seno tiene exponente impar* $n = 3$. *Luego,*

$$\int sen^3 x\, cos^2 x\, dx = \int sen^2 x\, sen\, x\, cos^2 x\, dx = \int (1 - cos^2 x)\, sen\, x\, cos^2 x\, dx$$

Ahora, $cos\, x = t \Longrightarrow dt = -sen\, x\, dx$, *por tanto*

$$\begin{aligned} \int sen^3 x\, cos^2 x\, dx &= -\int (1 - t^2)\, t^2\, dt = -\int (t^2 - t^4)\, dt \\ &= -\frac{1}{3} t^3 + \frac{1}{5} t^5 + c = -\frac{1}{3} cos^3 x + \frac{1}{5} cos^5 x + c \end{aligned}$$

c) **caso n y m pares**, $n, m > 0$

Para esta clase de integrando se usan las identidades

$$sen^2 x = \frac{1}{2}\,(1 - cos\, 2x), \qquad cos^2 x = \frac{1}{2}\,(1 + cos\, 2x)$$

Se tiene

$$\int sen^{2p} x\, cos^{2q} x\, dx = \int (1 - cos\, 2x)^p\, (1 + cos\, 2x)^q\, \frac{1}{2^{p+q}}\, dx \tag{1.3}$$

Al desarrollar paréntesis y multiplicar, se obtienen potencias pares e impares del $cos\, 2x$; para las primeras se usa la ecuación 1.3 y para las potencias impares se usa (a). Con esto se tienen expresiones del tipo $cos\, kx$, que resultan fáciles de integrar.

Ejemplo 1.10.14. *Para calcular* $\int cos^4 x\, dx$, *se usa* $cos^2 x = \frac{1}{2}\,(1 + cos\, 2x)$.

$$\begin{aligned}\int cos^4 x\, dx &= \frac{1}{4}\int (1 + 2\, cos\, 2x + cos^2\, 2x)\, dx = \frac{x}{4} + \frac{1}{4}\, sen\, 2x + \left(\frac{x}{8} + \frac{1}{32}\, sen\, 4x\right) + c \\ &= \frac{3}{8}\, x + \frac{1}{4}\, sen\, 2x + \frac{1}{32}\, sen\, 4x + c\end{aligned}$$

d) **caso** m y n **enteros pares** (uno de ellos negativo)

En este caso quedamos con una expresión racional en seno y coseno, por lo que la sustitución $tg\, x = t$ es la adecuada

Ejemplo 1.10.15. *Para hallar* $\displaystyle\int \frac{cos^2 x}{sen^6 x}\, dx$, *la sustitución* $tg\, x = t$ *es tal que*

$$sen^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}\ ;\ cos^2 x = \frac{1}{1+t^2},\ dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

Por lo tanto

$$\int \frac{cos^2 x}{sen^6 x}\, dx = \int \frac{\dfrac{1}{1+t^2}}{\dfrac{t^6}{(1+t^2)^3}} \cdot \frac{dt}{1+t^2}$$

Esto equivale a

$$\begin{aligned}\int \frac{cos^2 x}{sen^6 x}\, dx &= \int \frac{(1+t^2)\, dt}{t^6} = \int t^{-6}\, dt + \int t^{-4}\, dt \\ &= -\frac{1}{5}\, t^{-5} - \frac{1}{3}\, t^{-3} + c \\ &= -\frac{1}{3tg^5 x} - \frac{1}{3tg^3\, x} + c\end{aligned}$$

Integrales de la forma: $\boxed{\int cos\, mx\, cos\, nx\, dx,\quad \int sen\, mx\, cos\, nx\, dx,\quad \int sen\, mx\, sen\, nx\, dx}$

Para el cálculo de este tipo de integrales, se utilizan las identidades

$$\begin{aligned}cos\, mx\, cos\, nx &= \frac{1}{2}\,(cos\,(m+n)x + cos\,(m-n)x) \\ sen\, mx\, cos\, nx &= \frac{1}{2}\,(sen\,(m+n)x + sen\,(m-n)x) \\ sen\, mx\, sen\, nx &= \frac{1}{2}\,(-cos\,(m+n)x + cos\,(m-n)x)\end{aligned}$$

Ejemplo 1.10.16. *Para hallar* $\int sen\, 2x\, sen\, 3x\, dx$, *se usa la identidad*

$$sen\, 2x\, sen\, 3x = \frac{1}{2}\,(-cos\, 5x + cos\, x)$$

con esto, la integral dada se transforma en

$$\int sen\, 2x\, sen\, 3x\, dx = \frac{1}{2}\int(-cos\, 5x \ + \ cos\, x)\, dx = -\frac{sen\, 5x}{10} + \frac{sen\, x}{2} + c$$

Integrales de la forma: $\boxed{\int tg^m x\, dx, \quad \int sec^m x\, dx, \quad \int csc^m x\, dx, \quad \int ctg^m x\, dx}$

Para calcular este tipo de integrales, se recurre, en primer lugar, a la paridad o imparidad de m, ya que si $m = 2k+1$, entonces se descompone la función f del integrando en la forma $f^{2k}\cdot f^1$. En caso de ser $m = 2k$, se usan las identidades $1 + tg^2 x = sec^2 x$, $1 + ctg^2 x = csc^2 x$, según corresponda.

Ejemplo 1.10.17. *Para hallar* $\int tg^3 x\, dx$ *tenemos*

$$\int tg^3 x\; dx = \int tg^2 x \cdot tg\; x\; dx = \int (sec^2 x - 1)\; tg\; x\; dx = \frac{tg^2 x}{2} + \ln\; cos\; x + c$$

Ejemplo 1.10.18. *Para hallar* $\int sec^4 x\, dx$*, procedemos como sigue:*

$$\begin{aligned}\int sec^4 x\; dx &= \int sec^2 x\; sec^2 x\; dx = \int (1 + tg^2 x)\; sec^2 x\; dx \\ &= \int sec^2 x\; dx + \int tg^2 x\; sec^2 x\; dx \\ &= tg\, x + \frac{1}{3}\, tg^3 x + c\end{aligned}$$

Ejemplo 1.10.19. *El cálculo de la integral* $\int tg^4 x\, dx$*, es como sigue*

$$\begin{aligned}\int tg^4 x\; dx &= \int tg^2 x\; tg^2 x\, dx = \int tg^2 x\; (sec^2 x - 1)\, dx \\ &= \int tg^2 x\; sec^2 x\; dx - \int tg^2 x\; dx \\ &= \frac{1}{3}\, tg^3 x - \int (sec^2 x - 1)\, dx \\ &= \frac{1}{3}\, tg^3 x - tg\, x + x + c\end{aligned}$$

1.10.3. Sustituciones trigonométricas

Cuando el integrando presenta formas tales como

$$(a^2 \pm b^2 x^2)^{m/n}, \quad (b^2 x^2 - a^2)^{m/n}, \quad n \neq 0,\; m \neq n \;\in \mathbb{Z}$$

es conveniente usar una identidad trigonométrica del tipo siguiente.

$$x = \frac{a}{b}\, sen\,\theta \quad \vee \quad x = \frac{a}{b}\, cos\,\theta \text{ para la expresión } (a^2 - b^2x^2)^{m/n}$$
$$x = \frac{a}{b}\, sec\,\theta \text{ para la expresión } (b^2x^2 - a^2)^{m/n}$$
$$x = \frac{a}{b}\, tg\,\theta \text{ para la expresión } (b^2x^2 + a^2)^{m/n}$$

Ejemplo 1.10.20. *La* $\int \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}}$ *se resuelve considerando* $x = 3tg\,\theta$. *La diferencial* $dx = 3\,sec^2\theta\,d\theta$, *luego*

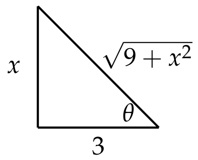


figura 1.6

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}} = \int sec\,\theta\,d\theta = \ln(sec\,\theta + tg\,\theta) + c$$

En el triángulo de la figura 1.6 se tiene que $sec\,\theta = \frac{\sqrt{9+x^2}}{3}$, *con lo cual*

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}} = \ln\left(\frac{\sqrt{9+x^2}}{3} + \frac{x}{3}\right) + c$$

Ejemplo 1.10.21. *Para hallar* $\int \frac{x^2\,dx}{(4+x^2)^{3/2}}$, *la sustitución* $x = 2tg\,\theta$ *hace que* $dx = 2sec^2\theta\,d\theta$, *luego*

$$\int \frac{x^2\,dx}{(4+x^2)^{3/2}} = \int \frac{4\,tg^2\theta \cdot 2\,sec^2\theta\,d\theta}{8\,sec^3\theta}$$

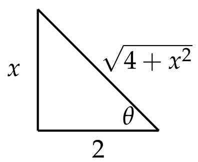


figura 1.7

$$= \int \frac{tg^2\theta\,d\theta}{sec\theta} = \int \frac{sen^2\theta\,d\theta}{cos\theta}$$

$$= \int \frac{1-cos^2\theta}{cos\theta}\,d\theta = \int sec\,\theta\,d\theta - \int cos\,\theta\,d\theta$$

$$= \ln\,(sec\,\theta + tg\,\theta) - sen\,\theta + c$$

$$= \ln\left(\frac{\sqrt{4+x^2}}{2} + \frac{x}{2}\right) - \frac{x}{\sqrt{4+x^2}} + c$$

Ejemplo 1.10.22. *Para resolver* $\int \frac{cos\,x\,dx}{\sqrt{2-sen^2\,x}}$, *la sustitución* $z = sen\,x$ *es tal que* $dz = cos\,x\,dx$

$$\int \frac{cos\,x\,dx}{\sqrt{2-sen^2 x}} = \int \frac{dz}{\sqrt{2-z^2}}$$

Ahora, $z = t\sqrt{2} \Longrightarrow dz = \sqrt{2}\, dt$*. Se tiene*

$$\int \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{2 - sen^2 x}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = arcsen\, t + c = arcsen\, \frac{z}{\sqrt{2}} + c = arcsen\, \frac{sen\, x}{\sqrt{2}} + c$$

Ejemplo 1.10.23. *Para resolver* $\displaystyle\int \frac{dx}{5+x^2}$ *la sustitución adecuada es* $x = \sqrt{5}\, tg\,\theta$*.*

La diferencial es $dx = \sqrt{5}\, sec^2\theta\, d\theta$. Luego

$$\int \frac{dx}{5+x^2} = \sqrt{5}\int \frac{sec^2\theta\, d\theta}{5(1+tg^2\theta)} = \frac{1}{\sqrt{5}}\int d\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}\,\theta + c = \frac{1}{\sqrt{5}}\, arctg\, \frac{x}{\sqrt{5}} + c$$

1.11. Integración por partes

Este método funciona cuando se tiene un integrando que es el producto de dos o más funciones reales de clase ζ^1 (derivada continua). Tiene su origen en la diferencial de un producto de funciones.

$$d(u\cdot v) = u\cdot dv + v\cdot du \Longrightarrow u\cdot dv = d(u\cdot v) - v\cdot du$$

de donde se obtiene

$$\boxed{\int u\cdot dv = u\cdot v - \int v\cdot du}$$

Esta expresión es la que ilustra el método. El trabajo consiste ahora en la elección de la función u adecuada, la que se puede hacer de acuerdo a la sigla **LIATE**. Esto es, el mejor orden es elegir en primer lugar, funciones **L**ogaritmo, luego funciones **I**nversas trigonométricas, después funciones **A**lgebraicas, posteriormente funciones **T**rigonométricas, y finalmente, funciones **E**xponenciales. Esto, en la medida en que ellas aparezcan como parte del integrando. Se muestran algunos ejemplos para ilustrar la forma en que se eligen las funciones u y dv.

Ejemplo 1.11.1. *El integrando de* $\int x \cos x\, dx$ *es un producto entre una función algebraica y otra trigonométrica. Por ello, y de acuerdo con la sigla* **LIATE***, consideramos* $u = x$*,* $du = dx$*,* $dv = \cos x\, dx$*,* $v = sen\, x$*, para tener*

$$\begin{aligned}\int x\cos x\, dx &= x\, sen\, x - \int sen\, x\, dx\\ &= x\, sen\, x + \cos x + c\end{aligned}$$

Ejemplo 1.11.2. *El integrando en* $\int x^2 e^x\, dx$ *es el producto entre una función algebraica y una función exponencial. Luego elegimos,* $u = x^2$*,* $du = 2x dx$*,* $dv = e^x\, dx$*,* $v = e^x$*. De este modo*

$$\int x^2 e^x\, dx = x^2 e^x - 2\int x\, e^x\, dx$$

Observar que en la última integral, el integrando es de nuevo el producto entre una función algebraica y una exponencial, de manera que le aplicamos de nuevo el método, con $u = x$, $du = dx$, $dv = e^x\,dx$, $v = e^x$. *Luego*

$$\begin{aligned}\int x^2\, e^x\, dx &= x^2\, e^x - 2\cdot(x\, e^x - \int e^x\, dx)\\ &= x^2\, e^x - 2e^x\cdot(x - 1) + c\end{aligned}$$

Ejemplo 1.11.3. *El integrando de* $\int \text{arcsen}\, x\, dx$ *es un producto entre la función trigonométrica inversa* $f(x) = \text{arcsen}\ x$ *y la función algebraica* $g(x) = 1$. *De manera que elegimos* $u = \text{arcsen}\, x$, $du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $dv = dx$, $v = x$. *Se tiene*

$$\begin{aligned}\int \text{arcsen}\ x\, dx &= x\ \text{arcsen}\ x - \int \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}\\ &= x\ \text{arcsen}\, x + \sqrt{1-x^2} + c\end{aligned}$$

Ejemplo 1.11.4. *El integrando de* $\int e^{ax}\ \text{sen}\ bx\ dx$ *es un producto entre una función exponencial y una trigonométrica. Como ellas se encuentran al final de la sigla* **LIATE**, *es indiferente el considerar una u otra como la función u, de modo que elegimos* $u = e^{ax}$, $du = a\, e^{ax}\, dx$, $dv = \text{sen}\ bx\ dx$, $v = -\frac{1}{b}\cdot\cos bx$. *Luego*

$$\int e^{ax}\ \text{sen}\, bx\, dx = -\frac{1}{b}\, e^{ax}\cdot\cos bx + \frac{a}{b}\cdot\int e^{ax}\, \cos bx\, dx$$

A la integral del miembro derecho, le aplicamos integración por partes

$$u = e^{ax}\ ,\ du = a\, e^{ax}\, dx\ ,\ dv = \cos\, bx\, dx\ ,\ v = \frac{1}{b}\cdot\text{sen}\, bx$$

Así

$$\int e^{ax}\, \cos bx\, dx = \frac{1}{b}\, e^{ax}\ \text{sen}\, bx - \frac{a}{b}\int e^{ax}\cdot\text{sen}\, bx\, dx$$

En consecuencia

$$\int e^{ax}\ \text{sen}\, bx\, dx = -\frac{1}{b}\, e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b}\left(\frac{1}{b}\, e^{ax}\ \text{sen}\, bx - \frac{a}{b}\int e^{ax}\ \text{sen}\, bx\, dx\right)$$

La integral del miembro derecho es semejante a la del izquierdo, entonces

$$\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)\int e^{ax}\ \text{sen}\ bx\ dx = -\frac{1}{b}\, e^{ax}\ \cos\, bx + \frac{a}{b^2}\, e^{ax}\ \text{sen}\ bx$$

De donde

$$\int e^{ax}\ \text{sen}\ bx\ dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\ \text{sen}\ bx - b\ \cos\ bx)$$

Ejemplo 1.11.5. *Para hallar* $\int sec^3 x\, dx$ *tenemos*

$$\int sec^3 x\, dx = \int sec^2 x\, sec\, x\, dx = \int (1 + tg^2 x)\, sec\, x\, dx = \int sec\, x\, dx + \int tg^2 x\, sec\, x\, dx$$

Para calcular $\int tg^2\, x\, sec\, x\, dx$ usemos integración por partes, con

$$u = tg\, x, \quad du = sec^2 x\, dx, \quad dv = tg\, x\, sec\, x\, dx, \quad v = sec\, x$$

Se tiene

$$\int tg^2\, x\, sec\, x\, dx = tg\, x\, sec\, x - \int sec^3\, x\, dx$$

Luego

$$\int sec^3\, x\, dx = \int sec\, x\, dx + \left(tg\, x\, sec,\; x - \int sec^3\, x\, dx \right)$$

Ahora, sumando términos semejantes

$$2 \int sec^3\, x\, dx = tg\, x\, sec\, x + \int sec\, x\, dx$$

La integral $\int sec\, x\, dx = \ln(sec\, x + tg\, x) + c$, en efecto,

$$\int sec\, x\, dx = \int sec\, x\, \frac{sec\, x + tg\, x}{sec\, x + tg\, x}\, dx$$

La sustitución

$$z = sec\, x + tg\, x \Longrightarrow dz = (sec\, x\; tg\, x + sec^2 x) dx$$

Al factorizar se tiene $dz = sec\, x\, (tg\, x + sec\, x) dx$. Luego

$$\int sec\, x\, dx = \int \frac{dz}{z} = \ln\, z \; + \; c = \ln(sec\, x + tg\, x) + c$$

De este modo

$$2 \int sec^3\, x\, dx = \ln(sec\, x \; + \; tg\, x) + tg\, x\, sec\, x \; + \; c$$

Finalmente se obtiene

$$\int sec^3\, x\, dx = \frac{1}{2}\, \ln(sec\, x \; + \; tg\, x) + \frac{1}{2}\, tg\; x\, sec\, x \; + \; c$$

1.12. Fracciones parciales

Sean $f(x)$, $g(x)$ polinomios, estudiamos como resolver integrales de la forma

$$\int \frac{f(x)}{g(x)}\, dx$$

Lo primero es determinar si el grado del numerador es menor que el del denominador. Si no es así, el camino que se sigue es:

1. Al dividir $f(x)$ por $g(x)$ se obtiene
$$\frac{f(x)}{g(x)} = E(x) + \frac{h(x)}{g(x)}$$
El polinomio $E(x)$ es de integración inmediata y el polinomio $h(x)$ es de grado menor que $g(x)$.

2. Para hallar la integral de $\dfrac{h(x)}{g(x)}$ se efectúa la descomposición de $g(x)$ en factores irreductibles. Estos factores pueden ser de las formas:
$$(x-\alpha)^m \quad \text{o bien} \quad (x^2+bx+c)^n,\ b^2-4ac<0$$
Es claro que α es raíz de multiplicidad m. Si existen otras raíces reales, tal como β, entonces aparece el factor $(x-\beta)^k$. Si existen otros factores cuadráticos con raíces complejas, entonces aparece el factor $(x^2+dx+f)^r$. Por simplicidad consideremos que el polinomio $g(x)$ viene en la forma
$$g(x) = (x-\alpha)^m \cdot (x^2+bx+c)^n$$
entonces
$$\frac{h(x)}{g(x)} = \frac{a_1}{x-\alpha} + \frac{a_2}{(x-\alpha)^2} + \cdots + \frac{a_n}{(x-\alpha)^m} +$$
$$\frac{b_1+c_1x}{x^2+bx+c} + \frac{b_2+c_2x}{[x^2+bx+c]^2} + \cdots + \frac{b_n+c_nx}{[x^2+bx+c]^n}$$

Para determinar las constantes, se halla el común denominador, luego se multiplica, iguala y resuelve. Los ejemplos siguientes, son suficientes para entender la mecánica del método.

Ejemplo 1.12.1. *El integrando de* $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)}$*, es un función racional, en donde* $f(x)=1$*,* $g(x)=(x-1)(x-2)$*. Esto indica que nos encontramos en el caso de factores lineales del método de fracciones parciales. Para denotar las constantes usemos letras mayúsculas.*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(x-1)(x+2)} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}\\
1 &= A(x+2)+B(x-1)\\
x=1 \Longrightarrow 1 &= 3A \Longrightarrow A = \frac{1}{3}\\
x=-2 \Longrightarrow 1 &= -3B \Longrightarrow B = -\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Luego
$$\frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{1/3}{x-1} - \frac{1/3}{x+2}$$

se tiene así que

$$\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+2}$$

$$= \frac{1}{3}\ \ln(x-1) - \frac{1}{3}\ \ln(x+2) + c$$

$$= \frac{1}{3}\ \ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right) + c$$

El método de las fracciones parciales no es la única forma de resolver este problema. El denominador

$$(x-1)(x+2) = x^2 + x - 2 = (x+\frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}$$

Esto indica que la sustitución $x+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}\sec\theta$ es también un "buen camino". Queda como ejercicio verificarlo.

Ejemplo 1.12.2. *El integrando de* $\displaystyle\int \frac{2x+1\ dx}{(x^2+2)(x-1)}$ *es una función racional. El denominador es el producto entre los factores* $(x-1)$*, y el factor irreducible* (x^2+2)*. Luego, la separación en fracciones parciales es*

$$\frac{2x+1}{(x^2+2)(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2}$$

Luego

$$\int \frac{2x+1\ dx}{(x^2+2)(x-1)} = \int \frac{A\ dx}{x-1} + \int \frac{Bx+C\ dx}{x^2+2}$$

Al resolver el sistema: $A=1,\ C=1,\ B=-1$*. De modo que*

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+1\,dx}{(x^2+2)(x-1)} &= \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{x\ dx}{x^2+2} + \int \frac{dx}{x^2+2}\\ &= \ln(x-1) - \frac{1}{2}\ \ln(x^2+2) + \frac{1}{\sqrt{2}}\,arctg\,\frac{x}{\sqrt{2}} + c\end{aligned}$$

Ejemplo 1.12.3. *En la integral* $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{x^2+1}$*, el grado del numerador es igual al del denominador. En consecuencia, se debe, en primer lugar, efectuar la división entre ellos*

$$\frac{x^2}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{x^2+1}$$

Se tiene

$$\int \frac{x^2\ dx}{x^2+1} = \int dx - \int \frac{dx}{x^2+1} = x - arctg\ x\ +\ c$$

1.13. Funciones irracionales

En algunos casos, la integral de una función irracional, se puede reducir mediante una sustitución adecuada a una integral de función racional.

Integrales de la forma: $\boxed{\int R\left(x^{m/n},\ x^{p/q}, \cdots, x^{r/s}\right)\ dx}$

La función R es racional, con los argumentos que se indican. La sustitución $x = z^k$, con k el común denominador de las fracciones $\frac{m}{n}, \ \frac{p}{q}, \cdots, \ \frac{r}{s}$, transforma esta integral en una de integrando racional en z.

Ejemplo 1.13.1. *Para hallar* $\displaystyle\int \frac{x^{1/2}}{1+x^{3/4}}\, dx$*, se observa que el común denominador entre las fracciones* $\frac{1}{2}$ *y* $\frac{3}{4}$ *es 4. De esta forma, la sustitución adecuada es* $x = z^4$*. A partir de la cual se tiene* $dx = 4z^3\ dz$*. Luego*

$$\int \frac{x^{1/2}}{1+x^{3/4}}\, dx = \int \frac{z^2 \cdot 4z^3\ dz}{1+z^3} = 4 \int \frac{z^5\ dz}{1+z^3}$$

Como el grado del numerador es mayor que el del denominador, entonces se dividen, para tener que

$$\int \frac{x^{1/2}}{1+x^{3/4}}\, dx = 4 \int \left(z^2 - \frac{z^2}{1+z^3}\right) = \frac{4}{3}\, z^3 - \frac{4}{3} \int \frac{3z^2\ dz}{1+z^3}$$

$$= \frac{4}{3}\, z^3 - \frac{4}{3}\ \ln(z^3+1) + c = \frac{4}{3}\, x^{3/4} - \frac{4}{3}\ \ln(x^{3/4}+1) + c$$

Integrales: $\boxed{\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_1/n_1}, \cdots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_j/n_j}\right] dx}$

La sustitución es $\dfrac{ax+b}{cx+d} = t^k$, con k el común denominador de los números $n_1, n_2, \cdots, n_j$

Ejemplo 1.13.2. *Hallar* $I = \displaystyle\int \frac{2+\sqrt{x+1}}{(x+1)^2 - \sqrt{x+1}}\, dx$

Para comparar con el tipo de integral que estamos considerando, los valores de las constantes son: $c = 0$, $d = 1$, $a = 1$, $b = 1$. Luego, la sustitución adecuada es $1 + x = t^2$, con lo cual $dx = 2tdt$. Se tiene.

$$I = \int \frac{(2+t)\, 2t}{t^4 - t}\, dt = \int \frac{2(2+t)}{(t-1)(t^2+t+1)}\, dt$$

Ahora se usan fracciones parciales. La descomposición es

$$\frac{2(2+t)}{(t-1)(t^2+t+1)} = \frac{A}{t-1} + \frac{Bt+C}{t^2+t+1}$$

Al multiplicar por el común denominador se tiene

$$2(2+t) = A(t^2+t+1) + (Bt+C)(t-1)$$

dando valores $t=0$, $t=1$, $t=2$, las constantes tienen los valores $A=2$, $B=-2$, $C=-2$. Luego, para la integral original se tiene

$$I = \int \frac{2dt}{t-1} - \int \frac{(2t+2)\,dt}{t^2+t+1}$$

$$= 2\ln(t-1) - \int \frac{[(2t+1)+1]\,dt}{t^2+t+1}$$

$$= 2\ln(t-1) - \int \frac{(2t+1)\,dt}{t^2+t+1} - \int \frac{dt}{t^2+t+1}$$

Se observa que en una de las integrales por resolver, la diferencial del denominador es $(2t+1)dt$, exactamente el numerador. Esto significa que la solución a la integral es logarítmica. La última integral requiere de completación de cuadrados. Se tiene

$$I = 2\ln(t-1) - \ln(t^2+t+1) - \int \frac{dt}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$

Esta integral se resuelve por sustitución trigonométrica.

$$t+\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,tg\,\theta \Longrightarrow dt = \frac{\sqrt{3}}{2}\,sec^2\theta\,d\theta$$

La integral que estamos calculando se transforma en

$$\int \frac{dt}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\int d\theta = \frac{2\sqrt{3}}{3}\,\theta$$

Como $\theta = arctg\,\frac{2}{\sqrt{3}}(t+\frac{1}{2})$, entonces, la solución de la integral original es

$$I = \ln\frac{(t-1)^2}{t^2+t+1} - \frac{2}{\sqrt{3}}\,arctg\,\frac{2}{\sqrt{3}}(t+\frac{1}{2}) + c$$

En términos de la variable x

$$I = \ln\frac{(\sqrt{x+1}-1)^2}{2+x+\sqrt{1+x}} - \frac{2}{\sqrt{3}}\,arctg\,\frac{2}{\sqrt{3}}(\sqrt{x+1}+\frac{1}{2}) + c$$

Integrales de la forma: $\boxed{\displaystyle\int \frac{dx}{(mx+n)\,\sqrt{ax^2+bx+c}}}$

En este caso, la sustitución $z = \frac{1}{mx+n}$ reduce la integral a una que le es aplicable alguna sustitución trigonométrica.

Ejemplo 1.13.3. *Hallar* $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}}$

De la sustitución $\frac{1}{x+1} = z$ *se sigue* $dx = -\frac{1}{z^2}\,dz$. *Luego,*

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}} = -\int \frac{dz/z^2}{(1/z)\,\sqrt{1/z^2-1}} = -\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

$$= -arcsen\, z = -arcsen\, \frac{1}{x+1} + c$$

Ejemplo 1.13.4. *Hallemos* $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)^3\,\sqrt{x^2+2x}}$

Si $\frac{1}{x+1} = z$, entonces $dx = -\frac{1}{z^2}\,dz$. Luego,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(x+1)^3\,\sqrt{x^2+2x}} &= -\int \frac{\frac{dz}{z^2}}{\frac{1}{z^3}\,\sqrt{\frac{1}{z^2}-1}} = -\int \frac{z^2\,dz}{\sqrt{1-z^2}} \\ &= -\int sen^2\theta\; d\theta = -\frac{1}{2}\left(\theta - \frac{1}{2}\,sen\,2\theta\right) + c \\ &= -\frac{1}{2}\,\left(arcsen\, z - z\,\sqrt{1-z^2}\right) + c\end{aligned}$$

Se usó la sustitución $z = sen\,\theta$. Finalmente, en la variable x se tiene

$$\int \frac{dx}{(x+1)^3\,\sqrt{x^2+2x}} = -\frac{1}{2}\,\left(arcsen\,\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}\,\sqrt{x^2+2x}\,\right) + c$$

Otra forma de resolver la integral es completar cuadrados, $x^2+2x = (x+1)^2 - 1$, con lo cual la sustitución $x+1 = sec\,\theta$ es también una alternativa adecuada.

Integrales de la forma : $\boxed{\displaystyle\int R(\,x, \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx)}$

R es una función racional. Las sustituciones que se indican, transforman esta integral en racional:

1. Si $a > 0$, $\sqrt{ax^2+bx+c} = x\sqrt{a} + z$

2. Si $c > 0$, $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xz + \sqrt{c}$

3. Si $\alpha \in \mathbb{R}$ es raíz de $\sqrt{ax^2 + bx + c} = 0$, entonces $\sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - \alpha)z$

Ejemplo 1.13.5. *Hallemos* $\displaystyle\int \frac{(x+1)\,dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}$

El valor de las constantes es, $a = 1,\ b = 1,\ c = 1$. La sustitución adecuada es

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = x + z \qquad \text{o bien} \qquad \sqrt{x^2 + x + 1} = xz + 1$$

Con cualesquiera de ellas se obtiene

$$x = \frac{z^2 - 1}{1 - 2z} \Longrightarrow dx = -2\,\frac{(z^2 + z + 1)\,dz}{(1 - 2z)^2}$$

Al reemplazar en la integral original

$$\int \frac{(x+1)\,dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}} = -2\int \frac{\left[\dfrac{z^2 - 1}{1 - 2z} + 1\right]\dfrac{z - z^2 - 1}{(1 - 2z)^2}\,dz}{2 \cdot \dfrac{z^2 - 1}{1 - 2z} + z}$$

Al simplificar el integrando esto equivale a

$$\begin{aligned}
\int \frac{(x+1)\,dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}} &= -2\int \frac{z^2 - z^3 - z}{(1 - 2z)^2}\,dz \\
&= \int \frac{1}{u^2}\left[\left(\frac{1 - u}{2}\right)^2 - \left(\frac{1 - u}{2}\right)^3 - \frac{1}{2} + \frac{u}{2}\right] du \\
&= \int \frac{1}{u^2} \cdot \left[-\frac{3}{8} + \frac{3}{8}\,u - \frac{1}{8}\,u^2 + \frac{1}{8}\,u^3\right] du \\
&= \int \left[-\frac{3}{8u^2} + \frac{3}{8u} - \frac{1}{8} + \frac{u}{8}\right] du \\
&= \frac{3}{8u} + \frac{3}{8}\,\ln u - \frac{1}{8}\,u + \frac{u^2}{16} + c
\end{aligned}$$

Hicimos $1 - 2z = u$ con lo cual $du = -2dz$. Finalmente, se reemplaza $u = 1 - 2z$ y luego $z = \sqrt{x^2 + x - 1} - x$ para obtener la respuesta a la integral. El lector interesado puede ver que al multiplicar, la integral original, por el conjugado del denominador se simplifica muchos cálculos.

Integrales del tipo: $\boxed{\displaystyle\int x^m\,(a + bx^n)^p\,dx}$

Esta clase de integrales se denominan **binomiales**. Las constantes m, n, p son números racionales, a y b números reales. Esta integral se puede convertir a racional en los siguientes casos:

1. Si p es entero el cálculo es más o menos inmediato.
2. Si $\dfrac{m+1}{n}$ es entero, entonces $a+bx^n = z^k$, k es el denominador de p.
3. Si $\dfrac{m+1}{n} + p$ es entero, entonces $ax^{-n} + b = z^k$.

Ejemplo 1.13.6. *Resolvemos* $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$

Estamos en presencia de la forma original. Se observa que $m = 0$, $a = b = 1$, $n = 4$, $p = -\frac{1}{4}$. Como p no es entero tenemos:

1. $\dfrac{m+1}{n} = \dfrac{0+1}{4} \notin \mathbb{Z}$
2. $\dfrac{m+1}{n} + p = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4} = 0 \in \mathbb{Z}$

Esto quiere decir que la sustitución adecuada es $1 + x^{-4} = z^4$, de donde $\sqrt[4]{1+x^4} = xz$. De aquí que $dx = -\dfrac{z^3\,dz}{x^{-5}}$. Se tiene

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = -\int \frac{z^3\,du}{x^{-5}\cdot xz} = -\int \frac{z^2\,dz}{z^4-1}$$

Al descomponer en fracciones parciales

$$\frac{z^2}{z^4-1} = \frac{z^2}{(z^2-1)(z^2+1)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+1} + \frac{Cz+D}{z^2+1}$$

El valor de las constantes es: $A = \frac{1}{4}$, $B = -\frac{1}{4}$, $D = \frac{1}{2}$, $C = 0$. Por tanto,

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} &= \frac{1}{4}\int \frac{dz}{z-1} - \frac{1}{4}\int \frac{dz}{z^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z^2+1} \\
&= \frac{1}{4}\ln(z-1) - \frac{1}{4}\ln(z+1) + \frac{1}{2}\,arctg\,z + c \\
&= \frac{1}{4}\ln\left(\frac{z-1}{z+1}\right) + \frac{1}{2}\,arctg\,z + c \\
&= \frac{1}{4}\ln\left(\frac{\sqrt[4]{1+x^4}-x}{\sqrt[4]{1+x^4}+x}\right) + \frac{1}{2}\,arctg\,\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x} + c
\end{aligned}$$

Es interesante señalar que, la sustitución $z = x^n$, reduce este tipo de integrales a la forma

$$\boxed{\int (a+bz)^p\, z^q\, dz}$$

en donde $q = \dfrac{m+1}{n} - 1$. En esta nueva forma, considerar:

1. Si p es entero, entonces $u = z^{1/n}$, $q = \frac{m}{n}$
2. Si q es entero, entonces $u = (a + bz)^{1/n}$, $p = \frac{m}{n}$
3. Si $p + q$ es entero, entonces $u = \dfrac{1}{z}$ la reduce al caso anterior.

Ejemplo 1.13.7. *Hallemos* $\displaystyle\int (1 + 2x)^{1/2}\, x^{-2}\, dx$

En este caso tenemos, $a = 1, b = 2, m = 1, p = \frac{1}{2}, q = -2, n = 2$. De esta forma, estamos en el caso q entero. La sustitución es

$$z = (1 + 2x)^{1/2}$$

de la cual; $x = \frac{1}{2}(z^2 - 1),\ dx = z\,dz$. Reemplazando en la integral dada.

$$\begin{aligned}
\int (1 + 2x)^{1/2}\, x^{-2}\, dx &= \int z \cdot \left(\frac{z^2 - 1}{2}\right)^{-2} \cdot z\,dz \\
&= \int \frac{4z^2\,dz}{(z^2 - 1)^2}, \quad z = sec\,\theta \\
&= \int 4\,csc^3\,\theta\,d\theta, \quad dz = sec\,\theta\,tg\,\theta\,d\theta \\
&= -\frac{1}{2\,tg^2(x/2)} + 2\ln\ tg(x/2) + \frac{1}{2}tg(x/2) + c
\end{aligned}$$

Esto pone punto final al proceso de cálculo de integrales indefinidas. Es conveniente advertir que el proceso de "aprender a integrar" no culmina con este último ejemplo. Existen muchas y variadas integrales de gran complejidad y de difícil determinación de la función primitiva. Más aún, de las siguientes integrales, a pesar de saber con certeza que la primitiva existe, es imposible determinarla mediante un número finito de funciones elementales (con excepción de la tercera de ellas, llamada integral elíptica, cuya primitiva es calculable luego de un laborioso proceso).

$$\int e^{-x^2}\,dx\ ;\ \int \frac{sen\,x\,dx}{x}\ ;\ \int \sqrt{1 - k^2\,sen^2 x}\,dx\ ;\ \int \frac{dx}{\ln\,x}$$

Así como las integrales mencionadas, existen otras tanto o más difíciles, sólo se ha querido hacer un llamado de atención. Queda mucho por aprender del cálculo integral, hasta aquí se ha dado un gran paso, falta recorrer un largo camino. Es importante señalar que el uso actual de programas computacionales facilitan el proceso de calcular integrales, y en particular, la Internet nos ofrece el **Integrator** con el cual puedes verificar "on line" si tus cálculos de integrales están correctos. La página indicada tiene la dirección http://integrals.wolfram.com.

1.14. Problemas Propuestos

1. Dada la función $y = f(x)$, hallar incremento $\triangle y$, y diferencial dy

$$a)\ y = x^3 \quad b)\ y = 4x^2 - 3x + 1 \quad c)\ y = \sqrt{x} \quad d)\ y = \tfrac{1}{x^2+1} \quad e)\ y = 2x^3 + 3x^2$$

2. Dados los valores de x, y, $\triangle x$, hallar los valores de $\triangle y$, y dy

   a) $y = \dfrac{1}{x^2}, x = -3, \triangle x = -0{,}1$

   b) $y = x^3 + 1, x = 1, \triangle x = -0{,}5$

   c) $y = \dfrac{1}{x^2}, x = 2, \triangle x = 0{,}01$

   d) $y = x^2 - 3x, x = 2, \triangle x = 0{,}03$

3. Usar diferenciales para encontrar un valor aproximado de

$$a)\quad \sqrt{37{,}5} \qquad b)\quad \sqrt[3]{7{,}5} \qquad c)\quad \sqrt[4]{82}$$

4. Hallar dy para las siguientes funciones:

$$a)\quad y = (3x^2 - 2x + 1)^3 \quad b)\quad y = \sqrt{4 - x^4} \quad c)\quad y = \tfrac{3x}{x^2+2} \quad d)\quad y = \left(\tfrac{x-1}{x+1}\right)^{1/2}$$

5. Encontrar el crecimiento aproximado del área de una burbúja de jabón, si su radio varía de 3 a 3.025 pulgadas

6. La altura de un cilindro circular recto es de 10 pulgadas. Si el radio de la base cambia de 2 a 2.06 pulgadas, calcular, usando diferenciales, el cambio aproximado en el volumen del cilindro.

7. El radio de un globo esférico crece de 8 a 8.1 metros. Hallar el cambio aproximado en el volumen del globo.

8. Hallar la función $f(x)$ más general que satisfaga:

$$a)\quad f'(x) = \sqrt{5x^3} \quad b)\quad f''(x) = 15\sqrt{x} \quad c)\quad f''(x) = 12x - 6$$

9. Hallar la ecuación de la curva cuya pendiente en cualquier punto de ella es igual al cuadrado de la abscisa de tal punto, sabiendo que pasa por el punto $(2, 1)$.

10. Hallar la ecuación de la curva que pasa por el origen, y cuya pendiente en cualquier punto es tres veces la distancia de tal punto a la recta $x = -2$.

11. Hallar la ecuación de la curva cuya pendiente es 4 veces la pendiente de la curva $6y = 2x^3 - 3x^2 - 36x$ para cada valor de x, y cuyo intercepto con el eje y es 5.

12. Calcular mediante el método de sustitución:

a) $\displaystyle\int \frac{sec^2(t^{-2})\,dt}{t^3}$ g) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{3x^2+5}$ m) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{cos^2 x^2}$

b) $\displaystyle\int \frac{sen\,\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}}\,dx$ h) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{arcsen\,x}{1-x^2}}\,dx$ n) $\displaystyle\int x\,e^{-(1+x^2)}\,dx$

c) $\displaystyle\int sen^5 3x\,cos\,3x\,dx$ i) $\displaystyle\int (1+\ln\,x)\,x^x\,dx$ ñ) $\displaystyle\int x^2\,\sqrt{5+7x^3}\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{\ln\,y^3}{y}\,dy$ j) $\displaystyle\int \frac{5e^x\,dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$ o) $\displaystyle\int \frac{a^x\,dx}{1+a^{2x}}$

e) $\displaystyle\int \frac{(x-1)\,dx}{2x^2-4x+11}$ k) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}+\ln\,x}{x}\,dx$ p) $\displaystyle\int \frac{sen(\ln\,x)\,dx}{x}$

f) $\displaystyle\int cos\,\frac{x}{2}\cdot sen\,\frac{x}{2}\,dx$ l) $\displaystyle\int \frac{(senx+cosx)dx}{(senx-cosx)^{1/3}}$ q) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}\,dx}{\sqrt{x}}$

13. Calcular las integrales de la forma $\displaystyle\int sen^m x\,cos^n x\,dx$

a) $\displaystyle\int sen^3 x\,cos^4 x\,dx$ d) $\displaystyle\int sen^7 x\,cos^3 x\,dx$ g) $\displaystyle\int sen^5 x\,dx$

b) $\displaystyle\int sen\,2x\,cos^3 x\,dx$ e) $\displaystyle\int sen^3 x\,sec^2 x\,dx$ h) $\displaystyle\int sen^2 x\,cos^3 x\,dx$

c) $\displaystyle\int sen\,2x\,cos\,x\,tg^2 x\,dx$ f) $\displaystyle\int tg^2 x\,sen^2 x\,cos^3 x\,dx$

14. Calcular las integrales de la forma $\displaystyle\int tg^m x\,sec^n x\,dx$

a) $\displaystyle\int sec^6 x\,dx$ c) $\displaystyle\int sec^3 x\,tg^3 x\,dx$ e) $\displaystyle\int sec^4 x\,sen\,2x\,dx$

b) $\displaystyle\int tg^4 2x\,sec^4 2x\,dx$ d) $\displaystyle\int sec^4 x\,tg^3 x\,dx$ f) $\displaystyle\int sec^6 x\,\sqrt{tg\,x}\,dx$

15. Calcular las integrales de la forma $\displaystyle\int ctg^m\,x\,csc^n\,x\,dx$

a) $\displaystyle\int csc^6 x\,dx$ b) $\displaystyle\int ctg^3 x\,csc^3 x\,dx$ c) $\displaystyle\int ctg\,3x\,csc^3 3x\,dx$

16. Calcular las siguientes integrales de senos y cosenos:

a) $\displaystyle\int sen^2 x\,cos^2 x dx$ d) $\displaystyle\int (1+sen\,2x)^2 dx$ g) $\displaystyle\int sen\,8x\,sen\,3x dx$

b) $\displaystyle\int sen^4 x\,cos^2 x dx$ e) $\displaystyle\int sen^2 x\,cos^4 x dx$ h) $\displaystyle\int cos\,4x\,cos\,5x dx$

c) $\displaystyle\int (sen\,x+cos\,x)^2 dx$ f) $\displaystyle\int sen\,6x\,cos\,4x dx$

17. Demostrar que $\displaystyle\int tg^n\,x\,dx = \frac{1}{n-1}\,tg^{n-1}\,x - \int tg^{n-2}\,x\,dx,\ n \neq 1$

AYUDA $\triangleright$: $tg^n x = tg^{n-2}x \cdot tg^2 x$

18. Usar el resultado del problema 17 para hallar:

$a)\ \int tg^4 x\, dx \qquad b)\ \int tg^5 x\, dx \qquad c)\ \int tg^6 x\, dx$

19. Emplear sustituciones trigonométricas para calcular:

$$a)\ \int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \qquad b)\ \int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2}\, dx \qquad c)\ \int \frac{t^2\, dt}{(t^2+16)^{3/2}} \qquad d)\ \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$e)\ \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+9}} \qquad f)\ \int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{8+2x-x^2}} \qquad g)\ \int \frac{(3x-2)\, dx}{x^2+4x+13} \qquad h)\ \int \frac{(4x+5)\, dx}{x^2-6x+14}$$

$$i)\ \int \frac{\sqrt{25-x^2}}{x}\, dx \qquad j)\ \int \frac{sec^2 x\, dx}{(4-tg^2 x)^{3/2}} \qquad l)\ \int \frac{e^{-x}\, dx}{(9e^{-2x}+1)^{3/2}} \qquad k)\ \int \frac{dx}{(4x^2-9)^{3/2}}$$

20. Emplear integración por partes para calcular:

$$a)\ \int arctg\, x\, dx \qquad b)\ \int x\, sen\, x\, dx \qquad c)\ \int e^x\, sen\, x\, dx \qquad d)\ \int \ln\, x\, dx \qquad e)\ \int x \cdot sec^2\, x\, dx$$

$$f)\ \int sen(\ln\, x)\, dx \qquad g)\ \int x \cdot e^{-x}\, dx \qquad h)\ \int x \cdot 2^{-2x}\, dx \qquad i)\ \int 3^x \cdot cos\, x\, dx \qquad j)\ \int x\, \ln\, x\, dx$$

$$k)\ \int x^2 \cdot e^x\, dx \qquad l)\ \int arcsen\, x\, dx \qquad m)\ \int \frac{x\, dx}{sen^2\, x} \qquad n)\ \int \frac{x^3\, dx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad o)\ \int x \cdot arctg\, x\, dx$$

21. Demostrar que:

$$a)\ \int cos^n x\, dx = \frac{1}{n} \cdot cos^{n-1}\, x \cdot sen\, x + \frac{n-1}{n} \int cos^{n-2}\, x\, dx$$

$$b)\ \int sec^n\, x\, dx = \frac{sen\, x}{(n-1)cos^{n-1}\, x} + \frac{n-2}{n-1} \int sec^{n-2}\, x\, dx$$

$$c)\ \int x^n\, e^x\, dx = x^n e^x - n \int x^{n-1}\, e^x\, dx$$

$$d)\ \int x^n\, sen\, x\, dx = -x^n\, cos\, x + n \int x^{n-1}\, cos\, x\, dx$$

$$e)\ \int \sqrt{1-x^2}\, dx = x\, \sqrt{1-x^2} + \int x^2\, (1-x^2)^{-1/2}\, dx$$

22. Usar fracciones parciales para calcular las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \frac{(2x+1)\,dx}{(x+1)(x-2)}$ *c*) $\displaystyle\int \frac{5x^2-3x+1}{x^3+x}\,dx$ *e*) $\displaystyle\int \frac{(2x+3)}{2x^2-5x-3}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{x^2+3x-2}{2x^3-3x^2-2x}\,dx$ *d*) $\displaystyle\int \frac{2x^3+x^2-7x+20}{(x^2-4)^2}\,dx$ *f*) $\displaystyle\int \frac{2x^3+9x^2-5x-18}{x^3+2x^2-x-2}\,dx$

23. Usar la sustitución $t=(a+bx^n)^{1/q}$ para hallar

    a) $\displaystyle\int x^3\,(9+x^2)^{1/4}\,dx$ *b*) $\displaystyle\int x^5\,(9+x^2)^{-1/3}\,dx$ *c*) $\displaystyle\int x\,(4+x)^{1/2}\,dx$

24. Usar la sustitución $tg\,\dfrac{x}{2}=t$, para hallar:

    a) $\displaystyle\int \frac{dx}{3+5cos\,x}$ *b*) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+sen\,x}$ *c*) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+sen\,x+cos\,x}$ *d*) $\displaystyle\int \frac{dx}{tg\,x-sen\,x}$

25. Usar la sustitución $t=e^x$ para calcular:

    a) $\displaystyle\int \frac{dx}{1-e^x}$ *b*) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x-e^{-x}}$ *c*) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$ *d*) $\displaystyle\int \frac{e^x\,dx}{e^{2x}-16}$

26. Usar el método más conveniente para calcular:

    a) $\displaystyle\int \sqrt{x^2-9}\,dx$ *b*) $\displaystyle\int \frac{(3-4x)\,dx}{(1-2\sqrt{x})^2}$ *c*) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^{2/3}+x^{1/3})^2}$ *d*) $\displaystyle\int \frac{dx}{cos^2\,3x}$

    e) $\displaystyle\int \frac{x arctg\,x\,dx}{(1+x^2)^{1/2}}$ *f*) $\displaystyle\int x^2\,\ln\sqrt{1-x}\,dx$ *g*) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{cos^2 3x}$ *h*) $\displaystyle\int \frac{(x-5)\,dx}{x^2-2x+2}$

    i) $\displaystyle\int \frac{(1+\sqrt{x+1})^2}{x^3}\,dx$ *j*) $\displaystyle\int |x|\,dx$ *k*) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{3-x^2}}{x}\,dx$ *l*) $\displaystyle\int arcsen\,\sqrt{x}\,dx$

    m) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+1}$ *n*) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}\,dx}{(1+e^x)^{1/4}}$ *o*) $\displaystyle\int \frac{arctg\,x\,dx}{x^2}$ *p*) $\displaystyle\int \frac{sen^2 x\,dx}{cos^6\,x}$

    q) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4(x^2-1)^{1/2}}$ *r*) $\displaystyle\int \frac{e^x\,dx}{e^{2x}-6e^x+13}$ *s*) $\displaystyle\int \frac{1-\sqrt[3]{2x}}{\sqrt{2x}}\,dx$ *t*) $\displaystyle\int \frac{dx}{sen\,x\,sen\,2x}$

    u) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x^2-x+1)^3}$ *v*) $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{x^2+x-6}$ *w*) $\displaystyle\int \frac{2^x\,dx}{1-4^x}$ *x*) $\displaystyle\int \frac{(8x^3+7)\,dx}{(x+1)(2x+1)^3}$

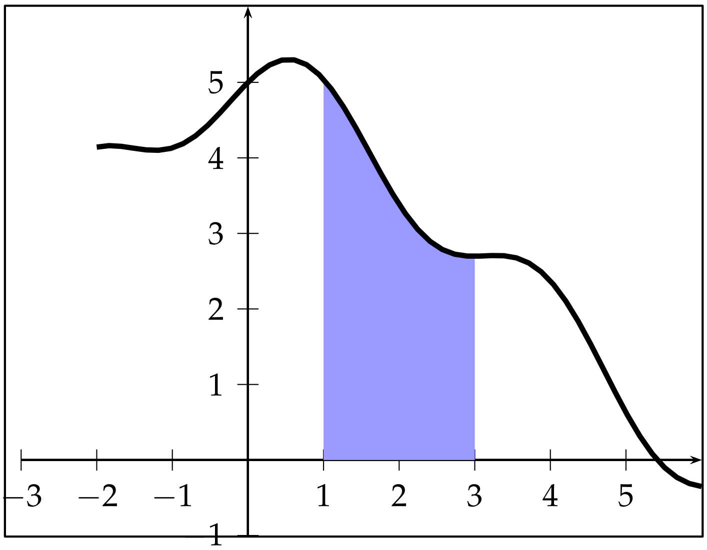
27. De una función f se sabe que $f(2)=3$ y que en cada punto $(x,f(x))$ de su gráfico, la recta tangente existe y tiene pendiente $3x+2$. Verificar que $f(x)=\frac{3x^2}{2}+2x-7$.

28. Determinar la función que describe el movimiento rectilíneo de una partícula si se sabe que su velocidad en cada instante t es t^4+2t y que $x(0)=5$. Resp. $x(t)=\frac{t^5}{5}+t^2+5$.

.

He aprendido que un hombre
sólo tiene derecho a mirar a
otro hacia abajo cuando ha de
ayudarle a levantarse
Gabriel García Márquez

CAPÍTULO 2
INTEGRAL DEFINIDA



CAPÍTULO 2

INTEGRAL DEFINIDA

2.1. El problema del área

El origen del Cálculo Integral se remonta a la época de Arquímedes (287-212 a.c.), matemático griego de la antiguedad, el mismo de la famosa frase ¡Eureka! que obtuvo resultados tan importantes como el valor del área encerrada por un segmento parabólico. ¿Cómo lo hizo?, de seguro te va a parecer fácil, pero ubícate en el año que se le ocurrió. Te cuento. El estableció el hoy llamado *método de exhaución* que consiste en:

"*inscribir y circunscribir el recinto considerado en regiones poligonales cada vez más próximas a él, tendiendo a llenarlo y cuyas áreas se puedan calcular fácilmente. Con esto se obtienen valores mayores y menores que acotan el área que se desea calcular. La precisión en el valor del área dependerá de la cantidad de regiones que se usen*"

La idea de la integral definida es una generalización de este proceso. El método arquimediano de aproximación ha adquirido gran importancia, ya que el cálculo de las integrales definidas puede hacerse con los computadores actuales con la precisión deseada.

En relación con el concepto de área, lo primero que cabe preguntarse es por el significado de área de una región. Una respuesta simple es que el área es una medida del tamaño de la región. Siendo así, el estudio del área debe comenzar por determinar el tamaño de algunas regiones de forma más simple y luego generalizarlo a regiones más complicadas. Usualmente, la noción de área comienza con la idea de que un rectángulo de base x, y altura y, tiene área $A = x \cdot y$. A partir de esta idea básica se puede deducir el área de un triángulo rectángulo. Luego, por geometría elemental se obtiene el área de cualquier triángulo. Más aún, como todo polígono puede descomponerse en triángulos, el área de un polígono no será otra cosa que la suma de las áreas de los triángulos que lo forman.

Nos proponemos definir el área de una región limitada por las rectas $x = a$, $x = b$, el eje x, y la curva de ecuación $y = f(x)$. La figura 2.1 muestra un recinto tipo. Una región de esta forma se anota

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ x \in [a,b],\ 0 \leq y \leq f(x)\}$$

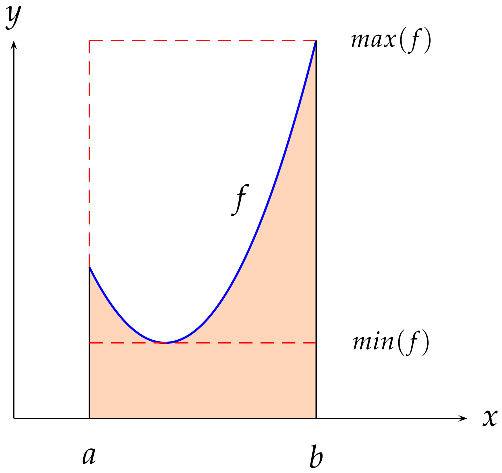


figura 2.1

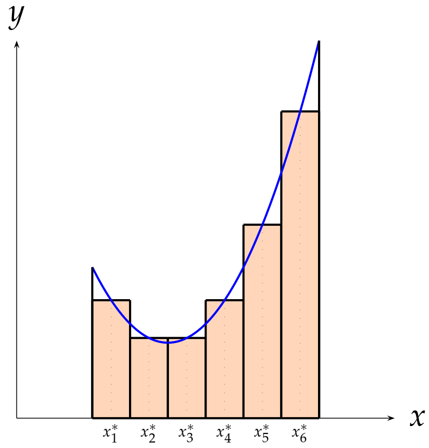


figura 2.2

Una primera aproximación al valor de área es considerar los valores máximos y mínimos de la función f, ya que entonces

$$(b-a) \cdot \min f \leq \ \mathit{Area} \ \leq (b-a) \cdot \max f$$

2.1.1. La idea principal

La idea principal es dividir la región dada en una serie de rectángulos. Por conveniencia, cada rectángulo tendrá el mismo ancho, que denotamos por Δx, además, cada rectángulo tendrá su base sobre el eje x. La altura de cada rectángulo estará determinada por el valor de la función. Así por ejemplo, en la figura 2.2 hemos dividido la región en 6 rectángulos, la altura está determinada por el valor de la función en cada punto medio (x_i^*) de la base del rectángulo (línea punteada). En general, si se considera el punto x_i en el $i-$ésimo rectángulo, entonces la altura es $f(x_i)$. El ancho de cada rectángulo está dado por $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, esto es, la longitud del intervalo $[a, b]$ dividido por el número de rectángulos. En el caso de la figura 2.2

$$\Delta x = \frac{b-a}{6}$$

Como la altura del $i-$ésimo rectángulo es $f(x_i^*)$, entonces su área es

$$f(x_i^*)\Delta x$$

Ahora, la suma de las áreas de todos aquellos rectángulos es

$$f(x_1^*)\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\Delta x$$

y aproximan el área de la región bajo f. Esta suma es llamada **Suma de Riemann** y denotamos tal suma por $\mathcal{R}(f, n, P)$, donde $P = \{x_1^*, \ldots, x_n^*\}$ es el conjunto de puntos seleccionados. Así

$$\mathcal{R}(f, n, P) = f(x_1^*)\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\Delta x$$

2.1.2. Puntos: izquierdo, derecho y medio

Existen muchas formas de seleccionar los puntos del conjunto P para cada subdivisión. Las más comunes son:

- Si elegimos los puntos medios, denotamos la suma de Riemann por $\mathcal{R}(f, n, P_m)$.
- Si elegimos puntos izquierdos, denotamos la suma de Riemann por $\mathcal{R}(f, n, P_i)$.
- Si elegimos puntos derechos, denotamos la suma de Riemann por $\mathcal{R}(f, n, P_d)$.

Ejemplo 2.1.1. *Sea $f(x) = x^2 + 1$ sobre el intervalo $[0, 2]$. Hallemos la suma de Riemann para f usando $n = 4$ subdivisiones y eligiendo los puntos izquierdos de cada subdivisión.*

Nótese que estaremos computando $\mathcal{R}(f, 4, P_i)$. En este caso

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{4} = 0{,}5$$

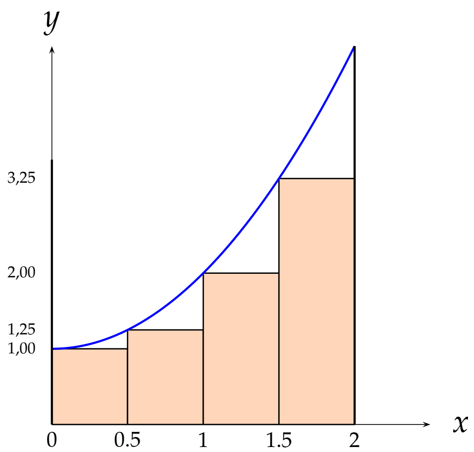
las subdivisiones son $[0; 0{,}5]$ $[0{,}5; 1]$ $[1; 1{,}5]$ $[1{,}5; 2]$ y los puntos izquierdos $x_1^* = 0$, $x_2^* = 0{,}5$, $x_3^* = 1$, $x_4^* = 1{,}5$. La tabla siguiente contiene los valores de f en cada uno de esos puntos

x	0	0,5	1	1,5
x^2+1	1	1,25	2	3,25

Con esto obtenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(f, 4, P_i) &= f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + f(x_3^*)\Delta x + f(x_4^*)\Delta x \\ &= 1(0{,}5) + 1{,}25(0{,}5) + 2(0{,}5) + 3{,}25(0{,}5) = 3{,}75 \end{aligned}$$

La figura 2.3 ilustra la suma izquierda de Riemann



$\boxed{\mathcal{R}(f, 4, P_i) = 3{,}75}$ figura 2.3

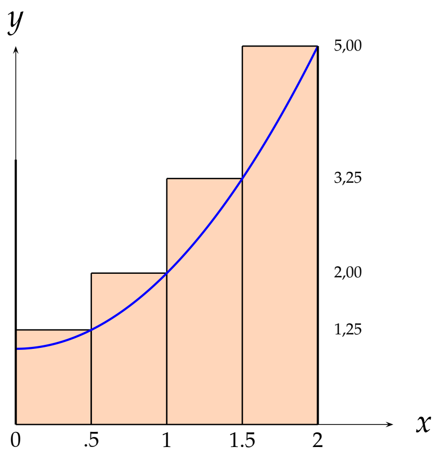


figura 2.4 $\boxed{\mathcal{R}(f, 4, P_d) = 5{,}75}$

Ejemplo 2.1.2. *Para la función $f(x) = x^2 + 1$ sobre el intervalo $[0,2]$ hallemos $\mathcal{R}(f, 4, P_d)$*

Es claro que se pide la suma derecha de Riemann (figura 2.4). Las subdivisiones son

$$[0; 0{,}5]\ [0{,}5; 1]\ [1; 1{,}5]\ [1{,}5; 2]$$

los puntos seleccionados corresponden a

$$x_1^* = 0{,}5 \quad x_2^* = 1 \quad x_3^* = 1{,}5 \quad x_4^* = 2$$

La tabla siguiente muestra los valores de f en esos puntos

x	0,5	1	1,5	2
x^2+1	1,25	2	3,25	5

Se obtiene la suma de Riemann

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(f, 4, P_d) &= f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + f(x_3^*)\Delta x + f(x_4^*)\Delta x \\ &= 1{,}25(0{,}5) + 2(0{,}5) + 3{,}25(0{,}5) + 5(0{,}5) = 5{,}75 \end{aligned}$$

2.1.3. Un proceso de paso al límite

Los ejemplos anteriores ilustran que la suma de Riemann depende del modo que se seleccionen los puntos en la subdivisión. Sin embargo, para un número grande de subdivisiones las sumas izquierdas y derechas de Riemann tienden a coincidir. En la tabla siguiente tenemos calculadas las sumas izquierda y derecha de Riemann para valores grandes de n.

n	5	10	100	1000	10000	100000
$R(f, n, P_i)$	3.92	4.28	4.6268	4.6627	4.6662	4.6666
$R(f, n, P_d)$	5.52	5.08	4.7068	4.6707	4.6670	4.6667

Una conjetura razonable es que las sumas izquierda y derecha de Riemann para $x^2 + 1$ sobre $[0,2]$ convergen a $4.\overline{6} = \frac{14}{3}$. Podemos afirmar que, si tomamos el límite de aquellas sumas de Riemann y este límite existe, entonces representa el área de la región. Esto es,

$$\boxed{A = \lim_{n\to\infty} \mathcal{R}(f, n, P)}$$

Ejemplo 2.1.3. *Se considera la región acotada por la curva $y = x^2 + 2$, $0 \leq x \leq 4$, y el eje x.*

- Una primera aproximación es usar el valor máximo de f que está en el extremo derecho del intervalo ($M = 18$) y el mínimo de f que está en el extremo izquierdo ($m = 2$). Con ello tenemos el área acotada en la forma

$$4 \cdot 2 = 8 \leq \text{ Area } \leq 4 \cdot 18 = 72$$

- Mejoramos la aproximación anterior usando la partición $P = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ de $[0, 4]$.

La función es creciente en el intervalo $[0, 4]$, de modo que los puntos izquierdos generan los rectángulos inscritos que muestra la figura 2.5, y los puntos derechos los rectángulos circunscritos de la figura 2.6. Con los primeros se obtiene una **suma inferior** y con los segundos una **suma superior**.

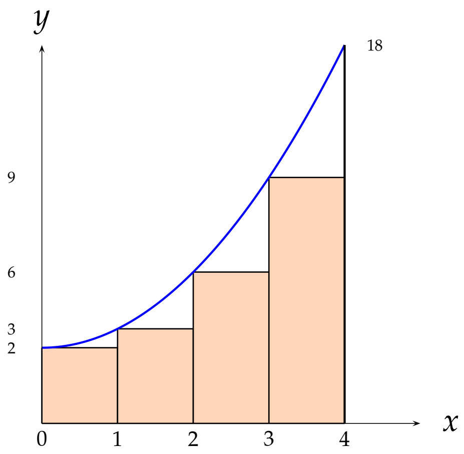


figura 2.5

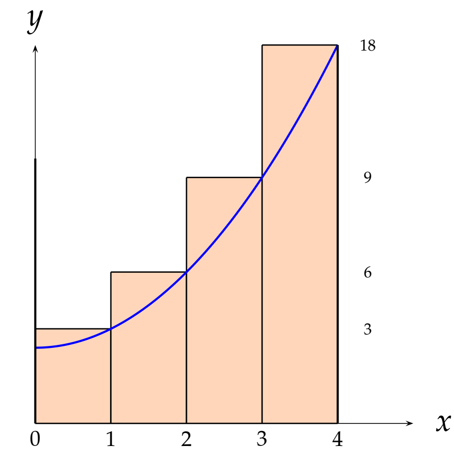


figura 2.6

La partición $P = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ genera 4 subintervalos I_1, I_2, I_3, e I_4, en los cuales se tiene:

- $I_1 = [0, 1] \Longrightarrow m_1 = 2,\ M_1 = 3$
- $I_2 = [1, 2] \Longrightarrow m_2 = 3,\ M_2 = 6$
- $I_3 = [2, 3] \Longrightarrow m_3 = 6,\ M_3 = 11$
- $I_4 = [3, 4] \Longrightarrow m_4 = 11,\ M_4 = 18$

Con estos datos se forman las sumas de puntos izquierdos y derechos, respectivamente:

$$\mathcal{R}(f, 4, P_i) = m_1\,\Delta I_1 + m_2\,\Delta I_2 + m_3\,\Delta I_3 + m_4\,\Delta I_4 = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 6 \cdot 1 + 11 \cdot 1 = 22$$

$$\mathcal{R}(f, 4, P_d) = M_1\,\Delta I_1 + M_2\,\Delta I_2 + M_3\,\Delta I_3 + M_4\,\Delta I_4 = 3 \cdot 1 + 6 \cdot 1 + 11 \cdot 1 + 18 \cdot 1 = 38$$

De esta forma,

$$22 \leq \ \text{A(S)} \ \leq 38$$

- Ahora mejoramos esta aproximación agregando los puntos $\frac{1}{2}$ y $\frac{5}{2}$ a la partición.

Con esto se obtiene la nueva partición $P' = \{0, \frac{1}{2}, 1, 2, \frac{5}{2}, 3, 4\}$, que es un refinamiento de P. Con esta nueva partición la cantidad de intervalos crece a 6, en cada uno de los cuales los valores máximos y mínimos son:

- $I_1 = [0, \dfrac{1}{2}] \Longrightarrow m_1 = 2,\ M_1 = 2 + \dfrac{1}{4}$
- $I_2 = [\dfrac{1}{2}, 1] \Longrightarrow m_2 = \dfrac{1}{4},\ M_2 = 3$

- $I_3 = [1,2] \Longrightarrow m_3 = 3,\ M_3 = 61$
- $I_4 = [2, \frac{5}{2}] \Longrightarrow m_4 = 61,\ M_4 = 2 + \dfrac{25}{4}$
- $I_5 = [\frac{5}{2}, 3] \Longrightarrow m_5 = 2 + \dfrac{25}{4},\ M_5 = 11$
- $I_6 = [3,4] \Longrightarrow m_6 = 11,\ M_2 = 18$

Con estos datos, las sumas de puntos izquierdos y derechos son:

- $\mathcal{R}(f, 6, P_i) = \dfrac{1}{2} \cdot 2 + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{9}{4} + 1 \cdot 3 + \dfrac{1}{2} \cdot 6 + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{33}{4} + 1 \cdot 11 = 23,25$

- $\mathcal{R}(f, 6, P_d) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{9}{4} + \dfrac{1}{2} \cdot 3 + 1 \cdot 6 + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{33}{4} + \dfrac{1}{2} \cdot 11 + 1 \cdot 18 = 37,625$

De esta forma,

$$23,25 \le A(S) \le 37,625$$

Es claro que al agregar una mayor cantidad de puntos las sumas obtenidas con puntos izquierdos crecen y las de puntos derechos decrecen.

- La media aritmética de las sumas parciales mejora la aproximación. En efecto,

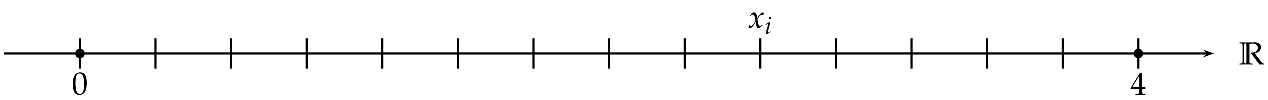
$$A(S) \sim \frac{1}{2}\,(23,25 + 37,625) = 30,4375$$

- Hacemos ahora uso del límite de la suma de Riemann.

Lo primero es dividir el intervalo dado en n subintervalos de igual longitud. Si se tiene el $[0,4]$, entonces cada subintervalo tiene longitud

$$\Delta x = \frac{4}{n}$$

La recta real muestra el intervalo particionado



El trabajo consiste en determinar que forma tiene cualquier elemento x_i que se encuentre en esta partición. Lo haremos paso a paso para fijar bien la idea. Si la longitud de cada intervalo de la partición es $\frac{4}{n}$, entonces, partiendo del 0 el siguiente punto de la partición es $\frac{4}{n}$. Estamos en $\frac{4}{n}$, al dar el próximo paso llegamos a $\frac{8}{n}$, siguiendo de este modo, la secuencia que se obtiene es

$$0, \frac{4}{n}, \frac{8}{n}, \frac{12}{n}, \cdots$$

Escribiendo esto mismo usando el "paso" $\frac{4}{n}$

$$\{0, \frac{4}{n}, 2 \cdot \frac{4}{n}, 3 \cdot \frac{4}{n} \cdots\}$$

Ahora, es claro que

$$x_i = \frac{4i}{n}$$

Falta sólo saber como "corre" el índice i. Si se toma $i = 0$, se están eligiendo puntos izquierdos, lo que hace que se tenga

$$0 \leq i \leq n - 1$$

Si se toma $i = 1$, entonces los puntos son derechos y se tiene

$$1 \leq i \leq n$$

El límite de la suma de Riemann que proporciona el resultado exacto del área es

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, \Delta x$$

Esta es la suma de Riemann de puntos derechos. Veamos su valor.

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, \Delta x = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^2 + 2 \right) \cdot \frac{4}{n}$$

A continuación se reemplaza el x_i en la sumatoria

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{16i^2}{n^2} + 2 \right) \cdot \frac{4}{n}$$

luego se separa en dos sumatorias

$$A = \lim_{n \to \infty} \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{16i^2}{n^2} \cdot \frac{4}{n} + \sum_{i=1}^{n} 2 \cdot \frac{4}{n} \right]$$

Como el índice de la sumatoria es i,

$$A = \lim_{n \to \infty} \frac{64}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 + \lim_{n \to \infty} \frac{8}{n} \sum_{i=1}^{n} 1$$

Ahora se hace uso de las dos siguientes propiedades

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{y} \quad \sum_{i=k}^{n} 1 = (n - k + 1) \cdot 1$$

Con esto se tiene

$$A = \lim_{n \to \infty} \frac{64}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \lim_{n \to \infty} \frac{8}{n} \cdot n$$

se sigue que

$$A = \frac{88}{3}$$

2.2. Conceptos básicos

Vamos a repasar los conceptos y hechos encontrados, formularlos con mayor exactitud y profundizarlos.

Definición 2.2.1.

1. *Se llama* **partición** *del intervalo* $[a,b]$ *a cualquier conjunto finito de puntos de la forma*

$$P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$$

2. *Toda partición* P_1 *del intervalo* $[a,b]$ *tal que* $P \subset P_1$ *se llama* **refinamiento** *de* P

Ejemplo 2.2.2. *Los conjuntos* $\{0,1\}$, $\{0,\frac{1}{2},1\}$, $\{0,\frac{1}{4},\frac{1}{2},1\}$, $\{0,\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{3}{4},1\}$ *son particiones del intervalo* $[0,1]$*. Además, todas ellas son refinamiento de* $\{0,1\}$*. Del mismo modo, como a cada una de las particiones se fue agregando puntos, cada partición siguiente es refinamiento de la anterior. Por otra parte, los conjuntos* $\{0,1,2\}$ *y* $\{0,\frac{1}{2},\frac{1}{4},1\}$ **no** *son particiones de* $[0,1]$*. El primero por que aparece el* 2 *que no tiene nada que hacer allí, y el segundo, por la sencilla razón del orden, no puede* $\frac{1}{2}$ *anteceder en una partición al* $\frac{1}{4}$*.*

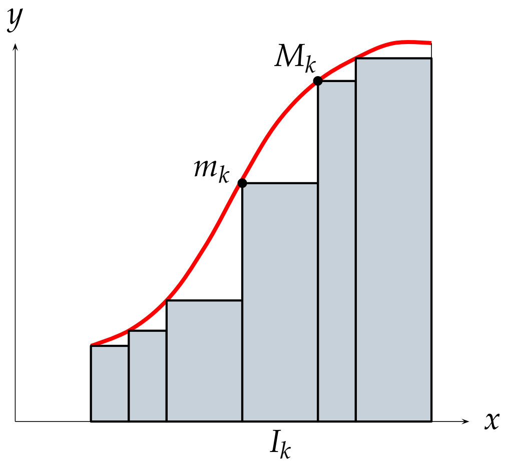
El simbolísmo que emplearemos es el siguiente:

- $I_k = \{x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$ representa el k - ésimo intervalo de la partición
- $\Delta I_k = x_k - x_{k-1}$, es la longitud del intervalo I_k
- $M_k = \sup\ f(x), x \in I_k$, es el supremo de f en el intervalo I_k
- $m_k = \inf\ f(x), x \in I_k$, es el ínfimo de f en el intervalo I_k
- $|P| = \max\ \Delta I_k$, es la norma de la partición P, que corresponde a la mayor longitud de los I_k

Definición 2.2.3. *Sean* f *función acotada sobre* $[a,b]$*,* P *partición de* $[a,b]$*. Se llaman suma* **superior** *e* **inferior** *de Riemann, respectivamente, de la función* f *referidas a la partición* P*, a las expresiones*

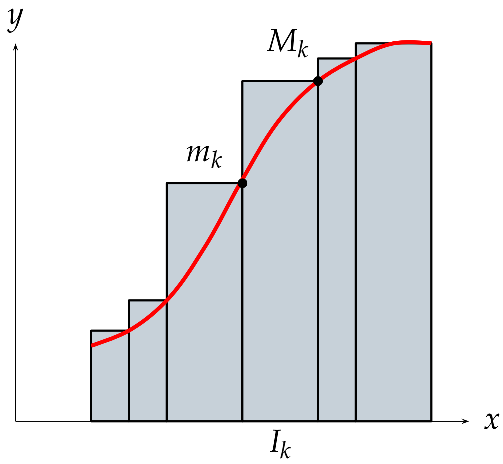
$$\mathcal{R}(S,f,P) = \sum_P M_k\,\Delta I_k \qquad y \qquad \mathcal{R}(s,f,P) = \sum_P m_k\,\Delta I_k$$

A partir de ahora simplificamos notación considerando $\mathcal{R}(S,f,P) = S(f,P)$ y $\mathcal{R}(s,f,P) = s(f,P)$. En el caso de las sumas superiores, los productos $M_k \cdot (x_k - x_{k-1})$ corresponden a las áreas de los rectángulos circunscritos. De esta forma, la suma superior corresponde a la suma de las áreas de los rectángulos circunscritos o exteriores (que contienen la curva). Las sumas inferiores son la suma de las áreas de los rectángulos inscritos o interiores (bajo la curva). La figura 2.7 muestra rectángulos inscritos y circunscritos.



rectángulos inscritos

figura 2.7



rectángulos circunscritos

- ☞ Si la función es creciente y se eligen puntos izquierdos, los rectángulo quedan "inscritos" a la región (figura 2.7)
- ☞ Si la función es creciente y se eligen puntos derechos, los rectángulo quedan "circunscritos" a la región (figura 2.7)
- ☞ La media aritmética de las sumas parciales es una buena aproximación al valor del área

Proposición 2.2.4. *Si f es una función acotada sobre $[a, b]$, entonces para cualquier partición P la sumas inferiores son menores o iguales que las superiores. Es decir,*

$$s(f, P) \leq S(f, P)$$

Demostración.

Sean m_k y M_k el ínfimo y el supremo de f sobre el intervalo $I_k = [x_{k-1}, x_k]$, entonces

$$\Delta I_k > 0\ ,\ M_k \geq m_k \Longrightarrow M_k \cdot \Delta I_k \geq m_k \cdot \Delta I_k$$

De aquí que

$$S(f, P) = \sum_P M_k \cdot \Delta I_k \geq \sum_P m_k \cdot \Delta I_k = s(f, P)$$

Proposición 2.2.5. *Sea f función acotada sobre $[a, b]$, M, m sus cotas superior e inferior. Se verifica que*

$$m(b-a) \leq s(f, P) \leq S(f, P) \leq M(b-a)$$

Demostración.
Como f está acotada, para cada $k = 1, 2, \cdots, n$ existen los correspondientes M_k y m_k tales que

$$m \leq m_k \leq M_k \leq M$$

Tomando en cuenta que $a < b \Longrightarrow (b-a) > 0$, entonces

$$m(b-a) \leq m_k(b-a) \leq M_k(b-a) \leq M(b-a)$$

Dado que $b - a = \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})$, entonces

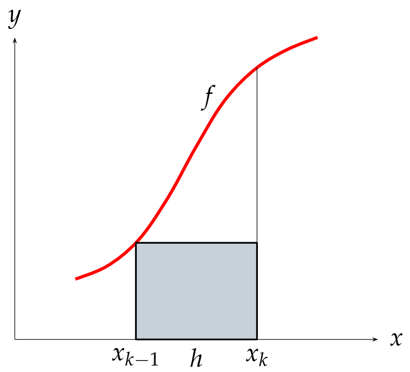
$$m \cdot \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})m_k \leq \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})M_k \leq M \cdot \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})$$

De donde

$$m(b-a) \leq s(f,P) \leq S(f,P) \leq M(b-a)$$

2.2.1. El refinamiento

Otro hecho relevante en este estudio sobre el área es observar que el valor del área mejora sustancialmente con un refinamiento. Es claro que un refinamiento **decrece** las sumas superiores e **incrementa** las sumas inferiores, en efecto, al aumentar el número de puntos en la partición las sumas inferiores aproximan mejor el área, por lo que existe un incremento en su valor. En la figura 2.8 se muestra que agregando un punto, existe una diferencia **en favor** del refinamiento. Del mismo modo, la figura 2.9 muestra que agregando un punto, las sumas superiores aproximan mejor el área de la región, y que en este caso existe una **pérdida** en el refinamiento respecto de la partición.



$s(f,P) \leq s(f,P')$

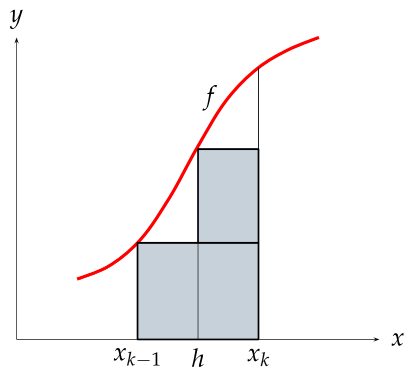
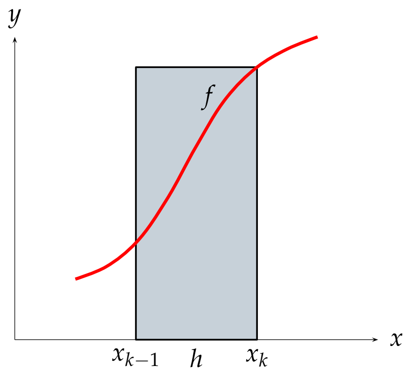


figura 2.8



$S(f,P) \geq S(f,P')$

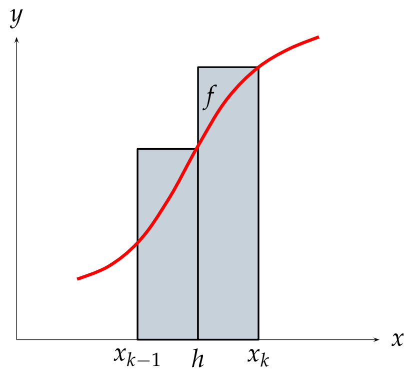


figura 2.9

Proposición 2.2.6. *Sea f función acotada sobre $[a,b]$ y sea P' refinamiento de la partición P de $[a,b]$, entonces*
$$s(f,P) \leq s(f,P') \quad y \quad S(f,P) \geq S(f,P')$$

Demostración

Es suficiente con probar que esta propiedad es cierta cuando P' tiene un punto más que P. Sea h el punto agregado a P en el intervalo $[x_{k-1}, x_k]$. Esto hace que este intervalo se descomponga en dos; $[x_{k-1}, h]$ y $[h, x_k]$. Para demostrar la propiedad con las sumas inferiores consideremos que m_{k_1} es el ínfimo sobre $[x_{k-1}, h]$ y m_{k_2} es el ínfimo sobre $[h, x_k]$. De esta forma se tiene que la relación entre el ínfimo de f sobre $[x_{k-1}, x_k]$ y estos nuevos ínfimos es
$$m_k \leq m_{k_1} \quad \text{y} \quad m_k \leq m_{k_2}$$
Luego,
$$s(f,P') - s(f,P) = [\, m_{k_1}(h - x_{k-1}) + m_{k_2}(x_k - h)\,] - m_k(x_k - x_{k-1})$$
$$= (m_{k_1} - m_k)(h - x_{k-1}) + (m_{k_2} - m_k)(x_k - h) \geq 0$$
Esto prueba que $s(f,P) \leq s(f,P')$.

Proposición 2.2.7. *Para dos particiones cualesquiera P_1 y P_2 de $[a,b]$ se satisface*
$$s(f,P_1) \leq S(f,P_2)$$

Demostración

La partición $P = P_1 \cup P_2$ es un refinamiento de P_1 y de P_2. Del resultado anterior se sigue que
$$s(f,P_1) \leq s(f,P) \leq S(f,P) \leq S(f,P_2)$$

2.3. Integral de Riemann

A partir de la proposición 2.2.5, a saber,
$$m(b-a) \leq s(f,P) \leq S(f,P) \leq M(b-a)$$
se observa que, si llamamos ζ al conjunto de **todas** las particiones del intervalo $[a,b]$, y la propiedad se está cumpliendo para cada partición P de ζ, entonces el conjunto de las sumas inferiores
$$\{s(f,P)/P \in \zeta\}$$
es un conjunto **acotado superiormente** por $M(b-a)$, y en consecuencia, debe tener **supremo**. De manera análoga, el conjunto de las sumas superiores
$$\{S(f,P)/P \in \zeta\}$$
es **acotado inferiormente** por $m(b-a)$, y debe tener ínfimo. Damos nombre y simbología propia a este supremo e ínfimo.

Definición 2.3.1. *Sea f función acotada sobre $[a,b]$. Se llaman integral* **inferior** *y* **superior** *de f sobre el intervalo $[a,b]$ a las expresiones:*

- $\underline{\int} f(x)\,dx = \sup\{s(f,P)/P \in \zeta\}$
- $\overline{\int} f(x)\,dx = \inf\{S(f,P)/P \in \zeta\}$

A partir de esta definición se tiene:

Proposición 2.3.2. *Sea f función acotada sobre $[a,b]$ y tal que $m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a,b]$, entonces*

$$m(b-a) \leq \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

Demostración

Como $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$ es el supremo del conjunto $\{s(f,P)/\ P \in \zeta\}$, de la proposición 2.2.5 se sigue que

$$m \cdot (b-a) \leq s(f,P) \leq \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

Análogamente, $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$ es el ínfimo de $\{S(f,P)/P \in \zeta\}$. Luego,

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq S(f,P) \leq M \cdot (b-a)$$

Probaremos ahora que

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

Para ello, sean P_1 y P_2 particiones de $[a,b]$. De acuerdo con la proposición 2.2.4 se tiene que

$$s(f,P_1) \leq S(f,P_2)$$

Luego, $\sup\{(s(f,P_1)\} \leq S(f,P_2)$. Esto es,

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq S(f,P_2)$$

Se sigue que

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \inf\{S(f,P_2)\}$$

Es decir,
$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$
En consecuencia
$$m(b-a) \leq \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq M(b-a)$$
Con lo hasta aquí obtenido conformamos un sólo resultado

Proposición 2.3.3. *Sea f función acotada sobre $[a,b]$ entonces*
$$m(b-a) \leq s(f,P) \leq \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq S(f,P) \leq M(b-a)$$

Aparentemente nos hemos desviado del problema original que era el área, pero no tanto, vamos a entrar a la siguiente definición, sobre la que se fundamenta la teoría de la integral, y posteriormente enlazamos con nuestro problema original.

Definición 2.3.4. *La función f acotada sobre $[a,b]$ es* **Riemann integrable** *sobre $[a,b]$ si satisface*
$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

El valor común de estas integrales se denomina **integral definida** o de **Riemann**. Se anota $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$. Esto es
$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$
El caso particular, $a=b$ corresponde al intervalo $[a,a]=a$, para el cual la única partición es $P=\{x_0=a,\ x_1=a\}$. Luego, si f está definida en $x=a$, se tiene
$$s(f,P) = S(f,P) = f(a)(x_1 - x_0)$$
De aquí que
$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = 0$$
Esto es
$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

Teorema 2.3.5. *Si f es integrable sobre $[a,b]$, y P es una partición de este intervalo, entonces*
$$m(b-a) \leq s(f,P) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq S(f,P) \leq M(b-a)$$

Este resultado es una consecuencia directa de la proposición 2.3.3 y de la definición 2.3.4. Lo enunciamos sólo con el fin de enfatizar que la integral definida es un **número** y que tenemos un medio para aproximarnos a él.

Ejemplo 2.3.6. *Hallar un valor aproximado de* $\int_1^5 \frac{1}{x}\, dx$*, usando la partición* $P = \{1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, 4, 5\}$

Los valores máximos y mínimos en cada subintervalos se muestran en un rectángulo

$$s(f,P) = \sum_{k=1}^{6} m_k\,(x_k - x_{k-1}) = \boxed{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \boxed{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} + \boxed{\frac{2}{5}} \cdot \frac{1}{2} + \boxed{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \boxed{\frac{1}{4}} \cdot 1 + \boxed{\frac{1}{5}} \cdot 1 = \frac{7}{5} \sim 1,4$$

$$S(f,P) = \sum_{k=1}^{6} M_k\,(x_k - x_{k-1}) = \boxed{1} \cdot \frac{1}{2} + \boxed{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \boxed{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} + \boxed{\frac{2}{5}} \cdot \frac{1}{2} + \boxed{\frac{1}{3}} \cdot 1 + \boxed{\frac{1}{4}} \cdot 1 = \frac{28}{15} \sim 1,86$$

De aquí que

$$\frac{7}{5} \;\leq\; \int_1^5 \frac{1}{x}\, dx \;\leq\; \frac{28}{15}$$

Un valor más aproximado de la integral es la media aritmética de las sumas superiores e inferiores. Es decir,

$$\int_1^5 \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2}\;[\,s(f,P) + S(f,P)\,] = \frac{49}{30} = 1,063$$

El error que se está cometiendo se puede calcular, ya que el teorema anterior asegura que

$$s(f,P) \leq \int_1^5 f(x)\, dx \leq S(f,P)$$

A partir de aquí, sumando $-\frac{1}{2}\,[\,s(f,P) + S(f,P)\,]$. Se tiene

$$\left| \int_1^5 \frac{1}{x} dx - \frac{1}{2}\Big(s(f,P) + S(f,P) \Big) \right| \leq \frac{1}{2}\;[\,S(f,P) - s(f,P)\,]$$

En consecuencia, el error cometido al considerar esta partición es menor o igual que $0,24$. El valor exacto de la integral es

$$\int_1^5 \frac{1}{x}\, dx = \ln 5$$

El siguiente resultado muestra que es posible aproximarse a un valor de la integral definida, por medio de las sumas superior e inferior, tanto como se quiera. Proporciona una condición de integrabilidad.

Teorema 2.3.7. *(condición de integrabilidad)*
Una función acotada f es **integrable** *sobre $[a,b]$ si y sólo si, $\forall \epsilon > 0$, existe partición P de $[a,b]$ tal que*

$$S(f,P) - s(f,P) < \epsilon$$

Demostración

$\rightarrow$) Si f es integrable, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

Como $\int_a^b f(x)\,dx$ es el supremo del conjunto $\{s(f,P)/P \in \zeta\}$ y también el ínfimo del conjunto $\{S(f,P)/P \in \zeta\}$, entonces existen particiones P_1 y P_2 tales que, $\forall \epsilon > 0$ se tiene

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,dx - s(f,P_1) &< \frac{\epsilon}{2} \\ S(f,P_2) - \int_a^b f(x)\,dx &< \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

Al sumar estas expresiones se obtiene

$$S(f,P_2) - s(f,P_1) < \epsilon$$

Al considerar que $P = P_1 \cup P_2$ es refinamiento, tanto de P_1 como de P_2, se concluye que

$$S(f,P) - s(f,P) \leq S(f,P_2) - s(f,P_1) < \epsilon$$

$\leftarrow$) Suponemos ahora que $\forall \epsilon > 0$, existe P partición de $[a,b]$ tal que

$$S(f,P) - s(f,P) < \epsilon$$

Usando la propiedad 2.3.3 tenemos

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq S(f,P) - s(f,P) < \epsilon$$

Esto es

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx < \epsilon$$

lo que asegura que

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

Así, $\int_a^b f(x)\,dx$ existe. En consecuencia, f es integrable sobre $[a,b]$

Ejemplo 2.3.8. *La función* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ racional} \\ 0, & x \text{ irracional} \end{cases}$

no es integrable. En efecto, consideremos la partición $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ de $[0,1]$. Sobre cualquier intervalo, el valor del ínfimo $m_k = 0$, y el valor del supremo es $M_k = 1$. De aquí que las sumas inferiores y superiores son

$$s(P,f) = \sum_1^n m_k \cdot \Delta x_k = 0 \quad \text{y} \quad S(P,f) = \sum_1^n M_k \cdot \Delta x_k = 1$$

Se sigue que

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = sup\{s(P,f)\} = 0 \quad \text{y} \quad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf\{S(P,f)\}1$$

Las integrales son distintas, luego, f no es integrable en $[0,1]$.

A la condición de integrabilidad anterior agregamos la siguiente, que guarda relación con el cálculo de límites en las sumas superior e inferior.

Teorema 2.3.9. *Una función f acotada sobre $[a,b]$ es* **integrable** *si y sólo si, existe una sucesión $P_1, P_2, \cdots, P_n$ de particiones de $[a,b]$ tal que*

$$\lim_{n\to\infty} (\ S(f,P_n) - s(f,P_n)\ ) = 0$$

En tal caso

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} s(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} S(f,P_n)$$

Demostración

$\to$) Si f es integrable, entonces $\forall \epsilon > 0$ existe partición P tal que

$$S(f,P) - s(f,P) < \epsilon$$

Tomando $\epsilon = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, resulta que para cada n existe una partición P_n tal que

$$S(f,P_n) - s(f,P_n) < \frac{1}{n}$$

De esto, la sucesión de particiones $P_1, P_2, \cdots, P_n$ es tal que

$$\lim_{n\to\infty} (\ S(f,P) - s(f,P)\ ) = 0$$

$\leftarrow$) Si suponemos ahora que la sucesión (P_n) satisface la relación

$$\lim_{n\to\infty} (\ S(f,P) - s(f,P)\ ) = 0$$

Entonces para $\epsilon > 0$ dado, alguna partición P_n satisface

$$S(f,P) - s(f,P) < \epsilon$$

Esto significa que f es integrable sobre $[a,b]$.

Por otra parte, para probar que la integral es el límite de las sumas superiores e inferiores, consideremos la partición P_n de $[a,b]$, la que debe verificar que

$$s(f,P_n) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq S(f,P_n)$$

De esta relación se deducen:

1. $0 \leq \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx - s(f,P_n) \leq S(f,P_n) - s(f,P_n)$

2. $0 \leq S(f,P_n) - \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq S(f,P_n) - s(f,P_n)$

De la primera de estas expresiones se llega a

$$-(S(f,P_n) - s(f,P_n)) \leq \int_a^b f(x)\,dx - s(f,P_n) \leq S(f,P_n) - s(f,P_n)$$

de lo cual

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - s(f,P_n)\right| \leq S(f,P_n) - s(f,P_n)$$

Tomando límite cuando $n \to \infty$ se concluye que

$$\lim_{n\to}\left[\int_a^b f(x)\,dx - s(f,P_n)\right] = 0$$

De igual manera,

$$\lim_{n\to\infty}\left[S(f,P_n) - \int_a^b f(x)\,dx\right] = 0$$

En consecuencia, las sumas superiores e inferiores tienen el mismo límite. Esto es,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} s(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} S(f,P_n)$$

Este resultado permite en contados casos y con mucho esfuerzo e ingenio calcular algunas integrales. Sin embargo, tiene un corolario bastante interesante y sencillo de aplicar.

Corolario 2.3.10. *Para toda función f integrable en $[0,1]$ se verifica que*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n} = \int_0^1 f(x)\,dx$$

2.4. Funciones Integrables

Los teoremas 2.3.7 y 2.3.9 entregan condiciones de integrabilidad que deben tener las funciones reales, no dicen *cuáles* funciones son integrables. El siguiente resultado proporciona una poderosa condición de integrabilidad de fácil verificación.

Teorema 2.4.1. *Toda función f continua sobre $[a,b]$ es integrable sobre $[a,b]$.*

Demostración

Si f es continua sobre $[a,b]$, entonces es acotada y también uniformemente continua sobre $[a,b]$. Luego, f tiene un máximo y un mínimo sobre cada subintervalo de $[a,b]$, producidos por una partición P de $[a,b]$. Es decir, existen $x_{i1}, x_{i2} \in [x_{i-1}, x_i] = I_i$ tales que

$$f(x_{i1}) = m_i(f)\ ,\ f(x_{i2}) = M_i(f)$$

teniéndose que

$$0 \leq S(f,P) - s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} (M_i(f) - m_i(f))\,(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} (f(x_{i2}) - f(x_{i1}))\,(x_i - x_{i-1})$$

Como f es uniformemente continua sobre $[a,b]$, entonces $\forall \epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x_{i1},\ x_{i2}\ \in [a,b],\ |x_{i2} - x_{i1}| < \delta \Longrightarrow |f(x_{i2}) - f(x_{i1})| < \frac{\epsilon}{b-a}$$

Haciendo que $\parallel P \parallel < \delta$, se tiene

$$S(f,P) - s(f,P) < \sum_{i=1}^{n} \frac{\epsilon}{b-a}\,(x_i - x_{i-1}) = \epsilon$$

En consecuencia, f es integrable sobre $[a,b]$

2.5. Sumas de Riemann

Hasta este momento, la única herramienta de cálculo de una integral definida son las sumas superiores e inferiores. Este procedimiento no es sencillo de manejar debido a la gran cantidad de cómputos. Presentamos a continuación, las denominadas **Sumas de Riemann**, que ya conocíamos del problema del área, y que son menos complicadas. En primer lugar, una condición de integrabilidad y al mismo tiempo método de aproximación al valor de la integral.

Teorema 2.5.1. *Si f es una función continua sobre $[a,b]$, entonces para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de modo que para toda partición P de $[a,b]$ con $||P|| < \delta$, y para todo $\overline{x}_k \in [x_{k-1}, x_k]$, se verifica que*

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n} f(\overline{x}_k)\,(x_k - x_{k-1}) \right| < \epsilon$$

Demostración

Para cualquier partición P, y $\overline{x}_i \in [x_{k-1}, x_k]$ se verifica que

$$s(f,P) \leq \sum_{k=1}^{n} f(\overline{x}_k)\,(x_k - x_{k-1}) \leq S(f,P) \tag{2.1}$$

Como f continua implica f integrable, entonces

$$s(f,P) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq S(f,P) \tag{2.2}$$

Restando la ecuación (2.1) de la (2.2) se tiene

$$-S(f,P) + s(f,P) \leq \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n} f(\overline{x}_k)\,(x_k - x_{k-1}) \leq S(f,P) - s(f,P)$$

de esto

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n} f(\overline{x}_k)\,(x_k - x_{k-1}) \right| < \epsilon$$

Este teorema muestra que haciendo la norma de la partición suficientemente pequeña, se puede calcular, por un número finito de adiciones y multiplicaciones la integral definida de una función continua, tan aproximadamente como se desee. Este resultado es fácil de recordar si lo escribimos de otra forma. El que la norma de la partición tienda a cero, significa que el número de puntos de la partición tiende a infinito, esto es, $n \to \infty$. Como la diferencia, en valor absoluto es menor que cualquier $\epsilon > 0$ dado, entonces el límite de esa diferencia es cero. Es decir,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\overline{x}_k)\,(x_k - x_{k-1}) = \int_a^b f(x)\,dx$$

La sumatoria involucrada, se llama **suma de Riemann** de la función f relativa a la partición P.

Ahora tenemos dos métodos para aproximarnos a una integral definida, a saber: uno mediante sumas superior e inferior, y el otro a través de la suma de Riemann. Ambos métodos presentan desventajas tales como: cómputo de sumas, localización de los valores máximos y mínimos en cada subintervalo, y para el último método, en particular, no existe manera de determinar el δ, dependiendo entonces la aproximación de la elección de los $\overline{x}_k$. Mostramos un ejemplo.

Ejemplo 2.5.2. *Consideremos* $\int_0^{10} x^3\,dx$. *Hallemos*

1. *un valor aproximado, dividiendo el intervalo* $[0, 10]$ *en cinco subintervalos de igual longitud, y empleando* $\frac{1}{2}\,(s(f,P) + S(f,P))$
2. *un valor aproximado usando* $\sum_{k=1}^{n} f(\overline{x}_k)\,(x_k - x_{k-1})$, $\overline{x}_k$ *punto medio de cada subintervalo de la partición dada en el punto anterior.*

3. *el valor exacto de la integral usando el límite de una suma de Riemann.*

1) La partición debe ser $P = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$, $x_{k-1} - x_k = 2$. Como la función $f(x) = x^3$ es creciente, el máximo M_k se encuentra en el extremo derecho de cada subintervalo, y el mínimo en el extremo izquierdo. Luego

$$S(f, P) = \sum_{k=1}^{5} M_k \, \Delta I_k = 8 \cdot 2 + 64 \cdot 2 + 216 \cdot 2 + 512 \cdot 2 + 1000 \cdot 2 = 3600$$

$$s(f, P) = \sum_{k=1}^{5} m_k \, \Delta I_k = 0 \cdot 2 + 8 \cdot 2 + 64 \cdot 2 + 216 \cdot 2 + 472 \cdot 2 = 1600$$

Luego

$$\int_0^{10} x^3 \, dx \sim \frac{1}{2} \, (3600 + 1600) = 2600$$

b) Los puntos medios de cada intervalo son:

$$\overline{x}_1 = 1, \; \overline{x}_2 = 3, \; \overline{x}_3 = 5, \; \overline{x}_4 = 7, \; \overline{x}_5 = 9$$

A partir de los cuales se obtiene

$$f(\overline{x}_1) = 1, \; f(\overline{x}_2) = 27, \; f(\overline{x}_3) = 125, \; f(\overline{x}_4) = 343, \; f(\overline{x}_5) = 729$$

Luego

$$\int_0^{10} x^3 \, dx = \sum_{k=1}^{5} f(\overline{x}_k) \, (x_k - x_{k-1}) = (1 + 27 + 125 + 343 + 729) \cdot 2 = 2450$$

c) Al dividir el intervalo $[0, 10]$ en n subintervalos, cada uno de ellos tiene la forma $\Delta I_k = \frac{10}{n}$. Al escoger $\overline{x}_k$ como el extremo derecho de cada subintervalo, para $0 \leq k \leq n$, tenemos

$$\left\{ \overline{x}_0 = 0, \; \overline{x}_1 = 0 + \frac{10}{n}, \; \overline{x}_2 = 0 + 2 \cdot \frac{10}{n}, \cdots, \overline{x}_k = 0 + k \cdot \frac{10}{n} \right\}$$

Como $f(x) = x^3$, entonces $f(\overline{x}_k) = \left(10 \cdot \frac{k}{n}\right)^3$. Luego

$$\int_0^{10} x^3 \, dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1000 \, k^3}{n^3} \cdot \frac{10}{n} = \lim_{n \to \infty} \frac{10000}{n^4} \sum_{k=1}^{n} k^3$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{10000}{n^4} \cdot \frac{n^2 (n+1)^2}{4} = 2500$$

2.6. Conexión: Area - Integral

¡Por fin!, estamos de vuelta. Si bien es cierto hicimos cálculos de integrales, en el fondo nuestra mente estaba en el problema del área. Estamos en condiciones de justificar ahora que el área de una región se puede evaluar mediante una integral definida. Recordemos que estamos interesados en el área de regiones planas de la forma $R = \{a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$. Previamente, se establecen los convenios que se indican, y que muestran la figura 2.10

1. $A_a^b(f)$ denota el área bajo f en [a,b]

2. $f(x) \leq g(x),\ \forall x \in [a,b] \Longrightarrow A_a^b(f) \leq A_a^b(g)$

3. $A_a^b(f) = A_a^c(f) + A_c^b(f)$, para $c \in [a,b]$

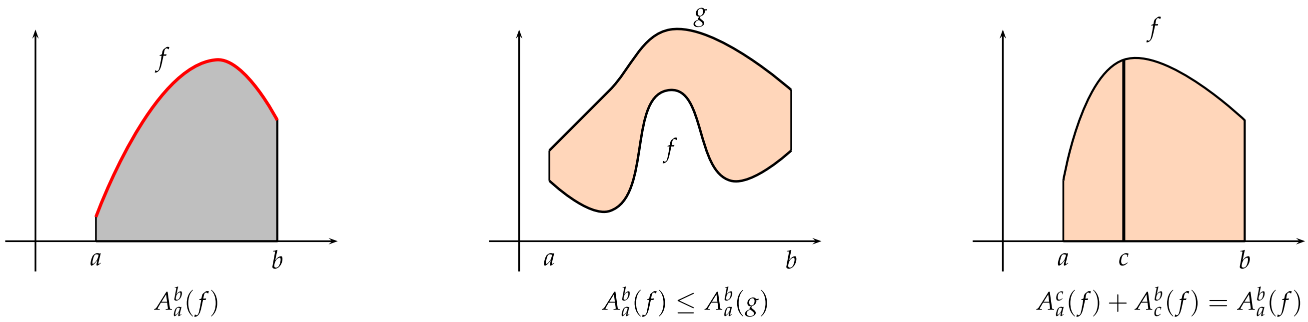


figura 2.10

Consideremos una partición $P = \{x_i\ /0 \leq i \leq n\}$ del intervalo $[a,b]$ tal como lo muestra la figura 2.11. De acuerdo con el tercer convenio se tiene

$$A_a^b(f) = A_{x_0}^{x_1}(f) + A_{x_1}^{x_2}(f) + \cdots + A_{x_{n-1}}^{x_n}(f) = \sum_{i=1}^{n} A_{x_{i-1}}^{x_i}(f)$$

Sean M_i y m_i el máximo y mínimo de f, respectivamente, en el intervalo I_i, entonces se satisface la relación

$$m_i\ (x_i - x_{i-1}) \leq A_{x_{i-1}}^{x_i}(f) \leq M_i\ (x_i - x_{i-1})$$

Al considerar todas las sumas se tiene

$$s(f,P) \leq A_a^b \leq S(f,P)$$

Esto quiere decir que $A_a^b(f)$ es cota superior de $\{s(f,P)/P \in \zeta\}$, y cota inferior de $\{S(f,P)/P \in \zeta\}$, por lo tanto,

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq A_a^b(f) \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

Ahora bien, si la función f es integrable, debe tenerse

$$A_a^b(f) = \int_a^b f(x)\,dx$$

expresión que representa la única definición posible de $A_a^b(f)$, para funciones f no negativas e integrables que cumplen con las condiciones impuestas.

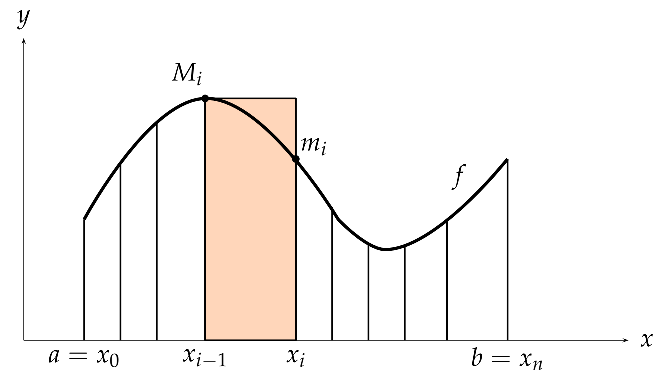


figura 2.11

Dejamos por otro momento el problema del área, nos dedicamos de lleno a presentar de que forma podemos hallar integrales definidas en forma más simple que lo mostrado hasta ahora. Una vez hecho esto volvemos con área y ¡mucho, pero mucho más!

2.7. Cálculo de la integral definida

Ahora viene lo que se estaba esperando, una forma sencilla y fácil para calcular la integral definida. El método tiene como base dos resultados, conocidos como **Teoremas fundamentales del cálculo**, que relacionan la diferenciación con la integración y que ponen de manifiesto que la integración es el proceso inverso de la diferenciación.

Teorema 2.7.1. *(Primer Teorema Fundamental del Cálculo)*
Sea f función continua sobre el intervalo $I = [a, b]$. Si $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, entonces F es diferenciable sobre I, y se tiene

$$F'(x) = f(x),\ \forall x \in I$$

Demostración

Para probar este hecho se considera la figura 2.12 y las siguientes notaciones:

$$\begin{aligned} F(x) &= \text{área desde } a \text{ hasta } x \\ F(x+h) &= \text{área desde } a \text{ hasta } x+h \\ F(x+h) - F(x) &= \text{área desde } x \text{ hasta } x+h \end{aligned}$$

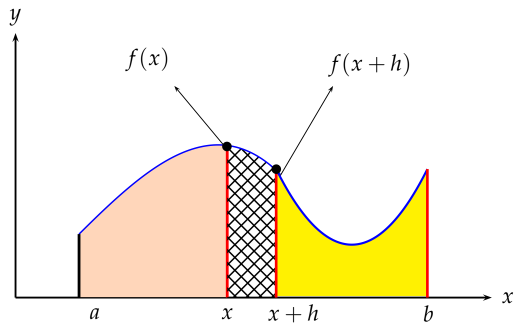


figura 2.12

Queremos probar que $F'(x) = f(x)$, lo que, de acuerdo a la definición de derivada, equivale a probar que

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$$

Empezamos por armar por partes este rompecabezas. Lo primero es traducir a integrales el numerador de la derivada. Se tiene

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)\, dt - \int_a^x f(t)\, dt = \int_x^{x+h} f(t)\, dt$$

Toda función continua en un intervalo cerrado alcanza un valor máximo y un valor mínimo. Esto hace que miremos con atención el intervalo $[x, x+h]$ pues allí f es una función continua. Siendo así, decimos que M_h y m_h son este valor máximo y mínimo, respectivamente. Luego, el área bajo este intervalo satisface

$$h \cdot m_h \leq \int_x^{x+h} f(t)\, dt \leq h \cdot M_h$$

lo que equivale a

$$m_h \leq \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq M_h$$

Usando de nuevo la continuidad de f en $[x, x+h]$, se debe cumplir que

$$\lim_{h\to 0} M_h = \lim_{h\to 0} m_h = f(x)$$

Ahora, por el teorema del sandwich,

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$$

Cambiando notación, esto es

$$F'(x) = f(x),\ \forall x \in [a, b]$$

La función F del teorema se llama **antiderivada** de f en $[a, b]$.

Ejemplo 2.7.2. *La derivada de la función* $\int_0^x \sqrt{4+t^6}\,dt$ *es, de acuerdo al primer teorema fundamental*

$$F(x) = \int_0^x \sqrt{4+t^6}\,dt \Longrightarrow F'(x) = \sqrt{4+x^6}$$

El siguiente resultado puede ser considerado simple consecuencia del Primer Teorema Fundamental, relaciona la integral con la diferencial, y complementa el método de evaluación de integrales definidas.

Teorema 2.7.3. *(Segundo Teorema Fundamental del Cálculo)*
Sean f continua en $[a,b]$ y F una antiderivada de f en $[a,b]$, entonces

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

Demostración

Sea $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ otra antiderivada para f en $[a,b]$. Siendo así, F y G difieren en una constante. Es decir,

$$G(x) = F(x) + c\ ,\ \forall x \in [a,b]$$

Como $G(a) = F(a) + c$ y $G(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$, se tiene $c = -F(a)$. Luego, $G(x) = F(x) - F(a)$. De aquí

$$G(b) = F(b) - F(a) \tag{2.3}$$

Ahora,

$$G(b) = \int_a^b f(t)\,dt \tag{2.4}$$

Luego, de las ecuaciones 2.3 y 2.4 se tiene

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

Ejemplo 2.7.4. *Para evaluar* $\int_1^4 x\,dx$, *se determina, en primer lugar, la primitiva de* $f(x) = x$, *que es* $F(x) = \frac{x^2}{2}$. *A continuación, por el segundo teorema fundamental se tiene*

$$\int_1^4 x\,dx = \left(\frac{x^2}{2}\right)_1^4 = \frac{15}{2}$$

Ejemplo 2.7.5. *Para calcular* $\int_0^1 (2x - 5x^4 + 1)\,dx$, *se conoce que la primitiva de* $f(x) = 2x - 5x^4 + 1$ *es la función* $F(x) = x^2 - x^5 + x$. *Luego*

$$\int_0^1 (2x - 5x^4 + 1)\,dx = \left(x^2 - x^5 + x\right)_0^1 = 1$$

2.8. Métodos de Integración

Los métodos de integración que se emplean para calcular integrales definidas, son los mismos que se usaron en el cálculo de la integral indefinida. Establecemos los dos métodos de cálculo más usados en calculo de integrales. Se podrá apreciar que ya no será necesario por ejemplo, cuando se hacen sustituciones trigonométricas, pasar por el triángulo para volver a la variable original y luego evaluar.

Teorema 2.8.1. *(Método de Sustitución)*
Sea g' función continua sobre el intervalo $[a, b]$, y sea f función continua sobre el rango de g, entonces

$$\int_a^b f[g(x)]\, g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(z)\, dz$$

Ejemplo 2.8.2. *Para hallar $\int_0^1 2x\,(x^2-1)^4\,dx$, se usa la sustitución $z = x^2 - 1$. La diferencial es $dz = 2xdx$. Los nuevos límites de integración son*

$$x = 0 \Longrightarrow z = -1, \qquad x = 1 \Longrightarrow z = 0$$

En consecuencia

$$\int_0^1 2x\,(x^2-1)^4\,dx = \int_{-1}^0 z^4\,dz = -\frac{1}{5}$$

Ejemplo 2.8.3. *Probar que $\int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx = \int_0^1 x^n\,(1-x)^m$*

Si hacemos $z = 1 - x$, entonces $dz = -dx$. Para cambiar los límites de integración tenemos que,

$$x = 0 \Longrightarrow z = 1, \qquad x = 1 \Longrightarrow z = 0$$

Luego

$$\int_0^1 x^m\,(1-x)^n\,dx = \int_1^0 (1-z)^m\,z^n\,(-dz) = \int_0^1 z^n(1-z)^m\,dz$$

Ejemplo 2.8.4. *La derivada de la función $\int_0^{x^2} \sqrt{4+t^6}\,dt$ es*

$$F(x) = \int_0^{x^2} \sqrt{4+t^6}\,dt \Longrightarrow F'(x) = 2x\,\sqrt{4+x^{12}}$$

La explicación para esto es que el límite superior de la integral tiene x^2. Luego, con el cambio de variable $z^2 = t$ es $2zdz = dt$. Por tanto, la integral original pasa a ser equivalente con

$$F(x) = \int_0^x \sqrt{4+z^{12}} \cdot 2z\,dz \Longrightarrow F'(x) = 2x\,\sqrt{4+x^{12}}$$

Teorema 2.8.5. *(Método de integración por partes)*
Si la funciones f y g son derivables sobre el intervalo $[a,b]$, y las funciones f' y g' son integrables sobre $[a,b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)\, g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)\, f'(x)\, dx$$

Ejemplo 2.8.6. *Para calcular* $\int_0^{\pi/2} x \cos x\, dx$*, se usa integración por partes, con* $u = x$, $dv = \cos x\, dx$, $du = dx$, $v = \operatorname{sen} x$*. Luego*

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} x \cos x\, dx &= x \operatorname{sen} x\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\, dx \\ &= \frac{\pi}{2} + \cos x\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1\end{aligned}$$

2.9. Propiedades de la Integral Definida

Vamos a continuar en la teoría de la integral, con el fin de establecer propiedades que simplifiquen los cálculos. Una vez hecho esto retomamos el problema del área y otras aplicaciones que posee la integral definida.

Área de un rectángulo : Sea $f(x) = k, \forall x \in [a,b]$, k constante, entonces

$$\int_a^b k\, dx = k\,(b-a)$$

Esta propiedad corresponde al área de un rectángulo de base $(b-a)$ y altura k.

Área nula : Si f es integrable sobre $[a,b]$ entonces

$$\int_c^c f(x)\, dx = 0, \quad \forall c \in [a,b]$$

Esta propiedad corresponde al área de un rectángulo de base cero y altura $f(x)$

Positividad : Si la función f es integrable sobre $[a,b]$, y $f(x) \geq 0, \forall x \in [a,b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\, dx \geq 0$$

Demostración

Sea F antiderivada de la función f sobre $[a,b]$, entonces $F'(x) = f(x),\ \forall x \in [a,b]$. De la hipótesis que $f \geq 0$, se sigue que $F'(x) \geq 0$ sobre $[a,b]$. Esto significa que F es creciente sobre $[a,b]$. Es decir, $a \leq b \Longrightarrow F(a) \leq F(b)$, lo que lleva a que

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \geq 0$$

Linealidad Si la funciones f y g son integrables sobre $[a,b]$ y k es una constante, entonces las funciones $f+g$, $k \cdot f$ son integrables sobre $[a,b]$, y se tiene

$$\begin{aligned}\int_a^b (f(x)+g(x))\ dx &= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx\\ \int_a^b k\cdot f(x)\,dx &= k\cdot\int_a^b f(x)\,dx\end{aligned}$$

Monotonía Sean f y g funciones integrables sobre $[a,b]$ y tales que $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a,b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

Para demostrarlo, considerar $g(x) - f(x) \geq 0$ en la propiedad de positividad.

Aditividad Si f es una función integrable sobre $[a,b]$, y $c \in [a,b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Demostración

Sea F antiderivada de f sobre $[a,c]$, y G antiderivada de f sobre $[c,b]$. Ahora, definimos la función H como

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & \text{si } x \in [a,c] \\ G(x) + F(c) - G(c), & \text{si } x \in [c,b] \end{cases}$$

Es claro que H es una función continua, y antiderivada de f sobre $[a,b]$. Luego

$$\begin{aligned}\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx &= H(c) - H(a) + H(b) - H(c)\\ &= H(b) - H(a) = \int_a^b f(x)\,dx\end{aligned}$$

Aditividad Si f es una función integrable sobre $[a,b]$ entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

Para demostrarlo considerar $a = b$ en la propiedad anterior.

Valor absoluto : Si f es integrable sobre $[a,b]$, entonces $|f|$ es integrable sobre $[a,b]$. Se tiene

$$\left| \int_a^b f(x)\ dx \right| \le \int_a^b |f(x)|\ dx$$

Demostración

$$-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$$

a partir de esto

$$-\int_a^b |f(x)|\, dx \le \int_a^b f(x) \le \int_a^b |f(x)|\, dx$$

de donde se obtiene

$$\left| \int_a^b f(x)\ dx \right| \le \int_a^b |f(x)|\, dx$$

Invarianza frente a una traslación : Si f es una función integrable sobre el intervalo $[a,b]$, entonces para cada número real c se tiene

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\, dx$$

La demostración de esta propiedad es inmediata, el cambio de variables $z = x - c$ transforma la integral del segundo miembro en el primero. Esta propiedad no es otra cosa que una traslación, proceso que ya ha sido estudiado, solo cabe recordar que cuando $c > 0$, la curva $f(x-c)$ se traslada hacia la derecha, y cuando $c < 0$ hacia la izquierda. Ilustramos esta propiedad, considerando el recinto acotado por la función $y = (x+1)^2$ y las rectas $x = 0,\ y = 0$, como muestra la figura 2.13.

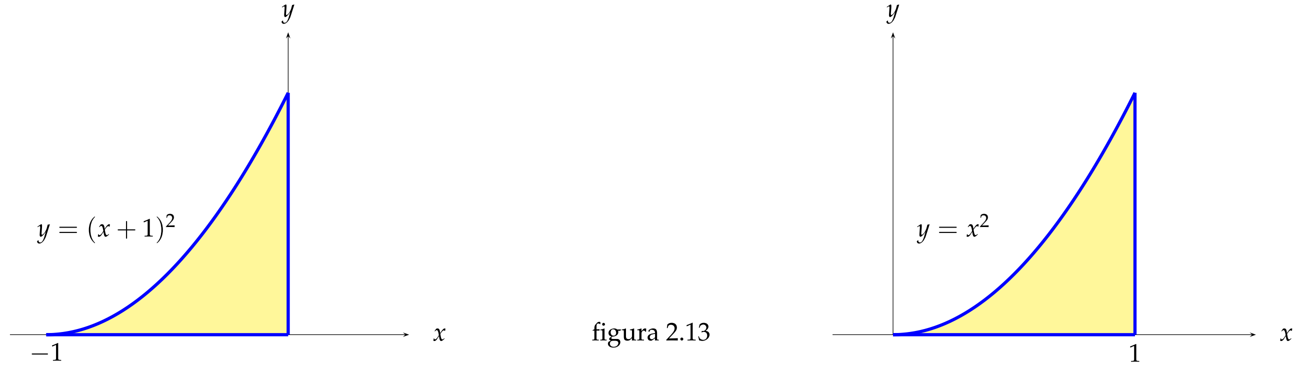


figura 2.13

En este caso, $f(x) = (x+1)^2 \implies f(x-1) = x^2$. Además, $x \in [-1,0],\ c = -1$, de manera que esta traslación transforma el recinto dado en otro recinto $R = \{(x,y)/\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x^2\}$ "equivalente". Observar que las áreas permanecen invariantes bajo traslación, como lo afirma el teorema, pues

$$A(R) = \int_{-1}^{0} (x+1)^2\, dx = \int_0^1 x^2\, dx = \frac{1}{3}$$

Dilatación o contracción del intervalo Si f es una función integrable sobre $[a, b]$ entonces para cada real c se tiene

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{c}\int_{ac}^{bc} f(\frac{x}{c})\,dx$$

La demostración es inmediata usando $z = \frac{x}{c}$. En este caso, tal como su nombre lo indica, se trata de dilatar o de contraer el intervalo de integración, adquiriendo la curva una ampliación o contracción, proceso que establece el argumento $\frac{x}{c}$. Por ejemplo, el recinto que acotan $y = 0$, la función $y = x^2$ con $x \in [0, \frac{1}{10}]$ es muy pequeño. La propiedad de dilatación permite ampliarlo y evaluar la integral en este nuevo recinto. En efecto, en este caso $c = 10$, de modo que

$$\int_0^{\frac{1}{10}} x^2\,dx = \frac{1}{10}\int_0^1 (\frac{x}{10})^2\,dx = \frac{1}{3000}$$

2.10. Teorema del valor medio

La integral definida permite ampliar el concepto de media o promedio a los valores de una función sobre un intervalo. La media o promedio aritmético de los n números $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$, que se denota por $\overline{a}$, corresponde al número

$$\overline{a} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

En el caso específico del área, la idea es la siguiente: Sabemos que la integral representa el área bajo la curva $y = f(x)$, sobre el eje x, y entre las rectas $x = a$ y $x = b$. Tal como muestra la figura 2.14

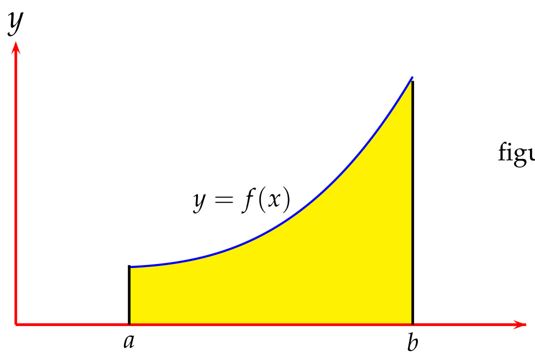
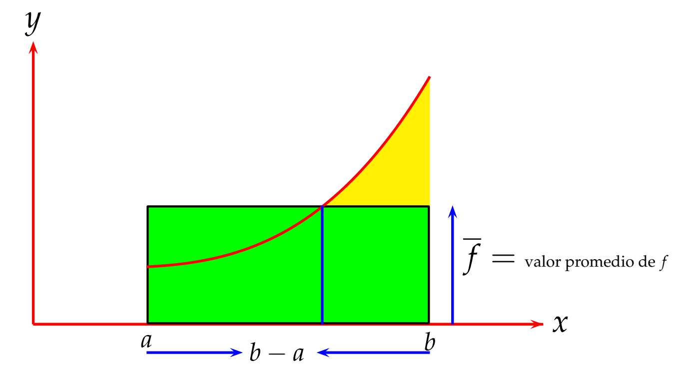


figura 2.14



En muchos problemas no se requiere tener un valor exacto sino más bien un valor aproximado. En el caso del área bajo la curva ésta se puede aproximar por el área del rectángulo de base $b - a$ y altura $\overline{f}$. Y como sabemos que el área es la integral definida, entonces

$$(b - a) \cdot \overline{f} = \int_a^b f(x)\,dx$$

Teorema 2.10.1. *(del Valor Medio para Integrales)*
Si la función f es continua sobre $[a,b]$, entonces existe un punto $c \in (a,b)$, tal que $f(c) = \overline{f}$. Es decir

$$\int_a^b f(t)\,dt = (b-a)\,f(c)$$

Demostración

Como f es continua sobre un intervalo cerrado $[a,b]$, entonces ella es acotada sobre $[a,b]$, de aquí que existen un valor máximo M y un valor mínimo m, tales que

$$m \leq f(x) \leq M, \quad \forall x \in [a,b] \tag{2.5}$$

Integrando y haciendo uso de la propiedad de monotonía tenemos

$$m(b-a) = \int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx = M(b-a)$$

al dividir por $b-a$ se obtiene

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M \tag{2.6}$$

La continuidad de f sobre $[a,b]$ hace que alcance todos sus valores (teorema del valor intermedio), entonces (observar 2.5 y 2.6) debe alcanzar, en algún punto c de $[a,b]$, el valor $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$. Esto es

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Ejemplo 2.10.2. *Un cadáver se enfría de 37 grados celsius hasta los 10 grados celsius. La temperatura T a los t minutos de empezar el enfriamiento lo modela la función*

$$T = 10 + 27\,e^{-0{,}1t}$$

- Un esquema gráfico de la situación lo muestra la figura 2.15
- La temperatura del cuerpo a cabo de una hora es

$$T = 10 + 27\,e^{-0{,}1t} \Longrightarrow T(60) = 10{,}06^\circ$$

- La temperatura promedio en la primera hora es

$$\overline{T}(60) = \frac{1}{60}\int_0^{60}\left(10 + 27\,e^{-0{,}1t}\right)dt = 14{,}488^\circ$$

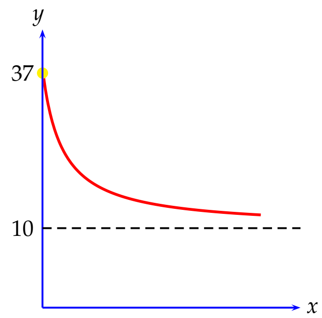


figura 2.15

Ejemplo 2.10.3. *La región la acotan las curvas $y = x^2$, $y = 0$, $x = 1$. Hallemos el número c del T.V.M.*

Para satisfacer el T.V.M. se necesita que

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$$

Mirando el recinto y esta integral nos damos cuenta que, $a = 0$, $b = 1$ Como se conoce la función y los límites de integración, entonces el T.V.M. toma la forma

$$f(c) = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

Si $f(x) = x^2$, entonces $f(c) = c^2$. Al resolver esta igualdad se encuentran dos valores, sólo uno de ellos está en el intervalo, y es

$$c = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Se bosqueja el recinto en figura 2.16

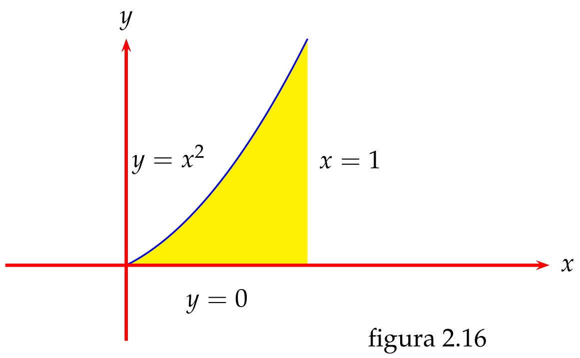


figura 2.16

La siguiente, es una generalización de este teorema.

Teorema 2.10.4. *(TVM generalizado)*
Sea f función continua sobre $[a,b]$, g función positiva e integrable sobre $[a,b]$. Entonces existe un punto $c \in (a,b)$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(c) \int_a^b g(x)\,dx$$

Demostración

Como f continua sobre $[a,b]$ implica f acotada, existen máximo M y mínimo m para f sobre $[a,b]$, tales que $m \leq f(x) \leq M$. Al multiplicar por $g \geq 0$ se tiene

$$m \cdot g(x) \leq f(x) \cdot g(x) \leq M \cdot g(x)$$

como las funciones de esta desigualdad son integrables, entonces

$$\int_a^b m\,g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \leq \int_a^b M\,g(x)\,dx$$

Ahora, si $\int_a^b g(x)\ dx = 0$, entonces cualquier $c \in [a,b]$ satisface el Teorema ($f(c) \cdot 0 = 0$). Si $\int_a^b g(x)\ dx > 0$, podemos dividir la desigualdad anterior por esta integral para tener

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)\ g(x)\ dx}{\int_a^b g(x)\ dx} \leq M$$

Por el Teorema del Valor Intermedio la función f continua, debe asumir **todos** los valores comprendidos entre su mínimo m y su máximo M, en consecuencia, existe un punto $c \in [a,b]$ tal que

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)\ g(x)\ dx}{\int_a^b g(x)\ dx}$$

a partir de lo cual se obtiene

$$\int_a^b f(x)\ g(x)\ dx = f(c)\ \int_a^b g(x)\ dx$$

Observar que con $g(x) = 1$, se tiene la versión simple del Teorema del valor medio para integrales.

2.11. Funciones Escalonadas

Una función se denomina continua por tramos en un intervalo $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ si tiene sólo un número finito de puntos de discontinuidad y en ellos existen los límites laterales finitos. Un caso particular de estas funciones corresponde a las funciones escalonadas. Un resultado que asegura la existencia de la integral para este clase de funciones es el siguiente.

Teorema 2.11.1. *Si f es una función acotada y continua, salvo en un número finito de puntos de $[a,b]$, entonces f es integrable sobre $[a,b]$*

La demostración de este hecho se puede hallar en textos avanzados de cálculo. Veamos el caso particular de las funciones escalonadas.

Definición 2.11.2. *La función $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice escalonada si existe una partición P de $[a,b]$, tal que f es constante en cada subintervalo abierto de P. Esto es,*

$$f \text{ escalonada} \iff f(x) = c_k,\ x_{k-1} < x < x_k, \quad k \in \mathbb{N}$$

Es claro, que la integral de una función escalonada f sobre $[a,b]$ es

$$\int_a^b f(x)\ dx = \sum_{k=1}^{n} c_k\ (x_k - x_{k-1})$$

Ejemplo 2.11.3. *Hallar* $\int_{-1}^{3} [x]\, dx$*, si la partición* $P = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$

Como $x_k - x_{k-1} = 1$, y además, $[x] = \begin{cases} -1, & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 0, & \text{si } \ 0 \leq x < 1 \\ 1, & \text{si } \ 1 \leq x < 2 \\ 2, & \text{si } \ 2 \leq x < 3 \end{cases}$

entonces

$$\int_{-1}^{3} [x]\, dx = -1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 2$$

Ejemplo 2.11.4. *Para hallar la integral* $\int_{-1}^{3} [x]\, dx$*, usemos propiedades de la integral definida.*

$$\int_{-1}^{3} [x]\, dx = \int_{-1}^{0} (-1)\, dx + \int_{0}^{1} 0\, dx + \int_{1}^{2} 1\, dx + \int_{2}^{3} 2\, dx = 2$$

Ejemplo 2.11.5. *Hallar* $\int_{0}^{2} f(x)\, dx$*, si* $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 3, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$

Nada más simple que emplear la propiedad de linealidad

$$\int_{0}^{2} f(x)\, dx = \int_{0}^{1} x\, dx + \int_{1}^{2} 3\, dx = \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^1 + \left. 3x \right|_1^2 = \frac{7}{2}$$

2.12. Distancia recorrida por un móvil

El cálculo del límite que se expresa como el área bajo una curva se presenta también en el problema de *determinar la distancia s recorrida por un cuerpo que se mueve a lo largo de una línea recta, con velocidad variable* $v = f(t)$*, en el intervalo de tiempo entre* $t = a$ *y* $t = b$. Veamos esto.
Suponemos que la función $f(t)$ es continua, es decir, en intervalos pequeños de tiempo la velocidad sólo varía ligeramente. Se divide el intervalo $[a, b]$ en n partes de longitudes $\Delta t_1, \Delta t_2, \cdots \Delta t_n$. Para hallar un valor aproximado de la distancia recorrida en cada intervalo Δt_i, con $i = 1, 2, \cdots, n$ es lógico creer que la velocidad en este intervalo cambia muy poco. Por eso, podemos considerar aproximadamente constante esta velocidad y hacerla igual, por ejemplo, a $f(t_i)$. Luego, la distancia total recorrida es aproximada por la siguiente suma

$$s = \sum_{1}^{n} f(t_i) \Delta t_i$$

El límite de esta suma para subdivisiones cada vez más pequeñas ($n \to \infty$) aproximará la distancia recorrida, a saber, $b - a$. Esto es,

$$b - a = s = \lim_{n \to \infty} \sum_{n=1}^{n} f(t_i)\, \Delta t_i$$

Ejemplo 2.12.1. *En los casos en los que la velocidad es constante o varía linealmente con el tiempo, el desplazamiento o distancia se calcula fácilmente. Así, si* $v = 30m/s$*, entonces la distancia recorrida por el móvil entre los instantes* $t_0 = 0$ *y* $t = 10$ *segundos es* $s = 30 \times 10 = 300$ *metros. La figura muestra que corresponde al área del rectángulo de lados* 10 *y* 30.

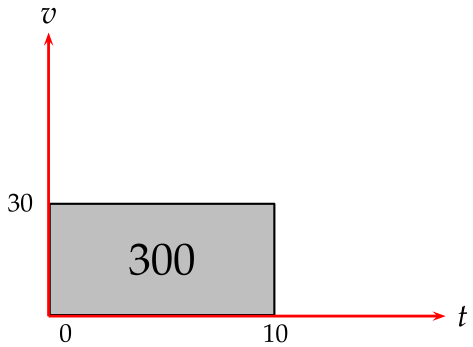


figura 2.17

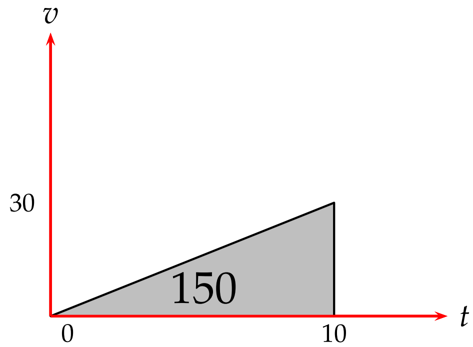


figura 2.18

Ejemplo 2.12.2. *Si la velocidad de un móvil es* $v = 3t$*, entonces la distancia que recorre, entre los instantes* $t_0 = 0$ *y* $t = 10$ *segundos, es de* $s = 150$ *metros y equivale al área del triángulo* $\frac{1}{2} 30 \times 10 = 150$ *metros*

De esta forma, si un punto material se mueve a lo largo de una línea recta con velocidad $y = f(t)$, donde t es el tiempo, la distancia d recorrida por el punto en el intervalo de tiempo desde $t = t_1$ a $t = t_2$ viene expresada por la integral definida

$$d = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\, dt$$

Supongamos conocida la ecuación del movimiento del punto, esto es, la función $s = F(t)$, que expresa la dependencia de la distancia s respecto al tiempo t a partir de un punto inicial A sobre la recta. La distancia recorrida en el intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$ es evidentemente igual a la diferencia $d = F(t_2) - F(t_1)$. De este modo, consideraciones físicas llevan a la igualdad

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)\, dt = F(t_2) - F(t_1)$$

que expresa la conexión entre la ecuación del movimiento del punto y su velocidad.
Se llega así al resultado de que para una clase muy amplia de funciones $f(x)$, que incluye todos los casos en los que la función $f(x)$ puede ser considerada como velocidad de un punto en el instante x se verifica la siguiente igualdad.

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

donde $F(x)$ es una primitiva cualquiera de $f(x)$.
Esta igualdad es la famosa fórmula de Newton-Leibniz que reduce el problema de calcular la integral definida de una función a la obtención de una primitiva de la misma, y constituye un enlace entre el cálculo diferencial e integral.

En sus investigaciones matemáticas Newton siempre adoptó un punto de vista físico. Sus trabajos sobre los fundamentos del cálculo diferencial e integral no pueden ser separados de sus trabajos sobre los principios de la mecánica. En cambio las investigaciones de Leibniz no tienen una conexión tan inmediata con la física, hecho que, en ausencia de definiciones matemáticas precisas, le condujo a veces a conclusiones equivocadas. Por otra parte el rasgo más característico de la actividad creadora de Leibniz fue su esfuerzo por generalizar su búsqueda de los métodos más generales de resolución de los problemas del análisis matemático.

El mayor mérito de Leibniz fue la creación de un simbolismo matemático que expresaba lo esencial de la cuestión. Las notaciones por conceptos fundamentales del análisis matemático tales como la diferencial dx*, la diferencial segunda* d^2x*, la integral* $\int y\,dx$*, y la derivada* $\frac{d}{dx}$ *fueron propuestas por Leibniz. El hecho de que estas notaciones se utilicen todavía muestra lo acertado de su elección.*

Una de las ventajas de un simbolísmo bien elegido es que hace las demostraciones y cálculos más cortos y fáciles, y evita también, a veces, conclusiones equivocadas. Leibniz, quien no ignoraba esto, prestó especial atención en todo su trabajo a la elección de notaciones.

La evolución de los conceptos del análisis matemático (derivada, integral, etc.) continuó, naturalmente, después de Newton y Leibniz y continúa todavía en nuestros días, pero hay una etapa en esta evolución que merece ser destacada. Tuvo lugar a comienzos del siglo pasado y está particularmente relacionada con el trabajo de Cauchy.

Cauchy dio una definición formal precisa del concepto de límite y la utilizó como base para sus definiciones de continuidad, derivada, diferencial e integral. Estos conceptos se emplean constantemente en el análisis moderno. La gran importancia de estos resultados reside en el hecho de que gracias a ellos es posible operar de un modo puramente formal y llegar a conclusiones correctas no sólo en la aritmética, el álgebra y la geometría elemental, sino también en esa nueva y extensa rama de la matemática, el análisis matemático. (Aleksandrov, 1979, 170-173)

2.13. Problemas Resueltos

Ejemplo 2.13.1. *Un recinto lo acota la curva $y = x^2$, el eje x, y las rectas $x = 0$ y $x = 3$. Usar la partición $P = \{0, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}, \frac{9}{4}, 3\}$ para aproximar el área de la región mediante una suma de Riemann, en la cual los $\overline{x}_i$ sean, respectivamente, $\frac{1}{4}, 1, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$.*

La partición dada genera 4 subintervalos, a saber, $[0, 0{,}5]$, $[0{,}5, 1{,}25]$, $[1{,}25, 2{,}25]$ y $[2{,}25, 3]$. En el primero de ellos se debe tomar el punto $x_1 = \frac{1}{4}$ para tener un rectángulo de base 0,5 y altura $f(\frac{1}{4}) = \frac{1}{16}$, del mismo modo, en el segundo intervalo se toma $x_2 = 1$, en el tercero $x_3 = \frac{3}{2}$ y en el cuarto $x_4 = \frac{5}{2}$. Con estos datos se construyó la figura 2.19.

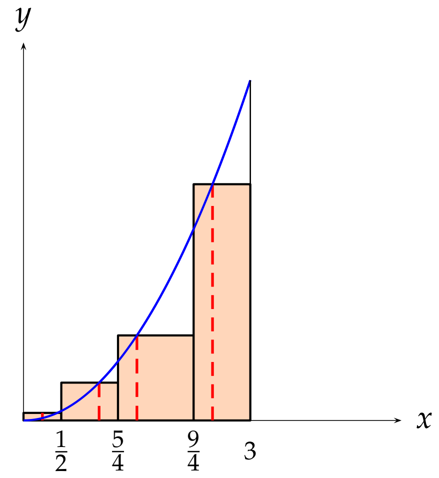


figura 2.19

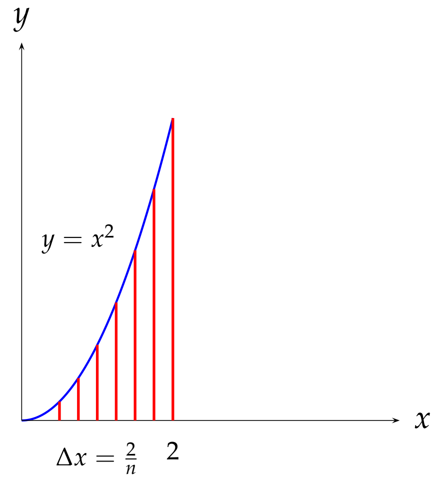


figura 2.20

La aproximación pedida es

$$\sum_{i=1}^{4} f(\overline{x}_i)\, \Delta_i x = f(\frac{1}{4}) \cdot \frac{1}{2} + f(1) \cdot \frac{3}{4} + f(\frac{3}{2}) \cdot 1 + f(\frac{5}{2}) \cdot \frac{3}{4}$$

$$= \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{3}{4} + \frac{9}{4} \cdot 1 + \frac{25}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{247}{32}$$

Ejemplo 2.13.2. *Un recinto lo acotan la curva $y = x^2$, el eje x y la recta $x = 2$. Hallar el área del recinto usando el límite de una suma de Riemann que contenga solamente rectángulos inscritos.*

La figura 2.20 muestra el recinto y la forma en que está determinada la partición del intervalo. Para rectángulos inscritos, m_i es el mínimo de f sobre $\Delta_i x$, y la suma de Riemann tiene la forma

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} m_i\, \Delta_i x$$

Sea P partición de $[0,2]$, tal que $||P|| = \frac{2}{n}$. Es claro, que para tener rectángulos inscritos, es necesario considerar, en este problema, el extremo izquierdo en cada $\Delta_i x$, ya que f es una función creciente. De la sucesión

$$\{0 \cdot \frac{2}{n}, 1 \cdot \frac{2}{n}, 2 \cdot \frac{2}{n}, \cdots, i \cdot \frac{2}{n}\},\ 1 \leq i < n$$

se observa que el extremo izquierdo tiene la forma $(i-1) \cdot \frac{2}{n} = x_{i-1}$. Luego

$$\begin{aligned}
A &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta_i x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left((i-1) \cdot \frac{2}{n} \right)^2 \cdot \frac{2}{n} \\
&= 8 \cdot \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{(i-1)^2}{n^3} = 8 \cdot \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{(i^2 - 2i + 1)}{n^3} \\
&= 8 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \left(\sum_{i=1}^{n} i^2 - 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1 \right) \\
&= 8 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \cdot \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n \right) \\
&= \frac{8}{3}
\end{aligned}$$

El mismo problema resuelto mediante rectángulos circuncritos, obliga a considerar extremos derechos, los que tienen la forma $i \cdot \frac{2}{n}$, ya que f es creciente. Se obtiene $\frac{8}{3}$, el mismo resultado.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta_i x \ ; \qquad M_i \text{ es el máximo de } f \text{ sobre } \Delta_i x$$

Por lo general, aunque es un proceso largo, el límite de la suma de Riemann entrega el resultado exacto.

Ejemplo 2.13.3. *Escribir* $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{8i^2}{n^3}$ *como una integral y calcular su valor.*

En esta clase de problemas debemos tener presentes la forma que tiene una suma de Riemann. En particular, podemos establecer que $\frac{1}{n}$ es la norma de la partición P y que la función a integrar es $f(x) = x^2$ pues, la sumatoria señala que los puntos $x_i = \frac{i}{n}$ elegidos, y que corresponden a los extremos derechos de cada intervalo, están al cuadrado. Estos puntos son puntos extremos derechos ya que cuando $i = 1$ se obtiene el segundo punto de la partición, que en este caso es $x_1 = \frac{1}{n}$, con lo cual $a = x_0 = 0$. Además, con $i = n$ se logra el último punto $b = x_n = 1$. Por tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{8i^2}{n^3} = 8 \cdot \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n} \right)^2 \cdot \frac{1}{n} = 8 \cdot \int_0^1 x^2 \, dx = \frac{8}{3}$$

El camino seguido no es el único. Veamos que sucede con el siguiente arreglo

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{8i^2}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i \cdot 2}{n} \right)^2 \cdot \frac{2}{n}$$

lo que corresponde a

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{8i^2}{n^3}=\int_0^2 x^2\,dx=\frac{8}{3}$$

De nuevo se eligieron los extremos derechos en cada intervalo, pero ahora el segundo punto $x_1 = 0+\frac{2}{n}$, con lo cual $x_0 = 0$, y el último punto, para $i = n$, es $x_n = 2$.

Ejemplo 2.13.4. *Escribir como una integral* $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{i^2}$ *y calcular su valor.*

Escribimos la sumatoria como sigue

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{i^2} \quad = \quad \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{n}{i}\right)^2\cdot\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{-2}\cdot\frac{1}{n}$$

Esta es una suma de Riemann, de la forma

$$\int_0^1 x^{-2}\,dx=-1+\lim_{x\to0}\frac{1}{x}$$

como $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}$, **no existe**, se concluye que el límite de la sumatoria **no existe**.

Ejemplo 2.13.5. *Expresar como una integral definida* $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{3i}{n}\right)^2\frac{3}{n}$.

Mirando la forma que tiene la expresión en la sumatoria se considera $\Delta x=\frac{3}{n}$. Como $f(x_i)=(\frac{3i}{n})^2$, entonces $x_i=\frac{3i}{n}$ y la función a poner en la integral es $f(x)=x^2$. Además, si $i=1$ se tiene $x_1=\frac{3}{n}$, y con $i=n$ es $x_n=3$. Esto nos hace ver la sumatoria como una de puntos derechos. Por tanto, la integral parte es 0 y llega hasta 3. Tenemos

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{3i}{n}\right)^2\frac{3}{n}=\int_0^3 x^2dx=9$$

Ejemplo 2.13.6. *Probar que* $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n^2-k^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}=\frac{\pi}{4}$

La forma general del límite de la suma de Riemann para puntos extremos derechos es

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(a+k\cdot\frac{b-a}{n})\cdot\frac{b-a}{n}$$

Luego

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n^2-k^2} &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx\\ &= \left(\frac{1}{2}\,arcsen\;x\;+\;\frac{1}{2}\,x\,\sqrt{1-x^2}\right)_0^1=\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

Análogamente

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \\
&= arctg\, 1 - arctg\, 0 = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.13.7. *Probar que es integrable sobre $[a,b]$, $a > 0$, la función* $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$

Sea $P = \{a = x_0, x_1 = 0, x_2 = b\}$ partición de $[a,b]$, entonces

$$s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta_i x = 0 \cdot \Delta_1 x + 1 \cdot \Delta_2 x = b$$

con lo cual $sup\{s(f,P)\} = b = \underline{\int_a^b} f(x)\, dx$

Del mismo modo

$$S(f,P) = \sum_{i=n}^{n} M_i \cdot \Delta_i x = 0 \cdot \Delta_1 x + 1 \cdot \Delta_2 x = b = \overline{\int_a^b} f(x)\, dx$$

Como $\overline{\int_a^b} f(x)\, dx = \underline{\int_a^b} f(x)\, dx$, la función f es integrable Riemann sobre $[a,b]$, y su valor es

$$\int_a^b f(x)\, dx = b$$

Ejemplo 2.13.8. *Sea $I_n(x) = \int_0^x sen^n t\; dt$. Demostrar que*

$$n \cdot I_n(x) = (n-1)\; I_{n-2}(x) - sen^{n-1}\, x \cos x, \;\; n \geq 2$$

Por la expresión a probar, hay que hacer integración por partes. Para ello se consideran;

$$\begin{aligned}
u = sen^{n-1} t &\Longrightarrow du = (n-1) sen^{n-2} t \cos t\, dt \\
dv = sen\, t\, dt &\Longrightarrow v = -\cos t
\end{aligned}$$

Con esto se tiene

$$\begin{aligned}
I_n(x) &= -sen^{n-1}\, t \cos t + (n-1) \int_0^x sen^{n-2} t \cos^2 t\, dt \\
I_n(x) &= -sen^{n-1}\, t \cos t + (n-1) \int_0^x sen^{n-2} t\, (1 - sen^2 t)\, dt \\
&= -sen^{n-1} t \cos t + (n-1) \int_0^x sen^{n-2} t dt - (n-1) \int_0^x sen^n t dt \\
&= -sen^{n-1}\, t \cos t + (n-1),\; I_{n-2}(x) - (n-1)\; I_n(x)
\end{aligned}$$

Al reunir términos semejantes,

$$n \cdot I_n(x) = (n-1)\ I_{n-2}(x) - sen^{n-1}\, x\, cos\, x,\ \ n \geq 2$$

Ejemplo 2.13.9. *Sea* $K_n(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} cos^n\ x\ dx$. *Relacionar* K_n *con* K_{n-2}.

Escribimos la integral que define K_n como

$$K_n = \int_0^{\pi/2} cos^n x\, dx = \int_0^{\pi/2} cos^{n-1}\, x\, cos\, x\, dx$$

Aplicando integración por partes

$$\begin{array}{l} u = cos^{n-1}\, x \Longrightarrow du = -(n-1)cos^{n-2}\, x\, sen\, x\, dx \\ dv = cos\, x\ dx \Longrightarrow v = sen\, x \end{array}$$

Entonces

$$\begin{aligned} K_n &= sen\, x\, cos^{n-1}\, x\Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} (n-1)\ cos^{n-2}\ x\, sen^2 x\, dx \\ &= (n-1)\ \int_0^{\pi/2} cos^{n-2}\, x\ (1 - cos^2\ x)\ dx \\ &= (n-1)\ \int_0^{\pi/2} cos^{n-2}\ x\ dx - (n-1)\ \int_0^{\pi/2} cos^n\ x\ dx \\ &= (n-1)\ K_{n-2}\ -\ (n-1)\ K_n \end{aligned}$$

de aquí

$$K_n + (n-1)\ K_n = (n-1)\ K_{n-2} \Longrightarrow K_n = \frac{n-1}{n}\ K_{n-2}$$

Ejemplo 2.13.10. *Calcular* $\displaystyle\int_0^{\pi/2} cos^4 x\, dx$, *usando el resultado anterior.*

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} cos^4 x\ dx &= \frac{4-1}{4}\ \int_0^{\pi/2} cos^2\ x\ dx \\ &= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}\ \left(x + \frac{sen\, 2x}{2} \right)_0^{\pi/2} \\ &= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{16} \end{aligned}$$

Ejemplo 2.13.11. *Probar que* $\displaystyle\int_0^{\pi/2} cos^m x\, sen^m x\, dx = 2^{-m} \int_0^{\pi/2} cos^m x\, dx, m > 0$

$$\int_0^{\pi/2} cos^m x\ sen^m x\ dx \ = \ \int_0^{\pi/2} \left(\frac{2}{2}\ cos\ x\ sen\ x\right)^m\ dx = \int_0^{\pi/2} (sen^m\ 2x) \cdot 2^{-m}\ dx$$

Por propiedad de dilatación, $c = 2$

$$\int_0^{\pi/2} cos^m x\ sen^m x\ dx = 2^{-1} \cdot 2^{-m} \int_0^{\pi} sen^m x\ dx = 2^{-(m+1)} \int_0^{\pi} sen^m x\ dx$$

Ahora, $z = \dfrac{\pi}{2} - x \Longrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} - z,\ dx = -dz$

$$\int_0^{\pi/2} cos^m x\ sen^m x\ dx \ = \ -2^{-(m+1)} \int_{\pi/2}^{-\pi/2} sen^m (\frac{\pi}{2} - z)\ dz = 2^{-(m+1)} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} cos^m z\ dz$$

Como la función coseno es par, entonces

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} cos^m z\ dz = 2 \int_0^{\pi/2} cos^m z\ dz$$

En consecuencia

$$\int_0^{\pi/2} cos^m x\ sen^m x\ dx = 2 \cdot 2^{-(m+1)} \int_0^{\pi/2} cos^m z\ dz = 2^{-m} \int_0^{\pi/2} cos^m z\ dz$$

Cambiando z por x se obtiene lo pedido.

Ejemplo 2.13.12. *Demostrar que* $\displaystyle\int_0^{\pi} x \cdot f(sen\ x)\ dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(sen\ x)\ dx.$

Sea $z = \pi - x$, entonces $dz = -dx$. Para los límites de integración se tiene que, $x = 0 \Longrightarrow z = \pi,\ x = \pi \Longrightarrow z = 0$. De esta forma

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} x \cdot f(sen\ x)\ dx \ &= \ \int_{\pi}^{0} (\pi - z)\ f(sen(\pi - z)) \cdot (-dz) \\
&= \ \int_0^{\pi} (\pi - z)\ f(sen\ z)\ dz \\
&= \ \pi \cdot \int_0^{\pi} f(sen\ z)\ dz - \int_0^{\pi} z \cdot f(sen\ z)\ dz \\
2 \cdot \int_0^{\pi} x \cdot f(sen\ x)\ dx \ &= \ \pi \cdot \int_0^{\pi} f(sen\ x)\ dx\ ;\ \ z = x \\
\int_0^{\pi} x \cdot f(sen\ x)\ dx \ &= \ \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(sen\ x)\ dx
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.13.13. *Usar la propiedad del ejemplo anterior para calcular* $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x \cdot sen\ x\ dx}{1 + cos^2 x}$.

Sea $f(x) = \dfrac{sen\,x}{1+cos^2\,x}$. Se tiene

$$\int_0^{\pi} \frac{x \cdot sen\ x\ dx}{1+cos^2\,x} = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{sen\ x\ dx}{1+cos^2 x}$$

Haciendo $z = cos\,x,\ dz = -sen\,x\,dx$

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \frac{x \cdot sen\ x\ dx}{1+cos^2 x} &= -\frac{\pi}{2}\int_1^{-1} \frac{dz}{1+z^2} = \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1} \frac{dz}{1+z^2} \\ &= \pi \cdot \int_0^1 \frac{dz}{1+z^2} = \pi\ arctg\,z\Big|_0^1 = \frac{\pi^2}{4}\end{aligned}$$

Ejemplo 2.13.14. *Probar que* $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x-3} \ \geq\ \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x}$

Para los denominadores de ambos integrandos se tiene

$$x - 3 \leq x \Longrightarrow \frac{1}{x-3} \geq \frac{1}{x}, \quad \forall x \in [-2,-1]$$

En consecuencia, por la propiedad de monotonía de la integral definida

$$\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x-3} \ \geq\ \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x}$$

Ejemplo 2.13.15. *Demostrar que* $x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} < \ln(1+x),\ \ x > 0$

Vamos a derivar la desigualdad y a suponer que ésta se mantiene. Si la expresión a la que se llega es verdadera, quiere decir que hemos encontrado el "punto de partida".

$$\begin{aligned} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} < \ln(1+x) &\Longrightarrow 1 - x + x^2 - x^3 < \frac{1}{1+x} \\ &\Longrightarrow (1 - x + x^2 - x^3)(1+x) < 1 \\ &\Longrightarrow x^4 > 0 \qquad \text{¡verdadero!} \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} x^4 > 0 \ &\Longrightarrow\ (1 - x + x^2 - x^3)(1+x) < 1 \\ &\Longrightarrow\ 1 - x + x^2 - x^3 < \frac{1}{1+x}; \quad x > 1 \end{aligned}$$

Ahora se integra entre 0 y x, y por propiedad de monotonía se tiene:

$$\int_0^x (1 - x + x^2 - x^3)\, dx < \int_0^x \frac{1}{1+x}$$

de lo cual

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} < \ln(1+x)$$

Ejemplo 2.13.16. *Probar que* $x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^4}{4} < -\ln(1-x)\ ;\ 0 \leq x \leq \dfrac{1}{2}$

Derivamos suponiendo que la desigualdad se mantiene.

$$\begin{aligned} 1 + x + x^2 + x^3 &\leq \frac{1}{1-x} \\ 1 + x + x^2 + x^3 - \frac{1}{1-x} &\leq 0 \\ -\frac{x^4}{1-x} &\leq 0, \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Así, considerando $-x^4 \leq 0$, como punto de partida, y retornando por el camino que condujo a ello. Se tiene

$$\begin{aligned} -x^4 \leq 0 \Longrightarrow -\frac{x^4}{1-x} \leq 0 \ &\Longrightarrow\ 1 + x + x^2 + x^3 - \frac{1}{1-x} \leq 0 \\ &\Longrightarrow\ \int_0^x (1 + x + x^2 + x^3)\, dx \leq \int_0^x \frac{dx}{1-x} \\ &\Longrightarrow\ x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \leq -\ln(1-x) \end{aligned}$$

Ejemplo 2.13.17. *Demostrar que* $\displaystyle\int_0^1 (1-x^2)^{n-1/2}\, dx = \int_0^{\pi/2} cos^{2n} z\, dz$

Con la sustitución $x = sen\, z$ se tiene $dx = cos\, z\, dz$. Para los límites de integración:

$$x = 0 \Longrightarrow z = 0 \qquad\qquad x = 1 \Longrightarrow z = \frac{\pi}{2}$$

Luego

$$\int_0^1 (1-x^2)^{n-1/2}\, dx = \int_0^{\pi/2} (1 - sen^2 z)^{n-1/2} \cos z\, dz$$

$$= \int_0^{\pi/2} (cos^2 z)^{n-1/2} \cos z\, dz = \int_0^{\pi/2} cos^{2n} z\, dz$$

Ejemplo 2.13.18. *Demostrar que* $\displaystyle\int_x^1 \frac{dt}{1+t^2} = \int_1^{1/x} \frac{dt}{1+t^2}$

Con la sustitución $z = \dfrac{1}{t}$ se obtiene $dt = -\dfrac{dz}{z^2}$. Para los límites de integración $t = 1 \Longrightarrow z = 1$, $t = x \Longrightarrow z = \dfrac{1}{x}$. Luego

$$\int_x^1 \frac{dt}{1+t^2} \;=\; -\int_{1/x}^1 \frac{\dfrac{dz}{z^2}}{1+\dfrac{1}{z^2}} = \int_1^{1/x} \frac{dz}{1+z^2} \;=\int_1^{1/x} \frac{dt}{1+t^2}$$

Ejemplo 2.13.19. *Demostrar la siguiente identidad*

$$\int (a^2-x^2)^n\, dx = \frac{x\,(a^2-x^2)^n}{2n+1} + \frac{2a^2 n}{2n+1} \int (a^2-x^2)^{n-1}\, dx$$

Esta clase de problemas requieren de integración por partes.

$$u = (a^2-x^2)^n \Longrightarrow du = -2nx\,(a^2-x^2)^{n-1}\, dx, \qquad dv = dx \Longrightarrow v = x$$

Se tiene

$$\int (a^2-x^2)^n\, dx = x(a^2-x^2)^n + 2n \int x^2\,(a^2-x^2)^{n-1}\, dx$$

$$= x(a^2-x^2)^n - 2n \int (-a^2+a^2-x^2)(a^2-x^2)^{n-1}\, dx$$

La integral del segundo miembro se puede escribir en la forma

$$-2n \int (a^2-x^2)^n dx + 2na^2 \int (a^2-x^2)^{n-1} dx$$

Se observa que la integral original (la del primer miembro) se repite en el segundo. Al reunir términos semejantes se llega a

$$(2n+1) \int (a^2-x^2)^n\, dx = x(a^2-x^2)^n + 2na^2 \int (a^2-x^2)^{n-1}\, dx$$

de donde

$$\int (a^2-x^2)^n\, dx = \frac{x\,(a^2-x^2)^n}{2n+1} + \frac{2a^2 n}{2n+1} \int (a^2-x^2)^{n-1}\, dx$$

Ejemplo 2.13.20. *Demostrar que la función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, es periódica si y sólo si $\displaystyle\int_x^{x+T} f(t)\, dt = k$, con k constante, $\forall x \in \mathbb{R}$.*

$\to$) Sean f continua y periódica, $F(x) = \displaystyle\int_x^{x+T} f(t)\, dt$, entonces

$$F(x) = \int_x^c f(t)\, dt + \int_c^{x+T} f(t)\, dt = \int_c^{x+T} f(t)\, dt \; - \; \int_c^x f(t)\, dt$$

Por el primer Teorema fundamental

$$F'(x) = f(x+T) - f(x)$$

como f es periódica, se tiene $F'(x) = 0$ y de esto $F(x) = k$, una constante. Es decir,

$$F(x) = \int_x^{x+T} f(t)\, dt = \text{constante}$$

$\leftarrow$) Suponemos ahora que f es continua y que $\displaystyle\int_x^{x+T} f(t)\, dt = k$, k constante, entonces

$$F'(x) = f(x+T) - f(x) = 0$$

Finalmente

$$f(x+T) - f(x) = 0 \Longrightarrow f(x+T) = f(x)$$

Esto es, f periódica.

Ejemplo 2.13.21. *Demostrar que la función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es impar, si y sólo si $\displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\, dt = k$ $\forall x \in \mathbb{R}$, con k constante.*

$\leftarrow$) Suponemos que f es continua y satisface $\displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\, dt = k$. Probaremos que $f(x) = -f(-x)$

$$F(x) = \int_{-x}^{x} f(t)\, dt = \int_{-x}^{0} f(t)\, dt + \int_0^x f(t)\, dt = \int_0^x f(t)\, dt - \int_0^{-x} f(t)\, dt$$

Aplicando la propiedad de dilatación en la segunda integral del miembro derecho, con $c = 1$, se tiene

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt + \int_0^x f(-t)\, dt$$

y de esto

$$F'(x) = f(x) + f(-x)$$

como $F(x) = \displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\, dt = k$, con k constante implica $F'(x) = 0$, entonces

$$F'(x) = f(x) + f(-x) = 0 \Longrightarrow f(x) = -f(-x)$$

lo que significa f impar.

$\rightarrow$) Sea f función continua e impar. Demostremos que $\displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\, dt = k$

$$\begin{aligned}\int_{-x}^{x} f(t)\,dt &= \int_{-x}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{x} f(t)\,dt\\ &= \int_{-x}^{0} -f(-t)\,dt + \int_{0}^{x} f(t)\,dt, \qquad f(t) = -f(-t)\end{aligned}$$

Por propiedad de dilatación, con $c = -1$, para la primera integral del miembro derecho se tiene

$$\int_{-x}^{0} -f(-t)\,dt = \int_{x}^{0} f(t)\,dt = -\int_{0}^{x} f(t)\,dt$$

con lo cual

$$\int_{-x}^{x} f(t)\,dt = -\int_{0}^{x} f(t)\,dt + \int_{0}^{x} f(t)\,dt = 0, \quad \text{constante}$$

Ejemplo 2.13.22. *Hallar $F'(1)$ si $F(t) = \int_0^x x\,e^x\,dx$.*

La derivada de F, según el primer teorema fundamental es

$$F'(t) = t\,e^t \Longrightarrow F'(1) = e$$

Ejemplo 2.13.23. *Hallar la función $f \neq 0$ tal que $\displaystyle\int_1^x f(t)\,dt = f^2(x)$, $\forall x \geq 0$.*

Se observa que la función f a determinar se encuentra en el integrando, por tanto, derivando (primer teorema fundamental) tenemos:

$$\int_1^x f(t)\,dt = f^2(x) \Longrightarrow f(x) = 2f(x)\,f'(x)$$

de donde,

$$f(x)[1-2f'(x)] = 0 \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \Longrightarrow f(x) = \frac{x}{2} + c$$

Ejemplo 2.13.24. *Hallar la derivada de la función $F(x) = \displaystyle\int_{x^3}^{x^2} (1+t^2)^{-3}\,dt$.*

Para usar el primer teorema fundamental tenemos que separar en dos la integral

$$F(x) = \int_{x^3}^{0}(1+t^2)^{-3}\,dt + \int_0^{x^2}(1+t^2)^{-3}\,dt = -\int_0^{x^3}(1+t^2)^{-3}\,dt + \int_0^{x^2}(1+t^2)^{-3}\,dt$$

Ahora derivamos

$$F'(x) = -3x^2(1+x^6)^{-3} + 2x(1+x^4)^{-3}$$

2.14. Problemas propuestos

1. Sea $A = \{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, 4\}$ una partición de $[\frac{1}{2}, 4]$. Explicar las razones que validan esta afirmación. Indicar cuántos puntos tiene la partición y cuáles son los subintervalos en que queda subdividido el intervalo $[\frac{1}{2}, 4]$. Determinar la norma de esta partición.

2. Sean $P_1 = \{0, \frac{1}{7}, \frac{1}{3}, 1\}$ y $P_2 = \{0, \frac{1}{7}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 1\}$ particiones del intervalo $[0, 1]$.

   a) Construir $P_3 = P_1 \cup P_2$

   b) ¿Es P_3 un refinamiento de P_1 o P_2? Justificar la respuesta.

   c) Calcular la norma de P_1, P_2 y P_3 respectivamente.

3. Sea $P = \{-1, -\frac{3}{4}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\}$ una partición del intervalo $[-1, 2]$. Demostrar que la función

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{si } x \in [-1, 0) \\ 1 + x^2 & \text{si } x \in [0, 1) \\ -3 & \text{si } x \in [1, 2] \end{cases}$$

   es acotada en $[-1, 2]$ y calcular $s(f, P)$ y $S(f, P)$.

4. Probar que:

   a) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2}{n^3 + 1^3} + \frac{n^2}{n^3 + 2^3} + \cdots + \frac{n^2}{n^3 + n^3} \right) = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^3}$

   b) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^{n} k \cdot e^{k/n} = \int_0^1 x\, e^x\, dx$

   c) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right) = \ln 2$

   d) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1^\alpha + 2^\alpha + \cdots n^\alpha}{n^{\alpha+1}} \right) = \frac{1}{1+\alpha}, \quad \alpha > 0$

   e) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n^2+1} + \frac{n+2}{n^2+4} + \cdots \frac{n+n}{n^2+n^2} \right) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2$

5. Suponiendo que $\int_0^1 f(x)\, dx = 6$, $\int_0^2 f(x)\, dx = 4$ y $\int_2^5 f(x)\, dx = 1$, calcular:

   a) $\displaystyle \int_0^5 f(x)\, dx$ *b*) $\displaystyle \int_1^2 f(x)\, dx$ *c*) $\displaystyle \int_1^5 f(x)\, dx$

6. Hallar la suma de Riemann para la función, el intervalo, puntos y partición que se indica:

   a) $f(x) = x^2$, $0 \le x \le 3$, $\epsilon_1 = \frac{1}{4}$, $\epsilon_2 = 1$, $\epsilon_3 = \frac{3}{2}$, $\epsilon_4 = \frac{5}{2}$, $P = \{0, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}, \frac{9}{4}, 3\}$ Resp. $\dfrac{247}{32}$

b) $f(x) = \frac{1}{x}$, $1 \leq x \leq 3$, $\epsilon_1 = \frac{5}{4}$, $\epsilon_2 = 2$, $\epsilon_3 = \frac{5}{2}$, $\epsilon_4 = \frac{11}{4}$, $P = \{1, \frac{4}{3}, \frac{9}{4}, \frac{8}{3}, 3\}$ Resp. $\frac{1469}{1320}$

c) $f(x) = x^2 - x + 1, x \in [0,1], \epsilon_1 = \frac{1}{10}$, $\epsilon_2 = \frac{2}{5}$, $\epsilon_3 = \frac{3}{5}$, $\epsilon_4 = \frac{9}{10}$ $P = \{0, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}, \frac{7}{10}, 1\}$
Resp. $\frac{835}{1000}$

7. Hallar el valor de la integral dada usando el límite en la suma de Riemann:

   a) $\int_0^2 x^2\, dx$ Resp. $\frac{8}{3}$

   b) $\int_1^2 x^3\, dx$ Resp. $\frac{15}{4}$

   c) $\int_{-2}^2 (x^3 + 1)\, dx$ Resp. 4

   d) $\int_1^4 (x^2 + 4x + 5)\, dx$ Resp. 66

8. Hallar el área que se indica, usando el límite de una suma de Riemann:

   a) La región que acotan el eje x y las rectas $y = 2x - 1$, $x = 1$, $x = 5$ Resp. 20

   b) La región que acotan el eje x, y las curvas $y = 4 - x^2$, $x = 1$, $x = 2$. Resp. $\frac{5}{3}$

   c) La región que acotan el eje x y las curvas $y = 12 - x - x^2$, $x = -3$, $x = 2$. Resp. $\frac{305}{6}$

9. Hallar el área de la región dada, usando rectángulos inscritos o circuncritos, según se indique.

   a) La región que acotan $y = x^2$, el eje x y la recta $x = 2$. Usar rectángulos circunscritos.
   Resp. $\frac{8}{3}$

   b) La región que acotan $y = 2x$, el eje x, las rectas $x = 1$, $x = 4$. Usar rectángulos circunscritos. Resp. 15

   c) La región sobre el eje x, a la derecha de la recta $x = 1$, acotada por el eje x, la recta $x = 1$, y la curva $y = 4 - x^2$. Usar rectángulos inscritos. Resp. $\frac{5}{3}$

   d) La región a la izquierda de la recta $x = 1$, acotada por la curva $y = 4 - x^2$, y el eje x. Usar rectángulos circunscritos. Resp. 9

   e) La región que acotan $y = x^4$, el eje x y la recta $x = 1$. Usar rectángulos inscritos.
   Resp. $\frac{1}{5}$

   f) La región que acotan $y = x^3$, el eje x y las rectas $x = -1$, $x = 2$. Usar rectángulos inscritos
   Resp. $\frac{17}{14}$

   g) La región que acotan el eje x, las rectas $x = a$, $x = b$, con $b > a > 0$, y la recta $y = mx$ con $m > 0$. Usar rectángulos circunscritos. Resp. $\frac{1}{2}\, m(b^2 - a^2)$

10. Usar $m(b - a) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq M(b - a)$ para hallar el menor y mayor valor de las siguientes integrales:

    a) $\displaystyle\int_0^4 x^2\, dx$ Resp. 0 y 64

b) $\int_{-3}^{6} \sqrt{3+x}\, dx$ Resp. 0 y 27

c) $\int_{-4}^{0} (x^4 - 8x^2 + 16)\, dx$ Resp. 0 y 576

d) $\int_{-1}^{2} \frac{x}{x+2}\, dx$ Resp. -3 y $\frac{3}{2}$

e) $\int_{1}^{4} |x-2|\, dx$ Resp. 0 y 6

11. Hallar el valor de c que satisfaga el TVM para integrales:

a) $\int_{1}^{2} x^3\, dx$ b) $\int_{1}^{4} (x^2 + 4x + 5)\, dx$ c) $\int_{-2}^{2} (x^3 + 1)\, dx$

Resp. $\frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{30},\ -2 + \sqrt{21},\ 0$

12. Verificar que:

a) $\int_{-3}^{4} |x+2|\, dx = \frac{37}{2}$ b) $\int_{-1}^{1} \sqrt{|x| - x}\, dx = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

13. Hallar la derivada con respecto a x de las integrales que se indican:

a) $\int_{-x}^{x} \frac{dt}{3+t^2}$ b) $\int_{x}^{5} \sqrt{1+t^4}\, dt$ c) $\int_{1}^{x^2} \sqrt{1+t^4}\, dt$

14. Sea $f : [a,b] \to [c,d]$ función biyectiva de clase ζ^1. Probar que

$$\int_{c}^{d} f^{-1}(t)\, dt = bd - ac - \int_{a}^{b} f(x)\, dx$$

Indicación: $t = f(x)$ e integración por partes.

15. Hallar una función $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ de clase ζ^1, tal que

$$\int_{0}^{1} f(kx)\, dx = \frac{1}{3} f(k), \quad \forall k > 0$$

Resp. $z = kx \Longrightarrow f(k) = ck^2$, c real cualquier

16. Verificar, en cada caso, el valor de c tal que:

a) $\int_{1}^{2} x^3\, dx = f(c)(2-1) \Longrightarrow c = \sqrt[3]{\frac{15}{4}}$

b) $\int_{1}^{4} (x^2 + 4x + 5)\, dx = f(c)(4-1) \Longrightarrow c = -2 + \sqrt{21}$

c) $\int_{-2}^{2} (x^2+1)\,dx = f(c)(2+2) \Longrightarrow c =$

17. Hallar la derivada de $F(x) = \int_{x}^{2x} e^{-t^2} dt$, $x \geq 0$. Resp. $e^{-x^2}(2e^{-3x^2} - 1)$

18. Verifica que $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\int_0^{x^2} sen\sqrt{t}\,dt}{x^3} = \dfrac{2}{3}$

19. Sean g_1 y g_2 funciones diferenciables de la variable x. Si f es continua, demostrar que

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(t)\,dt\right) = f(g_2(x))\,g_2'(x) - f(g_1(x))\,g_1'(x)$$

20. Calcular $\dfrac{d}{dx}\left(\int_x^{x^2} \dfrac{dt}{t}\right)$ y $\dfrac{d}{dx}\left(\int_{1-x}^{1+x} \dfrac{(t-1)dt}{t}\right)$

21. Un objeto se mueve con aceleración $a(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t}}$.

    a) Hallar su velocidad en el instante t_0 si su velocidad inicial es de 1 unidad por segundo.

    b) Determinar la posición del objeto en el instante t_0 si su velocidad inicial es de 1 unidad por segundo y su posición inicial es el origen.

22. Hallar la ley general para el movimiento rectilíneo de un objeto que tiene aceleración

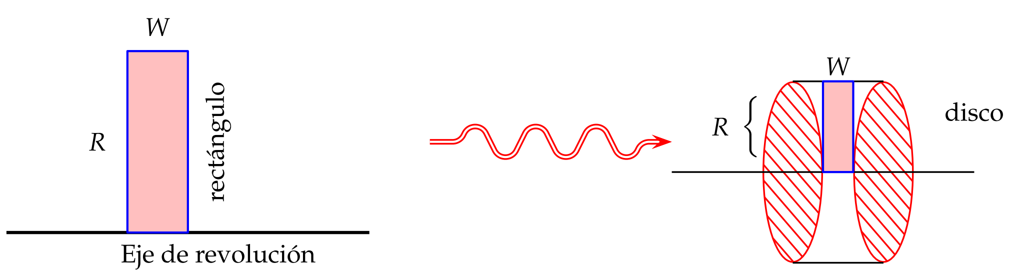
$$a(t) = 45\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}}$$

.

Cuando veáis a un hombre sabio,
pensad en igualar sus virtudes.
Cuando veáis un hombre despro-
visto de virtud, examinaos vosotros
mismos.

Confucio

CAPÍTULO 3 APLICACIONES DE LA INTEGRAL



CAPÍTULO 3

Aplicaciones de la integral definida

Ya hemos visto que las integrales definidas proporcionan el área bajo una curva. Te sorprenderá que magnitudes tan diversas como área, volumen, longitud de arco, masa, momento y otras tengan como base para su determinación el mismo proceso ¡ *el límite de una suma de Riemann*!

3.1. Área de una región

Por lo visto, si una región R está acotada por una función real positiva f, el eje x, y las rectas $x = a$, $x = b$, el área viene dada por la integral definida

$$A(R) = \int_a^b f(x)\,dx$$

También se tuvo la oportunidad de ver, que cuando esta idea de área se extiende a un recinto R más general, como por ejemplo el que muestra la figura 3.1, acotado por dos funciones continuas f y g en el intervalo $[a, b]$, o bien el de la figura 3.2 acotado por dos funciones continuas f y g en el intervalo $[c, d]$, entonces las áreas de cada recinto son:

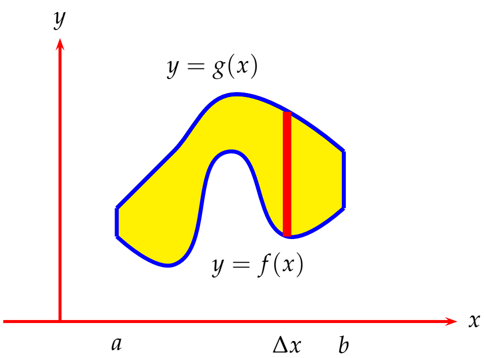


figura 3.1

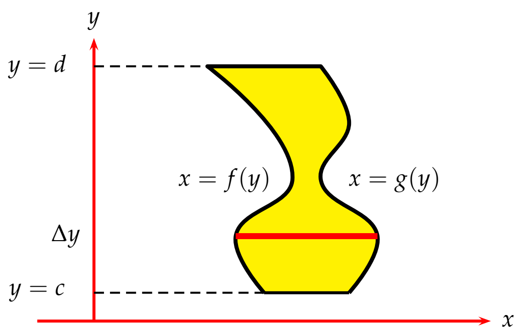


figura 3.2

$$A(R_1) = \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b (g(x) - f(x))\,dx$$

$$A(R_2) = \int_c^d g(y)\,dy - \int_c^d f(y)\,dy = \int_c^d (g(y) - f(y))\,dy$$

A partir de este momento las integrales definidas a calcular son simples. El principal escollo es poner los límites de integración a la integral, para tener éxito en esto, lo primero es leer bien el problema y hacer un bosquejo de la región. Además, si la región está sobre o bajo el eje x, se mira solamente cual es la curva que acota superiormente y cual acota inferiormente, o bien, si se mira desde el eje y, entre la que acota por derecha y la que acota por izquierda. La diferencia entre las curvas que acotan te proporciona de diferencial del área. A continuación vemos como elegir la diferencial de área.

- Diferencial en x

En este caso la variable de integración es x, por tanto, un rectángulo genérico dibujado en la región R (figura 3.1) tiene altura $g(x) - f(x)$ y base $\Delta x = dx$. Su diferencial de área es

$$dA = (g(x) - f(x))\,dx$$

Al sumar todas estas diferenciales se obtiene el área de R. Esto es,

$$dA = (g(x) - f(x))\,dx \Longrightarrow A = \int_a^b (g(x) - f(x))\,dx$$

- Diferencial en y

En este caso el rectángulo genérico es paralelo al eje x (figura 3.2), con base dy y de altura $g(y) - f(y)$. Su diferencial de área es

$$dA = (g(y) - f(y))\,dy$$

Como antes, al sumar todas estas diferenciales se obtiene el área de R. Esto es,

$$dA = (g(y) - f(y))\,dy \Longrightarrow A(R) = \int_c^d (g(y) - f(y))\,dy$$

En algunos problemas es necesario usar una mezcla de diferenciales debido a que una curva f puede ser mayor que otra curva g en una parte del intervalo de integración y menor en otra parte de dicho intervalo. Así que cuidado con esto.

Ejemplo 3.1.1. *Se considera la región R que acotan $y = x^2$ e $y = 4x - x^2$.*

Tal como se ha dicho, lo primero es hacer un bosquejo del recinto (figura 3.3).

Una vez hecho el dibujo del recinto viene la decisión de elegir la diferencial, y para ello es fundamental resolver rápidamente, trazando mentalmente el rectángulo genérico y ver aquél que simplifica el problema (menor cantidad de integrales). En términos de x la diferencial es:

$$dA = ((4x - x^2) - x^2)\,dx$$

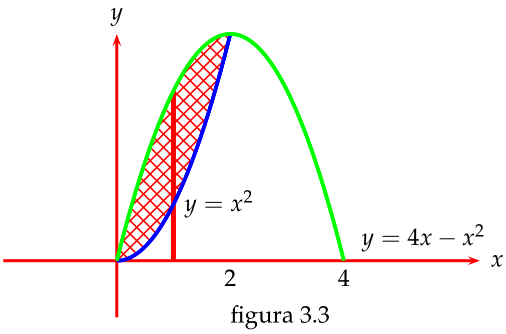


figura 3.3

Debe quedar claro que ello se obtuvo trazando una recta paralela al eje y y sobre el recinto. Esto permite ver que la curva superior es $y = 4x - x^2$ y la inferior $y = x^2$. Así se construye el rectángulo genérico, que permite obtener la diferencial. Los puntos de intersección son:

$$(0,0) \text{ y } (2,4)$$

Ahora anotamos la integral que define el área con la diferencial en x

$$A(R) = \int_0^2 (4x - 2x^2)\,dx = \frac{8}{3}$$

Sólo para complementar, en términos de y la diferencial es

$$dA = (\sqrt{y} - (2 - \sqrt{4+y}))\,dx$$

Luego, la integral, con diferencial en y que proporciona el área de la región es

$$A(R) = \int_0^4 (\sqrt{y} - 2 + \sqrt{4+y})\,dy$$

Ejemplo 3.1.2. *El área de la región R acotada por las rectas $x = 1, x = 2, y = 3x$ y la parábola $y = x^2$ es*

$$A(R) = \int_1^2 (3x - x^2)\,dx = \left(\frac{3}{2}\,x^2 - \frac{1}{3}\,x^3\right)_1^2 = \frac{13}{6}$$

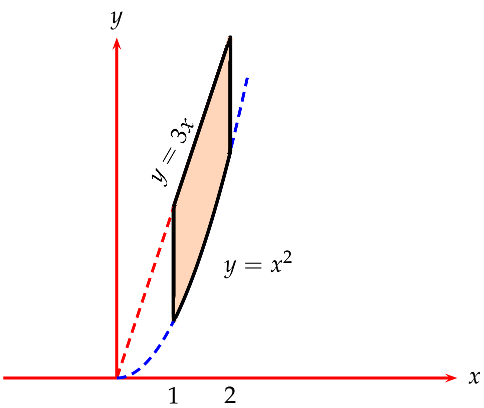


figura 3.4

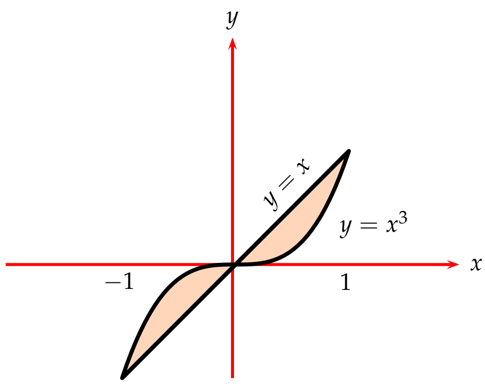


figura 3.5

La región R es la que muestra la figura 3.4. Ella está acotada, a la izquierda por la recta $x = 1$, a la derecha por la recta $x = 2$, superiormente por la recta $y = 3x$, e inferiormente por la parábola $y = x^2$. La diferencial en x es

$$dA = (3x - x^2)\,dx$$

Ejemplo 3.1.3. *El área de la región limitada por la curva $y = x^3$ y la recta $y = x$ se determina considerando dos recintos.*

La figura 3.5 muestra el recinto. Se tiene

$$A(R) = \int_{-1}^{0} (x^3 - x)\,dx + \int_{0}^{1} (x - x^3)\,dx = \frac{1}{2}$$

Una vez más, dA ha sido considerada en dirección del eje x.

Veamos un par de ejemplos que muestren que el cálculo del área de una región plana se puede realizar en dirección del eje x, o bien en dirección del eje y. Esto es, consideraremos ambas dA.

Ejemplo 3.1.4. *Calcular el área de la región R acotada por la curva $y^2 = x$ y la recta $x = 4$.*

La figura 3.6 muestra el recinto. Tenemos:

- En dirección del eje x

$$A(R) = \int_{0}^{4} \left(\sqrt{x} - (-\sqrt{x})\right)\,dx = \frac{32}{3}, \qquad dA = \left(\sqrt{x} - (-\sqrt{x})\right)dx = 2\sqrt{x}\,dx$$

- En dirección del eje y

$$A(R) = \int_{-2}^{2} \left(4 - y^2\right)\,dy = \frac{32}{3}, \qquad dA = (4 - y^2)\,dy$$

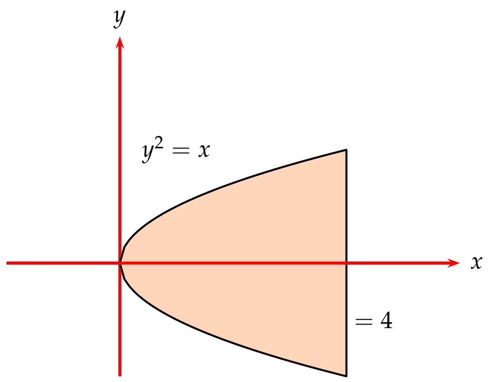


figura 3.6

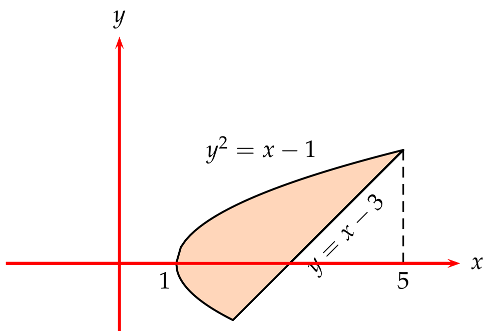


figura 3.7

Ejemplo 3.1.5. *Calcular el área de la región R limitada por la curva $y^2 = x - 1$, y la recta $y = x - 3$.*

La figura 3.7 muestra la región a la que calculamos el área. Hacemos el cálculo en ambas direcciones sólo como ejercitación. Por lo general, o salvo que se indique lo contrario, el cálculo del área debe hacerse mediante el procedimiento más simple.

- En dirección del eje y
$$A(R) = \int_{-1}^{2} \left[(y+3) - (y^2+1) \right] dy = \frac{9}{2}$$
- En dirección del eje x

$$A(R) = \int_{1}^{2} \left[\sqrt{x-1} - (-\sqrt{x-1}) \right] dx + \int_{2}^{5} \left[\sqrt{x-1} - (x-3) \right] dx = \frac{9}{2}$$

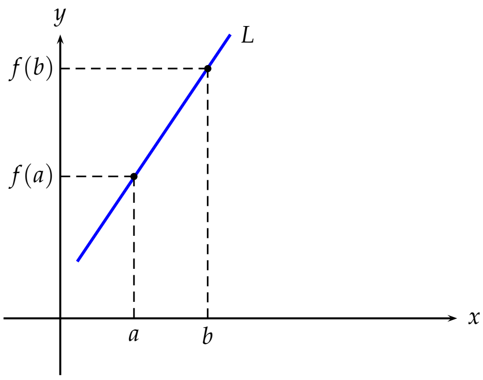


figura 3.8

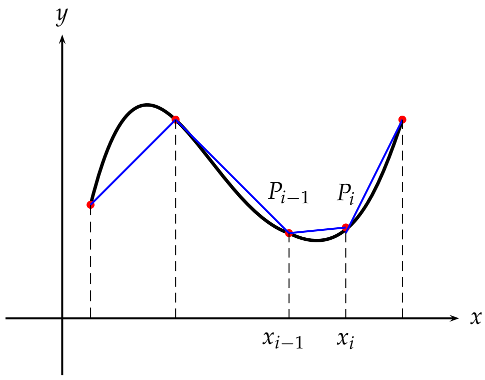


figura 3.9

3.2. Longitud de una curva

Si f es una función continua sobre $[a,b]$, entonces su gráfica se denomina **curva** o **trayectoria**. A la longitud de esta curva queremos asignarle una medida. Para aproximarnos un poco a este objetivo, pensemos que la curva fuese una recta, entonces

$$L = \sqrt{(f(b) - f(a))^2 + (b-a)^2}$$

es la longitud de la curva (figura 3.8). De este modo, parece razonable tratar de obtener la longitud de una curva considerando pequeños segmentos rectilíneos sobre la curva, sumarlos y considerar algún tipo de límite. Esto debe traer a la memoria el trabajo con particiones. Es lo que hacemos (figura 3.9). Sea $P = \{a = x_0 < x_1 \cdots < x_n = b\}$ partición de $[a,b]$. La longitud de cada segmento rectilíneo que une P_{i-1} con P_i es $|\overline{P_{i-1}\, P_i}|$, $1 \leq i \leq n$, y la suma s_n de tales segmentos es

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} |\overline{P_{i-1}\, P_i}| = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} \tag{3.1}$$

El **teorema del valor medio** para una función f continua sobre $[a,b]$ y diferenciable sobre (a,b), asegura la existencia de un punto $c \in (a,b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Aplicando este hecho en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, y teniendo presente que $f(x_{i-1}) = y_{i-1}$, $f(x_i) = y_i$, entonces existe c_i en el intervalo (x_{i-1}, x_i) tal que

$$f'(c_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

Lo cual escribimos en la forma

$$f'(c_i)\,(x_i - x_{i-1}) = y_i - y_{i-1}$$

Al reemplazar en la ecuación 4.1 se tiene

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\,(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\,\Delta I_i$$

Este valor s_n es una suma de Riemann que corresponde a la partición P, de la función $f(x) = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$. Si la norma de la partición P tiende a cero, entonces la suma de Riemann tiene por límite a la integral

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$$

Toda curva que tenga longitud recibe el nombre de **rectificable**. Es común usar la letra s o bien la letra L para denotar la longitud de una curva. A partir de la expresión que define la longitud de arco de una curva se obtiene la diferencial de arco ds. En efecto,

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx \Longrightarrow ds = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$$

Esta diferencial de arco puede escribirse en términos de la variable y usando regla de la cadena. Se tiene

$$\frac{ds}{dy} = \frac{ds}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \cdot \frac{dx}{dy} = \sqrt{1 + [\,\frac{dx}{dy}\,]^2}$$

de donde

$$ds = \sqrt{1 + [\,\frac{dx}{dy}\,]^2}\,dy = \sqrt{1 + [\,x'\,]^2}\,dy$$

La importancia de escribir la diferencial en una u otra forma tiene que ver con el cálculo de la integral que define la longitud de la curva.

Ejemplo 3.2.1. *La longitud de la curva* $y = \dfrac{2}{3}x^{3/2}$*, entre los puntos* $(0,0)$ *y* $(1, \frac{2}{3})$ *se calcula como sigue*

Elegimos la diferencial en la variable x. Por tanto

$$y = \frac{2}{3}x^{3/2} \Longrightarrow y' = x^{1/2}$$

Luego,

$$s = \int_0^1 \sqrt{1 + (\,x^{1/2}\,)^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1+x}\,dx = (x+1)^{3/2} \cdot \frac{2}{3}\bigg|_0^1 = \frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1\,)$$

3.3. Masa

La *masa* es la medida de cuánta materia hay en un objeto, es una cantidad fija. El *peso* de un objeto es una medida de qué tanta fuerza ejerce la gravedad sobre ese objeto, esto es, el peso es una cantidad variable, y varía en función de la aceleración de la gravedad. La masa de una persona es la misma no importa si está en la tierra, en la luna, o flotando en el espacio, porque la cantidad de materia de la que está hecho no cambia. Pero su peso depende de cuánta fuerza gravitatoria esté actuando sobre la persona en ese momento, en la luna pesa menos que en la tierra, y en el espacio pesa casi cero.

La masa está relacionada con el peso mediante la segunda ley de Newton

$$W = M \cdot g$$

en donde, W es el peso del objeto (fuerza de la gravedad), M es la masa del objeto, y g es la aceleración de la gravedad en la tierra.

Aunque toda la materia posee masa y volumen, la misma masa de sustancias diferentes ocupan distintos volúmenes, así por ejemplo, notamos que el hierro o el hormigón son pesados, mientras que la misma cantidad de goma de borrar o plástico son livianas. La propiedad que nos permite medir lo liviano o pesado de un objeto se llama *densidad*. Cuanto mayor sea la densidad de un cuerpo, más pesado nos parecerá. De esta forma, el concepto densidad tiene que ver con la composición y espesor de la materia.

La densidad ρ se define como el cociente entre la masa de un cuerpo y el volumen que ocupa.

$$\rho = \frac{M}{V}$$

Si la densidad es la misma en todas partes de un cuerpo, entonces se dice que el cuerpo es *homogéneo*, y se tiene, de la ecuación anterior, que "La masa es directamente proporcional al volumen del cuerpo", es decir,

$$M = \rho\, V$$

En particular, un alambre se dice homogéneo si su masa es directamente proporcional a su longitud ($M = \rho\, s$), y una región plana es homogénea si su masa es directamente proporcional a su área ($M = \rho\, A$).

3.4. Masa de una región

Sea R la región homogénea que muestra la figura 3.10. Consideremos que P es una partición del intervalo $[a, b]$. Se elige un rectángulo genérico R_i, para el cual, w_i es el punto medio del intervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

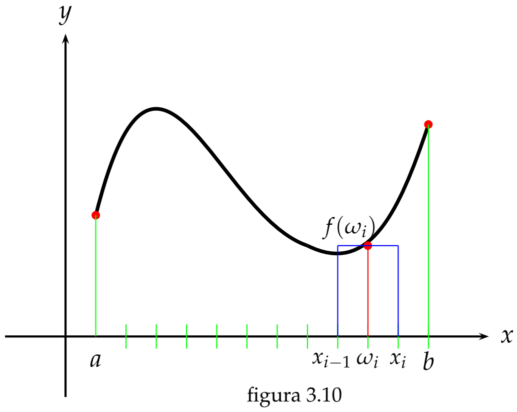


figura 3.10

El área de tal rectángulo es $A_i = f(w_i)\,\Delta I_i$. De aquí que su masa, M_i, sea

$$M_i = \rho\, f(w_i)\,\Delta I_i$$

La suma de las masas es

$$M \sim \sum_{i=1}^{n} \rho\, f(w_i)\,\Delta I_i$$

Así, la masa total, M, de la región es

$$M = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \rho\, f(w_i)\,\Delta I_i$$

Si f es continua, entonces

$$M = \int_a^b \rho\, f(x)\,dx$$

Ejemplo 3.4.1. *Una placa cubre la región del plano xy que acotan la curva $y = x^2$, el eje x y la recta $x = 1$. Si la densidad en cada punto es $\rho(x, y) = x^{\frac{1}{3}}$, hallemos la masa de la región.*

La figura 3.11 muestra la región que ocupa la placa. La densidad viene dada en términos de x, por lo que es conveniente considerar la diferencial de área en esa variable. Tenemos que

$$M = \int_a^b \rho\, f(x)\,dx = \int_0^1 x^{1/3}\, x^2 dx = \int_0^1 x^{\frac{7}{3}}\,dx = \frac{3}{10}$$

La diferencial de área dA en términos de y es

$$dA = (1 - \sqrt{y})\,dy$$

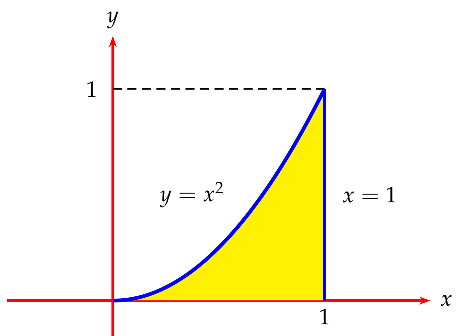


figura 3.11

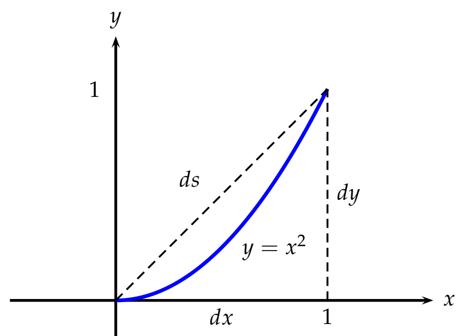


figura 3.12

3.5. Masa de un alambre

Si un alambre homogéneo tiene la "forma" de una curva plana en $[a, b]$, con densidad ρ, entonces la **masa total** M del alambre es

$$M = \int_a^b \rho \, ds = \int_a^b dM$$

dM se llama "diferencial de masa", ds es la diferencial de arco.

La diferencial de arco, al igual que la de área, es posible obtenerla en términos de la diferencial de x, o bien de la diferencial de y. Lo importante es saber elegir la adecuada a usar en el problema dado.

Ejemplo 3.5.1. *Un alambre tiene la forma de la curva* $y = x^2$*, para* $0 \leq x \leq 1$*. La densidad en cada punto es* $\rho(x, y) = \sqrt{y}$*. Hallar su masa.*

La figura 3.12 muestra la forma del alambre. Recordemos que la diferencial del arco se determina a partir de

$$s = \int_a^x \sqrt{1 + 4x^2} \, dx \Longrightarrow ds = \sqrt{1 + 4x^2} \, dx$$

Al elegir esta diferencial tenemos que

$$M = \int_0^1 \sqrt{y} \, ds = \int_0^1 x \sqrt{1 + 4x^2} \, dx$$

Para calcular esta integral, si $z = 1 + 4x^2$, entonces $dz = 8xdx$. Para los límites de integración, $x = 0 \Longrightarrow z = 1$, $x = 1 \Longrightarrow z = 5$. De este modo

$$M = \int_1^5 \frac{1}{8} \sqrt{z} \, dz = \left. \frac{z^{\frac{3}{2}}}{12} \right|_1^5 = \frac{5\sqrt{5} - 1}{12}$$

NOTA ▷

- Sobre una curva siempre se puede reemplazar y por su equivalente en x, según $y = f(x)$
- ¡Esto no se puede hacer en regiones!, en cada punto *no es* $y = f(x)$

3.6. Momentos y Centros de Masa

- *Para una partícula*

Iniciamos el estudio de los momentos considerando en primer término, masas puntuales o partículas. Si L es cualquier recta del plano (figura 3.13), entonces el *momento* de masa o primer momento M_L de una partícula de masa m respecto de la recta L es el producto $m \cdot d$, siendo d la distancia del punto donde se ubica la partícula a la recta. Esto es, $M_L = m \cdot d$

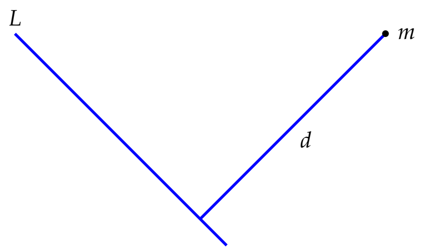


figura 3.13

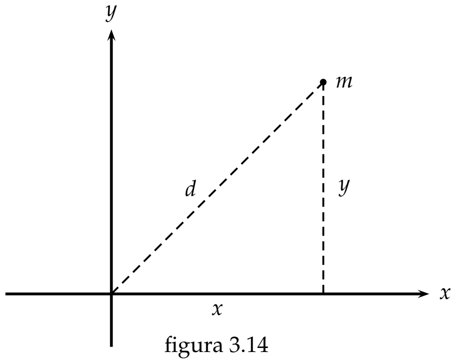


figura 3.14

El momento de la partícula de masa m respecto del *origen* es igual $m \cdot d$, con d la distancia del origen al punto de masa m. La figura 3.14 ilustra lo anterior, y el caso particular, de los momentos de una partícula de masa m respecto de los ejes coordenados. En este último caso se usan las notaciones:

$$M_x = m \cdot y, \quad M_y = m \cdot x$$

para indicar, por M_x el momento respecto del eje x, y por M_y el momento respecto del eje y.

En lenguaje físico, el momento mide las tendencia de la partícula a girar en torno a la recta L (lo mismo para sistema, región, alambre o sólido)

- *Para un sistema de partículas*

Para un sistema de n partículas de masas m_i ubicadas en los puntos (x_i, y_i), los momentos del sistema, respecto de los ejes coordenados son

$$M_x = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot y_i, \quad M_y = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot x_i$$

3.6.1. Equilibrio - centro de masa

Sea L una recta que coincide con el eje x, y consideremos dos partículas de masas m_1 y m_2 ubicadas en los puntos de coordenadas $x_1 > 0$ y $x_2 < 0$, respectivamente (figura 3.15). El conjunto formado por estas dos masas puntuales se encuentra en **equilibrio** si

$$m_1\, x_1 = m_2\, |x_2|, \qquad x_2 < 0$$

lo que equivale a

$$m_1\, x_1 + m_2\, x_2 = 0$$

es decir, la suma de los momentos respecto al origen es cero.

Si las partículas no están en equilibrio, entonces existe un punto $\overline{x}$ en el cual se puede estar en equilibrio. Hallemos una expresión matemática para este $\overline{x}$ que muestra la figura 3.16.

figura 3.15

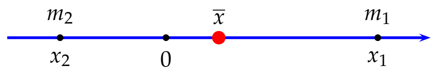


figura 3.16

$$m_1(x_1 - \overline{x}) = m_2(-x_2 + \overline{x}) \Longrightarrow m_1(x_1 - \overline{x}) - m_2(-x_2 + \overline{x}) = 0$$

$$\Longrightarrow (m_1 + m_2)\overline{x} = m_1 x_2 + m_2 x_2$$

$$\Longrightarrow \overline{x} = \frac{m_1\, x_1 + m_2\, x_2}{m_1 + m_2}$$

esto significa que el **centro de masa** es la suma de los momentos dividido por la masa total.

Si ahora se considera un sistema S de n partículas, cada una con masa m_i, y ubicadas sobre el eje x, el momento de cada partícula respecto del origen es $m_i \cdot x_i$, en donde x_i representa la distancia dirigida de la partícula al origen (figura 3.17). De este modo, el centro de masa del sistema S es

$$\overline{x} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \cdots m_n}$$

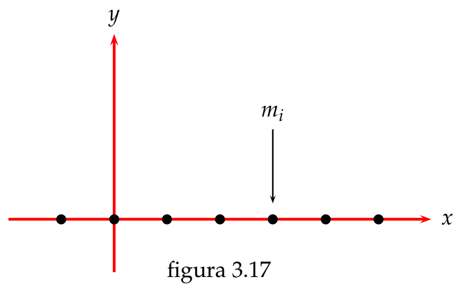


figura 3.17

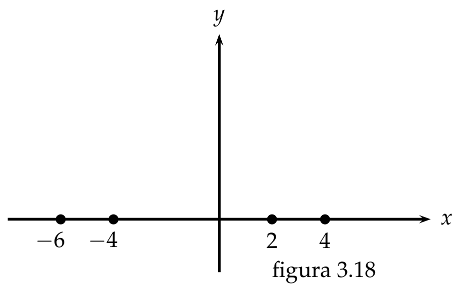


figura 3.18

Ejemplo 3.6.1. *Cuatro masas de* 2, 3 , 2, 1 *gramos se encuentran ubicadas en los puntos* $(4,0)$, $(2,0)$, $(-4,0)$ *y* $(-6,0)$. *Su centro de masa es*

$$\overline{x} = \frac{2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-4) + 1 \cdot (-6)}{2 + 3 + 2 + 1} = 0, \quad \overline{y} = 0$$

En general, si un sistema S de n masas está distribuido en varios puntos del plano xy, entonces

$$\overline{x} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}, \qquad \overline{y} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \cdots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}$$

Ejemplo 3.6.2. *Tres masas de* 1, 2 *y* 3 *gramos están situadas en los puntos* $(1,3)$, $(-2,1)$ *y* $(4,-2)$, *respectivamente (figura 3.19). El centro de este sistema es*

$$\overline{x} = \frac{1 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 + 3 \cdot 4}{1 + 2 + 3} = \frac{3}{2}, \qquad \overline{y} = \frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-2)}{1 + 2 + 3} = -\frac{1}{6}$$

Observar que el centro de masa está !fuera! del sistema

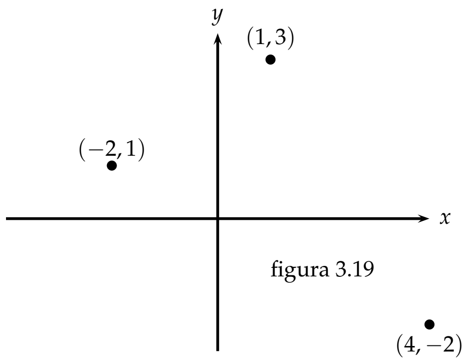


figura 3.19

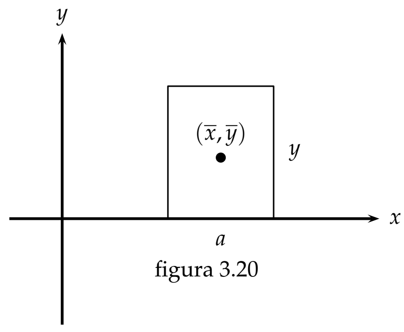


figura 3.20

- *Centro de masa de un rectángulo*

Se considera el sistema S consistente en un rectángulo de base a y altura b, con densidad uniforme ρ, entonces el centro de masa se encuentra en el centro del rectángulo (figura 3.20). Los momentos de masa respecto de los ejes x e y, son

$$\overline{y} = \frac{M_x}{M} \Longrightarrow M_x = \text{masa} \cdot \text{distancia al eje } x = (ab\rho) \cdot \overline{y}$$
$$\overline{x} = \frac{M_y}{M} \Longrightarrow M_y = \text{masa} \cdot \text{distancia al eje } y = (ab\rho) \cdot \overline{x}$$

En este caso, $ab\rho$ es la masa.

Para hallar el centro de masa de una región compuesta por una combinación de rectángulos de densidad uniforme ρ, se determinan los $(\overline{x_i}, \overline{y_i})$ de cada uno de ellos. Luego se consideran masas puntuales.

Ejemplo 3.6.3. *Hallar $(\overline{x}, \overline{y})$ para el sistema S de la figura 3.21*

Suponemos que la densidad en cada punto del sistema es ρ. En la figura 3.21 se consideran tres rectángulos:

$$S_1 = [-4,-2] \times [0,4], \qquad S_2 = [-2,2] \times [0,1], \qquad S_3 = [2,4] \times [0,2]$$

Los centros de masa son, respectivamente:

$$(-3,2), \qquad (0,\frac{1}{2}) \qquad \text{y} \qquad (3,1)$$

La masa total de cada S_i es $8\rho, 4\rho, 4\rho$, de manera que

$$\overline{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{8\rho(-3) + 0 \cdot 4\rho + 4\rho \cdot 3}{16\rho} = -\frac{3}{4} \qquad \text{y} \qquad \overline{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{8\rho(2) + 4\rho(\frac{1}{2}) + 4\,\rho \cdot 1}{16\rho} = \frac{11}{8}$$

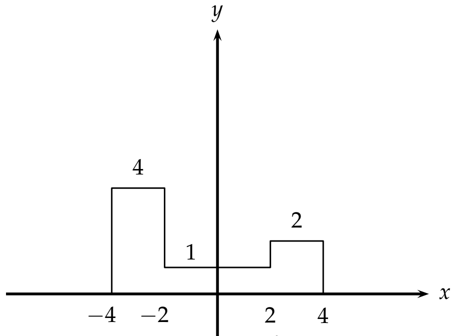


figura 3.21

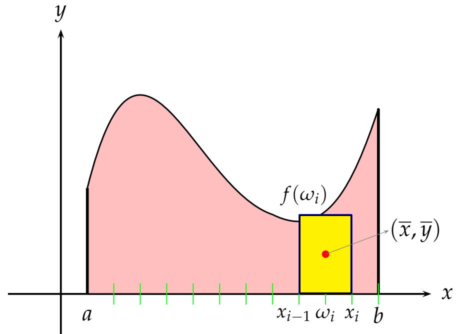


figura 3.22

- *Momento y Centro de regiones*

Para regiones más generales que un rectángulo, tal como la que muestra la figura 3.22, los momentos y centros de masa se obtienen al "estilo" Riemann. Es decir, se considera una partición P del intervalo $[a, b]$, se elige un rectángulo genérico R_i de altura $f(w_i)$ y longitud de la base igual a $\Delta I_i = x_i - x_{i-1}$, cuyo centro de masa es el punto medio del rectángulo

$$(\overline{x}, \overline{y}) = (w_i, \frac{1}{2}\, f(w_i)), \quad w_i = \frac{1}{2}\,(\, x_i + x_{i-1}\,)$$

La masa de este i-ésimo rectángulo es $M_i = \rho\, f(w_i) \triangle I_i$, en donde ρ es la densidad. El momento de masa de este elemento respecto del eje y es

$$M_y = \text{masa} \ \times \ \text{distancia al eje } \mathbf{y} = \rho\, f(w_i)\, \triangle I_i \times w_i$$

Considerando estas masas puntuales, el momento de masa de la región es

$$M_y = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \rho\, w_i\, f(w_i)\, \triangle I_i$$

Si f es una función continua, entonces esta suma de Riemann tiene por límite una integral. Esto es,

$$M_y = \int_R \rho\, x\, f(x)\, dx = \int_R \rho\, x\, dA$$

la que representa el **momento** de la región respecto al eje y.

Para el momento de la región respecto del eje x, se tiene que el momento del i-ésimo rectángulo (el genérico de la figura 3.22) es

$$M_x = \rho\, f(w_i) \cdot \frac{1}{2}\, f(w_i)\, \triangle I_i$$

Luego, el momento de masa de toda la región, respecto del eje x es

$$M_x = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \rho\, f^{\,2}(w_i)\, \triangle I_i$$

Si f es integrable, esto se traduce en la expresión

$$M_x = \frac{1}{2} \int_a^b \rho\, f^{2}(x)\, dx$$

que representa el **momento** de la región respecto al eje x. Debe tenerse presente que con esta fórmula se está obligado a tomar la integral respecto de la variable x. Además, es importante señalar que estas fórmulas son válidas para esa clase de recintos. Para recintos acotados por dos curvas hay que hacer la diferencia de ambas respecto del eje. Esto se indica en un ejemplo posterior.

Definición 3.6.4. *Sea R región del plano y L una recta. El momento de la región respecto a la recta L, que se anota M_L está dado por*

$$M_L = \int_R d \cdot \rho\, dA$$

$dM = \rho\, dA$ es la diferencial de masa de la región de área A, d la distancia de cualquier punto de R a la recta L, ρ la densidad y dA la diferencial del área de R.

Esta fórmula de los momentos resulta sencilla de usar, y en particular, para los momentos respecto de los ejes coordenados se tiene

$$M_x = \int_a^b y \cdot \rho \cdot dA, \quad M_y = \int_a^b x \cdot \rho \cdot dA$$

estas expresiones son equivalentes a las encontradas con anterioridad. Ahora los cálculos son más sencillos puesto que uno elige la diferencial, dependiendo esto del momento a calcular. El siguiente ejemplo muestra esto.

Ejemplo 3.6.5. *Hallar el centro de masa de la región R que acotan las curvas $y^2 = 4x$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$. La densidad $\rho(x, y) = 1$.*

La figura 3.23 muestra la región a la que se va a determinar el centro de masa. Como la densidad es 1, entonces masa=área. Luego,

$$A(R) = \int_1^4 \sqrt{4x}\, dx = \frac{28}{3}$$

Respecto de los momentos se tiene:

$$M_y = \int_R x\, dA = \int_1^4 x \cdot \sqrt{4x}\, dx = 2 \int_1^4 x^{3/2}\, dx = \frac{124}{5}$$

Se eligió la diferencial en términos de x pues aparece una x en el integrando. Para el M_x podemos usar

$$M_x = \frac{1}{2} \int_1^4 y^2\, dx = \frac{1}{2} \int_1^4 4x\, dx = 15$$

Observar que en esta forma, la integral es obligatoriamente respecto de la variable x. Como la fórmula en sí no es fácil de recordar, veamos que sucede cuando se usa $M_x = \int_R y\, dA$.

$$M_x = \int_R y\, dA = \int_1^2 y \cdot (4 - 1)\, dy + \int_2^4 y \cdot (4 - \frac{y^2}{4})\, dy = 15$$

Aunque se tuvo que descomponer en dos integrales, lo que implica un trabajo mayor, esta forma de cálculo del M_x es fácil de recordar. De esta forma

$$\overline{x} = \frac{124}{5} \cdot \frac{3}{28} = \frac{93}{35} \qquad \text{y} \qquad \overline{y} = 15 \cdot \frac{3}{28} = \frac{45}{28}$$

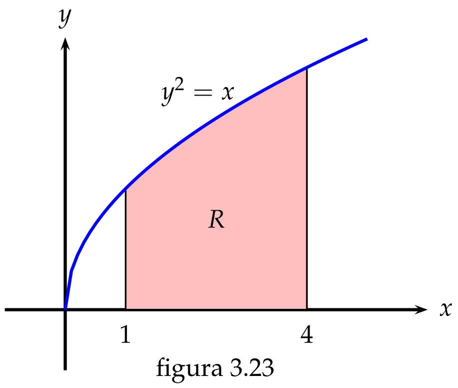


figura 3.23

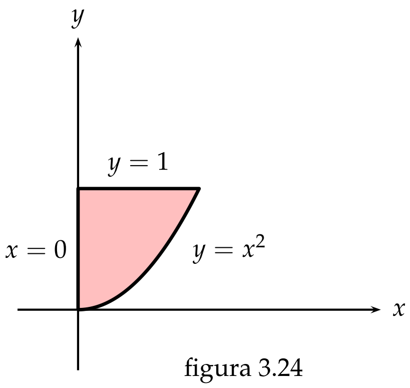


figura 3.24

Ejemplo 3.6.6. *Hallar los momentos M_x, M_y, de la región que acotan $y = x^2$, $x = 0$, $y = 1$.*

En este ejemplo, figura 3.24, queremos mostrar como es la elección de la diferencial de área. Se sabe que la densidad es 1, pues se habla de centroide. Veamos el momento M_y.

$$M_y = \int_0^1 x \cdot 1 \cdot dA = \int_0^1 x\,(1 - x^2)\,dx = \frac{1}{4}$$

En este caso se tomó la diferencial de área en función de la variable x (en dirección del eje x). La integral resultó sencilla de calcular. Para elegir la diferencial de área en función de la diferencial de y hacemos lo siguiente: Se elige un rectángulo genérico R_i, tal como se muestra en la figura 3.25. El centroide de este rectángulo se encuentra en el punto (x_i, y_i), con

$$x_i = \frac{1}{2}[f(y) + g(y)], \qquad y_i = y_i$$

De esta forma hemos encontrado x en función de y. Con ello, el momento M_y lo podemos escribir y calcular, en la forma

$$M_y = \int_0^1 \frac{1}{2}\,(0 + \sqrt{y})\,dA = \int_0^1 \frac{1}{2}\,(0 + \sqrt{y})\,\sqrt{y}\,dy = \frac{1}{4}$$

Para el momento M_x se tiene que $M_x = \displaystyle\int_a^b y\,dA$. Si se considera $dA = \sqrt{y}\,dy$, entonces

$$M_x = \int_0^1 y \cdot \sqrt{y}\,dy = \frac{2}{5}$$

Si se considera la diferencial de área en función de la variable x, se tiene $dA = (1 - x^2)\,dx$. En el rectángulo genérico que muestra la figura 3.26 el centro de masa se encuentra en el punto

$$x_i = x_i, \qquad y_i = \frac{1}{2}\,[f(x) + g(x)]$$

De este modo

$$M_x = \int_0^1 y\,dA = \frac{1}{2}\int_0^1 (\,1 + x^2\,)(\,1 - x^2\,)\,dx = \frac{2}{5}$$

El cálculo del centroide requiere del área de la región.

$$A = \int_0^1 (\,1 - x^2\,)\,dx = \frac{2}{3}$$

En consecuencia

$$\overline{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{2} = \frac{3}{8}, \qquad \overline{y} = \frac{M_x}{A} = \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{2} = \frac{3}{5}$$

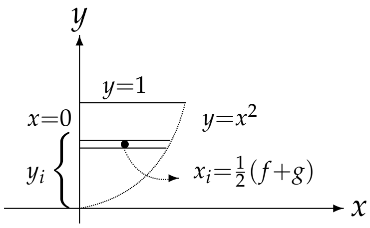


figura 3.25

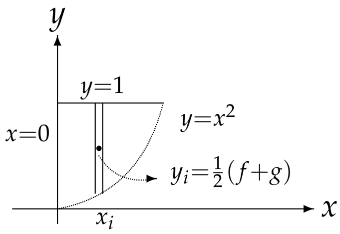


figura 3.26

- *Momento de un alambre*

Suponemos que un alambre está representado en el plano por una función continua f sobre un intervalo I. Sea L una recta en el plano. El **momento** del alambre respecto a la recta L es

$$M_L = \int_I d\cdot\rho\,ds$$

$dM = \rho\,ds$ es la diferencial de masa del alambre, d la distancia de un punto sobre el alambre a la recta L.

En particular, los momentos de un alambre respecto de los ejes coordenados son

$$M_y = \int_I x\cdot\rho\,ds, \quad M_x = \int_I y\cdot\rho\,ds$$

Ejemplo 3.6.7. *La curva $y = x^3$ para $x \in [0,1]$ representa un alambre cuya densidad en cada punto es $\rho(x,y) = 2$. Hallar el momento del alambre respecto del eje x.*

Se aplica la definición

$$M_x = \int_0^1 y \cdot 2 \cdot \sqrt{1+[y']^2}\,dx = 2 \cdot \int_0^1 x^3 \cdot \sqrt{1+9x^4}\,dx = \frac{1}{18}\,\left[(1+9x^4)^{3/2}\right]_0^1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{27} \cdot (10^{3/2}-1)$$

La diferencial de arco se eligió en función de la variable x. Al igual que para regiones, uno puede optar por la diferencial y elegir la que estime conveniente. Por ejemplo, la diferencial en y es

$$ds = \sqrt{1+x'^2}\,dy = \sqrt{1+\frac{1}{9}y^{-4/3}}\,dy = \frac{1}{3}\,y^{-2/3}\,\sqrt{1+9\,y^{4/3}}\,dy$$

Es claro que esta última fórmula es más complicada que la anterior.

- *Centro de masa de un alambre*

Consideremos un alambre unidimensional descrito por una función $y = f(x)$, entre los puntos A y B de coordenadas $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ respectivamente. Se supone que este alambre está hecho de un material uniforme de densidad $\rho(x,y) = 1$, con el fin que la masa total sea numéricamente igual a la longitud de la curva.

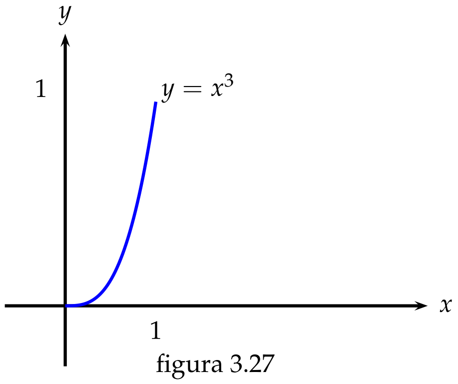


figura 3.27

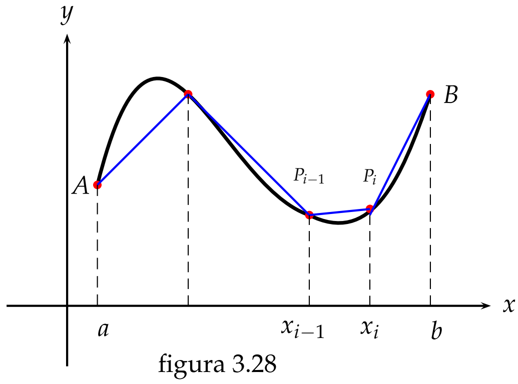


figura 3.28

Si P una partición del intervalo $[a,b]$, entonces el arco AB de la curva se subdivide en pequeños subarcos, de tal forma que se tiene $\{A = P_0, P_1, \cdots, P_n = B\}$. Ahora se aproxima cada subarco por un segmento rectilíneo (figura 3.28). Como el centro de masa de cada uno de estos segmentos se encuentra en el punto medio, la aproximación al centro de masa del alambre será la del sistema de masas puntuales. Esto es,

$$\overline{x} \sim \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (\triangle s_i) \cdot \overline{x}_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (\triangle s_i)}, \qquad \overline{y} \sim \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (\triangle s_i) \cdot \overline{y}_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (\triangle s_i)}$$

en donde $\triangle s_i$ es la longitud del arco $\overline{P_{i-1}P_i}$. Al tomar límite de $n \to \infty$ estas sumas equivalen a las integrales de Riemann.

$$\overline{x} = \frac{\displaystyle\int_I x\,ds}{\displaystyle\int_I ds} = \frac{M_y}{s}, \qquad \overline{y} = \frac{\displaystyle\int_I y\,ds}{\displaystyle\int_I ds} = \frac{M_x}{s}$$

En términos físicos, el **centro de masa** es el punto $(\overline{x}, \overline{y})$ para el que un alambre, una región o un cuerpo de masa M concentra toda su masa para efectos de sus momentos.

Ejemplo 3.6.8. *Hallar el centro de masa del alambre descrito por la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$, ubicada en el primer cuadrante.*

En la figura 3.29 se observa que la recta $y = x$ es eje de simetría, luego, $\overline{x} = \overline{y}$. Hallemos la diferencial en términos de x.

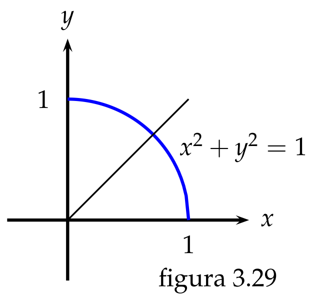


figura 3.29

$$y = \sqrt{a^2 - x^2} \Longrightarrow y' = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \Longrightarrow y'^2 = \frac{x^2}{a^2 - x^2}$$

Por tanto,

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}} dx = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx$$

Para el cálculo de $\overline{x} = \dfrac{M_y}{s}$ tenemos

$$M_y = \int_0^a x\, ds = \int_0^a x \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}}\, dx = a \int_0^a \frac{x\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = a^2 \int_0^{\pi/2} sen\, \theta\, d\theta = a^2$$

La longitud total de la circunferencia es $2\pi a$, su cuarta parte es $\frac{a\pi}{2}$. En consecuencia,

$$\overline{x} = \frac{2a}{\pi} = \overline{y}$$

3.7. Volumen de revolución

Ahora nos dedicamos al estudio del cálculo de volúmenes de sólidos de revolución que genera una región al girar en torno de una recta L del plano.

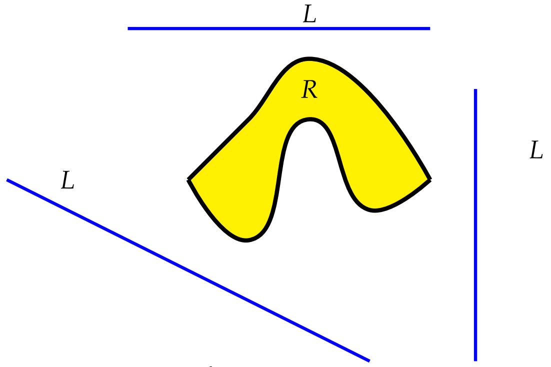


figura 3.30

Sea R una región del plano xy, L una recta que no intersecta el interior de R, tal como se muestra en la figura 3.30. Si esta región es rotada alrededor de la recta L, entonces se obtiene un sólido en el espacio tridimensional, llamado **sólido de revolución**, cuyo volumen podemos calcular mediante una integral definida. Mostramos tres métodos de cálculo del volumen de tales sólidos: Disco, Corteza y Pappus.

3.7.1. Método del disco

La base de este método se encuentra en el hecho de que uno de los sólidos de revolución más simples es el cilindro circular recto o **disco**, el cual se forma haciendo girar un rectángulo alrededor de un eje adyacente a los lados del rectángulo, tal como muestra la figura 3.31

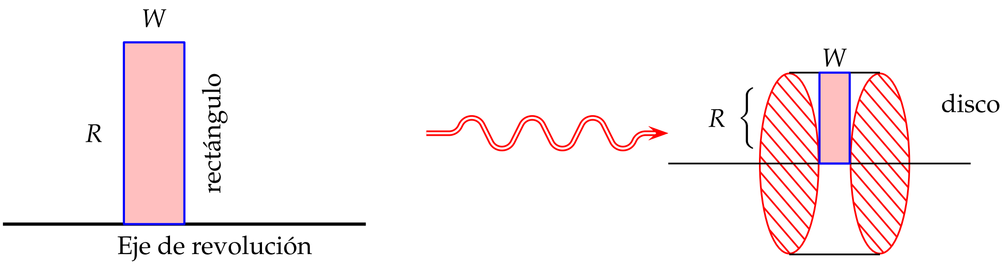


figura 3.31

- Rotación en torno del eje x

Sea R región del plano limitada por la curva no negativa $y = f(x)$, las rectas $x = a$, $x = b$, $y = 0$, esto es

$$R = \{(x, y)/a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$$

La figura 3.32 muestra un recinto como el descrito. El sólido S obtenido al hacer girar la región R alrededor del eje x tiene un volumen V_x dado por

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx$$

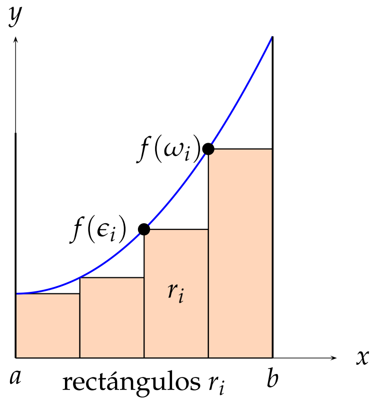
Demostración

Dividimos el intervalo $[a, b]$ en $\underline{n}$ subintervalos mediante la partición $P = \{a = x_0 < x_1 \cdots < x_n = b\}$. Sean

$$f(\epsilon_i) = \text{mín}\ f(x), \quad f(w_i) = \text{máx}\ f(x), \quad x \in I_i = (x_{i-1}, x_i)$$

A continuación se construyen rectángulos inscritos y circunscritos a la región R, tal como lo hicimos en el problema del área de una región (figura 3.32). Los rectángulos **genéricos** r_i y R_i, tienen la forma

$$\begin{aligned} r_i &= \{(x, y)/x_{i-1} \leq x \leq x_i,\ 0 \leq y \leq f(\epsilon_i)\} \\ R_i &= \{(x, y)/x_{i-1} \leq x \leq x_i,\ 0 \leq y \leq f(w_i)\} \end{aligned}$$



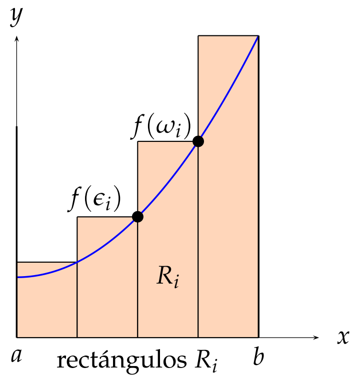


figura 3.33

Cuando un rectángulo r_i rota alrededor del eje x, se obtiene un cilindro circular recto que representamos por s_i. De igual manera, al rotar un rectángulo R_i alrededor del eje x, se obtiene otro cilindro circular recto que denotamos por S_i. Llamando $V(s_i)$ y $V(S_i)$ a los volúmenes de los cilindros y V_x al volumen del sólido, tenemos

$$V(s_1) + V(s_2) + \cdots + V(s_n) \leq V_x \leq V(S_1) + V(S_2) + \cdots + V(S_n)$$

Como

$$V(s_i) = \pi\, [f(\epsilon_i)]^2 \triangle I_i, \qquad \text{y} \qquad V(S_i) = \pi\, [f(w_i)]^2 \triangle I_i$$

entonces

$$\sum_{i=1}^{n} V(s_i) = \sum_{i=1}^{n} \pi\, [f(\epsilon_i)]^2 \triangle I_i \leq V_x \leq \sum_{i=1}^{n} V(S_i) = \sum_{i=1}^{n} \pi\, [f(w_i)]^2 \triangle I_i$$

Al tomar límite, con la norma de la partición tendiendo a cero, esta suma de Riemann se transforma en una integral

$$\boxed{V_x = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx}$$

- Generalización

La región empleada para obtener el volumen que acabamos de encontrar tenía a la recta de giro como parte de su frontera. En el caso que no sea así, es decir, si R es una región de la forma

$$R = \{(x, y) / \; a \leq x \leq b, \quad f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

entonces el volumen de revolución que genera la región cuando gira en torno al eje

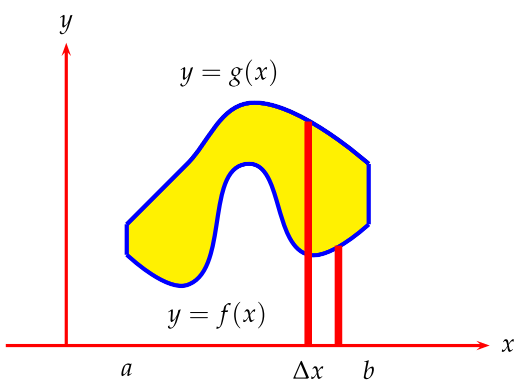


figura 3.34

x es la diferencia de los volúmenes entre el que genera el recinto que acota la curva mayor menos el recinto que acota la curva menor. Esto es

$$V_x = \pi \int_a^b [\, g^2(x) - f^2(x) \,] \, dx$$

La figura 3.34 muestra la elección de dos rectángulos genéricos, los que sirven para hacer la diferencia de los volúmenes.

Ejemplo 3.7.1. *Hallar el volumen del sólido que se genera al rotar en torno al eje x la región que acotan el eje x y el arco de la curva $y = sen\, x$ entre 0 y π.*

Consideremos un rectángulo genérico, **perpendicular** al eje de rotación, de altura $h = f(x)$ y base Δx (figura 3.35). Este rectángulo genera un elemento de volumen $V = \pi\, r^2\, h$. Al girar, su la altura corresponde al radio del cilindro y la base no se altera. En consecuencia

$$dV = \pi \cdot r^2 \, dx \Longrightarrow V_x = \pi \int_0^\pi sen^2 x \, dx = \frac{\pi^2}{2}$$

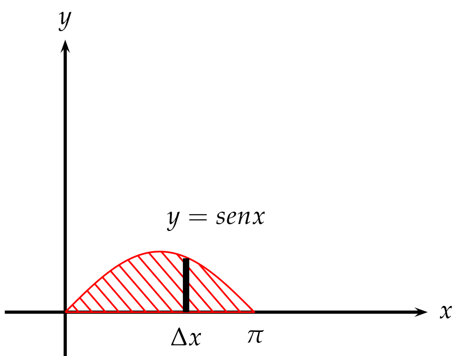


figura 3.35

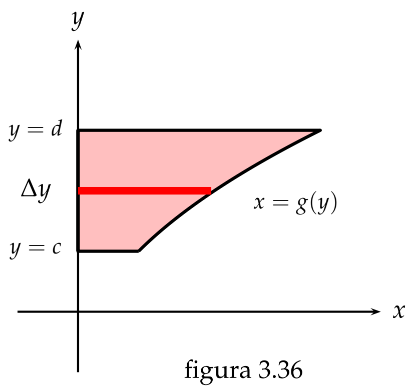


figura 3.36

3.7.2. Rotación sobre el eje y

Si $x = g(y)$ es una función no negativa definida sobre $[c, d]$, entonces el volumen generado al rotar la región

$$R = \{(x, y)/c \leq y \leq d,\ 0 \leq x \leq g(y)\}$$

alrededor del eje y (figura 3.36) es

$$V_y = \pi \int_c^d g^2(y) \, dy$$

- Generalización

Si un recinto es como el que muestra la figura 3.37, se puede generalizar el volumen que se obtiene al girar la región $R = \{(x, y)/c \leq y \leq d,\ f(y) \leq x \leq g(y)\}$ en torno al eje y. Para ello sólo es suficiente trazar rectángulos genéricos que conecten las curvas frontera (dos en este caso) con el eje de rotación.

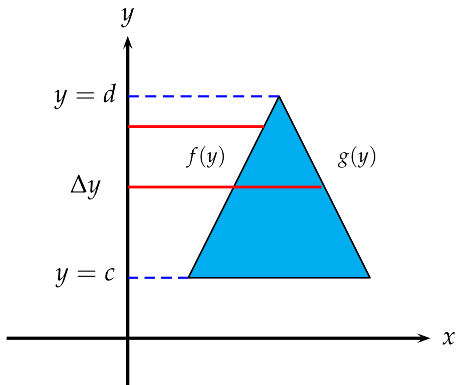


figura 3.37

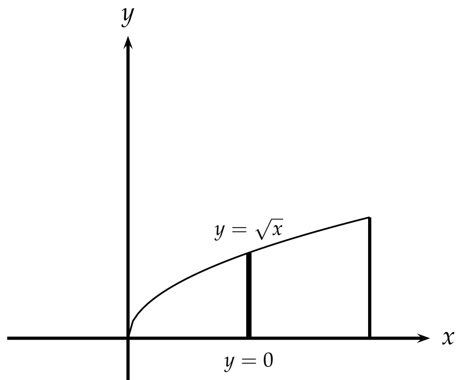


figura 3.38

Ejemplo 3.7.2. *Hallar el volumen del sólido que se genera al rotar la región acotada por $y = 0$, $x = 4$, $y = \sqrt{x}$, alrededor del eje x, y alrededor del eje y.*

La figura 3.38 muestra tal región. Para hacer el giro en torno del eje x trazamos un rectángulo genérico, **perpendicular** al eje de rotación, de altura $h = f(x)$, y base Δx. La altura corresponde al radio del cilindro. Se tiene

$$dV = \pi\, r^2\, dx \Longrightarrow V_x = \pi \int_0^4 \left(\sqrt{x}\right)^2\, dx = 8\pi$$

Para la rotación en torno del eje y, se consideran dos rectángulos genéricos perpendiculares al eje de rotación, tal como se ve en la figura 3.39. Estos rectángulos tienen alturas $h_1 = 4$ y $h_2 = \sqrt{x}$, y bases Δy. Ellos generan volúmenes V_1 y V_2, respectivamente. De esta forma el volumen de revolución que genera **toda** la región será la diferencia entre V_1 y V_2. Se tiene entonces

$$dV = \pi \cdot (r_1^2 - r_2^2)\, dy \Longrightarrow V_y = \pi \int_0^2 \left[(4)^2 - (y^2)^2 \right] dy = \frac{128\pi}{5}$$

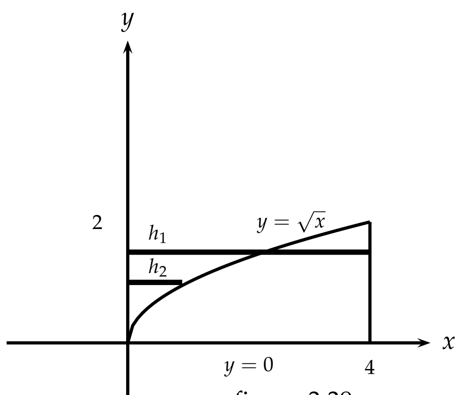


figura 3.39

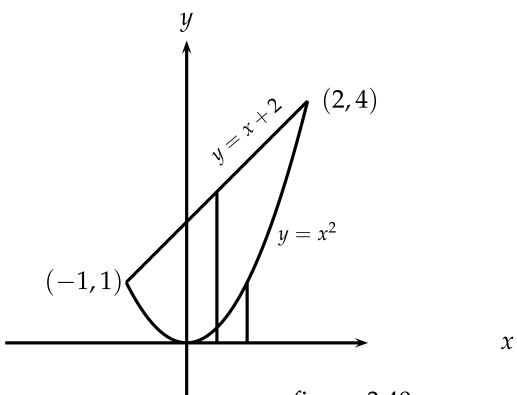


figura 3.40

Ejemplo 3.7.3. *Hallar el volumen del sólido que se genera al rotar la región acotada por la recta $y = x + 2$, y la parábola $y = x^2$, alrededor del eje x (figura 3.40).*

Consideremos **dos** rectángulos genéricos **perpendiculares** al eje x de rotación, de alturas $h_1 = x+2$, $h_2 = x^2$, y base Δx. Luego, el volumen de revolución que genera **toda** la región será la diferencia entre ellos. Como la región

$$R = \{\ (x,y)\ /\ -1 \leq x \leq 2,\ x^2 \leq y \leq x+2\}$$

entonces

$$dV = \pi\ (r_1^2 - r_2^2)\ dx \Longrightarrow V_x = \pi \int_{-1}^{2} \Big(\ (x+2)^2 - (x^2)^2 \Big)\ dx = \frac{32\pi}{5}$$

Ejemplo 3.7.4. *Hallar el volumen del sólido que se genera al rotar la región acotada por las parábolas* $x = y^2 - 3$, $x = y - y^2$, *alrededor de la recta* $x = -4$.

Consideremos **dos** rectángulos genéricos **perpendiculares** a la recta de rotación $x = -4$, de alturas

$$h_1 = f(y) - (-4), \qquad h_2 = g(y) - (-4)$$

y base $\triangle y$, con $f(y) = y - y^2,\ \ g(y) = y^2 - 3$. Luego, el volumen de revolución que genera **toda** la región será la diferencia entre ellos. Esto hace que la diferencial de volumen sea

$$dV = \pi(r_1^2 - r_2^2)\, dy$$

de donde

$$V_y = \pi \int_{-1}^{3/2} \Big((y - y^2 + 4)^2 - (y^2 - 3 + 4)^2 \Big)\, dy = \frac{875\pi}{32}$$

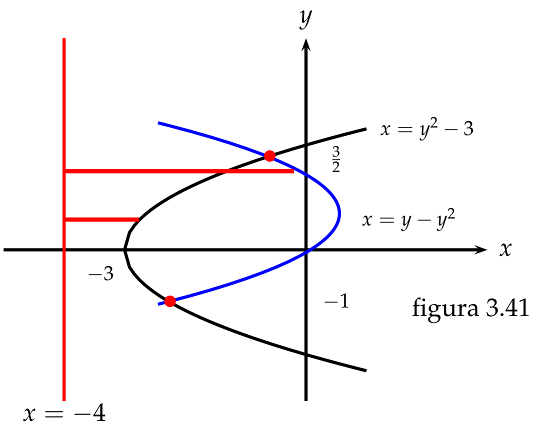


figura 3.41

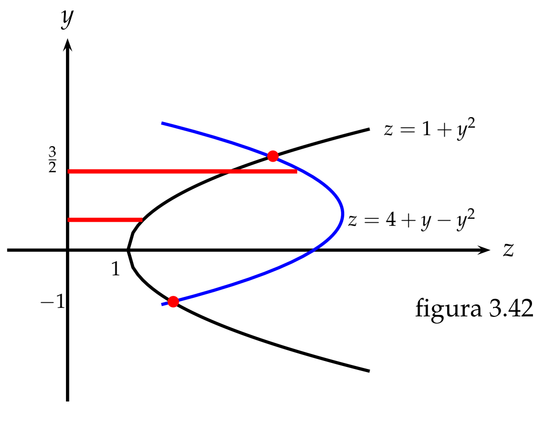


figura 3.42

3.7.3. Traslaciones

Otra forma de resolver estos problemas, en los cuales la recta de giro es una recta paralela a uno de los ejes coordenados, es recurrir a una **traslación**. La finalidad de la traslación es que la recta de giro, $x = -4$ en este caso, se "transforme" en un "eje y", pues ese caso es más simple (figura 3.42). Para ello, sea $x + 4 = z$, entonces $x = -4 \Longrightarrow z = 0$. De esta forma logramos que la misma región, pero con curvas fronteras acordes con la traslación rote alrededor del **eje** $z = 0$, paralelo al eje y. Se tiene que $x \in [-3, \frac{1}{4}] \Longrightarrow z \in [1, \frac{17}{4}]$. Las ecuaciones de las parábolas, en términos de z e y son

$$\begin{array}{lcl} x = y^2 - 3 & \Longrightarrow & z - 4 = y^2 - 3 \Longrightarrow z = y^2 + 1 \\ x = y - y^2 & \Longrightarrow & z - 4 = y - y^2 \Longrightarrow z = y - y^2 + 4 \end{array}$$

Con el procedimiento de los rectángulos genéricos la diferencial es

$$dV = \pi\,(r_1^2 - r_2^2)\,dy$$

de donde

$$V_y = \pi \int_{-1}^{3/2} \left[(y - y^2 + 4)^2 - (y^2 - 3 + 4)^2 \right] dy = \frac{875\pi}{32}$$

NOTA▷: La notación V_x identifica volúmenes de sólidos de revolución girando en torno al eje x o a una recta paralela a él. La notación V_y identifica la rotación con respecto al eje y o una recta paralela.

3.8. Método de la Corteza

Por corteza cilíndrica se entiende al sólido comprendido entre dos cilindros concéntricos. La figura 3.43 muestra la corteza formada por dos cilindros de radios r_1 y r_2. El volumen de una corteza cilíndrica depende, obviamente, de los radios de los cilindros que la contienen.

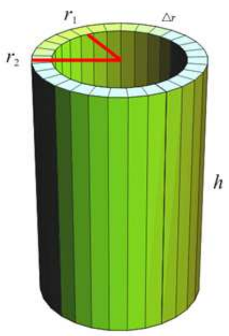


figura 3.43

Si r_1 es el radio interior, r_2 el exterior, y h es la altura, entonces el volumen de la corteza es $V = \pi\, r_2^2\, h \;-\; \pi\, r_1^2\, h$. Expresión que escribimos

$$V = 2\pi \left(\frac{r_1 + r_2}{2} \right)\,(r_2 \;-\; r_1)\,h$$

Si hacemos $\bar{r} = \dfrac{(r_1 + r_2)}{2}$, $\triangle r = r_2 - r_1$, entonces la fórmula para calcular la corteza cilíndrica es

$$V = 2\pi \cdot \bar{r} \cdot h \cdot \triangle r$$

Si r_1 es el radio interior, r_2 el exterior, y h es la altura, entonces el volumen de la corteza es

$$V = \pi\, r_2^2\, h \;-\; \pi\, r_1^2\, h = 2\pi \left(\frac{r_1 + r_2}{2} \right)\,(r_2 \;-\; r_1)\,h$$

Si hacemos las sustituciones, $\bar{r} = \frac{(r_1 + r_2)}{2}$, $\Delta r = r_2 - r_1$, entonces

$$V = 2\pi \cdot \bar{r} \cdot h \cdot \Delta r$$

representa una fórmula para la corteza cilíndrica, siendo $2\pi\bar{r}$ la longitud de la circunferencia cuyo radio es la media entre r_1 y r_2, y $\triangle r$ el espesor de la corteza. Vamos a encontrar una integral que proporcione el volumen del sólido mediante cortezas. Al igual que el método anterior, éste puede extenderse a regiones que roten alrededor de rectas cualesquiera que no intersecten la región.

3.8.1. Rotación sobre el eje y

Sea R la región del primer cuadrante limitada por las rectas $x = a$, $x = b$, $y = 0$ y la curva $y = f(x)$. Al rotar R en torno al eje y se forma un sólido S cuyo volumen es

$$V_y = 2\pi \int_a^b x\, f(x)\, dx$$

Demostración

La figura 3.44 permite visualizar el problema.

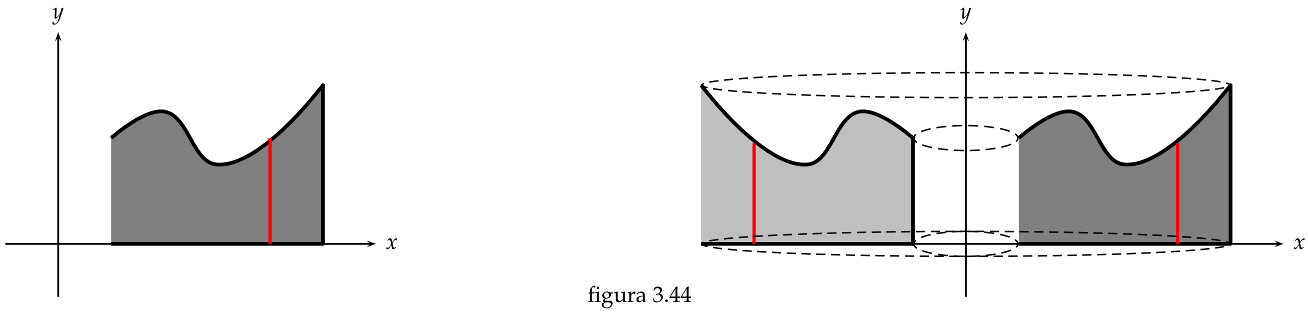


figura 3.44

Una partición $P = \{a = x_0 < x_1, \cdots < x_n = b\}$ divide el intervalo $[a, b]$ en n - subintervalos, entre los cuales consideramos

$$f(\epsilon_i) = \text{mín } f(x), \qquad f(w_i) = \text{máx } f(x), \quad \{x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$$

Ahora, construimos rectángulos r_i y R_i, tales que

$$r_i = \{(x, y)/x_{i-1} \leq x \leq x_i \,,\, 0 \leq y \leq f(\epsilon_i)\}$$
$$R_i = \{(x, y)/x_{i-1} \leq x \leq x_i \,,\, 0 \leq y \leq f(w_i)\}$$

Al rotar R, los rectángulos r_i, R_i generan cortezas cilíndricas c_i y C_i de volúmenes

$$V(c_i) = 2\pi \left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2} \right) \Delta I_i\, f(\epsilon_i)$$
$$V(C_i) = 2\pi \left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2} \right) \Delta I_i\, f(w_i)$$

Así, el volumen V_y del sólido satisface

$$\sum_{i=1}^{n} V(c_i) = 2\pi \sum_{i=1}^{n} \overline{x} f(\epsilon_i) \Delta I_i \leq V_y \leq \sum_{i=1}^{n} V(C_i) = 2\pi \sum_{i=1}^{n} \overline{x} f(w_i) \Delta I_i$$

Al tomar límite con la norma de la partición tendiendo a cero, tenemos

$$V_y = 2\pi \int_a^b x\, f(x)\, dx$$

- Generalización

En el caso que la región R esté acotada por las rectas verticales $x = a$, $x = b$, y las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$. Esto es

$$R = \{(x, y) /\ a \leq x \leq b, \quad f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

entonces el volumen de revolución que genera la región cuando gira en torno al eje y es

$$V_y = 2\pi \int_a^b x\,[\,g(x) - f(x)\,]\,dx$$

La figura 3.45 muestra la elección de un rectángulo genérico, paralelo al eje de rotación.

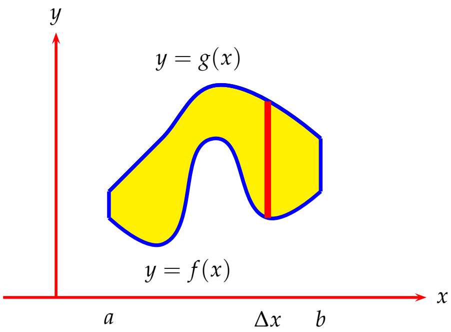


figura 3.45

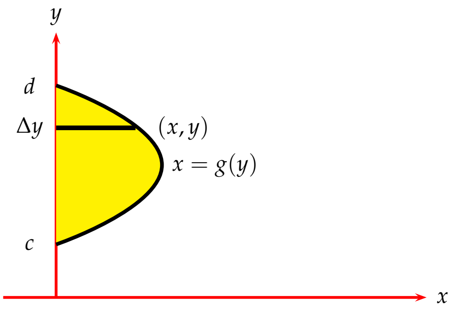


figura 3.46

3.8.2. Rotación en torno al eje x

Si la región R está limitada por las rectas $y = c$, $y = d$, $x = 0$, y por la curva $x = g(y)$, entonces el volumen que genera R al rotar alrededor del eje x viene dado por

$$V_x = 2\pi \cdot \int_c^d y \cdot g(y)\,dy$$

La figura 3.46 muestra este caso y la 4.47 su generalización, cuando la región la acotan dos curvas.

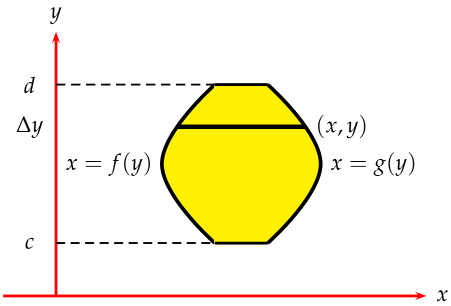


figura 3.47

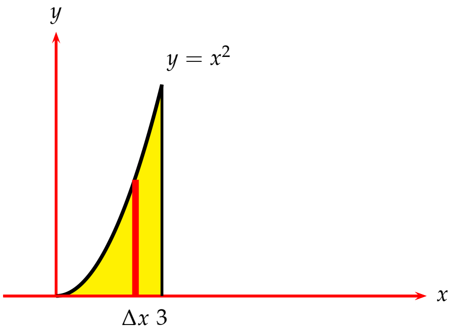


figura 3.48

Ejemplo 3.8.1. *La región R acotada por la parábola $y = x^2$, las rectas $y = 0$, $x = 3$ gira alrededor del eje y. Hallar el volumen del sólido generado.*

Resolvemos este problema por los métodos del disco y corteza.

Corteza: Los rectángulos son paralelos al eje de rotación (figura 3.48). Se tiene

$$V_y = 2\pi \int_0^3 x \cdot x^2 \, dx = \frac{81\pi}{2}$$

Disco: Los rectángulos son perpendiculares al eje de rotación (figura 3.49). Se tiene

$$V_y = \pi \int_0^9 \left(3^2 - x^2\right) \, dy = \pi \int_0^9 (9 - y) \, dy = \frac{81\pi}{2}$$

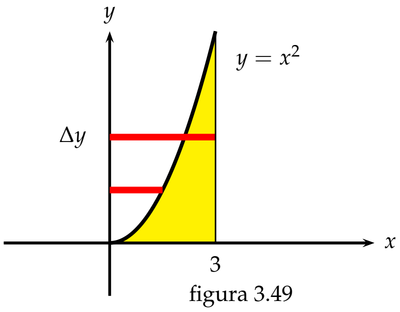


figura 3.49

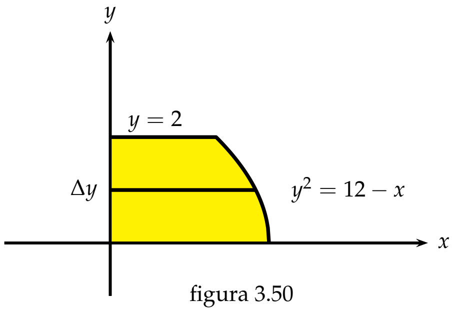


figura 3.50

Ejemplo 3.8.2. *La región R acotada por la parábola $y^2 = 12 - 4x$ y las rectas $x = 0$, $y = 0$, $y = 2$, gira alrededor del eje x. Hallar el volumen del sólido generado.*

Mostramos el cálculo por ambos métodos.

Corteza: rectángulos paralelos al eje de rotación (figura 3.50).

$$V_x = 2\pi \cdot \int_0^2 y \cdot \left(\frac{12 - y^2}{4}\right) \, dy = 10\pi$$

Disco: rectángulos perpendiculares al eje de rotación (figura 3.51).

$$V_x = \pi \cdot \int_0^2 4 \, dx + \pi \cdot \int_2^3 (12 - 4x) \, dx = 10\pi$$

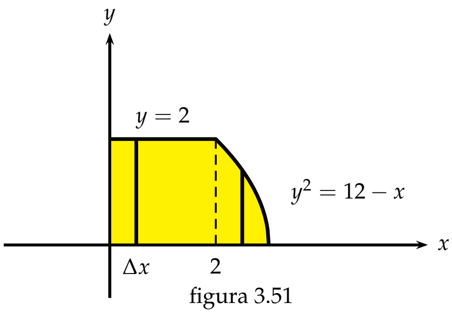


figura 3.51

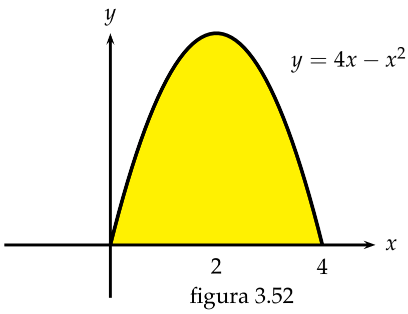


figura 3.52

3.8.3. Teorema de Pappus

El siguiente resultado es obra del gran matemático griego **Pappus** (año 300 A.C.). Proporciona otra forma de cálculo de volúmenes de revolución, principalmente, de aquellas regiones que giran en torno a rectas no paralelas a los ejes coordenados.

Teorema 3.8.3. *Sean R una región y L recta de ecuación $ax + by + c = 0$ situadas en un mismo plano, y con la condición de que L no intersecte el interior de R. El volumen V del sólido generado al rotar R alrededor de L es igual al producto del área A de R, por la longitud de la trayectoria descrita por el centro de masa de R. Es decir*

$$V = 2\pi \cdot A(R) \cdot d = 2\pi \cdot A(R)\, d[\,(\overline{x}, \overline{y}), ax + by + c = 0\,]$$

d es la distancia del centro de masa de R a la recta L.

Ejemplo 3.8.4. *Hallar el volumen del sólido que se genera al rotar, en torno de la recta $x + y = 8$, la región*

$$R = \{(x, y)\ /0 \leq x \leq 4,\ 0 \leq y \leq 4x - x^2\}$$

La figura 3.52 muestra la región. La recta $x = 2$ es eje de simetría de la parábola. Esto significa que $\overline{x} = 2$. El área de la región es

$$A(R) = \int_0^4 (4x - x^2)\, dx = \frac{32}{3}$$

Para calcular $\overline{y}$ se necesita el momento en x.

$$M_x = \int y\, dA = \int_0^4 y[2 + \sqrt{4-y} - (2 - \sqrt{4-y})]dy = 2\int_0^4 y\,\sqrt{4-y}\, dy$$

Con la sustitución $4 - y = z^2$ se tiene que

$$M_x = 4\int_0^2 (4z^2 - z^4)\, dz = \frac{256}{15}$$

Con esto, $\overline{y} = \frac{256}{15} : \frac{32}{3} = \frac{8}{5}$. De modo que el centro de masa de la región es el punto $(2, \frac{8}{5})$. Con estos datos, el teorema de Pappus asegura que

$$V = 2\pi \cdot \frac{32}{3} \cdot d[(2, \frac{8}{5}), x + y - 8 = 0] = 2\pi \cdot \frac{32}{3} \cdot \frac{22}{5\sqrt{2}} = \frac{1408\pi}{15\sqrt{2}}$$

3.9. Area de una superficie de revolución

La idea es hacer girar un arco de curva, como la que muestra la figura 3.53, en torno de una recta L y calcular el área de la superficie de revolución que se genera (figura 3.54).

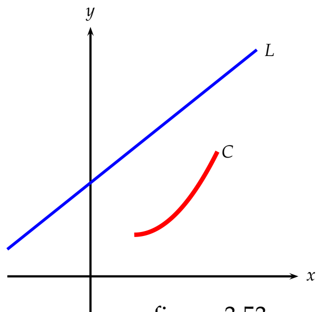


figura 3.53

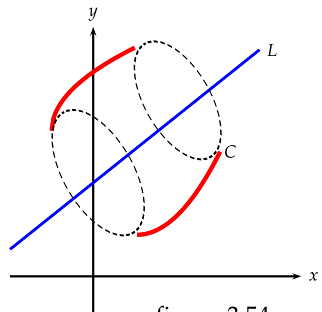


figura 3.54

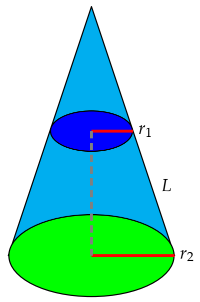


figura 3.55

El área lateral S de un tronco de cono circular recto de radios r_1 y r_2 con generatriz L (figura 3.55) está dada por

$$A(S) = \pi\,(\,r_1 + r_2\,)\,L = 2\pi \cdot \frac{r_1 + r_2}{2} \cdot L$$

Sea C un arco que es la imagen de una función de clase ζ^1 Y que tiene ecuación $y = f(x)$, con $x \in [a, b]$ (figura 3.56). Al girar este arco en torno de una recta se genera una superficie de revolución. A esta superficie vamos a encontrar una expresión integral que la calcule.
Sea $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ una partición del intervalo $[a, b]$, $I_i = [x_{i-1}, x_i]$, $\Delta I_i = x_i - x_{i-1}$. Sea w_i el punto medio del intervalo I_i. Esto es, $w_i = \dfrac{1}{2}(x_i + x_{i-1})$. El segmento de recta L_i tangente a la curva en $x = w_i$ tiene pendiente $tg\ \alpha_i = f\,'(w_i)$. La longitud de este segmento se deduce de

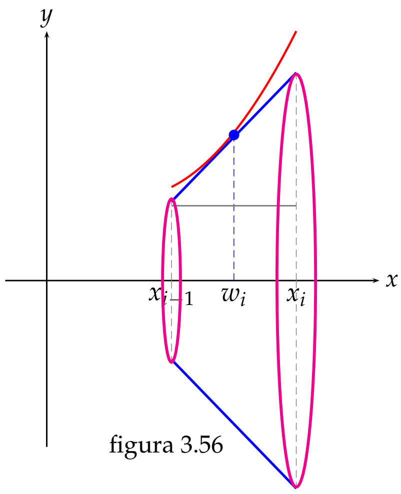


figura 3.56

$$cos\ \alpha_i = \frac{\Delta I_i}{||L_i||} \Longrightarrow ||L_1|| = \frac{\Delta I_i}{cos\ \alpha_i} = \sqrt{1 + [f\,'(w_i)]^2}\,\Delta I_i$$

se usó el hecho que $sec^2\alpha = 1 + tg^2\alpha$. La figura 3.56 muestra una ampliación del intervalo I_i, con el fin de mostrar que efectivamente, al girar, el rectángulo genérico dá origen a un tronco de cono.
El área del tronco de cono que engendra el segmento L_i, de acuerdo a la definición anterior es

$$A(S_i) = 2\pi\,\frac{r_1 + r_2}{2}\,L$$

la que en este caso toma la forma

$$A(S_i) = 2\pi\ f(w_i)\ \sqrt{1 + [f\,'(w_i)]^2}\,\Delta I_i$$

En consecuencia, el área de **todos** los troncos de cono que se encuentran en la partición es

$$A(S_i) = 2\pi \sum_{i=1}^{n} f(w_i) \sqrt{1 + [f'(w_i)]^2}\, \Delta I_i$$

Esta expresión es una suma de Riemann, en la cual se han elegido los puntos medios de cada intervalo de la función $2\pi\, f(x)\, \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$. Luego

$$A(S_x) = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx = 2\pi \int y\, ds$$

- La elección de la diferencial de arco se puede hacer con la diferencial dx, o con la diferencial dy. La fórmula anterior muestra la elección con dx. Para elegir con dy, se debe tener $x = g(y)$ en el intervalo $[c, d]$. Luego

$$A(S_x) = 2\pi \int_c^d y \sqrt{1 + [g'(y)]^2}\, dy = 2\pi \int_c^d y\, ds$$

- La notación $A(S_x)$ denota áreas de revolución respecto del eje x o de cualquier recta paralela a ella.

- Si el arco C viene dado en al forma $y = f(x)$ y el giro se hace en torno del eje y, entonces el área $A(S)$ generada está dada por

$$A(S_y) = 2\pi \int_a^b x \sqrt{1 + [y']^2}\, dx = 2\pi \int_a^b x\, ds$$

- Al igual que el caso anterior, al elegir la diferencial de arco con dy se tiene

$$A(S_y) = 2\pi \int_c^d x \sqrt{1 + [x']^2}\, dy = 2\pi \int_c^d x\, ds$$

  en donde $x = g(y)$ en $[c, d]$.

Ejemplo 3.9.1. *Hallar el área de la superficie que se obtiene al girar alrededor del eje x, el arco de la semicircunferencia de ecuación $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ que muestra la figura 3.57.*

Para hacer un buen uso de la fórmula, lo primero es situarse sobre la curva que va a gira, para ello se marca el punto sobre la curva quie muestra la figura 3.57 y se mide su distancia a la recta de giro, que en este caso es igual a y. Por tanto,

$$\begin{aligned} A(S) &= 2\pi \cdot \int_b^c y\, ds = 2\pi \cdot \int_b^c \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + y'^2}\, dx \\ &= 2\pi \cdot \int_b^c \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}}\, dx \\ &= 2\pi \cdot \int_b^c a\, dx = 2\pi a(c - b) \end{aligned}$$

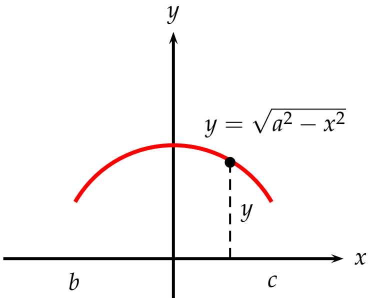


figura 3.57

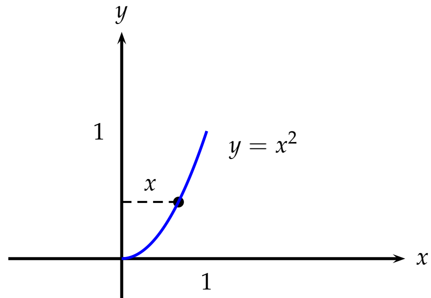


figura 3.58

Ejemplo 3.9.2. *Hallar el área de la superficie que se obtiene al al girar alrededor del eje y el arco de la parábola $y = x^2$, para $0 \leq x \leq 1$. (figura 3.58).*

El punto sobre la curva muestra que su distancia a la recta de giro (eje y) es x.

$$A(S) = 2\pi \int_0^1 x\,\sqrt{1 + 4x^2}\,dx = \frac{\pi}{6}\,(5\sqrt{5} - 1)$$

3.9.1. Teorema de Pappus

Para calcular áreas de superficies de revolución, que giren en torno de rectas no paralelas a los ejes coordenados, de nuevo tenemos la ayuda del gran Pappus.

Teorema 3.9.3. *Sean C un arco y L recta de ecuación $ax + by + c = 0$ situadas en un mismo plano, y tal que L no intersecte a C. El área de la superficie generada al rotar C alrededor de L, $A(S)$, es igual al producto de la longitud de $L(C)$ del arco C, por la longitud de la trayectoria descrita por el centro de masa de C. Es decir*

$$A(S) = 2\pi \cdot L(C) \cdot d = 2\pi \cdot L(C)\, d[\,(\overline{x}, \overline{y}), ax + by + c = 0\,]$$

Ejemplo 3.9.4. *Usar el teorema de Pappus para hallar el centro de masa del arco $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ sabiendo que el área de la superficie de una esfera de radio a es $4\pi a^2$.*

Si hacemos la rotación de la curva alrededor del eje x entonces, figura 3.59, deducimos que $\overline{x} = 0$. Por otra parte,

$$4\pi a^2 = 2\pi(\pi a)\overline{y}$$

de donde $\overline{y} = \frac{2a}{\pi}$.

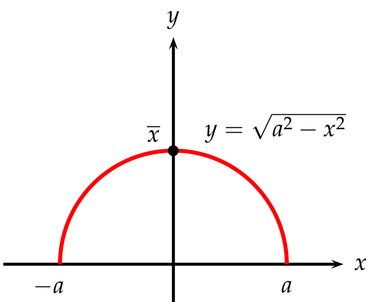


figura 3.59

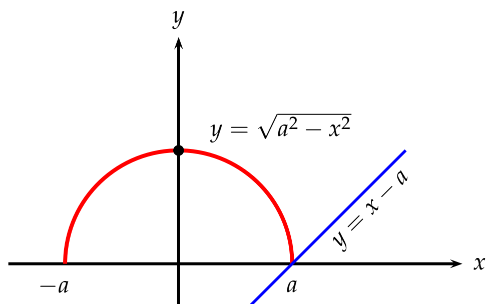


figura 3.60

Ejemplo 3.9.5. *Hallar el área de la superficie generada al rotar el arco* $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ *alrededor de la recta* $y = x - a$

Como la recta no es paralela a ninguno de los ejes coordenados, la única alternativa para resolver la situación es Pappus. Del ejemplo anterior, el centro de masa del arco es el punto $(0, \frac{2r}{\pi})$, de modo que su distancia a la recta $y = x - a$ es

$$d[(\overline{x}, \overline{y}), L] = \frac{|\frac{2a}{\pi} - a|}{\sqrt{2}}$$

De esta manera, el área de la superficie generada es

$$S_L = \pi a^2 \sqrt{2} \cdot (\pi - 2)$$

3.10. Problemas resueltos

Ejemplo 3.10.1. *La región acotada por la elipse $b^2\, x^2 + a^2\, y^2 = a^2\, b^2$, y los ejes coordenados en el primer cuadrante se rota alrededor del eje x. Hallar el volumen generado.*

La figura 3.61 muestra la región a rotar. Se considera un rectángulo genérico perpendicular al eje de rotación (método de disco). El radio es Δx y la altura $y = f(x)$. La ecuación explícita de la elipse es $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$. Luego

$$V = \frac{\pi b^2}{a^2} \int_0^a (a^2 - x^2)\, dx = \frac{2}{3}\, \pi\, ab^2$$

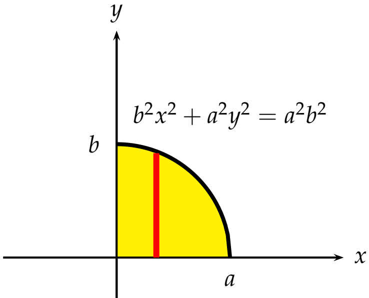


figura 3.61

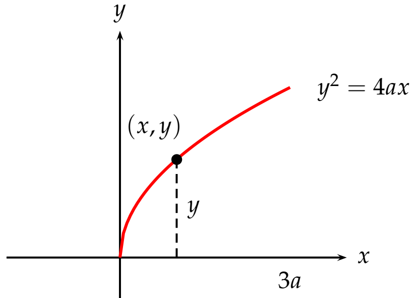


figura 3.62

Ejemplo 3.10.2. *Hallar el área de la superficie de revolución que se obtiene al girar el arco de la parábola $y^2 = 4ax$ ubicado en el primer cuadrante, $0 \leq x \leq 3a$, alrededor del eje x.*

Consideramos un punto (x, y) sobre la parábola, y medimos su distancia al eje de rotación, para tener

$$A(S) = 2\pi \int_a^b y\, ds,\ a = 0,\ b = 3a,\ ds = \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

como $y = \sqrt{4ax}$, entonces

$$\begin{aligned} A(S) &= 2\pi \int_0^{3a} \sqrt{4ax}\, \sqrt{1 + y'^2}\, dx = 2\pi \int_0^{3a} \sqrt{4ax} \cdot \sqrt{1 + \frac{a}{x}}\, dx \\ &= 4\pi\sqrt{a} \int_0^{3a} \sqrt{x + a}\, dx = \frac{56\pi a^2}{3} \end{aligned}$$

Se puede tomar $ds = \sqrt{1 + x'^2}\, dy = \sqrt{1 + \left(\frac{y}{2a}\right)^2}\, dy$ para tener

$$A(S) = 2\pi \int_0^{2a\sqrt{3}} y \sqrt{1 + \left(\frac{y}{2a}\right)^2}\, dy = \frac{56\pi a^2}{3}$$

Ejemplo 3.10.3. *Hallar el área de la superficie generada por el segmento de recta $y = 2x,\ 0 \leq x \leq 2$, al girar alrededor del eje x y del eje y*

- Giro en torno del eje x.

La figura 3.63 muestra el segmento de recta y un punto sobre ella. La distancia de cualquier punto (x, y) en la curva al eje x es y. Luego, el área de la superficie generada lo representa

$$S = 2\pi \int_0^2 y\, ds$$

en donde, $y = 2x$, $ds = \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \sqrt{5}$. En consecuencia

$$S = 2\pi \int_0^2 2x\sqrt{5}\, dx = 8\pi\sqrt{5}$$

- Giro en torno del eje y.

La distancia de cualquier punto (x, y) al eje y de rotación es x, luego

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \cdot \int_0^2 x\sqrt{5}\, dx = 4\pi\sqrt{5}, \text{ con } ds = \sqrt{1+4}\, dx \\ S &= 2\pi \cdot \int_0^4 \frac{y}{2}\sqrt{\frac{5}{4}}\, dy = 4\pi\sqrt{5}, \text{ con } ds = \sqrt{1 + \frac{1}{4}}\, dy \end{aligned}$$

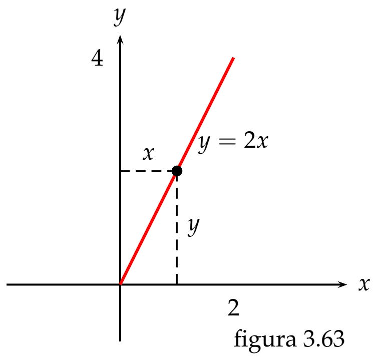


figura 3.63

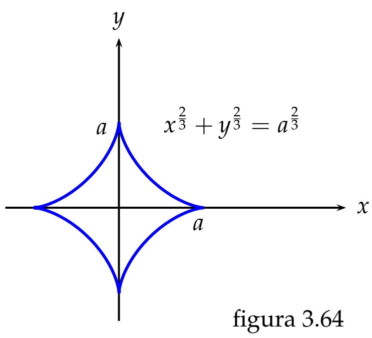


figura 3.64

Ejemplo 3.10.4. *Hallar la longitud de la curva $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.*

La figura 3.64 muestra la curva, la que presenta simetría respecto del origen, de modo que la longitud de ella es cuatro veces la porción comprendida en el primer cuadrante. Como $y' = -x^{-1/3} \cdot y^{1/3}$, entonces

$$\begin{aligned} s &= 4 \cdot \int_0^a \sqrt{1 + y'^2}\, dx = 4 \int_0^a \sqrt{1 + x^{-2/3} \cdot y^{2/3}}\, dx \\ &= 4 \cdot \int_0^a \sqrt{1 + \frac{y^{2/3}}{x^{2/3}}}\, dx = 4 \cdot \int_0^a \frac{a^{1/3}}{x^{1/3}}\, dx = 6a \end{aligned}$$

Ejemplo 3.10.5. *Hallar la longitud de la curva $y = \ln\, x$, para $x \in [\sqrt{3}, \sqrt{8}]$*

La porción de curva la muestra la figura 3.65. El cálculo de su longitud es:

$$s = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + x^{-2}}\, dx$$

Para calcular la integral, la escribimos en la forma

$$s = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{1}{x} \cdot \sqrt{1 + x^2}\, dx$$

y usamos la sustitución, $x = tg\,\theta$, de la cual $dx = sec^2\,\theta\, d\theta$. Al resolver se obtiene

$$s = 1 + \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{3}{2}$$

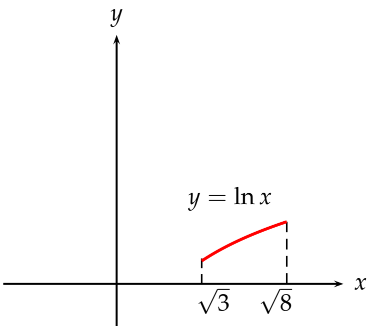


figura 3.65

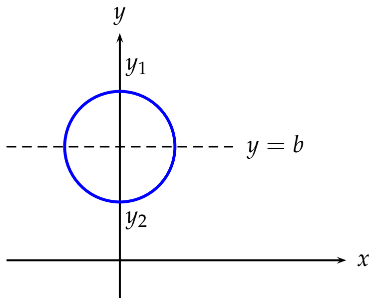


figura 3.66

Ejemplo 3.10.6. *Hallar el área de la superficie generada por la curva $x^2 + (y - b)^2 = a^2$ al rotar alrededor del eje x.*

La curva, que muestra la figura 3.66, se separa en dos funciones

$$y_1 = b + \sqrt{a^2 - x^2}, \qquad y_2 = b - \sqrt{a^2 - x^2}$$

Ahora se calcula el área que genera cada arco al girar en torno al eje x.

Para el arco superior $y_1 = b + \sqrt{a^2 - x^2}$, la distancia de cualquier punto (x, y) al eje de rotación es y, de modo que

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_a^b y\, ds = 4\pi \int_0^a (b + \sqrt{a^2 - x^2}) \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}}\, dx \\ &= 4\pi\, a \int_0^a (1 + \frac{b}{\sqrt{a^2 - x^2}})\, dx \\ &= 2\pi a(\pi\, b + 2a) \end{aligned}$$

Para el arco inferior $y_2 = b - \sqrt{a^2 - x^2}$, la distancia de un punto (x, y) sobre este arco al eje de rotación x es y, de manera que tenemos

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_a^b y\, ds = 4\pi \int_0^a (b - \sqrt{a^2 - x^2}) \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}}\, dx \\ &= 4\pi\, a \int_0^a (-1 + \frac{b}{\sqrt{a^2 - x^2}})\, dx \\ &= 2\pi a(\pi\, b - 2a) \end{aligned}$$

Se concluye que el área total $A(S)$ es

$$A(S) = 2\pi a(\pi b + 2a) + 2\pi a(\pi b - 2a) = 4ab\pi^2$$

Ejemplo 3.10.7. *Hallar el centro de gravedad de la región que en el primer cuadrante acota* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

La figura 3.67 muestra la elipse. Veamos en primer lugar, los momentos:

$$\begin{aligned} M_y &= \int_0^a x\, dA = \int_0^a b\, x \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\, dx = \frac{a^2\, b}{3} \\ M_x &= \int_0^b y\, dA = \int_0^a a\, y \cdot \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}\, dy = \frac{a\, b^2}{3} \end{aligned}$$

Para el cálculo del área de la región, tenemos

$$A = \int_0^a b \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\, dx$$

con $x = a\, sen\, \theta,\ dx = a\, cos\, \theta\, d\theta$, la integral se transforma en

$$A = \int_0^{\pi/2} ab \cdot cos^2\, \theta\, d\theta\ = \frac{\pi ab}{4}$$

como $\overline{x} = \dfrac{M_y}{A_y}$, entonces $\overline{x} = \dfrac{a^2 b}{3} \cdot \dfrac{4}{\pi ab} = \dfrac{4a}{3\pi}$. De manera análoga, $\overline{y} = \dfrac{4b}{3\pi}$

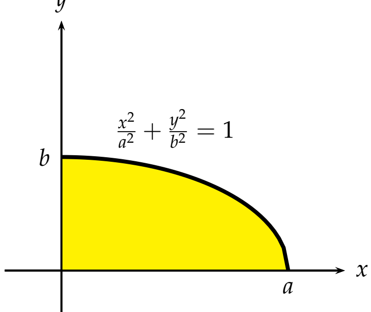


figura 3.67

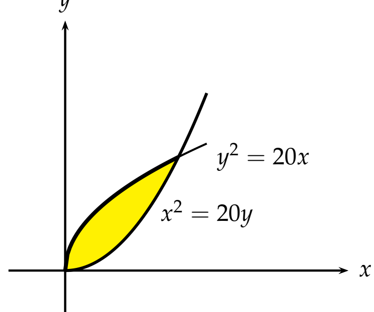


figura 3.68

Ejemplo 3.10.8. *Hallar el centro de gravedad de la región acotada por las curvas* $y^2 = 20x,\ x^2 = 20y$.

En primer lugar, el área de la región es

$$A = \int_0^{20} \left(\sqrt{20x} - \frac{x^2}{20} \right) dx = \frac{400}{3}$$

El momento respecto M_y es

$$M_y = \int_0^{20} x\, dA = \int_0^{20} x \cdot \left(\sqrt{20x} - \frac{x^2}{20} \right) dx = 1200$$

concluimos que $\overline{x} = 1200 \cdot \frac{3}{400} = 9$, y por simetría, $\overline{y} = 9$.

Ejemplo 3.10.9. *Hallar el volumen del sólido generado por la región acotada por las curvas* $y = 4 - x^2$, $y = 0$, *al rotar alrededor de la recta* $y = -1$.

Mostramos el cálculo del volumen, por el método del disco, verificamos por traslación, y por el método de la corteza.

- Método del disco: Consideramos dos rectángulos genéricos tal como se ve en la figura 3.69. Esto hace que se tenga una diferencia de volúmenes.

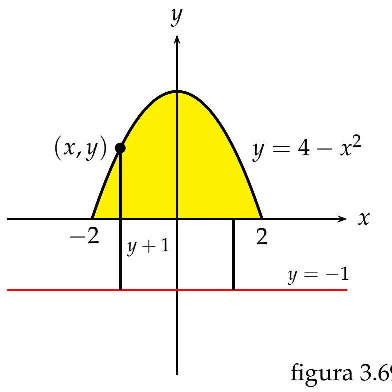


figura 3.69

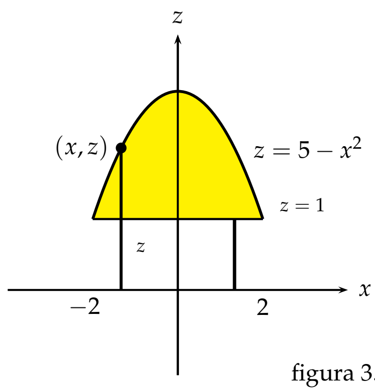


figura 3.70

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-2}^{2} \left[(y+1)^2 - (1)^2 \right] dx = \pi \int_{-2}^{2} \left[(4 - x^2 + 1)^2 - (1)^2 \right] dx \\ &= \pi \int_{-2}^{2} \left[(5 - x^2)^2 - (1)^2 \right] dx = \frac{832\pi}{15} \end{aligned}$$

- Traslación: El problema sugiere una traslación vertical. La idea es cambiar de eje de rotación. Si se considera $y + 1 = z = 0$, entonces $y = z - 1$, de aquí que $z = 1 + (4 - x^2) = 5 - x^2$, $x \in [-2, 2]$. La situación gráfica es la que muestra la figura 3.70. El volumen del sólido es

$$V_{z=0} = \pi \int_{-2}^{2} \left((5 - x^2)^2 - 1^2 \right) dx = \frac{832\pi}{15}$$

- Corteza: En este caso se consideran rectángulos genéricos paralelos al eje de rotación, como muestra la figura 3.71. La diferencial del volumen es

$$dV = 2\pi rhdr = 2\pi(y+1)2x\,dy$$

Luego

$$V_y = 4\pi \int_0^4 (y+1)\sqrt{4-y}\,dy$$

con $z = \sqrt{4-y}$, se tiene

$$V_y = 8\pi \int_0^2 (5z^2 - z^4)\,dz = \frac{832\pi}{15}$$

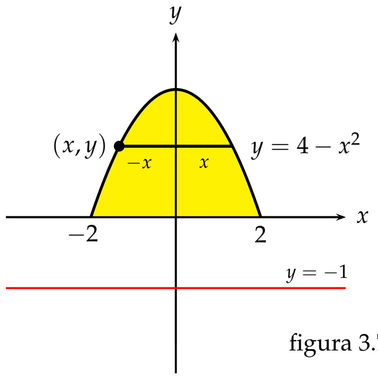


figura 3.71

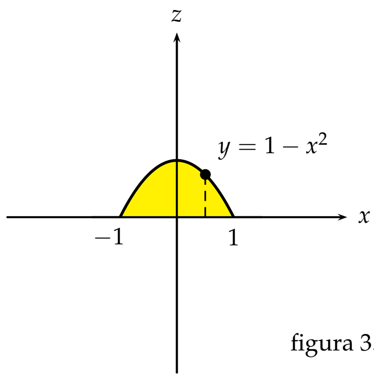


figura 3.72

Ejemplo 3.10.10. *Una placa cubre la región acotada por $y = 1 - x^2$, $y = 0$, y su densidad $\rho(x,y) = y + 3$ en cualquier punto (x,y). Calcular el momento de inercia de la placa respecto del eje x.*

El momento de inercia de una región respecto de una recta es

$$I = \int_a^b r^2 \rho\,dA$$

en donde, r es la distancia del punto (x,y) a la recta (figura 3.72). Además, como $m = \rho\ A$, entonces la diferencial de masa es

$$dm = \rho\,dA, \text{ con } dA = \left(\sqrt{1-y} - (-\sqrt{1-y})\right)\,dy$$

de donde

$$I = \int_0^1 y^2\,(y+3)\,\left(\sqrt{1-y} - (-\sqrt{1-y})\right)\,dy$$

El resultado de la integral, luego de algunas integraciones por partes y sustituciones, es

$$I = \frac{524}{315}$$

Ejemplo 3.10.11. *Hallar el centro de masa de la lámina que cubre la región acotada por $y = x^2$, $y = 4$, y cuya densidad es $\rho = 2y + 3$*

Mirando la figura 3.73 es claro que $\bar{x} = 0$. Veamos el momento en x.

$$M_x = \int_a^b y\, dm = \int_0^4 y\,(y+3)\,(\sqrt{y} - 0)\, dy = \frac{6464}{35}$$

La masa M de la región es

$$M = \int_a^b \rho\, dA = 2\int_0^4 (2y+3)\,(\sqrt{y} - 0)\, dy = \frac{416}{5}$$

En consecuencia

$$\bar{y} = \frac{6464}{37} \cdot \frac{5}{416} = \frac{202}{91}$$

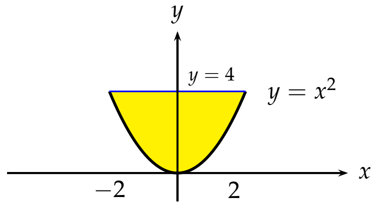


figura 3.73

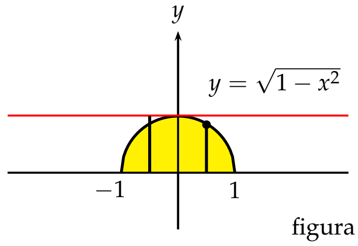


figura 3.74

Ejemplo 3.10.12. *Hallar el volumen que genera la región que acotan el eje x y la curva $y = \sqrt{1-x^2}$ al girar alrededor de la recta que se indica:*

1. $y = 1$
2. $y = -1$
3. $y = 2$
4. $x = 2$

Mostramos la resolución de cada problema, mediante método de disco, corteza, traslación y Pappus.

Recta de giro: $y = 1$

Método del disco La figura 3.74 muestra la región a la que se aplica método del disco.

$$V_y = \pi \int_{-1}^1 [\,1^2 - (1-y)^2\,]\, dx = 2\pi \int_0^1 [\,2\sqrt{1-x^2} - 1 + x^2\,]\, dx = \frac{\pi}{3}(3\pi - 4)$$

Método de traslación Queremos que la recta de giro, $y = 1$, coincida con el eje x, luego, $y - 1 = z \Longrightarrow z = \sqrt{1-x^2} - 1,\ x \in [-1, 1]$. De este modo

$$V_{z=0} = \pi \int_{-1}^1 \left[1^2 - (\sqrt{1-x^2} - 1)\right] dx = \frac{\pi}{3}\,(3\pi - 4)$$

Método de la corteza En la figura 3.75, $dV = 2\pi\, r\, h\, dr,\ r = 1 - y,\ h = 2x,\ x = \sqrt{1-y^2}$. De esto

$$dV = 2\pi\,(1-y)\,2\sqrt{1-y^2}\, dy$$

Luego

$$V = 4\pi \cdot \int_0^1 (1-y)\,\sqrt{1-y^2}\,dy = 4\pi \cdot \int_0^{\pi/2} (1-sen\,\theta)\,cos^2\,\theta\,d\theta = \frac{\pi}{3}\,(3\pi-4)$$

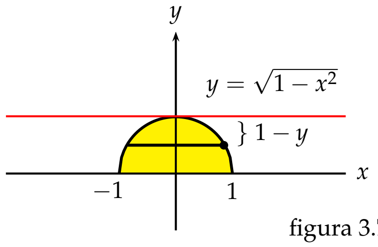


figura 3.75

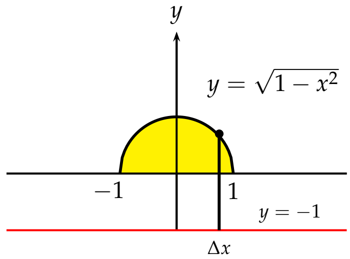


figura 3.76

Pappus El Teorema de Pappus, para volúmenes de revolución asegura que $V = 2\pi \cdot A \cdot d$, con A área de la región que gira, d la distancia del centro de masa a la recta de giro. Se tiene

$$A = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}, \qquad \overline{x} = 0$$

$$\overline{y} = \frac{1}{2A}\int_{-1}^{1} f^2(x)\,dx = \frac{4}{3\pi}, \quad d = 1 - \frac{4}{3\pi} = \frac{3\pi-4}{3\pi}$$

Luego

$$V_y = 2\pi \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{3\pi-4}{3\pi} = \frac{\pi}{3}(3\pi-4)$$

Recta de giro: $y=-1$

Método del Disco: En la figura 3.76 se observa que la distancia de un punto sobre la curva a la recta de giro es $y+1$. Pero el Δx indica integración respecto de x, de modo que reemplazamos el valor que tiene y en la curva en función de x para tener que

$$y+1 = \sqrt{1-x^2}+1$$

A este volumen generado se debe restar el que se encuentra entre $y=-1$ y el eje x. Se tiene que

$$V_y = \pi \int_{-1}^{1} \left[(1+\sqrt{1-x^2})^2 - (0-(-1))^2 \right] dx = 2\pi \int_0^1 \left[2\sqrt{1-x^2} + (1-x^2) \right] dx = \frac{\pi}{3}\,(3\pi+4)$$

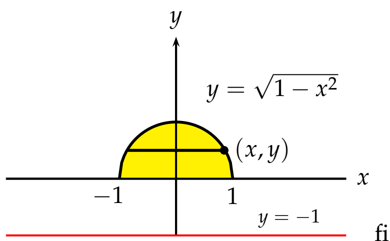


figura 3.77

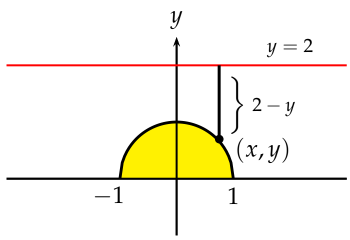


figura 3.78

Método de traslación Para hacer coincidir la recta de giro con el eje hacemos la sustitución $y+1 = z = 0$, de la cual $y = z-1$,. Como $y = \sqrt{1-x^2}$, entonces $z = 1+\sqrt{1-x^2}$. Luego

$$V_z = 2\pi \int_0^1 (z^2 - 1^2)\ dx = 2\pi \int_0^1 \left((1+\sqrt{1-x^2})^2 - 1^2\right)\ dx = \frac{\pi}{3}\,(3\pi+4)$$

Método de la corteza En la figura 3.77 se tiene que

$$dV = 2\pi\, r\, h\, dr,\ r = 1+y,\ h = 2x,\ x = \sqrt{1-y^2}$$

Así,

$$dV = 2\pi\ (1+y)\ 2\ \sqrt{1-y^2}\ dy$$

Luego

$$V = 4\pi \int_0^1 (1+y)\ \sqrt{1-y^2}\ dy = 4\pi \int_0^{\pi/2} (1 + sen\,\theta)\ cos^2\theta\ d\theta = \frac{\pi}{3}\,(3\pi+4)$$

Pappus

Para el área se tiene

$$A = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\ dx = \frac{\pi}{2}$$

La primera coordenada del centro de masa es cero, es decir, $\overline{x} = 0$. Para hallar $\overline{y} = \frac{M_x}{A}$, tenemos que

$$M_x = \int_R y\ dA = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1-x^2)\ dx = \frac{2}{3}$$

Se observa que se eligió la diferencial de área en la variable x, y se cambió el valor de y (en la región) por el valor promedio $\frac{1}{2}(f_1+f_2)$, con $f_1 = \sqrt{1-x^2}$, $f_2 = 0$. Para quienes no gusten de este método y prefieren mantener la variable y, deben cambiar la diferencial a la variable y, obteniendo

$$M_x = \int_R y\, dA = 2 \int_0^1 y\ \sqrt{1-y^2}\, dy = \frac{2}{3}$$

con esto la coordenada $\overline{y} = \frac{4}{3\pi}$. Ahora, la distancia del centro de masa a la recta de giro es

$$d\left[(\overline{x},\overline{y}), y+1=0\right] = 1 + \frac{4}{3\pi} = \frac{3\pi+4}{3\pi}$$

En consecuencia

$$V_y = 2\pi\ \frac{\pi}{2}\ \frac{3\pi+4}{3\pi} = \frac{\pi}{3}\ (3\pi+4)$$

Recta de giro: $y = 2$

La forma de resolver es análoga (figura 3.78), de manera que sólo lo hacemos aplicando Pappus.

$$V_y = 2\pi\ \frac{\pi}{2}\ (2 - \frac{4}{3\pi}) = \frac{2\pi}{3}\ (3\pi - 2)$$

Recta de giro: $x = 2$

Método del disco Dividimos la región en dos partes; la que está en el primer cuadrante, que llamamos R_1 (figura 3.79) y la del segundo cuadrante que denominamos R_2 (figura 3.80). Para un rectángulo genérico, su volumen al girar es $V_{disco} = \pi\, r^2\, h$.

Dibujamos dos rectángulos genéricos (perpendiculares al eje de rotación) y hacemos su diferencia de volúmenes. En la región R_1, se tiene $r = 2 - x,\ h = \Delta y$. De modo que el elemento de volumen es

$$dV = \pi\, (2^2 - (2-x)^2)\, dy$$

En consecuencia

$$V = \pi \int_0^1 \left[\, 4 - (2 - \sqrt{1-y^2})^2 \,\right] dy = \frac{\pi}{3} \cdot (3\pi - 2)$$

Para el rectángulo genérico (perpendicular al eje de rotación) ubicado en región la R_2, se tiene $r = 2 + x,\ h = \Delta y$, de modo que el elemento de volumen es

$$dV = \pi \left[\, (2+x)^2 - 2^2) \,\right] dy$$

En consecuencia

$$V = \pi \int_0^1 \left[\, (2 + \sqrt{1-y^2})^2 - 4 \,\right] dy = \frac{\pi}{3} \cdot (3\pi + 2)$$

Se concluye que el volumen total generado por la región al girar en torno a la recta $x = 2$ es

$$V = V(R_1) + V(R_2) = 2\pi^2$$

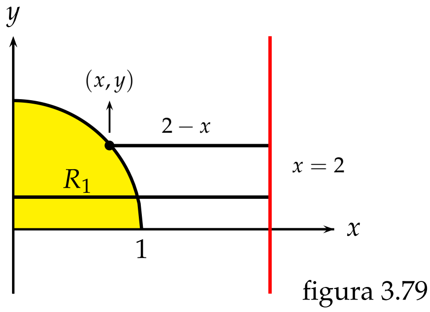


figura 3.79

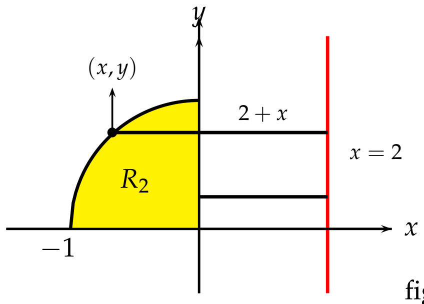


figura 3.80

Método de la corteza Dividimos la región en dos partes; la que está en el primer cuadrante la denominamos R_1 (figura 3.81), y la del segundo cuadrante R_2 (figura 3.82).

Para un rectángulo genérico en R_1, paralelo al eje de rotación, la diferencial de volumen es $dV = 2\pi\, r\, h\, dx,\ con\ r = 2 - x,\ h = y = \sqrt{1-x^2}$, de donde

$$dV = 2\pi\, (2-x)\sqrt{1-x^2}\, dx$$

Luego

$$V = 2\pi \int_0^1 (2-x)\sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{\pi}{3}\, (3\pi - 2)$$

Para el rectángulo genérico paralelo al eje de rotación en la región R_2, se tiene $r = 2 - x$. Cabe consignar que al tomar un punto genérico (x, y) éste se considera sin signo, ya que el signo aparece en la integral. Como $h = y = \sqrt{1 - x^2}$, entonces el elemento de volumen es

$$dV = 2\pi\,(2 - x)\sqrt{1 - x^2}\,dx$$

Luego

$$V = 2\pi \int_{-1}^{0} (2 - x)\sqrt{1 - x^2}\,dx = \frac{\pi}{3}\,(3\pi + 2)$$

Se concluye que el volumen total generado por la región al girar en torno a la recta $x = 2$ es

$$V = V(R_1) + V(R_2) = 2\pi^2$$

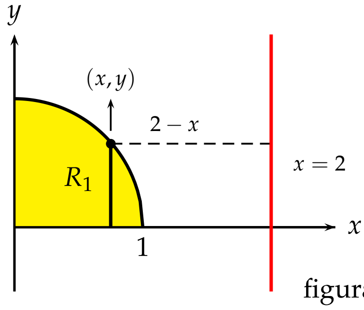


figura 3.81

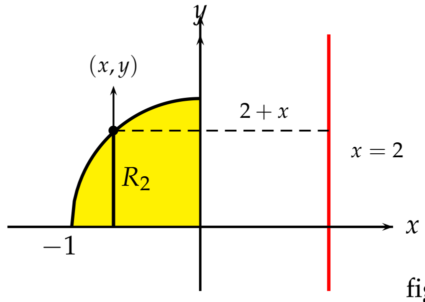


figura 3.82

Pappus

El área de la región es $A = \frac{\pi}{2}$. La coordenada del centro de masa, $\overline{x} = 0 \Longrightarrow d = 2$. En consecuencia

$$V = 2\pi\,A\,d = 2\,\pi \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 2 = 2\pi^2$$

Ejemplo 3.10.13. *Hallar centro de masa de la región acotada por la recta $y = 1$ y la parábola $y = x^2$*

Se trata de una región cuyo eje de simetría es el eje y. Luego, $\overline{x} = 0$, $\overline{y} = \frac{M_x}{M}$. Calculemos este momento y la masa que en este caso consideramos igual al área (densidad 1)

$$M_x = \int_0^1 y\,dA$$

La diferencial de área en la variable y es $dA = 2\,y^{1/2}\,dy$. Observar que **no** es bueno usar $dA = (1 - x^2)\,dx$, pues aparece la variable y en el integrando, entonces

$$M_x = \int_0^1 y \cdot 2 \cdot y^{1/2}\,dy = \frac{4}{5}$$

Como el área es $A = \frac{4}{3}$, entonces $\overline{y} = \frac{3}{5}$

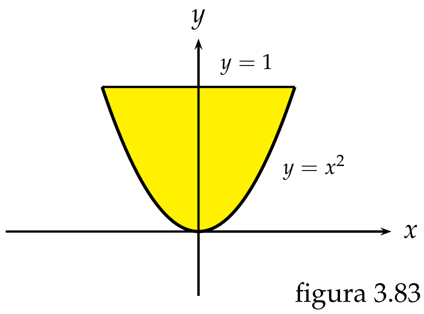


figura 3.83

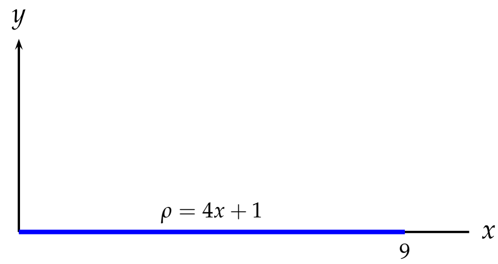


figura 3.84

Ejemplo 3.10.14. *Una varilla que mide 9 cms de largo tiene densidad $\rho = 4x + 1$ en cada punto. Hallar la masa total y el centro de masa de la varilla, si se la considera situada sobre el eje x.*

La figura 3.84 muestra la situación. Como $y = 0 \Longrightarrow y' = 0$, entonces

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}\, dx = dx$$

Así, para la masa se tiene

$$M = \int_0^9 (4x + 1)\, ds = \int_0^9 (4x + 1)\, dx = 171$$

Es claro que $\overline{y} = 0$. Para hallar $\overline{x}$ debemos hallar el momento en y

$$M_y = \int_0^9 x\, dm = \int_0^9 x\, \rho\, ds = \int_0^9 x\, (4x + 1)\sqrt{0 + 1}\, dx = \frac{2025}{2}$$

En consecuencia

$$\overline{x} = \frac{2025}{342} \approx 5{,}921$$

3.11. Problemas Propuestos

1. Hallar el área de la región acotada por las curvas indicadas:

   a) $y = 9x - x^2,\ y = 0$
   b) $y = x^2,\ y = x,\ x = 1,\ x = 3$
   c) $x = y^2 - 2y - 3,\ x = 0$
   d) $x = 5y,\ x = y^3 - 2y^2 - 3y$
   e) $y^2 = 4x + 1,\ x + y = 1$
   f) $y = x^2 - 1,\ x = y^3,\ x + y = 1$
   g) $x^2 = y^3,\ x = 0,\ y = 4$
   h) $y^2 = 6 + 3x,\ y = 3x$
   i) $y = x - x^2,\ y = x - 4$
   j) $y = 2x,\ 4y = x,\ y = \frac{2}{x^2},\ x > 0$

   Resp: $\frac{243}{2}, \frac{14}{3}, \frac{32}{3}, \frac{148}{3}, 9, \frac{19}{4}, \frac{64}{5}, \frac{125}{18}, \frac{32}{3}, \frac{3}{2}$

2. Calcular el área de las regiones acotadas por:

   a) $y = 4x - x^2$, el eje x, $x = 1,\ x = 3$
   b) $y = \sqrt{x+1}$, el eje x, $x = 0,\ x = 8$
   c) $y = |x - 1|, y = x^2 - 2x, x = 0,\ x = 2$
   d) $y = x^2, y = -4$
   e) $y + x^2 + 4 = 0, y = -8$
   f) $x^3 = 2y^2, y = -2, x = 0$
   g) $y = 2 - x^2, y = -x$
   h) $y^2 = x - 1, x = 3$
   i) $y = \sqrt{x}, y = x^3$
   j) $x = y^2 - 2, x = 6 - y^2$
   k) $y^2 = x - 1, y = x - 3$
   l) $y = |x|, y = x^2 - 1, x = -1,\ x = 1$
   m) $y = x^3, y = x$
   n) $y^2 = x, x = 4$
   ñ) $y = 2x^3 - 3x^2 - 9x, y = x^3 - 2x^2 - 3x$
   o) $y = x^3 - 6x^2 + 8x, y = x^2 - 4x$
   p) $y = x^2 - x\ , y = 0, x = 2$
   q) $y = x\ \sqrt{x+5}$, el eje x, $x = -1,\ x = 4$

   Resp: $\frac{22}{3}, \frac{52}{3}, \frac{7}{3}, \frac{32}{3}, \frac{32}{3}, \frac{12}{5}, \frac{9}{2}, \frac{8\sqrt{2}}{3}, \frac{5}{12}, \frac{64}{3}, \frac{9}{2}, \frac{7}{3}, \frac{1}{3}, \frac{32}{3}, \frac{253}{12}, \frac{71}{6}, 1, \frac{40\sqrt{5}-20}{3}$

3. Hallar el volumen engendrado cuando la región limitada por las curvas dadas se rota en torno a la recta indicada:

   a) $y = 4x^2,\ x = 2,\ y = 0$. La recta es $x = -1$ Resp: $\frac{160\pi}{3}$
   b) $y = \ln\ x,\ x = e,\ y = 0$. La recta es $y = -1$ Resp: $\pi\ e$
   c) $y = 9 - x^2,\ y = 2x^2$,. La recta es el eje y Resp: $\frac{27\pi}{2}$
   d) $y = 1 + sen\, x,\ x \in [0, 2\pi],\ y = 0$. La recta es el eje y Resp: $4\pi^2\ (\pi - 1)$
   e) $y = x^3,\ y = 0,\ x = 2$. La recta es el eje x Resp: $\frac{128\pi}{7}$
   f) $x = 4 + 6y - 2y^2,\ x = -4$. La recta es $x = -4$ Resp: $\frac{1250\pi}{3}$
   g) $y = x^2,\ x = 1,\ y = 0$. La recta es $x = 1$ Resp: $\frac{\pi}{6}$
   h) $y = x^{3/2}, y = 0,\ x = 4$. La recta es el eje x Resp: 64π

i) $y = x^2 - 1,\ x = 4,\ y = 0$. La recta es el eje y Resp: $\frac{225\pi}{2}$

j) $x = y^2,\ y = x^2$. La recta es el eje x Resp: $\frac{3\pi}{10}$

k) $x = y^2,\ y = x^2$. La recta es $x = -2$ Resp: $\frac{49\pi}{30}$

l) $y = x^{3/2}, y = 8,\ x = 0$. La recta es el eje y Resp: $\frac{384\pi}{7}$

m) $y = x^{3/2}, y = 0,\ x = 4$. La recta es $y = 8$ Resp: $\frac{704\pi}{5}$

n) $y = x^{3/2}, y = 8,\ x = 0$. La recta es $x = 4$ Resp: $\frac{3456\pi}{35}$

4. Hallar la longitud de arco de la curva en el intervalo dado:

   a) $y = \frac{1}{2x^2} + \frac{x^4}{16},\ x \in [2,3]$

   b) $8y = x^4 - \frac{2}{x^2},\ x \in [1,2]$

   c) $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}),\ x \in [0,b)$

   d) $9y^2 = 4x^3$, desde $(0,0)$ a $(3, 2\sqrt{3})$

   e) $y^3 = 8x^2$, desde $(1,2)$ a $(27,18)$

   f) $9y^2 = x(x-3)^2$

   Resp. $\frac{59}{24}, \frac{33}{16}, \frac{1}{2}(e^b - e^{-b}), \frac{14}{3}, \frac{1}{27}\ (\sqrt{97^3} - 125), 4\sqrt{3}$

5. La longitud de una varilla es 9 cm. y la densidad lineal en un punto x cm. de un extremo es $(4x+1)$. Encontrar la masa total de la varilla y el centro de masa. Resp: $171,\ \overline{x} = 5{,}92$

6. Encontrar el centro de masa de la lámina acotada por las curvas $2y^2 = 18 - 3x,\ x = 0$, si la densidad de área en cualquier punto es $\sqrt{6-x}$. Resp: $(2,0)$

7. Hallar el centro de gravedad de las regiones acotadas por:

   a) $y = x^2,\ y = 4$

   b) $y = x - x^2,\ x + y = 0$

   c) $y = 2x + 1,\ x + y = 7,\ x = 8$

   d) $y = 4 - x^2, y = 0$.

   Resp. $(0, \frac{12}{5}), (1, -\frac{3}{5}), (6,7), (0, \frac{8}{5})$

8. Utilizar el teorema de Pappus para hallar el centro de masa del semicírculo centrado en el origen y de radio 2. Resp: $\overline{x} = 0,\ \overline{y} = \frac{8}{3\pi}$

9. Utilizar el teorema de Pappus para hallar el centro de masa de un cono circular recto de radio r y altura h, si el eje x es de rotación. Resp: $\overline{x} = \frac{r}{3},\ \overline{y} = 0$

10. Usar el teorema de Pappus para hallar el volumen generado por la rotación de la región:

    a) que acota $x^2 + (y-b)^2 \le a^2$ al girar en torno al eje x. Resp: $V = 2\pi^2 a^2 b$

    b) que acota $y = 0, y = \sqrt{1-x^2}$, al girar alrededor de la recta $y = 1$. Resp: $\frac{\pi}{3}\ (3\pi - 4)$

    c) que acota $y = 0, y = \sqrt{1-x^2}$, al girar alrededor de la recta $y = -1$. Resp: $\frac{\pi}{3}\ (3\pi + 4)$

    d) que acota $y = 0, y = \sqrt{1-x^2}$, al girar alrededor de la recta $x = 2$ Resp: $2\pi^2$

11. Usar el teorema de Pappus para hallar el área de la superficie engendrada por la curva $x^2 + (y-b)^2 \leq a^2$. Resp: $S = 4\pi^2 ab$

12. Hallar el área de la superficie que se indica:

    a) Al girar el círculo $x^2 + y^2 = r^2$ alrededor de su diámetro. Resp: $4\pi r^2$

    b) Al girar $y = x^3$, $0 \leq x \leq 1$ sobre el eje x, Resp: $\frac{\pi}{27}\left(\sqrt[3]{100} - 1\right)$

    c) $y = \frac{1}{3}(x^2+2)^{3/2}$, $x \in [0,3]$ al rotar en torno al eje y. Resp: $\frac{99\pi}{2}$

    d) $x = \frac{3}{5} \cdot y^{5/3} - \frac{3}{4} \cdot y^{1/3}$, $y \in [0,1]$ al girar en torno de la recta $y = -1$ Resp: $\frac{153\pi}{40}$

13. Representar la región acotada por las gráficas de las funciones y calcular el volumen del sólido generado al girar alrededor del eje x. Hacer el cálculo por el método del disco y corteza.

    a) $y = \frac{x^2}{4}, x = 4, y = 0$ Resp. $\frac{64\pi}{5}$

    b) $y = x^3, x = 2, y = 0$ Resp. $\frac{128\pi}{7}$

    c) $y = \frac{1}{x}, x = 1, x = 4, y = 0$ Resp. $\frac{3\pi}{4}$

    d) $y = x^2 - 4x$ Resp. $\frac{512\pi}{715}$

    e) $y = \sqrt{4 - x^2}, y = 0, x = -1, x = 2$ Resp. 9π

    f) $y = x^2,\ y = 4 - x^2$ Resp. $\frac{64\pi\sqrt{2}}{3}$

14. Representar la región acotada por las gráficas de las funciones y calcular el volumen del sólido generado al girar alrededor del eje y. Hacer el cálculo por el método del disco y corteza.

    a) $x = y^2, x = 0, y = 2$ Resp. $\frac{32\pi}{15}$

    b) $x = \sqrt{y}, y = 4, x = 0$ Resp. 8π

    c) $y = 4x, y = 4x^2$ Resp. $\frac{2\pi}{3}$

    d) $x = y^2, y - x + 2 = 0$ Resp. $\frac{72\pi}{5}$

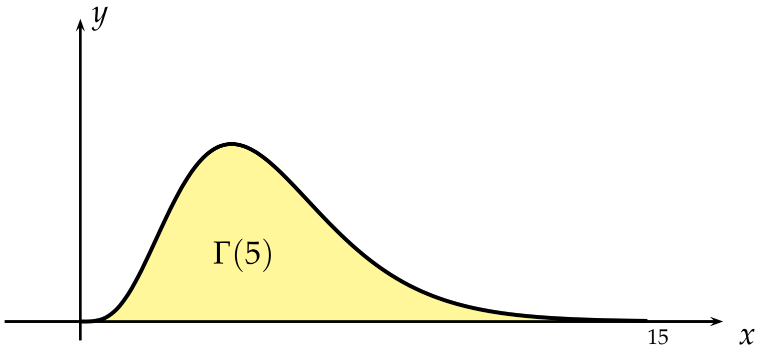
    e) $x = \sqrt{9 - y^2}, x - y - 7 = 0, x = 0$ Resp. $\frac{963\pi}{5}$

    f) $x^2 - y^2 = 16, y = 0, x = 8$ Resp. $128\pi\sqrt{3}$

.

Estar preparado es importante,
saber esperar lo es aún más,
pero aprovechar el momento
adecuado es la clave de la vida
Arthur Schnitzler (1862-1931)
dramaturgo austríaco

CAPÍTULO 4 INTEGRALES IMPROPIAS



$$\Gamma(5) = \int_0^{\infty} x^4 \cdot e^{-x} dx$$

Capítulo 4

Integrales impropias de Riemann

Al definir el concepto de integral de una función f sobre un intervalo $[a, b]$, se impuso como condición que este intervalo debía ser **finito** y la función f fuese **acotada**. Se quiere ahora dar sentido a expresiones de la forma

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}, \qquad \int_0^1 \frac{1}{x}\, dx, \qquad \int_0^\infty e^{-x^2}\, dx, \qquad \int_0^\infty \frac{sen\, x}{x}\, dx$$

En otras palabras, vamos a extender el concepto de integral a intervalos $[a, b]$ **no finitos** y a funciones f **no acotadas**. Al hacer esta extensión, estas integrales reciben el nombre de **integrales impropias** o **infinitas**; las cuales se clasifican como de **primera especie** si $[a, b]$ no es finito y f acotada, y de **segunda especie** si $[a, b]$ finito y f no acotada.
Un par de ejemplos ilustrarán la forma de afrontar esta clase de integrales.

Ejemplo 4.0.1. *La función* $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ no es acotada *en el intervalo* $(0, 1]$. *No obstante, la función* $F(x) = 2\sqrt{x}$ *es primitiva de ella para todo* $a \in (0, 1]$. *Por tanto,*

$$\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x}\Big|_a^1 = 2\sqrt{1} - 2\sqrt{a} = 2 - 2\sqrt{a}$$

Si hacemos que $a \to 0$*, se obtiene que*

$$\lim_{a\to 0} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2$$

con lo cual parece natural definir

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2$$

Ejemplo 4.0.2. *La función* $f(x) = e^{-\lambda x}$, $\lambda > 0$ *es continua para todo* $x \in \mathbb{R}$. *Además,*

$$\int_0^b e^{-\lambda x}\, dx = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\Big|_0^b = \frac{1}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda b}\right)$$

Si hacemos que $b \to \infty$, entonces también es natural escribir

$$\lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-\lambda x}\, dx = \int_0^\infty e^{-\lambda x}\, dx = \frac{1}{\lambda}$$

Definición 4.0.3. *Sea $A \subset \mathbb{R}$. Una función $f : A \to \mathbb{R}$ se dice* **localmente integrable** *en A si es integrable en cada intervalo cerrado y acotado contenido en A.*

Como ejemplo de funciones localmente integrables están las funciones continuas y todas las funciones que son monótonas (acotadas o no).

Observación.

- Si se considera $-\infty < a < b \leq \infty$, entonces una función f es localmente integrable en $[a, b)$ si y sólo si es integrable en cada intervalo $[a, x] \subset [a, b)$.
- Análogamente, si se considera $-\infty \leq a < b < \infty$, entonces una función f es localmente integrable en $(a, b]$ si y sólo si es integrable en cada intervalo $[x, b] \subset (a, b]$.

4.1. Integrales de primera especie

Se considera el recinto

$$R = \{(x, y) /\ 0 \leq y \leq e^{-x},\ 0 \leq x \leq b\}$$

El área de este recinto, como sabemos, se expresa mediante la integral

$$A = \int_0^b e^{-x}\, dx = 1 - e^{-b}$$

La figura 4.1 muestra la región R. Se observa que si se hace crecer b sin límite, esto es, $b \to \infty$, entonces

$$A = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-x}\, dx = \lim_{b\to\infty} (1 - e^{-b}) = 1$$

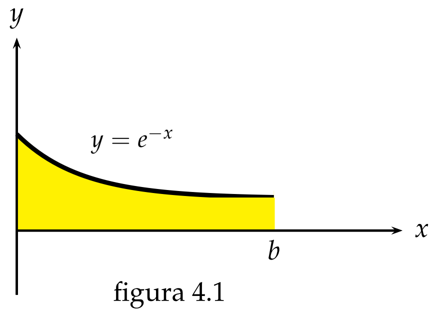


figura 4.1

Hacemos uso de la notación

$$\lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-x}\, dx = \int_0^\infty e^{-x}\, dx$$

En general, tenemos:

- Si f es continua $\forall x \geq a$, (y el límite existe) entonces

$$\int_a^\infty f(x)\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\, dx$$

Si F es una primitiva de f, escribimos, por el Teorema Fundamental

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = F(\infty) - F(a)$$

en donde $F(\infty) = \lim\limits_{x\to\infty} F(x)$

- Si f es continua $\forall x \leq b$, (y el límite existe) entonces

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

Si F es una primitiva de f, escribimos

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = F(b) - F(-\infty)$$

- Si f es continua $\forall x \in \mathbb{R}$, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 f(x)\,dx + \lim_{b\to\infty} \int_0^b f(x)\,dx$$

Si F es primitiva de f, escribimos

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = F(\infty) - F(-\infty)$$

expresión que tiene sentido, para la convergencia, si las dos evaluaciones dan como resultado un número real.

Definición 4.1.1. *Una integral impropia es* **convergente***, si el límite involucrado existe, y* **divergente** *si no.*

Ejemplo 4.1.2. *La integral* $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ *es convergente pues*

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \left(-\frac{1}{x}\right)_1^{\infty} = F(\infty) - F(1) = 0 - (-1) = 1$$

Ejemplo 4.1.3. *La integral* $\displaystyle\int_{-\infty}^{2} \frac{dx}{(4-x)^2}$ *converge ya que*

$$\int_{-\infty}^{2} \frac{dx}{(4-x)^2} = \left(\frac{1}{4-x}\right)_{-\infty}^{2} = F(2) - F(-\infty) = \frac{1}{2}$$

Ejemplo 4.1.4. *La integral* $\int_{-\infty}^{\infty} x\,dx$ *diverge puesto que*

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\,dx = \left(\frac{x^2}{2}\right)_{-\infty}^{\infty} = F(\infty) - F(-\infty) = \infty - \infty$$

como la diferencia de infinitos no está definida, **no existe** *el límite.*

Ejemplo 4.1.5. *Si* $a > 0$ *y* $p \in \mathbb{R}$*, entonces la integral impropia*

$$\int_a^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} \frac{a^{1-p}}{p-1}, & p > 1 \\ \infty, & p \leq 1 \end{cases}$$

En efecto;

- Si $p = 1$, entonces
$$\int_a^{\infty} \frac{1}{x}\,dx = \ln x \Big|_a^{\infty} = \ln(\infty) - \ln(a) = \infty$$

- Si $p \neq 1$, entonces
$$\int_a^{b} \frac{1}{x^p}\,dx = \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big|_a^{b} = \frac{b^{-p+1}}{-p+1} - \frac{a^{-p+1}}{-p+1}$$

  Ahora,
$$\int_a^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{b^{-p+1}}{-p+1} - \frac{a^{-p+1}}{-p+1}\right] = \frac{a^{1-p}}{p-1} + \frac{1}{1-p}\lim_{b\to\infty} b^{1-p}$$

Este último límite depende si p es menor o mayor que 1:

- Si $p > 1$, entonces $1 - p < 0$. Luego, $\lim_{b\to\infty} b^{1-p} = 0$.

- Si $p < 1$, entonces $1 - p > 0$. Luego, $\lim_{b\to\infty} b^{1-p} = \infty$.

En consecuencia,
$$\int_a^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} \frac{a^{1-p}}{p-1}, & p > 1 \\ \infty, & p \leq 1 \end{cases}$$

4.2. Integrales de segunda especie

En este caso los problemas se presentan por discontinuidades infinitas en un punto interior del intervalo de integración, o bien en algún límite superior o inferior. La existencia de tales integrales queda garantizada como sigue:

- Si f es continua en $(a, b]$, entonces, siempre que el límite exista,

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x)\, dx$$

- Si f es continua en $[a, b)$, entonces, siempre que el límite exista,

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_a^{b-\epsilon} f(x)\, dx$$

- Si f es continua en $[a, b]$, excepto tal vez en $x = c$, con $a < c < b$, y siempre que los límites existan

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_a^{c-\epsilon} f(x)\, dx + \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{c+\epsilon}^b f(x)\, dx$$

Ejemplo 4.2.1. *La integral* $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$ *diverge.*

En efecto, el problema está en $x = 0$, punto donde se indefine el denominador del integrando, lo que nos dice que la integral es de segunda especie. Su valor es

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_\epsilon^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\epsilon \to 0^+} \left(-\frac{1}{x} \right)_\epsilon^1 = \lim_{\epsilon \to 0^+} \left(-1 + \frac{1}{\epsilon} \right) = \infty$$

Ejemplo 2 La integral $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$ diverge.

Hay problemas en $x = 1$. La integral es de segunda especie

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} &= \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_0^{1-\epsilon} \frac{dx}{(x-1)^2} + \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{1+\epsilon}^2 \frac{dx}{(x-1)^2} \\
&= \lim_{\epsilon \to 0^+} \left(\frac{1}{1-x} \right)_0^{1-\epsilon} + \lim_{\epsilon \to 0^+} \left(\frac{1}{1-x} \right)_{1+\epsilon}^2 \\
&= -\infty + 1 + 1 - \infty \\
&= -\infty \text{ ¡divergente!}
\end{aligned}$$

Ejemplo 3 La integral $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}}$ converge.

Hay problemas en $x = 2$. La integral es de segunda especie

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}} &= \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_0^{2-\epsilon} \frac{dx}{\sqrt{2-x}} = -2\cdot \lim_{\epsilon\to 0^+} (2-x)^{1/2}\Big|_0^{2-\epsilon} \\
&= -2\cdot \lim_{\epsilon\to 0^+} (\epsilon^{1/2}-2^{1/2}) \\
&= 2\sqrt{2} \text{ ¡convergente!}
\end{aligned}$$

4.3. Criterios de convergencia para integrales de primera especie

En muchos problemas no se necesita calcular el valor de la integral impropia, sólo interesa saber si ella es o no convergente. Hasta este punto, hemos determinado la convergencia de una integral impropia recurriendo al cálculo de ella. Mostramos a continuación ciertos criterios de convergencia que permiten decidir sobre su convergencia o divergencia. Es importante señalar que para poder aplicar criterios de convergencia o calcular una integral impropia, ésta debe tener a lo sumo un punto conflictivo. De no ser así, la integral debe descomponerse en una suma de integrales. Vamos a trabajar tres criterios. Es interesante destacar que los criterios de convergencia están enunciados para integrales impropias sobre intervalos de la forma $[a,\infty)$, pero todos ellos valen para intervalos del tipo $(-\infty,a]$.

4.3.1. Criterio de comparación

Este criterio consiste en comparar la integral que se tiene con otra, de la cual se sabe si converge o no. Formalmente, se tiene lo que sigue.

Teorema 4.3.1. *(criterio de comparación)*
Sean f y g funciones continuas en $[a,+\infty)$ y supongamos que

$$0 \le f(x) \le g(x), \quad \forall x \ge a$$

entonces:

1. $\displaystyle\int_a^\infty g(x)\,dx$ *convergente* $\Longrightarrow \displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ *convergente*
2. $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ *divergente* $\Longrightarrow \displaystyle\int_a^\infty g(x)\,dx$ *divergente*

Esta propiedad se deduce de la propiedad de monotonía de la integral definida.

Ejemplo 4.3.2. *La integral* $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2}$ *converge.*

Tal como se mencionó, el uso del criterio de comparación requiere del conocimiento de la convergencia o no de integrales conocidas. En este caso, sabemos que

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$$

es convergente, y como

$$\frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{x^2} \Longrightarrow \int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2} \leq \int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$$

entonces, de acuerdo al criterio de comparación

$$\int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2}$$

es convergente.

Ejemplo 4.3.3. *La integral* $\displaystyle\int_1^\infty \frac{sen\, x\, dx}{x^2}$ *es convergente.*

Por criterio de comparación

$$|sen\, x| \leq 1 \Longrightarrow \frac{|sen\, x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} \Longrightarrow \int_1^\infty \frac{sen\, x\, dx}{x^2} \leq \int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$$

como la última integral es convergente, también lo es $\displaystyle\int_1^\infty \frac{sen\, x\, dx}{x^2}$.

4.3.2. Criterio de paso al límite

Al igual que el criterio anterior, se desea averiguar que sucede con $\int_a^\infty f(x)\, dx$, conociendo la convergencia o divergencia de $\int_a^\infty g(x)\, dx$. Se tiene.

Teorema 4.3.4. *(Criterio de paso al límite)*
Sean f y g funciones integrables para $x \geq a$ y g función positiva:

- *Si* $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda \neq 0$, *entonces las integrales*

$$F = \int_a^\infty f(x)\, dx\,, \qquad G = \int_a^\infty g(x)\, dx$$

  convergen o divergen simultáneamente.

- *Si* $\lambda = 0$, *la convergencia de* $G = \int_a^\infty g(x)\, dx$ *implica la convergencia de* $F = \int_a^\infty f(x)\, dx$

- *Si* $\lambda = \pm\infty$ *y* G *diverge, entonces* $F = \int_a^\infty f(x)\, dx$ *diverge.*

Ejemplo 4.3.5. *La integral* $\displaystyle\int_1^{\infty} e^{-x}\, x^n\, dx$, *con* $n \in \mathbb{N}$ *es convergente.*

Sabemos que $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ es convergente. Usando el criterio de paso al límite hacemos el cociente entre los integrandos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x}\, x^n}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} e^{-x}\, x^{n+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{n+2}}{e^x}$$

Este límite tiene la máscara $\frac{\infty}{\infty}$. Por tanto usamos L 'Hôpital

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{n+2}}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(n+2)x^{n+1}}{e^x}$$

Se observa que después de derivar $n+1$ veces, el numerador es un número y el denominador sigue siendo e^x. Al tomar límite el resultado es cero. por tanto, la integral dada es convergente.

Ejemplo 4.3.6. *Si* $p, q > 0$, *estudiemos la convergencia de* $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{x^p}{1+x^q}\, dx.$

Veamos que sucede con la aplicación del criterio de la forma límite usando la función $\dfrac{1}{x^{q-p}}$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^p}{1+x^q} : \frac{1}{x^{q-p}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^q}{1+x^q} = 1$$

como el resultado del límite es igual 1, entonces ambas integrales convergen o divergen simultáneamente. Pero, $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^{q-p}}$ converge para $q-p > 1$ y diverge si $q-p \leq 1$. En consecuencia,

- $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{x^p}{1+x^q}\, dx$ converge si $q-p > 1$.
- $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{x^p}{1+x^q}\, dx$ diverge si $q-p \leq 1$.

4.3.3. Criterio p

Este criterio es uno de los preferidos para determinar convergencia por lo sencillo que resulta su aplicación.

Teorema 4.3.7. *(Criterio p o de* **Pringsheim***)*
Sean f función integrable para $x \geq a$, $F = \int_a^{\infty} f(x)\, dx$. *Se tiene:*

$$\lim_{x\to\infty} x^p\, f(x) = \lambda, \quad p > 1, \quad \Longrightarrow \quad F \textbf{ converge}$$
$$\lim_{x\to\infty} x^p\, f(x) = \lambda \neq 0\ \vee \pm\infty, \ p \leq 1, \quad \Longrightarrow \quad F \textbf{ diverge}$$

Ejemplo 4.3.8. *La integral impropia* $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3+1}$ *converge.*

En efecto, para que exista $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^p \cdot \frac{1}{1+x^3}$, es suficiente elegir $p = 3$ para tener

$$\lim_{x\to\infty} x^3 \cdot \frac{1}{1+x^3} = 1$$

con lo cual la integral impropia dada es convergente.

Observación. El trabajo realizado con $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$, sigue siendo válido para $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$, ya que la sustitución $x = -t$ transforma integrales de límite inferior $-\infty$ en integrales de límite superior ∞. En este caso, el criterio p toma la forma

$$\lim_{x\to\infty} (-x)^p\, f(x) = \lambda, p > 1, \quad \Longrightarrow \quad F \textbf{ converge}$$

$$\lim_{x\to\infty} (-x)^p\, f(x) = \lambda \neq 0 \neq \pm\infty,\ p \leq 1, \quad \Longrightarrow \quad F \textbf{ diverge}$$

4.4. Criterios de convergencia para integrales de segunda especie

Para las integrales de segunda especie, siguen siendo válidos los criterios estudiados para las integrales de primera especie.

Teorema 4.4.1. *(Criterio de comparación)*
Sean f y g funciones no negativas localmente integrables en un intervalo $[a,b)$ tales que $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a,b)$, entonces:

- *Si $\int_a^b g(x)dx$ converge, entonces $\int_a^b f(x)dx$ converge.*
- *Si $\int_a^b f(x)dx$ diverge, entonces $\int_a^b f(x)dx$ diverge.*

Teorema 4.4.2. *(Criterio de comparación al límite)*
Sean f y g funciones no negativas localmente integrables en un intervalo $[a,b)$:

- *Si $\displaystyle\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = k \neq 0$, entonces las integrales $\int_a^b f(x)dx$ y $\int_a^b g(x)dx$ convergen o divergen simultáneamente.*
- *Si $k = 0$, entonces la convergencia de $\int_a^b g(x)dx$ implica la de $\int_a^b f(x)dx$*
- *Si $k = \pm\infty$ y $\int_a^b g(x)dx$ diverge, entonces $\int_a^b f(x)dx$ diverge.*

Ejemplo 4.4.3. *Probemos convergencia de* $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x^3 - x^2 + 4x - 4}$.

Es claro que se trata de una integral de segunda especie con problemas en $x = 1$. Para determinar convergencia usemos el criterio de paso al límite. Para ello debemos conocer otra integral para usarla como $g(x)$. Elegimos

$$g(x) = \frac{1}{x-1}$$

ello porque $(x-1)$ es el factor que anula el denominador. Se tiene

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x^3 - x^2 + 4x - 4} : \frac{1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{(x-1)(x^2+4)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x^2+4}$$

Como este límite es finito y distinto de cero ($\frac{1}{5}$) y dado que la integral $\int_1^2 \frac{dx}{x-1}$ es divergente, entonces la integral dada tiene el mismo comportamiento.

Teorema 4.4.4. *(criterio q)*

- *Sea f integrable en $(a, b]$ y sea $F = \int_a^b f(x)\, dx$, entonces*

$$\lim_{x\to a^+} (x-a)^q \cdot f(x) = \lambda,\ 0 < q < 1 \implies F \text{ **converge**}$$

$$\lim_{x\to a^+} (x-a)^q \cdot f(x) = \lambda \neq 0,\ q \geq 1 \implies F \text{ **diverge**}$$

- *Sea f integrable en $[a, b)$ y sea $F = \int_a^b f(x)\, dx$, entonces*

$$\lim_{x\to b^-} (b-x)^q \cdot f(x) = \lambda,\ 0 < q < 1 \implies F \text{ **converge**}$$

$$\lim_{x\to b^-} (b-x)^q \cdot f(x) = \lambda \neq 0,\ q \geq 1 \implies F \text{ **diverge**}$$

Este criterio es el equivalente al p de las integrales de primera especie.

Ejemplo 4.4.5. *Estudiemos convergencia de la integral impropia* $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$.

Se observa que hay problemas en ambos límites de integración, por tanto, debemos separar en dos la integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} + \int_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$$

Usaremos criterio q para estudiar convergencia de ambas integrales del segundo miembro.

$$\lim_{x\to 0^+} (x-0)^q \cdot \frac{1}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{1-x}}$$

para tener límite finito, es claro que $q = \frac{1}{2}$. Luego,

$$\lim_{x\to 0^+} x^{1/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{1-x}} = 1 \qquad \text{¡convergencia!}$$

Para la segunda integral, el mismo $q = \frac{1}{2}$, es tal que

$$\lim_{x\to 1^-} (1-x)^{1/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{1-x}} = 1 \qquad \text{¡convergencia!}$$

De esta forma, la serie analizada es convergente.

Ejemplo 4.4.6. *Estudiemos la integral impropia* $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x\,dx}{\sqrt{x}}$.

Se trata de una integral de segunda especie con una discontinuidad infinita en $x = 0$. Para probar convergencia usemos criterio q, con $q = \frac{3}{4}$.

$$\lim_{x\to 0^+} (x-0)^{3/4} \cdot \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} x^{1/4}\cdot \ln x = 0$$

Ello es razón de que al límite del segundo miembro le es aplicable la regla de L'Hôpital. En efecto,

$$\lim_{x\to 0^+} x^{1/4}\cdot \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-1/4}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-\frac{1}{4}x^{-5/4}} = -4 \lim_{x\to 0^+} x^{1/4} = 0$$

Concluimos que la integral es convergente.

Ejemplo 4.4.7. *Estudiemos la integral impropia* $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sqrt{x}\,dx}{\ln x}$.

Es claro que es una integral de segunda especie y que en $x = 1$ tiene hay una discontinuidad infinita. El criterio q, con $q = 1$ es tal que

$$\lim_{x\to 1^+} (x-1)^1 \cdot \frac{\sqrt{x}}{\ln x} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^{3/2} - x^{1/2}}{\ln x} = 1 \neq 0$$

Hicimos uso de la regla de L'Hôpital. Se concluye que la integral dada es divergente.

Los criterios antes estudiados no son suficientes para resolver todos los problemas de convergencia en integrales impropias. Por ello mencionamos el siguiente resultado y su aplicación.

Teorema 4.4.8. *Sean f y g funciones tales que*

1. *f es continua en $[a, \infty)$.*
2. *g' es continua en $[a, \infty)$, $g' \leq 0$ y $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$.*

3. $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ *acotada para* $x \geq a$.

entonces

$$\int_a^\infty f(x)g(x)dx$$

es convergente.

Ejemplo 4.4.9. *La integral* $\int_0^\infty \frac{senx}{x}\,dx$ *es convergente*

En $x = 0$ no hay problemas, pues $\lim_{x\to 0} \frac{senx}{x} = 1$, lo que nos indica que la integral no es impropia en $x = 0$. De esta forma, podemos separar la integral dada como sigue

$$\int_0^\infty \frac{senx}{x}\,dx = \int_0^1 \frac{senx}{x}\,dx + \int_1^\infty \frac{senx}{x}\,dx$$

Por lo que sólo resta analizar la última de estas integrales. Emplearemos el teorema 4.4.8 con $f(x) = senx$, $g(x) = \frac{1}{x}$. Se tiene:

1. $f(x) = senx$ continua en $[1, \infty)$.
2. $g'(x) = -\frac{1}{x^2} \leq 0$ y continua en $[1, \infty)$. Además, $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$.
3. $F(x) = \int_1^x f(t)dt = \int_1^x sent\,dt$. Veamos si es acotada

$$F(x) = \int_1^x sent\,dt = -cost\Big|_1^x = cos1 - cosx$$

Sabemos que

$$-1 \leq cosx \leq 1 \Longrightarrow 1 \geq -cosx \geq -1 \Longrightarrow -1 \leq -cosx \leq 1$$

sumando $cos1$ se tiene

$$cos1\ -\ 1 \leq cos1\ -\ cosx \leq cos1\ +\ 1 \Longrightarrow cos1\ -\ 1 \leq F(x) \leq cos1\ +\ 1$$

Por tanto, $F(x)$ acotada para todo $x \geq a$. En consecuencia, se cumplen todas las condiciones del teorema 4.4.8 y tenemos que

$$\int_0^\infty \frac{senx}{x}\,dx = \int_0^\infty f(x)g(x)\,dx \quad \text{converge}$$

Esto nos indica que

$$\int_0^\infty \frac{senx}{x}\,dx = \int_0^1 \frac{senx}{x}\,dx + \int_1^\infty \frac{senx}{x}\,dx$$

es convergente.

4.5. Convergencia absoluta y condicional

Definición 4.5.1. *La integral* $\int_a^\infty f(x)\,dx$ *se dice que* **converge absolutamente** *cuando* $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ *converge*

Teorema 4.5.2. *La convergencia absoluta de* $\int_a^\infty f(x)\,dx$ *implica su convergencia*

Demostración.
A partir del hecho de que $-f(x) \leq |f(x)|$, sumando en ambos lados $|f(x)|$ se tiene que

$$|f(x)| - f(x) \leq 2|f(x)|$$

de lo cual, se sigue la convergencia de

$$\int_a^\infty [\,|f(x)| - f(x)\,]\,dx$$

Luego,

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \int_a^\infty [\,|f(x)| - f(x)\,]\,dx + \int_a^\infty |f(x)|\,dx$$

converge.
La definición de convergencia absoluta es válida también para integrales de segundo tipo

Definición 4.5.3. *La integral* $\int_a^b f(x)\,dx$ *se dice que* **converge absolutamente** *cuando* $\int_a^b |f(x)|\,dx$ *converge.*

Evidentemente, se tiene que

Teorema 4.5.4. *La convergencia absoluta de* $\int_a^b f(x)\,dx$ *implica su convergencia ordinaria.*

Ejemplo 4.5.5. *La integral* $\displaystyle\int_1^\infty \frac{cosx\,dx}{x^2}$ *es convergente*

Sabemos que

$$\left|\frac{cosx}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$$

como $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ es convergente, entonces la integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{cosx\,dx}{x^2}$ es absolutamente convergente.

Definición 4.5.6. *Si una integral impropia es convergente pero no es absolutamente convergente, se dice que es* **condicionalmente convergente**.

Dado que existen integrales impropias que son condicionalmente convergentes, es importante tener criterios de convergencia que no dependan de la convergencia absoluta; de ellos, los que más se usan en la práctica son los criterios de Abel y Dirichlet.

Proposición 4.5.7. *(criterio de Abel)*
Sea f una función integrable en un intervalo $[a,b)$ y g una función monótona y acotada en dicho intervalo. Entonces la integral $\int_a^b fg$ es convergente.

Proposición 4.5.8. *(criterio de Dirichlet)*
Sea f una función localmente integrable en un intervalo $[a,b)$ y tal que

$$\sup_{a<x<b} \left| \int_a^b f \right|$$

es finito, y sea g una función monótona en $[a,b)$ con

$$\lim_{x \to b^-} g(x) = 0$$

Entonces la integral $\int_a^b fg$ es convergente.

4.6. Función Gamma

Adrian María Legendre (1752-1833) propuso, en 1814, llamar Función Gamma y representar con la letra correspondiente, Γ, a una función que había sido introducida por primera vez en una carta que escribió Leonard Euler (1707-1783) a Christian Goldbach (1690-1764) en el año 1729. Es una de las funciones no elementales más importantes del análisis matemático. Tiene aplicaciones en física, estadística, ingeniería, economía, como en ramas de la matemática, así por ejemplo, en ecuaciones diferenciales sintetiza la solución de la ecuación de Bessel, permite el cálculo de algunas transformadas de Laplace, y algo que no es menor, generaliza la función factorial, en efecto, la función factorial de un *número entero no negativo* es conocida. En forma recurrente se define de la siguiente forma:

$$n! = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 0 \\ n(n-1)!, & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

lo que nos proporciona la conocida expresión

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$$

Sin embargo, cabe preguntarse ¿existirá el factorial de un número racional, de un irracional y por qué no de un número complejo? La respuesta es afirmativa y la entrega la función gamma.
Partamos por considerar la función

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x}\, dx = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_0^\infty = \frac{1}{\lambda}$$

derivando respecto n veces respecto de λ se llega a

$$\int_0^\infty x^n e^{-\lambda x}\, dx = \frac{n!}{\lambda^{n+1}}$$

Tomando $\lambda = 1$ se obtiene que

$$n! = \int_0^\infty x^n\, e^{-x}\, dx, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

Es decir, tenemos una expresión integral para la función factorial. Si hacemos $n = 0$, entonces

$$0! = \int_0^\infty e^{-x}\, dx = 1$$

con lo que hemos extendido la función factorial, teniéndose que

$$n! = \int_0^\infty x^n\, e^{-x}\, dx, \quad n = 0, 1, 2, 3, \cdots$$

Definición 4.6.1. *Sea $p > 0$ cualquier número real positivo. Se llama función* **gamma** *a la integral impropia*

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1}\, e^{-x}\, dx$$

Esto es, claramente, una generalización de la función factorial a los números reales positivos. Así, de la definición de la gamma (p=n+1) se tiene

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n\, e^{-x}\, dx = n!, \text{ si } n \in \mathbb{N}$$

Esta función tiene las siguientes propiedades:

1. La función gamma es absolutamente convergente. Para probar esto debemos separar en dos la integral que define gamma pues en $x = 1$ surgen problemas con x^{p-1}. Luego,

$$\Gamma(p) = I(p) + J(p) \Leftrightarrow I(p) = \int_0^1 e^{-x}\, x^{p-1}\, dx;\ J(p) = \int_1^\infty e^{-x}\, x^{p-1}\, dx$$

Respecto de $I(p)$ se tiene que, es propia cuando $p \geq 1$, e impropia cuando $0 < p < 1$. Pero en este último caso se elige $q = 1 - p$ para tener que

$$0 < p < 1 \Longrightarrow 1 - p > 0 \Longrightarrow 0 < q < 1, p > 0$$

Luego

$$\lim_{x \to 0^+} (x - 0)^{1-p} \cdot e^{-x} x^{p-1} = \lim_{x \to 0^+} e^{-x} = 0$$

lo que significa ¡**convergencia absoluta**!

Por otra parte, la integral que representa $J(p)$ es también absolutamente convergente, pues para $x \to \infty$ el criterio p, con $p = 2$ entrega

$$\lim_{x \to \infty} x^2 \cdot e^{-x} x^{p-1} = \lim_{x \to \infty} e^{-x} \cdot x^{p+1} = 0$$

de modo que $J(p)$ es convergente, y en consecuencia, Γ está bien definida para todo $p > 0$.

2. $\Gamma(0^+) = +\infty$. En efecto,

$$\begin{aligned} 0 < x < 1 \Longrightarrow 1 - x > 0 \quad &\Longrightarrow \quad e^{1-x} > 1 \\ \Longrightarrow e^{-x} > e^{-1} \quad &\Longrightarrow \quad e^{-x} \cdot x^{p-1} > e^{-1} \cdot x^{p-1} \end{aligned}$$

Luego

$$\int_0^1 e^{-x} x^{p-1}\, dx = I(p) > e^{-1} \int_0^1 x^{-1}\, dx = \frac{1}{e \cdot p}$$

de aquí que $\Gamma(0^+) = +\infty$

3. Γ es una función continua $\forall p > 0$.

4. $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\, dx = 1$

5. $\Gamma(p+1) = p \cdot \Gamma(p)$

   Esta relación se llama de *recurrencia* y su verificación es inmediata usando integración por partes, $u = e^{-x}$, $dv = x^{n-1}\, dx$, en la integral que define la función Γ. Con esto se deja establecido que la función gamma es una generalización de la función factorial.

6. Si k es un entero positivo

$$\Gamma(p+k) = (p+k-1)(p+k-2)\cdots p\, \Gamma(p), \; p > 0$$

7. Si $p = k + r$ con $k \in \mathbb{N}$ y $r \in (0,1)$, entonces

$$\Gamma(p) = (p-1)(p-2)\cdots(p-k)\, \Gamma(r)$$

   Esto significa que es suficiente tabularla en $(0,1)$

8. Si $k = 1$ en (6) se tiene $\Gamma(p+1) = p!$

9. $\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \dfrac{\pi}{sen\, \pi p}$, $0 < p < 1$

10. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. Esta propiedad se sigue de la anterior reemplazando p por $\frac{1}{2}$.

Gamma para valores negativos

La integral que define la función Gamma no permite extenderla hacia números negativos, sin embargo, si se puede hacer a partir de la igualdad

$$\Gamma(p+1) = p \cdot \Gamma(p)$$

ya que entonces

$$\Gamma(p) = \frac{1}{p} \cdot \Gamma(p+1)$$

de lo cual

$$\lim_{t\to 0} \Gamma(p) = \lim_{t\to 0} \frac{\Gamma(p)}{p} = \infty$$

Este es el valor de $\Gamma(0)$ y de todos los enteros negativos

La gráfica de la función gamma es la siguiente

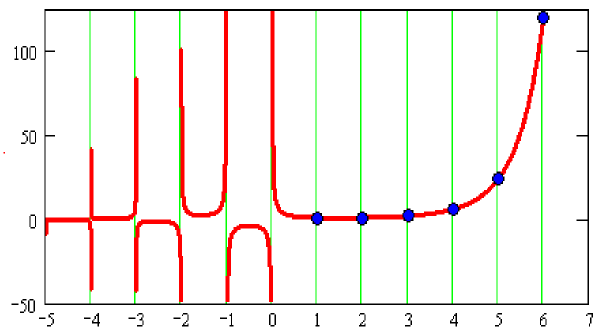


figura 4.2 función gamma

11. Con un cambio de variables apropiado, la función Γ se puede escribir bajo las siguientes formas:

- $x = k \cdot z \Longrightarrow \Gamma(p) = k^p \int_0^\infty e^{-kz} \cdot z^{p-1}\, dz$
- $x = z^2 \Longrightarrow \Gamma(p) = 2 \int_0^\infty e^{-z^2} \cdot z^{2p-1}\, dz$

La siguiente prueba es sólo para *justificar* el valor de $\Gamma(\frac{1}{2})$. Se requiere del conocimiento de integrales múltiples.

$$\begin{aligned}
\Gamma(\frac{1}{2}) = 2 \int_0^\infty e^{-z^2}\, dz \Longrightarrow \Gamma^2(\frac{1}{2}) &= \left(2 \int_0^\infty e^{-z^2}\, dz\right) \cdot \left(2 \int_0^\infty e^{-v^2}\, dv\right) \\
\Longrightarrow \Gamma^2(\frac{1}{2}) &= 4 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-z^2-v^2}\, dz\, dv \\
\Longrightarrow \Gamma^2(\frac{1}{2}) &= 4 \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} r \cdot e^{-r^2}\, d\theta\, dr \\
\Longrightarrow \Gamma^2(\frac{1}{2}) &= 4 \cdot \frac{\pi}{2} \int_0^\infty r \cdot e^{-r^2}\, dr \\
\Longrightarrow \Gamma^2(\frac{1}{2}) &= -2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot (-1) = \pi
\end{aligned}$$

de donde se obtiene

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

Hay que tener presente, que en el cálculo de $\Gamma(\frac{1}{2})$, se trabajó en el plano polar, y con una integral doble, elementos que por ahora se encuentran fuera del alcance de este curso.

Ejemplo 4.6.2. *Los siguientes cálculos requieren de la función* Γ.

1. $\displaystyle\int_0^\infty x^3 \cdot e^{-x}\, dx = \int_0^\infty x^{4-1} \cdot e^{-x}\, dx = \Gamma(4) = 3! = 6$

2. $\Gamma(\frac{3}{2}) = \Gamma(1 + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \cdot \Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi}$

3. $\Gamma(1 + \frac{3}{2}) = \frac{3}{2} \cdot \Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{3}{2} \cdot \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi} = \frac{3}{4} \cdot \sqrt{\pi} = \Gamma(\frac{5}{2})$

4. $\displaystyle\int_0^\infty \sqrt{y} \cdot e^{-y^3}\, dy = \frac{1}{3} \cdot \Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\pi}$

   Para dejar la integral dada en la forma de la función Γ, hacemos la sustitución $y^3 = x$, ya que de esta manera, $dx = 3y^2\, dy$, teniéndose

   $$\int_0^\infty \sqrt{y} \cdot e^{-y^3}\, dy = \frac{1}{3} \cdot \int_0^\infty e^{-x} \cdot x^{-1/2}\, dx = \frac{1}{3} \cdot \Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\pi}$$

5. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-4z^2}\, dz = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{\pi}$

   Para estar en la forma de la función Γ, hacemos la sustitución $4z^2 = x$, de donde, $dx = 8z\, dz$. Se tiene

   $$\int_0^\infty e^{-4z^2}\, dz = \frac{1}{4} \int_0^\infty e^{-x} \cdot x^{-1/2}\, dx = \frac{1}{4} \cdot \Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\pi} = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{\pi}$$

6. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-\ln\, x}} = \sqrt{\pi}$

   La sustitución $-\ln\, x = z \Longrightarrow dx = -e^{-z}\, dz$. Se tiene

   $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-\ln\, x}} = \int_0^\infty e^{-z} \cdot z^{-1/2}\, dx = \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

7. $\Gamma(-\frac{1}{2}) = -2\sqrt{\pi}$

   Se usa la fórmula $\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n)$, con $n = -\frac{1}{2}$ para tener

   $$\Gamma(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2} \cdot \Gamma(-\frac{1}{2}) \Longrightarrow \Gamma(-\frac{1}{2}) = -2\,\Gamma(\frac{1}{2}) = -2\sqrt{\pi}$$

4.6.1. La función Gamma para números complejos

La función Gamma se define para todo número complejo z cuya parte real es positiva como sigue

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1}\, e^{-t}\, dt$$

Esta definición puede extenderse a $\mathbb{C} - \mathbb{Z}^-$, siendo $\mathbb{Z}^-$ el conjunto de los números enteros negativos. Las propiedades son las mismas del caso real:

1. $\Gamma(1) = 1$
2. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$
3. $\Gamma(n+1) = n!,\, n \in \mathbb{N}$
4. $\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = 2^{1-2z}\sqrt{\pi}\,\Gamma(2z)$
5. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$
6. $\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \dfrac{\pi}{sen(\pi z)}$

4.7. Función Beta

Al igual que la **Gamma**, la función **Beta** permite calcular integrales definidas e impropias en forma mucho más simple que lo usual.

Definición 4.7.1. *Para valores positivos de m y n, la función Beta es la integral impropia*

$$\beta(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}\,(1-x)^{n-1}\,dx$$

Propiedades que satisface la función beta son:

1. La función $\beta(m,n)$ es una integral **propia** cuando $m,\ n \geq 1$; es una integral **impropia** en el límite inferior cuando $m < 1$, e **impropia** en el límite superior cuando $n < 1$. De esta manera, la función **beta** la escribimos

$$\beta(m,n) = \int_0^{1/2} x^{m-1}\,(1-x)^{n-1}\,dx + \int_{1/2}^{1} x^{m-1}\,(1-x)^{n-1}\,dx \tag{4.1}$$

La primera integral del segundo miembro, converge para $0 < m < 1$, pues

$$\lim_{x \to 0^+} x^{1-m} \cdot x^{m-1}\,(1-x)^{n-1} = 1$$

La primera integral del segundo miembro, diverge cuando $m \leq 0$, pues

$$\lim_{x \to 0^+} x^1 \cdot x^{m-1} \, (1-x)^{n-1} = \lim_{x \to 0^+} x^m \, (1-x)^{n-1} = \begin{cases} 1, & \text{si } m = 0 \\ \infty, & \text{si } m < 0 \end{cases}$$

Luego, en este caso, existe **divergencia**

Para la segunda integral en el segundo miembro de 4.1, la sustitución $x = 1 - z$, la reduce a la primera integral del segundo miembro recién analizada, con los roles de m e n intercambiados. Se concluye que $\beta(m, n)$ está bien definida para $m, n > 0$.

2. La función $\beta(m, n)$ es continua, pues cuando es impropia converge uniformemente si $m,\ n \geq a > 0$. De hecho

$$\beta(m, n) \leq M(t) = \int_0^1 x^{a-1} \, (1-x)^{a-1} \, dx$$

3. Propiedad de simetría. El cambio $x = 1 - z$ hace que

$$\beta(m, n) = \beta(n, m)$$

4. Formas interesantes de escribir la función **beta** son:

- $x = cos^2 z \Longrightarrow \beta(m, n) = 2 \displaystyle\int_0^{\pi/2} (cos\, z)^{2m-1} \cdot (sen\, z)^{2n-1} \, dz$
- $x = \dfrac{z}{1+z} \Longrightarrow \beta(m, n) = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{z^{m-1} \, dz}{(1+z)^{m+n}}$

5. La relación entre Γ y β está dada por

$$\beta(m, n) = \frac{\Gamma(m) \cdot \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)},\ m,\ n > 0$$

Ejemplo 4.7.2. *Probar que* $\displaystyle\int_0^1 x^4 \, (1-x)^3 \, dx = \frac{1}{280}$

Comparando la integral a calcular, con la integral que define la función β, tenemos

$$\beta(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} \, (1-x)^{n-1} \, dx, \Longrightarrow m = 5,\ n = 4$$

Luego

$$\int_0^1 x^4 \, (1-x)^3 \, dx = \beta(5, 4) = \frac{\Gamma(5) \cdot \Gamma(4)}{\Gamma(9)} = \frac{4! \cdot 3!}{8!} = \frac{1}{280}$$

Ejemplo 4.7.3. *Probar que* $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{2-x}} = \frac{64\sqrt{2}}{15}$

La sustitución $x = 2z \Longrightarrow dx = 2\,dz$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{2-x}} &= \frac{8}{\sqrt{2}}\int_0^1 z^2\,(1-z)^{-1/2}\,dz = 4\sqrt{2}\,\beta(3,\frac{1}{2})\\ &= 4\,\sqrt{2}\cdot\frac{\Gamma(3)\cdot\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{7}{2})} = \frac{64\sqrt{2}}{15}\end{aligned}$$

Ejemplo 4.7.4. *Calcular* $\displaystyle\int_0^{\pi/2} sen^6\theta\;d\theta$

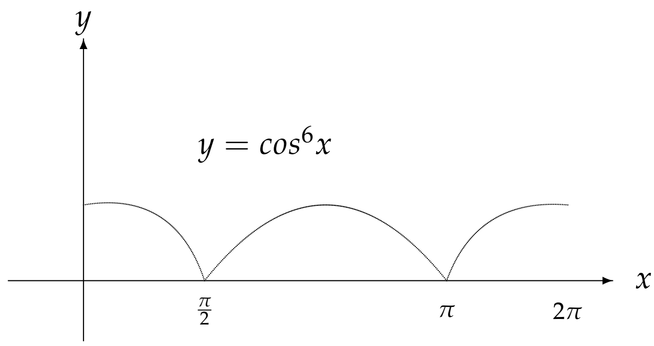
Se considera la función β en la forma

$$\beta(m,n) = 2\int_0^{\pi/2}(cos\,z)^{2m-1}\cdot(sen\,z)^{2n-1}\,dz$$

entonces

$$\int_0^{\pi/2} sen^6\,\theta\;d\theta = \frac{1}{2}\cdot\beta(\frac{1}{2},\frac{7}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\cdot\Gamma(\frac{7}{2})}{\Gamma(4)} = \frac{5\pi}{32}$$

Ejemplo 4.7.5. *Calcular* $\displaystyle\int_0^{2\pi} cos^6 t\;dt$



En la figura se observa que el área bajo la curva entre 0 y 2π, es 4 veces la que se encuentra bajo la curva entre 0 y $\pi/2$. La integral que se debe evaluar presenta problemas en el límite superior de integración, pero este inconveniente desaparece al tomar 4 veces la integral, por lo anteriormente señalado. Luego

$$\int_0^{2\pi} cos^6 t\;dt = 4\int_0^{\pi/2} cos^6 t\;dt = 4\cdot\frac{1}{2}\cdot\beta(\frac{7}{2},\frac{1}{2}) = 2\cdot\frac{\Gamma(\frac{7}{2})\cdot\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(4)} = \frac{5\pi}{8}$$

4.8. Problemas resueltos

En los siguientes problemas, vamos a aplicar criterios para averiguar la convergencia o divergencia de integrales impropias. En cada problema se ilustra el empleo de al menos dos criterios.

Ejemplo 4.8.1. *La integral impropia* $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{x\,dx}{x^3+1}$ *converge.*

Por criterio de comparación

$$x^3+1 \geq x^3 \Longrightarrow \frac{x}{x^3+1} \leq \frac{1}{x^2} \Longrightarrow \int_1^{\infty} \frac{x}{x^3+1} \leq \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}$$

Se sabe que $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}$ es convergente y que es **mayor** que la integral dada, se sigue, del criterio de comparación, que $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{x}{x^3+1}$ es convergente.

Por criterio de paso al límite

$$f(x) = \frac{x}{x^3+1}\,,\ g(x) = \frac{1}{x^2} \Longrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^3}{x^3+1} \Longrightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

lo cual prueba convergencia.

Por criterio p

Con $p = 2$ tenemos

$$\lim_{x\to\infty} x^2 \cdot \frac{x}{x^3+1} = 1,\ p = 2 > 1 \Longrightarrow \text{ ¡¡convergencia!!}$$

Ejemplo 4.8.2. *La integral impropia* $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ *es convergente.*

Por criterio p

$$\lim_{x\to\infty} x^2 \cdot \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = 1$$

Por criterio de paso al límite

Se toma $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$, ya que entonces

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \Longrightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \neq 0$$

Por criterio de comparación

Se tiene en cuenta que

$$\begin{aligned} x^2 - 1 \geq x,\ x,\ \forall x \geq 2 &\implies x \cdot \sqrt{x^2-1} \geq x \cdot \sqrt{x} \\ &\implies \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \leq \frac{1}{x^{3/2}} \end{aligned}$$

para obtener

$$\int_2^{\infty} x^{-3/2}\,dx \text{ convergente } \implies \int_2^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} \text{ convergente}$$

Ejemplo 4.8.3. *La integral impropia* $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^5+1}}$ *diverge.*

Por criterio p

$$p = \frac{1}{2} \implies \lim_{x\to\infty} x^{1/2} \cdot \frac{x^2}{\sqrt{x^5+1}} = 1 \neq 0,\ p < 1$$

Por criterio de paso al límite

$$g(x) = x^{-1/2} \implies \lim_{x\to\infty} \frac{x^{5/2}}{\sqrt{x^2-1}} = 1 \neq 0$$

con lo cual, la integral es **divergente**

Ejemplo 4.8.4. *La integral impropia* $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{x^2\,dx}{x^3+1}$ *diverge.*

En $x = -1$ existe una discontinuidad infinita,por lo cual se descompone la integral dada en la forma

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{x^2\,dx}{x^3+1} = \int_{-\infty}^{-1} \frac{x^2\,dx}{x^3+1} + \int_{-1}^{0} \frac{x^2\,dx}{x^3+1}$$

A la primera integral del segundo miembro le aplicamos una nueva descomposición en integrales, pues presenta aún dos puntos conflictivos, a saber, los límites superior e inferior. Se tiene

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{x^2\,dx}{x^3+1} = \int_{-\infty}^{-2} \frac{x^2\,dx}{x^3+1} + \int_{-2}^{-1} \frac{x^2\,dx}{x^3+1} + \int_{-1}^{0} \frac{x^2\,dx}{x^3+1}$$

En esta expresión usamos el criterio p en la primera integral del segundo miembro para tener

$$\lim_{x\to\infty} (-x)^1 \cdot \frac{x^2\,dx}{x^3+1} = -1$$

con lo cual concluímos que la integral dada es divergente.

Si la misma integral es analizada por el criterio de paso al límite, hay que elegir $g(x) = \dfrac{1}{x}$, ya que entonces

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^3+1} = 1 \text{ divergente}$$

La alternativa del comparación, para esta misma integral, nos lleva a mayorar el denominador para que su recíproco se aminore y así obtener divergencia

$$x^3+1 \leq x, \ , \ \forall x \leq -2 \Longrightarrow \frac{1}{x^3+1} \geq \frac{1}{x} \Longrightarrow \frac{x^2}{x^3+1} \geq x$$

Hemos llegado a establecer que

$$\int_{-\infty}^{-2} \frac{x^2\,dx}{x^3+1} \geq \int_{-\infty}^{-2} x\,dx = -\infty$$

En consecuencia, la integral dada es divergente.

Ejemplo 4.8.5. *La integral impropia* $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{x-e^x}\,dx$ *es convergente.*

Hacemos el cálculo directo de la integral, ya que ningún método conduce a establecer convergencia. Sea $z = e^x$, entonces $dz = e^x dx$. Se tiene

$$\int_{-\infty}^{0} e^{x-e^x}\,dx = \int_{0}^{1} e^{-z}\,dz = 1 - \frac{1}{e} \quad \text{convergencia}$$

Ejemplo 4.8.6. *Determinar convergencia o divergencia de la integral* $\displaystyle\int_{1}^{\infty} e^{-x}\,\ln x\,dx$

La integral $\displaystyle\int_{1}^{\infty} e^{-x}\,\ln\,x\,dx$ es impropia de primera especie con un sólo punto conflictivo. Además, el integrando se puede escribir como $f(x) = \frac{\ln x}{e^x}$ para usar luego el criterio p, con $p = 2$, y tener

$$\lim_{x\to\infty} x^2 \cdot \frac{\ln x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 \cdot \ln x}{e^x}$$

El límite se encuentra en la forma $\frac{\infty}{\infty}$, de manera que es aplicable la regla de L'Hôpital. Se tiene

$$\lim_{x\to\infty} x^2 \cdot \frac{\ln\,x}{e^x} = 0$$

Esto significa que la integral es convergente.

Ejemplo 4.8.7. *Determinar convergencia o divergencia de la integral* $\int_1^{\infty} (x^3-1)^{-1/2}\, dx$

La integral $\int_1^{\infty} (x^3-1)^{-1/2}\, dx$ es impropia con dos puntos conflictivos, $x = 1$, $x = \infty$. Por esta razón, la integral se separa como sigue.

$$\int_1^{\infty} (x^3-1)^{-1/2}\, dx = \int_1^{2} (x^3-1)^{-1/2}\, dx + \int_2^{\infty} (x^3-1)^{-1/2}\, dx$$

para cada una de las cuales se tiene:

i) La integral $\int_1^{2} (x^3-1)^{-1/2}\, dx$ es impropia de segunda especie. Al aplicar el criterio q, con $q = \frac{1}{2}$.

$$\lim_{x\to 1^+} (x-1)^{1/2} \cdot \frac{1}{(x^3-1)^{1/2}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{(x^2+x+1)^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

con lo cual tenemos que esta integral converge.

2i) La integral $\int_2^{\infty} (x^3-1)^{-1/2}\, dx$ es impropia de primera especie. Aplicamos el criterio p, con $p = \frac{3}{2}$

$$\lim_{x\to\infty} x^{3/2} \cdot \frac{1}{(x^3-1)^{1/2}} = 1$$

así, la integral $\int_2^{\infty} (x^3-1)^{-1/2}\, dx$ es convergente.

Dado que ambas integrales son convergente, la integral $\int_1^{\infty} (x^3-1)^{-1/2}\, dx$ es convergente.

Ejemplo 4.8.8. *Determinar, usando criterios, convergencia o divergencia de* $\int_0^{1} (1-x^4)^{-1/3}\, dx$

La integral $\int_0^{1} (1-x^4)^{-1/3}\, dx$ es impropia de segunda especie con un punto conflictivo, $x = 1$. Le aplicamos criterio q, con $q = \frac{1}{3}$

$$\lim_{x\to 1^-} (1-x)^{1/3} \cdot \frac{1}{(1-x)^{1/3}} \cdot \frac{1}{(1+x)^{1/3}} \cdot \frac{1}{(1+x^2)^{1/3}} = 4^{-1/3}$$

lo que significa que la integral converge.

Ejemplo 4.8.9. *Determinar, usando criterios, convergencia o divergencia de* $\int_0^\infty x\,(x^5+1)^{-1/2}\,dx.$

La integral $\int_0^\infty x\cdot(x^5+1)^{-1/2}\,dx$ es impropia de primera especie con un punto conflictivo, $x=\infty$. Le aplicamos criterio p, con $p=\dfrac{3}{2}$

$$\lim_{n\to\infty} x^{3/2}\cdot\frac{x}{(1+x^5)^{1/2}}=1$$

lo que significa que la integral converge.

Ejemplo 4.8.10. *Demostrar que* $\int_0^\infty e^{-t^p}\,dt=\dfrac{1}{p}\,\Gamma(\dfrac{1}{p}),\ p>0$

Con la sustitución $z=t^p$, se obtiene $dz=p\,t^{p-1}\,dt$, $z=0$, $z=\infty$, para $t\to 0$ y $t\to\infty$, respectivamente. Luego

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-t^p}\,dt &= \int_0^\infty e^{-z}\,\frac{1}{p}\,t^{1-p}\,dz=\frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-z}\,(z^{1/p})^{1-p}\,dz\\ &= \frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-z}\,z^{\frac{1}{p}-1}\,dz=\frac{1}{p}\,\Gamma(\frac{1}{p})\end{aligned}$$

Ejemplo 4.8.11. *Usar la función* **beta** *para calcular* $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty\frac{dt}{(1+t^2)^4}$

Con el cambio de variable $z=t^2$ se tiene que $dz=2t\,dt$, con lo cual

$$\int_{-\infty}^\infty\frac{dt}{(1+t^2)^4}=2\int_0^\infty\frac{dt}{(1+t^2)^4}=\int_0^\infty\frac{z^{-1/2}\,dz}{(1+z)^4}$$

Se sabe que la función beta viene definida en la forma

$$\beta(m,n)=\int_0^\infty\frac{z^{m-1}\,dz}{(1+z)^{m+n}}$$

al comparar, se deduce que $m+n=4,\ m-1=-\dfrac{1}{2}$. Con lo cual se tiene $m=\dfrac{1}{2},\ n=\dfrac{7}{2}$. Siguiéndose que

$$\int_{-\infty}^\infty\frac{dt}{(1+t^2)^4}=\beta(\frac{1}{2},\frac{7}{2})=\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{7}{2})}{\Gamma(4)}=\sqrt{\pi}\cdot\frac{15}{8}\cdot\sqrt{\pi}\cdot\frac{1}{6}=\frac{5\pi}{16}$$

Ejemplo 4.8.12. *Demostrar que* $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{p-1}\,dx}{1+x} = \frac{\pi}{sen\,\pi p}$

Al mirar una de las formas de la función beta, exactamente,

$$\beta(m,n) = \int_0^\infty \frac{z^{m-1}\,dz}{(1+z)^{m+n}}$$

se llega a la conclusión de que, $m = p$, $n = 1-p$. Luego,

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}\,dx}{1+x} = \beta(p, 1-p) = \frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(1-p)}{\Gamma(p+1-p)} = \Gamma(p)\cdot\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{sen\,\pi p}$$

Otra forma de encarar el problema es tomar $z = \dfrac{x}{1+x}$.

Ejemplo 4.8.13. *Demostrar que* $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$

El cambio $x^4 = z$ produce $4x^3 dx = dz \Longrightarrow dx = \frac{1}{4}\,z^{-3/4}\,dz$. Luego

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{z^{-3/4}\,dz}{1+z} = \frac{1}{4}\,\beta(\frac{1}{4},\frac{3}{4}) = \frac{1}{4}\,\Gamma(\frac{1}{4})\cdot\Gamma(\frac{3}{4}) = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

Ejemplo 4.8.14. *Demostrar que* $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{tg\,x}\,dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

Reescibimos la integral para que parezca beta o gamma.

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{tg\,x}\,dx = \int_0^{\pi/2} (sen\,x)^{1/2}\cdot(cos\,x)^{-1/2}\,dx$$

Ahora sí que tiene forma de una beta, exactamente

$$\beta(m,n) = 2\int_0^{\pi/2} (cos\,z)^{2m-1}\cdot(sen\,z)^{2n-1}\,dz$$

Se sigue entonces que

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} (sen\,x)^{1/2}\cdot(cos\,x)^{-1/2}\,dx &= \frac{1}{2}\,\beta(\frac{3}{4},\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}\cdot\Gamma(\frac{3}{4})\cdot\Gamma(\frac{1}{4})\\ &= \frac{1}{2}\,\Gamma(\frac{1}{4})\cdot\Gamma(1-\frac{1}{4}) = \frac{\pi\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

4.9. Problemas propuestos

1. Determinar si la integral impropia dada es o no convergente.

a) $\displaystyle\int_5^{\infty}\frac{dx}{x}$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x+1}$

c) $\displaystyle\int_5^{\infty}x\,e^{-x^2}\,dx$

d) $\displaystyle\int_0^{2}\frac{dx}{(x-2)^2}$

e) $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{5/4}}$

f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{e^x+e^{-x}}$

g) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2}\sec\,x\,dx$

h) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}$

i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(1-x)^{2/3}}$

j) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0}e^{3x}\,dx$

k) $\displaystyle\int_0^{1}\frac{dx}{\sqrt{x}}$

l) $\displaystyle\int_2^{\infty}e^{-x}\,sen\,x\,dx$

m) $\displaystyle\int_0^{2}\frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$

n) $\displaystyle\int_{-1}^{1}x^{-2/3}$

ñ) $\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-x}\cos x\,dx$

o) $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{\ln\,x\,dx}{x}$

p) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1}\frac{dx}{x^4}$

q) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xdx}{(x^2+4)^2}$

r) $\displaystyle\int_0^{4}\frac{dx}{\sqrt{4-x}}$

s) $\displaystyle\int_2^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}$

t) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{2x^2+2x+1}$

u) $\displaystyle\int_0^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

v) $\displaystyle\int_2^{\infty}\frac{dx}{e^x}$

w) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{dt}{t(\ln t)^{1/5}}$

2. Analizar convergencia, por criterios.

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\pi/2}\frac{dx}{x+senx}$

b) $\displaystyle\int_1^{\infty}sen\,\frac{1}{x^2}\,dx$

c) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{e^{arctg\,x}}{x}\,dx$

d) $\displaystyle\int_0^{1}\left(\ln\frac{1}{t}\right)^{x}\,dt$

e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{a}\frac{x^2+x^3}{x^6+1}\,dx$

f) $\displaystyle\int_{\infty}^{\infty}\frac{x^2\,dx}{(x^2+x+1)^{5/2}}$

g) $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{\ln x}{x+e^{-x}}\,dx$

h) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{sen^2\,x}{x^2}\,dx$

i) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\ln(sen\,x)\,dx$

j) $\displaystyle\int_0^{2}\frac{x^2\,dx}{(2-x)^2}$

k) $\displaystyle\int_2^{3}\frac{x^2+1}{x^2-4}\,dx$

l) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{(cos\,x)^{1/n}},\ n>1$

m) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^2+\sqrt{x}}$

n) $\displaystyle\int_0^{3}\frac{\ln x\,dx}{\sqrt{27-x^3}}$

ñ) $\displaystyle\int_0^{\infty}(x+x^4)^{-1/2}\,dx$

Respuestas: $p=1/2, p=2, p=1, \Gamma(2), p=3, p=3, p=1, p=3/2, q=1/2, x=2t, (x-2)(x+2), \beta, (p=1/2, p=2), (p=1/2, q=1/2), (p=2, q=1/2)$

3. Probar que si $\displaystyle\int_{-\infty}^{b}f(x)\,dx$ converge, entonces $\displaystyle\int_{-b}^{\infty}f(-x)\,dx$ converge y tiene el mismo valor.

4. Hallar el valor de n para que converga cada integral siguiente:

$$a)\ \int_2^\infty \left(\frac{nx}{x^2+1} - \frac{1}{2x+1}\right) dx \quad b)\ \int_1^\infty \left(\frac{n}{x+1} - \frac{3x}{2x^2+n}\right) dx \quad c)\ \int_1^2 \frac{dx}{x(\ln x)^n}$$

Resp. a) $n = \frac{1}{2}$, b) $n = \frac{3}{2}$, c) $n < 1$,

5. Hallar las áreas de las regiones que se indican. Bosquejar la región

   a) La región acotada por la curva $y = (x-8)^{-2/3}$, el eje x, y las rectas $x = 0$, $x = 8$

   b) La región en el primer cuadrante, que se encuentra bajo la curva $y = (2x-6)^{-1/4}$, entre las rectas $x = 3$ y $x = 5$

   c) La región entre las curvas $y = \dfrac{1}{x}$, $y = \dfrac{1}{x+x^3}$, $0 \le x \le 1$

   d) La región limitada por la curva $y = (x-1)^{-2/3}$, el eje x, y las rectas $x = 0$, $x = 3$

   e) La región acotada por $y = (x-2)^{-2}$, y las rectas $x = 0$, $x = 4$

6. Calcular las siguientes expresiones:

$$a)\ \Gamma(-\tfrac{7}{2}) \qquad b)\ \frac{\Gamma(7)}{\Gamma(4)\Gamma(3)} \qquad c)\ \frac{\Gamma(3)\,\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{9}{2})} \qquad d)\ \Gamma(\tfrac{1}{2})\,\Gamma(\tfrac{3}{2})\,\Gamma(\tfrac{5}{2})$$

Resp: b) 60, c) $\frac{16}{105}$, d) $\frac{3}{8}\,\pi^{3/2}$

7. Usar la función Gamma para calcular las siguientes integrales:

$$a)\ \int_0^\infty x^{3/2}\, e^{-x}\, dx \qquad c)\ \int_0^\infty x^2\, e^{-2x^2}\, dx \qquad e)\ \int_0^\infty \sqrt[4]{x}\, e^{-\sqrt{x}}\, dx$$

$$b)\ \int_0^\infty x^{-1/2}\, e^{-ax}\, dx \qquad d)\ \int_0^\infty e^{-x^3}\, dx \qquad f)\ \int_0^\infty y^3\, e^{-2y^5}\, dy$$

Resp: a) $\frac{3}{4}\sqrt{\pi}$, 2) $\frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$, 3) $\frac{\sqrt{2\pi}}{16}$, 4) $\frac{1}{3}\,\Gamma(\frac{1}{3})$, 5) $\frac{3}{2}\,\sqrt{\pi}$, 6) $\frac{\Gamma(\frac{4}{5})}{5\,\sqrt[5]{16}}$

8. Demostrar los siguientes hechos:

$$a)\ \int_0^\infty \frac{e^{-st}}{\sqrt{t}}\, dt = \sqrt{\frac{\pi}{s}},\ s > 0$$

$$b)\ \int_0^\infty e^{-t^p}\, dt = \frac{1}{p}\,\Gamma(\frac{1}{p}),\ p > 0$$

$$c)\ \int_0^1 t^{x-1}\left[\ln(\frac{1}{t})\right]^{y-1} dt = \frac{\Gamma(y)}{x^y},\ x,\ y > 0$$

d) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} sen^x\, t\, dt = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{x+1}{2})}{2\Gamma(\frac{x}{2}+1)}$

e) $\displaystyle\int_0^1 x^m\,(\ln x)^n\,dx = \frac{(-1)^n\,n!}{(m+1)^{n+1}},\ n \in \mathbb{N},\ m > -1,\ x > -1$

9. Calcular las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_0^1 (\ln\ x)^4\,dx$ *b*) $\displaystyle\int_0^1 (x\ \ln x)^3\,dx$ *c*) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt[3]{\ln(\frac{1}{x})}\,dx$

Resp: a) 24 b) - $\frac{3}{128}$ c) $\frac{1}{3}\Gamma(\frac{1}{3})$

10. Verificar los siguientes cálculos de función beta:

a) $\beta(3,5) = \dfrac{1}{105}$ *b*) $\beta(\dfrac{3}{2},2) = \dfrac{4}{15}$ *c*) $\beta(\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}) = \dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}$

11. Verificar, con la función Beta, las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_0^1 x^2\,(1-x)^3\,dx = \frac{1}{60}$

b) $\displaystyle\int_0^{\pi} sen^5 x\,dx = \frac{16}{15}$

c) $\displaystyle\int_0^4 \sqrt{z^3\,(4-z)^5}\,dz = 12\pi$

d) $\displaystyle\int_0^2 (4-x^2)^{3/2}\,dx = 3\pi$

e) $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{3x-x^2}} = \pi$

f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{1-x}}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$

g) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} sen^4\,\theta\,cos^4\,\theta\,d\theta = \frac{3\pi}{256}$

h) $\displaystyle\int_0^{2\pi} cos^6\,\theta\,d\theta = \frac{5\pi}{8}$

i) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} sen^2\,\theta\,cos^5\,\theta\,d\theta = \frac{8}{105}$

j) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} sen^8\,\theta\,cos^7\,\theta\,d\theta = \frac{8}{105}$

12. Usar la función beta para demostrar los siguientes hechos:

a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{tg\,\theta}\,d\theta = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{y^2 dy}{1+y^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

c) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{1+x^6} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$

d) $\displaystyle\int_0^2 x\,\sqrt[3]{8-x^3}\,dx = \frac{16\pi}{9\sqrt{3}}$

e) $\displaystyle\int_0^a \frac{dy}{\sqrt{a^4-y^4}} = \frac{\Gamma^2(1/4)}{4a\sqrt{2\pi}}$

f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^4} = \frac{5\pi}{16}$

13. Probar que $\displaystyle\int_0^1 t^x\,(1-t^p)^y\,dt = \frac{1}{p}\,\beta(\frac{x+1}{p},y+1),\quad x,y > -1,\ p > 0$

4.10. Problemas adicionales

1. Demostrar que la integral $\int_{-\infty}^{\infty} x(1+x^2)^{-2}\,dx$ converge, y que la integral $\int_{-\infty}^{\infty} x(1+x^2)^{-1}\,dx$ diverge.

2. Encontrar los valores de n para los cuales la integral impropia converge. Calcular su valor para este n.

   a) $\int_0^1 x^n\,dx$ *b*) $\int_0^1 x^n \ln x\,dx$ *c*) $\int_0^1 x^n \ln^2 x\,dx$

   Resp: 1) $n > -1$, su valor $\frac{1}{n+1}$ 2) $n > -1$, su valor $\frac{2}{(n+1)^3}$

3. Calcular el área de la región que se indica, y acotada por:

   a) el eje x y la curva $y = \dfrac{1}{e^x + e^{-x}}$ Resp $\dfrac{\pi}{2}$

   b) la curva $y = \dfrac{1}{x^2+1}$ y el eje x. Resp: π

   c) el primer cuadrante y bajo la curva $y = e^{-x}$ Resp: 1

   d) la curva $y = \dfrac{1}{(x-1)^{2/3}}$, los ejes coordenados y la recta $x = 3$. Resp: $3 + 3\cdot(2)^{1/3}$

4. Estudiar la convergencia por criterios:

   a) $\int_1^5 \dfrac{dx}{\sqrt{x^4-1}}$

   b) $\int_2^3 \dfrac{x^{-2}\,dx}{(x^3-8)^{3/2}}$

   c) $\int_1^\infty \dfrac{x\,dx}{3x^4+5x^2+1}$

   d) $\int_1^\infty \dfrac{\ln x\,dx}{x+a}$

   e) $\int_2^\infty \dfrac{(x^2-1)dx}{\sqrt{x^6+16}}$

   f) $\int_0^\infty \dfrac{(1-cos\,x)\,dx}{x^2}$

   g) $\int_3^6 \dfrac{dx}{(x-3)^4}$

   h) $\int_1^\infty \dfrac{cos\,x\,dx}{x^2}$

   i) $\int_{-\infty}^\infty \dfrac{(x^2+x^3)\,dx}{\sqrt{x^6+1}}$

   j) $\int_{-\infty}^{-1} \dfrac{e^x\,dx}{x}$

   k) $\int_0^\infty \dfrac{x^2\,dx}{25+4x^4}$

   l) $\int_1^5 \dfrac{dx}{(6x-5-x^2)^{1/2}}$

   m) $\int_0^1 \dfrac{cos\,x\,dx}{x^2}$

   n) $\int_{-1}^1 \dfrac{2^{arcsen\,x}\,dx}{1-x}$

   ñ) $\int_0^1 \dfrac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x^2}}$

   o) $\int_3^6 \dfrac{\ln\,x\,dx}{(x-3)^4}$

   p) $\int_0^{\pi/2} \ln senx dx$

   q) $\int_0^{\pi/2} \dfrac{e^{-x}\,cos\,x\,dx}{x}$

   r) $\int_0^3 \dfrac{x^2\,dx}{3-x^2}$

   s) $\int_0^2 \dfrac{\ln x\,dx}{(8-x^3)^{1/3}}$

   t) $\int_0^\pi \dfrac{senxdx}{x^3}$

   u) $\int_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{\ln(1/x)}}$

   v) $\int_0^\infty \dfrac{x\,dx}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$

   w) $\int_2^\infty \dfrac{x\,dx}{(\ln x)^3}$

5. Clasificar cada integral siguiente, como de primera o segunda especie, y determinar su convergencia mediante criterios .

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ *c)* $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1-sen\,t}$ *e)* $\displaystyle\int_{-2}^{0} \frac{dt}{(t+1)^{1/3}}$

b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3}$ *d)* $\displaystyle\int_0^{4} \frac{dx}{x^2-2x+3}$ *f)* $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{dx}{x^3}$

Resp: a) 2 b) div. c) div. d) div. e) 0 f) div.

6. Comprobar los siguientes valores de la función gamma:

a) $\frac{\Gamma(6)}{2\Gamma(3)} = 30$ *b)* $\frac{\Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{3}{4}$ *c)* $\frac{6\Gamma(\frac{8}{3})}{5\Gamma(\frac{2}{3})} = \frac{4}{3}$ *d)* $\frac{\Gamma(3)\cdot\Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(\frac{11}{2})} = \frac{16}{315}$

7. Verificar los siguientes resultados:

a) $\displaystyle\int_0^{\infty} x^4\, e^{-x}\, dx = 24$

b) $\displaystyle\int_0^{\infty} x^6\, e^{-2x}\, dx = \frac{45}{8}$

c) $\displaystyle\int_0^{\infty} y^3\, e^{-2y^5}\, dy = \frac{\Gamma(4/5)}{5(16)^{1/5}}$

d) $\displaystyle\int_0^{\infty} \sqrt{y}\, e^{-y^3}\, dy = \frac{\sqrt{\pi}}{3}$

e) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{-\ln x}} = \sqrt{\pi}$

f) $\displaystyle\int_0^{\infty} \sqrt{x}\, e^{-\sqrt{x}}\, dx = 4$

g) $\displaystyle\int_0^{2} \frac{x^2\, dx}{\sqrt{2-x}} = \frac{64\sqrt{2}}{15}$

h) $\displaystyle\int_0^{1} x^4\,(1-x)^3\, dx = \frac{1}{280}$

i) $\displaystyle\int_0^{1} x^2\,(1-x)^3\, dx = \frac{1}{60}$

j) $\displaystyle\int_0^{1} \sqrt{\frac{1-x}{x}}\, dx = \frac{\pi}{2}$

k) $\displaystyle\int_0^{2} (4-x^2)^{3/2}\, dx = 3\pi$

l) $\displaystyle\int_0^{a} x^4\,\sqrt{a^2-x^2}\, dx = \frac{\pi\, a^6}{32}$

m) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} sen^4\theta\cos^5\theta\, d\theta = \frac{8}{315}$

n) $\displaystyle\int_0^{\pi} cos^4\theta\, d\theta = \frac{3\pi}{8}$

ñ) $\displaystyle\int_{e^2}^{\infty} \frac{dx}{x\log^3 x} = \frac{1}{8}$

o) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5} = \frac{\pi}{2}$

p) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x+x^3} = \frac{\log 2}{2}$

q) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x}\, sen\, x\, dx = \frac{1}{2}$

8. Sean $a \geq 1$ y $b > 0$. Probar que $\displaystyle\int_a^{\infty} t^{a-1}\, e^{-bt}\, dt = \frac{\Gamma(a)}{b^a}$

.

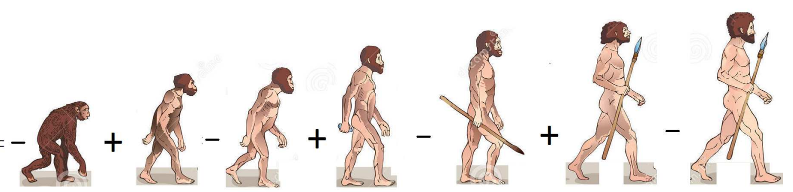
Cuando el carro se ha roto,
muchos os dirán por donde
no debía pasar

Proverbio turco

CAPÍTULO 5

SERIES-NUMERICAS y de FUNCIONES

$$\sum_{n=1}^{7}(-1)^n =$$



CAPÍTULO 5

Series numéricas y de funciones

Estudiamos las series numéricas y las series de funciones, poniendo énfasis en las series de potencia. El problema fundamental es determinar su convergencia o divergencia. La existencia de criterios permite hacerlo con relativa facilidad.

5.1. Series numéricas

Definición 5.1.1. *Una serie numérica en $\mathbb{R}$ es un par de sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ relacionadas por la fórmula $S_n = a_1 + \cdots + a_n$. Una serie de este tipo se representa abreviadamente mediante*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

en donde a_n se llama término general de la serie y S_n suma $n-$ésima.

La sucesión (S_n) está conformada como sigue:

$$S_1 = a_1,\ S_2 = a_1 + a_2,\ \cdots,\ S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

NOTA $\triangleright$ Es importante destacar que toda serie involucra dos sucesiones; aquélla del término n -ésimo de la serie, a saber (a_n), y la sucesión de sumas parciales (S_n). La convergencia o divergencia de (a_n) no es la misma que la de la serie infinita.

Definición 5.1.2. *La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$* **converge** *si $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ existe. En tal caso se dice que la serie tiene suma S, y se escribe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$.*

Ejemplo 5.1.3. *Los términos de la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$ *forman la sucesión* (a_n) *con* $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ *convergente a cero. Sin embargo, la sucesión que genera la n - ésima suma es*

$$S_1 = \frac{1}{2},\ S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6},\ S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12},\ S_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}, + \frac{1}{12} + \frac{1}{20}, \cdots +$$

O en forma más simple

$$S_1 = \frac{1}{2},\ S_2 = \frac{2}{3},\ S_3 = \frac{3}{4},\ S_4 = \frac{4}{5}, \cdots +$$

de la cual $S_n = \dfrac{n}{n+1}$*. De esto,* $S_n \to 1$ *para* $n \to \infty$*. Luego*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

El siguiente resultado caracteriza a una serie convergente

Teorema 5.1.4. *Si la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge, entonces* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$*.*

En efecto,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ convergente } &\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = S, \text{ existe} \\ &\Longrightarrow |S_n - S| < \frac{\epsilon}{2} \text{ para } n > N \end{aligned}$$

Como $n + 1 > n$, entonces $|S_{n+1} - S| < \frac{\epsilon}{2}$ para $n > N$. Luego

$$|a_{n+1}| = |S_{n+1} - S_n| \le |S_{n+1} - S| + |S_n - S| < \epsilon, \text{ para } n > N$$

de esto, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Corolario 5.1.5. *Si* $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$*, entonces la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge.*

Demostración.
Si suponemos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces de acuerdo con el teorema 5.1.3 es $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Esto contradice la hipótesis, por tanto el resultado es válido.

Ejemplo 5.1.6. *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2+1}{n^2}$ *diverge pues* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^2+1}{n^2} = 1 \neq 0$

Teorema 5.1.7. *Si la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es convergente, y* (S_n) *es la sucesión de sumas parciales, entonces* $\forall \epsilon > 0$ *existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$R > N,\ T > N \Longrightarrow |S_R - S_T| < \epsilon$$

Demostración.
Este resultado establece que la diferencia entre sumas parciales de una serie convergente, puede hacerse tan pequeña como se quiera.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ convergente } \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = S, \text{ existe}$$

Así, de acuerdo con la definición de límite de una sucesión, la diferencia entre S_n y S puede hacerse tan pequeña como se quiera. Esto es

$$\forall \epsilon > 0, \text{ existe } N \text{ tal que } n > N \Longrightarrow |S_n - S| < \frac{\epsilon}{2}$$

Como por hipótesis, $R > N$, $T > N$, entonces para $n > N$ se cumple

$$|S_R - S| < \frac{\epsilon}{2}, \qquad |S_T - S| < \frac{\epsilon}{2}$$

de la desigualdad triangular se sigue que

$$|S_R - S_T| < |S_R - S| + |S_T - S| < \epsilon$$

Ejemplo 5.1.8. *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *se conoce con el nombre de* **armónica**.

Se observa que la sucesión (a_n) tiene término general $a_n = \frac{1}{n}$ y tiende a 0 cuando $n \to \infty$. Probemos que esta serie diverge, usando el teorema de las sumas parciales.

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} \\ S_{2n} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \\ |S_{2n} - S_n| &= \left| \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right| > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Así, $|S_{2n} - S_n| > \frac{1}{2}$, para $n > 1$. Esto implica que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente.

5.1.1. Algebra de Series

Es natural preguntarse ¿Qué sucede cuando se suman series convergentes, o cuando se suma una serie convergente con otra divergente? Las respuestas la proporciona el siguiente resultado.

Teorema 5.1.9. *Sean* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *series convergentes,* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ *serie divergente, y k una constante, entonces*

- $\sum_{n=1}^{\infty} k \cdot a_n = k \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge*
- $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *converge*
- $\sum_{n=1}^{\infty} k \cdot c_n = k \cdot \sum_{n=1}^{\infty} c_n$ *diverge*
- $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + c_n)$ *diverge.*

Antes de ilustrar el uso de estas propiedades necesitamos dar a conocer algunas series muy importantes.

Serie geométrica

Su importancia radica en que es sencillo determinar su convergencia o divergencia, y de aquí que sea serie de referencia para determinar convergencia de otras series.

Definición 5.1.10. *La serie* $\sum_{n=0}^{\infty} a \cdot r^n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n \cdots$, *se llama geométrica de razón* r.

Otra forma de escribir esta serie es $\sum_{n=1}^{\infty} a \cdot r^{n-1}$, la cual es posible con un simple cambio de índice en la sumatoria.

Para saber en que casos hay o no convergencia tenemos el siguiente resultado.

Teorema 5.1.11. *La serie* $\sum_{n=0}^{\infty} a \cdot r^n$, *converge si* $|r| < 1$ *y diverge si* $|r| \geq 1$

Demostración.
$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n, \quad r \cdot S_n = ar + ar^2 + \cdots + ar^{n+1}$. Al restar la primera de la segunda de estas expresiones se tiene

$$\begin{aligned} S_n - r \cdot S_n = a - ar^n &\Longrightarrow S_n = a \cdot \frac{1-r^n}{1-r}, \quad r \neq 1 \\ &\Longrightarrow S_n = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^{n+1}}{1-r} \end{aligned}$$

de esto obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} \dfrac{a}{1-r}, & si|r| < 1 \\ \\ \infty, & si|r| > 1 \end{cases}$$

Así, en el primer caso hay convergencia, y en el segundo divergencia. Los casos $r = 1$, $r = -1$, los analizamos directamente de la serie.

$$r = 1 \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a \cdot r^n = \sum_{n=0}^{\infty} a \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (n+1) \cdot a = \infty$$

lo que significa divergencia.

$$r = -1 \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a \cdot r^n = \sum_{n=0}^{\infty} a \cdot (-1)^n$$

En este caso, $S_n = a - a + a - a + \cdots$ Luego,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ par} \\ a, & \text{si } n \text{ impar} \end{cases}$$

de este modo, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ no existe. Por tanto, tenemos divergencia.

Corolario 5.1.12. *La serie* $\sum\limits_{n=N}^{\infty} a_n$ *es geométrica si* $\frac{a_{n+1}}{a_n} = r \in \mathbb{R}$ *para todo* n*. Esta serie converge si y sólo si* $|r| < 1$ *y en tal caso*

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n = \frac{a_N}{1-r}$$

Ejemplo 5.1.13. *La serie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{1-n}$ *es geométrica convergente.*

Se observa que la razón es $r = \frac{1}{2}$, pues

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{1-(n+1)}}{2^{1-n}} = \frac{2^{-n}}{2 \cdot 2^{-n}} = \frac{1}{2}$$

Como el primer término de la serie es $2^0 = 1$, entonces su suma es

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{1-n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

Ejemplo 5.1.14. *La serie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3^{n+2}}$ *es geométrica convergente.*

La razón de esta serie es

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{3^{n+3}} : \frac{1}{3^{n+2}} = \frac{1}{3}$$

El primer término de la serie es $\frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$, entonces la suma es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n+2}} = \frac{\frac{1}{27}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{18}$$

Ejemplo 5.1.15. *La serie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{5^{n-1}}$ *es geométrica convergente.*

En primer lugar, su razón es

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(-1)^{n+2}}{5^n} : \frac{(-1)^{n-1}}{5^{n-1}} = -\frac{1}{5}$$

Como el primer término de la serie es $\frac{(-1)^2}{5^0} = 1$, entonces la suma es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{5^{n-1}} = \frac{5}{6}$$

Serie telescópica

Para sumas finitas, la propiedad $\sum_{k=1}^{n} (b_k - b_{k+1})$, se llama **telescópica**. Esta propiedad se extiende a las series infinitas $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n = b_n - b_{n+1}$, de la siguiente forma:

Teorema 5.1.16. *Si la sucesión* $(a_n) \to a$*, entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) = a_1 - \lim_{n\to\infty} a_n = a_1 - a$.

Demostración.
La suma parcial de orden n de la serie es

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k+1}) = a_1 - a_{n+1}$$

como $a_n \to a$, entonces $S_n \to a_1 - a$, de aquí que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) = a_1 - a$$

Ejemplo 5.1.17. *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ *tiene suma* 1*, ya que la serie en forma telescópica tiene la forma*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

en donde, $a_n = \frac{1}{n}$, $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$, $a_1 = 1$, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. *Luego*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \lim_{n\to\infty} a_n = 1$$

Ejemplo 5.1.18. *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{3}{4}$. *En efecto,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

Ejemplo 5.1.19. *La serie* $\sum_{n=2}^{\infty} \log \frac{n+1}{n}$ *es telescópica divergente.*

Por propiedad del logaritmo

$$\sum_{n=2}^{\infty} \log \frac{n+1}{n} = \sum_{n=2}^{\infty} (\log(n+1) - \log n)$$

esto prueba que es telescópica. Su divergencia se deduce de que

$$\sum_{n=2}^{\infty} (\log(n+1) - \log n) = -\log 2 + \lim_{n \to \infty} \log(n+1) = \infty$$

Serie armónica generalizada o serie p

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, se denomina **serie armónica generalizada** o **serie** p, converge para los $p > 1$, y diverge para $p \leq 1$. Es de referencia recurrente para la aplicación de los criterios de convergencia. Su demostración se encuentra más adelante, pero adelantamos su uso para conectarla con los criterios.

Serie aritmético-geométrica

Una serie de la forma $\sum a_n b_n = \sum (an+b) r^n$, en donde, $\{an\}$ es una sucesión aritmética y $\{b_n\}$ es una sucesión geométrica de razón r, se llama **aritmético-geométrica**

Proposición 5.1.20. *Una serie aritmético-geométrica* $\sum (an+b) r^n$ *es convergente si y sólo si* $|r| < 1$, *y en este caso la suma vale*

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} (an+b)\, r^n = \frac{(a+b)r - br^2}{(1-r)^2}$$

Ejemplo 5.1.21. *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{2^n}$ *es aritmético-geométrica convergente.*

La serie se escribe en la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+4) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

para tener que, $a = 4,\ b = 1,\ r = \frac{1}{2}$. Como $|r| < 1$ la serie converge. Su suma es

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{2^n} = \frac{(4+1) \cdot \frac{1}{2} - 4 \cdot \frac{1}{4}}{(1-\frac{1}{2})^2} = 6$$

Ejemplo 5.1.22. *Estudiar el carácter de la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{2^n}$ *y hallar se suma si converge.*

Se trata de una serie aritmético geométrica. Su razón $r = \frac{1}{2}$ indica convergencia. Su suma está dada por

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} (an+b)\, r^n = \frac{(3-1)\frac{1}{2} + \frac{1}{4}}{(1-\frac{1}{2})^2} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{1}{4}} = 5$$

Serie hipergeométrica

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$ se denomina hipergeométrica si verifica

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha\, n + \beta}{\alpha\, n + \gamma} \qquad \alpha > 0, \beta \neq 0,\ \alpha + \beta - \gamma \neq 0$$

- Esta serie diverge cuando $\alpha + \beta - \gamma > 0$.
- Esta serie converge si y sólo si verifica que $\alpha + \beta - \gamma < 0$, siendo su suma, en tal caso,

$$S = \frac{a_1\, \gamma}{\gamma - \alpha - \beta}$$

Si la serie parte de $n = p$, entonces en caso de convergencia su suma es

$$S = \frac{a_p\, (\gamma + \alpha(p-1))}{\gamma - \alpha - \beta}$$

Ejemplo 5.1.23. *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$ *es hipergeométrica convergente.*

En efecto,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{4(n+1)^2-1} : \frac{1}{4n^2-1} = \frac{4n^2-1}{4(n+1)^2-1} = \frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{2n-1}{2n+3}$$

Se observa que $\alpha = 2$, $\beta = -1$, $\gamma = 3$, de los cual, $\alpha + \beta - \gamma = -2 < 0$ entrega convergencia. Por tanto, su suma es

$$S = \frac{\frac{1}{2} \cdot 3}{2} = \frac{1}{2}$$

Cabe indicar que la serie es también telescópica y puede hallarse su suma considerándola de esa forma.

5.2. Series de términos positivos

Una serie es de términos positivos si el término general es siempre positivo, es decir, $a_n > 0$ para todo valor de n. Estudiar la convergencia de una serie utilizando las sumas parciales no siempre es sencillo. Por esta razón, el estudio de las series se hará en dos etapas: en primer lugar, se estudiará solamente el carácter de la serie; en segundo lugar, si la serie es convergente, afrontaremos el cálculo de su suma o bien aproximaremos su valor. El proceso de estudiar convergencia o divergencia se simplifica si se utilizan criterios de convergencia. Los criterios que se siguen hacen referencia a las series de términos positivos.
Comenzaremos con un hecho clave

Proposición 5.2.1. *Dada una sucesion $\{a_n\}$ de terminos no negativos para todo $n \in \mathbb{N}$, la sucesion S_n de sus sumas parciales es una sucesion creciente.*

Demostración. Dado que $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$, entonces

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n$$

Esto es,

$$S_{n+1} \geq S_n$$

que es lo que se quería demostrar.

Criterio de las sumas parciales

Como sabemos, toda sucesión creciente tiene límite: límite finito si la sucesión es acotada superiormente, y límite más infinito si la sucesión no está acotada superiormente. En vista de esto, la convergencia de una serie de términos no negativos es equivalente a la acotación superior de sus sumas parciales. Este hecho lo aplicamos para el siguiente criterio.

Teorema 5.2.2. *Dada una serie de términos no negativos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, se tiene:*

- *Si la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *está acotada superiormente, entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es convergente.*
- *Si la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *no está acotada superiormente, entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es divergente.*

serie de términos positivos y S_n su n-ésima suma parcial. Si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $S_n \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

Demostración.
Como $a_n = S_n - S_{n-1} \geq 0$, la sucesión $\{S_n\}$ es **creciente**. Si $\{S_n\}$ está acotada, entonces $\{S_n\}$ acotada y creciente implica $\{S_n\}$ es **convergente**, con lo cual se concluye que la serie es convergente. Por el contrario, si $\{S_n\}$ no es acotada, la serie claramente diverge.

Ejemplo 5.2.3. *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ *es convergente.*

Veamos que su sucesión de sumas parciales es acotada. En efecto, para cada $k \geq 1$, es $k! \geq 2^{k-1}$, con lo cual

$$\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$$

Sumando ahora estas desigualdades para k variando de 1 hasta n, tenemos que

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}}$$

La última serie es geométrica convergente y tal que su suma es

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) < 2$$

con lo cual

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = \lim_{n \to \infty} S_n \leq 2$$

Criterio de comparación

Teorema 5.2.4. *Sean* $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ *con* $a_n \leq b_n$, *entonces:*

1. *Si* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *converge, entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge.*
2. *Si* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge, entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *diverge*

Demostración.

1. Suponemos que las sumas parciales de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, son, respectivamente

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \qquad \text{y} \qquad s_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$$

Entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ convergente } \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = s \Longrightarrow S_n \leq s_n \leq S$$

Por teorema de las sumas parciales, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

2. Si $b_n \geq a_n$, entonces $s_n \geq S_n$. Como $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, entonces es también $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$. Se concluye que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.

Ejemplo 5.2.5. *La serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ *es convergente, ya que*

$$\frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n^2}$$

como la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es convergente (serie p, $p = 2$), entonces la serie menor converge.

Ejemplo 5.2.6. *La serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ *converge pues*

$$n! \geq 2^{n-1},\ \forall n \geq 1 \Longrightarrow \frac{1}{n!} \leq (\frac{1}{2})^{n-1}$$

Como la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^{n-1}$ es geométrica convergente, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ es convergente.

Criterio de condensación de Cauchy

Sea $\{a_n\}$ una sucesión decreciente de términos positivos. Entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ tienen el mismo carácter.

Ejemplo 5.2.7. *Determinar el carácter de la serie* $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$.

Sea $a_n = \frac{1}{n \log n}$. Como $\{n \log n\}$ es una sucesión creciente, deducimos que a_n es decreciente. Así que podemos aplicar el criterio de condensación y concluir que

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n} \qquad \text{y} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^k \log 2^k}$$

tienen el mismo carácter. Luego, estudiamos esta última.

$$\sum_{n=2}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^k \log 2^k} = \frac{1}{\log 2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{k}$$

Esta última serie es divergente por ser la serie armónica. Concluimos, pues que la serie dada es divergente.

Antes de establecer el próximo criterio de convergencia, recordemos la equivalencia por cociente.

Infinitésimos e infinitos equivalentes

Definición 5.2.8. *La función f es un infinitésimo en a si en un entorno reducido de a es*

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \qquad y \qquad f(x) \neq 0$$

Ejemplo 5.2.9. *$f(x) = sen\, x$ es un infinitesimo en $x = 0$, ya que $\lim\limits_{x \to 0} sen\, x = 0$. De igual modo, $f(x) = arctan\, x - \frac{\pi}{4}$ es un infinitésimo en $x = 1$, pues el límite allí es cero.*

Definición 5.2.10. *Las funciones f y g son* **equivalentes por cociente** *en a si*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

La equivalencia de funciones es importante en los casos en que las dos funciones son infinitésimos en a o cuando las funciones son divergentes a $\pm\infty$ en a, ya que en ellos la definición de equivalencia da indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$ respectivamente. Algunas equivalencias interesantes son:

- $sen\, x \sim x$ en $x = 0$.
- $tg\, x \sim x$ en $x = 0$.
- $1 - cos\, x \sim \frac{x^2}{2}$ en $x = 0$.
- $arcsen\, x \sim x$ en $x = 0$.
- $arctg\, x \sim x$ en $x = 0$.
- $e^x - 1 \sim x$ en $x = 0$.
- $\log(x+1) \sim x$ en $x = 0$.
- $tg(x^2 - 1) \sim x^2 - 1$ en $x = 1$.
- $a^x - 1 \sim x \log a$ en $x = 1$.
- $\log x \sim x - 1$ en $x = 1$.
- $\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n}$ en $x = 0$
- $(1+x)^n - 1 \sim nx$ en $x = 0$

Ejemplo 5.2.11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^n-1}{x}=n$*, pues* $(1+x)^n-1\sim nx$ *cuando* $x\to 0$*, de modo que*

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^n-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{nx}{x}=n$$

Sucesiones equivalentes

Definición 5.2.12. *Dos sucesiones* a_n *y* b_n*, son equivalentes por cociente, se anota* $a_n\sim b_n$*, si*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$$

Definición 5.2.13. *La sucesión* a_n *es un infinitésimo si* $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ *y* $a_n\neq 0$ *para todo* $n\geq N$*.*

Por ejemplo, para $n\to\infty$ se tien:

- $sen\dfrac{1}{n}\sim\dfrac{1}{n}$.
- $\sqrt[n]{n!}\sim\frac{n}{e}$
- $arcsen\frac{1}{n}\sim\frac{1}{n}$
- $\log\dfrac{n+2}{n+1}\sim\dfrac{1}{n+1}$.
- $1^k+2^k+\cdots+n^k\sim\frac{n^{k+1}}{k+1}$
- $1-cos\frac{1}{n}\sim\frac{1}{2n^2}$
- $\sqrt{a}-1\sim\frac{\ln a}{n}$
- $tg\frac{1}{n}\sim\frac{1}{n}$
- $n^ne^{-n}\sqrt{2\pi n}\sim n!$

el ultimo infinitésimo se conoce como **fórmula de Stirling**.

Ejemplo 5.2.14. *Demostrar que* $a_n=\log(n+k)$ *y* $b_n=\log n$ *son infinitos equivalentes.*

Sólo debemos evaluar el límite del cociente

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n+k)}{\log n}\sim\frac{\infty}{\infty}$$

Tenemos la máscara $\frac{\infty}{\infty}$, de modo que L 'Hôpital se puede aplicar

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n+k)}{\log n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+k}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+k}=1$$

Forma límite de comparación

Teorema 5.2.15. *Si* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ *y* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ *son series de términos positivos, entonces:*

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\lambda>0\Longrightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ *y* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ *convergen o divergen simultáneamente.*

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$ *y* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *converge, entonces* $\Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge.*

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \infty$ *y* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *diverge, entonces* $\Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge.*

Demostración. Si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \lambda$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > N \Longrightarrow |\frac{a_n}{b_n} - \lambda| < \epsilon$$

Como ϵ es arbitrario, con $\epsilon = \dfrac{\lambda}{2}$ tenemos

$$\frac{\lambda}{2} < \frac{a_n}{b_n} < 3 \cdot \frac{\lambda}{2}$$

Esto equivale a

$$a_n < 3 \cdot \frac{\lambda}{2} \cdot b_n \quad , \quad a_n > \frac{\lambda}{2} \cdot b_n$$

Usando el criterio de comparación se concluye la demostración.

Corolario 5.2.16. *(sucesiones equivalentes)*
Sean $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *y* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *series de terminos no negativos. Supongamos que* $\{a_n\} \sim \{b_n\}$*. Entonces ambas series tienen el mismo carácter.*

Por supuesto, en este resultado las dos series pueden tener distinta suma.

Ejemplo 5.2.17. *La serie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$ *converge, ya que por equivalencia por cociente*

$$\frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$$

Como la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ *es una serie p,* $p = 2$*, entonces la serie dada converge.*

Ejemplo 5.2.18. *La serie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} sen\dfrac{1}{n}$ *diverge ya que* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{sen\,\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1.$

Hemos usado equivalencia por cociente. Por tanto, el comportamiento de la serie dada es el mismo que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$, que como sabemos es la armónica divergente.

Criterio p o de Pringsheim [1]

Se quiere estudiar la convergencia de una serie de término general a_n mediante el uso del criterio de paso al límite considerando la serie armónica generalizada $b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$. Se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^p}} = \lim_{n\to\infty} a_n\, n^p$$

Recordando que la serie armónica generalizada verifica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \quad \text{es} \quad \begin{cases} \text{convergente si } p > 1 \\ \text{divergente si } p \leq 1 \end{cases}$$

entonces:

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge para $p > 1$, λ finito
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge para $p \leq 1$, $\lambda \neq 0$, λ puede ser ∞.

NOTA ▷

1. Este resultado resulta especialmente útil cuando tenemos expresiones del tipo n^{α}. Por este motivo es conveniente aplicar infinitésimos que transformen las funciones en expresiones polinomiales.
2. El número p se elige, en general, como la diferencia de grados entre el denominador y el numerador, esto para tener infinitésimos equivalentes.

Ejemplo 5.2.19. *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ *diverge pues, del criterio p se tiene*

$$\lim_{n\to\infty} n^1 \cdot a_n = \lim_{n\to\infty} n \cdot \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} = \infty$$

Ejemplo 5.2.20. *Estudiemos convergencia de la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^3+3\operatorname{sen} n}$.

[1] 1850-1941 matemático alemán

Lo primero que se observa es que la función seno está acotada cuando $n \to \infty$. Puesto que el numerador es de grado 1 y el denominador de grado 3, entonces elegimos $p = 3 - 1 = 2$. Veamos que sucede

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n^3 + 3sen\,n} \cdot n^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{2}{n^3}}{1 + \frac{3sen\,n}{n^3}} = 1$$

Se observa que de cualquier manera se llega a una equivalencia por cociente. Como el límite es finito y $p = 2 > 1$, la serie dada es convergente.

Criterio de la integral

Este criterio relaciona la convergencia de la serie con una integral impropia. La formulación original establece que f debe ser continua, decreciente y positiva, pero para convergencia sólo es necesaria la monotonía [2]

Teorema 5.2.21. *Sea f función positiva, continua y decreciente en $[a, \infty)$ para algún $a \in \mathbb{N}$, entonces*

$$\int_a^\infty f \quad y \quad \sum_{n=a}^{\infty} f(n) \quad \textit{convergen o divergen simultáneamente}$$

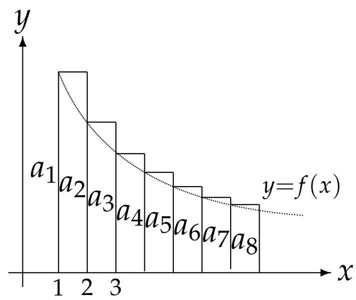
Demostración. La figura 5.1 ilustra el teorema. En ella, a_2 corresponde al área del rectángulo bajo la gráfica de $f(x)$; $1 \leq x \leq 2$, a_3 es el área del rectángulo bajo la gráfica de $f(x)$, $2 \leq x \leq 3$, y así sucesivamente, del tal manera que

$$a_2 < \int_1^2 f(x)\,dx,\ a_3 < \int_2^3 f(x)\,dx,\ \cdots a_n < \int_{n-1}^{n} f(x)\,dx$$

sumando miembro a miembro, tenemos

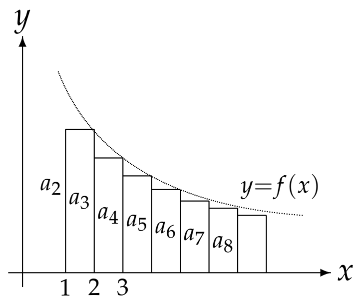
$$a_2 + a_3 + \cdots + a_n < \int_1^n f(x)\,dx$$

Bajo el supuesto que la integral del miembro derecho converge, entonces la sucesión (a_n) está acotada, como también lo está (S_n). De acuerdo, entonces, con el teorema de las sumas parciales acotadas, la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.



rectángulos circunscritos

figura 5.1



rectángulos inscritos

[2]www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/contribuciones-v6-n1-may2005/CriterioIntegral/index.html

Vamos a probar que la serie $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_n$ diverge al compararla con la integral $\int\limits_{1}^{\infty} f(x)\,dx$ que diverge. Para ello consideramos en la misma figura 5.1 rectángulos circunscritos. Se concluye que

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n > \int\limits_{1}^{n+1} f(x)\,dx$$

Como f es positiva, y la integral diverge, entonces $(a_n) \to \infty$, de aquí que $S_n \to \infty$, concluyendo que la serie $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_n$ diverge.

NOTA ▷ En una serie de términos positivos, la n -ésima suma parcial S_n es evidentemente monótona creciente.

Ejemplo 5.2.22. *La serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *diverge pues* $\displaystyle\int\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{x}\,dx$ *diverge*

Ejemplo 5.2.23. *La serie p,* $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ *converge para los* $p > 1$ *y diverge para* $p \leq 1$*.*

En efecto, si $p > 1$ la función $f(x) = \frac{1}{x^p}$ es continua y satisface las condiciones del criterio de la integral. De esta forma, el comportamiento de la serie y de la integral es análogo. Se tiene

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{b\to\infty} x^{-p} = \lim_{b\to\infty} \left(\frac{x^{1-p}}{1-p} \right)_1^b = \frac{1}{1-p} \lim_{b\to\infty} (\ b^{1-p} - 1\ )$$

Por hipótesis $p > 1$. Luego, $\lim\limits_{b\to\infty} b^{1-p} = 0$. En consecuencia, en este caso, existe convergencia.

Para el caso $p \leq 1$, usemos el criterio de comparación.

$$n^p \leq n \Longrightarrow \frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n}$$

Como la serie armónica es divergente, el criterio de comparación asegura que la serie p es divergente.

Criterio de la razón o cociente

Teorema 5.2.24. *Sea* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie de términos positivos y tal que existe*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda$$

entonces:

1. *Si $\lambda < 1$, entonces la serie es absolutamente convergente.*
2. *Si $\lambda > 1$, entonces la serie es divergente.*
3. *Si $\lambda = 1$, entonces no hay información.*

Demostración.
1. $\underline{\lambda < 1}$

Se elige q tal que $\lambda < q < 1$. Como $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$, tal que

$$n > N \Longrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < q$$

de aquí que

$$\begin{aligned} a_{N+1} &< q \cdot a_N \\ a_{N+2} < q \cdot a_{N+1} &< q^2 \cdot a_N \\ a_{N+3} < q \cdot a_{N+2} &< q^3 \cdot a_N \end{aligned}$$

y así sucesivamente.

Ahora, la serie $q \cdot a_N + q^2 \cdot a_N + q^3 \cdot a_N + \cdots$, es geométrica convergente, pues $q < 1$. Además, los términos de la serie

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_N + a_{N+1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

son menores que los de la serie $q \cdot a_N + q^2 \cdot a_N + q^3 \cdot a_N + \cdots$, a partir de a_{N+1}. Luego, según criterio de comparación, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, es convergente.

$\underline{\lambda > 1}$

En este caso se tiene

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \lambda > 1 \Longrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1, \ \forall n \geq N$$

Es decir, $a_{n+1} > a_n$, $\forall n$, con lo cual el término general a_n no tiende a cero. Luego, la serie diverge.

NOTA $\triangleright$

Si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$, entonces la serie también diverge, pues a partir de cierto $n = N$, se tiene $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$

Ejemplo 5.2.25. *La serie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n!}$, *converge según criterio de la razón.*

$$a_n = \frac{1}{n!} \Longrightarrow a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$$

Luego

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)}=0<1$$

En consecuencia, la serie converge.

Ejemplo 5.2.26. *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}$*, diverge según criterio de la razón.*

$$a_n=\frac{2^n}{n}\Longrightarrow a_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{(n+1)}$$

Luego

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{(n+1)}=2>1$$

esto indica divergencia.

Criterio de la raíz

Tal como el criterio de la razón, es muy práctico. Se usa en el trabajo con potencia n - ésima en la serie.

Teorema 5.2.27. *Sea* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *serie de términos positivos tal que* $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lambda$ *(finito):*

1. *La serie* **converge** *si* $\lambda<1$
2. *La serie* **diverge** *si* $\lambda>1$
3. *No hay información si* $\lambda=1$

Demostración.
caso $\lambda<1$

Sea $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\alpha$, y sea c tal que $0\leq\lambda<c<1$, entonces para $n\geq N$ se tiene $|a_n|^{1/n}<c$, de aquí que $|a_n|<c^n$, $\forall n>N$. Como $0<c<1$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$, converge ya que es geométrica de razón menor que 1. Luego, por criterio de comparación, $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$, converge.

caso $\lambda>1$

Es claro, que si $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\infty>1$, entonces $|a_n|^{1/n}$ no es acotada, y hay divergencia.

Si el límite es finito, entonces $|a_n|^{1/n}>1$ para infinitos n, esto hace que a_n no tienda a cero, y en consecuencia hay divergencia.

Ejemplo 5.2.28. *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ *es convergente. En efecto,*

$$a_n = \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1$$

esto prueba convergencia.

Criterio de Raabe

El criterio de Raabe se aplica siempre después del criterio del cociente en el caso en que este no decida la convergencia. Se debe tener en cuenta que las simplificaciones realizadas al aplicar el criterio del cociente pueden ser útiles al aplicar el criterio de Raabe, pero no las posibles sustituciones de infinitésimos.

Teorema 5.2.29. *Sea* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *serie de términos positivos, tal que* $\lim_{n\to\infty} n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = r$*:*

1. *La serie converge para* $r > 1$*,* $\quad$ *r real*
2. *La serie* **diverge** *para* $r < 1$*,* $\quad$ *r real*
3. *No hay información si* $r = 1$

Criterio de Gauss

Al igual que el criterio de Raabe, resuelve el caso $\lambda = 1$ de los criterios de la razón y raíz.

Teorema 5.2.30. *Sea* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *serie de términos positivos. Si existe una sucesión acotada* (A_n) *tal que*

$$n > N \Longrightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{r}{n} + \frac{A_n}{n^2}$$

entonces

1. *La serie converge si* $r > 1$
2. *La serie* **diverge** *si* $r \leq 1$

Ejemplo 5.2.31. *Estudiar convergencia de* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\cdot 2n}$.

Si alguien intenta el criterio de la razón se encontrará que el límite del cociente es 1. Luego el criterio no decide. Tanto el criterio de Gauss como el de Raabe son la alternativa en este caso. Los términos a_n y a_{n+1} tienen la forma

$$a_n = \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}, \qquad a_{n+1} = \frac{1\cdot 3\cdots(2n+1)}{2\cdot 4\cdots(2n+2)}$$

Raabe

Como $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = \dfrac{2n+2}{2n+1}$, se tiene

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1$$

de esto se obtiene la divergencia de la serie.

Gauss

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{2n+2}{2n+1} \Longrightarrow \frac{2n+2}{2n+1} = 1 + \frac{\frac{1}{2}}{n} + \frac{A_n}{n^2},\ A_n = -\frac{n}{2(2n+1)}$$

Como $r = \dfrac{1}{2}$, $|A_n| \leq \dfrac{1}{4}$, concluimos que la serie diverge.

NOTA ▷ La inserción o supresión de un número finito de términos en una serie convergente no influye en su convergencia, pero sí en su suma. Si se añade o se suprime un número finito de términos en una serie divergente, ésta continúa siendo divergente.

Criterio logarítmico

Sea $\sum a_n$ una serie de términos positivos y $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\log(\frac{1}{a_n})}{\log n} = \lambda$, se tiene que:

- Si $\lambda < 1$, la serie diverge.
- Si $1 < \lambda \leq \infty$, la serie converge.

Ejemplo 5.2.32. *Veamos la convergencia de la serie armónica generalizada (conocida también como serie p o serie de Riemann)*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \quad p \in \mathbb{R}$$

Si $a_n = \frac{1}{n^p}$, entonces al aplicar el criterio logarítmico tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(\frac{1}{a_n})}{\log n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log n^p}{\log n} = p \lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{\log n} = p$$

Por tanto, si $p > 1$ la serie es convergente y si $p < 1$ la serie es divergente. Si $p = 1$ la serie resultante es la armónica, que como sabemos es divergente.

5.2.1. Serie alternada

Hasta ahora hemos estudiado series de términos positivos. Cuando las series tienen términos positivos y negativos, su estudio resulta mucho más complicado. Vamos a estudiar con detalle un tipo de series que tienen términos positivos y negativos, es decir, las series alternadas. Como su nombre lo indica, se trata de una serie en la cual sus términos se van alternando en cuanto a su signo.

Definición 5.2.33. *La serie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\,a_n$*, con* $a_n > 0$*,* $\forall n \in \mathbb{N}$ *se llama* **alternada**.

El único resultado que permite determinar su convergencia se debe a Leibnitz.

Teorema 5.2.34. *(Leibnitz)*
La serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot a_n$ *converge, si satisface:*

1. $|a_{n+1}| < |a_n|, \forall n \in \mathbb{N}$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$.

Demostración.
Se considera la suma de los $n = 2m$ primeros términos. Esto es, la sucesión de las sumas parciales pares.

$$S_{2m} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2m-1} - a_{2m})$$

Como cada factor es positivo, entonces es $S_{2m} > 0$. Ahora, si escribimos

$$S_{2m} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m}$$

tenemos que $S_{2m} < a_1$.

El hecho que $0 < S_{2m} < a_1$ permite concluir que (S_{2m}) es una sucesión acotada.

También es creciente pues, $S_{2m+2} - S_{2m} = a_{2m+1} - a_{m+2} > 0$, ya que $a_{2m+1} > a_{2m+2}$. Se sigue que $S_{2m+2} > S_{2m}$

Como toda sucesión acotada y monótona es convergente, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} S_{2m} = S$$

Par ver que sucede con las sumas parciales impares, se considera $S_{2m+1} = S_{2m} + a_{2m+1}$. Luego

$$\lim_{n\to\infty} S_{2m+1} = \lim_{n\to\infty} S_{2m} + \lim_{n\to\infty} a_{2m+1} = S + 0 = S$$

Como la sumas pares y las impares convergen, al mismo número, entonces la serie alternada converge.

Ejemplo 5.2.35. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \dfrac{n+2}{n(n+1)}$*, es alternada y satisface:*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+2}{n(n+1)} = 0$

2. $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{n+3}{(n+1)(n+2)} \cdot \dfrac{n(n+1)}{n+2} = \dfrac{n^2+3n}{n^2+4n+4} < 1$

se sigue que $a_{n+1} < a_n$, y en consecuencia, hay convergencia.

5.2.2. Convergencia absoluta

Una forma de simplificar el estudio de las series alternadas es definir un nuevo concepto: el de serie absolutamente convergente. Se considera una serie cualquiera $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ que puede tener términos positivos o negativos no necesariamente alternados.

Definición 5.2.36. *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es* **absolutamente** *convergente si* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *es convergente. La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es* **condicionalmente** *convergente, si converge, pero no absolutamente.*

Se observa que $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ es una serie de términos positivos, por lo cual, su convergencia se estudia mediante los criterios del apartado anterior.

Ejemplo 5.2.37. *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \cdot \dfrac{2}{3^n}$ *es absolutamente convergente, pues la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^{n+1} \cdot \frac{2}{3^n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n}$$

es geométrica convergente.

Ejemplo 5.2.38. *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \cdot \dfrac{n}{2^n}$ *es absolutamente convergente, ya que según el criterio de la razón*

$$|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{n+1}{2n} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1 \Longrightarrow \textit{convergencia absoluta}$$

Ejemplo 5.2.39. *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{n+2}{n(n+1)}$ *es condicionalmente convergente.*

Veamos en primer lugar lo que sucede con el criterio de la razón

$$|a_{n+1}| = \frac{n+3}{(n+1)(n+2)};\ a_n = \frac{n+2}{n(n+1)} \Longrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{n^2+3n}{n^2+4n+4}$$

de lo cual

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1, \ \ \text{¡No hay información!}$$

Veamos la alternativa del criterio de comparación.

$$\frac{n+2}{n(n+1)} \geq \frac{1}{2n}$$

Como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

y la serie armónica es divergente, entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n(n+1)}$$

es divergente. Con esto ya no hay convergencia absoluta.

Co anterioridad se probó que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n+2}{n(n+1)}$ es convergente. Luego la convergencia es condicional.

Teorema 5.2.40. *Convergencia absoluta implica convergencia ordinaria.*

Demostración.
En la desigualdad $-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$, al sumar la expresión $|a_n|$, se obtiene

$$0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|$$

Por el criterio de comparación, la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|)$ converge. Ahora bien

$$a_n = (a_n + |a_n|) - |a_n| \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left((a_n + |a_n|) - |a_n|\right)$$

Como las series $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|)$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ convergen, entonces la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Este resultado proporciona un nuevo criterio para estudiar la convergencia de las series alternadas:

Ejemplo 5.2.41. *Consideremos la serie* $1 - \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^3} - \dfrac{1}{4^2} + \dfrac{1}{5^3} - \dfrac{1}{6^2} + \cdots + \dfrac{1}{(2n-1)^3} - \dfrac{1}{(2n)^2} + \cdots$

La serie es, evidentemente, alternada, pero no podemos aplicarle el criterio de Leibnitz porque los términos, en valor absoluto, no forman una sucesión decreciente. Así, surge la alternativa de estudiar la convergencia absoluta.

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{6^2}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^3}+\frac{1}{(2n)^2}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2n-1)^3}+\frac{1}{(2n)^2}\right)$$

Descomponemos esta serie en dos.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3} \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}$$

Pero cada una de estas series es convergente, pues, por infinitésimos equivalente

$$\frac{1}{(2n-1)^3}\sim\frac{1}{8n^3}\Longrightarrow\frac{1}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3} \qquad \text{convergente}$$

y la otra es una p serie con $p=2$ convergente. En consecuencia, la serie es convergente. De esta forma, la serie alternada es absolutamente convergente.

NOTA ▷

1. Para series de términos positivos, la convergencia absoluta coincide con la convergencia ordinaria.

2. Los criterios de la razón, de la raíz y de comparación, son criterios para determinar convergencia absoluta.

3. Las series absolutamente convergentes, se pueden sumar y multiplicar término a término. Con las series que no convergen absolutamente, esto no es cierto, y es válido el siguiente resultado.

Teorema 5.2.42. *(Riemann)*
Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie condicionalmente convergente, entonces los términos de la serie pueden ser arreglados de tal manera que la suma de los n primeros términos tienda a cualquier número dado.

Ejemplo 5.2.43. *La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ es condicionalmente convergente.*

Sea S su suma (es exactamente $S=\ln 2$), entonces

$$\begin{aligned}S&=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots=\left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{8}\cdots\\&=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\cdots=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\right)\\&=\frac{1}{2}S\end{aligned}$$

lo que es un absurdo, a menos que $S = 0$, pero no es así. Esto significa, que con este reordenamiento la serie converge a la mitad de S. Se pueden encontrar otros reordenamientos para esta serie y hacerla converger a un valor deseado. Observar lo siguiente.

$$
\begin{aligned}
S &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots\right) \\
&= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \cdots\right) = 0
\end{aligned}
$$

Se observa ahora, que la serie original está escrita como diferencia de dos series convergentes, y tenemos en este caso, convergencia condicional a cero.

Finalizamos este estudio de series numéricas, con un par de criterios, que sirven tanto para series de términos positivos como negativos, y que son utiles si se analiza convergencia en series cuyos argumentos son productos de funciones.

Teorema 5.2.44. *(Dirichlet)*
Sean (a_n) y (b_n) sucesiones reales. Si la sucesión (S_n) de término general $S_n = \sum_{n=1}^{n} a_k$ es acotada, y la sucesión (b_n) tiende a cero monótonamente, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ es convergente.

Teorema 5.2.45. *(Abel)*
Sean (a_n) y (b_n) sucesiones reales. Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, y (b_n) es acotada y monótona, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ es convergente.

Ejemplo 5.2.46. *La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot (1 + \frac{1}{n})^n$ converge.*

En efecto, por el criterio de Abel consideremos la sucesión $\left(\frac{1}{n^1/2}\right)$ que converge a cero. Según el criterio de Leibnitz, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ es condicionalmente convergente. Además,

$$
\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e
$$

Estos hechos hacen que estemos en las condiciones del teorema de Abel. Se sigue que la serie es convergente.
NOTA ▷

1. El índice de sumación n es una variable muda, y puede sustituirse por cualquier otra letra.

2. No es necesario que una serie empiece a sumar desde $n = 1$, puede empezar desde $n = 0$ o $n = p$ $(p > 1)$, pero siempre se puede reescribir para que empiece en $n = 1$ mediante un cambio de variable.

3. S_n representa la suma de los n primeros términos de la sucesión a_n, luego, se debe tener cuidado al calcularla cuando la serie no empiece por $n = 1$.

4. Las definiciones de convergencia y divergencia no dependen del término a partir del cual empiezan a sumar, aunque si afecta al valor de la suma.

5. Aunque se habla de la suma de una serie, no se debe olvidar que dicha suma es, en realidad, un límite de sumas.

6. A una serie alternada no se le puede aplicar ninguno de los criterios usados en series de términos positivos.

7. Si la sucesión $\{|a_n|\}$ es creciente entonces no puede tener límite 0 y así la serie será divergente, pero la sucesión $\{|a_n|\}$ puede no ser monótona ni creciente ni decreciente y en este caso no podremos aplicar el criterio de Leibnitz.

8. Toda serie alternada puede ser escrita de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n \qquad \text{o} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n, \qquad \text{donde } a_n > 0$$

5.3. Series de potencias

En el trabajo con series numéricas se consideraron sucesiones de números, ahora hacemos uso de sucesiones de funciones. Por ejemplo, con la sucesión de funciones

$$1,\ x,\ x^2,\ \cdots x^n, \cdots$$

se construye la serie de funciones

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

Dos problemas a resolver:

- ¿Para qué valores de x la serie converge?
- ¿A qué función converge la serie?

Definición 5.3.1. *Recibe el nombre de* **serie de potencias** *toda serie de la forma*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n$$

El número real a_n se denomina coeficiente n -ésimo de la serie de potencias (observar que el término n -ésimo es $a_n(x - x_0)^n$).

Para estudiar las series de potencia es suficiente con suponer que $x_0 = 0$, ya que la sustitución $y = x - x_0$ transforma la serie de la definición en $\sum\limits_{0}^{\infty} a_n\, y^n$. Las series de potencias en las cuales $x_0 = 0$ se llaman series de **Maclaurin**.

Convergencia de una serie de potencias

Esto va a dar respuesta a la primera interrogante planteada. Una serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$$

tiene tres alternativas en cuanto a su convergencia:

- converge sólo para $x = 0$.
- converge para todo valor de $x \in \mathbb{R}$.
- converge en algún intervalo simétrico respecto de $x = 0$.

Teorema 5.3.2. *(Abel)*

1. *Si una serie de potencias $\sum a_n x^n$ converge para un valor $x_0 \neq 0$, entonces converge para todo valor de x tal que $|x| < |x_0|$*
2. *Si una serie de potencias $\sum a_n x^n$ diverge para un valor x_1, entonces diverge para todo valor de x tal que $|x| > |x_1|$*

Demostración.
1. Como la serie $\sum a_n x_0^n$ converge en x_0, entonces el término general $a_n x_0^n$ tiende a cero. Esto es,

$$\lim_{n\to\infty} a_n x_0^n \to 0$$

Esto significa que la sucesión $(a_n\, x_0^n)$ está acotada, lo que asegura la existencia de un real M tal que

$$|a_n x_0^n| \leq M, \quad n = 0, 1, \cdots$$

Podemos escribir

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leq \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \cdot M$$

Ahora, $|x| < |x_0| \Longrightarrow \left|\dfrac{x}{x_0}\right| < 1$. De esto se tiene que la serie $\sum M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ es geométrica de razón $r < 1$, lo que implica su convergencia. Por criterio de comparación, la serie $\sum |a_n x^n|$ es convergente. Esto hace que $\sum a_n x^n$ sea absolutamente convergente.

2. Para probar la segunda afirmación, tenemos que la serie diverge en x_1. Supongamos que la serie converge en cierto punto x que satisface la condición $|x| > |x_1|$, entonces por lo probado en la primera parte debiera ser convergente en x_1, ya que $|x_1| < |x|$. Esto contradice la hipótesis que la serie diverge en x_1. Por tanto, la serie diverge en ese punto x.

Radio de convergencia

El resultado precedente permite determinar los puntos de convergencia de la serie de potencias. En efecto, si x_0 es punto de convergencia, entonces todos los puntos del intervalo $(-|x_0|, |x_0|)$ son puntos de convergencia absoluta. Si x_1 es punto de divergencia, entonces toda la semirrecta a la derecha de $|x_1|$ y toda la semirrecta a la izquierda del punto $-|x_1|$ son puntos de divergencia de la serie. Esto permite asegurar la existencia de un núumero R, llamado **radio de convergencia**, tal que, para $|x| < R$ hay convergencia absoluta, y para, $|x| > R$ hay divergencia. Teniéndose que:

1. Si la serie converge sólo para $x = 0$, entonces el radio de convergencia es $R = 0$
2. Si la serie converge para todo x, entonces el radio de convergencia es $R = \infty$

En los extremos del intervalo, $x = \pm R$ se debe hacer un estudio particular de la serie numérica para determinar convergencia. El intervalo $(-R, R)$ se llama **intervalo de convergencia**. Para estudiar la convergencia de una serie de potencia se recurre al criterio de la razón o al de la raíz.

Teorema 5.3.3. *(criterio de la razón)*
Sea $\sum a_n x^n$. Si

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}\, x^{n+1}}{a_n\, x^n}\right| = L\,|x|$$

entonces:

1. *$L\,|x| < 1$ la serie es convergente.*
2. *$L\,|x| > 1$ la serie es divergente.*

Se deduce de este teorema que el intervalo de convergencia es $(-\frac{1}{L}, \frac{1}{L})$, y que el radio de convergencia viene dado por

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

Teorema 5.3.4. *(criterio de la raíz)*
Sea $\sum_{0}^{\infty} a_n \cdot x^n$. *Si*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}$$

entonces:

1. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \implies$ *convergencia absoluta.*

2. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty \implies \begin{cases} \textit{convergencia en } x = 0 \\ \textit{divergencia } \forall x \neq 0 \end{cases}$

3. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < \infty \implies \begin{cases} \textit{convergencia absoluta si } |x| < R \\ \textit{divergencia si } |x| > R \end{cases}$

En este caso, el radio de convergencia se puede determinar por la fórmula de **Cauchy-Hadamard**

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{|a_n|}$$

Ejemplo 5.3.5. *Determinar el intervalo de convergencia de la serie* $\sum_{1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

Por la forma de la serie, se puede usar el criterio de la razón o el de la raíz. Se muestran ambos procesos.

- Por criterio de la razón tenemos que

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}\, x^{n+1}}{a_n\, x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{x^n}\right| = |x| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = |x|$$

Se sigue que, para $|x| < 1$ hay convergencia, para $|x| > 1$ divergencia. Si $x = 1$ la serie se transforma en $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n}$ que es la armónica divergente. Si $x = -1$, la serie es $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ condicionalmente convergente. En consecuencia, el intervalo de convergencia de la serie dada es $[-1, 1)$.

- Por criterio de la raíz tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|a_n \cdot x^n\right|} = |x| \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{1/n} = |x|$$

y se concluye lo mismo que por el criterio de la razón.

Ejemplo 5.3.6. *Hallar intervalo de convergencia de* $\sum_{1}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{x^n}{n}$

Por criterio de la razón se tiene

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}\,x^{n+1}}{a_n\,x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}|(-1)^n|\cdot\left|\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{x^n}\right| = |x|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = |x|$$

De esta forma, si $|x| < 1$ hay convergencia, y si $|x| > 1$ divergencia.

Análisis en los extremos del intervalo

- Para $x = 1$ la serie es
$$\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$$
que es condicionalmente convergente.
- Si $x = -1$, la serie es
$$\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}}{n} = \sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n}$$
que es la armónica divergente. En consecuencia, el intervalo de convergencia de la serie dada es $(-1, 1]$.

Ejemplo 5.3.7. *Hallar radio e intervalo de convergencia de la serie* $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n+1}(x-3)^n$.

Para el radio de convergencia tenemos que

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-2)^{n+1}}{n+2}\cdot\frac{n+1}{(-2)^n}\right| = 2$$

de donde obtenemos que $R = \frac{1}{2}$. Esto nos dice que la serie converge para $|x-3| < \frac{1}{2}$, o bien, para

$$\frac{5}{2} < x < \frac{7}{2}$$

Ahora se debe analizar lo que sucede en los extremos.

- Para $x = \frac{5}{2}$, tenemos
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n+1}\left(\frac{5}{2}-3\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$
como esta es la serie armónica, tenemos divergencia.

- Para $x = \frac{7}{2}$, tenemos
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n+1} (\frac{7}{2} - 3)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$
Esta es la serie armónica alternada, luego, tenemos convergencia condicional. Se concluye que el intervalo de convergencia es el intervalo
$$\frac{5}{2} < x \leq \frac{7}{2}$$

5.3.1. Propiedades de las series de potencia

Una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ con radio de convergencia $R > 0$ define una función $f(x)$ en su intervalo de convergencia, dada por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n, \quad |x| < R$$

Se dice entonces que la serie **representa** a la función f en el intervalo de convergencia y que es el **desarrollo** en serie de potencias de la función f en el punto $x = 0$. Si la serie converge en uno o ambos extremos podemos obviamente incluir dichos puntos en el dominio de $f(x)$. Se plantean entonces de manera natural dos problemas:

1. dada la serie, hallar propiedades de la función suma.
2. dada una función, averiguar si se puede representar por una serie de potencias (suele decirse entonces que la función es desarrollable en serie de potencias).

Sea $\sum a_n x^n$ serie de potencias con radio de convergencia $R > 0$. Sea $f(x)$ la función suma de esta serie. Las siguientes propiedades de $f(x)$, son válidas en general sólo en el intervalo abierto $|x| < R$, donde la serie converge con seguridad en forma absoluta.

- La función suma $f(x)$ de la serie es una función continua en $|x| < R$.
- La suma $f(x)$ es una función derivable para todo $x \in (-R, R)$ y se tiene
$$D\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} D[\, a_n x^n \,] = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad |x| < R$$
La derivada de $f(x)$ se obtiene pues, derivando término a término la serie que define a $f(x)$, y la serie resultante posee el mismo radio de convergencia R que la serie original. La convergencia en los extremos ($x = \pm R$) puede, no obstante, ser distinta que la de la serie original. Esta propiedad (que la serie sea derivable) se expresa diciendo que las series de potencia se pueden derivar término a término en su intervalo de convergencia.

- La suma $f(x)$ es una función integrable en todo el intervalo $[0,x]$, incluido en su intervalo de convergencia y se tiene

$$\int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right] dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_0^x a_n t^n \, dt\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

La integral de $f(x)$ se obtiene pues integrando término a término la serie que define a $f(x)$, y la serie resultante posee el mismo radio de convergencia R que la serie original. Esta propiedad (que la serie sea integrable) se expresa diciendo que las series de potencia se pueden integrar término a término en su intervalo de convergencia.

Ejemplo 5.3.8. *La serie de potencias*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 \cdots$$

es geométrica si $|x| < 1$. Por tanto, se conoce su suma $S(x)$, teniéndose

$$1 + x + x^2 + x^3 \cdots = \frac{1}{1-x} = S(x)$$

Al derivar, término a término se obtiene

$$0 + 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 \cdots = \frac{1}{(1-x)^2}$$

lo que en simbología de series corresponde a

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \, x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

con lo cual hemos descubierto la suma de una nueva serie.

Ejemplo 5.3.9. *Se considera de nuevo la serie de potencias*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots$$

si ahora integramos en $[0,x]$, con $x \in (-1,1)$, entonces

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{1}{1-x} dx &= \int_0^x (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots) dx \\
-\ln(1-x)\Big|_0^x &= \int_0^x 1 \, dx + \int_0^x x \, dx + \int_0^x x^2 \, dx + \int_0^x x^3 \, dx \cdots \\
-\ln(1-x) &= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}
\end{aligned}$$

Si se multiplican por -1 ambos miembros de la igualdad, entonces

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

y cambiando x por $-x$ se llega a que

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

lo que en notación de serie equivale a

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

- Si $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ para $|x| < R$, entonces

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

Demostración.
Como

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots, \qquad |x| < R$$

se obtiene $f(0) = a_0$. Análogamente,

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots, \qquad |x| < R$$

de donde $f'(0) = a_1$ y

$$f''(x) = 2a_2 + 2 \cdot 3a_3 x + 3 \cdot 4a_4 x^2 + \cdots, |x| < R$$

de donde $f''(0) = 2a_2$. Siguiendo este proceso se llega a que $f^{(n)}(0) = n! a_n$. En consecuencia,

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

Lo interesante es que, si la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ tiene radio de convergencia $R > 0$, y suma $f(x)$, entonces podemos escribir

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, \quad |x| < R$$

5.4. Polinomio de Taylor y serie de Taylor

Los polinomios son las funciones reales más fáciles de evaluar; por esta razón, cuando una función resulta difícil de evaluar con exactitud, se intenta buscar un polinomio que coincida con la función de partida y con algunas de sus derivadas en un único punto. En las proximidades de ese punto el polinomio toma valores muy parecidos a la función, pero no necesariamente iguales, y lejos de ese punto el polinomio no tiene por qué parecerse a la función.

5.4.1. Polinomio de Taylor

Se sabe que si una función es continua y derivable en un punto x_0, la recta más parecida a la función en un entorno de x_0 es la **recta tangente**, siendo su ecuación

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Esta recta define un polinomio

$$P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

que verifica $P_1(x_0) = f(x_0)$ y $P'(x_0) = f'(x_0)$. Geométricamente esto significa que:

- la recta pasa por el mismo punto x_0 por el pasa la función y además,
- la inclinación de la función en ese punto es la misma que la de la recta.

El polinomio $P_1(x)$ es una primera aproximación de la función f y cabe esperar que al aumentar su grado de algún modo, es decir al construir un polinomio

$$P_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + a(x - x_0)^2$$

con un valor de a adecuado, se tenga un polinomio que se parezca aún más a f. En concreto, si f es dos veces derivable en x_0 y se calcula la constante a imponiendo que $P_2(x_0) = f''(x_0)$, se tiene un polinomio de grado dos que verifica

$$P_2(x_0) = f(x_0), \quad {P_2}'(x_0) = f'(x_0) \quad \text{y} \quad {P_2}''(x_0) = f''(x_0)$$

Geométricamente, esto significa que el polinomio $P_2(x)$ tiene una concavidad muy parecida a la de f en un entorno de x_0. Si f es n veces derivable en x_0 se puede repetir este proceso y obtener un polinomio de grado n, tal como se indica en la siguiente proposición.

Proposición 5.4.1. *Dada una función f derivable a cualquier orden en $x = 0$, podemos construir el polinomio*

$$P_m(x) = \sum_{n=0}^{m} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!} f''(0)x^2 + \frac{1}{3!} f'''(0)x^3 + \cdots + \frac{1}{m!} f^{(m)}(0)x^m$$

que se denomina **Polinomio de Taylor** *de grado m de $f(x)$ alrededor de $x = 0$.*

Tal polinomio cumple las siguientes propiedades:

1. Las derivadas de $P_m(x)$ en $x=0$ coinciden con las de $f(x)$ en $x=0$ hasta el orden m:

$$P_m^{(n)}(0) = f^{(n)}(0), \quad n = 0, \cdots, m$$

de forma que $P_m(0) = f(0),\ P'_m(0) = f'(0), \cdots P_m^{(m)}(0) = f^{(m)}(0)$.

2. Como consecuencia de lo anterior, se verifica que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - P_m(x)}{x^n} = 0, \quad n = 0, \cdots, m$$

Es sencillo verificarlo usando regla de L'Hôpital hasta el orden n. Esto implica que la diferencia

$$R_m(x) = f(x) - P_m(x)$$

denominada **resto** o **error**, es muy pequeña para $x \to 0$, ya que cumple que

$$\lim_{x\to 0} R_m(x) = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{R_m(x)}{x^n} = 0, \quad \text{para } n = 0, \cdots, m$$

En otras palabras, $|R_m(x)|$ es más pequeño que x^n para $x \to 0$. Esto es consecuencia de que las derivadas de $R_m(x)$ en $x=0$ son, por 1), todas nulas hasta el orden m inclusive.

Ejemplo 5.4.2. *Hallemos el polinomio de Taylor de orden 3 de la función $f(x) = e^x$ en $x_0 = 0$.*

Debemos obtener la primera, segunda y tercera derivadas y evaluarlas en $x_0 = 0$. Como $f^{(n)}(x) = e^x$ para todo n, resulta que $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$, y por lo tanto el polinomio de orden 3 es

$$P_3(x) = 1 + (x-0) + \frac{1}{2!}(x-0)^2 + \frac{1}{3!}(x-0)^3 = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$$

5.4.2. Serie de Taylor

Dada una función f suficientemente derivable, es posible construir sus polinomios de Taylor en un punto x_0 de un orden tan alto como se desee. Se sabe que dichos polinomios permiten aproximar los valores de la función para valores próximos a x_0 y que, en general, podemos escribir

$$f(x) = P_m(x) + R_m(x)$$

con $R_m(x)$ pequeño para $x \to 0$. Tomando ahora el límite $m \to \infty$ obtenemos

$$f(x) = \lim_{m\to\infty} \left[\sum_{n=0}^{m} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n \ + \ R_m(x) \right]$$

Para aquellos x en los que $\lim\limits_{m\to\infty} R_m(x) = 0$, se obtiene el desarrollo de $f(x)$ como una serie de potencias:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n \Longleftrightarrow \lim_{m\to\infty} R_m(x) = 0$$

que se denomina **desarrollo** en serie de Taylor de f alrededor de $x = 0$.

En general, considerando un punto $x = x_0$ formulamos lo siguiente

Definición 5.4.3. *(Desarrollo en serie de Taylor)*
Sea f función infinitamente derivable en el punto x_0, entonces la serie

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot x^n (x - x_0)^n$$

se llama serie de Taylor de f centrada en x_0.

Desarrollar f en serie de Taylor centrada en x_0 consiste en calcular la expresión anterior y hallar los números $x \in \mathbb{R}$ que verifican la igualdad

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

es decir, aquéllos puntos que cumplen las tres condiciones siguientes:

1. La función está definida (x pertenece al dominio de la función).
2. La serie de Taylor converge.
3. La suma de la serie coincide con el valor de la función.

Definición 5.4.4. *Una función es f* **analítica** *en x_0 si en un intervalo abierto en torno de x_0 esta función es la suma de una serie de potencias $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$.*

La condición $\lim\limits_{m\to\infty} R_m(x) = 0$ se cumple en un cierto intervalo $|x| < R$ para todas las funciones que son analíticas en un entorno del origen.
Una expresión general para el resto, en el caso de funciones derivables a todo orden, es

$$R_m(x) = \frac{f^{m+1}(c)}{(m+1)!}\, x^{m+1} = 0, \quad c \text{ entre } 0 \text{ y } x$$

Esta expresión sirve en general para acotar el resto pero no para determinarlo exactamente.

Ejemplo 5.4.5. *Representemos la función $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ como una serie de potencias en torno de $x = 0$.*

De acuerdo a lo señalado, se debe determinar $f^{(n)}(0)$, y luego hacer uso de la expresión que proporciona el desarrollo.

$$
\begin{aligned}
f(x) = \frac{1}{1-x} &\implies f(x) = (1-x)^{-1} \implies f(0) = 1 \\
&\implies f'(x) = (1-x)^{-2} \implies f'(0) = 1 \\
&\implies f''(x) = 2\,(1-x)^{-3} \implies f''(0) = 2
\end{aligned}
$$

Concluimos que $f^{(n)}(0) = n!$ Luego

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n!} \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

representación válida para $|x| < 1$.

NOTA ▷ El desarrollo en serie de potencias de una función $f(x)$ alrededor de $x = 0$ es único (pues necesariamente $a_n = f^{(n)}(0) = n!$). Esto permite en muchos casos obtener el desarrollo simplemente por métodos indirectos (sustitución, integración, derivación) sin necesidad de calcular todas las derivadas en el origen. El desarrollo obtenido coincidirá de todos modos con la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

Ejemplo 5.4.6. *Representemos la función $f(x) = \frac{1}{(x-3)(x-5)}$ en serie de potencias alrededor de $x = 0$.*

La forma del denominador sugiere una separación en fracciones parciales y la aplicación del desarrollo realizado en el ejemplo precedente.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(x-3)(x-5)} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x-5)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x-3)} \\
&= -\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{5}} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{3}} \\
&= -\frac{1}{10} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{5}\right)^n + \frac{1}{6} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n
\end{aligned}
$$

Como los desarrollos son válidos para $|x| < 5$ y $|x| < 3$, respectivamente, entonces el desarrollo que hemos hecho es váalido en el intervalo $|x| < 3$. (la intersección).

Ejemplo 5.4.7. *Hallemos el desarrollo de $f(x) = senx$ en torno de $x = 0$.*

Tenemos que $f(0) = 0, f'(0) = cos(0) = 1$, $f''(0) = -sen(0) = 0$, $f'''(0) = -cos(0) = -1$, $f^{(4)}(0) = sen(0) = 0$. Se observa que, en general,

$$f^{(2n)}(0) = 0, \qquad f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

Veamos que sucede con el resto.

$$|R_m(x)| = \left|\frac{f^{(m+1)}(c)x^{m+1}}{(m+1)!}\right| \leq \left|\frac{|x|^{m+1}(c)}{(m+1)!}\right|$$

esto es así, pues, $\left|f^{(m+1)}(c)\right| \leq 1$. Tomando límite para $m \to \infty$ tenemos

$$0 \leq \lim_{m\to\infty} |R_m(x)| \leq \lim_{m\to\infty}\left|\frac{|x|^{m+1}(c)}{(m+1)!}\right| = 0$$

de donde se sigue que $\lim_{m\to\infty} R_m(x) = 0$. En consecuencia,

$$senx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

Ejemplo 5.4.8. *Hallemos la representación en serie de $f(x) = cosx$.*

Podemos seguir el mismo camino del ejemplo anterior, no obstante, es más rápido obtener el desarrollo directamente derivando el desarrollo anterior. Se obtiene

$$cos(x) = (senx)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^n = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

La serie converge para todo $x \in \mathbb{R}$.

NOTA $\triangleright$ Una función derivable a cualquier orden en $x = 0$ que no puede ser desarrollada en serie de potencias es

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Es sencillo ver que f es derivable a cualquier orden en $x = 0$, con $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ y en general, $f^{(m)}(0) = 0$ para todo n. Con esto se prueba que la función dada es infinitamente diferenciable (es decir, suave) y que las derivadas de todos los órdenes en $x = 0$ son 0. Por lo tanto, tenemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(0)}{m!}x^m = 0$$

esto, a pesar de que $f(x) \neq 0$. La razón de esto es que

$$\lim_{m\to\infty} R_m(x) \neq 0, \quad \forall x \neq 0$$

siendo en realidad $R_m(x) = f(x)\ \forall m$

Si f es infinitamente diferenciable en un entorno de un punto x_0, entonces f coincide con su serie de Taylor (centrada en x_0) en dicho entorno. Por tanto si, f fuese analítica en $x = 0$, tendría que ser igual a la función constante 0 en algún entorno del cero, pero eso es imposible pues $f(x) > 0$ para todo x distinto de cero. Por tanto f **no** es analítica en $x = 0$.

Ejemplo 5.4.9. *Hallemos una representación en serie de potencias, en torno de $x = 0$, de $f(x) = e^x$.*

Es claro que $f(0) = 1$. Hacemos el cálculo de las derivadas y luego las evaluamos en $x = 0$.

$$f'(x) = e^x \Longrightarrow f'(0) = 1,\ f''(x) = e^x \Longrightarrow f''(0) = 1, \cdots, f^{(n)}(0) = 1$$

por tanto, la función $f(x) = e^x$ se representa, en torno de $x = 0$, como

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots, \quad |x| < 1$$

Ejemplo 5.4.10. *Hallemos una representación en serie de potencias, en torno de $x = 0$, de $f(x) = e^{x^2}$.*

En lugar de evaluar $f^{(n)}(0)$, hacemos el cambio de x por x^2 en la expresión

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots, \quad |x| < 1$$

para tener que

$$e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} = 1 + x^2 + \frac{1}{2!}x^4 + \frac{1}{3!}x^6 + \cdots, \quad |x| < 1$$

Ejemplo 5.4.11. *La función $f(x) = \frac{1}{x}$ no está definida en $x = 0$. Luego, no es posible desarrollarla en torno a $x = 0$, pero si alrededor de cualquier otro punto, como por ejemplo, $x = 1$.*

Tenemos, $f(1) = 1$. Para las derivadas se encuentra que

$$\begin{aligned} f'(x) = -x^{-2} &\Longrightarrow f'(1) = -1 = (-1)^n \cdot 1! \\ f''(x) = 2x^{-3} &\Longrightarrow f''(1) = 2 = (-1)^2 \cdot 2! \\ f^{(3)}(x) = -6x^{-4} &\Longrightarrow f^{(3)}(1) = -6 = (-1)^3 \cdot 3! \end{aligned}$$

En consecuencia, como $f^{(n)}(1) = (-1)^n \cdot n!$, concluimos que

$$\frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot (x-1)^n$$

Más aún, el criterio de la razón dice que la serie converge absolutamente para $|x - 1| < 1$, es decir, en el intervalo $0 < x < 2$, y diverge en $\mathbb{R} - \{0 < x < 2\}$

Ejemplo 5.4.12. *Hallemos el desarrollo en serie de potencia en torno de $x = 0$ de $f(x) = (1 + x)^k$.*

Es claro que,

$$f(0) = 1,\ f'(0) = k(1+0)^{k-1} = k,\ f''(0) = k(k-1)(1+0)^{k-2} = k(k-1), \cdots$$

y por lo tanto,

$$(1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

que converge en general para $|x| < 1$, pues, $\lim\limits_{m\to\infty} R_m(x) = 0$ si $|x| < 1$, y es válido para cualquier número real k. Así por ejemplo:

- Si $k = \frac{1}{2}$, se tiene

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \cdots$$

- Si $k = -1$, se obtiene

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{0}^{\infty}(-1)^n \cdot x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

- Si $k = -\frac{1}{2}$, se tiene que

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot x^3 + \cdots$$

Ejemplo 5.4.13. *Calcular* $\int_0^1 \sqrt{1+x^4}dx$ *usando el desarrollo de* $\sqrt{1+x}$ *y sus cinco primeras potencias.*

Reemplazando x por x^4en el desarrollo de $\sqrt{1+x}$, se tiene

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+x^4} &= 1 + \frac{1}{2}\,x^4 - \frac{1}{8}\,x^8 + \frac{1}{16}\,x^{12} - \frac{5}{128}\,x^{16} \\
\int_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx &= \int_0^1 \left(1 + \frac{1}{2}\,x^4 - \frac{1}{8}\,x^8 + \frac{1}{16}\,x^{12} - \frac{5}{128}\,x^{16}\right)\,dx \\
&= \left(x + \frac{1}{10}\,x^5 - \frac{1}{72}\,x^9 + \frac{1}{208}\,x^{13} - \frac{5}{1976}\,x^{17}\right)_0^1 \\
&\sim 1,088388
\end{aligned}$$

5.5. Problemas resueltos

Ejemplo 5.5.1. *La serie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{3n^2-2}$ *es divergente.*

Usando el criterio de paso al límite con $b_n = \frac{1}{3n}$ tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n^2-2} : \frac{1}{3n} = 1$$

Como la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n}$ diverge, entonces la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n^2-2}$ también diverge.

Para quienes gustan de ver todo con una mirada rápida, el empleo de infinitésimos simplifica el trabajo. En efecto, observando los grados del numerador y denominador buscamos una serie, más simple, que tenga el mismo comportamiento en el infinito. Así,

$$\frac{n}{3n^2-2} \sim \frac{n}{3n^2} \sim \frac{1}{3n}$$

El comportamiento de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n}$, que es la armónica, es similar a la dada, por tanto hay divergencia.

Ejemplo 5.5.2. *La serie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\ln n}$ *es divergente.*

Por criterio de paso al límite, con $b_n = \frac{1}{n}$, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\ln n} = \infty$$

Esto resulta al aplicar L'Hôpital. Se concluye que hay divergencia.

Ejemplo 5.5.3. *La serie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{4n^2-7}}$ *diverge.*

En el infinito, tener $4n^2 - 7$ es lo mismo que tener $4n^2$, ello es así pues

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n^2-7}{4n^2} = 1$$

esto es, son infinitésimos equivalentes. Esto nos dice que el comportamiento de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{4n^2-7}}$ es similar al de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{2n}}$. Dado que esta última es divergente (armónica), entonces la serie original es divergente.

Ejemplo 5.5.4. *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^3-2}$ *converge.*

Con infinitésimos volvemos a resolver, en forma rápida, el problema de la convergencia. Es claro que el término n-ésimo de la serie dada es equivalente con el término $\frac{1}{4n^2}$ y ésta a su vez con $\frac{4}{n^2}$. Como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}$ es convergente (serie p con $p = 2$), la origunal también lo es.

Ejemplo 5.5.5. *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n+1}}$ *diverge.*

Usemos el criterio p

$$\lim_{n\to\infty} n^{1/2} \cdot \frac{\ln n}{\sqrt{n+1}} = \infty$$

Como se consideró $p = \frac{1}{2}$, la serie es divergente.

Ejemplo 5.5.6. *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2-n+3}{n^3+2n}$ *es divergente.*

Por infinitésimos, el término general de la serie es equivalente con $\frac{1}{4n}$. Como esta serie es la armónica divergente, entonces la serie original diverge. Si usamos el criterio p, entonces

$$\lim_{n\to\infty} n^1 \cdot \frac{4n^2-n+3}{n^3+2n} = 4$$

Dado que se consideró $p = 1$, la serie dada es divergente.

Ejemplo 5.5.7. *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\sqrt{n}}{2n^3-1}$ *converge.*

Una “mirada rápida” nos dice que el comportamiento de esta serie es similar a la que tiene la de término general $\frac{1}{n^2}$ que es convergente.

Si se hiciere uso del criterio p, entonces

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \cdot \frac{n+\sqrt{n}}{2n^3-1} = \frac{1}{2}$$

Al haber considerado $n = 2$, la serie dada es convergente.

Ejemplo 5.5.8. *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2}$ *converge.*

El uso del criterio p con $p = 2$ permite tener

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \cdot e^{-n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{e^{n^2}} = 0$$

Se hizo uso de la regla de L'Hôpital. Por tanto, la serie dada es convergente.

Ejemplo 5.5.9. *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ *converge.*

Al mirar la serie nos damos cuenta que el criterio indicado es el de la raíz.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n} = e^{-1} < 1$$

Esto prueba convergencia.

Ejemplo 5.5.10. *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\ln n}\right)^{n}$ *converge.*

Por criterio de la raíz

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{\ln\ n}\right)^{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln\ n} = 0 < 1$$

Esto confirma la convergencia.

Ejemplo 5.5.11. *Sea* $a_n = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k}$. *Calcular* $\lim_{n\to\infty} a_n$.

En primer lugar, determinemos los términos de la serie.

$$a_1 = \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2}, \qquad a_2 = \sum_{k=1}^{4} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

$$a_3 = \sum_{k=1}^{8} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \quad \cdots$$

$$a_n = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} = (1 + \frac{1}{2}) + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + \cdots + (\cdots + \frac{1}{2^n})$$

se acota a_n como

$$a_n > (1 + \frac{1}{2}) + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}) + \cdots (\frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^n})$$

al tomar limite en ambos lados se tiene

$$\lim_{n\to\infty} a_n > \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2} = \infty$$

de esta forma, la serie es divergente, y $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$

Ejemplo 5.5.12. *Probemos que la serie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\ln^3 n}$ *es convergente.*

Como se trata de una serie alternada, por criterio de Leibnitz.

$$\frac{1}{\ln^3 n} \to 0, \; |a_{n+1}| < |a_n| \Longrightarrow \frac{1}{\ln^3(n+1)} < \frac{1}{\ln^3 n}$$

como $n < n+1$ entonces $\ln^3 n < \ln^3(n+1)$. De esta forma, se satisfacen las dos condiciones del teorema de Leibnitz para convergencia.

Ejemplo 5.5.13. *Sean* $p,\ q > 0,\ \lambda \in (2,3)$. *Determinar la naturaleza de*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p+1)(p+2)\cdots(p+n-1)}{q(q+1)(q+2)\cdots(q+n-1)} \cdot (\lambda-2)^n$$

Hacemos uso del criterio del cociente

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{p(p+1)(p+2)\cdots(p+n-1)}{q(q+1)(q+2)\cdots(q+n-1)} \cdot (\lambda-2)^n \\ a_{n+1} &= \frac{p(p+1)(p+2)\cdots(p+n-1)(p+n)}{q(q+1)(q+2)\cdots(q+n-1)(q+n)} \cdot (\lambda-2)^{n+1} \end{aligned}$$

Luego, el cociente

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(p+n)}{(q+n)} \cdot (\lambda-2) \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{(p+n)}{(q+n)} \cdot |\lambda-2| = |\lambda-2|$$

En consecuencia, $|\lambda-2| < 1 \Longrightarrow 1 < \lambda < 3$, y hay convergencia en el intervalo $(1,3)$. En los extremos del intervalo el termino general de la serie no tiende a cero, de modo que allí hay divergencia.

Ejemplo 5.5.14. *La serie* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *es divergente,* $0 < a_n < 1$. *Demostrar que*

$$\lim_{\to\infty}(1-a_0)(1-a_1)\cdots(1-a_n) = 0$$

Hacemos uso de la función $f(x) = e^{-x} + x - 1$, la que tiene un mínimo en $x = 0$, su valor es $f(0) = 0$. Luego, $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. De esto; $e^{-x} > 1 - x$. En consecuencia

$$1 - a_0 < e^{-a_0}, \quad 1 - a_1 < e^{-a_1}, \cdots 1 - a_n < e^{-a_n}$$

El producto

$$(1 - a_0)(1 - a_1) \cdots (1 - a_n) < e^{-\left(a_0 + a_1 + \cdots + a_n\right)}$$

como $\lim\limits_{n\to\infty} e^{-\left(a_0 + a_1 + \cdots + a_n\right)} = 0$, se sigue entonces que

$$\lim_{n\to\infty} (1 - a_0)(1 - a_1) \cdots (1 - a_n) = 0$$

Ejemplo 5.5.15. *Usar el criterio de condensación de Cauchy para estudiar la convergencia de las siguientes series:*

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$; $p > 0$
2. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n(\ln n)^p}$, $p > 0$

Recordemos que el criterio de condensación afirma que

"la serie $\sum a_n$, $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq 0$ converge si y sólo si $\sum 2^k \cdot a_{2^k}$ converge"

1. Sea $a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$, entonces $a_1 = 1$, $a_2 = \dfrac{1}{2^p}$, $a_3 = \dfrac{1}{3^p}, \cdots a_n = \dfrac{1}{n^p}$, de donde

$$\sum 2^n \cdot a^{2^n} = \sum 2^n \cdot \frac{1}{2^{np}}$$

como $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{1}{2^{p-1}}$, el criterio de la razón asegura que hay convergencia si $\dfrac{1}{2^{p-1}} < 1$, es decir, si $p > 1$. La divergencia se produce para $p \leq 1$.

Para resolver el problema por el criterio de condensación, se procede como sigue:

$$\sum \frac{1}{n^p} \sim \sum 2^k \cdot \frac{1}{2^{pk}} = \sum \frac{1}{2^{k(p-1)}} = \sum \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^k$$

La última serie es geométrica convergente si $\dfrac{1}{2^{p-1}} < 1$, esto es, $p > 1$. Para $p \leq 1$ la serie diverge.

2. Los términos de esta serie son:

$$a_2 = \frac{1}{2(\ln 2)^p}, \quad a_3 = \frac{1}{3(\ln 3)^p}, \cdots a_n = \frac{1}{n(\ln n)^p}$$

se observa que $a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq a_n$. Luego

$$\sum 2^n \cdot a_{2^n} = \sum \frac{2^n}{2^n(\ln 2^n)^p} = \sum \frac{1}{n^p(\ln 2)^p} = \frac{1}{(\ln 2)^p} \cdot \sum \frac{1}{n^p}$$

Luego, para $p > 1$ hay convergencia, y para $p \leq 1$ divergencia.

Ejemplo 5.5.16. $\sum \frac{cos\, nx}{n^p}$, *$x \in (0, \pi)$ es absolutamente convergente si $p > 1$.*

En efecto, $|\frac{cos\, nx}{n^p}| < \frac{1}{n^p}$. Como la serie $\sum \frac{1}{n^p}$ converge para $p > 1$, la serie dada es absolutamente convergente.

Ejemplo 5.5.17. *Estudiar convergencia de* $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{(-1)^n - n} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^4} + \cdots$.

A este problema le viene como "anillo al dedo" el criterio de la razón.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{(-1)^{n+1}-(n+1)}}{2^{(-1)^n - n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2^{(-1)^n})^{(-1)} \cdot 2^{-n} \cdot 2^{-1}}{(2^{(-1)^n} \cdot 2^{-n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{(-1)^n} \cdot 2^{(-1)^n} \cdot 2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2 \cdot 2^{2(-1)^n}} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{8}, & \text{si n par} \\ 2, & \text{si n impar} \end{cases}
\end{aligned}$$

como no se cumple la unicidad del límite, la serie es divergente.

Ejemplo 5.5.18. *Estudiar la naturaleza de la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \left(e - (1 + \frac{1}{n})^n\right)^p$

Hacemos uso del acotamiento $(1 + \frac{1}{n})^n < e < (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$, ya que entonces

$$0 < e - (1 + \frac{1}{n})^n < (1 + \frac{1}{n})^{n+1} - (1 + \frac{1}{n})^n$$

o bien

$$e - (1 + \frac{1}{n})^n < (1 + \frac{1}{n})^n \cdot (1 + \frac{1}{n} - 1)$$

con lo cual se tiene el acotamiento

$$a_n = \left(e - (1 + \frac{1}{n})^n\right)^p < (1 + \frac{1}{n})^{np} \cdot \frac{1}{n^p}$$

Ahora, por criterio de Abel "$\sum a_n$ convergente y (v_n) monótona acotada implican $\sum a_n\, v_n$ convergente", con $a_n = \frac{1}{n^p}$ convergente para $p > 1$, y $(v_n) = (1 + \frac{1}{n})^{np} \to e^p$, con lo cual (v_n) acotada. Veamos la monotonía

$$\left[(1 + \frac{1}{n})^p\right]^n \leq \left[(1 + \frac{1}{n})^p\right]^{n+1} \Longrightarrow \left[(1 + \frac{1}{n})^p\right]^n \cdot \left[(1 + \frac{1}{n})^p - 1\right] \geq 0$$

El primer factor tiende a e y el segundo a cero. Luego, la serie dada es convergente para $p > 1$.

Ejemplo 5.5.19. *Estudiar la naturaleza de las series de término general:*

1. $a_n = \sqrt{n^4 + 2n + 1} - n^2$
2. $a_n = \dfrac{1}{(\ln n)^p}$

1. Analizamos el término general.

$$a_n = \frac{2n+1}{n^2 + \sqrt{n^4 + 2n + 1}} \geq \frac{n}{n^2 + \sqrt{n^4 + 2n + 1}}$$

Como además, $n^4 + 2n + 1 \leq n^4 + 2n^4 + n^4$, entonces $\sqrt{n^4 + 2n + 1} \leq 2n^2$. En consecuencia

$$a_n \geq \frac{n}{n^2 + 2n^2} = \frac{1}{3n}$$

esto muestra divergencia, pues $\frac{1}{n}$ corresponde al término general de la serie armónica que es divergente.

2. $\ln\ n < n \Longrightarrow \dfrac{1}{\ln\ n} > \dfrac{1}{n} \Longrightarrow \dfrac{1}{(\ln\ n)^p} > \dfrac{1}{n^p}$. Luego, si $p \leq 1$ la serie diverge.

Para $p > 1$ se tiene $\dfrac{1}{(\ln\ n)^p} > \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ pues $\lim\limits_{n\to} \dfrac{\sqrt{n}}{(\ln\ n)^p} = +\infty$. En consecuencia, la serie diverge.

Otra forma de resolver este problema, es mediante el Teorema de Condensación de Cauchy. Se verifica fácilmente que $a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq 0$ para $p \geq 1$. Además

$$\sum_{n=2}^{\infty} 2^n \cdot a_{2^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{(\ln\ 2^n)^p} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{(n \ln\ 2)^p}$$

esta serie diverge tal como lo vemos usando criterio de la razón

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{2^{n+1}}{(\ln\ 2^{n+1})^p} \cdot \frac{(\ln\ 2^n)^p}{2^n} = 2 \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^p \\ &= 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^p \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2 > 1 \end{aligned}$$

De esta forma, la serie diverge para $p \leq 1$.

Ejemplo 5.5.20. *Demostrar que, si la sucesión (a_n) tiene límite cero y es decreciente, entonces la serie alternada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot a_n$ es convergente.*

Para las sumas parciales, S_{2^n} y S_{2^n+2} se tiene

$$\begin{aligned} S_{2^n} &= a_1 - a_2 + a_3 + \cdots + a_{2^n-1} - a_{2^n} \\ S_{2^n+2} &= S_{2^n} + (a_{2^n+1} - a_{2^n+2} \geq S_{2^n} \end{aligned}$$

Ello es virtud de que la sucesión (a_n) es decreciente, y por tanto, $a_{2^n+1} \geq a_{2^n+2}$. Resulta así que la sucesión (S_{2^n}) es monótona creciente.

Por otra parte,

$$S_{2^n} = a_1 - (a_2 - a_3) - \cdots - (a_{2^n-2} - a_{2^n-1}) - a_{2^n} \leq a_1$$

Luego, la sucesión (S_{2^n}) es también acotada, y por ende **convergente**.

Sea $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2^n} = S$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2^n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} S_{2^n} + a_{2^n+1}$, es decir, las sumas parciales convergen a una única suma **S**. De esta forma, la serie dada es convergente.

Ejemplo 5.5.21. *Hallemos el desarrollo en serie de $f(x) = arcsenx$, en torno al punto $x = 0$.*

Es evidente que no vamos a empezar a derivar para dar con la serie. Tenemos que

$$f(x) = arcsenx \Longrightarrow f'(x) = (1-x^2)^{-1/2}$$

Como es cierto que

$$\begin{aligned}(1-x^2)^{-1/2} &= 1 + \frac{1}{2}\cdot x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot x^6 + \cdots \\ &= 1 + \sum_1^\infty \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\cdot x^{2n};\ |x|<1\end{aligned}$$

entonces, al integrar término a término, entre 0 y x, se tiene

$$\int_0^x (1-x^2)^{-1/2}\,dx = \int_0^x \left[1 + \sum_1^\infty \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\cdot x^{2n}\right] dx;\ |x|<1$$

Esto es

$$\begin{aligned}arcsenx &= x + \int_0^x \left[\sum_1^\infty \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\cdot x^{2n}\right] dx \\ &= x + \sum_1^\infty \left[\int_0^x \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\cdot x^{2n}\right] dx \\ &= x + \sum_1^\infty \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\cdot x^{2n}\cdot x^{2n+1}\cdot \frac{1}{2n+1}\end{aligned}$$

Ejemplo 5.5.22. *Calcular $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$.*

Se usa lo siguiente

$$e^x = \sum_0^\infty \frac{x^k}{k!} \Longrightarrow e^{-x^2} = \sum_0^\infty \frac{(-x^2)^k}{k!}$$

Luego,

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx = \int_0^1 \left[\sum_0^\infty \frac{(-x^2)^k}{k!}\right] dx = \sum_0^\infty \left[\int_0^1 \frac{(-x^2)^k}{k!} dx\right]$$
$$= \sum_0^\infty \frac{(-1)^k \cdot x^{2k+1}}{k! \cdot (2k+1)}\Bigg|_0^1 = \sum_0^\infty \frac{(-1)^k}{k!\,(2k+1)}$$

5.6. Problemas propuestos

1. En los siguientes ejercicios, dada la suma S de los n primeros términos de la serie, hallar la suma de la serie, y su término general.

   a) $S_n = \dfrac{2n}{3n+1}$ *b)* $S_n = \dfrac{3^n}{1+3^{n+1}}$ *c)* $S_n = \frac{n^2}{n+1}$

   Resp: a) $S = \frac{2}{3}$, *b)* $S = \frac{1}{3}$, c) no tiene suma

2. Hallar los cuatro primeros términos de la sucesión de sumas parciales (S_n), y una fórmula para ella. Determinar si la serie converge o no. Si converge hallar su suma.

   a) $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ *c)* $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{1}{n(n+1)}$ *e)* $\displaystyle\sum_1^\infty n$

   b) $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ *d)* $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{2}{(4n-3)(4n+1)}$ *f)* $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{2^{n-1}}{3^n}$

3. Las series siguientes son geométricas o telescópicas. Hallar su suma.

   a) $\displaystyle\sum_0^\infty (\frac{4}{5})^n$ *b)* $\displaystyle\sum_0^\infty (-\frac{1}{6})^n$ *c)* $\displaystyle\sum_0^\infty (\frac{2-2\sqrt{2}}{2})^n$

4. Utilizar criterios para determinar convergencia de las series:

   a) $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{1+\sqrt{n}}{2+n^2}$ *e)* $\displaystyle\sum_2^\infty (\frac{1}{\ln n})^n$ *i)* $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{n}{1+n^2}$

   b) $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{1}{3n-2}$ *f)* $\displaystyle\sum_1^\infty (\frac{1}{2})^{n+1} \cdot (\frac{2}{3})^{2n}$ *j)* $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{e^n}{n^2}$

   c) $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{5+3n^2}{6-n^2+2n^3}$ *g)* $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{1}{n^2+2n}$ *k)* $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{n}{2^n}$

   d) $\displaystyle\sum_1^\infty (\frac{n}{n+1})^{n^2}$ *h)* $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{\ln n}{n^2}$ *l)* $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{\ln(n+1)}{2^{n+1}}$

m) $\sum_{1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n - n}$ *ñ)* $\sum_{1}^{\infty} (-1)^{n+1}\, 2^{1/2}$ *p)* $\sum_{1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!}$

n) $\sum_{1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{3^{n+1}}$ *o)* $\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ *q)* $\sum_{1}^{\infty} (-1)^{n+1}\, \frac{n+1}{n(n+3)}$

5. Investigar si las series dadas convergen condicional o absolutamente.

a) $\sum_{1}^{\infty} (-1)^{n+1}\, \frac{1}{n}$ *b)* $\sum_{1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{100+2n}{3n+1}\right)^n$ *c)* $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{3n-1}}$

6. Hallar el intervalo de convergencia de las series de potencias:

a) $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^{2n}}{n!}$ *c)* $\sum_{1}^{\infty} (-1)^{n+1}\, \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ *e)* $\sum_{1}^{\infty} n!\, x^n$

b) $\sum_{1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ *d)* $\sum_{1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(n+1)\, 2^n}$ *f)* $\sum_{1}^{\infty} \frac{x^n}{\ln(n+1)}$

7. En los siguientes ejercicios determinar: radio de convergencia de la serie y dominio de la función f que define la serie.

a) $\sum_{1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ *b)* $\sum_{1}^{\infty} (-1)^{n-1}\, \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ *c)* $\sum_{1}^{\infty} \sqrt{n}\, x^{n-1}$

8. Para las funciones que se indican, obtener una representación en serie de potencias.

a) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ *c)* $f(x) = \frac{1}{(1-x)^3}$ *e)* $f(x) = e^{\sqrt{x}}$

b) $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$ *d)* $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ *f)* $f(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}$

9. Utilizar la representación en serie de $f(x) = x \cdot e^x$, e integrar entre 0 y 1, para demostrar que $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n!\,(n+2)} = \frac{1}{2}$

10. Utilizar la representación en serie de potencias de $f(x) = \ln(1-t)$, e integrar entre 0 y x para demostrar que

$$\sum_{2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)} = x + (1-x) \cdot \ln(1-x)$$

11. Las siguientes integrales son calculables mediante una serie de potencias. Hallar un valor aproximado a cuatro decimales.

a) $\displaystyle\int_0^{1/2} sen\, x^2\, dx$ *c)* $\displaystyle\int_0^1 cos\sqrt{x}\, dx$ *e)* $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{sen\, x}{x}\, dx$

b) $\displaystyle\int_0^{1/2} e^{x^2}\, dx$ *d)* $\displaystyle\int_0^1 cos\, x^2\, dx$ *f)* $\displaystyle\int_0^{1/10} \ln(1+sen\, x)\, dx$

12. Verificar los desarrollos y probar convergencia.

a) $a^x = \displaystyle\sum_0^\infty \frac{x^n\, (\ln\, a)^n}{n!}, a>0, \forall x,\quad$ use $a^x = e^{x\, \ln a}$

b) $sen^2\, x = \displaystyle\sum_1^\infty (-1)^{n+1}\, \frac{2^{2n-1}}{(2n)!}\cdot x^{2n}$

c) $\displaystyle\frac{1}{2-x} = \sum_0^\infty \frac{x^n}{2^{n+1}}$

d) $e^{-x^2} = \displaystyle\sum_0^\infty \frac{(-1)^n\, x^{2n}}{n!}$

e) $\displaystyle\frac{1}{1+x-2x^2} = \frac{1}{3}\cdot\sum_1^\infty (1-(-2)^n)\; x^n,\ |x|<\frac{1}{2}$

13. Hallar el conjunto de números reales x para los que la serie converge.

a) $\displaystyle\sum_1^\infty n^n\cdot x^n$ *c)* $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{n}{n+1}\cdot\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$ *e)* $\displaystyle\sum_0^\infty \left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$

b) $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{x^n}{n^n}$ *d)* $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{x+n}$ *f)* $\displaystyle\sum_0^\infty \frac{(2x+3)^n}{n\, \ln(n+1)}$

14. Probar las siguientes igualdades:

a) $\displaystyle\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_1^\infty nx^n$

b) $\displaystyle\frac{1}{2}\, \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \sum_1^\infty \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$

c) $\displaystyle\frac{x+4x^2+x^3}{(1-x)^4} = \sum_0^\infty n^3 x^n$

d) $\displaystyle\frac{1}{(1-x)^3} = \sum_0^\infty \frac{(n+1)(n+2)}{2!}x^n$

e) $\displaystyle\frac{x+x^2}{(1-x)^3} = \sum_1^\infty n^2\, x^n$

f) $\displaystyle\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_0^\infty (n+1)x^n$

g) $\displaystyle\frac{1}{(1-x)^4} = \sum_0^\infty \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3!}x^n$

h) $\displaystyle\sum_0^\infty (-1)^k\cdot x^{2k} = \frac{1}{1+x^2},\ -\frac{1}{2}\le x\le\frac{1}{2}$

i) $arctg\, x = \displaystyle\sum_0^\infty \frac{(-1)^k}{2k+1}\cdot x^{2k+1},\ x\in(-1,1)$

j) $\displaystyle\frac{\pi}{4} = \sum_0^\infty \frac{(-1)^k}{2k+1}$

15. Verificar las siguientes igualdades:

$a)$ $\displaystyle\int_0^1 \left(\sum_1^\infty \frac{1}{k^2+x^2} \right) dx = \sum_1^\infty \frac{1}{k} \cdot arctg \frac{1}{k}$ $\qquad$ $b)$ $\displaystyle\int_0^\pi \left(\sum_1^\infty \frac{sen(kx)}{k^2} \right) dx = \sum_1^\infty \frac{2}{(2k-1)^3}$

16. Sabiendo que $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{cos\, nx}{n^2} = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi\, x}{2} + \frac{\pi^2}{6}$, $0 \leq x \leq 2\pi$, verificar que:

$a)$ $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ $\qquad$ $b)$ $\displaystyle\sum_0^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$

17. Determinar $k \in \mathbb{R}$ para que $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{(2k)^{n-1}}{(k-1)^{n-3}}$

$k \in (-1, \frac{1}{3})$

18. Sea $0 < a < 1$, un parámetro fijo. Demuestre que

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+a^2t^2} = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{a^{2n}}{2n+1}$$

Ind. No olvide que $\displaystyle\frac{1}{1+x} = \sum_0^\infty (-1)^n x^n$

.

El futuro tiene muchos nombres.
Para los débiles es lo inalcanzable.
Para los temerosos, lo desconocido.
Para los valientes es la oportunidad.
Víctor Hugo

CAPÍTULO 6
PROBLEMAS ADICIONALES

CAPÍTULO 6

Problemas de Pruebas

Los siguientes problemas han sido considerados en pruebas escritas y exámenes. Hay varios responsables de que estos problemas, fáciles o difíciles, hayan sido puestos para evaluar a alumnos como tú, pero no cabe duda que el principal responsable sigue siendo el **autor** de estas notas. A él pues, todas las pifias, improperios y penas del infierno.

6.1. Integral indefinida y diferenciales

1. Resolver las siguientes integrales:

1) $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}\,dx$

2) $\displaystyle\int x\, e^{\operatorname{arc\,sen} x}\,dx$

3) $\displaystyle\int x^3\,\ln(x^2+5)\,dx$

4) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x}\,dx}{x\sqrt{1+x}}$

5) $\displaystyle\int \frac{1+\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-1}\,dx$

6) $\displaystyle\int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}\,dx$

7) $\displaystyle\int \frac{x^{7/2}}{(x^3-1)^2}\,dx$

8) $\displaystyle\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}\,dx$

9) $\displaystyle\int \frac{(1-\operatorname{sen} x)\,dx}{1+\cos x}$

10) $\displaystyle\int x\,f''(x)\,dx$

11) $\displaystyle\int \frac{y\,dy}{\sqrt{y^2-1}}$

12) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^4+4x^2+5}$

13) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+5x}}$

14) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{5x-x^2-4}}$

15) $\displaystyle\int x^2\,\operatorname{arc\,sen} x\,dx$

16) $\displaystyle\int \cos^7 3x\,dx$

17) $\displaystyle\int \frac{dx}{4+\sqrt{4+5x}}$

18) $\displaystyle\int \sec^7 5x\ \operatorname{tg}\,5x\,dx$

19) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$

20) $\displaystyle\int \frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}\,dx$

21) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x\,\cos x\,dx}{5+4\operatorname{sen} x}$

22) $\displaystyle\int \frac{\sec^2 t\,dt}{1+\sec t}$

23) $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{(16-9x^2)^{5/2}}$

24) $\displaystyle\int \frac{2x^2-x+2\,dx}{x+2x^3+x^5}$

25) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+e^{-x}}$

26) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}\,dx$

27) $\displaystyle\int x\,\ln(x^3+x)\,dx$

28) $\displaystyle\int \frac{x^3\,e^{x^2}\,dx}{(x^2+1)^2}$

29) $\displaystyle\int 3x^4 \operatorname{sen} 2x\,dx$

30) $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{3-x^2+2x}}$

31) $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(16-4x^2)^{5/2}}$

32) $\displaystyle\int \frac{(x+2)\,dx}{(x^2+2x-3)^{3/2}}$

33) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(1-\cos x)\,\cos x}}$

34) $\displaystyle\int x\,\left(\cos^3 x^2 - \operatorname{sen}^3 x^2\right)\,dx$

35) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-2x}\,dx}{(x-1)^3}$

36) $\displaystyle\int \frac{(x^4+2x^2-8x+4)\,dx}{x^3-8}$

37) $\displaystyle\int x^{1/2}\,(x^{2/3}-4)^3\,dx$

38) $\displaystyle\int \frac{dx}{(2+3x)\sqrt{7x^2+6x+1}}$

39) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}-\sqrt[3]{1-x}}$

40) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x^2-4x+1}}$

41) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(9+4\,\ln^2\,x)}$

42) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} t\,dt}{6\cos^2 t+5\operatorname{sen}^2 t}$

43) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^6+2x^4+x^2}$

44) $\displaystyle\int \frac{\cos x\,dx}{\cos x+\operatorname{sen} x}$

45) $\displaystyle\int \frac{x^2+3x+12}{x^2+4}\,dx$

46) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg} x}{\sec x+\operatorname{tg} x}\,dx$

47) $\displaystyle\int \ln(1+x^2)\,dx$

48) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+3}}$

49) $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}$

50) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}-\sqrt[3]{1-x}}$

51) $\displaystyle\int \frac{x^3\,e^{x^2}\,dx}{(x^2+1)^2}$

52) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-2x}}{(x-1)^3}\,dx$

53) $\displaystyle\int x^3\,\sqrt{1-x^2}\,dx$

54) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{tg} x-\operatorname{sen} x}$

55) $\displaystyle\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt[3]{9+x^2}}$

56) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x^2-x+1)^3}$

57) $\displaystyle\int \frac{(1+\operatorname{sen} x)\,dx}{(1+\cos x)\,\operatorname{sen} x}$

58) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 t\,\cos^2 t\,dt$

59) $\displaystyle\int \frac{(4x+7)\,dx}{2x^2+3x+8}$

60) $\displaystyle\int x^{\alpha}\ln\,x\,dx,\quad \alpha\in\mathbb{R}$

61) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}\,dx}{\sqrt{4e^x+3}}$

62) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^2 x\,dx}{1+\cos^2 x}$

2. Usar integración por partes para probar que:

a) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(a+bx)^2} = \frac{1}{b^2}\left(\frac{a}{a+bx}+\ln(a+bx)\right)+C$

b) $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\cdot\sqrt{1-x^2}+\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right)+C$

c) $\displaystyle\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2}{a(1+2m)}\left(x^m\sqrt{ax+b}-mb\int\frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{ax+b}}\right),\ m\neq -\frac{1}{2}$

d) $\displaystyle\int sec\,\theta\,d\theta = \ln\sqrt{\frac{1+sen\,\theta}{1-sen\,\theta}}+C$

e) $\displaystyle\int x^m \ \ln(x^2+a^2)\ dx = \frac{x^{m+1}\ \ln(x^2+a^2)}{m+1} - \frac{2}{m+1}\ \int \frac{x^{m+2}\,dx}{x^2+a^2}$

f) $\displaystyle\int x^n\sqrt{ax+b}\,dx = \frac{2}{a(3+2n)}\left[x^n(ax+b)^{3/2} - nb\int x^{n-1}\sqrt{ax+b}\,dx\right]$

3. Si $I_n(x) = \displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^3)^n}$, probar que se verifica que

$$I_{n+1}(x) = \frac{x}{3n(1+x^3)^n} + \frac{(3n-1)}{3n}\ \int \frac{dx}{(1+x^3)^n}, \quad n \neq 0$$

4. Hallar la ecuación de la curva que pasa por el punto $(-1,4)$ si se sabe que, la ecuación de la recta tangente en ese punto es $3x+y-1=0$ y que la segunda derivada satisface $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 1-x$

5. Hallar una función f que satisfaga $f'(sen\,x) = cos^2 x\ \ \forall x$, y $f(1)=1$

6. Determinar el valor de las constantes a, b y c para que la función $F(x) = (ax^2+bx+c)\sqrt{3-2x} + C$ sea primitiva de $f(x) = x\sqrt{3-2x}$

7. Los puntos $(-1,3)$ y $(0,2)$ están sobre la curva $y=f(x)$. Si en cualquier punto (x,y) sobre la curva se satisface que $D^2y = 2-4x$. Hallar la ecuación de la curva.

8. Sea F primitiva de la función continua e invertible $x=f(t)$. Probar que

$$\int f^{-1}(x)\ dx = x\ f^{-1}(x) - F(f^{-1}(x))$$

9. Sea F primitiva de la función f. Hallar $\displaystyle\int f(x)\,F(x)\,dx$

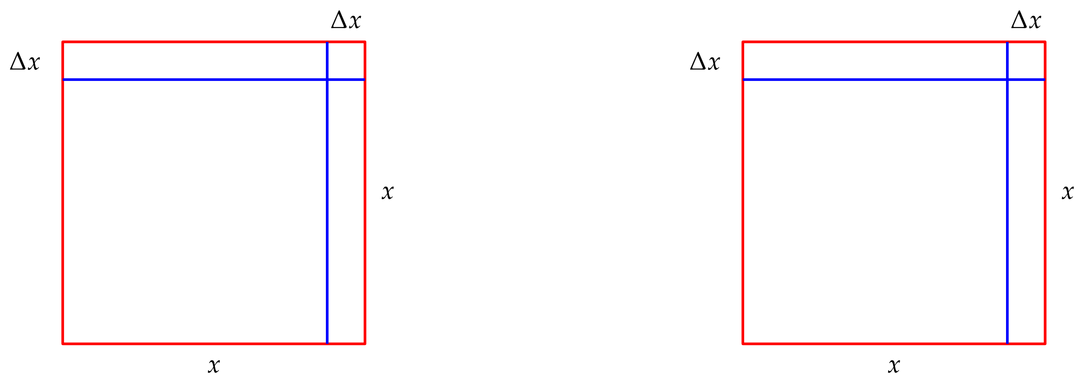
10. Hallar la ecuación de la curva que pasa por el punto $(-1,4)$ si se sabe que la ecuación de la recta tangente en ese punto es $3x+y-1=0$ y que la segunda derivada satisface $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 1-x$

11. Usando diferenciales hallar:

    a) un valor aproximado para $f(0,1)$ si $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{1-x}{1+x}}$

    b) cuanto aumenta en forma aproximada el volumen de una esfera, si su radio $r = 15$ cms se alarga en 2 mm.

12. Sea $f(x) = x^2$ el área de un cuadrado de lado x. Calcular Δf y df en términos de x y Δx. En los cuadrados del diagrama sombrear la parte cuya área es Δf y df.



6.1.1. Integral Definida - Aplicaciones

1. Sea $y = f(z)$. Hallar $y''(1)$ si $y = \displaystyle\int_0^{z^2} \frac{dx}{1+x^3}$
2. La tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = a$ forma un ángulo de $\frac{\pi}{3}$ con el eje de abscisas, mientras que en el punto de abscisa $x = b$ forma un ángulo de $\frac{\pi}{4}$. Calcular:
   - $\displaystyle\int_a^b f''(x)\,dx$
   - $\displaystyle\int_a^b f'(x)\cdot f''(x)\,dx$
3. Si $f(x) = \displaystyle\int_0^{2x} f(t)\,dt = xe^{\sqrt{x}}$, calcular $f(2)$.
4. Sea $\displaystyle\int_a^x t\,f(t)\,dt = \operatorname{sen} x - x\cos x - \frac{1}{2}x^2$. Calcular $f(\frac{\pi}{2})$
5. Sea f función real continua y decreciente en $[a,b]$. Probar que
$$g(z) = \frac{1}{z-a}\int_a^z f(x)\,dx \quad \text{es decreciente para } a < z < b$$
6. Hallar $f(4)$ si $\displaystyle\int_0^{x^2} f(t)\,dt = x\cos\pi x$
7. Sea $x = \displaystyle\int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1+4t^2}}$. Demostrar que $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 4y$
8. Sea f continua en $[-2a, 2a]$. Se define la función $G(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt,\ \forall x \in [-2a, 2a]$
   a) Demostrar que f par $\Longrightarrow \displaystyle\int_{-x}^x f(t)\,dt = 2\,G(x)$
   b) Si $f(t) = |t-a|$, calcular $G(x), \forall x \in [-2a, 2a]$

c) Si $G(2x) = x\, e^{\sqrt{x}}$, calcular $f(2)$.

9. Hallar la derivada de $F(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} e^{-t^2}\, dt$

10. Hallar $f(9)$ si $f(t) = \displaystyle\int_0^{f(x)} t^2\, dt = x \cos \pi x$

11. Si $f(x) = -f(-x) + x$, calcular $\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)\, dx$

12. Calcular $\displaystyle\int_0^3 \left(\frac{9 - x^2}{9}\right)^{3/2} dx$

13. Evaluar $\displaystyle\int_0^1 x \cdot \ln(x+1)\, dx$

14. Demostrar que $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{x}{x-a} \int_a^x f(t)\; dt = a\, f(a)$

15. Si $f(x) = \displaystyle\int_0^1 t^{\alpha}\, \operatorname{sen} tx\, dt,\ \alpha > 0$, calcular $f'(0)$

16. Determinar la función real f, continua y no nula tal que

$$f^2(t) = \int_0^t \frac{f(z)\, \operatorname{sen} z\, dz}{2 + \cos z}$$

17. Demuestre que $\displaystyle\int_0^a \frac{x\, dx}{\sqrt{a^4 + x^4}} = \int_0^1 \frac{t\, dt}{\sqrt{1 + t^4}}$ y calcule su valor

18. Si $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n x\; dx; n \in \mathbb{N}$, pruebe que $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}\, I_n$

19. Sea f una función con f'' continua en $[a, b]$ Demuestre que

$$\int_a^b (b-t) f''(t)\; dt = f(b) - f(a) - f\,(a)(b-a)\, f'(a)$$

20. Sea $\displaystyle\int_a^x t\, f(t)\, dt = \operatorname{sen} x - x \cos x - \frac{1}{2} x^2$. Calcular $f(\frac{\pi}{2})$

21. La segunda derivada de una función f es $f''(x) = 6(x-1)$. Hallar f sabiendo que su gráfica pasa por el punto $(2, 1)$ y que en ese punto la recta tangente tiene ecuación $3x - y - 5 = 0$

22. Sea g una función continua que satisface: $g(1) = 5, \quad \int_0^1 g(t)\,dt = 2.$

$$\text{Si } f(x) = \frac{1}{2} \cdot \int_0^x (x-t)^2\, g(t)\,dt \quad \text{calcular } f''(1),\ f^{(3)}(1)$$

y demostrar que

$$f'(x) = x \cdot \int_0^x g(t)\,dt - \int_0^x t \cdot g(t)\,dt$$

23. Evaluar mediante una integral definida

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi^2}{n^2}\left[\operatorname{sen}(\frac{\pi}{n}) + 2\,\operatorname{sen}(\frac{2\pi}{n}) + \cdots + n\,\operatorname{sen}(\frac{n\pi}{n})\right]$$

24. Usar la suma de los seis primeros términos en la siguiente serie para aproximar $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$. Determine la integral a aproximar.

$$\left(2 + 0 \cdot \frac{4}{3}\right)^2 \cdot \frac{4}{3} + \left(2 + 1 \cdot \frac{4}{3}\right)^2 \cdot \frac{4}{3} + \left(2 + 2 \cdot \frac{4}{3}\right)^2 \cdot \frac{4}{3} + \cdots\cdots$$

25. Una región tiene la forma del conjunto acotado por las rectas $y = 4x$, $x = -2$, $x = 1$. Hallar el área de la región usando el límite de una suma de Riemann.

26. Usar Riemann para calcular

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+n^2} + \frac{2}{2^2+n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2}\right)$$

27. Con ayuda de una integral apropiada y mentalidad Riemanniana hallar

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+n} + \frac{1}{2+n} + \frac{1}{3+n} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)$$

28. Escribir una integral de Riemann equivalente con

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{n=1}^{n} \frac{k^2}{4n^2-k^2}$$

29. Escribir la suma de Riemann cuyo límite equivale a $\displaystyle\int_1^2 (1+x^2)\,dx$

30. Calcular $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{4n^2-i^2}$

31. Calcular $\int_1^4 (3x - x^2)\, dx$, usando una suma de Riemann.

32. Sea R el recinto limitado por las curvas; $y = x^2,\ y + 2x = 8,\ x = 1,\ x = 3$. Calcular, usando una suma de Riemann, la integral del recinto R.

33. Usar una suma de Riemann para hallar el área de la región acotada por la curva $y = 4 - x^2$, el eje x, y las rectas $x = -1$, $x = 2$.

34. Considerar la región que se encuentra en el **primer cuadrante**, exterior a la curva $y = 1 - x^2$ e interior a la curva $y = 2x - x^2$. Usar el límite de una suma de Riemann para calcular el área de dicha región.

35. Usar el límite de una suma de Riemann para calcular el área de la región que se encuentra en el **primer cuadrante**, acotada a la izquierda por $x + y = 1$, y a la derecha por la curva $y = 2x - x^2$.

36. Considerar la región acotada por el eje x y las curvas $y = x^2$, $y = 4 - x^2$. Usando límite de una suma de Riemann hallar el área comprendida entre $x = 1$ y $x = \frac{5}{2}$

37. Usar el límite de una suma de Riemann para calcular el área de la región que se encuentra en el **primer cuadrante**, acotada a la izquierda por $x + y = 1$, y a la derecha por la curva $y = 2x - x^2$.

38. Considerar la región que se encuentra en el **primer cuadrante**, exterior a la curva $y = 1 - x^2$ e interior a la curva $y = 2x - x^2$. Usar el límite de una suma de Riemann para calcular el área de dicha región.

39. Hallar el área de la región que acotan las curvas $y = x^2$, $2y = x^2$, $(x-1)^2 = 1 - y$.

40. Sea R la región acotada por la curva $y = x\,(8 + x^3)^{-1/2}$, el eje x, y la recta $x = 2$. Escribir la integral que proporciona el volumen de revolución al girar R en torno a:

    a) El eje x *b*) La recta $x = 2$ *c*) La recta $y = 1$

41. Sea R el rectángulo de vértices $(2,2), (6,2), (6,4), (2,4)$. Determinar usando **Pappus** el volumen generado al girar R:

    a) alrededor de la recta $x = 9$ *b*) alrededor de la recta $y = -x$

42. Hallar el volumen del cuerpo engendrado al girar alrededor de la recta $x = a$, la parte de la parábola $y = 4ax$, que se intersecta por la misma recta.

43. Hallar el centro de gravedad de la región limitada por las curvas $y = x,\ y = \sqrt{x}$

44. Graficar la región R cuya área está representada por la integral que se indica, y hallar el valor del área.

$$A(R) = \int_{-1}^{3} (2 + |x|)\, dx$$

45. Sea R la región que acotan las curvas $y = x^2$ e $y = 1$:

    a) Escribir como una integral (**no calcular**) el volumen generado al rotar la región R alrededor de $y = 1$, mediante el método del disco (elementos perpendiculares al eje de revolución)

    b) Escribir como una integral (**no calcular**) el volumen generado al rotar la región R alrededor de $x = 2$, mediante el método de la corteza o anillo (elementos paralelos al eje de revolución)

    c) Calcular el centro de masa de la región R.

    d) Resolver el problema a) usando Pappus.

46. Utilizar Pappus para calcular el área de la superficie generada al girar la curva $y = \sqrt{R^2 - x^2}$; $0 \leq x \leq R$ alrededor de la recta $y = R$.

47. Dada la región acotada por la curva $y = (x-1)^2$ y la recta $y = 1$.

    a) Hallar el centroide de la región.

    b) Hallar el volumen del sólido generado al rotar la región alrededor de la recta $x + 5y = 7$.

    c) Escribir la integral que proporciona el área de la superficie de revolución generada al rotar la región alrededor del eje y.

48. Considerar la región R limitada por $y = \sqrt{1 - x^2}$, $y = 0$

    a) Escribir la integral que proporciona el volumen que genera la región al girar, por el método del *disco* y de la *corteza*, alrededor de la recta que se indica:

        1) La recta $y = -1$ 2) La recta $y = 2$ 3) La recta $x = 2$

49. Considerar la región acotada por las curvas $y - x = 4$, $y + 1 = (x-1)^2$. Usando integrales, escribir:

    a) El área de R en la variable x

    b) El área de R respecto a la variable y

    c) El volumen del sólido obtenido al rotar la región alrededor de:

        1) La recta $y = -1$ 2) La recta $x = 4$ 3) La recta $y = 8$

    d) El área de la superficie generada al rotar alrededor del eje x el arco de parábola ubicada en el cuarto cuadrante.

50. Sea R la región que acotan la parábola $y^2 = 4px$ y la recta $x = p$, $p > 0$

    a) Hallar el área de la región

b) Hallar el volumen del sólido obtenido al rotar la región alrededor de la recta $x = 2p$. (Sin utilizar Pappus)

c) Hallar las coordenadas del centroide de la región; utilizando el teorema de Pappus y las respuestas de las partes a) y b).

d) Escribir (**no calcular**) la integral que entrega el perímetro de la región.

51. Considerar la región que acotan las curvas, $y = 1 - x^2 + 4x,\ y = 1$.

    a) Hallar el centroide de la región

    b) Hallar el volumen del sólido generado al rotar la región alrededor de la recta $x + y = -1$.

52. Considerar la región que acotan las curvas $y = x,\ y = 4,\ x = 0$.

    a) Hallar el centroide de la región.

    b) Hallar el volumen del sólido generado al rotar la región alrededor de la recta $y = x - 4$.

    c) Hallar el área de la superficie generada al rotar la recta $y = x$, con $0 \leq x \leq 4$, alrededor de la recta $x = 6$.

    d) Hallar el volumen del sólido cuya base es la región dada y cuya sección perpendicular al eje x es un semicirculo.

53. Considerar la región R acotada por $y = 8 - x^2$, $2y = x^3$, $x = -2$.

    a) Escribir la integral que proporciona el área, en términos de la variable x.

    b) Escribir la integral que proporciona el área, en términos de la variable y.

    c) Escribir la integral que proporciona el volumen que se genera al rotar la región R alrededor de la recta $x = -2$, mediante el método de la corteza y del disco.

    d) Escribir la integral que proporciona el volumen que se genera al rotar la región R alrededor de la recta $y = 10$, mediante el método del disco y de la corteza.

54. Graficar la región que acotan $y = x^2,\ y = 4 - (x-2)^2,\ y = x - 4$, y escribir el área como una integral.

55. Considerar la región R que acotan las curvas $y = \sqrt{4 - x^2},\ x = 2,\ x - 2y + 2 = 0$. Escribir:

    a) la integral que proporciona el área, en términos de la variable x.

    b) la integral que entrega el área, en términos de la variable y.

    c) la integral que proporciona el volumen que se genera al rotar la región R alrededor de la recta $x = -2$, mediante el método de la corteza.

    d) la integral que proporciona el volumen que se genera al rotar la región R alrededor de la recta $y = 4$, mediante el método del disco.

    e) la integral que proporciona el volumen que se genera al rotar la región R alrededor de la recta $x = 2$, mediante el método del disco.

f) la integral que proporciona el volumen que se genera al rotar la región R alrededor de la recta $x = -2$, mediante el método de la corteza.

g) la integral que proporciona el volumen que se genera al rotar la región R alrededor de la recta $y = 4$, mediante el método del disco.

h) la integral que proporciona el volumen que se genera al rotar la región R alrededor de la recta $x = 2$, mediante el método del disco.

56. Hallar el área de la región $R = \{(x, y)/\ a \leq x \leq b,\ \ 0 \leq y \leq f(x)\}$ ubicada en el primer cuadrante, si se sabe que la región:

- Al girar en torno al eje y genera un sólido de volumen 24π
- Al girar en torno a la recta $x = -3$ genera un sólido de volumen 72π

57. Hallar la longitud de arco de la curva $y = \dfrac{1}{12}x^3 + \dfrac{1}{x}$, entre los puntos $(1, \dfrac{13}{12})$ y $(2, \dfrac{7}{6})$

58. Considerar la región R acotada por $y = x^{3/2} - 3,\ y = 2x - 3$.

a) Hallar el área de la región.

b) Calcular el perímetro de la región.

c) Hallar el volumen que se genera al rotar la región R alrededor de la recta $y = -3$.

d) Escribir la integral que proporciona el volumen que se genera al rotar la región R alrededor de la recta $x = 5$, mediante el método del disco y de la corteza.

59. Considerar la región interior a las curvas $x^2 + y^2 = 8,\ y^2 = 2x$.

a) Escribir las integrales que proporcionan el área de la región, en terminos de la variable x, y en términos de la variable y. Calcular una de ellas.

b) Escribir la integral que proporciona el volumen generado al rotar la región R alrededor de las rectas:

1) $x = 0$ 2) $y = -3$ 3) $x = 4$

c) Calcular el perímetro de la región R.

d) Calcular el área de la superficie generada al rotar la curva $x^2 + y^2 = 8$ alrededor de la recta $y = -3\sqrt{2}$.

60. Considerar la región triangular de vértices $(0, 0)$, $(1, 2)$ y $(1, -2)$.

a) Hallar el centroide de la región.

b) Hallar el volumen del sólido generado al rotar esta región en torno a la recta $4x + 3y = 12$.

61. Determinar el área de la superficie que se genera al rotar la curva $y = F(x), 0 \leq x \leq 2$ en torno al eje y. La función $F(x)$ viene dada por $F(x) = \displaystyle\int_0^x \sqrt{e^{2t} - 1}\, dt$

62. Considerar la región del primer cuadrante que acotan las curvas $y = 2 - x^2$, $y = x^3$ y el eje x.

    a) Escribir las integrales que proporcionan el área de la región, en términos de la variable x, y en términos de la variable y.

    b) Escribir la integral que proporciona el volumen generado al rotar la región R alrededor de las rectas: (a) $x = 2$, (b) $y = 2$, mediante método del disco y de la corteza.

63. Calcular el área de la superficie generada al rotar la curva $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y$, desde $y = 1$ hasta $y = 2$.

64. Hallar el volumen del sólido generado al rotar la región acotada por las curvas $y^2 = 4x$, $x^2 = 4y$ en torno a la recta $y = -3$.

65. Considerar la región que acotan las curvas $x^2 + y^2 = 16$, $y = x\sqrt{15}$, $y^2 = 6x$. Escribir:

    a) La integral que proporcione el volumen (método del disco) al girar la región en torno del eje x.

    b) La integral que proporcione el volumen (método del corteza) al girar la región en torno del eje x.

66. Sea R la región que acotan las curvas $x^2 - 4x - y + 5 = 0$, $y^2 = 5x$. Calcular el volumen generado por R al girar en torno de la recta $x + y = 1$

67. Sea R la región acotada por las curvas $(y-2)^2 = x - 4$, $y - x + 4 = 0$

    a) Graficar la región R.

    b) Calcular el centro de masa de R.

    c) Calcular el volumen que se genera al rotar la región R alrededor de la recta $y - x + 8 = 0$.

68. Considerar la región R que acotan $y = x^3$, $y = -2x - 12$, $y = -x^2 - 3x$. Expresar mediante integrales:

    a) El perímetro de R

    b) El volumen del sólido obtenido al girar la región R en torno a la recta $x = 1$.

    c) El área de la superficie del sólido que se obtiene al girar la región R en torno a la recta $y = -10$.

69. Considerar la región R del primer cuadrante, acotada por el eje x y las curvas $x^2 + y^2 = 8$, $y^2 = 2x$.

    a) Escribir la integral que proporciona el área de la región, con respecto de la variable x, y con respecto de la variable y. Calcular una de ellas.

    b) Escribir la integral que proporciona el volumen de la región, por el método del disco y por el de la corteza, al girar alrededor de la recta $x = 4$.

70. Calcular el volumen generado al rotar la región acotada por la curva $y = x^2$ y la recta $y = 4$, alrededor de la recta $x - y = 1$.

71. Sea R la región acotada por las curvas $y = 4x$, $y = x(x+1)(x-2)$. Calcular:

    a) el área de la región.

    b) el volumen del sólido generado al rotar la región R en torno a la recta $y = -9$

72. Considere la región que acotan la recta $y = 1$ y la curva $y = (x-1)^2$. Hallar el volumen del sólido generado al rotar la región alrededor de la recta $x + 5y = 7$.

73. Considerar la región R que acotan $y = 8 - x^2,\ y = x^2,\ y \geq 0,\ x \geq 0$.

    a) Escribir las integrales que dan la longitud de la frontera de R

    b) Calcular el centro de masa del alambre que tiene la forma de la frontera de R

    c) Hallar el área de la región R.

    d) Hallar el centro de masa de la región R.

    e) Escribir la(s) integral(es) que entregan el volumen de revolución que se indica:

    $$V_x, \qquad V_y, \qquad V_{x=3}, \qquad V_{y=4}, \qquad V_{x=-2}, \qquad V_{y=-1}$$

    f) Escribir la(s) integral(es) que entregan el área de la superficie de revolución que se indica:

    $$A_x(S), \qquad A_y(S), \qquad A_{x=3}(S), \qquad A_{y=4}(S), \qquad A_{x=-2}(S), \qquad A_{y=-1}(S)$$

    g) Calcular el volumen que se genera al rotar la región en torno de la recta $x + y = 0$. Es decir, $V_{x+y=0}$

    h) Calcular el área de superficie de revolución que se genera al rotar la frontera de R en torno de la recta $x + y = 0$. Es decir, $A_{x+y=0}$

74. Considerar la región, en el primer cuadrante, que acotan las curvas $y = x^3$, $y = 2 - x^2$, $y = 3x + 2$, y el eje x.

    a) Escribir por el método del disco, el volumen generado por R al girar en torno: del eje x y del eje y. Calcular uno de ellos

    b) Escribir por el método de la corteza, el volumen generado por R al girar en torno: del eje x y del eje y. Calcular uno de ellos

    c) Hallar el volumen que genera la región R al girar en torno de la recta $y = 3x + 4$

75. Considerar la región R que acotan $y = x,\ y = 4,\ x + y = 4,\ y^2 = x - 4$.

    a) Graficar la región R.

    b) Escribir las integrales que dan longitud de la frontera de R.

c) Escribir las integrales que proporcionan el área de superficie de revolución cuando se giran las curvas frontera de R en torno de los ejes coordenados.

d) Escribir los volúmenes de revolución, por disco y corteza, cuando la región gira entorno de las rectas:
$$y = 0, \qquad x = 0, \qquad x = 20, \qquad y = 6$$

e) Hallar el volumen que se genera al rotar la región en torno de la recta $x + y = 4$.

76. Considerar la región que acotan las curvas $x^2 + y^2 = 16$, $y = x\sqrt{15}$, $y^2 = 6x$. Escribir la integral que proporciona el volumen al girar la región en torno del eje x, por método de disco y corteza.

77. Considerar la región que acotan las curvas $x^2 - 4x - y + 5 = 0$, $y^2 = 5x$. Calcular el volumen al girar la región en torno de la recta $x + y = 1$

78. Sea R la región que acotan la curva $y = \sqrt{1 - x^2}$ y el eje x. Hallar el volumen que se genera al rotar R en torno de la recta:

a) $y = -1$ b) $y = 2$ c) $x = 3$ d) $x + y = 2$

79. Sea R la región que en el primer cuadrante acotan $y = 2 - x^2$, $y^3 = x^2$.

a) Calcular el área de la región.

b) Escribir las integrales que entregan el volumen de los sólidos generados al rotar la región R en torno a las rectas $x = 2$ y $y = 2$.

6.2. Integrales impropias

1. Clasificar cada integral impropia siguiente (primera o segunda especie) y determinar su convergencia o divergencia, mediante criterios.

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x \, dx}{1 + \operatorname{sen} x + e^x}$

b) $\displaystyle\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt[3]{(5-x)(x-1)^2}}$

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x \, dx}{x^{3/2}}$

d) $\displaystyle\int_3^\infty \frac{(1+x^2)\, dx}{x^2 - 4}$

e) $\displaystyle\int_a^\infty \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 - a^2}}, \quad a > 0$

f) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{x}\, dx}{x + \operatorname{sen} x}$

g) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{e^y \, dy}{y}$

h) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{(2x - x^2)^{3/2}}$

i) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3 - 1}}$

j) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln(x+1)}{x}\, dx$

k) $\displaystyle\int_0^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{8 - x}}$

l) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{e^{2x+1}}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}\, dx$

m) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{2 + x\ \cos^2 x}{\sqrt{1 + x^5}}\, dx$

n) $\displaystyle\int_1^\infty e^{-x} \cdot \ln\, x \, dx$

ñ) $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4}\, dx$

o) $\displaystyle\int_3^{\infty} \frac{x^2+1}{x^2-4}\,dx$ *r)* $\displaystyle\int_1^{3} \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}$ *u)* $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{e^{1+2x}dx}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}$

p) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{4+x^2}$ *s)* $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{(\,1-\cos x\,)\,dx}{x^2}$ *v)* $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{x^{3/2}}$

q) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ *t)* $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{2+x\,\cos^2 x}{\sqrt{1+x^5}}\,dx$

2. Clasificar cada integral impropia siguiente (primera o segunda especie) y determinar su convergencia o divergencia, mediante criterios.

   a) $\displaystyle\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}$ *e)* $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{8-x^3}}$

   b) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ *f)* $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1-x\,\operatorname{sen} x\,dx}{1+x^3}$

   c) $\displaystyle\int_1^{3} \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}$ *g)* $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1+x^2}{x^2-4}\,dx$

   d) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1+x^2\,dx}{x^2-2}$ *h)* $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{x}}{x+\operatorname{sen} x}\,dx$

3. Hallar el área bajo $y = \dfrac{1}{(x-3)^2}$ y sobre el eje x, con $x \in (-\infty, 3)$

4. Determinar, usando criterios, la convergencia o divergencia de:

   a) $\displaystyle\int_1^{5} \frac{dx}{\sqrt[3]{(5-x)(x-1)^2}}$

   b) $\displaystyle\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^2\,\sqrt{x^2-a^2}},\ a>0$

5. Usar la función **beta** para hallar el área de la región R, en el primer cuadrante, acotada por $y = \dfrac{x^{3/2}}{(4-x)^{1/2}}, \quad 0 \le x < 4$

6. Demostrar que $\displaystyle\int_0^{\infty} \sqrt{x}\,e^{-x^3}\,dx = \frac{1}{3}\sqrt{\pi}$

7. Demostrar que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{\operatorname{tg} x}\,dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

8. Determinar condiciones sobre m y n para que exista convergencia en la integral que se indica y también para que exista convergencia.

$$\int_{-3}^{1} (x+3)^{-m}\,(1-x)^{-n}\,dx$$

9. Calcular $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |x|\, e^{-x^2}\, dx$

10. Demostrar $\displaystyle\int_{0}^{\infty} x^p\, e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\,\Gamma(\frac{p+1}{2})$

11. Utilizar la función **beta** para hallar el área de la región

$$R = \{(x,y)/0 \le x < 4,\ 0 \le y \le \frac{x^{3/2}}{(4-x)^{1/2}}\}$$

12. Utilizar las funciones **beta** y/o **gamma** para calcular $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} sen^8 t\ cos^7 t\ dt.$

13. Demostrar $\displaystyle\int_{0}^{1} x^m\,(\ln x)^n\, dx = \frac{(-1)^n\, n!}{(m+1)^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N},\ m > -1$

14. Demostrar que $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dx}{(1-t^p)^{1/2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{p} \cdot \frac{\Gamma(1/p)}{\Gamma(\frac{1}{p}+\frac{1}{2})}, \ \ p > 0$

15. Usar función **beta** para hallar:

   a) $\displaystyle\int_{-2}^{7} \frac{dx}{(1+x)^{2/3}}$ *b)* $\displaystyle\int_{0}^{3} \frac{dx}{\sqrt{3x-x^2}}$ *c)* $\displaystyle\int_{0}^{2} \sqrt{x^3(2-x)^5}\, dx$

16. Usar la función **beta** para calcular $\displaystyle\int_{0}^{4} \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{4-x}}\, dx$

17. Demostrar que $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\cdot sen^2\, x}} = \frac{\Gamma^2(1/4)}{4\sqrt{\pi}}$

18. Usar función beta o gamma para calcular $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{x\, dx}{1+x^6}$

19. Calcular las siguientes integrales impropias:

   a) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$

   b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+8}$

   c) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \sqrt{x}\, e^{-x^3}\, dx$

   d) $\displaystyle\int_{0}^{4} \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{4-x}}\, dx$

   e) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-\sqrt[5]{x^2}}}$

   f) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} x^7\, e^{-x^2}\, dx$

20. Use función beta para hallar:

a) $\displaystyle\int_{-1}^{\infty} \frac{x\,dx}{(1+x^2)^2}\,dx$ *b)* $\displaystyle\int_{1}^{3} \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(3-x)}}\,dx$

21. Determinar convergencia de $\displaystyle\int_0^2 \frac{\ln\, x\, dx}{\sqrt[3]{8-x^3}}$

22. Demostrar que $\displaystyle\int_0^1 t^x\,(1-t^p)^y\,dt = \frac{1}{p}\cdot\beta\left(\frac{x+1}{p}, 1+y\right)$

23. Calcular, usando Beta o Gamma, las siguientes integrales:

    a) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^4+4x^2}$ *b)* $\displaystyle\int_0^4 \frac{\sqrt{x^3}\,dx}{\sqrt{4-x}}$ *c)* $\displaystyle\int_{-1}^{\infty} \frac{x\,dx}{(1+x^2)^2}$ *d)* $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{1+x^6}$

24. Demostrar que $\displaystyle\int_0^{\infty} x^{-p}\,e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1+p}{2}\right)$

25. $\mathcal{L}[f(t)] = \displaystyle\int_0^{\infty} f(t)\,e^{-s\,t}\,dt$ se llama transformada de $f(t)$. Calcular $\mathcal{L}[t]$

26. Calcular, usando beta o gamma, $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{x^3\,(2-x)^5}\,dx$

27. Demostrar que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} = 2\int_0^{\infty} \frac{y^2\,dy}{1+y^4}$

6.3. Series numéricas y de potencia

1. Usar criterios par analizar convergencia o divergencia de:

    a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-n^2}{(n-3)^2}$ *f)* $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n\cdot 2^n\cdot n!}{n^n}$ *k)* $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln\, n}$

    b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\ln n}{n}\right)^n$ *g)* $\displaystyle\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\,\sqrt{\ln(n+1)}}$ *l)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{9n^2-9n+2}$

    c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}(\frac{\pi}{n^2})$ *h)* $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$ *m)* $\displaystyle\sum_{2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\,\ln^2\, n}$

    d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+5)!}{2^n\,n^2\,n!}$ *i)* $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}$ *n)* $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{(3+2n)^n}{(2n-1)^n}$

    e) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n^2+4n)}$ *j)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-2}}{3^{n-1}}$ *ñ)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2+1}{(2n+3)n^2}$

o) $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, n^{10}}{(n+1)!}$

p) $\sum_{1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n$

q) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+6n+8}$

r) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\, \ln\, n}$

s) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{3\cdot 5\cdot 7\cdots (2n+1)}$

t) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+4^n}{1+3^n}$

u) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, 2^n\, n!}{n^n}$

v) $\sum_{1}^{\infty} (\frac{1}{2})^{n-1}\, (\frac{3}{2})^{2n}$

w) $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, \ln^2(1+n)}{n^2}$

x) $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\, n!}{1\cdot 3\cdots (2n-1)}$

2. Hallar desarrollo en serie de Taylor, en $x = 0$, o en el punto indicado. Indicar intervalo de convergencia.

a) $f(x) = \frac{1}{x-5}$, $x = 2$

b) $f(x) = \frac{x}{x^2-x-6}$

c) $f(x) = \frac{1}{x}$, $\quad x = -3$

d) $f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}$, $x = -4$

e) $f(x) = x^2\, e^{-x}$

f) $f(x) = \frac{x}{3-x^2}$

g) $f(x) = \frac{1}{2+x^2}$

h) $f(x) = \frac{x}{(2+x^2)^2}$

i) $g(x) = \frac{6}{(4+x)(2-x)}$

j) $\int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t}\, dt$

k) $f(x) = \frac{x}{2-3x}$

3. Determinar convergencia de

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\, 3^n}\, (x-5)^n$$

4. Determinar el valor de $a > 0$ para que converga la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)!}{a(a+1)\cdots(a+n)}$$

5. Sea $y = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)\, x^n}{n!}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$. Hallar la serie de potencias que es solución de la ecuación $xy'' + y' - y = 0$

6. Sea $f(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{sen\, nx}{n^3}$.

a) Probar que $f(x)$ es absolutamente convergente en $0 \leq x \leq \pi$

b) $\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\,dx = 2\sum_1^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$

7. La serie de términos positivos $\displaystyle\sum_1^{\infty} a_n$ es convergente. Determinar convergencia o divergencia de las series $\displaystyle\sum_1^{\infty} \frac{1}{a_n}$ y $\displaystyle\sum_1^{\infty} a_n^2$

8. Determinar los valores de la constante p para los cuales la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ es convergente y los valores de p para los que es divergente.

9. Considerar la serie $\displaystyle\sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{n+2}{n+1}$

   a) Determinar convergencia de la serie.

   b) Insertando paréntesis en cada par de términos, escriba la serie que resulta y determine su convergencia. Diga cuál es su conclusión.

10. Demostrar que $\displaystyle\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots = 1$

11. Sea $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(n!)^2}$. Demostrar que

$$x^2 f''(x) + x \cdot f'(x) = 4n^2 \cdot f(x)$$

12. Sea $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot (x-3)^n$ convergente para $x = 7$. Hallar el intervalo de convergencia de la serie.

13. Demostrar que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{cost\,dt}{1 - x\,sen^2 t} = \sum_0^{\infty} \frac{x^n}{2n+1},\ |x| < 1$

14. Probar que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\,n}{2^{n-1}} = \frac{4}{9}$

15. Calcular la suma de la serie $\displaystyle\sum_1^{\infty} \frac{1}{n(n+1(n+2)}$

16. Si $\dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1$, probar que

$$\frac{x^2}{(1-x)^3} = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\,x^n,\ |x| < 1$$

17. Sean $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n, \sum\limits_{1}^{\infty} b_n$ series convergentes. Probar que $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n^2\,,\ \sum\limits_{1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ son series convergentes.

18. Determinar intervalo de convergencia de las series:

a) $\dfrac{x-2}{2} + \dfrac{(x-2)^2}{2+\sqrt{2}} + \dfrac{(x-2)^3}{3+\sqrt{3}} + \dfrac{(x-2)^4}{4+\sqrt{4}} + \cdots$

b) $1 - \dfrac{x+2}{3 \cdot 3} + \dfrac{(x+2)^2}{3^2 \cdot 5} - \dfrac{(x+2)^3}{3^3 \cdot 7} + \dfrac{(x+2)^4}{3^4 \cdot 9} - \cdots$

19. Hallar el intervalo de convergencia de la serie de potencias

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n}{n^2+1} \cdot (x+1)^n$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n\,(x-5)^n}{n\,5^n}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-c)^{n-1}}{c^{n-1}}, \quad c > 0$

d) $\sum\limits_{1}^{\infty} \dfrac{(x+3)^n}{5^n\,(2n+1)}$

e) $\sum\limits_{1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n\,(x-1)^n}{n^{1/2}}$

f) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!\,(x-3)^n$

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2} (x-10)^n$

h) $\sum\limits_{1}^{\infty} \dfrac{(x+2)^n\,e^n}{\sqrt{2n}}$

i) $\sum\limits_{1}^{\infty} \dfrac{(n+1)^n\,x^n}{n!}$

j) $\sum\limits_{1}^{\infty} \dfrac{(n!)^2\,x^n}{(2n)!}$

k) $\sum\limits_{1}^{\infty} \dfrac{1}{2n+1} \cdot \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1}$

l) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}\,(x+5)^n}{\sqrt[3]{n}\,3^n}$

20. Determinar convergencia absoluta o condicional de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{(-2)^n\,(2+\sqrt{n}\,)}$$

21. Hallar los valores de la constante $\alpha > 0$ para la convergencia o divergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n)}$$

22. Hallar una representación en serie de potencias de la función $f(x) = x\, e^{x}$, y determinar intervalo de convergencia.

23. Determinar el radio de convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{(x-1)^{3n}}{n!}$$

24. Desarrollar en torno de $x = 0$ y hallar radio de convergencia si

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x^2 - 5x + 6}$$

25. Demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^2\, e^{nx}$ converge absolutamente en $(-\infty, -\frac{1}{2}]$

26. Obtener una representación en serie de potencias de x para la función $f(x) = x^2\, e^{-x}$. A partir de esta representación probar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{n+1}\,(n+2)}{n!} = 4$$

27. Halle la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3^n - 2^n}{2^{2n-1}} \right)$

28. Analizar la convergencia o divergencia de las series:

a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\, \ln^2 n}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n\,(x+2)^n}{\sqrt{2n}}$

29. Determinar el tipo de convergencia (condicional o absoluta), o bien la divergencia de cada serie siguiente:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n+n!}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2^n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{4 \cdot 7 \cdot 10 \cdots (3n+1)}$

30. Hallar intervalo de convergencia de las series:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x-3)^n}{5n^2+1}$ *b*) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n^2+1}$

c) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^n$ *d*) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\right)^2\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$

31. Hallar dos números A y B tales que $\frac{k-1}{2^{k+1}}=\frac{Ak}{2^k}-\frac{Bk+1}{2^{k+1}}$. Calcular $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k-1}{2^{k+1}}$

32. Hallar la suma de la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{3^n}$

33. Usar el hecho que $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\ |x|<1$, para hallar un desarrollo de $f(x)=arctg\,x$.

6.4. Problemas con alternativas

1. Dada la serie $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$, entonces S_n:

   ( ) es la n - ésima suma parcial de la serie.

   ( ) es el término n-ésimo de la serie.

   ( ) es la suma de la serie.

   ( ) N. A.

2. Si $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ es una serie convergente, entonces

   ( ) La serie en cuestión es geométrica

   ( ) $\lim_{n\to\infty}a_n=0$

   ( ) $\lim_{n\to\infty}S_n=0$

   ( ) N. A.

3. El criterio de convergencia de Leibnitz, se aplica en la serie $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$, si:

   ( ) La serie es alternada

   ( ) La serie es de términos positivos y negativos.

   ( ) La serie contiene sólo términos positivos.

   ( ) N. A.

4. $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$ es impropia de segunda especie, si:
   ( ) $a = -\infty, \quad b = \infty$
   ( ) $a = 1, \quad b = \infty$
   ( ) $a = 1, \quad b = 3/2$
   ( ) N. A.

5. La expresión $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$ satisface que
   ( ) es divergente
   ( ) es convergente a -2
   ( ) es una integral propia
   ( ) N. A.

6. Sea $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ la serie p. Si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces:
   ( ) $a_n \geq \dfrac{1}{n^p}, \quad p > 1$
   ( ) $a_n \geq \dfrac{1}{n^p}, \quad p < 1$
   ( ) $a_n \leq \dfrac{1}{n^p}, \quad p \leq 1$
   ( ) N. A.

7. Sea $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serie convergente. Entonces
   ( ) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es divergente.
   ( ) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es condicionalmente convergente.
   ( ) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente.
   ( ) N. A.

8. Sean $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ series de términos positivos y sea $k \in \mathbb{R}^+$. Si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente y $a_n \geq b_n$, entonces
   ( ) No hay información sobre la convergencia de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$.

( ) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es convergente.

( ) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es divergente.

( ) N. A.

9. A la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ le es aplicable el criterio de la integral en razón de que:

( ) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ es una función positiva y decreciente en $[1, \infty]$.

( ) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ es una función decreciente en $[1, \infty]$.

( ) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ es una función continua en $[1, \infty]$.

( ) N. A.

10. Si la serie de términos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ es convergente ya que:

( ) $\dfrac{a_n}{a_n^2} \to 0$ cuando $n \to \infty$

( ) $\dfrac{a_n^2}{a_n} \to 0$ cuando $n \to \infty$

( ) $a_n \leq a_n^2, \quad \forall n$

( ) N. A.

11. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{n}$ satisface que:

( ) Es convergente.

( ) Es divergente.

( ) Es absolutamente convergente.

( ) N. A.

12. La serie $\sum_{1}^{\infty} a\, r^{n-1}$ diverge para $r = -1$, pues,

( ) $\lim_{n\to\infty} S_n$ no existe

( ) $\lim_{n\to\infty} a_n = a \neq 0, \forall n$

( ) $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$

( ) N. A.

13. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serie de términos positivos tal que cada uno de sus términos es la suma de todos los que siguen. Esto es, $a_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots$. Si $a_1 = 1$, entonces la serie es:

( ) $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^n} + \cdots$

( ) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$

( ) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n} + \cdots$

( ) N. A.

14. Una de las siguientes expresiones define la función gamma:

( ) $\int_0^{\infty} t^{x-1}\, e^t\, dt, \quad x > 0$

( ) $\int_0^{1} t^{x-1}\, (1-t)^{y-1}\, dt, \quad x, y > 0$

( ) $\int_0^{1} t^{x-1}\, e^{-t}\, dt, \quad x > 0$

( ) N. A.

15. Sea $\sum_{1}^{\infty} a_n$ una serie telescópica, con $a_n = b_n - b_{n+1}$. Entonces:

( ) $\sum_{1}^{\infty} a_n$ es siempre convergente.

( ) $\sum_{1}^{\infty} a_n$ converge siempre que $\{b_n\}$ sea convergente.

( ) $\sum_{1}^{\infty} a_n$ converge si $\{b_n\} \to \infty$

( ) N. A.

16. Si $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x\, dx}{x} = \frac{\pi}{2}$, entonces $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x\, \cos x\, dx}{x}$ tiene el valor:

( ) $\frac{\pi^2}{4}$ ( ) $\frac{\pi}{4}$ ( ) $\frac{\pi}{2}$ ( ) N. A.

17. Sea S_n la sucesión de sumas parciales de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. En cada problema siguiente, identificar que proposiciones son verdaderas (puede haber más una proposición verdadera en cada problema)

a) Suponga que $a_n \to 0$ a medida que $n \to \infty$.
   1) La serie converge, pero se necesita más información para determinar su suma
   2) La serie converge, y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0$
   3) La serie diverge
   4) No hay suficiente información para saber si la serie converge o diverge.

b) Suponga que $a_n \to 6$ a medida que $n \to \infty$.
   1) La serie converge, pero se necesita más información para determinar su suma
   2) La serie converge y su suma es 6
   3) La serie diverge
   4) No hay información para decidir sobre la convergencia o divergencia de la serie

c) Suponga que $S_n \to 3$ a medida que $n \to \infty$.
   1) La serie diverge
   2) $a_n \to 3$ a medida que $n \to \infty$
   3) $a_n \to 0$ a medida que $n \to \infty$
   4) La serie converge
   5) La suma de la serie es 3
   6) Se necesita más información para deducir qué sucede con a_n a medida que $n \to \infty$

18. Determinar si cada una de las siguientes proposiciones es verdadera o falsa.

a) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^4 + x^2}$ es convergente

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^2} = arctg\, x \Big|_{-\infty}^{\infty} = \pi$

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x}} = 2\sqrt{1 - x}\Big|_0^1 = 2$

d) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^1 = -2$

e) $\displaystyle\int_0^3 (x - 2)^{-1}\, dx = \ln|x - 2|\Big|_0^3 = -\ln 2$

6.5. Pruebas en formato de pruebas

Prueba # 1 - Cálculo I

Primera Escena: Riemann

Recientemente ha sido encontrada la tumba del Faraón **supercrazy**. En ella se encontraron algunos papiros e imágenes en las paredes que dan a entender que en su tránsito hacia el más allá debía resolver algunos problemas matemáticos, lo que era su pasatiempo favorito.

Tu tarea es resolver estos problemas

1. En uno de los muros de la tumba se muestra la figura de un conjunto acotado por las rectas $y = x^2 + 2x$, $x = -1$, $x = 1$. **Determina** el área acotada de dicho conjunto usando el límite de una **suma de Riemann**.

2. En otra escena aparece el Faraón **supercrazy** repartiendo tierras a dos de sus súdbitos, $f(t)$ y $g(t)$. Les dice que conociendo

$$\int_{-2}^{4} [\,5f(t) + 2g(t)\,]\, dt = 7, \qquad \int_{-2}^{4} [\,3f(t) + g(t)\,]\, dt = 4$$

descubran cuánto le corresponde a cada uno (en hectáreas). ¡Vámos esto es tarea fácil para tí!

3. En uno de los papiros se ve al Faraón consultando con su oráculo cúantos años va a gobernar. La respuesta que aparece es. *"el valor del siguiente límite*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^6 + n^3}} + \frac{4}{\sqrt{n^6 + 8n^3}} + \frac{9}{\sqrt{n^6 + 27n^3}} + \cdots + \frac{n^2}{\sqrt{n^6 + n^6}} \right)$$

multiplicado por $60(1 + \sqrt{2})''$. **Hallar** los años que el oráculo pronostica.

Segunda Escena: Integrales

1. Calcular las siguientes integrales:

   a) $\displaystyle\int cos^{n+3}t \;\; tg^3 t\, dt$

   b) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{(x+1)(x-1)^2}}$

   c) $\displaystyle\int \frac{dt}{t^{1/3} + t^{1/2}}$

   d) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x^2+1)(x^2-3x+2)}$

   e) $\displaystyle\int \frac{sen^2 x \;\, dx}{1 + cos^2 x}$

   f) $\displaystyle\int senx \;\, \ln(2 + cosx)\, dx$

2. Hallar $f(\pi)$ si $\displaystyle\int_0^{\pi} [\, f(x) + f''(x)\,]\, senx\, dx = 0$

Puntaje: $(8) + (8) + (8) + (7 \times 4 = 28) + 6 = 60$ puntos

Prueba # 2 - Cálculo I

Favor responder en forma clara y precisa en las hojas adjuntas.

1. Considerar la región R que acotan las curvas $y = x^3$ e $y = x$.
   a) Graficar la región R
   b) **Escribir** las integrales que proporcionan el volumen: $V_{y=2}$, $V_{x=-4}$ tanto por **disco** como por **corteza**.
   c) **Calcular** el volumen generado por R al girar en torno de la recta $y = x$
2. Si una región R tiene área A y momento de Inercia I_y respecto del eje y, se dice que el **radio de giro** r con respecto al eje y es
   $$r = \sqrt{\frac{I_y}{A}}, \qquad I_y = \int_R x^2\, dA$$
   Hallar el radio de giro de la región acotada por $y = 4 - x$ y los ejes coordenados.
3. Cuando el segmento de recta $y = x - 2$, entre $x = 1$ y $x = 3$ gira alrededor del eje x genera un tronco de cono. **Hallar** el área lateral de este tronco de cono.

Puntaje: $((2) + (12) + (12)) + (2 + 4 + 2 + 2) + (2 + 8) = 46$

Prueba # 2 — Cálculo I

El trabajo es individual. Cualquier persona que sea sorprendida traficando información sobre esta prueba será considerada “non grata” y desde ya cuenta con la indiferencia total del profe.

A “supercrazy” de repente le baja la nostalgia, y recuerda sus años universitarios, y en particular, sus clases de **Cálculo**. Como se cree el más capo de la historia, me dijo, en su última visita, si mis alumnos serían capaces de dar respuesta a dos problemas que a él le plantearon cuando alumno. Estos son:

1. Los puntos $(1,1)$, $(5,1)$ y $(3,8)$ forman un lindo y hermoso triángulo. Si R es la región acotada por este triángulo, y L es su frontera (perímetro, para la galería):
   a) Calcula, por integración, el área del triángulo
   b) Halla el momento de R respecto del eje x
   c) Halla el momento de R respecto del eje y
   d) Calcula el centro de masa de R
   e) Determina, por integración, la longitud de la frontera L

f) Determina el centro de masa de L

g) Encuentra el volumen generado por R al girar en torno del eje x

h) Encuentra el volumen generado por R al girar en torno del eje y

i) Halla el área que genera la frontera L al girar en torno de la recta $x + y = 0$

2. Considera la región $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ 0 \leq x \leq 4, \quad y = x(x-2)(x-4)\}$

   a) Dibujar la región

   b) Hallar el centro de masa

   c) **Escribir** la integral que da el volumen de revolución cuando gira la región R en torno del eje y

   d) **Escribir** la integral que da el volumen de revolución cuando gira la región R en torno de la recta $x = 4$

   e) **Escribir** la integral que da el volumen de revolución cuando gira la región R en torno de la recta $y = 6$

   f) **Escribir** la integral que da el volumen de revolución cuando gira la región R en torno de la recta $x = -2$

   g) **Escribir** la integral que da el volumen de revolución cuando gira la región R en torno de la recta $y = -6$

   h) *Calcular* la integral que da el volumen de revolución cuando gira la región R en torno de la recta $x + y + 1 = 0$

¡Vamos, bájale el ego al cretino de "supercrazy" y sácate un 7!

Puntaje (2+3+3+2+3+3+3+3+3) + (3+2+3+3+3+3+3+3) = 48 puntos

Prueba # 4 - Cálculo I

El "viejo pascuero" trae de regalo la serie $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{0}^{\infty} x^n, \ |x| < 1$. ¡no preguntes por qué!, sólo da las gracias

1. De seguro te "tuteas" con las series telescópicas. Siendo así, calcula la suma de las series:

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2\,(n+1)^2}$ *b*) $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n^2-9}$

2. Estudiar la convergencia de las series

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ *b*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{2^n}}$

3. Hallar intervalo de convergencia de las series:

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n^2 - n}$ *b*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{3n}}{n!}$

4. Determinar convergencia o divergencia de las integrales impropias:

   a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x\, dx}{\sqrt{1-x}}$ *b*) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x} \ln x\, dx$

5. Demostrar que
$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t\, dt}{1 - x \operatorname{sen}^2 t} = \sum_0^{\infty} \frac{x^n}{2n+1} \qquad |x| < 1$$

Puntaje: (6+6)+(6+6)+(6+6)+(6+6)+(12) = 60 puntos

Prueba # 3 - Cálculo I

Responder en las hojas que se adjuntan. No olvide que ¡*campeón hay uno sólo*!

1. **Calcular** usando beta o gamma, o como quiera, las siguientes integrales:

   a) $\displaystyle\int_0^1 x^4 \sqrt{1-x^2}\, dx$ *c*) $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2 - 3}}$

   b) $\displaystyle\int_0^1 x^2 (\ln x)^n\, dx$ *d*) $\displaystyle\int_0^1 (x^2 - x^3)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, dx$

2. Decidir convergencia o divergencia de las siguientes integrales:

   a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{e^x - e^{-x}}$ *b*) $\displaystyle\int_3^{\infty} \frac{dx}{x^3 + x^2 - 2x}$ *c*) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - \sqrt[4]{x}}}$

3. Probar que $\displaystyle\int_0^2 x \sqrt[3]{8 - x^3}\, dx = \frac{16\pi}{9\sqrt{3}}$

4. Probar que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{tg\, x}\, dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

5. La función beta es $\beta(x,y) = \displaystyle\int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1}\, dt, \quad p >, \; q > 0$

   a) Integrando por partes demuestra que
$$\beta(p,q) = \frac{q-1}{p}\beta(p+1, q-1) = \frac{p-1}{q}\beta(p-1, q+1), \quad p > 1,\; q > 1$$

b) Deducir que

$$\beta(m,n) = \frac{(m-1)!\,(n-1)!}{(m+n-1)!}, \qquad \forall\, m,n \in \mathbb{N},\ m>1,\ n>1$$

`Puntaje:` $(4\times 5)+(4\times 3)+(7)+(7)+(8)+(6)=60$ `puntos`

Prueba # 3 - Cálculo I

Favor responder en las hojas que se adjuntan. Una redacción clara y precisa facilita la corrección. Que tenga suerte.

1. Considerar la región que acotan las curvas $x^2+y^2=16$, $y=x\sqrt{15}$, $y^2=6x$. **Escribir** La integral que proporcione:

   a) el volumen (método del disco) al girar la región en torno del eje x.

   b) el volumen (método del corteza) al girar la región en torno del eje x.

2. Considerar la región que acotan las curvas $x^2-4x-y+5=0$, $y^2=5x$. Calcular el volumen al girar la región en torno de la recta $x+y=1$

Puntaje: $30\times 2=60$ puntos

Prueba # 4 - Cálculo I

Favor responder en las hojas que se adjuntan. Una redacción clara facilita la corrección.

1. Determinar el caracter de cada serie (converge o diverge)

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{(n+1)\sqrt{n+3}}$

   b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{7n+4}\right)^{4n-2}$

   c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}-\frac{1}{2^n}$

   d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}$

2. Hallar intervalo de convergencia de las series:

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}(x+2)^n$

   b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3n+1}x^n$

3. Hallar la suma de cada serie

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{10^k}$ *b*) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n+2}$

4. Para valores de $x > a$ estudiar convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(x-a)(x-a+1)(x-a+2)\cdots(x-a+n)}, \qquad a \geq 0$$

5. Sea $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serie de términos positivos y convergente. Demostrar que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ es convergente

6. Usar los cuatro primeros términos del desarrollo de la función $f(x) = cosx$ en serie de Taylor en torno de $x = 0$ para hallar un valor aproximado de

$$\int_0^{1/2} \frac{1-\cos x}{x^2}\, dx$$

Puntaje: $(5 \times 4) + (4 \times 2) + (4 \times 2) + (8) + (6) + (10) = 60$ puntos

Prueba # 1 - Cálculo Integral

1. Considerar el recinto del plano que acotan, el eje x, las curvas $y = (x+6)^2$ y las rectas $x = -5$, $x = 3$.

   a) Dibujar el recinto de integración.

   b) Hallar el área usando sumas superiores y dividiendo el intervalo de integración en 6 partes iguales

   c) Hallar el área utilizando el límite de una suma de Riemann.

2. Hallar la derivada de $F(x) = \displaystyle\int_{x^3}^{x^2} (1+t^2)^{-3}\, dt$

3. Probar que $\displaystyle\int_0^1 x^m\,(1-x)^n\, dx = \int_0^1 x^n\,(1-x)^m\, dx$

Puntaje: $(30) + (15) + (15) = 60$ puntos

Prueba # 3 - Cálculo I

Favor responder en las hojas que se adjuntan. Una redacción clara y precisa facilita la corrección.

Calcular las siguientes integrales. En caso de fracciones parciales, las constantes se pueden dejar sin calcular.

1. $\displaystyle\int \frac{3x\,dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$
2. $\displaystyle\int \frac{4\,dt}{1-\cos t}$
3. $\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{t}\,(1+\sqrt{t})^3}$
4. $\displaystyle\int \frac{(x^2-x)\,dx}{x+1}$
5. $\displaystyle\int x\,\sqrt{3x+2}\,dx$
6. $\displaystyle\int \frac{dx}{9-16x^2}$
7. $\displaystyle\int x^2\,e^x\,dx$
8. $\displaystyle\int \frac{(t+9)dt}{t^3+9t}$
9. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} y\,\cos y\,dy}{9+\cos^4 y}$

10 $\displaystyle\int x^2\,\operatorname{sen}(x^3+5)\,\cos^9(x^3+5)\,dx$

Puntaje: $10\times 6 = 60$ puntos

Examen Cálculo Integral

1. Hallar el área de la región acotada por $y = x+6$, $y = x^3$, $x+2y = 0$
2. Hallar el volumen del sólido que se genera al hacer girar, en torno del eje y, la región acotada por $y = 4x$ y la curva $y = 4x^2$
3. Determinar intervalo de convergencia de la serie
$$\frac{(x+2)^2\ln 2}{2\cdot 9}+\frac{(x+2)^3\ln 3}{3\cdot 27}+\frac{(x+2)^4\ln 4}{4\cdot 81}+\cdots$$
4. Determinar la suma de la serie $\displaystyle\sum_2^\infty \frac{5n+4}{n(n-1)(n+2)}$
5. Hallar el desarrollo en serie de potencia de $f(x) = \dfrac{x^2-3x+1}{x^2-5x+6}$

Prueba Xica # 4 - Cálculo II

1. Calcular, usando beta o gamma, las siguientes integrales impropias:

   a) $\displaystyle\int_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^{3/2} dx$

   b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^5\,dx}{\sqrt[4]{1-x^4}}$

   c) $\displaystyle\int_0^\pi \cos^4 t\,dt$

   d) $\displaystyle\int_0^8 \frac{\sqrt[4]{2-\sqrt[3]{x}}\,dx}{\sqrt{x}}$

Puntaje: $15\times 4 = 60$ puntos

Universidad de la Frontera

Facultad de Ingeniería y Ciencias

Departamento de Matemática y Estadística

Prueba # 1A - Cálculo en una Variable

NO se aceptan preguntas, los enunciados de los problemas son claros y precisos. Recuerde que la prueba es individual y está prohibido y penado traficar información.

1. Hallar las siguientes integrales:

   a) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^3 x \sec^3 x\, dx$ *b*) $\displaystyle\int \sqrt{3-2x-x^2}\, dx$ *c*) $\displaystyle\int \frac{dx}{5+4\cos\, x}\, dx$ *d*) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x(1+x)}\, dx$

2. Sea $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\, dt$, definida para $x > 0$. Calcular $f'(x)$ e indicar los intervalos de monotonía de f

3. Evaluar la integral definida $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\operatorname{sen} x}}{\sqrt{\operatorname{sen} x} + \sqrt{\cos x}}$. (sugerencia: Hacer $y = \frac{\pi}{2} - x$ y trigonometría)

Puntaje: (7+7+7+7) + (6+8) + (18) = 60 puntos

Universidad de la Frontera

Facultad de Ingeniería y Ciencias

Departamento de Matemática y Estadística

Prueba # 2A - Cálculo en una Variable

NO SE ACEPTAN PREGUNTAS, los enunciados de los problemas son claros y precisos. Recuerde que la prueba es individual y está prohibido y penado traficar información.

1. Sea R la región del plano limitada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = mx$ $(m > 0)$. Encontrar el valor de m tal que los volúmenes generados por la rotación de R en torno al eje x y en torno al eje y sean iguales.

2. Determinar convergencia o divergencia de la integrales impropias:

   a) $\displaystyle\int_2^5 \frac{3x^2\, dx}{\sqrt[3]{5-x}\cdot\sqrt{x-2}}$ *b*) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{3x+4}}{\sqrt[3]{4+x^4+x^6}}$

3. Calcular el valor de las siguientes integrales impropias:

   a) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ *b*) $\displaystyle\int_0^{2} \frac{dx}{\sqrt[5]{8-x^3}}$

Puntaje: (4+6+6+6+4) + (7+7) + (10+10) = 60 puntos

Universidad de la Frontera

Facultad de Ingeniería y Ciencias

Departamento de Matemática y Estadística

Prueba # 3A - Cálculo en una Variable

NO SE ACEPTAN PREGUNTAS, los enunciados de los problemas son claros y precisos. Recuerde que la prueba es individual y está prohibido y penado traficar información.

1. Sea R la región del plano limitada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = mx$ ($m > 0$). Encontrar el valor de m tal que los volúmenes generados por la rotación de R en torno al eje x y en torno al eje y sean iguales.

2. Demostrar que $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$, $\forall x > 0$

3. Determinar convergencia o divergencia de:

   a) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{sen\,x\,cos\,x}{x^3}\,dx$ *b*) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x}{\sqrt{x^4+1}}\,dx$ *c*) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\,dx$

4. Calcular el valor de las siguientes integrales impropias:

   a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{tg\,x}\,dx$ *b*) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^4}$

Puntaje: (10) + (10) + (7+7+6) + (10+10) = 60 puntos

Universidad de la Frontera

Facultad de Ingeniería y Ciencias

Departamento de Matemática y Estadística

Taller # 6 - Cálculo en una Variable

NO SE ACEPTAN PREGUNTAS, los enunciados de los problemas son lo suficientemente claros y precisos.

1. Calcular la suma de las siguientes series:

a) $\sum_{n=1} \frac{1+2^n}{3^n}$ b) $\sum_{n=2} \frac{3}{n(n+2)}$

2. Hallar intervalo de convergencia de las series:

a) $\sum_{n=1} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ b) $\sum_{n=1} \frac{n(x-4)^n}{n^3+1}$

3. Representar en serie de Taylor:

a) $f(x) = \frac{1}{8-x^3}$

b) $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ y usar esta representación para hallar la de $g(x) = \frac{1}{(1+x)^3}$

Puntaje: (20) + (20) + (20) = 60 puntos

Universidad de la Frontera

Facultad de Ingeniería y Ciencias

Departamento de Matemática y Estadística

EXAMEN - Cálculo de una Variable

NO SE ACEPTAN PREGUNTAS, los enunciados de los problemas son claros y precisos. Recuerde que la prueba es individual y está prohibido y penado traficar información. Este examen tiene un 40 % de ponderación, y su nota de presentación pondera un 60 %

1. Hallar las siguientes integrales:

a) $\int \frac{\sqrt{4x^2-9}}{x}\,dx$ b) $\int sec^6(2x)\,\sqrt{tg(2x)}\,dx$

2. Sea R la región del primer cuadrante del plano limitada por las curvas $y = x^2$, $y = \frac{x^2}{2}$, $y = 2x$. Hallar el centro de masa de la región.

3. Calcular el valor de la integral impropia $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x-x^2-x^3}}$

4. Estudia la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}$

5. Determinar intervalo de convergencia de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k(x-3)^k}{k\,9^k}$

Puntaje: (10+10) + (10) + (10) + (10) + (10) = 60 puntos

Índice alfabético