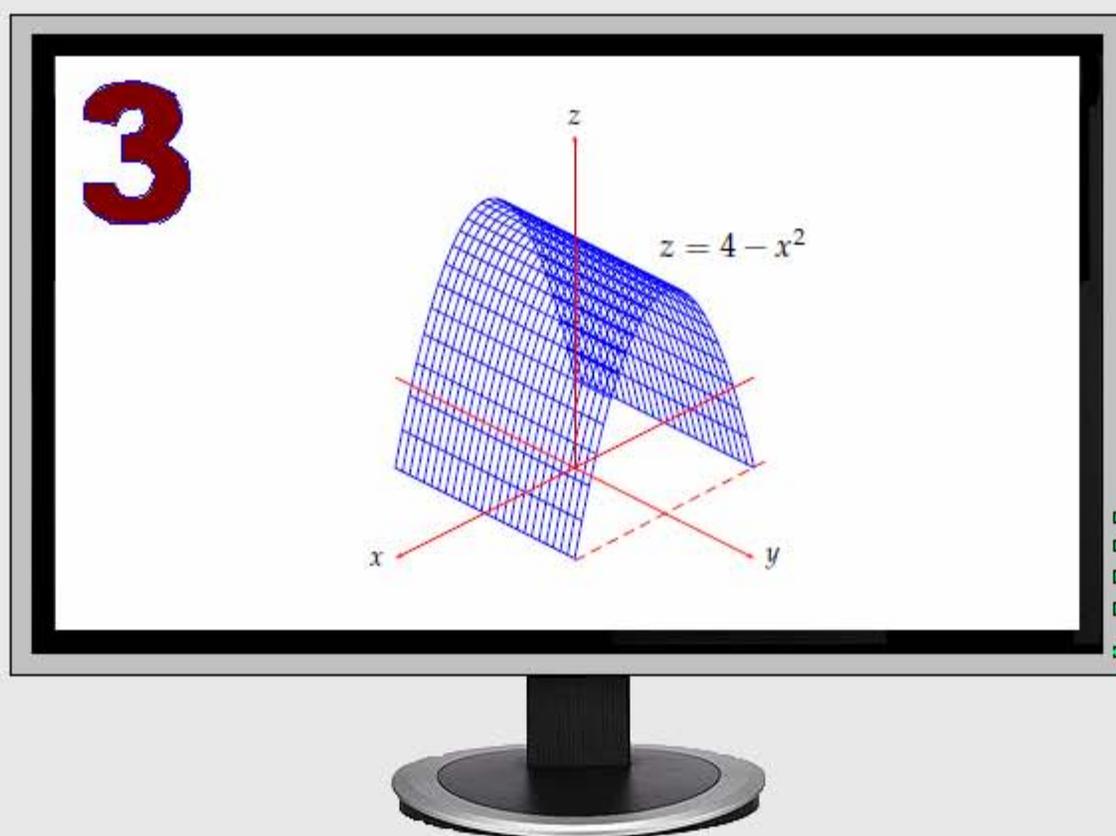


MATEMÁTICA

CALCULO DIFERENCIAL EN VARIAS VARIABLES



PEDRO H. VALENZUELA T.



2010[★]
UFRO al Bicentenario

MATEMÁTICA

VOLUMEN 3

PEDRO H. VALENZUELA T.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y
ESTADÍSTICA

2009

INTRODUCCION

Este es el tercer tomo de la colección **MATEMATICA** que se ha escrito pensando en tí. Si has tenido la oportunidad de estudiar con “Algebra+Cálculo” o su actualización a **Fundamentos de matemática universitaria** y el **Matemática** (Volumen II), y piensas que fueron un aporte a la hora de ponerse las pilas, entonces tú eres uno de los “elegidos” para seguir en la buena onda del Cálculo. Espero que estas notas puedan de nuevo serte útiles y que te ayuden al logro del objetivo mínimo que es **aprobar** la asignatura. Hay libros y libros, este no pretende ningún Nobel y de seguro que desde el punto de vista del rigor matemático los hay mejores, pero la gracia de éste es que está hecho a *tu medida*, es para este curso, no le sobra ni le falta materia, es de bajo costo, trae problemas resueltos y propuestos de pruebas que han sido tomadas a alumnos como tú, en resumen, es para mortales.

Este es tu tercer semestre en la Universidad, es obvio que ya eres adulto joven y con ganas de asumir tus responsabilidades estudiantiles, pero no está demás recordarte que sólo de tí depende que aprendas, haz un buen manejo de tu horario, aprovecha al máximo las clases de cátedra, de ayudantía y de clínicas matemáticas, pregunta las dudas, no te quedes con ellas, piensa en positivo, el profesor está para ayudarte, haz uso del horario de atención de alumnos que cada profesor tiene asignado, es tu derecho y un deber del profesor. Las clases de ejercicios son vitales, debes poner algo de tu parte para que resulten entretenidas. **Insiste** en ver tus pruebas es uno de tus grandes derechos. Aprovecha al máximo los espacios estudiantiles tales como Biblioteca y Computeca.

Este texto consta de 4 capítulos. En el primero se estudian los elementos básicos del álgebra vectorial del plano y espacio; esto es, vectores, su comportamiento algebraico y geométrico, finalizando con ecuaciones de rectas, planos y superficies cuadráticas de uso frecuente. En el segundo se entra de lleno en el estudio del cálculo vectorial considerando como herramienta principal su lenguaje; la topología, en todo lo concerniente a límite, continuidad y diferenciabilidad. Como aplicaciones se muestran ejemplos en el movimiento de proyectiles, cálculo de curvatura, plano osculador, plano normal y plano rectificante. En el tercero se trabaja sobre campos escalares, los conceptos de límite, continuidad y diferenciabilidad, considerando derivadas parciales, direccionales y gradiente de un campo escalar, luego, se sigue con la diferencial y sus aplicaciones a aproximaciones y teoría de máximos y mínimos. El cuarto capítulo está dedica a la integración múltiple y a sus diversas aplicaciones, empezando por el área de regiones planas, el volumen de superficies, masas, centros de masa. Esta nueva versión trae, en cada capítulo, una sección de problemas resueltos, otra de propuestos y una tercera de problemas adicionales. Los resueltos sirven para complementar lo estudiado a través del curso. Los propuestos para profundizar los contenidos y los adicionales por si aún surgen dudas.

Se debe precisar que este es un libro de cálculo, por tal razón, la parte teórica se ha tratado de

simplificar al máximo, con el fin de no recargarla exageradamente con demostraciones de teoremas o propiedades más propias del análisis matemático, no obstante, se ha pretendido ir avanzando en teoría hasta llegar al punto en que, justificada la propiedad o teorema, entre a operar la maquinaria del cálculo. Aquellos estudiantes que no puedan asistir a clases podrán encontrar en este texto, y particularmente, en los ejercicios resueltos, propuestos y adicionales, un aliado valioso a la hora de preparar un certámen de las materias aquí tratadas.

Agradezco a todos los que han ido enriqueciendo estas notas; a mis alumnos de ingeniería con los cuales he compartido experiencias y enseñanzas siempre novedosas, y de quienes guardo gratos recuerdos, en particular a quienes se dieron el tiempo de leer los originales, plantear sus dudas, agregar soluciones a algunos problemas (Armin Luer, Rodrigo Tranamil y Pablo Colinas) y a todos mis colegas del Departamento que toman este texto como parte de su bibliografía y permiten su divulgación y mejoramiento.

Como errar es propio del ser humano, y tropezar con la misma piedra se ha hecho habitual, es posible que al traspasar la información al computador se haya deslizado más de un error, por lo cual pido anticipadamente las disculpas del caso. Más aún, a medida que avances en los contenidos de este libro o bien al final del curso, me interesa que me des a conocer tu impresión de como crees que se puede mejorar para futuras generaciones. Mi correo electrónico es **phvalen@ufro.cl** o me puedes encontrar en la página del *dme.ufro.cl*.

Pedro H Valenzuela
peache

INDICE DE CONTENIDOS

1.1.	Introducción	1
1.2.	Sistemas de referencia	1
1.2.1.	Sistema cartesiano	1
1.3.	Distancia entre dos puntos	2
1.4.	Desplazamientos en el espacio	3
1.5.	El vector	4
1.5.1.	Álgebra de Vectores	6
1.5.2.	Magnitud, dirección y sentido	8
1.5.3.	Producto Escalar	10
1.5.4.	Producto Vectorial	12
1.5.5.	Triple Producto Escalar	14
1.5.6.	Triple Producto Vectorial	15
1.5.7.	Proyección Vectorial	16
1.6.	La Recta en el espacio	18
1.6.1.	Posiciones Relativas de dos rectas	20
1.7.	El Plano	23
1.7.1.	Distancia punto - plano	27
1.8.	Distancia punto - recta	30
1.9.	Planos Proyectores de la Recta	32
1.10.	Posiciones Relativas de Rectas y Planos	32
1.11.	Superficies	34
1.11.1.	Planos	34
1.11.2.	Cilindros	34
1.11.3.	Esferas	36
1.11.4.	Elipsoides	37
1.11.5.	Conos	37
1.11.6.	Paraboloide elíptico	38
1.11.7.	Paraboloide hiperbólico	39
1.11.8.	Hiperboloide de una hoja	40
1.11.9.	Hiperboloide de dos hojas	41
1.12.	Problemas resueltos	44
1.13.	Problemas propuestos	56
1.14.	Problemas adicionales	60
2.1.	Introducción	71
2.2.	Espacios Métricos	71
2.3.	Normas en \mathbb{R}^n	72

2.3.1.	Norma euclídea	72
2.3.2.	Norma del máximo	73
2.3.3.	Norma p	73
2.4.	Topología de \mathbb{R}^n	73
2.4.1.	Conjuntos Abiertos - Cerrados	79
2.4.2.	Conjuntos Compactos - Conexos	82
2.5.	Funciones vectoriales	84
2.5.1.	Funciones Coordenadas	85
2.6.	Funciones de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$	85
2.7.	Límites	86
2.7.1.	Algebra de límites	88
2.8.	Continuidad	88
2.9.	La derivada	88
2.9.1.	Interpretación de la derivada	89
2.10.	Funciones diferenciables	90
2.11.	La Diferencial	92
2.12.	Integración	93
2.13.	Longitud de un arco de curva	93
2.14.	Movimiento de una partícula	95
2.15.	Vector tangente y normal unitario	100
2.16.	Componentes Tangencial y Normal	102
2.17.	Aceleración y Curvatura	104
2.17.1.	Fórmula de la curvatura	104
2.18.	Planos osculador, normal y rectificante	110
2.18.1.	Cálculo de la Torsión	112
2.18.2.	Fórmulas de Frenet	113
2.19.	Problemas resueltos	117
2.20.	Problemas propuestos	129
2.21.	Problemas adicionales	132
3.1.	Introducción	137
3.2.	Campos escalares	138
3.2.1.	Dominio - Rango - Gráfica	138
3.3.	Superficies de nivel	139
3.3.1.	Algebra de campos escalares	141
3.3.2.	Composición de campos escalares	141
3.4.	Cálculo en campos escalares	141
3.5.	Límite en un campo escalar	144
3.5.1.	Cálculo del límite	145

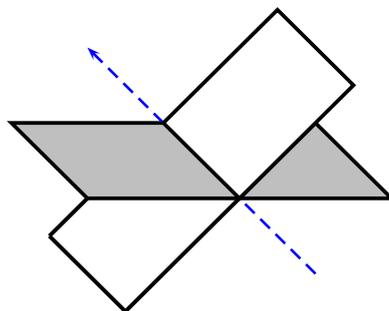
3.5.2.	Manipulación algebraica	147
3.5.3.	Acotada por nula	147
3.5.4.	Uso de infinitésimos equivalentes	147
3.5.5.	Paso a coordenadas polares	148
3.5.6.	Límites iterados	153
3.6.	Continuidad en un campo escalar	154
3.7.	Derivada direccional	155
3.7.1.	Derivada direccional no implica continuidad	157
3.8.	Derivadas parciales	158
3.8.1.	Interpretación geométrica	159
3.9.	Derivadas parciales de orden superior	162
3.10.	Diferenciación en un campo escalar	165
3.10.1.	El Gradiente	172
3.11.	Incremento y diferencial total	175
3.11.1.	Incremento en dos variables	176
3.12.	Regla de la cadena	179
3.13.	Derivación de funciones definidas implícitamente	184
3.13.1.	Sistema de funciones implícitas	187
3.14.	Aproximación local de Taylor	189
3.14.1.	En funciones de una variables	189
3.14.2.	En funciones de varias variable	190
3.15.	Máximos y Mínimos	192
3.15.1.	Criterio de la segunda derivada	194
3.15.2.	Hessiana en dos dimensiones	195
3.15.3.	Hessiana en tres dimensiones	196
3.16.	Multiplicadores de Lagrange	199
3.17.	Extremos Absolutos	203
3.18.	Aplicaciones en Economía	205
3.19.	Problemas resueltos	212
3.20.	Problemas propuestos	231
3.21.	Problemas adicionales	236
4.1.	Introducción	247
4.2.	Intervalos	247
4.3.	Contenido	248
4.4.	Volumen bajo una superficie	248
4.5.	Sumas superior e inferior	250
4.5.1.	Interpretación geométrica	250
4.6.	Integral de Riemann	252

4.7. Propiedades de la integral	255
4.8. Integral sobre conjuntos acotados	256
4.9. Contenido de E	257
4.10. Suma de Riemann	259
4.11. Integrales dobles iteradas	260
4.12. Recintos de Integración	261
4.13. Transformaciones	263
4.14. Transformación Polar	266
4.15. Cambio de variable	268
4.16. Aplicaciones de la integral doble	270
4.16.1. Area	271
4.16.2. Masa - Centro de masa	271
4.16.3. Momentos	272
4.16.4. Momentos respecto de los ejes coordenados	273
4.16.5. Volumen	274
4.16.6. Volumen de revolución	275
4.17. Integrales triples Iteradas	277
4.17.1. Recintos de integración	278
4.18. Transformación de coordenadas	279
4.18.1. Coordenadas cilíndricas	279
4.18.2. Coordenadas esféricas	279
4.19. Aplicaciones	281
4.19.1. Volumen	282
4.19.2. Masa - Momento - Centro de masa	282
4.20. Problemas resueltos	285
4.21. Problemas propuestos	319
4.22. Problemas adicionales	330

Con sabiduría se edificará la casa
Y con prudencia se afirmará
Proverbios 24:3

CAPÍTULO

ALGEBRA 1 VECTORIAL



planos que se intersectan

1.1. Introducción

En el Cálculo de una variable se comienza por establecer que el conjunto de los números reales, cuerpo ordenado y completo, es la base de su estudio y que la topología es el lenguaje que sustenta su accionar. Se sigue con el estudio de las funciones reales, cuyo gráfico podemos representar en el denominado plano cartesiano, para posteriormente introducir el concepto de límite que es el motor que genera las nociones de continuidad, derivada e integración. El objetivo es ahora generalizar estas ideas a funciones definidas sobre subconjuntos de \mathbb{R}^n con $n > 1$.

1.2. Sistemas de referencia

Para especificar la posición de un punto en el espacio, se utilizan sistemas de referencia. A este efecto, podemos citar los sistemas más conocidos: cartesiano, esférico y cilíndrico. Iniciaremos nuestro estudio considerando el primero de estos sistemas de referencia y posteriormente definiremos los dos restantes.

1.2.1. Sistema cartesiano

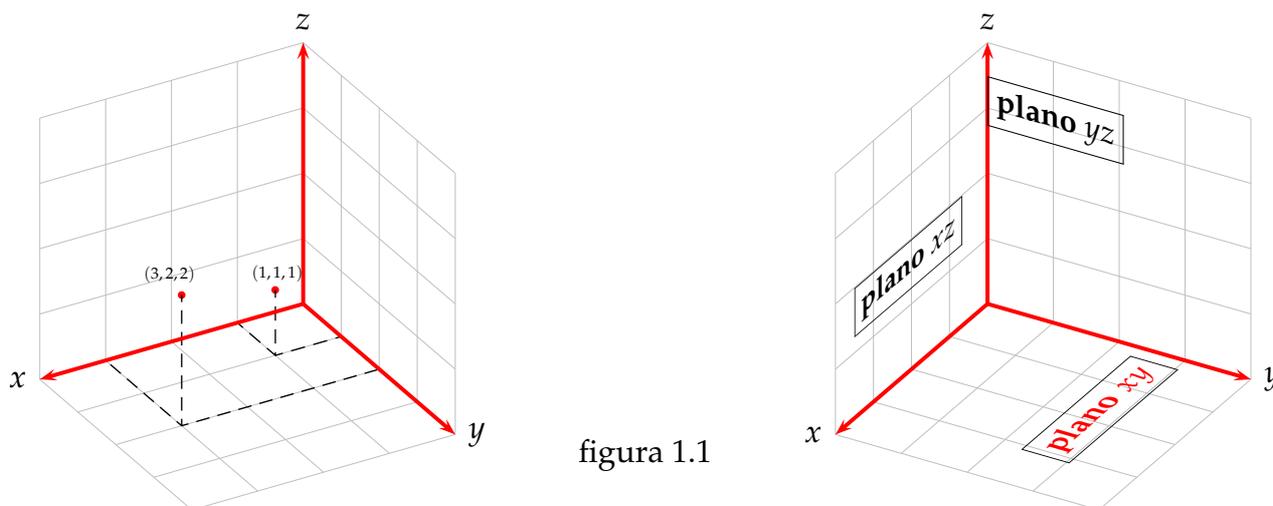


figura 1.1

Al extender el sistema cartesiano de dos a tres dimensiones se añade una tercera coordenada z , de tal modo que si (x, y) denota el punto bidimensional, entonces el punto (x, y, z) en el espacio se consigue situándose en (x, y) y elevándose una distancia z sobre el punto (x, y) . Esta es la puerta para entrar al estudio de la geometría analítica del espacio sobre un sistema de coordenadas cartesianas. Un sistema de coordenadas en el plano está conformado por la asociación de puntos del plano con pares ordenados de números reales referidos a dos rectas perpendiculares entre sí. En el espacio, un sistema de coordenadas está conformado por la asociación de puntos del espacio con ternas ordenadas de números reales referidas a tres rectas ortogonales entre sí. Las rectas en cuestión se denominan **ejes coordenados**, y su punto de intersección **origen** del sistema. La figura 1.1 muestra

1.3 Distancia entre dos puntos

la ubicación de un par de puntos en el espacio, los tres ejes coordenados y el nombre que recibe cada uno de los planos.

Cuando la idea de terna ordenada se generaliza a espacios de dimensiones superiores se habla de n -uplas ordenadas. Más precisamente se tiene:

Definición 1.2.1. Una n -upla de números reales es una expresión de la forma $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, conocida también con el nombre de **punto** o **vector**. Los números reales x_i son llamadas **componentes** o **coordenadas** del vector.

Al conjunto de **todas** las n -uplas de números reales (x_1, x_2, \dots, x_n) se le denomina n -espacio y se denota \mathbb{R}^n .

Una terna que indica un punto en el espacio se escribe $P(x, y, z)$, en donde x, y, z son las coordenadas del punto, y representan las distancias del punto P a los planos coordenados yz, xz y xy , respectivamente. Se establece así, una correspondencia biunívoca entre un punto P del espacio con la terna ordenada (x, y, z) . Con ello se obtiene un sistema de coordenadas rectangulares en el espacio. Los ejes coordenados, eje x , eje y , eje z , determinan tres planos, llamados **planos coordenados** xy, xz, yz . Estos planos coordenados dividen al espacio en ocho partes, llamadas **octantes**. El **primer octante** corresponde a la parte en la cual las tres coordenadas son positivas y el octavo se encuentra bajo el primero. Por otra parte, hemos dicho que el punto (x, y, z) recibe en nombre de punto o vector, la razón de esto último es por que podemos asociar a cualquier punto del espacio tridimensional con el vector de punto inicial $(0, 0, 0)$ y punto terminal (x, y, z) .

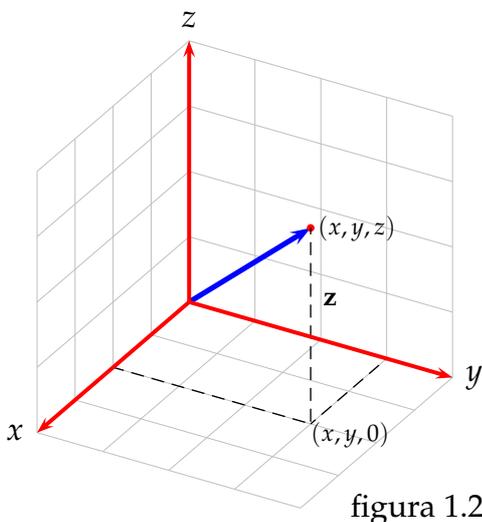


figura 1.2

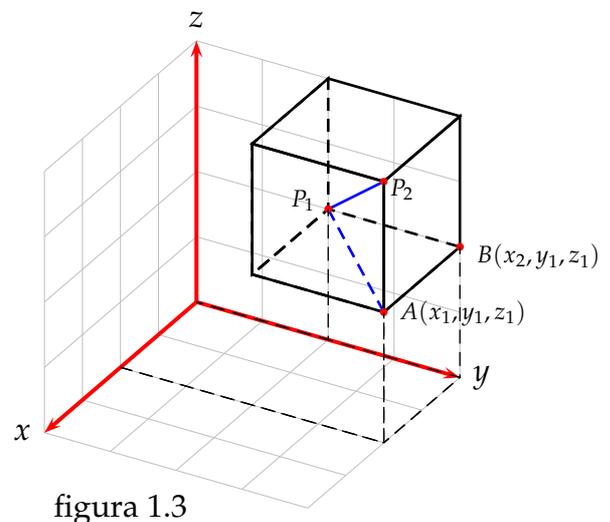


figura 1.3

1.3. Distancia entre dos puntos

Sean P_1, P_2 puntos cualquiera del espacio tridimensional. Por cada uno de estos puntos hacemos pasar tres planos, paralelos a los planos coordenados, los que conforman un octaedro tal como lo muestra la figura 1.3. Los puntos P_1 y P_2 resultan ser vértices opuestos. Si se consideran los puntos

$A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_1, z_1)$, entonces $P_1(x_1, y_2, z_1)$ y $P_2(x_1, y_1, z_2)$. En el triángulo P_1AP_2 , recto en A , la distancia d que separa P_1 de P_2 , según Pitágoras, es

$$d^2(P_1, P_2) = d^2 = \overline{P_1A}^2 + \overline{AP_2}^2$$

En el triángulo P_1BA , recto en B , se satisface $\overline{P_1A}^2 = \overline{P_1B}^2 + \overline{AB}^2$. Reemplazando esto en d^2 obtenemos

$$d^2 = \overline{P_1B}^2 + \overline{AB}^2 + \overline{AP_2}^2$$

En términos de coordenadas, esto equivale a $d^2 = (y_1 - y_2)^2 + (x_1 - x_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$. De aquí que

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

Es claro entonces, que la distancia entre puntos del espacio es una extensión de la distancia entre puntos del plano.

1.4. Desplazamientos en el espacio

El concepto que dio lugar a los vectores, es el de desplazamiento. Consideremos un sistema de referencia respecto al cual esté definida la posición de puntos.

Definición 1.4.1.

- Se dice que un punto se mueve respecto a un sistema de referencia, si sus coordenadas varían con el tiempo.
- Un desplazamiento se define como cualquier cambio de posición de un punto en el espacio

Este concepto básico de desplazamiento es, en principio, más elemental que el concepto de movimiento de un punto, puesto que no tiene relación con tiempos. Si un punto pasa de una posición A a otra posición B , se dice que el punto se ha desplazado de A a B . De su definición se desprende que un desplazamiento tiene tres características:

- ☞ Su **magnitud**, que se define como la distancia entre el punto inicial y el punto final.
- ☞ Su **dirección**, que corresponde a la dirección de la recta AB . (rectas paralelas tienen la misma dirección)
- ☞ Su **sentido**, de A hacia B . Así el sentido del desplazamiento de B hacia A es contrario al desplazamiento de A hacia B .

Además, desplazamientos sucesivos se combinan (o se suman) de acuerdo a la regla del triángulo, indicada en la figura 1.4, donde el desplazamiento $A \rightarrow B$ seguido del desplazamiento $B \rightarrow C$ es equivalente a un desplazamiento $A \rightarrow C$. Esta regla se generaliza en la sección siguiente para dar origen al concepto de vector. Como veremos más adelante, para el caso de las fuerzas se utiliza la regla del paralelogramo en vez de la del triángulo para obtener la fuerza resultante. Ambas reglas son completamente equivalentes.

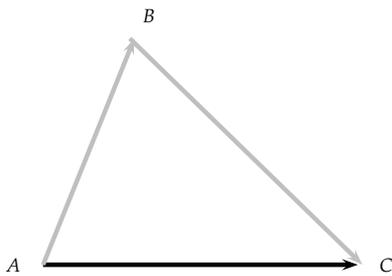


figura 1.4
desplazamiento equivalente

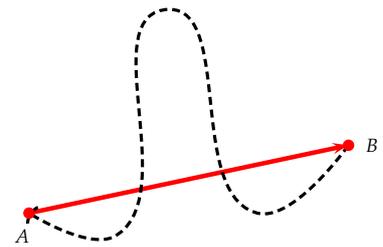


figura 1.5

Supongamos que la posición inicial de un cuerpo está representada por A y ocurre un desplazamiento al punto B como se ve en la figura 1.5. Este desplazamiento se representa mediante una línea de A a B , con una punta de flecha en B para indicar la dirección. Con ello se establece que el desplazamiento es una magnitud vectorial, por lo que indica no sólo cuánto se mueve el cuerpo sino también en qué dirección. Este desplazamiento siempre será un segmento recto dirigido desde el punto inicial al final, incluso aunque el camino real de la partícula sea curvo (línea punteada en la figura 1.5). También, es posible observar que el desplazamiento no está directamente relacionado con la distancia recorrida. Si el cuerpo regresara a A , el desplazamiento total sería cero.

1.5. El vector

Los vectores son entes que tienen las características de los desplazamientos, es decir que tienen magnitud, dirección, sentido, y tales que la combinación (suma vectorial) de dos de ellos, se obtiene de acuerdo a la regla del triángulo. Obviamente un ejemplo de vectores son los desplazamientos.

En el estudio de los vectores se distingue entre magnitudes escalares y magnitudes vectoriales. Las magnitudes escalares tales como el tiempo, la temperatura, la masa, la longitud, el trabajo, la densidad, el volumen, necesitan sólo de un número para determinarlas. Por ejemplo, si una clase de Cálculo dura 45 minutos, la medición del tiempo se expresa en un número (45) de su correspondiente unidad (minuto). Si la longitud de la pizarra es de 6 metros, entonces el resultado de su medición se expresa mediante un número (6) y la correspondiente unidad (metro).

Por otra parte, algunas magnitudes como la fuerza, la velocidad, la aceleración, y otras, no quedan suficientemente definidas con un número. Por ejemplo, si sobre un cuerpo se aplica una fuerza de 5 Newton, no se puede establecer en qué dirección se mueve el cuerpo, porque no se ha dicho el punto de aplicación de la fuerza, ni la dirección y sentido de la fuerza. De igual forma, el estar en cierto punto de la ciudad y que nos digan que la Plaza de Armas está 5 cuadras de allí, no deja bien establecida la ubicación de la Plaza. En este caso se requiere de otras magnitudes, como una dirección y un sentido. Estas magnitudes se llaman vectoriales, y la Matemática ha desarrollado un modelo para representar a dichas magnitudes, y este modelo es el de los *vectores*.

En términos geométricos, un vector se representa por un segmento de recta orientado cuya longitud indica su valor o módulo, la flecha, su dirección y la punta su sentido (figura 1.6). De esta forma, a diferencia de los escalares, un vector tiene cuatro atributos: el punto de aplicación, su módulo

(norma, magnitud o longitud), su dirección y el sentido.

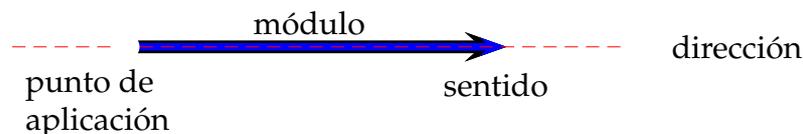


figura 1.6

- El **punto de aplicación** es el punto de origen del segmento: su comienzo, a partir de él empieza el vector.
- El **módulo** de un vector es la longitud del segmento que lo representa. El módulo de un vector se indica con la letra que designa al vector entre barras, igual que el valor absoluto de un número. Así, el módulo del vector \vec{v} se denota $||\vec{v}||$
- La **dirección** de un vector es la de la recta sobre la que está dibujado o cualquiera de sus paralelas, es decir, la recta a la que pertenece el segmento orientado que representa al vector.
- Una recta puede recorrerse de izquierda a derecha o de derecha a izquierda, de modo que tiene dos sentidos. Luego, el **sentido** del vector es el indicado por la flecha en la que termina.

Para representar un vector se emplean una letra mayúscula o minúscula con una flecha en su parte superior, o bien se utiliza letra en negritas, tal como; \vec{V} , \vec{v} , \mathbf{V} , \mathbf{v} . Si el punto inicial de un vector \vec{v} es A y el punto final es B , entonces escribimos

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB}$$

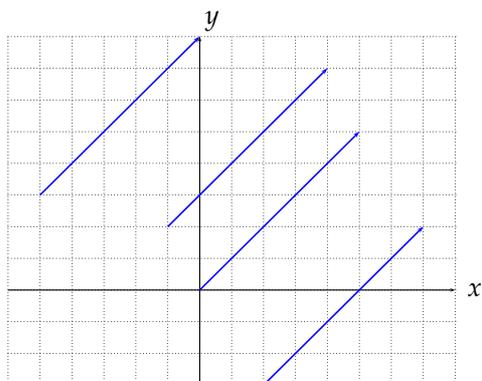


figura 1.7

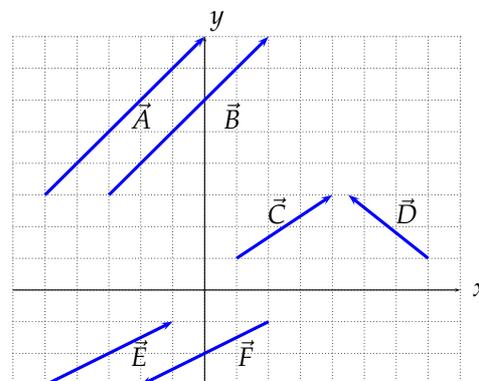


figura 1.8

Dos segmentos orientados representan al mismo vector si tienen la misma medida, la misma dirección y el mismo sentido, de forma análoga, dos vectores son iguales si poseen igual magnitud (medida), la misma dirección y el mismo sentido. La figura 1.7 muestra cuatro segmentos orientados, con orígenes en puntos diferentes, pero representando al mismo vector, pues, son del mismo tamaño, tienen la misma dirección y el mismo sentido. La figura 1.8 muestra vectores \vec{A} y \vec{B} de igual módulo, dirección y sentido, vectores \vec{C} y \vec{D} de igual módulo, diferente dirección y sentido no comparable, vectores \vec{E} y \vec{F} de igual módulo, idéntica dirección y diferente sentido.

NOTA ▷

“Si dos vectores se diferencian en cualquiera de los tres elementos: magnitud, dirección o sentido, los consideramos distintos, mientras que si sólo se diferencian en el punto de aplicación los consideraremos iguales”.

De esta manera, y como ya lo hemos hecho, un vector dado podemos dibujarlo con su punto de aplicación en el lugar que deseemos, ya que bastará con dibujar una recta paralela al vector en el lugar elegido y, sobre ella, dibujar el vector. A cualquiera de estos vectores se le denomina *representante* del vector. La figura 1.9 muestra cinco representaciones de un vector \vec{v} .

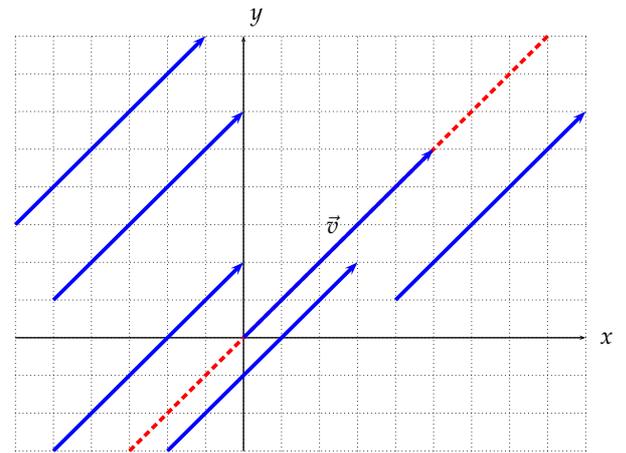


figura 1.9

1.5.1. Álgebra de Vectores

En base a los conceptos y definiciones aportadas, podemos comenzar con el álgebra de vectores, que no es más que las operaciones fundamentales: suma, resta, multiplicación de vectores por números reales y los productos escalares y vectoriales. El sistema de referencia de los vectores que vamos a ocupar es el Sistema de Coordenadas Cartesianas.

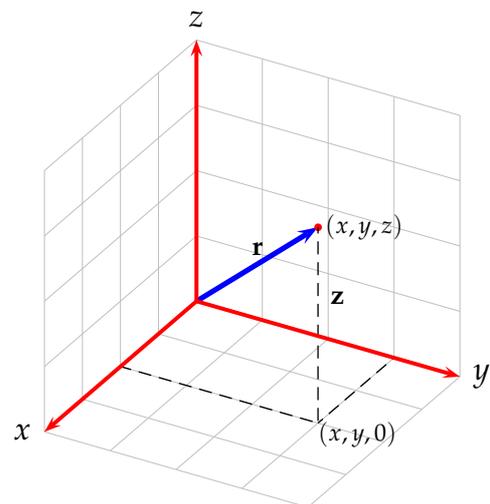
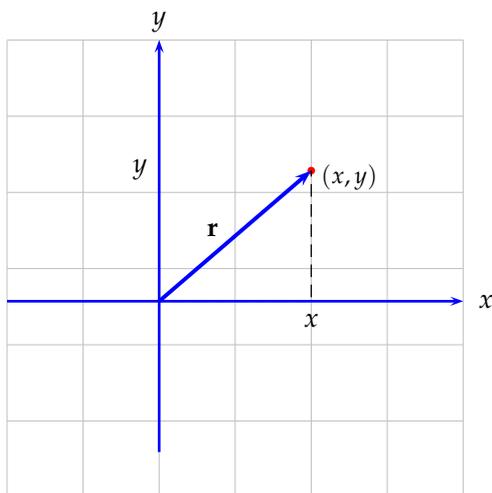


figura 1.10

Al elegir el origen $(0,0,0)$ del espacio tridimensional como punto inicial, podemos asociar unívocamente un vector \vec{r} con todo punto $P = (x,y,z)$ tomando simplemente $\vec{r} = OP$. Este vector \vec{r} con punto inicial fijo $\vec{0} = (0,0,0)$ es el llamado **vector de posición** de P . Al respecto,

Un vector se llama de **posición** si su punto de aplicación es el origen de un sistema de coordenadas y su extremo es cualquier otro punto de ese sistema

Las componentes de la posición del punto P son las coordenadas x, y, z de ese punto en el espacio. Se procede de manera similar si esto se hace en el plano. La figura 1.10 muestra el vector de posición en el plano cartesiano y en el espacio tridimensional.

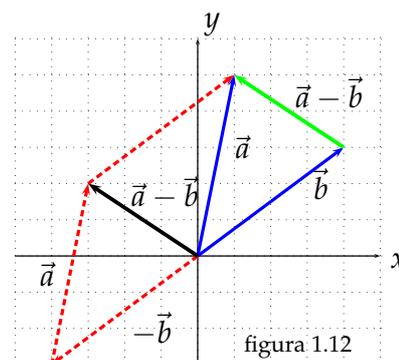
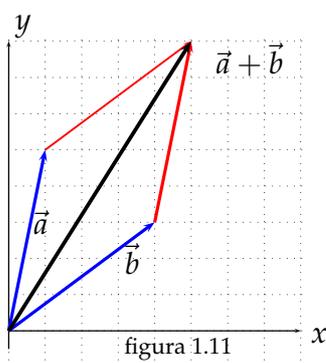
Veamos lo sencillo que resulta usar un sistema de coordenadas cartesiano para operar con vectores. Sean $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ vectores de \mathbb{R}^n , y sea k número real (escalar), entonces:

Igualdad $\vec{a} = \vec{b} \iff a_i = b_i, \forall i = 1, 2, \dots, n$

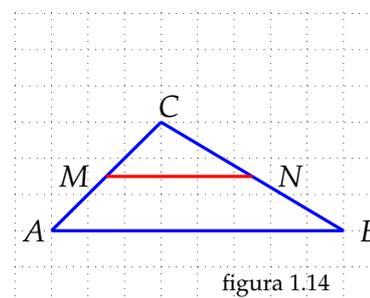
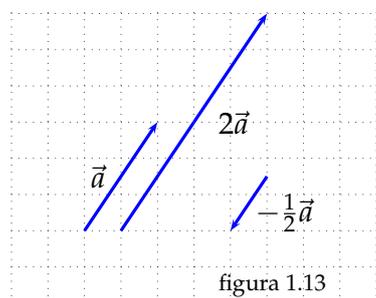
Suma $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$

Diferencia $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-1)\vec{b}$

En el plano, el vector suma es la diagonal del paralelogramo de lados \vec{a} y \vec{b} . (figura 1.11) y la figura 1.12 ilustra la diferencia de vectores en el plano.



Producto por escalar $k \cdot \vec{a} = (ka_1, ka_2, \dots, ka_n)$. Si $k > 0$, el producto $k \cdot \vec{a}$ es un vector cuya longitud es k veces la longitud de \vec{a} y que tiene la misma dirección y sentido que \vec{a} . Si $k < 0$, el producto $k \cdot \vec{a}$ es un vector $|k|$ veces el vector \vec{a} , y de sentido contrario. (figura 1.13)



Ejercicio 1.5.1. Vamos a probar que dado el triángulo ABC , con M punto medio de AC y N punto medio de BC , entonces MN es paralelo con AB y que la longitud de MN es la mitad de la longitud de AB .

La figura 1.14 muestra el triángulo, a partir del cual se tiene:

$$\vec{MN} = \vec{MC} + \vec{CN}$$

Como M y N son puntos medios, entonces

$$\vec{MC} = \frac{1}{2} \vec{AC} \quad \text{y} \quad \vec{CN} = \frac{1}{2} \vec{CB}$$

Luego,

$$\vec{MN} = \frac{1}{2} \vec{AC} + \frac{1}{2} \vec{CB} = \frac{1}{2} (\vec{AC} + \vec{CB}) = \frac{1}{2} \vec{AB}$$

Las siguientes leyes de comportamiento algebraico de vectores son sencillas de probar usando componentes, se dejan al interés del lector.

Teorema 1.5.2. Sean \vec{a} , \vec{b} y \vec{c} vectores, k_1 , k_2 escalares, entonces:

Asociatividad vectorial $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

conmutatividad vectorial $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

asociatividad escalar $k_1 \cdot (k_2 \cdot \vec{a}) = (k_1 \cdot k_2) \cdot \vec{a}$

distributividad vectorial $(k_1 + k_2) \cdot \vec{a} = k_1 \cdot \vec{a} + k_2 \cdot \vec{a}$

distributividad escalar $k_1 \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = k_1 \cdot \vec{a} + k_1 \cdot \vec{b}$

elemento neutro aditivo $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$

inverso aditivo vectorial $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

neutro multiplicativo $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$

multiplicación por $\vec{0}$ $k \cdot \vec{0} = \vec{0}, \forall k \in \mathbb{R}$

1.5.2. Magnitud, dirección y sentido

- La **magnitud** o módulo del vector $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ es

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

Por ejemplo, el vector $\vec{a} = (3, -2, \sqrt{3})$ tiene longitud 4.

- El vector de componentes $(0, 0, \dots, 0)$ se llama vector **nulo** o vector **cero**, y tiene módulo o longitud cero.
- Todo vector de magnitud 1 se denomina **unitario**. Los vectores $\vec{i} = (1, 0)$, $\vec{j} = (0, 1)$ se llaman vectores coordenados unitarios en el plano, $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$ vectores coordenados unitarios en el espacio \mathbb{R}^3 , y en general, $x_k = (0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$ es el k -ésimo vector coordenado unitario (sólo la k -ésima componente es no nula).
- Si \vec{x} es un vector diferente de cero, entonces se puede construir un vector unitario \vec{v} con la misma dirección que \vec{x} , considerando $\vec{v} = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$. Por ejemplo, de $\vec{a} = (3, -2, \sqrt{3})$ se obtiene el vector unitario $\vec{v} = \frac{1}{4}(3, -2, \sqrt{3})$
- La **dirección** de un vector \vec{a} no nulo queda determinada por los denominados **cosenos directores** de \vec{a} .

Geoméricamente, los cosenos directores de un vector corresponden a los ángulos que éste forma con los ejes coordenados. La figura 1.15 muestra el caso tridimensional. Se observa que

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{x}{\|\vec{a}\|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\Rightarrow \cos \beta = \frac{y}{\|\vec{a}\|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\Rightarrow \cos \gamma = \frac{z}{\|\vec{a}\|} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

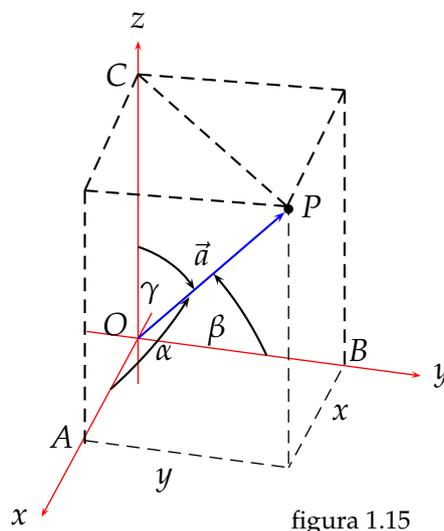


figura 1.15

Las ecuaciones anteriores se justifican de la siguiente manera:

- El triángulo OAP es recto en A , por lo tanto $\cos \alpha = \frac{OA}{\|\vec{a}\|} = \frac{x}{\|\vec{a}\|}$
- El triángulo OBP es recto en B , de modo que $\cos \beta = \frac{y}{\|\vec{a}\|}$
- El triángulo OCP es recto en C , entonces $\cos \gamma = \frac{z}{\|\vec{a}\|}$

Los números $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ se llaman **cosenos directores** del vector \vec{a} .

Proposición 1.5.3. Los cosenos directores verifican que $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$

Ejemplo 1.5.4. Si el vector \vec{a} forma un ángulo de 60° con los ejes x e y , entonces el ángulo que forma con el eje z lo hallamos como sigue:

Como $\alpha = 60^\circ$ y $\beta = 60^\circ$, entonces, de $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, se deduce que $\cos^2\gamma = \frac{1}{2}$ lo que implica $\gamma = 45^\circ$.

- El **sentido** de un vector queda determinado por su punto final, por ejemplo, el vector \overrightarrow{PQ} y el vector \overrightarrow{QP} tiene sentidos opuestos. En particular, en el plano, una condición necesaria y suficiente para que el vector $\vec{b} = (b_1, b_2)$ tenga el mismo sentido que $\vec{a} = (a_1, a_2) \neq \vec{0}$ es que

$$\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} = \frac{b_1}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}, \quad y \quad \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} = \frac{b_2}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$

Los vectores $(3, 4)$ y $(9, 12)$ tienen el mismo sentido, ya que sus magnitudes son 5 y 15 respectivamente, y se encuentran en la relación anterior.

1.5.3. Producto Escalar

El producto escalar, llamado también producto punto o producto interno tiene la particularidad de que su resultado es un escalar. Este producto tiene aplicaciones interesantes en la Física, ya que por ejemplo el trabajo realizado por una fuerza es el producto del vector de la fuerza por el vector desplazamiento, cuando la fuerza aplicada es constante.

Definición 1.5.5. Sean $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$. El **producto escalar** de los vectores \vec{a} y \vec{b} , que se simboliza $\vec{a} \circ \vec{b}$, es el número $\vec{a} \circ \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$

Ejemplo 1.5.6. El producto escalar de $\vec{a} = (0, 1, 0)$ y $\vec{b} = (2, 2, 3)$ es

$$\vec{a} \circ \vec{b} = 0 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 = 2$$

Propiedades del Producto Escalar

Sean \vec{a}, \vec{b} y \vec{c} vectores no nulos, k un escalar.

1. $\vec{a} \circ \vec{a} = \|\vec{a}\|^2 \geq 0$
2. $\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{b} \circ \vec{a}$ Conmutatividad
3. $k \cdot (\vec{a} \circ \vec{b}) = (k\vec{a}) \circ \vec{b} = \vec{a} \circ (k\vec{b})$ Asociatividad
4. $\vec{a} \circ (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{a} \circ \vec{c}$ Distributividad
5. $\vec{a} \circ \vec{0} = 0$ Elemento neutro
6. $\vec{a} \circ \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \theta$ Forma geométrica
7. $\vec{a} \circ \vec{b} = 0 \iff \vec{a} \perp \vec{b}$ Perpendicularidad de vectores

$$8. |\vec{a} \circ \vec{b}| \leq \|\vec{a}\| \|\vec{b}\|$$

$$9. \|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\| \quad \text{Desigualdad triangular}$$

Demostración

Demostramos las proposiciones 6), 8) y 9). Las restantes se dejan al interés del lector.

6) En la figura 1.16, sea θ el ángulo formado por los dos vectores. Los lados del triángulo tienen longitudes $\|\vec{a}\|$, $\|\vec{b}\|$, $\|\vec{a} - \vec{b}\|$. Usando ley de cosenos se tiene:

$$\|\vec{a} - \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \theta \quad (1.1)$$

dado que

$$\|\vec{x}\|^2 = \|(x_1, x_2)\|^2 = \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)^2 = x_1^2 + x_2^2 = \vec{x} \cdot \vec{x}$$

$$\|\vec{a} - \vec{b}\|^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b}$$

$$= \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} \quad (1.2)$$

de las ecuaciones (1.1) y (1.2) obtenemos

$$2\vec{a} \cdot \vec{b} = 2\|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \theta$$

Y de esto

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \theta$$

8) En caso de que uno de los vectores \vec{a} o \vec{b} sean nulos el resultado es evidente. Para el caso en que ambos sean diferentes de cero, se tiene que su producto escalar $\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \theta$, en donde θ es el ángulo entre los dos vectores. Tomando valor absoluto se encuentra

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| |\cos \theta|$$

Como $|\cos \theta| \leq 1$, entonces

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq \|\vec{a}\| \|\vec{b}\|$$

9) Desigualdad triangular

$$\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b}$$

$$= \|\vec{a}\|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \|\vec{b}\|^2 \leq \|\vec{a}\|^2 + 2\|\vec{a}\| \|\vec{b}\| + \|\vec{b}\|^2$$

$$\leq \left(\|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|\right)^2$$

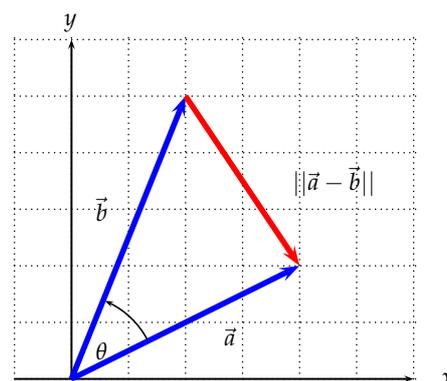


figura 1.16

Al extraer raíz cuadrada, obtenemos

$$\|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$$

A partir de la forma geométrica del producto escalar se puede determinar el ángulo entre dos vectores. Ilustramos esto.

Ejemplo 1.5.7. El ángulo entre los vectores $\vec{a} = (4, 5, 2)$ y $\vec{b} = (-3, 6, 0)$ se determina del modo que sigue

$$\cos \theta = \frac{-12 + 30 + 0}{\sqrt{45} \sqrt{45}} = \frac{2}{5} \implies \theta = \arccos\left(\frac{2}{5}\right) \approx 66^\circ 25'$$

1.5.4. Producto Vectorial

En \mathbb{R}^3 , los vectores unitarios canónicos $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$, son linealmente independientes y generan el espacio \mathbb{R}^3 . Esto significa que cualquier vector de \mathbb{R}^3 puede ser escrito como combinación lineal de los vectores de esta base canónica. Sea $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ vector cualquiera de \mathbb{R}^3 , entonces

$$\vec{a} = a_1 (1, 0, 0) + a_2 (0, 1, 0) + a_3 (0, 0, 1)$$

es decir

$$(a_1, a_2, a_3) = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}$$

Definición 1.5.8. El producto **vectorial** o **cruz** de los vectores $\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}$ y $\vec{b} = b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}$ corresponde a la expresión

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

Ejemplo 1.5.9. Sean $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$, entonces

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (-11, -14, 5)$$

Propiedades del Producto Vectorial

Sean $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vectores no nulos de \mathbb{R}^3 , k escalar.

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ No conmutatividad
2. $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$
3. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ Distributividad

$$4. \vec{a} \times \vec{0} = \vec{0} \times \vec{a} = \vec{0}$$

$$5. k \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (k \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (k \cdot \vec{b}) \quad \text{Asociatividad por escalar}$$

$$6. \|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \operatorname{sen} \theta \quad \text{Forma geométrica}$$

$$7. \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \iff \vec{a} \parallel \vec{b} \quad \text{Paralelismo}$$

$$8. \|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \quad \text{Perpendicularidad}$$

$$9. \|\vec{a} \times \vec{b}\| = S \quad \text{Área del paralelogramo entre } \vec{a} \text{ y } \vec{b}$$

Demostración

6) Empleamos componentes

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \sqrt{(a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2}$$

$$= \sqrt{a_2^2 b_3^2 - 2a_2 a_3 b_2 b_3 + a_3^2 b_2^2 - 2a_1 a_3 b_1 b_3 + a_1^2 b_3^2 + a_1^2 b_2^2 - 2a_1 a_2 b_1 b_2 + a_2^2 b_1^2}$$

$$= \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2}$$

$$= \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} = \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta)^2}$$

$$= \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 (1 - \cos^2 \theta)} = |\vec{a}| |\vec{b}| \operatorname{sen} \theta$$

7) y 8) Son evidentes a partir de la anterior

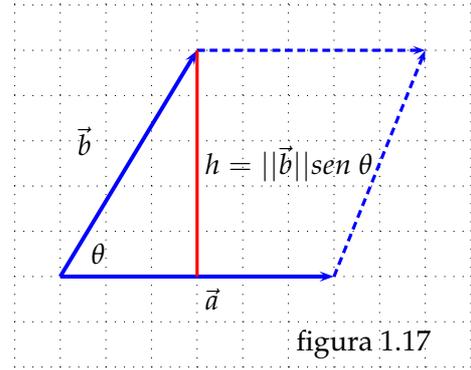
9) Si P es el paralelogramo determinado por los vectores $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, entonces el área S del paralelogramo es el producto de la base por la altura (figura 1.17). Esto es

$$S = \|\vec{a}\| \cdot h = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \operatorname{sen} \theta = \|\vec{a} \times \vec{b}\|$$

1.5.5. Triple Producto Escalar

Definición 1.5.10. Para tres vectores \vec{a}, \vec{b} y \vec{c} del espacio, su "triple producto escalar" (T.P.E.), que se denota $\vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c})$ viene dado por

$$\vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$



Ejemplo 1.5.11. El triple producto escalar de los vectores $\vec{a} = (1, 2, 3), \vec{b} = (0, 1, 2), \vec{c} = (-1, 6, 3)$ es

$$\vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 6 & 3 \end{vmatrix} = -10$$

Propiedades del T.P.E.

1. $\vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \circ (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \circ (\vec{c} \times \vec{a})$ Rotación
2. $\vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c}) = 0 \implies \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ coplanarios
3. $\vec{a} \circ (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$
4. $|\vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c})| = V$ Volumen del paralelepípedo entre \vec{a}, \vec{b} y \vec{c}

Demostración

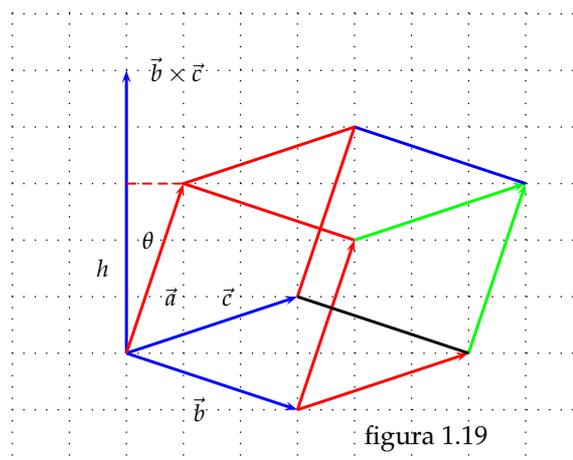
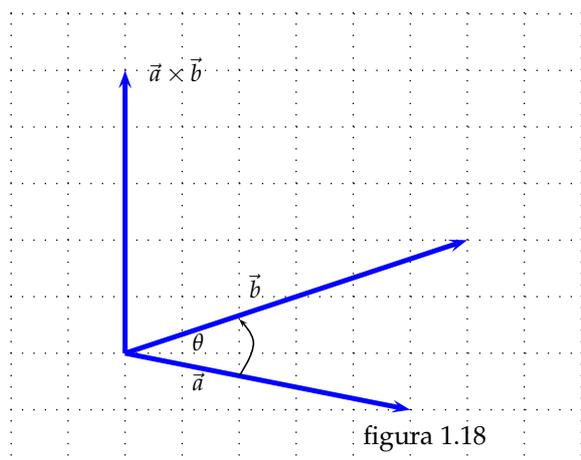
3) Si los vectores no nulos $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$, tienen el mismo punto inicial, entonces

$$\begin{aligned} \vec{a} \circ (\vec{a} \times \vec{b}) &= (a_1, a_2, a_3) \cdot \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\ &= (a_1, a_2, a_3) \cdot \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) \end{aligned}$$

Al reducir términos semejantes

$$\vec{a} \circ (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$$

Esto significa que \vec{a} es perpendicular con $\vec{a} \times \vec{b}$. Análogamente se verifica que \vec{b} es perpendicular con $\vec{a} \times \vec{b}$. En consecuencia $\vec{a} \times \vec{b}$ es perpendicular al plano determinado por los vectores \vec{a} y \vec{b} . Dicho de otra forma, $\vec{a} \times \vec{b}$ apunta en la dirección y sentido del movimiento que toma un tornillo de rosca a la derecha si gira un ángulo θ desde \vec{a} hasta \vec{b} . Este hecho se conoce como "regla de la mano derecha". (figura 1.18)



Volumen de una caja

Consideremos la caja de aristas coterminales \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} que muestra la figura 1.19. El volumen de la caja viene dado por

$$\text{Volumen} = (\text{área de la base}) \cdot (\text{altura})$$

El área de la base es $\|\vec{b} \times \vec{c}\|$. El vector $\vec{b} \times \vec{c}$ es perpendicular tanto al vector \vec{c} como al vector \vec{b} . La altura $h = \|\vec{a}\| \cos \theta$. Con estos datos tenemos

$$\text{Volumen} = \|\vec{b} \times \vec{c}\| \|\vec{a}\| \cos \theta$$

Usando

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \theta$$

se tiene

$$\vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c}) = \|\vec{a}\| \|\vec{b} \times \vec{c}\| \cos \theta$$

en donde θ es el ángulo entre \vec{a} y $(\vec{b} \times \vec{c})$. En consecuencia

$$\text{Volumen} = |\vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c})|$$

Ejemplo 1.5.12. El volumen de la caja cuyos lados son los vectores $(1, -2, 1)$, $(2, 3, -2)$, $(-1, 3, -2)$ es

$$V = (1, -2, 1) \circ \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = |-3| = 3$$

1.5.6. Triple Producto Vectorial

El "Triple Producto Vectorial" (T.P.V.) de tres vectores en el espacio está dado por

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$$

Propiedades del T.P.V.

1. $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \circ \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \circ \vec{b}) \vec{c} = (\vec{a} \circ \vec{c}) \vec{b} - (\vec{b} \circ \vec{c}) \vec{a}$ **combinación lineal**
2. $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ **no asociatividad**

Las demostraciones son sencillas y sólo requieren de aplicar la definición.

1.5.7. Proyección Vectorial

En ciertos problemas de física o de ingeniería, es necesario descomponer un vector en una suma de vectores componentes (figura 1.20). Este hecho viene a ser el proceso inverso de sumar vectores y obtener un vector resultante. Se tiene lo siguiente.

Proposición 1.5.13. *Todo vector \vec{a} se puede escribir en términos de otro vector $\vec{b} \neq 0$ como $\vec{a} = s \vec{b} + t \vec{b}^\perp$*

Vamos a determinar los valores de s y t . La notación \vec{b}^\perp indica un vector perpendicular con \vec{b} . Al componer con \vec{b} por derecha se tiene:

$$\vec{a} = s \vec{b} + t \vec{b}^\perp \implies \vec{a} \circ \vec{b} = (s \vec{b} + t \vec{b}^\perp) \circ \vec{b}$$

de lo cual

$$\vec{a} \circ \vec{b} = s \vec{b} \circ \vec{b} + t \vec{b}^\perp \circ \vec{b} = s \|\vec{b}\|^2 + 0$$

Al despejar:

$$s = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}$$

Para hallar el valor de t se compone con \vec{b}^\perp por derecha

$$\vec{a} = s \vec{b} + t \vec{b}^\perp \implies \vec{a} \circ \vec{b}^\perp = (s \vec{b} + t \vec{b}^\perp) \circ \vec{b}^\perp$$

de lo cual

$$\vec{a} \circ \vec{b}^\perp = s \vec{b} \circ \vec{b}^\perp + t \vec{b}^\perp \circ \vec{b}^\perp = 0 + t \|\vec{b}^\perp\|^2$$

Al despejar:

$$t = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}^\perp}{\|\vec{b}^\perp\|^2}$$

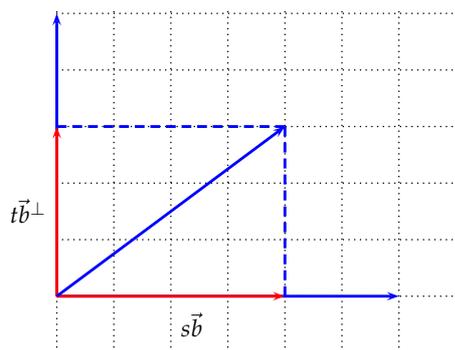


figura 1.20

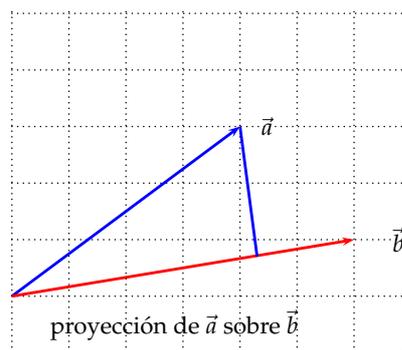


Figura 1.21

Definición 1.5.14.

1. La **proyección vectorial** del vector \vec{a} sobre el vector $\vec{b} \neq 0$ es el vector

$$\text{proy}_{\vec{b}}(\vec{a}) = \left(\frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{\|\vec{b}\|^2} \right) \vec{b}$$

2. La **componente** del vector \vec{a} a lo largo del vector \vec{b} es el número

$$\text{comp}_{\vec{b}}(\vec{a}) = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{\|\vec{b}\|}$$

Al observar ambas expresiones podemos escribir

$$\text{proy}_{\vec{b}}(\vec{a}) = \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|} \text{comp}_{\vec{b}}(\vec{a})$$

En términos geométricos, la componente del vector \vec{a} sobre el vector \vec{b} es la longitud de la proyección vectorial. Más aún, la definición proviene del hecho que en el triángulo rectángulo formado por \vec{a} , proyección de \vec{a} sobre \vec{b} y el segmento que une el extremo del vector \vec{a} con su proyección sobre el vector \vec{b} (figura 1.21), el cateto adyacente tiene magnitud $\|\vec{a}\| \cos \theta$. Es decir,

$$\text{comp}_{\vec{b}}(\vec{a}) = \|\vec{a}\| \cos \theta$$

Usando el hecho que $\vec{b} \circ \vec{a} = \|\vec{b}\| \|\vec{a}\| \cos \theta$ se encuentra que

$$\|\vec{a}\| \cos \theta = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{\|\vec{b}\|}$$

En consecuencia

$$\text{comp}_{\vec{b}}(\vec{a}) = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{\|\vec{b}\|}$$

Se observa que la componente del vector \vec{a} sobre el vector \vec{b} es positiva si el ángulo θ se encuentra entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ y negativa si se halla entre $\frac{\pi}{2}$ y π .

Ejemplo 1.5.15. Si $\vec{a} = (2, -1, 3)$, $\vec{b} = (1, -3, -1)$, entonces

$$\begin{aligned} \text{proy}_{\vec{b}}(\vec{a}) &= \left(\frac{(2, -1, 3) \circ (1, -3, -1)}{(\sqrt{11})^2} \right) (1, -3, -1) = \frac{2}{11} (1, -3, -1) \\ \text{comp}_{\vec{b}}(\vec{a}) &= \frac{2}{\sqrt{11}} \end{aligned}$$

1.6. La Recta en el espacio

Volvemos al estudio de la geometría del espacio con los vectores que serán nuestra “cartita bajo la manga”. La recta en el espacio corresponde al lugar geométrico de todos los puntos que satisfacen un sistema lineal en tres variables, de la forma

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}$$

A este sistema se le conoce como **ecuación general** de la recta. Vamos a usar vectores para determinar la ecuación de la recta en el espacio. Al respecto, es sabido que una recta en el plano bidimensional queda determinada por dos puntos o bien por un punto y la pendiente. Sin embargo, es también útil considerar que una recta se puede determinar por uno de sus puntos y su dirección. Esta dirección se puede especificar en términos de un vector no nulo llamado **vector director**.

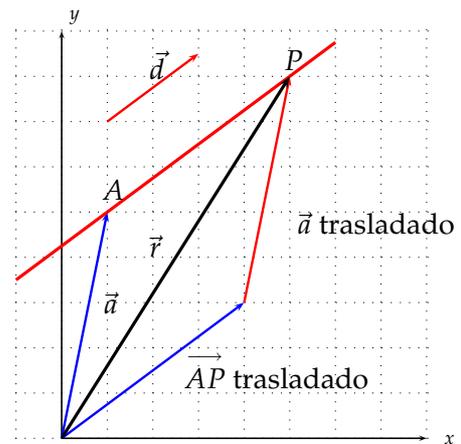


figura 1.22

Sea $A = (a_1, a_2, a_3)$ punto en el espacio tridimensional y $\vec{d} = (d_1, d_2, d_3) \neq \vec{0}$ vector director. Vamos a determinar la ecuación de la recta que pasa por A y que tiene la dirección de \vec{d} .

Sea P un punto cualquiera sobre la recta, de coordenadas (x, y, z) . En la figura 1.22 se tiene que

$$\vec{AP} + \vec{a} = \vec{r} \implies \vec{AP} = \vec{r} - \vec{a}$$

y como \vec{AP} es paralelo al vector \vec{d} , entonces $\vec{r} - \vec{a} = t\vec{d}$, de aquí

$$(x, y, z) - (a_1, a_2, a_3) = t (d_1, d_2, d_3)$$

Igualando componentes

$$x = a_1 + t d_1, y = a_2 + t d_2, z = a_3 + t d_3$$

Definición 1.6.1. Sean A punto del plano o del espacio, \vec{d} un vector no nulo. Se llama **recta** por A en la dirección de \vec{d} al conjunto

$$L = \{ \vec{X} / \vec{X} = A + t \vec{d}, t \in \mathbb{R} \}$$

El vector \vec{d} se denomina **vector director** de la recta L . La ecuación $\vec{X} = A + t \vec{d}$ se llama **ecuación vectorial**. A partir de esta ecuación vectorial se obtiene la ecuación **paramétrica**

$$\vec{X} = A + t \vec{d} \implies (x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + t (d_1, d_2, d_3)$$

Al igualar componentes se obtiene su expresión paramétrica

$$x = a_1 + t d_1, y = a_2 + t d_2, z = a_3 + t d_3$$

Al despejar el parámetro t en la ecuación paramétrica, se encuentra la ecuación **cartesiana** o **simétrica** de la recta.

$$t = \frac{x - a_1}{d_1} = \frac{y - a_2}{d_2} = \frac{z - a_3}{d_3}$$

A partir de esta última ecuación obtenemos la **ecuación general** de la recta, tomándolas de dos en dos y estableciendo los sistemas respectivos.

Ejemplo 1.6.2. Las ecuaciones de la recta que pasa por $(-1, 0, 2)$ con vector director $(2, -3, -1)$ son:

- Ecuación vectorial: $\vec{X} = (-1, 0, 2) + t (2, -3, -1) = (2t - 1, -3t, 2 - t)$
- Ecuación paramétrica: $x = 2t - 1, y = -3t, z = 2 - t$
- Ecuación cartesiana: $\frac{x + 1}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z - 2}{-1}$
- Ecuación general

$$\begin{cases} 3x + 2y + 0z + 3 = 0 \\ 0x - y + 3z - 6 = 0 \end{cases}$$

Ejemplo 1.6.3. El segmento de recta que pasa por $(1, 0, 0)$, en dirección del punto $(5, 3, 2)$, tiene ecuación

$$\begin{aligned} X &= (1, 0, 0) + t ((5, 3, 2) - (1, 0, 0)) = (1, 0, 0) + t (4, 3, 2) \\ &= (4t + 1, 3t, 2t), \quad t \in [0, 1] \end{aligned}$$

En términos de vectores directores, los conceptos de paralelismo, perpendicularidad y ángulo entre dos rectas, se formulan de la siguiente manera

Definición 1.6.4.

- Dos rectas son paralelas si tienen vectores directores paralelos
- Dos rectas son perpendiculares si los vectores directores son perpendiculares
- El ángulo entre dos rectas que se intersectan es igual al ángulo entre sus vectores directores

Ejemplo 1.6.5. El ángulo entre la recta $\{x = 3 + 4t, y = -2 + t\}$ y la recta $\{x = -1 - 3t, y = 5 + 12t\}$ lo encontramos como sigue:

La primera recta tiene vector director $(4, 1)$, y la segunda $(-3, 12)$. Usando

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|}$$

Se tiene

$$\cos \theta = \frac{-12 + 12}{\sqrt{17} \sqrt{153}} = 0 \implies \theta = \frac{\pi}{2}$$

Luego, las rectas son perpendiculares.

1.6.1. Posiciones Relativas de dos rectas

Dadas dos rectas en el espacio, existen cuatro posiciones en las cuales pueden encontrarse:

- Se cortan en un punto
- Se cruzan sin cortarse
- Son paralelas
- Son coincidentes

La posición relativa de dos rectas en el espacio puede determinarse usando la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada. Veamos de que se trata esto.

Se consideran un par de rectas dadas en la forma

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1d = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2d = d_2 \end{cases} \quad \begin{cases} m_1x + n_1y + p_1d = q_1 \\ m_2x + n_2y + p_2d = q_2 \end{cases}$$

Sea A la matriz del sistema formado por esas cuatro ecuaciones, y A' la ampliada. Esto es,

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ m_1 & n_1 & p_1 & q_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 & q_2 \end{pmatrix}$$

Según teorema de Rouché existen las siguientes alternativas:

1. $\text{rang}(A) = 2, \text{rang}(A') = 2 \implies$ son dos rectas coincidentes.
2. $\text{rang}(A) = 2, \text{rang}(A') = 3 \implies$ son dos rectas paralelas, distintas.
3. $\text{rang}(A) = 3, \text{rang}(A') = 3 \implies$ las rectas se cortan en un único punto
4. $\text{rang}(A') = 4$, es decir, $\text{Det}(A') = 0 \implies$ las rectas se cruzan.

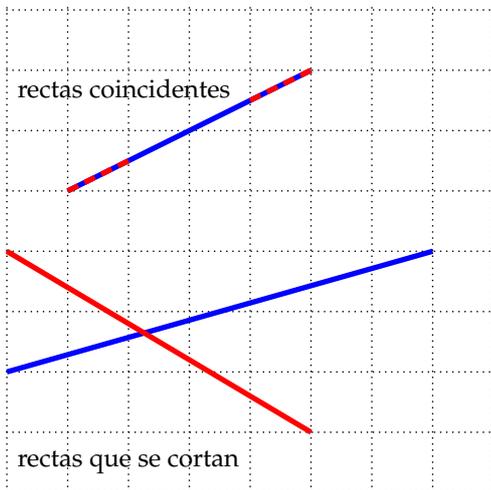
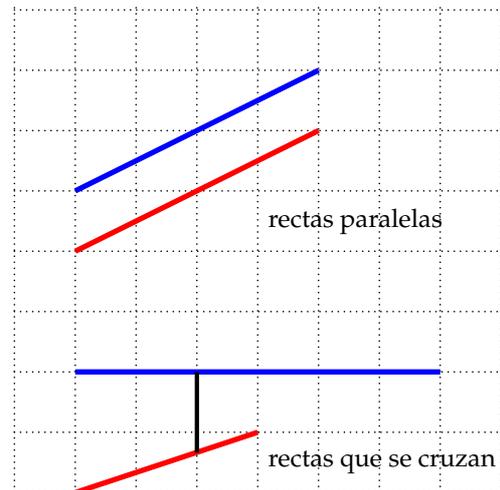


figura 1.23



Dos rectas que se cruzan siempre se pueden situar en dos planos paralelos, y además, este es el único caso en el que no existe un plano que contenga las dos rectas.

Ejemplo 1.6.6. Se considera el par de rectas L y M siguientes:

$$\{x = 2 + t, \quad y = 1 - t, \quad z = 3t\} \quad y \quad \frac{x+1}{2} = y+3 = \frac{z-1}{3}$$

En primer lugar, veamos posición relativa, esto es, ¿se cortan? ¿se cruzan? ¿son paralelas? Para verlo, ponemos las rectas en forma general

$$\{x = 2 + t, \quad y = 1 - t, \quad z = 3t\} \implies \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{3}$$

De la forma simétrica, al tomar la primera ecuación con la segunda y tercera se obtiene

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 3x - z = 6 \end{cases}$$

En forma análoga, de la segunda recta se obtiene

$$\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 3y - z = -10 \end{cases}$$

Ahora se conforma la matriz de los coeficientes y de la ampliada

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & 6 \\ 1 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & -1 & -10 \end{pmatrix}$$

Si se calcula el rango de la ampliada se encuentra que es 4 (¡hacerlo!). Por tanto, las rectas se **cruzan**.

Dado que las rectas se cruzan, cabe preguntarse ¿cómo hallar los puntos P en la recta L y Q en M para los que la distancia entre ambas rectas es mínima?

Para dar respuesta a la pregunta es útil saber que, “Si dos rectas se cruzan, existe una única recta que corta perpendicularmente a ambas rectas” (la figura 1.23 permite “verlo”). Para hallar los puntos se trabaja con ambas rectas parametrizadas. La parametrización de M es

$$\{x = -1 + 2m, \quad y = -3 + m, \quad z = 1 + 3m\}$$

Un vector perpendicular a ambas rectas lo proporciona el producto vectorial

$$(1, -1, 3) \times (2, 1, 3) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-6, 3, 3)$$

Si P es punto de L , entonces $P = (2 + t, 1 - t, 3t)$. De igual manera, si Q es punto de M , entonces $Q = (-1 + 2m, -3 + m, 1 + 3m)$. El vector \overrightarrow{PQ} es un múltiplo escalar de $(-6, 3, 3)$. Esto es, $\overrightarrow{PQ} = k \cdot (-6, 3, 3)$, de donde se debe verificar que

$$\begin{cases} -3 + 2m - t = -6k \\ -4 + m + t = 3k \\ 1 + 3m - 3t = 3k \end{cases}$$

Al resolver se obtiene que

$$m = \frac{39}{18}, \quad t = \frac{7}{3}, \quad k = \frac{1}{6}$$

De esta forma, las coordenadas de los puntos son:

$$P = \left(\frac{13}{3}, -\frac{4}{3}, 7\right) \quad \text{y} \quad Q = \left(\frac{10}{3}, -\frac{5}{6}, \frac{15}{2}\right)$$

Finalmente, la distancia entre dos puntos entrega la mínima distancia entre las rectas dadas.

$$d(P, Q) = \sqrt{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

1.7. El Plano

El plano es el lugar geométrico de todos los puntos que satisfacen una ecuación lineal de la forma

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Veamos como obtener ecuaciones de un plano. Lo primero es establecer que un plano queda determinado cuando se conoce un punto P del mismo y dos vectores \vec{u} y \vec{v} no nulos y linealmente independientes que estén contenidos en el plano, llamados **vectores directores** del plano (figura 1.24(a)).

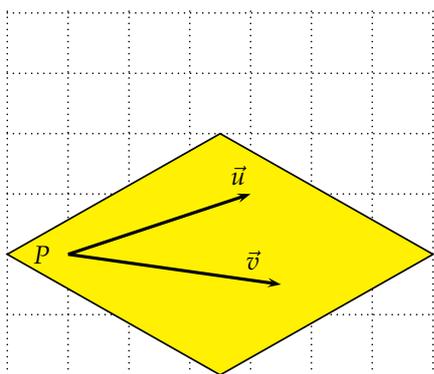


figura 1.24(a)

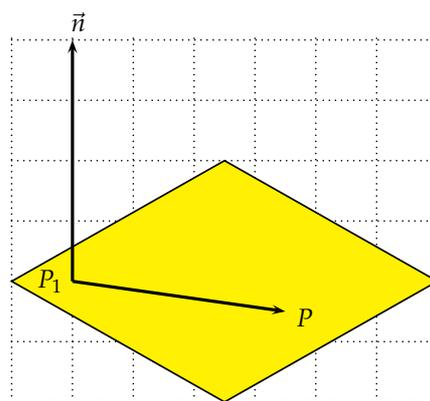


figura 1.24(b)

Ecuación en forma vectorial

El plano que contiene al punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y que tiene como vectores directores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ es el conjunto de puntos del espacio que verifican la relación vectorial

$$\overrightarrow{P_0P} = \lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{v}, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}$$

en donde $P = (x, y, z)$ es un punto cualquiera del plano. Los escalares λ_1 y λ_2 se denominan **parámetros**. Teniendo en cuenta que $P = P_0 + \overrightarrow{P_0P}$, entonces

$$P = P_0 + \lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{v}$$

expresión que se conoce como **ecuación vectorial** del plano. En base a esta forma vectorial podemos dar la siguiente condición para que un punto pertenezca a un plano.

$$\text{El punto } P \text{ pertenece al plano} \iff \overrightarrow{PP_0} = \lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{v}$$

Ecuación en forma paramétrica

Desarrollando la ecuación vectorial expresada en componentes, resulta

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda_1 u_1 + \lambda_2 v_1 \\ y = y_0 + \lambda_1 u_2 + \lambda_2 v_2 \\ z = z_0 + \lambda_1 u_3 + \lambda_2 v_3 \end{cases}$$

expresión que se conoce como **ecuación paramétrica** del plano.

Ecuación en forma general

Como $P - P_0 = \lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{v}$, entonces en el determinante

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & u_1 & v_1 \\ y - y_0 & u_2 & v_2 \\ z - z_0 & u_3 & v_3 \end{vmatrix}$$

la primera columna es combinación lineal de la segunda y de la tercera. Por tanto dicho determinante es cero. Desarrollando el determinante, agrupando términos e igualando a 0, nos queda una ecuación de la forma

$$ax + by + cz + d = 0$$

que es la ecuación en forma general, o cartesiana o implícita del plano, con a, b, c, d números reales.

Ecuación normal

Otra forma de determinar la ecuación de un plano es conociendo un punto del mismo y un vector **normal** al plano. Sea $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un punto dado del plano y sea $\vec{n} = (a, b, c)$ un vector normal al plano. Entonces, para cualquier punto $P = (x, y, z)$ del plano, el vector $\vec{P_0P}$ es perpendicular a \vec{n} , de manera que

$$\vec{P_0P} \circ \vec{n} = 0$$

Al escribirla en componentes

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \circ (a, b, c) = 0 \implies ax + by + cz + d = 0$$

con $-d = ax_0 + by_0 + cz_0$ se obtiene la ecuación general del plano.

Ejemplo 1.7.1. *Determinemos la ecuación del plano que contiene a los puntos $P_0 = (1, 0, 0)$, $P_1 = (0, 1, 0)$ y $P_2 = (0, 0, 1)$*

Veamos, en primer lugar, su determinación usando dos parámetros.

$$\begin{aligned} \vec{P_0P_1} &= P_1 - P_0 = (-1, 1, 0) \\ \vec{P_0P_2} &= P_2 - P_0 = (-1, 0, 1) \end{aligned}$$

son vectores directores del plano, de modo que la ecuación del plano es

$$P = P_0 + \lambda_1 \overrightarrow{P_0P_1} + \lambda_2 \overrightarrow{P_0P_2}$$

Al reemplazar los datos tenemos que

$$(x, y, z) = (1, 0, 0) + \lambda_1 (-1, 1, 0) + \lambda_2 (-1, 0, 1)$$

es la ecuación vectorial del plano. De ésta se deduce la ecuación en forma paramétrica

$$x = 1 - \lambda_1 - \lambda_2, \quad y = \lambda_1, \quad z = \lambda_2$$

En esta última ecuación aislamos los parámetros para formar el determinante

$$\begin{vmatrix} x-1 & -1 & -1 \\ y & 0 & 1 \\ z & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Al resolverlo se deduce la ecuación del plano en forma general

$$x + y + z - 1 = 0$$

Por otra parte, si usamos la forma normal tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_0P_1} &= P_1 - P_0 = (-1, 1, 0) \\ \overrightarrow{P_0P_2} &= P_2 - P_0 = (-1, 0, 1) \end{aligned}$$

Hemos fijado el punto P_0 para construir dos vectores, cuyo producto cruz produce un vector perpendicular al plano

$$(-1, 1, 0) \times (-1, 0, 1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, 1, 1)$$

Así, $\vec{n} = (1, 1, 1)$. Por tanto, la ecuación general del plano es

$$(x - 1, y, z) \circ (1, 1, 1) = 0 \implies x + y + z - 1 = 0$$

Este ejemplo muestra que la forma normal simplifica los cálculos.

Ejemplo 1.7.2. Hallemos la ecuación vectorial del plano $4x - y - z = 3$

Necesitamos tres puntos del plano para formar dos vectores directores. Con estos vectores y un punto se forma la ecuación vectorial.

- Si $x = y = 0$, entonces $z = -3$. Luego tenemos el punto $P_1 = (0, 0, -2)$ en el plano.
- Si $x = 1, y = 0$, entonces $z = 1$. Luego el punto $P_2 = (1, 0, 1)$ pertenece al plano.

- Si $x = 0, y = 1$, entonces $z = -4$. Luego el punto $P_3 = (0, 1, -4)$ está en el plano.

De esta forma, dos vectores directores del plano son:

- $\overrightarrow{P_2P_1} = P_1 - P_2 = (-1, 0, -3)$
- $\overrightarrow{P_2P_3} = P_3 - P_2 = (-1, 1, -5)$

En consecuencia la ecuación vectorial del plano es

$$(x, y, z) = (1, 0, 1) + \lambda_1(-1, 0, -3) + \lambda_2(-1, 1, -5)$$

Ejemplo 1.7.3. Hallemos la ecuación del plano que contiene los puntos $(3, 4, 1)$, $(1, 7, 1)$ y $(-1, -2, 5)$

Como los tres puntos están el plano, formamos los vectores de origen común $(3, 4, 1)$. Tenemos

$$(1, 7, 1) - (3, 4, 1) = (-2, 3, 0) = \vec{a}, \quad (-1, -2, 5) - (3, 4, 1) = (-4, -6, 4) = \vec{b}$$

Luego, el vector normal \vec{n} que se necesita es

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 3 & 0 \\ -4 & -6 & 4 \end{vmatrix} = (12, 8, 24)$$

Ahora se toma cualquiera de los tres puntos para formar la ecuación del plano. Si elegimos $(3, 4, 1)$, entonces

$$(x - 3, y - 4, z - 1) \cdot (12, 8, 24) = 0$$

de donde, $3x + 2y + 6z - 23 = 0$ es la ecuación buscada.

Ejemplo 1.7.4. Hallemos la ecuación del plano que contiene el punto $(6, 2, 4)$ y la recta $\frac{x-1}{5} = \frac{y+2}{6} = \frac{z-3}{7}$.

De la ecuación paramétrica de la recta, $\vec{x} = (1, -2, 3) + t(5, 6, 7)$, obtenemos dos puntos, que por hipótesis deben estar en el plano. Estos puntos son, $(1, -2, 3)$ para $t = 0$ y $(6, 4, 10)$ para $t = 1$. Como está dado un tercer punto en el plano, entonces formamos dos vectores de origen $(6, 2, 4)$:

$$\vec{a} = (1, -2, 3) - (6, 2, 4) = (-5, -4, -1) \quad \text{y} \quad \vec{b} = (6, 4, 10) - (6, 2, 4) = (0, 2, 6)$$

con los cuales encontramos el vector normal

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -5 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} = (-22, 30, -10)$$

Como ese vector es muy grande en magnitud, elegimos $(-11, 15, -5)$ que va en la misma dirección. Con esto, la ecuación del plano es

$$11x - 15y + 5z - 56 = 0$$

Ejemplo 1.7.5. Hallemos la ecuación paramétrica de la recta que pasa por $(1, 2, -1)$ y es perpendicular al plano de ecuación $3x + 5y - z = 6$.

Como la recta es perpendicular al plano, entonces el vector director de la recta es paralelo al vector normal del plano. Esto es

$$\vec{d} = \vec{n} = (3, 5, -1) \implies \vec{d} = k(3, 5, -1), \quad \forall k$$

Luego, la ecuación de la recta es

$$\vec{x} = (1, 2, -1) + t(3, 5, -1) = (3t + 1, 5t + 2, -1 - t)$$

La ecuación paramétrica equivalente es

$$x = 1 + 3t, \quad y = 5t + 2, \quad z = -1 - t$$

1.7.1. Distancia punto - plano

Sean $ax + by + cz - d = 0$ la ecuación de un plano y (a_1, a_2, a_3) un punto en el espacio. Vamos a encontrar una expresión que proporcione una fórmula para el cálculo de la distancia del punto al plano. Para ello determinemos la recta que pasa por (a_1, a_2, a_3) y perpendicular al plano. Si $\vec{n} = (a, b, c)$ es vector normal al plano, entonces es también vector director de la recta, así las ecuaciones paramétricas de la recta son

$$\vec{x} = (a_1, a_2, a_3) + t(a, b, c)$$

Esto es

$$x = a_1 + t \cdot a, \quad y = a_2 + t \cdot b, \quad z = a_3 + t \cdot c$$

Ahora bien, la recta se intersecta con el plano cuando

$$a(a_1 + t \cdot a) + b(a_2 + t \cdot b) + c(a_3 + t \cdot c) - d = 0$$

de aquí que para cierto valor t_0 de t se tenga que

$$t_0 = \frac{d - a \cdot a_1 - b \cdot a_2 - c \cdot a_3}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Luego, el punto intersección de la recta y el plano es

$$(a_1 + t_0 \cdot a, a_2 + t_0 \cdot b, a_3 + t_0 \cdot c)$$

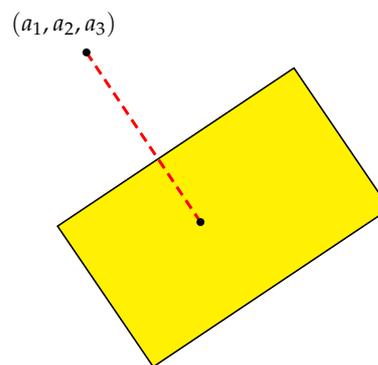


figura 1.25

La distancia entre este punto y el punto (a_1, a_2, a_3) viene dada por

$$D = \sqrt{(a_1 + t_0 \cdot a - a_1)^2 + (a_2 + t_0 \cdot b - a_2)^2 + (a_3 + t_0 \cdot c - a_3)^2}$$

que al simplificar equivale a

$$D = \sqrt{t_0^2 (a^2 + b^2 + c^2)} = |t_0| \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

reemplazando el valor de t_0 se tiene

$$D = \frac{|d - a a_1 - b a_2 - c a_3|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \tag{1.3}$$

Fórmula Vectorial

Sea P punto arbitrario del plano, Q punto exterior al plano, \vec{n} vector normal tal como lo indica la figura 1.26. La distancia d desde el punto Q al plano (perpendicular) corresponde a la magnitud de la proyección del vector \vec{PQ} sobre el vector normal \vec{n} del plano (la componente). Esto significa que

$$d = \left| \frac{\vec{PQ} \circ \vec{n}}{\|\vec{n}\|} \right|$$

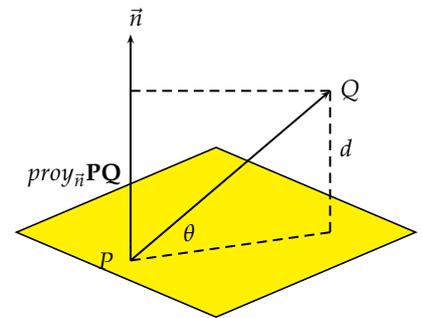


figura 1.26

Se observa que esta expresión se puede obtener por geometría elemental, ya que en el triángulo que forman el vector \vec{PQ} , su proyección sobre el normal, y el segmento bajado perpendicular de Q a \vec{n} , es

$$d = \|Q - P\| \cos \theta = \frac{\|Q - P\| \|\vec{n}\| \cos \theta}{\|\vec{n}\|} = \frac{(Q - P) \circ \vec{n}}{\|\vec{n}\|} = \frac{\vec{PQ} \circ \vec{n}}{\|\vec{n}\|}$$

Ejemplo 1.7.6. La distancia del punto $Q(2, 6, 9)$ al plano $x + 2y + 2z = 8$ según la ecuación 1.3 es

$$d = \frac{|8 - 2 - 12 - 18|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{24}{3} = 8$$

Si se opta por hallar la distancia usando la forma vectorial, escojemos un punto P en el plano haciendo $x = y = 0$, lo que implica que $z = 4$. Luego se forma el vector $Q(2, 6, 9) - P(0, 0, 4) = (2, 6, 5)$. Ahora, un vector normal del plano es $\vec{n} = (1, 2, 2)$. De aquí que $\|\vec{n}\| = 3$, $(Q - P) \circ \vec{n} = 24$. En consecuencia

$$d = \frac{(Q - P) \circ \vec{n}}{\|\vec{n}\|} = \frac{24}{3} = 8$$

Evidentemente, el mismo resultado anterior.

Familias de Planos

Consideremos como punto de partida el plano de ecuación

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

entonces el plano $Ax + By + Cz + k = 0$, en donde $k \in \mathbb{R}$, representa al conjunto de **todos** los planos que son paralelos al plano dado. Esto se conoce como **familia** de planos.

Una familia más interesante de planos es aquella que pasa por la intersección de dos planos dados en la forma

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 & (1) \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 & (2) \end{cases}$$

En este caso, cualquier punto que satisfaga ambas ecuaciones se encuentra sobre la recta de intersección de ambos planos. Es claro entonces, que una recta se puede representar mediante dos planos cualquiera que se intersecten. Más aún, puesto que la recta está en cada plano y sus ecuaciones son conocidas, entonces el vector director de la recta es perpendicular a los vectores directores de esos planos. La ecuación

$$k_1(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + k_2(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

representa **todos** los planos que pasan por la intersección de los planos dados (1) y (2), siempre que las constantes reales k_1 y k_2 no sean cero simultáneamente. Esta ecuación se puede reducir al dividir por $k_1 \neq 0$ a

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + k(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

El número real k se denomina parámetro.

Ejemplo 1.7.7. Los planos $5x - 2y + 3z = 13$ y $3x - y + z = 0$ se intersectan. Hallemos el vector director de la recta de intersección.

Los vectores normales de ambos planos son, respectivamente, $(5, -2, 3)$ y $(3, -1, 1)$. Sean (a, b, c) las coordenadas del vector director a encontrar. Como el vector director de la recta en el plano debe ser perpendicular a los otros dos vectores, entonces se tienen las siguientes relaciones

$$\begin{cases} 5a - 2b + 3c = 0 \\ 3a - b + c = 0 \end{cases}$$

Al multiplicar por -2 la segunda ecuación y sumarla a la primera se obtiene $c = a$. Al reemplazar $c = a$ en la segunda ecuación se halla $b = 4a$. Luego, el vector director es de la forma $(a, 4a, a)$. Con $a = 1$ se tiene como vector director $\vec{d} = (1, 4, 1)$.

Como alternativa para hallar el director de la recta se puede usar el producto vectorial de los vectores de ambos planos. Se tiene

$$\vec{d} = (5, -2, 3) \times (3, -1, 1) = (1, 4, 1)$$

1.8. Distancia punto - recta

Vamos a determinar la distancia entre un punto y una recta sin tener a mano ninguna fórmula, usando sólo los conocimientos previos.

Ejemplo 1.8.1. Hallemos distancia del punto $(6, -3, 3)$ a la recta $\{2x + 2y + z = 0, 4x - y - 3z - 15 = 0\}$.

Se observa que la recta viene dada por la intersección de dos planos. Para determinar el vector director de la recta de intersección usemos el producto cruz de los vectores normales de cada plano

$$\vec{d} = (2, 2, 1) \times (4, -1, -3) = (-5, 10, -10)$$

por simplicidad nos quedamos (al dividir por 5) con el vector $\vec{d} = (-1, 2, -2)$. Con este dato se puede hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $(6, -3, 3)$ y es perpendicular a la recta, ya que siendo perpendicular, el vector \vec{d} sirve de normal de este plano a determinar. Se tiene

$$(x - 6, y + 3, z - 3) \circ (-1, 2, -2) = 0 \implies x - 2y + 2z - 18 = 0$$

Ahora se determina el punto de intersección de la recta con el plano resolviendo el sistema

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 0 \\ 4x - y - 3z = 15 \\ x - 2y + 2z = 18 \end{cases}$$

Se encuentra que $x = 4, y = -5, z = 2$. Es decir, el punto tiene coordenadas $(4, -5, 2)$. Finalmente, se calcula la distancia entre dos puntos del espacio (entre este punto y el que es dado). Se halla que

$$d[(4, -5, 2), (6, -3, 3)] = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = 3$$

Fórmula Vectorial

La forma mostrada para hallar la distancia de un punto a una recta resulta engorrosa. Desde el punto de vista de la geometría vectorial, la distancia de un punto a una recta es bastante más simple. En efecto, consideremos la figura 1.27, en la cual, A es el punto desde el cual se quiere hallar la distancia a la recta L que pasa por el punto P y tiene vector director \vec{d} . Si θ es el ángulo que forman los vectores \vec{d} y \vec{PA} , entonces la distancia d del punto A a la recta es $d = \|\vec{PA}\| \operatorname{sen} \theta$. Además, se sabe que el área que generan dos vectores \vec{a} y \vec{b} de origen común es

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \operatorname{sen} \theta$$

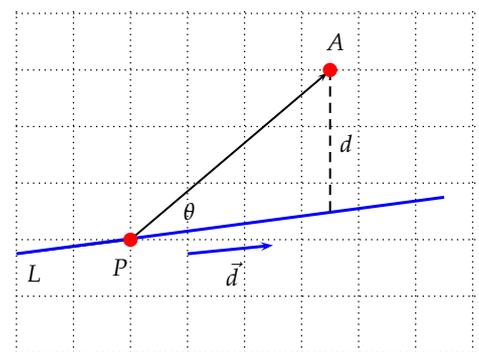


figura 1.27

Como los vectores \vec{PA} y \vec{d} tienen origen común, ellos satisfacen la misma propiedad, es decir,

$$\|\vec{PA} \times \vec{d}\| = \|\vec{PA}\| \|\vec{d}\| \operatorname{sen} \theta$$

De lo cual se deduce que,

$$d = \|\vec{PA}\| \operatorname{sen} \theta = \frac{\|\vec{PA} \times \vec{d}\|}{\|\vec{d}\|}$$

Ejemplo 1.8.2. Usemos la fórmula deducida para hallar distancia del punto $A = (6, -3, 3)$ a la recta de intersección de los planos $\{2x + 2y + z = 0, 4x - y - 3z - 15 = 0\}$.

Primero vamos a determinar cual es la ecuación paramétrica de esta recta. Para ello, del sistema

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 0 \\ 4x - y - 3z = 15 \end{cases}$$

Se elimina la variable z al multiplicar por 3 la primera ecuación y sumarla a la segunda. Se obtiene $2x + y = 3$. Si se considera $x = t$, entonces $y = 3 - 2t$, $z = 2t - 6$. Con ello, se tiene la ecuación paramétrica

$$\{x = t, y = 3 - 2t, z = -6 + 2t\}$$

Es claro entonces, que su vector director es $\vec{d} = (1, -2, 2)$ y que un punto P sobre la recta, para $t = 0$, es $(0, 3, -6)$. El vector $\vec{PA} = (6, -3, 3) - (0, 3, -6) = (6, -6, 9)$. En consecuencia

$$d = \frac{1}{\|(1, -2, 2)\|} \|(1, -2, 2) \times (6, -6, 9)\|$$

$$= \frac{1}{3} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 2 \\ 6 & -6 & 9 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \|(-6, 3, 6)\| = \frac{1}{3} \sqrt{81} = 3$$

Ejemplo 1.8.3. Halleemos la distancia del punto $A(4, 7, 9)$ a la recta $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{6} = \frac{z-8}{-2}$.

Un punto sobre la recta es $P = (1, 2, 8)$. El vector director es $\vec{d} = (3, 6, -2)$. La norma de éste es $\|\vec{d}\| = 7$. Ahora se forma el vector $\vec{PA} = A - P = (3, 5, 1)$. Con estos datos se tiene:

$$(A - P) \times \vec{d} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & -2 \end{vmatrix} = (-16, 9, 3) \implies \|(A - P) \times \vec{d}\| = \sqrt{346}$$

En consecuencia, la distancia es $d = \frac{\sqrt{346}}{7} = 2,66$.

1.9. Planos Proyectores de la Recta

Suponemos que una recta se puede representar por dos planos cualesquiera de la familia

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + k(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

Dado que existe un número infinito de pares de planos que definen la recta por intersección, es natural escoger planos con ciertas características que los hagan interesantes. Por ejemplo, aquellos planos que pasan por la recta y son perpendiculares a los planos coordenados, llamados *Planos Proyectores* de la recta. Para su determinación es suficiente eliminar una de las variables en la familia para cierto valor del parámetro k .

Ejemplo 1.9.1. Hallemos los planos proyectores de la recta $\{5x - 2y + 3z = 13, 3x - y + z = 0\}$.

Al tomar el valor $k = -3$ en la familia $5x - 2y + 3z - 13 + k(3x - y + z) = 0$, se elimina la variable z . Esto da como ecuación del plano proyector $-4x + y - 13 = 0$, en el plano xy . Las ecuaciones restantes de los planos proyectores son

$$-x + z - 13 = 0, \quad -y + 4z - 39 = 0$$

Las ecuaciones de los planos proyectores sirven, por ejemplo, para resolver el siguiente problema.

Ejemplo 1.9.2. Probemos que la recta de intersección de los planos $3x + 4y - 2z + 7 = 0$ y $x - y - 3z + 3 = 0$, está contenida en el plano $x + 6y + 4z + 1 = 0$.

Al eliminar la variable y en los planos que definen la recta se obtiene el plano proyector $7x - 14z + 19 = 0$ en el plano xz . De la misma forma, al eliminar la variable x , el plano proyector es $7y + 7z - 2 = 0$ en el plano yz . Al sustituir los valores de x e y en función de z , en la ecuación del plano, se obtiene la identidad

$$\frac{14z - 19}{7} + 6 \cdot \frac{2 - 7z}{7} + 4z + 1 = 0$$

lo que muestra que los puntos de la recta satisfacen la ecuación del plano.

1.10. Posiciones Relativas de Rectas y Planos

Posiciones de dos planos

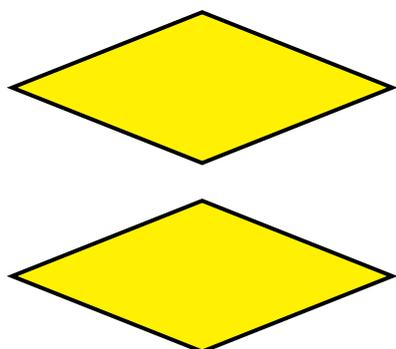
Sean P_1 y P_2 los planos de ecuaciones

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \quad \text{y} \quad a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

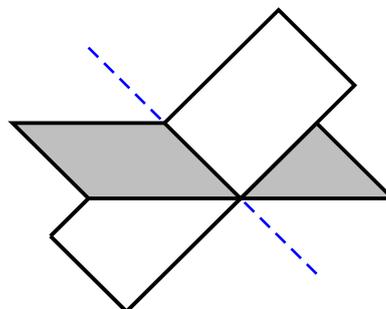
Si A es la matriz de los coeficientes de este sistema y A' la de la matriz ampliada, entonces caben las siguientes posibilidades:

- $r(A) = r(A') = 2 \implies$ los planos se cortan en una recta

- $r(A) = 1 \neq r(A') = 2 \implies$ los planos son paralelos, y distintos
- $r(A) = r(A') = 1 \implies$ los planos son coincidentes



planos paralelos



planos que se intersectan

figura 1.28

Posiciones de recta y plano

Se consideran la recta y el plano en la forma:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1d = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2d = d_2 \end{cases} \quad P : \quad ax + by + cz = d$$

Sea A la matriz del sistema formado por estas tres ecuaciones, y A' la ampliada. Esto es,

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a & b & c \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$$

Existen las siguientes alternativas:

- $\text{rang}(A) = 2, \text{rang}(A') = 2 \implies$ la recta está contenida en el plano.
- $\text{rang}(A) = 2, \text{rang}(A') = 3 \implies$ la recta es paralela al plano, y no contenida en él.
- $\text{rang}(A) = 3, \text{rang}(A') = 3 \implies$ la recta corta en un punto al plano.

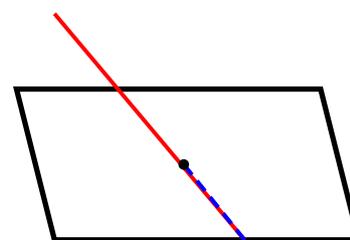
Cabe destacar que, si $\det(A) = 0$, entonces la recta y el plano son paralelos



recta contenida en el plano



recta paralela al plano



recta intersecta al plano

figura 1.29

1.11. Superficies

Por **superficie** se entiende la gráfica de una ecuación de tres variables de la forma $F(x, y, z) = 0$. En particular, la ecuación lineal del plano $ax + by + cz + d = 0$ es una superficie. Se denomina **superficie cuadrática** cuando $F(x, y, z) = 0$ es el lugar geométrico de un polinomio de segundo grado en las variables x, y, z . Esto es

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + K = 0$$

1.11.1. Planos

Para trazar la gráfica de un plano, en general de toda superficie, es conveniente hallar la denominada **traza** de la gráfica en los planos coordenados, esto es, la recta de intersección de la gráfica del plano con cada uno de los planos coordenados. Se entiende por plano coordenado a cada uno de los planos xy, xz, yz . Por ejemplo, si la ecuación del plano es $ax + by + cz + d = 0$, entonces con $z = 0$ se obtiene $ax + by + d = 0$ ecuación de una recta que resulta ser la traza de la gráfica del plano en el plano xy . Análogamente, se encuentran las dos trazas restantes.

Ejemplo 1.11.1. *Tracemos la gráfica de la ecuación $x + y + z = 1$*

Si $z = 0$, entonces la traza en el plano xy es la recta $x + y = 1$, la que tiene como puntos de intersección con los ejes los puntos $(1, 0, 0)$ y $(0, 1, 0)$. De manera análoga, se encuentra que las rectas $x + z = 1, y + z = 1$ son las trazas en los planos xz e yz respectivamente. La gráfica de la ecuación $x + y + z = 1$, en el primer octante, la muestra la figura 1.30.

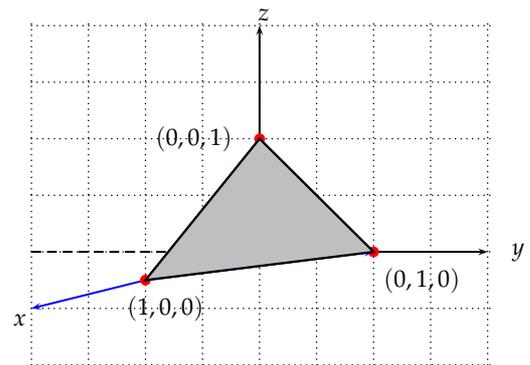


figura 1.30

1.11.2. Cilindros

Un cilindro está generado por una curva plana llamada **directriz** y una recta denominada **generatriz**, que se mueve paralelamente a si misma, apoyándose en la directriz,

Como lugar geométrico, el cilindro es el conjunto de puntos que traza una recta que se desplaza paralelamente a otra recta fija llamada **generatriz**, apoyándose en una curva fija que es la **directriz** del cilindro. Sus ecuaciones son de la forma:

$$f(x, y) = 0, \quad f(x, z) = 0, \quad f(y, z) = 0$$

En el primer caso, la directriz es paralela al eje z , en el segundo paralela al eje y , y en el tercero, paralela al eje x . Una característica primordial para identificar cilindros en el espacio es que éste tiene omitida una de sus variables.

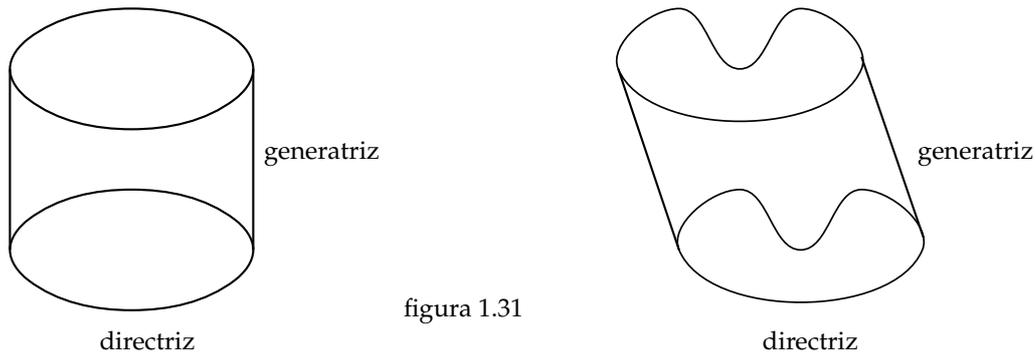


figura 1.31

El cilindro también puede ser generado por “revolución”. En un cilindro de revolución la generatriz es una recta paralela al eje de revolución. Así, el cilindro recto se puede obtener al girar en 360° un rectángulo alrededor de uno de sus lados (figura 1.32).

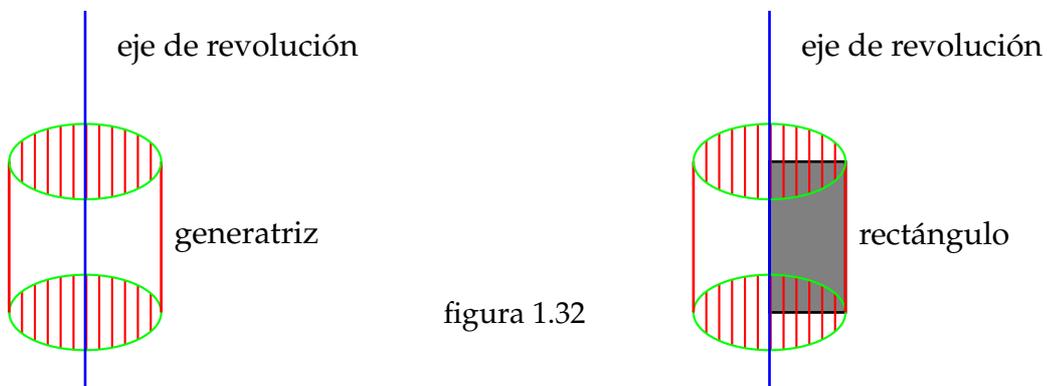


figura 1.32

Ejemplo 1.11.2. Los cilindros $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + z^2 = 1$, $y^2 + z^2 = 1$ se denominan circulares pues la directriz de cada uno de ellos es una circunferencia. La figura 1.33 muestra que ellos crecen en la dirección de la variable faltante.

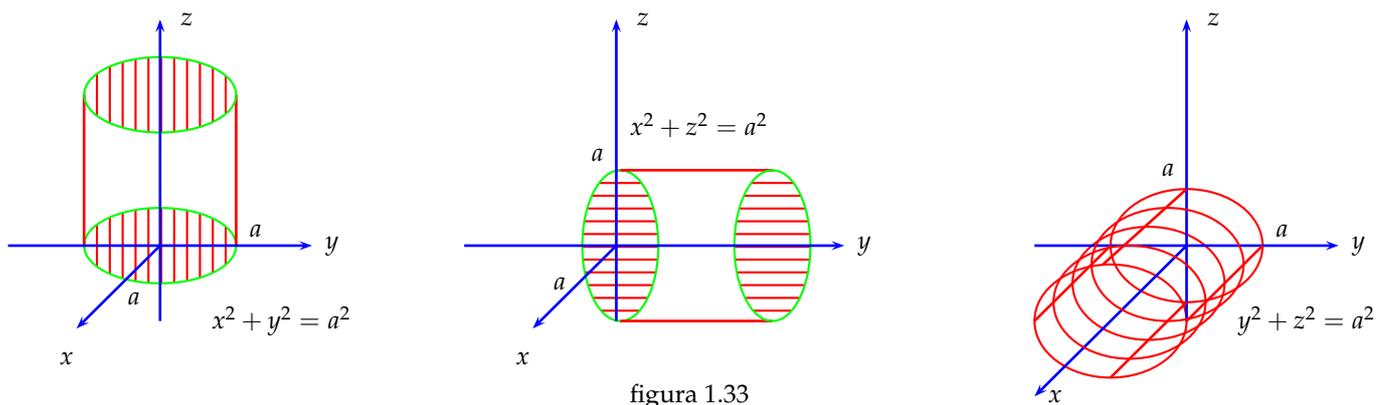


figura 1.33

Como norma general, para intentar la gráfica de una superficie se puede hallar, en primer lugar, la curva de intersección de la superficie con los planos coordenados o con planos paralelos a los

1.11 Superficies

coordenados, y examinar estas curvas (**trazas**).

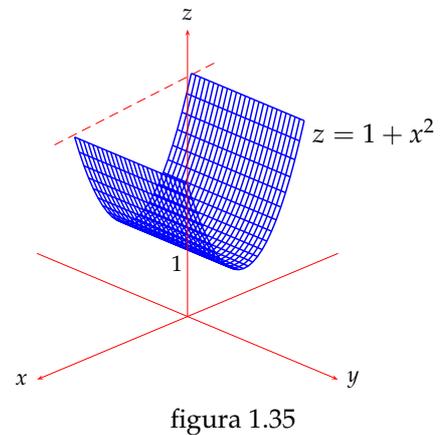
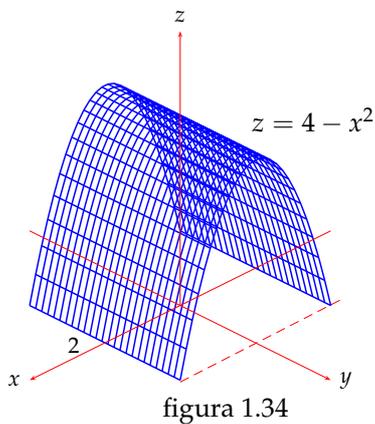
Ejemplo 1.11.3. Las superficies

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2, \quad b^2x^2 + a^2z^2 = a^2b^2, \quad b^2y^2 + a^2z^2 = a^2b^2$$

son cilindros elípticos, que al intersectárseles con el plano coordenado faltante tienen como curva de intersección una **elipse**. De igual modo, las ecuaciones

$$z^2 = 4ax, \quad z^2 = 4ay, \quad x^2 = 4ay, \quad x^2 = 4az, \quad y^2 = 4ax, \quad y^2 = 4az$$

son cilindros parabólicos. Es sencillo ver que al intersectarlos con el plano coordenado faltante, la curva de intersección es una **parábola**. (figuras 1.34 y 1.35).



1.11.3. Esferas

La esfera es el lugar geométrico de todos los puntos que mantienen una distancia constante a un punto fijo. La distancia constante se denomina **radio** y el punto fijo **centro**. Si el centro es el punto (h, k, j) y el radio es r , entonces un punto cualquiera en la esfera de coordenadas (x, y, z) satisface la ecuación

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - j)^2 = r^2$$

Si el centro es el punto $(0, 0, 0)$, entonces la ecuación de la esfera es

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

La figura 1.36 muestra una esfera de centro $(1, -1, 2)$.

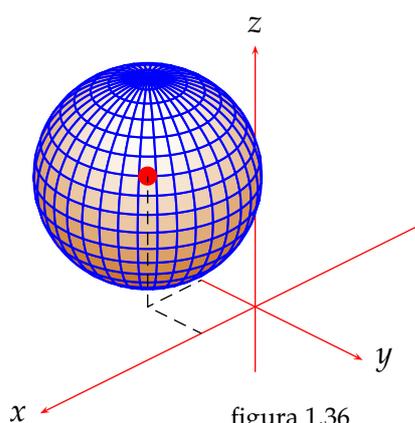


figura 1.36

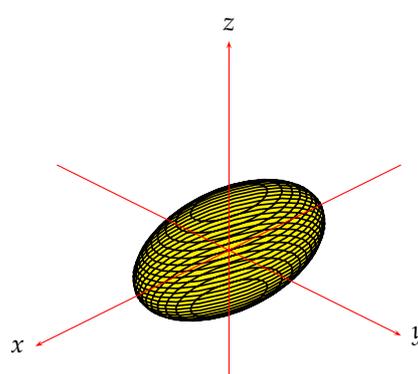


figura 1.37

La traza de la esfera en el plano xy se obtiene haciendo $z = 0$ y resulta la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$. Las trazas en los planos restantes son también circunferencias. Una parametrización de la esfera es

$$x = r \cos(t) \cos(u), y = r \sin(t) \cos(u), z = r \sin(u), \quad t \in [0, 2\pi], \quad u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Una parametrización entrega una mejor definición al usar un programa computacional. Más adelante estudiaremos superficies parametrizadas.

1.11.4. Elipsoides

El elipsoide es el lugar geométrico de todos los puntos que satisfacen la relación

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} + \frac{(z-j)^2}{c^2} = 1$$

Se puede verificar fácilmente, que las trazas, es decir, la intersección con planos paralelos a los planos coordenados son elipses. Si $a = b$ ó $a = c$, ó $b = c$, se obtiene una **superficie de revolución**, en el cual la generatriz es una elipse que gira alrededor de uno de sus ejes.

Ejemplo 1.11.4. La ecuación $x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 16$ es un elipsoide de centro en el punto $(0,0,0)$ y semiejes $a = 4$, $b = c = 1$. Se muestra en la figura 1.37. Una parametrización de este elipsoide es

$$x = 2\sqrt{4-u^2} \cos t, \quad y = \sqrt{4-u^2} \sin t, \quad z = u, \quad t \in [0, 2\pi], \quad u \in [-2, 2]$$

1.11.5. Conos

El cono es el lugar geométrico de todos los puntos que satisfacen una relación de la forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0, \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 0,$$

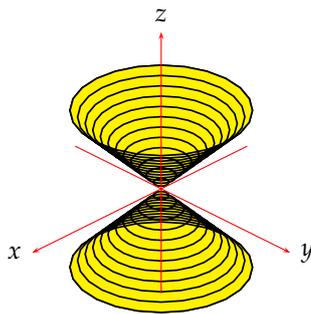


figura 1.38

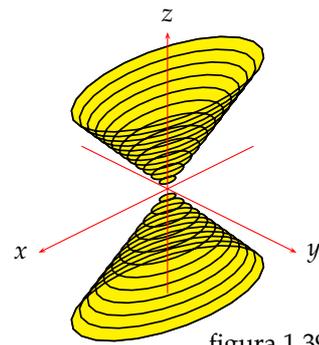


figura 1.39

La ecuación general, de la primera forma, del cono en el espacio tiene la forma

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} - \frac{(z - j)^2}{c^2} = 0$$

Este tipo de cono es elíptico si $a \neq b$. Si $a = b$ el cono es circular recto. Las trazas de un cono sobre los planos coordenados son **rectas** o **puntos**. En un cono de revolución la generatriz es una recta que corta al eje de revolución en el vértice. La figura 1.38 muestra el cono de ecuación $z^2 = x^2 + y^2$.

Ejemplo 1.11.5. La ecuación $z^2 = x^2 + 4y^2$ representa un cono elíptico con elipses como traza para $z \neq 0$. Si $z = 0$, entonces $x = y = 0$, lo que significa que la traza es un punto (figura 1.39). Su parametrización es

$$x = u \cos(t), \quad y = \frac{1}{2} u \sin(t), \quad z = u, \quad t \in [0, 2\pi], u \in [-2, 2]$$

1.11.6. Paraboloide elíptico

El paraboloides elíptico es el lugar geométrico de todos los puntos que satisfacen una relación de la forma

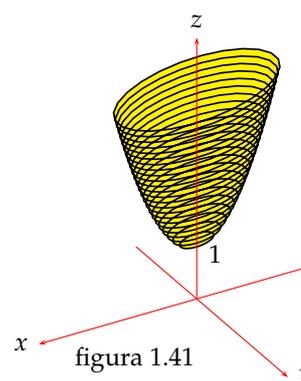
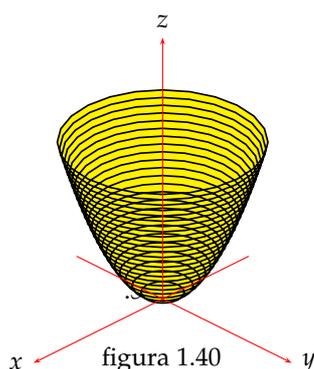
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = c^2 z, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = b^2 y, \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = a^2 x$$

La ecuación general, de la primera forma, del paraboloides elíptico en el espacio es

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = c^2 (z - j)$$

La traza en el plano xy es un punto, las otras trazas son parábolas. Si $a = b$, se tiene un **paraboloides de revolución**, que se obtiene haciendo girar la traza xz alrededor del eje z .

La figura 1.40 muestra el paraboloides de ecuación $z = x^2 + y^2$.



En la forma general de la ecuación cuadrática, el paraboloide elíptico se caracteriza por tener una de las constantes A , B , o C igual a cero, y las restantes del mismo signo.

Ejemplo 1.11.6. La ecuación $z - 1 = x^2 + 4y^2$ es de un paraboloide, cuya traza en el plano yz es $z = 1 + 4y^2$, una parábola. Del mismo modo, su traza en el plano xz es la parábola $z = 1 + x^2$. No existe traza en el plano xy pues, $x^2 + 4y^2 = -1$ es imposible. Si $z = 1$ la traza sobre este plano es un punto y si $z > 1$ las trazas sobre estos planos son elipses (figura 1.41). Una parametrización de este paraboloide es

$$x = \sqrt{u} \cos(t), \quad y = \frac{1}{2} \sqrt{u} \sin(t), \quad z = u + 1, \quad t \in [0, 2\pi], \quad u \in [0, 3]$$

1.11.7. Paraboloide hiperbólico

El paraboloide hiperbólico es el lugar geométrico de todos los puntos que satisfacen una relación de la forma

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = c^2 z, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = b^2 y, \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = a^2 x$$

La ecuación general, de la primera forma, del paraboloide hiperbólico en el espacio es

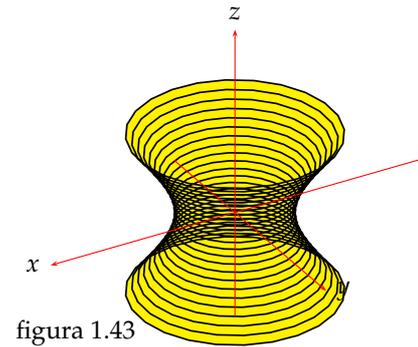
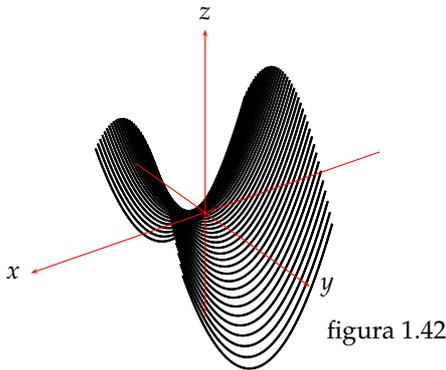
$$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = c^2 (z - j)$$

La traza en el plano xy son rectas. En los otros planos es una parábola. Esta superficie no es de revolución. Cuando se trata de un hiperboloide de revolución la generatriz es una hipérbola que gira alrededor de uno de sus ejes de simetría.

En la forma general de la ecuación cuadrática, el paraboloide hiperbólico se caracteriza por tener una de las constantes A , B , o C igual a cero, y las restantes de distinto signo.

Ejemplo 1.11.7. La ecuación $x^2 - y^2 = z$ representa un paraboloide hiperbólico de centro el origen. Sus trazas son una parábola y dos hipérbolas (figura 1.42). Una parametrización es

$$x = t, \quad y = u, \quad z = t^2 - u^2, \quad t \in [-2, 2], \quad u \in [-2, 2]$$



1.11.8. Hiperboloide de una hoja

El hiperboloide de una hoja es el lugar geométrico de todos los puntos que satisfacen una relación de la forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

La ecuación general de la primera forma es

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} - \frac{(z - j)^2}{c^2} = 1$$

En la forma general de la ecuación cuadrática, el hiperboloide de una hoja se caracteriza por tener sus constante A, B, C diferentes de cero, y una de ellas tiene signo negativo. Las trazas de este hiperboloide son elipses o hipérbolas. Si $a = b$ se tiene una superficie de revolución, haciendo girar la traza xz alrededor del eje z .

Ejemplo 1.11.8. La figura 1.43 muestra el hiperboloide de una hoja y de ecuación $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

Una parametrización es

$$x = \sqrt{1 + u^2} \cos(t), \quad y = \sqrt{1 + u^2} \sin(t), \quad z = u, \quad t \in [0, 2\pi], \quad u \in [-2, 2]$$

Esta parametrización se obtiene de escribir

$$x^2 + y^2 = 1 + z^2 = \left(\sqrt{1 + z^2}\right)^2$$

y utilizar las funciones trigonométricas de seno y coseno en su identidad básica

$$\text{sen}^2 t + \text{cos}^2 t = 1$$

1.11.9. Hiperboloide de dos hojas

El hiperboloide de dos hojas es el lugar geométrico de todos los puntos que satisfacen una relación de la forma

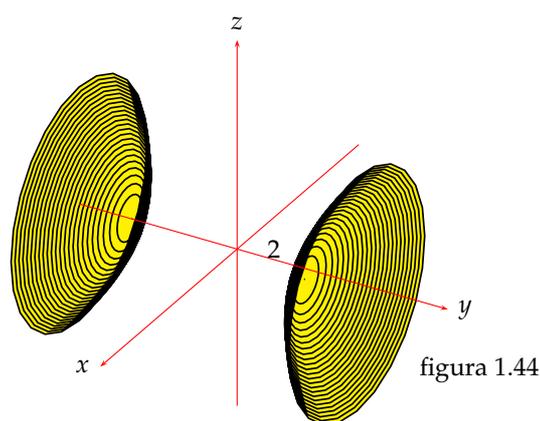
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

La ecuación general de la primera forma es

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} - \frac{(z-j)^2}{c^2} = 1$$

Esta expresión carece de traza yz , ya que con $x = h$ se obtiene una suma de cuadrados igual a un número negativo. Las trazas restantes son hipérbolas. Si $b = c$, se tiene una superficie de revolución, que se obtiene haciendo girar la traza xz alrededor del eje z .

En la forma general de la ecuación cuadrática, el hiperboloide de dos hojas se caracteriza por tener sus constante A, B, C diferentes de cero, y dos de ellas son de signo negativo.



Ejemplo 1.11.9. La ecuación $x^2 - y^2 + z^2 + 4 = 0$ representa un Hiperboloide de dos hojas. Su traza en los planos xy e yz son hipérbolas. Su traza en el plano xz es el conjunto vacío. Figura 1.44

Una parametrización de esta superficie se obtiene al escribir $(\sqrt{y^2 - 4})^2 = x^2 + z^2$, y es

$$x = \sqrt{u^2 - 4} \cos(t), \quad y = u, \quad z = \sqrt{u^2 - 4} \operatorname{sen}(t), \quad t \in [0, 2\pi], \quad u \geq 2$$

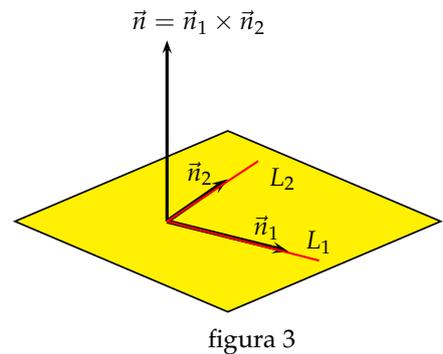
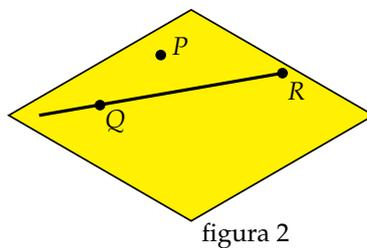
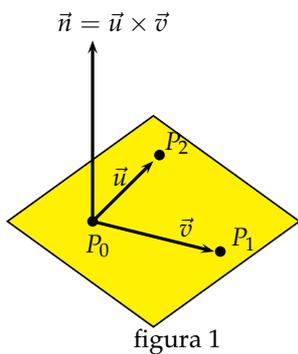
para la parte derecha, en tanto para la izquierda es

$$x = \sqrt{u^2 - 4} \cos(t), \quad y = -u, \quad z = \sqrt{u^2 - 4} \operatorname{sen}(t), \quad t \in [0, 2\pi], \quad u \geq 2$$

Caminando entre rectas y planos

Estos son algunos consejos que puedes tomar en cuenta a la hora de encontrarte con rectas y planos.

1. Para hallar la ecuación vectorial de una recta que pasa por dos puntos P_1 y P_2 , basta tomar como vector director al vector $\vec{P_1P_2}$ y tomar como punto a cualquiera de los dos.
2. Si conoces las ecuaciones paramétricas de la recta, los coeficientes de t nos dan un vector paralelo a la recta y los términos constantes de la derecha nos dan un punto por donde pasa la recta.
3. Para obtener puntos de una recta de la que se tienen sus ecuaciones paramétricas, basta dar diferentes valores al parámetro.
4. Si necesitas la intersección de dos rectas, se igualan sus ecuaciones y se resuelve.
5. Si el vector director (a, b, c) de una recta tiene dos componentes igual a cero, entonces la recta es perpendicular a alguno de los planos coordenados.
6. La normal de un plano se obtiene con dos vectores no paralelos que pertenezcan al plano.
7. Para hallar la ecuación de un plano que pasa por tres puntos P_0, P_1 y P_2 , basta hallar dos vectores cualquiera que los unan y luego tomar como normal al plano al producto cruz de esos vectores y tomar como punto a cualquiera de los tres (figura 1).
8. Para hallar la ecuación de un plano que pasa por un punto P y contiene a una recta L , se hallan dos puntos Q y R de la recta y se está en el caso anterior (figura 2).
9. Para hallar la ecuación de un plano que contiene a dos rectas L_1 y L_2 que se cortan con vectores directores \vec{n}_1 y \vec{n}_2 , la normal está dada por $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ y luego tomamos un punto sobre una de las rectas (figura 3).



10. Si se da la ecuación cartesiana de un plano, los coeficientes de la ecuación dan \vec{n} .

11. Si nos dan una recta L perpendicular a un plano, para hallar la ecuación del plano se toma como normal al vector de dirección de la recta.
12. Si nos piden una recta L perpendicular a un plano, se toma como vector director de la recta a la normal al plano (figura 4).
13. Para hallar la distancia entre planos paralelos basta hallar la distancia entre un punto cualquiera del primer plano y el segundo plano.

1.12. Problemas resueltos

Ejemplo 1.12.1. Los puntos $(1, -1, 3)$, $(2, 1, 7)$ y $(4, 2, 6)$ son vértices de un triángulo rectángulo

En efecto, si consideramos los vectores

$$\vec{A} = (1, 2, 4), \vec{B} = (3, 3, 3), \vec{C} = (2, 1, -1)$$

obtenidos al restar las coordenadas de los puntos dados, se tiene

$$\angle \vec{AB} = \frac{21}{\sqrt{21}\sqrt{27}} = \sqrt{\frac{7}{9}}, \quad \angle \vec{BC} = \frac{6}{\sqrt{27}\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{2}{9}}, \quad \angle \vec{AC} = 0$$

Se concluye de $\angle \vec{AC} = 0$, que el triángulo es rectángulo.

Ejemplo 1.12.2. Los puntos $(-3, 2, 4)$, $(6, 1, 2)$ y $(-12, 3, 6)$ son colineales.

Para probar esto, es suficiente hallar distancias:

$$\begin{aligned} d[(-3, 2, 4), (6, 1, 2)] &= \sqrt{81 + 1 + 4} = \sqrt{86} \\ d[(-3, 2, 4), (-12, 3, 6)] &= \sqrt{81 + 1 + 4} = \sqrt{86} \\ d[(6, 1, 2), (-12, 3, 6)] &= \sqrt{324 + 4 + 16} = \sqrt{344} \end{aligned}$$

Se observa que $\sqrt{86} + \sqrt{86} = 2\sqrt{86} = \sqrt{344}$. Esto demuestra que los puntos son colineales.

Ejemplo 1.12.3. Los puntos medios de un triángulo son los puntos $(3, 2, 3)$, $(-1, 1, 5)$ y $(0, 3, 4)$. Vamos a encontrar los vértices del triángulo.

Para esto vamos a considerar que los vértices tienen coordenadas (x_1, x_2, x_3) , (y_1, y_2, y_3) , (z_1, z_2, z_3) . Se tiene que

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) = (3, 2, 3) \\ \frac{1}{2}(x_1 + z_1, x_2 + z_2, x_3 + z_3) = (-1, 1, 5) \\ \frac{1}{2}(y_1 + z_1, y_2 + z_2, y_3 + z_3) = (0, 3, 4) \end{cases}$$

Este sistema da origen a las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} x_1 + y_1 &= 6, & x_2 + y_2 &= 4, & x_3 + y_3 &= 6 \\ x_1 + z_1 &= -2, & x_2 + z_2 &= 2, & x_3 + z_3 &= 10 \\ y_1 + z_1 &= 0, & y_2 + z_2 &= 6, & y_3 + z_3 &= 8 \end{aligned}$$

Al resolver se encuentra $z_1 = -4$; $y_1 = 4$; $x_1 = 2$; $z_2 = 2$; $y_2 = 4$; $x_2 = 0$; $z_3 = 6$; $y_3 = 2$; $x_3 = 4$. Con ello se tiene que los vértices tienen coordenadas $(2, 0, 4)$, $(4, 4, 2)$ y $(-4, 2, 6)$.

Ejemplo 1.12.4. La ecuación paramétrica de la recta que pasa por el punto $(4, -5, 0)$ y es perpendicular al plano $x + 3y - 6z - 8 = 0$ es

$$\vec{X} = (4, -5, 0) + t(1, 3, -6)$$

Ejemplo 1.12.5. Hallemos la ecuación paramétrica de la recta que pasa por el origen y es perpendicular a las rectas de directores $(4, 2, 1)$ y $(-3, -2, 1)$.

Sea (d_1, d_2, d_3) el vector director de la recta que se busca. Entonces se satisface que

$$\begin{cases} (d_1, d_2, d_3) \circ (4, 2, 1) = 0 \\ (d_1, d_2, d_3) \circ (-3, -2, 1) = 0 \end{cases}$$

Al resolver se encuentra; $d_1 = -2d_3$, $d_2 = \frac{7}{2}d_3$, $d_3 = d_3$, de modo que, en particular se tiene que $\vec{d} = (4, -7, -2)$. Luego, la ecuación de la recta es,

$$\vec{X} = t(4, -7, -2)$$

Ejemplo 1.12.6. Hallemos ecuación del plano que contiene los puntos $(3, 4, 1)$, $(1, 7, 1)$ y $(-1, -2, 5)$.

Con los tres puntos dados se forman dos vectores del mismo origen

$$\vec{A} = (3, 4, 1) - (1, 7, 1) = (2, -3, 0), \quad \vec{B} = (3, 4, 1) - (-1, -2, 5) = (4, 6, -4)$$

Luego, el vector normal \vec{n} que se necesita es

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 0 \\ 4 & 6 & -4 \end{vmatrix} = (12, 8, 24)$$

En consecuencia, la ecuación del plano es

$$(x - 3, y - 4, z - 1) \cdot (12, 8, 24) = 0$$

que escrito en su forma general es $3x + 2y + 6z - 23 = 0$.

Ejemplo 1.12.7. Hallemos la ecuación del plano que contiene al punto $(4, 0, -2)$ y es perpendicular a la recta que pasa por los puntos $(2, 2, -4)$ y $(7, -1, 3)$.

Como el plano es perpendicular a la recta, el vector director de ésta sirve como vector normal del plano. Esto es, $\vec{n} = (5, -3, 7)$. Con el vector normal y el punto en el plano concluimos que

$$(x - 4, y, z + 2) \circ (5, -3, 7) = 0$$

de donde, la ecuación del plano es $5x - 3y + 7z - 6 = 0$.

Ejemplo 1.12.8. Hallemos la ecuación del plano que contiene al punto $(4, 0, -2)$ y es perpendicular a los planos $x - y + z = 0$ y $2x + y - 4z - 5 = 0$.

Suponemos que el vector normal tiene la forma $\vec{n} = (a, b, c)$. Se debe cumplir que

$$\begin{cases} (a, b, c) \circ (1, -1, 1) = 0 \\ (a, b, c) \circ (2, 1, -4) = 0 \end{cases}$$

de lo cual, el vector normal tiene coordenadas, $\vec{n} = (1, 2, 1)$, y en consecuencia,

$$(x - 4, y, z + 2) \cdot (1, 2, 1) = 0 \implies x + 2y + z - 2 = 0$$

es la ecuación del plano buscado.

Ejemplo 1.12.9. Hallemos el trabajo que realiza la fuerza $\vec{F} = (5, 0, -3)$ para mover un objeto a lo largo de la recta que une los puntos $P = (4, 1, 3)$ y $Q = (-5, 6, 2)$, en donde la magnitud de la fuerza está medida en libras y la distancia en pies.

Recordemos que, si la fuerza \vec{F} es constante y se desea mover un objeto una distancia d a lo largo de una recta actuando la fuerza en la misma dirección del movimiento, entonces

$$T = \vec{F} \cdot d$$

El vector desplazamiento es

$$\vec{d} = Q - P = (-9, 5, -1)$$

En consecuencia

$$T = (5, 0, -3) \circ (-9, 5, -1) = -42 \text{ plb}$$

Ejemplo 1.12.10. Probemos que los vectores $(\vec{A} - c\vec{B})$ y \vec{B} son perpendiculares, con la condición que \vec{A} y \vec{B} son distintos de cero y $c = \frac{\vec{A} \circ \vec{B}}{\|\vec{B}\|^2}$.

$$\begin{aligned} (\vec{A} - c\vec{B}) \circ \vec{B} &= \vec{A} \circ \vec{B} - c\vec{B} \circ \vec{B} = \vec{A} \circ \vec{B} - \frac{\vec{A} \circ \vec{B}}{\|\vec{B}\|^2} (\vec{B} \circ \vec{B}) \\ &= \vec{A} \circ \vec{B} - \vec{A} \circ \vec{B} = 0 \end{aligned}$$

Ejemplo 1.12.11. Probemos que las rectas $\frac{x+1}{2} = \frac{y+4}{-5} = \frac{z-2}{3}$ y $\frac{x-3}{-2} = \frac{y+14}{5} = \frac{z-8}{-3}$ son coincidentes.

Para esto es necesario ver que el producto cruz de sus vectores directores es cero.

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -5 & 3 \\ -2 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

y además, el punto $(-1, -4, 2)$ está en ambas rectas.

Ejemplo 1.12.12. La recta $x + 1 = \frac{y-6}{-2} = z$ se encuentra en el plano de ecuación $3x + y - z = 3$.

En efecto, el punto $(0, 4, 1)$ pertenece tanto al plano como a la recta. La ecuación paramétrica de la recta tiene la forma

$$\vec{X} = (-1, 6, 0) + t(1, -2, 1)$$

de la cual se obtiene que el punto $(-1, 6, 0)$ está en la recta y en el plano. Por otra parte, los vectores normal del plano y director de la recta satisfacen

$$(3, 1, -1) \cdot (1, -2, 1) = 0$$

lo que significa que la recta es paralela al plano, pero como ya se han encontrado dos puntos que pertenecen tanto al plano como a la recta, se deduce que la recta está en el plano.

Ejemplo 1.12.13. Hallemos el menor ángulo entre las rectas de ecuaciones $\{x = 2y + 4, z = -y + 4\}$ y $\{x = y + 7, 2z = y + 2\}$.

Escribimos las ecuaciones en forma paramétrica

$$\{x = 2t + 4, y = t, z = 4 - t\}, \quad y \quad \{x = t + 7, y = t, z = 1 + \frac{t}{2}\}$$

Los vectores directores son, respectivamente, $\vec{d}_1 = (2, 1, -1)$ y $\vec{d}_2 = (1, 1, \frac{1}{2})$. En consecuencia

$$\begin{aligned} \sqrt{6} \cdot \sqrt{9} \cdot \cos \theta &= (2, 1, -1) \cdot (2, 2, 1) \\ \cos \theta &= \frac{5}{3\sqrt{6}} \implies \theta = \arccos \frac{5}{3\sqrt{6}} \end{aligned}$$

Ejemplo 1.12.14. Hallemos el plano que contiene el punto $(6, 2, 4)$ y a la recta $\frac{x-1}{5} = \frac{y+2}{6} = \frac{z-3}{7}$.

De la ecuación de la recta parametrizada en la forma

$$\vec{X} = (1, -2, 3) + t(5, 6, 7)$$

obtenemos dos puntos, que por hipótesis, deben estar en el plano. Estos puntos son $(1, -2, 3)$ y $(6, 4, 10)$. Como está dado un tercer punto en el plano, entonces formamos dos vectores,

$$\vec{a} = (6, 2, 4) - (1, -2, 3) = (5, 4, 1), \quad \vec{b} = (6, 2, 4) - (6, 4, 10) = (0, -2, -6)$$

con los cuales encontramos el vector normal

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & -6 \end{vmatrix} = (11, -15, 5)$$

Luego, la ecuación del plano es $11x - 15y + 5z - 56 = 0$

Ejemplo 1.12.15. Hallemos la ecuación del plano que contiene las rectas que se intersectan:

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+2}{3}, \quad \{3x+2y+z+2=0, x-y+2z-1=0\}$$

La parametrización de la primera es

$$x = 2 + 4t, \quad y = -3 - t, \quad z = -2 + 3t$$

Para parametrizar la segunda recta, que es la intersección de dos planos, resolvemos el sistema

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z + 2 &= 0 \\ x - y + 2z - 1 &= 0 \end{aligned}$$

al eliminar la variable z se obtiene $x + y = -1$. Con $x = s$ se obtienen $y = -1 - s, z = -s$, de donde la parametrización de la segunda recta es

$$x = s, \quad y = -1 - s, \quad z = -s$$

Los vectores directores de ambas rectas son $\vec{d}_1 = (4, -1, 3)$ y $\vec{d}_2 = (-1, 1, 1)$, con lo cual, un vector normal al plano es

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-4, -7, 3)$$

Para hallar el punto de intersección de ambas rectas igualamos sus coordenadas usando las parametrizaciones.

$$2 + 4t = s, \quad -3 - t = -1 - s, \quad -2 + 3t = -s$$

de donde $t = 0, s = 2$. Esto significa, que para esos valores de los parámetros s y t se tiene el mismo punto, ¡ el de intersección !, que resulta ser $(2, -3, -2)$. En consecuencia

$$(x - 2, y + 3, z + 2) \cdot (4, 7, -3) = 0 \implies 4x + 7y - 3z + 7 = 0$$

es la ecuación del plano.

Ejemplo 1.12.16. Probemos que las rectas siguientes son paralelas, y hallemos el plano que determinan.

$$\begin{cases} 3x - y - z = 0 \\ 8x - 2y - 3z + 1 = 0 \end{cases} \quad y \quad \begin{cases} x - 3y + z + 3 = 0 \\ 3x - y - z + 5 = 0 \end{cases}$$

Haciendo $z = t$ tenemos las parametrizaciones

$$\left\{ x = \frac{t-1}{2}, y = \frac{t-3}{2}, z = t \right\}, \quad y \quad \left\{ x = \frac{t-3}{2}, y = \frac{t+1}{2}, z = t \right\}$$

siendo claro que los vectores directores de ambas rectas; $\vec{d}_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$ y $\vec{d}_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$ son paralelos. Esto prueba que las rectas son paralelas. Para hallar la ecuación del plano consideremos en la

primera recta los puntos $(1, 0, 3)$ y $(2, 1, 5)$, y en la segunda recta el punto $(0, 2, 3)$. De esta manera, se tienen los vectores

$$\vec{a} = (1, 0, 3) - (2, 1, 5) = (-1, -1, -2), \quad \vec{b} = (1, 0, 3) - (0, 2, 3) = (1, -2, 0)$$

con los cuales se determina el vector normal \vec{n} al plano que se anda buscando

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (-4, -2, 3)$$

Luego, la ecuación del plano es $(x - 1, y, z - 3) \cdot (-4, -2, 3) = 0$. Es decir

$$4x + 2y - 3z + 5 = 0$$

Ejemplo 1.12.17. Hallemos la ecuación paramétrica de la recta que pasa por el origen y es perpendicular a la recta $\frac{1}{4}(x - 10) = \frac{1}{3}y = \frac{1}{2}z$ en su intersección.

Si (d_1, d_2, d_3) es el vector director de la recta, entonces la condición de perpendicularidad hace que se satisfaga $(d_1, d_2, d_3) \cdot (4, 3, 2) = 0$. Por otra parte, el punto de intersección se determina al resolver el par de ecuaciones

$$\{x = 10 + 4t, y = 3t, z = 2t\}, \quad \{x = sd_1, y = sd_2, z = sd_3\}$$

de la segunda y tercera ecuación se obtiene $2d_2 = 3d_3$, de donde $s = t$. Siendo así, $d_2 = 3$, y $d_3 = 2$. Para hallar d_1 consideremos la condición de perpendicularidad, $4d_1 + 3d_2 + 2d_3 = 0$. Al reemplazar $d_2 = 3$, y $d_3 = 2$, se obtiene $d_1 = -\frac{13}{4}$. Con esto, un vector director es $\vec{d} = (13, -12, -8)$. En consecuencia, la ecuación buscada de la recta es

$$\frac{x}{13} = \frac{y}{-12} = \frac{z}{-8}$$

O bien

$$\vec{X} = t(13, -12, -8)$$

Ejemplo 1.12.18. Hallemos la ecuación paramétrica de la recta que pasa por el punto $(2, 0, -4)$ y es paralela a cada uno de los planos $2x + y - z = 0$ y $x + 3y + 5z = 0$.

Si (d_1, d_2, d_3) es el vector director de la recta, entonces se debe cumplir que

$$\begin{aligned} (d_1, d_2, d_3) \circ (2, 1, -1) &= 0 \\ (d_1, d_2, d_3) \circ (1, 3, 5) &= 0 \end{aligned}$$

Al resolver se obtiene como vector director de la recta $\vec{d} = (8, -11, 5)$. De modo que la ecuación de la recta es

$$\vec{X} = (2, 0, -4) + t(8, -11, 5)$$

Ejemplo 1.12.19. *Determinemos si las siguientes rectas son paralelas*

$$\{x = 4 - 2t, y = 1 + 4t, z = 3 + 10t\}, \quad \{x = s, y = 6 - 2s, z = 4 - 5s\}$$

La forma más simple de ver esto es por medio de los vectores directores.

$$\vec{d}_1 = (-2, 4, 10) \quad \vec{d}_2 = (1, -2, -5)$$

dado que existe escalar $k = -2$ tal $k\vec{d}_2 = \vec{d}_1$, se sigue que las rectas son paralelas.

Ejemplo 1.12.20. *Estudiemus la posición relativa de los planos dados, en caso de intersección hallaremos la recta de intersección.*

$$P_1 = 2x - 3y + 4z = 1$$

$$P_2 = x - y - z = 5$$

La respuesta se obtiene estudiando el rango de la matriz de los coeficientes de su ampliada. Veamos que tenemos:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Es sencillo ver que $\text{ran}(A) = 2$ y que $\text{ran}(A') = 2$. Luego hay recta de intersección, y la determinación de la ecuación de ésta es como sigue:

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 4z &= 1 \\ x - y - z &= 5 \end{aligned} \implies y - 6z = 10$$

eligiendo $z = t$, resulta $y = 10 + 6t$, $x = 14 + 7t$. Por tanto, la ecuación paramétrica es

$$\{x = 14 + 7t, \quad y = 10 + 6t, \quad z = t\}$$

Ejemplo 1.12.21. *Hallemos la ecuación de la recta que pasa por el punto $(2, -4, 5)$, que es perpendicular con la recta $\frac{x+8}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-1}{-1}$, y es paralela al plano $3x + y - 2z = 5$*

Sólo falta hallar el vector director de la recta y tenemos la respuesta. De las hipótesis, se puede hacer el esquema gráfico que muestra la figura. La recta pedida es L y tiene vector director $\vec{d} = (a, b, c)$. El plano tiene vector normal $\vec{n} = (3, 1, -2)$. La recta perpendicular a la recta L , es L_1 y tiene vector director $\vec{d}_1 = (2, 3, -1)$. De la figura es fácil darse cuenta que

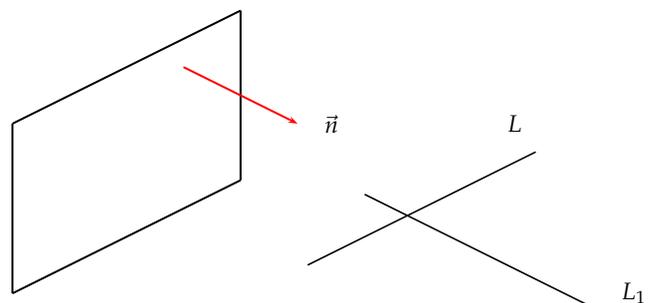


figura 1.45

$$\vec{d} \cdot \vec{d}_1 = 0, \quad \vec{n} \cdot \vec{d} = 0$$

esto lleva a resolver el sistema

$$\begin{cases} 2a + 3b - c = 0 \\ 3a + b - 2c = 0 \end{cases} \implies a = \frac{5}{7}c, \quad b = -\frac{1}{7}c$$

En consecuencia, el vector director de la recta que andamos buscando es, con $c = 7$

$$\vec{d} = (5, -1, 7)$$

y la ecuación resulta ser

$$\vec{X} = (2, -4, 5) + t(5, -1, 7)$$

Ejemplo 1.12.22. Dadas las rectas $L_1 = \{3x - y - z, 8x - 2y - 3z + 1 = 0\}$ y $L_2 = \{x + 1 = y - 1 = \frac{z-1}{2}\}$. Verifiquemos que son paralelas, hallamos distancia entre ellas y determinamos la ecuación del plano que las contiene.

Calculando los vectores directores estamos al otro lado. En L_1 hacemos $z = t$ para tener que

$$\begin{cases} 3x - y = t \\ 8x - 2y = 3t - 1 \end{cases} \implies x = \frac{t-1}{2}, \quad y = \frac{t-3}{2}, \quad z = t$$

de lo cual, un vector director de la recta L_1 es $\vec{d}_1 = (1, 1, 2)$ (se multiplicó por 2). Otra forma de obtener este vector director es haciendo el producto cruz entre $(3, -1, -1)$ y $(8, -2, -3)$. Para la recta L_2 tenemos que $\vec{d}_2 = (1, 1, 2)$. Por tanto, las rectas son paralelas.

Para hallar la distancia entre ellas, sin usar directamente la fórmula, es suficiente mirar la figura 1.46 y elegir en cada recta un punto. Se forma el vector \vec{v} que une esos puntos

$$\vec{v} = (1, 0, 3) - (-1, 1, 1) = (2, -1, 2)$$

Si θ es el ángulo que forma este vector \vec{v} con el director \vec{d}_2 , entonces la distancia es

$$d = \frac{\text{sen } \theta}{\vec{v}} = \frac{\|\vec{v} \times \vec{d}_2\|}{\|\vec{v}\| \|\vec{d}_2\|} \cdot \|\vec{v}\| = \frac{\|\vec{v} \times \vec{d}_2\|}{\|\vec{d}_2\|}$$

Haciendo los cálculos correctos, $\vec{v} \times \vec{d}_2 = (-4, 2, 3)$. Se tiene

$$d = \sqrt{\frac{29}{6}}$$

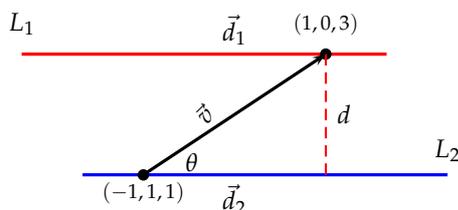


figura 1.46

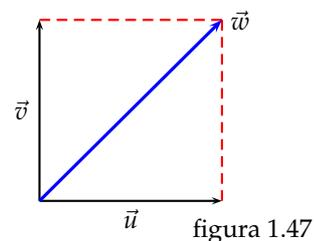


figura 1.47

Para hallar el plano que las contiene, necesitamos un vector normal y un punto del plano. El normal se obtiene del producto cruz entre \vec{v} y \vec{d}_2 , y resulta ser $\vec{n} = (-4, 2, 3)$, con lo cual, la ecuación del plano es

$$(x - 1, y, z - 3) \circ (-4, 2, 3) = 0 \implies -4x + 2y + 3z = 5$$

Ejemplo 1.12.23. Sean $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ vectores unitarios y perpendiculares. Probemos que, si \vec{w} pertenece al plano determinado por \vec{u} y \vec{v} , entonces

$$\|\vec{w}\|^2 = (\vec{u} \circ \vec{w})^2 + (\vec{v} \circ \vec{w})^2$$

Si \vec{w} pertenece al plano determinado por esos dos vectores, entonces se satisface que

$$\vec{w} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} \tag{1.4}$$

La figura 1.47 muestra esto, además, sabemos que

$$\alpha = \text{comp}_{\vec{u}} \vec{w} = \frac{\vec{u} \circ \vec{w}}{\|\vec{u}\|} = \vec{u} \circ \vec{w} \quad \text{y} \quad \beta = \text{comp}_{\vec{v}} \vec{w} = \frac{\vec{v} \circ \vec{w}}{\|\vec{v}\|} = \vec{v} \circ \vec{w}$$

Al reemplazar en (1.4):

$$\vec{w} = (\vec{u} \circ \vec{w}) \vec{u} + (\vec{v} \circ \vec{w}) \vec{v}$$

Tomando norma y elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación

$$\begin{aligned} \|\vec{w}\|^2 &= (\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}) \circ (\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}) = \alpha^2 \vec{u} \circ \vec{u} + 2\alpha\beta \vec{u} \circ \vec{v} + \beta^2 \vec{v} \circ \vec{v} \\ &= \alpha^2 \|\vec{u}\|^2 + \beta^2 \|\vec{v}\|^2 = \alpha^2 + \beta^2 \\ &= (\vec{u} \circ \vec{w})^2 + (\vec{v} \circ \vec{w})^2 \end{aligned}$$

Ejemplo 1.12.24. Probemos que las rectas siguientes se cruzan sin cortarse. Además, hallaremos los planos paralelos que contienen a cada una de estas rectas y la distancia entre estos planos.

$$L_1 : \frac{x+2}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{2} \quad \text{y} \quad L_2 : \frac{x-12}{2} = \frac{y+4}{3} = \frac{z-2}{4}$$

Ponemos cada recta en su forma general (multiplicando cruzado)

$$L_1 : \{2x - 3y = 5, 2y - 2z = -6\} \quad \text{y} \quad L_2 : \{3x - 2y = 44, 4y - 3z = -22\}$$

Ahora se conforman las matrices de los coeficientes y la ampliada

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad M^* = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & -6 \\ 3 & -2 & 0 & 44 \\ 0 & 4 & -3 & -22 \end{pmatrix}$$

Haciendo reducción por filas se llega a que $\text{rang}(M) = 3$ y $\text{rang}(M^*) = 4$, lo que significa que las rectas se cruzan sin cortarse

Para determinar las ecuaciones de ambos planos, lo primero es que sabemos que son paralelos, esto nos dice que tienen el mismo vector normal que obtenemos del producto cruz de los directores.

$$\vec{n} = (3, 2, 2) \times (2, 3, 4) = (2, -8, 5)$$

El plano que contiene a la recta L_1 contiene al punto $(-2, -3, 0)$, luego su ecuación es

$$(x + 2, y + 3, z) \cdot (2, -8, 5) = 0 \implies 2x - 8y + 5z - 20 = 0$$

El plano que contiene a la recta L_2 contiene al punto $(1, -4, 2)$, luego su ecuación es

$$(x - 1, y + 4, z - 2) \cdot (2, -8, 5) = 0 \implies 2x - 8y + 5z - 44 = 0$$

Para hallar la distancia entre los planos usemos distancia punto (en L_1) a plano (L_2). El punto elegido en L_1 es $P(-2, -3, 0)$, el punto del plano L_2 es $Q = (1, -4, 2)$. Formamos el vector que une estos puntos

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (3, -1, 2)$$

Así,

$$d = \frac{(3, -1, 2) \cdot (2, -8, 5)}{\|(2, -8, 5)\|} = \frac{24}{\sqrt{93}}$$

Ejemplo 1.12.25. Hallemos la ecuación de la esfera de centro en el plano xz y que es tangente al plano $2x - y + z - 4 = 0$ en el punto $(1, 5, 7)$.

La esfera queda determinada conociendo el centro y el radio. Suponemos que el centro es $(h, 0, k)$. Ahora vamos a encontrar la ecuación de la recta que pasa por $(1, 5, 7)$ y es perpendicular al plano dado, de esta manera, esta recta pasa por el centro de la esfera. Tenemos

$$\vec{X} = (1, 5, 7) + t(2, -1, 1) \implies x = 1 + 2t, y = 5 - t, z = 7 + t$$

Por tanto,

$$h = 1 + 2t, \quad 0 = 5 - t, \quad k = 7 + t \implies t = 5 \implies h = 11, k = 12$$

De esta manera, el centro de la esfera es $(11, 0, 12)$. La distancia entre este punto y $(1, 5, 7)$ proporciona el radio

$$r = d[(11, 0, 12), (1, 5, 7)] = \sqrt{150}$$

En consecuencia, la ecuación de la esfera es

$$(x - 11)^2 + y^2 + (z - 12)^2 = 150$$

Ejemplo 1.12.26. Hallemos la ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto $(1, 5, -3)$, que es paralela al plano $4x - 6y + z + 13 = 0$ y perpendicular a la recta $\frac{x+1}{7} = \frac{y+6}{2} = \frac{z-11}{13}$.

Suponemos que el vector director de la recta a encontrar es $\vec{d} = (a, b, c)$. Por ser la recta paralela al plano, el producto punto entre su director y el normal del plano debe ser cero, esto es,

$$\vec{d} \circ \vec{n} = (a, b, c) \circ (4, -6, 1) = 4a - 6b + c = 0$$

De igual manera, el director de la recta con el director de la recta perpendicular \vec{w} debe dar cero, es decir,

$$\vec{d} \circ \vec{w} = (a, b, c) \circ (7, 2, 13) = 7a + 2b + 13c = 0$$

De este par de ecuaciones se puede eliminar b y tener a en función de c y posteriormente b en función de c . Se tiene

$$\vec{d} = (-16, -9, 10)$$

Se concluye que la ecuación de la recta buscada es

$$\vec{x} = (1, 5, -3) + t(-16, -9, 10)$$

Ejemplo 1.12.27. Probemos que la recta $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{3}$ y el plano $2x + 3y - 4z + 14 = 0$ se intersectan. Además, sobre el punto $(5, 2, 9)$ de la recta se halla instalada una hormiga, dispuesta a saltar hacia el plano, hallemos la medida de este salto.

La ecuación paramétrica de la recta es

$$x = 1 + 2t, \quad y = -2 + 2t, \quad z = 3 + 3t$$

Si reemplazamos estos valores en la ecuación del plano hallaremos si existe algún valor de t que le satisfice

$$2(1 + 2t) + 3(-2 + 2t) - 4(3 + 3t) + 14 = 0 \implies t = -1$$

Así que se intersectan. El punto de intersección es $(-1, -4, 0)$. Para hallar la altura del salto recurrimos a la distancia punto plano. Si $P = (-1, -4, 0)$ y $Q = (5, 2, 9)$, entonces el vector $\vec{PQ} = (6, 6, 9)$. Luego,

$$d[(5, 2, 9), 2x + 3y - 4z - 14 = 0] = \frac{(6, 6, 9) \circ (2, 3, -4)}{\|(2, 3, -4)\|} = \frac{6}{\sqrt{29}}$$

La figura 1.94 muestra una descripción de la situación.

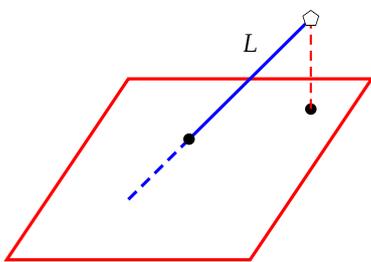


figura 1.48

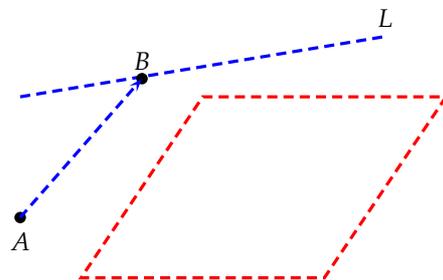


figura 1.49

Ejemplo 1.12.28. Dados $A(3, 1, -1)$ y la recta $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{3}$, hallemos el punto B en la recta tal que el vector \overrightarrow{AB} sea paralelo al plano $3x - 2y + z = 4$.

La normal del plano es $\vec{n} = (3, -2, 1)$. Para que \overrightarrow{AB} sea paralelo al plano debe ser

$$\overrightarrow{AB} \perp \vec{n}$$

Ahora bien el punto B deber estar en la recta, por tanto satisface la ecuación paramétrica

$$x = 1 + t, \quad y = 2t, \quad z = -1 + 3t$$

Ahora formemos el vector

$$\overrightarrow{AB} = (1 + t, 2t, -1 + 3t) - (3, 1, -1) = (t - 2, 2t - 1, 3t)$$

Finalmente,

$$\overrightarrow{AB} \circ \vec{n} = (t - 2, 2t - 1, 3t) \circ (3, -2, 1) = 0$$

de donde, $t = 2$. Por tanto, el punto B tiene coordenadas $(3, 4, 5)$.

Ejemplo 1.12.29. Determinemos la posición relativa entre la recta $\{x - y + 2z = 3, x + z + 1 = 0\}$ y el plano $3x - y + az = 0$, según el valor de la constante a .

Usaremos matrices para hallar solución

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 12 \\ 3 & -1 & a \end{pmatrix} \quad y \quad M^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & a & 0 \end{pmatrix}$$

Al hacer reducciones se llega a:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & a - 4 \end{pmatrix} \quad y \quad M^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & a - 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Se tienen los siguientes casos:

- Si $a = 4$, entonces el rango de M es 2 y de $M^* = 3$. Se sigue que la recta es paralela al plano y no está contenida en él.
- Si $a \neq 4$, entonces el $\text{rang}(M) = \text{rang}(M^*) = 3$. Se sigue que la recta corta al plano en un punto.

1.13. Problemas propuestos

1. Los puntos P y Q son vértices opuestos de un paralelepípedo rectangular con caras paralelas a los planos coordenados. Hallar las coordenadas de los vértices restantes.
 - a) $P = (0, 0, 0)$, $Q = (7, 2, 3)$
 - b) $P = (1, 1, 1)$, $Q = (3, 4, 2)$
2. Hallar la distancia y las coordenadas del punto medio del segmento que une los puntos $P = (4, -3, 2)$, $Q = (-2, 3, -5)$.
3. Probar que los puntos $(2, 2, 2)$, $(2, 0, 1)$, $(4, 1, -1)$, $(4, 3, 0)$ son vértices de un rectángulo.
4. Se traza una recta por el punto $(6, 4, 2)$ perpendicular al plano yz . Hallar las coordenadas de los puntos, en esta recta, que están a una distancia de 10 unidades del punto $(0, 4, 0)$.
5. Hallar la distancia del punto $(2, -1, -4)$ a la recta que pasa por los puntos $(3, -2, 2)$ y $(-9, -6, 6)$.
6. Demostrar graficamente que $-(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{b} - \vec{a}$
7. Demostrar que si los puntos $(1, 2, 3)$, $(2, -1, 5)$, $(4, 1, 3)$ son los vértices de un paralelogramo, entonces el cuarto vértice es $(3, 4, 1)$ y su área $2\sqrt{26}$.
8. Demostrar que para vectores \vec{a} y \vec{b} no cero, los vectores $|\vec{b}|\vec{a} + |\vec{a}|\vec{b}$ y $|\vec{b}|\vec{a} - |\vec{a}|\vec{b}$ son perpendiculares.
9. Hallar la ecuación del plano que contiene los puntos $(0, 0, 2)$, $(2, 4, 1)$ y $(-2, 3, 3)$.
10. Hallar la ecuación del plano que es paralelo al plano $4x - 2y + z - 1 = 0$, y que contenga al punto $(2, 6, -1)$.
11. Hallar la distancia del punto $(2, 2, -4)$ al plano $2x + 2y - z - 6 = 0$.
12. Probar que los planos $4x - 8y - z + 9 = 0$, y $4x - 8y - z - 6 = 0$ son paralelos y hallar la distancia entre ambos
13. Sean $\vec{a} = (-3, 1, 4)$, $\vec{b} = (6, -2, k)$. Determinar un valor de k para $\vec{a} \perp \vec{b}$, $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ Resp. 5, -8
14. Hallar el valor de k para que el triángulo de vértices $A(1, -5, k)$, $B(4, -k, 1)$ y $C(5, -8, k)$ sea rectángulo en A . Calcula su área utilizando el concepto de producto vectorial de dos vectores.
Resp. $k = 1$, $A = \frac{25}{2}$
15. Sean $\vec{a} = (2, 4, 5)$, $\vec{b} = (3, 1, k)$. Determinar un valor de k para $\vec{a} \perp \vec{b}$, $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ Resp. -2 , \cancel{A}
16. Hallar el área del paralelogramo de diagonales $\vec{a} = (3, 1, -2)$ y $\vec{b} = (1, -3, 4)$ Resp $5\sqrt{3}$
17. Hallar las ecuaciones de las rectas que se indican, en sus formas vectorial, paramétrica, cartesiana y general

a) Pasa por el punto $(3, 4, 5)$ y sigue la dirección del vector $\vec{a} = (2, 7, 3)$

b) Pasa por los puntos $(3, 1, 2)$ y $(2, 5, 4)$

18. Escribir la recta $\{3x - 4z + 5 = 0, 5x - 4y + 7 = 0\}$ en forma cartesiana.

19. Escribir la recta $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{5}$ en la forma general.

20. Hallar dos puntos que pertenezcan a la recta $\frac{x-3}{1} = \frac{y-4}{4} = \frac{z-3}{2}$

21. Determinar si los puntos $(5, 10, 8), (1, 2, 2), (4, 7, 3)$ pertenecen a la recta

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-6}{4} = \frac{z-5}{3}$$

22. Hallar el vector director de la recta $\frac{x-1}{4} = \frac{2y-1}{3} = \frac{5-z}{3}$

23. Hallar el punto de intersección de las rectas

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-1}{-1} \quad \text{y} \quad \frac{x-5}{4} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-6}{6}$$

24. Calcular el valor de m para que las siguientes rectas sean coplanarias:

$$\{x = 3 - \lambda, y = m + \lambda, z = 2 + 2\lambda\} \quad \text{y} \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{3}$$

Para ese valor de m determinar la posición relativa de las rectas.

Resp: $m = -2$. son secantes

25. Dado el plano $2x - 3y + z = 0$ y la recta $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2}$. Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta y es perpendicular al plano.
Resp: $5x + 3y - z - 12 = 0$

26. Hallar el punto simétrico de $A(2, 1, 3)$ respecto del plano $x + z = 3$. Resp. $A = (0, 1, 1)$

27. Hallar el punto simétrico de $A(2, 1, 3)$ respecto a la recta $\{x = 2 + t, y = 1 + t, z = 1\}$.
Resp. $A = (2, 1, -1)$

28. Hallar el punto simétrico del origen de coordenadas respecto a la recta $\{2x + y - 2 = 0, x + z - 2 = 0\}$.
Resp. $(2, 0, 2)$

29. Dado el punto $P(4, 3, 5)$ y la recta $\frac{x-8}{3} = y-3 = \frac{z-15}{4}$. Hallar:

a) La menor distancia de P a la recta.

b) El punto Q de la recta que determina la menor distancia del punto P a la recta.

c) La ecuación de la recta perpendicular a la recta dada que pasa por P

Resp. 3, 46, $Q(2, 1, 7)$, $\frac{x-4}{-2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-5}{2}$

30. Determinar si las rectas dadas son coincidentes.

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-1}{-1} \quad \text{y} \quad \frac{x-5}{4} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-8}{6}$$

31. Dado el punto $P(1, -1, 3)$ y el plano $2x - 2y + z + 2 = 0$. Se pide:

- a) Simétrico de P respecto al plano.
- b) Ecuación del plano paralelo al plano dado y que dista dos unidades de P .
- c) Área del triángulo que forman los puntos de corte del plano con los ejes de coordenadas.

Resp. a) $(-3, 3, 1)$, b) $2x - 2y + z - 1 = 0$ y $2x - 2y + z - 13 = 0$, c) $A = \frac{3}{2}$.

32. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1, 1, 0)$ y es paralelo al plano $3xy + z = 2$ y corta a la recta $\{x - y + 1 = 0, x - 2y + z = -5\}$. Resp. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = -z$.

33. Hallar un punto que pertenezca al eje x y que equidiste de los planos $4x - 3y - 3 = 0$ y $2x + 2y - z - 1 = 0$. Resp. $(2, 0, 0)$.

34. Hallar las ecuaciones de los planos que satisfacen:

- a) Pasa por $(4, 6, 7)$ y tiene vector normal $\vec{n} = (2, 3, 5)$
- b) Pasa por $(3, 5, 8)$ y es paralelo al plano $2x + 4y + 7z - 38 = 0$.
- c) Pasa por $(2, 3, 5)$ y su normal es el eje z .
- d) Intersecta a los ejes coordenados x, y, z en los puntos $2, 5, 6$
- e) Contiene a los puntos $(1, 2, 5), (2, 4, 3), (4, 7, 6)$.

35. Hallar la ecuación del plano que contiene a las rectas paralelas

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{1} \quad \text{y} \quad \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+5}{1}$$

Resp. $21x - 10y - 12z - 29 = 0$

36. Hallar dos puntos, distanciados 6 unidades, sobre la recta $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{2}$ Resp. $(1, 2, 1)$ y $(3, 6, 5)$

37. Hallar la distancia entre el punto y plano indicado. Señalar el punto del plano que determina la mínima distancia.

- a) $P(7, 3, 4)$, $6x - 3y + 2z - 13 = 0$ Resp. 4, $(\frac{25}{7}, \frac{33}{7}, \frac{20}{7})$
- b) $P(0, 0, 0)$, $2x + 2y - z - 18 = 0$ Resp. 6, $(4, 4, -2)$

38. Hallar la mínima distancia entre:

a) Los planos $3x + 6y + 2z - 22 = 0$, $3x + 6y + 2z - 27 = 0$. $\frac{5}{7}$

b) Los planos $2x + y + 2z - 12 = 0$, $x + 3y + 4z - 24 = 0$. 0

c) El plano $6x + 6y - 7z + 42 = 0$, y la recta $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{5} = \frac{z+2}{6}$. Resp. $\frac{80}{11}$

39. Hallar la intersección entre el plano y la recta que se indica

a) $3x - y + 2z - 5 = 0$, $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-12}{-2}$. Resp. $(3, 2, -1)$

b) $x + 2z + 3 = 0$, $\frac{x+1}{1} = \frac{z+2}{2}$, $y = 0$. Resp. $(-3/5, 0, -6/5)$

40. Hallar la ecuación del plano que es paralelo al indicado y se encuentra a la distancia d que se señala.

a) $x - 2y - 2z - 12 = 0$, $d = 2$. Resp. $x - 2y - 2z - 6 = 0$

b) $2x - 3y + 6z - 14 = 0$, $d = 7/2$. Resp. $4x - 6y + 12z + 21 = 0$

41. Graficar la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y - 10z + 37 = 0$. Indicar centro y radio.

42. Hallar la ecuación de la esfera de centro $(-4, 2, 3)$ y que es tangente a $2x - y - 2z + 7 = 0$

Resp. $x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 4y - 6z + 20 = 0$

43. Hallar la intersección entre el plano $z = 4$ y la esfera $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z - 1)^2 - 25 = 0$. Identificar el lugar geométrico.

44. Hallar la intersección entre la recta $\frac{x-7}{2} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{2}$ y la esfera $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 - 36 = 0$. Resp. $(7, 4, 5)$ y $(-1, 0, -3)$

45. Sobre la esfera $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 - 25 = 0$ hallar el punto más cercano al plano $3x - 4z + 19 = 0$. Resp. $(-2, -2, 7)$, $d = 3$

46. Sobre la esfera $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 - 9 = 0$ hallar la ecuación del plano que es tangente en el punto $(4, 2, 5)$. Resp. $2x + y + 2z - 20 = 0$

47. Identificar y graficar las siguientes superficies cuadráticas:

a) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4y - 9 = 0$

f) $8x^2 + 8y^2 - z + 4 = 0$

b) $3x^2 + y^2 + 3z^2 - 12 = 0$

g) $3x^2 - 3y^2 - z = 0$

c) $x^2 + y^2 - z^2 - 4z = 0$

h) $3x^2 + 2y^2 - 4z^2 = 0$

d) $3x^2 - 3y^2 - 3z^2 - 1 = 0$

i) $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 16 = 0$

e) $4x^2 + 9y^2 - z = 0$

1.14. Problemas adicionales

- Sean $A(2, -1, 0)$, $B(5, -4, 3)$ y $C(1, -3, 2)$ puntos en el espacio.
 - Graficar en un sistema rectangular el triángulo de vértices ABC .
 - Hallar el ángulo del triángulo cuyo vértice está en el plano xy .
 - Hallar la ecuación del plano que contiene el triángulo ABC .
 - Hallar el área del triángulo ABC .
- Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(3, -3, 4)$ y es perpendicular a cada una de las rectas

$$L_1 = \left\{ \left(3, -\frac{7}{2}, -3 \right) + t(1, 1, 3), t \in \mathbb{R} \right\}, \quad y \quad L_2 = \frac{x+2}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+2}{5}$$

- Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1, -1, 1)$ y que es perpendicular a la recta $3x = 2y = z$, y que además, es paralela al plano $x + y - z = 0$
- Determinar la posición relativa entre los planos $x + 3y - z = 9$ y $2x - 3y + 4z = -3$, si se intersectan, hallar la recta de intersección
- Determinar si los planos $2x - y + 3z = 1$ y $5 - x + 2y + 4z = 0$ son perpendiculares.
- Hallar la ecuación simétrica de la recta que pasa por $(3, 6, 4)$, es paralela al plano $x - 3y + 5z = 6$ e intersecta al eje z .
- Hallar la ecuación del plano que contiene al punto $(1, 2, -3)$ y a la recta $L = \{(1, 1, 1) + t(5, -2, 3), t \in \mathbb{R}\}$.
- Determinar el valor de k para que los planos $kx - 2y + 2z - 7 = 0$ y $4x + ky - 6z - 9 = 0$ sean perpendiculares entre sí.
- Determinar la distancia del punto $(4, 1, 2)$ al plano $6x - 3y - 2z + 4 = 0$.
- Hallar el valor de la constante k para que $\vec{v} = (2, k)$ sea perpendicular al vector $\vec{w} = (1, 3)$.
- Hallar el valor de la constante k para que $\vec{v} = (3, -4)$ sea paralelo al vector $\vec{w} = (2, k)$.
- Hallar el valor de la constante k para que $\vec{v} = (5, 12)$ y $\vec{w} = (1, k)$ formen un ángulo de 60° .
- Hallar el valor de la constante k para que $\vec{v} = (1, -c, 3)$ sea perpendicular al vector $\vec{w} = (4, 2, -7)$.
- Hallar el valor de la constante k para que $\vec{a} + k\vec{b}$ sea perpendicular al vector $\vec{c} = (2, 0, -3)$, siendo $\vec{a} = (1, -2, 3)$, $\vec{b} = (4, -1, 2)$.

15. Dado el triángulo ABC en el que $\sphericalangle A = 45^\circ$, $\|\vec{AB}\| = 8$, $\|\vec{AC}\| = 6\sqrt{2}$. Hallar $\|\vec{BC}\|$, $\text{proy}_{\vec{AC}} \vec{AB}$. Resp. $\|\vec{BC}\| = 4\sqrt{6}$, $\text{proy}_{\vec{AC}} \vec{AB} = \frac{2}{3} \vec{AC}$
16. Hallar el área del paralelogramo cuyos lados adyacentes son los vectores $(1, 2, -1)$ y $(2, -3, 4)$.
17. Si \vec{a} y \vec{b} son vectores unitarios perpendiculares entre sí en \mathbb{R}^3 . Hallar la expresión más simple de:
- a) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a}$ b) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a}$ c) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{b})$
18. Hallar la distancia del punto $(2, 1, -1)$ al plano $x - 2y + 2z + 5 = 0$.
19. Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos $(3, 2, -1)$ y $(1, -1, 2)$, y que sea paralelo a la recta de ecuación $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-2}$.
20. Hallar la recta de intersección de los planos $3x + 2y - z + 5 = 0$ y $2x + y + 2z - 3$.
21. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $(3, -1, 2)$ y que contiene a la recta $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = -\frac{z}{2}$.
22. Hallar la ecuación de la recta que pasa el punto $(2, -1, 3)$ y que sea paralela a la recta $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-2}{4}$.
23. Escribir la ecuación del plano que pasa por los puntos $(1, -2, 1)$, $(2, 0, 3)$ y $(0, 1, -1)$.
24. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(-2, 3, 1)$ y es perpendicular al plano $2x + 3y + z - 3 = 0$.
25. Uno de los extremos de un segmento de recta es el punto $P(-2, 1, 6)$. El punto medio Q está en el plano $y = 3$. El otro extremo R se encuentra en la intersección de los planos $x = 4$ y $z = -6$. Hallar las coordenadas de Q , las coordenadas de R , y la ecuación vectorial del segmento de recta. Resp. $R = (4, 5, 6)$, $Q = (1, 3, 6)$, $y = 5$
26. Sean \vec{a} y \vec{b} vectores no nulos, y $\vec{c} = \|\vec{b}\| \vec{a} + \|\vec{a}\| \vec{b}$. Demostrar que $\sphericalangle \vec{a}\vec{c} = \sphericalangle \vec{b}\vec{c}$.
27. Bosquejar las superficies $z = y^2 + 1$, y $9y = 9x^2 + 4z^2$.
28. Hallar la ecuación de la recta que pasa por $(-4, 7, 3)$ y que es perpendicular a las rectas
- $$\frac{x-2}{-4} = \frac{y+3}{-7} = \frac{z+1}{3} \quad \text{y} \quad \frac{x+2}{3} = \frac{y-5}{-4} = \frac{z+3}{-2}$$
29. Hallar el punto de intersección de las rectas
- $$\mathbf{L}_1 = (2, 1, 3) + t(1, 2, 1) \quad \text{y} \quad \mathbf{L}_2 = (-2, 1, 2) + s(3, 1, 2)$$

30. Determinar, si existe, un plano que contenga a las rectas

$$\mathbf{L}_1 = (2, -1, 3) + t(1, 2, 1) \quad \text{y} \quad \mathbf{L}_2 = (2, -1, 3) + s(3, -1, 4)$$

31. Determinar, si existe, un plano que contenga a las rectas

$$\mathbf{L}_1 = (4, 1, 0) + t(1, 2, 1) \quad \text{y} \quad \mathbf{L}_2 = (-2, -3, 2) + s(2, -1, 3)$$

32. Hallar la ecuación del plano que pasa por $(-1, -1, 2)$ y es perpendicular a los planos $x - 2y + z = 4$ y $x + 2y - 2z = -4$

33. Una bala sale en línea recta del punto $(0, -2, 0)$ según la dirección del vector $\vec{v} = (1, 2, 2)$ y hace blanco en un vidrio plano de ecuación $3x + 4y - 5z = 0$. Hallar trayectoria de la bala hasta chocar con el vidrio.

34. Hallar la distancia del punto $(1, -2, 1)$:

a) A la recta que pasa por los puntos $(2, 4, 1)$ y $(-1, 4, 2)$

b) Al plano que pasa por los puntos $(2, 4, 1)$, $(-1, 4, 2)$ y $(-1, 0, 1)$

35. Determinar la posición relativa de las rectas

$$\vec{X} = (1, -1, 2) + t(2, 1, 2) \quad \text{y} \quad \{3x - 4y + z + 6 = 0, \quad 2x + y - 3z + 4 = 0\}$$

36. Hallar la ecuación del plano que contiene las rectas

$$\frac{x-1}{-2} = y-4 = z, \quad \text{y} \quad \frac{x-2}{-3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-2}{-1}$$

37. Determinar la posición relativa entre la recta y el plano que se indica

$$x - \frac{1}{2} = \frac{y+3/2}{-1} = \frac{z+1}{2}, \quad \text{y} \quad 2x - 2y + z = 12$$

38. Hallar la ecuación del plano que contiene la recta $\frac{x+2}{3} = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{2}$ y es paralelo a la recta

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{4}$$

39. Hallar dos puntos P_1 y P_2 ubicados a 6 unidades de distancia sobre la recta $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{2}$

40. Dado el plano $2x + y + 2z - 9 = 0$, hallar otro plano, paralelo al anterior, y distante 6 unidades.

41. Los puntos $A(1, -2, 1), B(0, 1, 6), C(-3, 4, -2)$ forman un triángulo. Usar vectores para hallar el ángulo entre la recta AB y la recta que une A con el punto medio de BC .
42. Hallar la ecuación de la esfera de centro $(3, 4, 5)$ que es tangente al plano $2x - y + 2z - 6 = 0$.
43. Sea \vec{v} vector y \vec{u} vector unitario. Demostrar que $\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{u}) \vec{u} \perp \vec{u}$
44. Si $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, demostrar que $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$
45. Hallar la ecuación cartesiana de la recta de intersección de los planos $2x + y + z - 5 = 0$ y $x + 2y - z + 3 = 0$.
46. Hallar la ecuación del plano que contiene las rectas que se intersectan

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+2}{3}, \quad y \quad \{3x + 2y + z + 2 = 0, x - y + 2z - 1 = 0\}$$
47. Dadas las rectas, que no se intersectan, $\frac{x}{2} = y = \frac{z-1}{3}$ y $\frac{x}{3} = y = z$. Hallar los puntos P y Q , uno en cada recta, tal que \overline{PQ} sea perpendicular a ambas rectas.
48. Una fuerza constante con representación vectorial $\vec{F} = 10\vec{i} + 18\vec{j} - 6\vec{k}$ mueve un objeto a través de una línea recta desde el punto $(2, 3, 0)$ al punto $(4, 9, 15)$. Hallar el trabajo realizado si la distancia es medida en metros y la magnitud de la fuerza en newtons. Resp 38 joules
49. Determinar la ecuación del plano que pasa por el punto $(1, 6, -4)$ y que contiene a la recta $x = 1 + 2t, y = 2 - 3t, z = 3 - t$ Resp. $25x + 14y + 8z = 77$
50. Determinar la ecuación del plano que pasa a través de la recta de intersección de los planos $x + y - z = 2$ y $2x - y + 3z = 1$, y que además, pasa por el punto $(-1, 2, 1)$.
 Resp. $x - 2y + 4z = 1$
51. La figura 1 muestra un polígono de vectores, en el cual, el número sobre cada vector denota su módulo. Hallar $\|\vec{x}\|$.

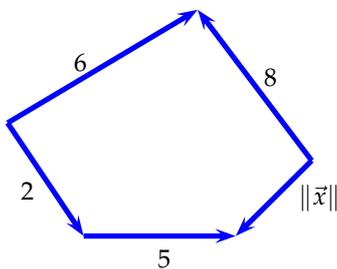


Figura 1

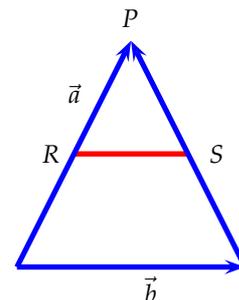


Figura 2

52. La figura 2 muestra un triángulo, dos de cuyos lados son los vectores \vec{a} y \vec{b} . El segmento \overline{RS} une los puntos medios de los lados. Escribir el vector \overrightarrow{RS} en función de \vec{b} .

53. Relacionar cada superficie cuadrática a la izquierda con la denominación a la derecha. Usar un par ordenado de la forma (número, letra).

- | | |
|---------------------------------------|-------------------------------|
| (1) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4y - 9 = 0$ | a) cono |
| (2) $3x^2 + y^2 + 3z^2 - 12 = 0$ | b) paraboloides hiperbólico |
| (3) $x^2 + y^2 - z^2 - 4z = 0$ | c) paraboloides circular |
| (4) $3x^2 - 3y^2 - 3z^2 - 1 = 0$ | d) cilindro |
| (5) $4x^2 + 9y^2 - z = 0$ | e) paraboloides elíptico |
| (6) $8x^2 + 8y^2 - z + 4 = 0$ | f) hiperboloides de dos hojas |
| (7) $3x^2 - 3y^2 - z = 0$ | g) hiperboloides de una hoja |
| (8) $3x^2 + 2y^2 - 4z^2 = 0$ | h) elipsoide |
| (9) $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 16 = 0$ | i) esfera |

54. Identificar y dibujar las superficies:

- | | |
|--------------------------------|------------------------------------|
| a) $4x^2 - y^2 + 2z^2 + 4 = 0$ | d) $y^2 + 9z^2 = 9$ |
| b) $x^2 + y^2 = 1$ | e) $x^2 - y^2 - z^2 - 4x - 4y = 0$ |
| c) $x^2 - y^2 + 4y + z = 4$ | f) $z = 2$ |

Resp. Hiperboloides de dos hojas, cilindro circular, paraboloides hiperbólico, cilindro elíptico, cono, plano

55. Obtener una ecuación para la superficie que consta de todos los puntos que son equidistantes del punto $(1, 0, 0)$ y el plano $x = -1$. Identificar y dibujar la superficie.

Resp. Paraboloides $4x = y^2 + z^2$.

56. Hallar la ecuación del plano que pasa a través de la recta de intersección de los planos $x - z = 1$ y $y + 2z = 3$, y es perpendicular al plano $x + y - 2z = 1$.

Resp. $x + y + z = 4$

57. Determinar el valor de la constante a para que los vectores $(1, 2, 1)$ y $(1, 0, a)$ formen un ángulo de 60° .

Resp. $a = 2 \pm \sqrt{3}$

58. Hallar las ecuaciones simétricas de la recta que pasa por el punto $(0, 2, -1)$ y es paralela a la recta $x = 1 + 2t, y = 3t, z = 5 - 7t$.

Resp. $\frac{x}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{-7}$

59. Hallar la ecuación de la recta que pasa por $(1, 0, 1)$ y es paralela al plano $2x - 3y + z = 1$ y al determinado por los puntos $(2, 0, 0), (0, 3, 0)$ y $(0, 0, 1)$.

Resp. $\frac{x-1}{20} = \frac{y}{9} = \frac{z-1}{-13}$

60. Hallar el volumen del tetraedro de vértices $(1, 0, 1)$ y los puntos en que el plano: $2x + 6y - 4z - 12 = 0$ corta a los ejes.

Resp. 7

61. Hallar el punto de intersección del plano $3x + 2y - 11z + 4 = 0$ y la recta $\{x = 2t, y = 1 + t, z = t\}$.
Resp. $(4, 3, 2)$
62. Hallar ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas, corta a la recta $\{x = 2t + 3, y = -t - 2, z = -1\}$ y es paralela al plano $x + y + z = 1$. Resp. $\vec{x} = (0, 0, 0) + t(3, -2, -1)$
63. Hallar k para que sean paralelas las rectas:
 $\{x + y + 2z - 3 = 0, x - 3y + 4z = 0\}$ y $\{x + y + 2kz - 4 = 0, 2x + 8y + kz + 9 = 0\}$
Resp. $k = 1$
64. Hallar la ecuación de la recta que pasa por $(1, 0, 0)$ y corta a las rectas
 $\frac{x-2}{1} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-1}{-2}$ y $\frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-8}{2}$
Resp. $\{x = 1, 3y - 2z = 0\}$
65. Hallar el punto simétrico de $A(1, 2, 0)$ respecto del plano $x + y + z - 6 = 0$. Resp. $(3, 4, 2)$
66. Hallar la ecuación del plano perpendicular al plano $x + y + 3z = 1$ y contiene a los puntos $P(0, -2, 0)$ y $Q(2, -2, 1)$.
Resp. $x + 5y - 2z + 10 = 0$
67. Hallar la ecuación de los planos paralelos a $2x - y + 2z = 0$ que distan 2 unidades del punto P simétrico de $(1, 1, -1)$ respecto al plano $z - 1 = 0$.
Resp. $2x - y + 2z - 1 = 0, 2x - y + 2z + 11 = 0$
68. Hallar la ecuación del plano que pasa por la recta $\{y = 1, 2x + z = 2\}$ y que dista una unidad del punto $(1, 2, -1)$.
Resp. $2x - 2y + z = 0$
69. Hallar el punto simétrico del $A(2, 0, 3)$ respecto al plano $2x - y + z = 1$. Resp. $(-2, 2, 1)$
70. Hallar el punto simétrico del $A(2, 0, 3)$ respecto a la recta $\{x = t, y = 2 - t, z = 2 - t\}$.
Resp. $(0, 2, -1)$
71. Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta $\{x - y + 1 = 0, x + 2y + z = 1\}$ y es perpendicular al plano $x + y - z + 1 = 0$.
Resp. $x - y + 1 = 0$
72. Sea P el punto $(1, -3, 2)$ y P' el simétrico de P respecto al plano $x + y = 0$ y sea P'' el simétrico de P' respecto al punto $(2, 0, 1)$. Hallar el área del triángulo por P y P'' y el origen de coordenadas.
Resp. $A = 6, P' = (3, -1, 2), P'' = (1, 1, 0)$
73. Determinar la posición de las rectas $\{x + y - z = 1, x - z + 1 = 0\}$ y $\{2x + y + 3 = 0, z = 3\}$.
- Hallar la distancia entre ellas.
 - Hallar la distancia de $A(0, 4, 1)$ a la primera recta.

Resp. Se cruzan, a) $d = 3$, b) $d = 2$

74. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $A(0, -1, 4)$ y es perpendicular a los planos $2x - y - 5 = 0$ y $y + 3z - 2 = 0$.
Resp. $3x + 6y - 2z + 14 = 0$

75. Para la recta $\{2x - y = -2, 3x - y - z = -1\}$ y el plano $2x + ay + 2z = 5$:

a) Hallar el valor de a para que la recta y el plano sean paralelos.

b) Hallar el valor de a para que la recta y el plano sean perpendiculares.

Resp. a) $a = -2$, b) $a = 4$

76. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(1, 0, -1)$, es paralela al plano $2x + y + z = 1$ y es perpendicular a la recta de intersección de los planos $\{2x + z = 5, x + 2y + z = 2\}$.

Resp. $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{0}$

77. Hallar un punto que pertenezca al eje x y que equidiste de los planos $4x - 3y - 3 = 0$ y $2x + 2y - z - 1 = 0$.
Resp. $(2, 0, 0)$

78. Dado el punto $P(1, -1, 3)$ y el plano $2x - 2y + z + 2 = 0$. Se pide:

a) simétrico de P respecto al plano.

b) ecuación del plano paralelo a dado y que dista dos unidades de P .

Resp. a) $(-3, 3, 1)$, b) $2x - 2y + z - 1 = 0$ y $2x - 2y + z - 13 = 0$

79. Hallar ecuación de la recta que pasa por el punto $A(1, 0, -2)$ y es paralela a la recta: $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-1}$.
Resp. $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{-1}$

80. Hallar punto de intersección de la recta $x = 2t, y = 1 + 3t, z = t$ con el plano $3x + 2y - 11z - 5 = 0$.
Resp. $(6, 10, 3)$

81. Hallar la distancia entre las rectas $x = 1 + 2t, y = 2 - t, z = 3 + 3t$ y $x = 2s, y = 3 - s, z = 2 + 3s$.
Resp. paralelas, $d = \frac{3\sqrt{7}}{7}$

82. Hallar la distancia entre las rectas $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1}$ y $\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$. Resp. se cruzan, $d = \frac{\sqrt{10}}{10}$

83. Hallar el plano que contiene a la recta $\frac{x-1}{2} = y = \frac{z+2}{-1}$ y es perpendicular al plano $x + 3y + 5z - 7 = 0$.
Resp. $8x - 11y + 5z + 2 = 0$

84. Hallar el plano perpendicular a los planos $x + 2y + 3z = 4$ y $x - 2y - 2z = 0$ y pasa por $P(2, 3, -5)$.
Resp. $2x + 5y - 4z - 39 = 0$

85. Dadas las rectas $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-5}{3}$ y $\{3x - 3y + 2z + 3 = 0, 3x + y - 2z + 11 = 0\}$, se pide:

a) Estudiar la posición relativa de ambas.

- b) Hallar la mínima distancia entre ambas.
 c) Hallar la ecuación de la perpendicular común.

Resp. a) se cruzan b) $d = \sqrt{10}$ c) $\frac{x-1}{-3} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-2}{1}$

86. Identificar las superficies cuadráticas dadas por las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 + 2y^2 + z^2 = 2$

b) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 1 = 0$

c) $x^2 - 3y^2 + 2z^2 = 7$

d) $-4x^2 - 4y^2 + z^2 = 4$

e) $x^2 + 2z^2 - 4y = 0$

f) $2x^2 + 2z^2 + 3y = 0$

g) $3x^2 - 2y^2 = z$

h) $x^2 + 2y^2 = z^2$

i) $x^2 + 2y^2 = z$

j) $x^2 + 2y^2 = 1$

k) $2y^2 = z$

l) $x^2 - 2y^2 = 1$

m) $y^2 + 2z^2 - 4x = 0$

n) $y^2 + 2z^2 = 4x^2$

ñ) $x^2 + 2y^2 - z^2 = 1$

o) $x^2 - 2y^2 - z^2 = 1$

p) $y^2 + 2z^2 - x^2 = 0$

q) $2x^2 + 2y^2 = 1$

a) Elipsoide

b) Esfera

c) Hiperboloide de una hoja

d) Hiperboloide de dos hojas

e) Paraboloides elíptico

f) Paraboloides circular

g) Paraboloides hiperbólico

h) Cono

i) Paraboloides elíptico

j) Cilindro elíptico

k) Cilindro parabólico

l) Cilindro hiperbólico

m) Paraboloides elíptico

n) Cono

ñ) Hiperboloide de una hoja

o) Hiperboloide de dos hojas

p) Cono

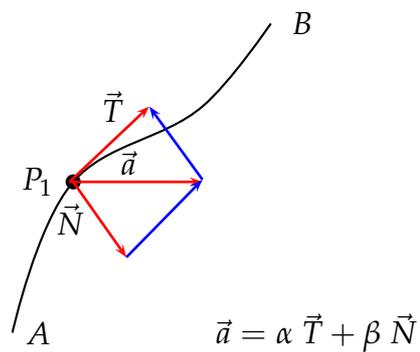
q) Cilindro circular

Sabiduría ante todo;
adquiere sabiduría,
Y ante todas tus posesiones
adquiere inteligencia.

Proverbios 1:7

CAPÍTULO

CÁLCULO 2 VECTORIAL



2.1. Introducción

Uno de los primeros objetivos de esta sección es el de establecer que \mathbb{R}^n tiene estructura de *espacio métrico*, clase particular de espacio topológico. Este concepto, de espacio métrico, fue introducido por Fréchet en 1906, en la búsqueda de definir el concepto de “distancia” de la manera más general posible para objetos matemáticos. Con base en esta idea de distancia, Fréchet pudo introducir de nuevo todas las nociones topológicas conocidas hasta ese entonces para \mathbb{R}^n ; esto es, límites, continuidad, vecindades de un punto, conjuntos abiertos, conjuntos cerrados, puntos de acumulación, compacidad, conexidad, etc. Veamos entonces, de que se trata todo esto.

La primera idea a generalizar es la de **distancia**. Recordemos que en la recta real la distancia entre dos puntos la proporciona la función

$$d(x, y) = |x - y|$$

y no otra. La función distancia no puede ser arbitraria, si alguien piensa en definir distancia mediante la expresión

$$d(x, y) = (x - y)^2$$

se puede llevar más de una sorpresa. Por ejemplo

$$d(1, 2) = 1, \quad d(2, 3) = 1, \quad d(1, 3) = 4 \implies d(1, 2) + d(2, 3) \neq d(1, 3)$$

esto es equivalente, a demorarse 4 horas en un viaje directo, y la mitad haciendo una escala. ¿sorprendido? Bueno, esto es lo que hay que evitar.

Lo primero que tenemos que hacer es establecer que vamos a trabajar en conjuntos en los cuales es posible medir distancias entre sus puntos, y que esta noción de distancia es la que le da la estructura métrica al conjunto. Cabe señalar que, en espacios no metrizables la noción de distancia es inexistente.

2.2. Espacios Métricos

Definición 2.2.1. Una **métrica** o **distancia** sobre un conjunto no vacío X es una función $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para todo $x, y, z \in X$ se cumplen las siguientes condiciones:

1. $d(x, y) > 0$ **positividad**
2. $d(x, y) = 0 \iff x = y$, **separación**
3. $d(x, y) = d(y, x)$, **simetría**
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, **desigualdad triangular**

Definición 2.2.2. Un **espacio métrico** es un par (X, d) , donde X es un conjunto y d es una distancia definida en X .

Ejemplo 2.2.3. El conjunto de los números reales con la distancia $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $d(x, y) = |x - y|$ es un espacio métrico, ya que cumple las condiciones dadas en la definición.

Ejemplo 2.2.4. Cualquier conjunto X se puede transformar en espacio métrico dotándolo de la distancia

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

Este espacio se denomina “espacio métrico discreto”.

Cuando un conjunto X está provisto de una distancia, esto es, cuando (X, d) es un espacio métrico, entonces es posible definir el concepto de límite, y a partir de él desarrollar toda la teoría del cálculo diferencial e integral. Como estamos interesados en trabajar en el espacio vectorial \mathbb{R}^n lo concerniente al cálculo, vamos a dotarlo de una distancia a partir del concepto de norma, transformándolo así en un espacio métrico.

Definición 2.2.5. Sea X un espacio vectorial sobre \mathbb{R} . Una **norma** en X es una función $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$, tal que para todo $x, y, z \in X$ se cumplen las siguientes condiciones:

1. $\|\vec{x}\| > 0, \quad \|\vec{x}\| = 0 \iff \vec{x} = \mathbf{0}$ **no negatividad**
2. $\|\alpha\vec{x}\| = |\alpha|\|\vec{x}\|$ **homotecia**
3. $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ **desigualdad triangular**

El par $(X, \|\cdot\|)$ se llama espacio vectorial normado.

2.3. Normas en \mathbb{R}^n

Si consideramos $X = \mathbb{R}^n$, en donde \mathbb{R}^n se toma como espacio vectorial sobre \mathbb{R} , entonces se pueden establecer las siguientes normas:

2.3.1. Norma euclídea

Sea $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\|\vec{x}\| = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right)^{1/2}$$

se conoce como la **norma euclídea**, razón por la cual \mathbb{R}^n es conocido como **espacio euclídeo**. A partir de esta norma se define la **distancia euclídea** entre dos puntos $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ de \mathbb{R}^n mediante la expresión

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\| = \left(\sum_{k=1}^n |x_k - y_k|^2 \right)^{1/2}$$

Con esta distancia euclídea d , inducida por la norma del mismo nombre, tenemos que (\mathbb{R}^n, d) es un **espacio métrico**.

2.3.2. Norma del máximo

En este caso, la norma que se establece es

$$\|\vec{x}\|_{\infty} = \max\{|x_1|, |x_2|, |x_3|, \dots, |x_n|\}$$

conocida como la norma del máximo. En ella se opta por elegir el mayor de los números $|x_1|, \dots, |x_n|$. Esta norma induce una distancia d dada por

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, |x_3 - y_3|, \dots, |x_n - y_n|\}$$

2.3.3. Norma p

Esta es la llamada "norma p ", incluye el caso de la euclídea, y es tal que

$$\|\vec{x}\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p}$$

Además, proporciona la siguiente distancia

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \left(\sum_{k=1}^n |x_k - y_k|^p \right)^{1/p}$$

De lo visto hasta ahora se puede decir que:

- ☞ Todo espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ se transforma en espacio métrico, si se define la distancia entre dos elementos de X como

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

- ☞ \mathbb{R}^n con cualquiera de las tres normas mencionadas es un espacio vectorial normado, y por supuesto métrico.
- ☞ En \mathbb{R}^n todas las normas son equivalentes, es decir, si $\|\vec{x}\|_1$ y $\|\vec{x}\|_2$ son normas en \mathbb{R}^n , entonces existen escalares α y β tales que

$$\|\vec{x}\|_1 \leq \alpha \|\vec{x}\|_2 \quad \text{y} \quad \|\vec{x}\|_2 \leq \beta \|\vec{x}\|_1$$

2.4. Topología de \mathbb{R}^n

La topología es una de las ramas de la matemática cuyo objetivo es el estudio de las transformaciones que son continuas en todos sus puntos, es decir, se centra en la continuidad global (en espacios métricos se habla de continuidad local, en un punto). Ha sido definida como "la ciencia de la forma", concepto estrechamente relacionado con el de "proximidad", y a su vez, con uno de los conceptos centrales del Cálculo y Análisis Matemático como lo es el concepto de **límite**.

Esta idea de límite se encuentra ligada a nociones métricas. De hecho, cuando se dice que una variable **tiende** a un valor determinado, lo que se quiere decir es que tal variable toma valores “cercaños” al número que tiene por límite. Tal “cercañía” lleva implícita la noción de distancia. Esta distancia entre números (los valores de la variable y el límite) es interpretada como distancia entre puntos de un cierto conjunto de naturaleza geométrica, que en el caso de una variable es la recta real. Como lo hemos visto, el conjunto de los reales puede dotarse de una distancia o métrica, de forma tal que para x, y la distancia es

$$d(x, y) = |x - y|$$

Con tal distancia o métrica, el conjunto de los reales es un *espacio métrico*.

Los subconjuntos, quizás más importantes, de un espacio métrico, son las bolas abiertas, que son capaces de describir a los vecinos de un punto estableciendo el “grado de cercañía”. Esto nos llevará a un concepto fundamental: el de *conjunto abierto*, que no es otra cosa que la generalización del concepto de intervalo abierto visto en \mathbb{R} .

Definición 2.4.1. Sea (X, d) un espacio métrico. Sean $x_0 \in X, r > 0$. El conjunto

$$B_r(x_0) = B(x_0, r) = \{x \in X / d(x, x_0) < r\}$$

se llama **bola abierta** con radio r y centro en x_0

Sinónimos que se emplean para “bola” son: *vecindad* y n -esfera. Desde un punto de vista geométrico, el trabajar con norma euclídea hace que una vecindad no sea otra cosa que un intervalo abierto en \mathbb{R} , un círculo en \mathbb{R}^2 y una esfera en \mathbb{R}^3 .

Ejemplo 2.4.2. Se considera en \mathbb{R} la vecindad $V(1, 2) = \{x \in \mathbb{R} / d(x, 1) < 2\} = (-1, 3)$.

Veamos que sucede al mirar esta vecindad desde otra norma o distancia.

- Con norma p la distancia se mide por

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \left(\sum_{k=1}^n |x_k - y_k|^p \right)^{1/p}$$

Si $p = 1$, entonces hay coincidencia con la euclídea, pues

$$d(x, 1) = \left(\sum_{k=1}^1 |x - 1| \right)^1 \implies d(x, 1) = |x - 1|$$

de donde

$$d(x, 1) = |x - 1| < 2 \implies d(x, 1) = (-1, 3)$$

- Con la norma del máximo el asunto es como sigue:

$$\|\vec{x}\|_\infty = \max |x_k| \implies d(\vec{x}, \vec{y}) = \max \{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, |x_3 - y_3|, \dots, |x_n - y_n|\}$$

como estamos en una dimensión

$$d(x, 1) = \max\{|x - 1|\} = |x - 1| < 2$$

De donde se sigue que ambas normas coinciden desde el punto de vista geométrico.

Ejemplo 2.4.3. Representar la bola unitaria $B_1(\vec{0})$ en \mathbb{R}^2 bajo la norma p , con $p = 1, 2, 4, \infty$

Se debe tener claro que se está hablando de la “bola” de centro en el origen del plano cartesiano y con radio $r = 1$. La gráfica dependerá de la norma que se use.

- Si $p = 1$, entonces la bola en cuestión es

$$B_1(\vec{0}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |x| + |y| < 1\}$$

Ello en razón de que

$$\|\vec{x}\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} \implies d(\vec{x}, \vec{y}) = \left(\sum_{k=1}^n |x_k - y_k|^p \right)^{1/p}$$

Como $n = 2$, $\vec{x} = (x, y)$, $\vec{y} = (0, 0)$, entonces

$$d[(x, y), (0, 0)] = \sum_{k=1}^2 |x_k - y_k| = |x| + |y| < 1$$

- Si $p = 2$, entonces tenemos el disco unitario, en efecto,

$$d[(x, y), (0, 0)] = \left(\sum_{k=1}^2 |x_k - y_k|^2 \right)^{1/2} = x^2 + y^2 < 1$$

de modo que

$$B_1(\vec{0}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < 1\}$$

- Si $p = 4$, entonces

$$B_1(\vec{0}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^4 + y^4 < 1\}$$

Veamos la razón de esto

$$d[\vec{x}, \vec{y}] = \left(\sum_{k=1}^n |x_k - y_k|^p \right)^{1/p}$$

Luego,

$$d((x, y), (0, 0)) = \left(\sum_{k=1}^2 |x_k - y_k|^4 \right)^{1/4} = x^4 + y^4 < 1$$

- Si $p = \infty$, entonces es la norma del máximo, con distancia dada por

$$\|\vec{x}\|_\infty = d(\vec{x}, \vec{y}) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, |x_3 - y_3|, \dots, |x_n - y_n|\}$$

que en este caso, para $n = 2$ toma la forma

$$d[(x, y), (0, 0)] = \max\{|x| < 1, |y| < 1\}$$

Las figuras siguientes ilustran cada uno de los casos mencionados

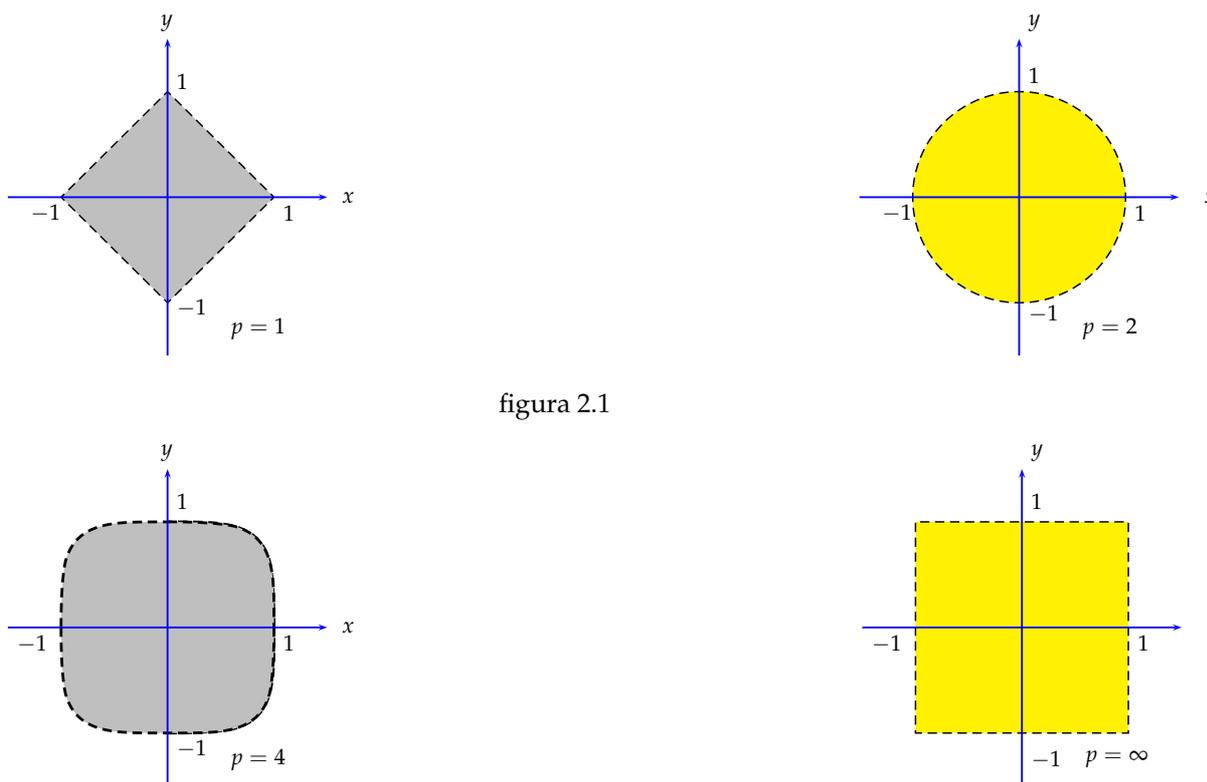


figura 2.1

Se concluye del ejemplo que la forma de una “bola” depende de la métrica que se use.

Vamos a establecer las características topológicas de \mathbb{R}^n mediante el conocimiento de la adherencia, el interior, el exterior, la frontera y el conjunto derivado, pues cualquiera de ellos determinan completamente la topología sobre el conjunto. Aunque seguimos hablando de espacio métrico, no perdemos de vista que nuestro espacio métrico “regalón” es \mathbb{R}^n .

Proposición 2.4.4. *Sea $B(x, r)$ una bola abierta en un espacio métrico (X, d) , y sea $y \in B(x, r)$, entonces existe un $\delta > 0$ tal que $B(y, \delta) \subset B(x, r)$*

La figura 2.2 muestra que tomando $\delta < r - d(x, y)$ se cumple la proposición.

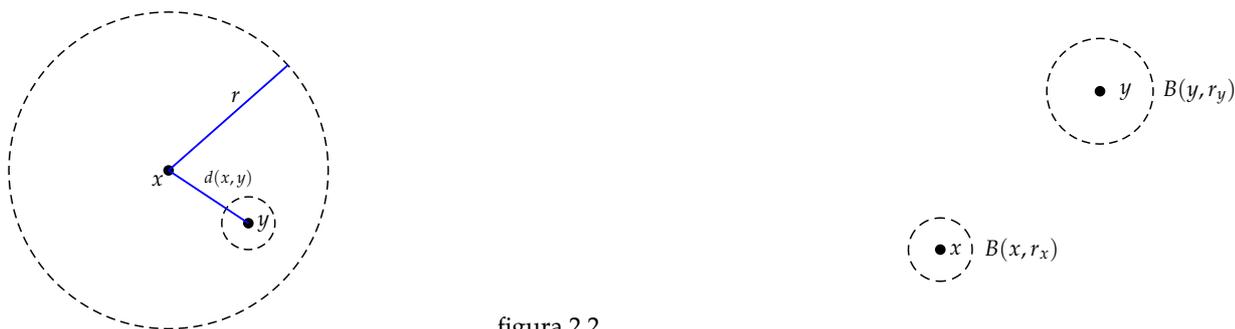


figura 2.2

Teorema 2.4.5. (Hausdorff)

Sea (X, d) un espacio métrico. Si $x, y \in X$ son dos puntos distintos, entonces existen radios r_x y r_y tales que $B(x, r_x) \cap B(y, r_y) = \emptyset$

Este resultado es muy interesante (figura 2.2) toda vez que permite “separar” los puntos de un conjunto mediante bolas abiertas que no se intersectan, ello es pieza fundamental para comprender las definiciones que se presentan a continuación.

Definición 2.4.6. Sea A un subconjunto de \mathbb{R}^n :

⇒ Un punto x es **interior** al conjunto A , si existe una bola $B(x, r)$ contenida en A . Esto es:

$$x \text{ punto interior} \iff \exists B(x, r) \subset A$$

El conjunto de todos los puntos interiores de A , se denomina **interior** de A y se anota $\text{Int}(A)$ o bien A°

⇒ El **complemento** de A en \mathbb{R}^n es el conjunto de todos los elementos de \mathbb{R}^n que no están en A . Esto es,

$$A^c = \{x \in \mathbb{R}^n / x \notin A\}$$

⇒ x se dice punto **exterior** del conjunto A , si **existe** una $B(\vec{x}, r)$ contenida en A^c . Esto es

$$x \text{ punto exterior} \iff \exists B(x, r) \subset A^c$$

El conjunto de todos los puntos exteriores de A , se denomina **exterior** de A , y se anota $\text{Ext}(A)$.



figura 2.3

Para ver si un punto es interior a A , basta estudiar si existe una bola con centro en el punto que esté contenida en A . Si se toma una bola “muy grande”, será difícil que esté contenida en A , por eso conviene tomarlas con radio pequeño, pues nos basta con que haya **una** que verifique la condición (ver figura). Un razonamiento análogo es válido para ver si un punto es exterior.



figura 2.4

- x se dice punto **frontera** de A , si **toda** $B(\vec{x}, r)$ contiene puntos de A y del complemento de A . Es decir,

$$x \text{ punto frontera} \iff B(x, r) \cap A \neq \emptyset \text{ y } B(x, r) \cap A^c \neq \emptyset$$

El conjunto de todos los puntos frontera de A , se denomina la **Frontera** de A y se anota $F_r(A)$.

- x se dice punto de **acumulación** del conjunto A si **toda** $B(x, r)$ contiene al menos un punto de A diferente de x . Es decir,

$$x \text{ punto de acumulaci3n} \iff (B(x, r) - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$$

El conjunto de todos los puntos de acumulaci3n de A , se llama conjunto **derivado** de A , y se anota A' .

- x se dice punto **adherente** al conjunto A si, **toda** $B(x, r)$ contiene al menos un punto de A . Es decir,

$$x \text{ punto adherente} \iff B(x, r) \cap A \neq \emptyset$$

El conjunto de los puntos adherentes de A , se anota \bar{A} , y se llama **adherencia** o **clausura** de A .



figura 2.5

Debe tenerse presente que, con excepción de punto interior y exterior, todos los demás puntos requieren que la propiedad se verifique **para toda** bola, al igual que antes, conviene tomar bolas de radio pequeño. Veamos algunos ejemplos de estas nociones topológicas de \mathbb{R}^n .

Ejemplo 2.4.7. Sea A un subconjunto cualquiera de \mathbb{R}^n , entonces:

- Se verifica que $A^\circ \subset A$, es decir, que todo punto interior a A es un elemento de A .
- El espacio \mathbb{R}^n escrito como unión de conjuntos disjuntos: $\mathbb{R}^n = A^\circ \cup F_r(A) \cup \text{Ext}(A)$
- Se verifica que $A \subset \bar{A}$, esto es, que todo punto de A es punto de \bar{A} .
Pero atención, puede haber en \bar{A} puntos que no sean de A . Por ejemplo, si $A \subset \mathbb{R}$ es tal que $A = (-1, 1)$, entonces $\bar{A} = [-1, 1]$.
- $\emptyset^\circ = \emptyset$, $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n$
- $\bar{A} = A^\circ \cup F_r(A)$
- El espacio \mathbb{R}^n escrito como unión de dos conjuntos disjuntos: $\mathbb{R}^n = \bar{A} \cup \text{Ext}(A)$
- $A^\circ \subset A \subset \bar{A}$

2.4.1. Conjuntos Abiertos - Cerrados

Definición 2.4.8. Sea (X, d) un espacio métrico. Un subconjunto A de X es **abierto** en (X, d) si para cada $y \in A$ existe un radio $r_y > 0$ tal que $B(y, r_y) \subset A$

Esta forma de definir abierto equivale a decir que, un conjunto A es **abierto**, si **todo** punto de A es interior. Es decir

$$A \text{ abierto} \iff A = A^\circ$$

Es claro, en la definición, que el radio r_y depende de la elección del y . Así, para y diferentes serán necesarios radios diferentes. Por otra parte, es común referirse a los conjuntos abiertos sólo como "abiertos". Como consecuencia del teorema de Hausdorff se tiene que:

Corolario 2.4.9. Toda bola abierta en un espacio métrico (X, d) es un conjunto abierto.

Ejemplo 2.4.10.

- Con la métrica del valor absoluto, en \mathbb{R} , los intervalos de la forma (a, b) son abiertos y también los infinitos de la forma (a, ∞) , $(-\infty, a)$, $(-\infty, \infty)$
- Con la métrica usual (euclídana) de \mathbb{R}^2 , el siguiente conjunto es abierto

$$A = \{(x, y) / |x| < 1, |y| < 1\}$$

- Con la métrica usual (euclídana) de \mathbb{R}^2 , el conjunto

$$A = \{(x, y) / |x| \leq 1, |y| < 1\}$$

no es abierto (imposible tomar bola abierta centrada en $x = 1$ y dejarla enteramente contenida en A).

- Con métrica usual, el conjunto $A = \{0\}$ de \mathbb{R} no es abierto, sin embargo, con métrica **discreta** si lo es.

Proposición 2.4.11. Sea (X, d) un espacio métrico, entonces se verifica que:

1. X y \emptyset son abiertos

2. Si A_i es una familia de abiertos en X , entonces $\bigcup_i^\infty A_i$ es un abierto

3. Si A_i es una familia de abiertos en X , entonces $\bigcap_i^n A_i$ es un abierto

Demostración

1) El conjunto vacío es abierto porque al no contener ningún punto, no contiene puntos que no cumplan la definición de abierto, es decir, no hay puntos de \emptyset que no estén contenidos en una bola abierta metida en \emptyset , por la sencilla razón de que no hay puntos en \emptyset .

El espacio $X = \mathbb{R}^n$ es abierto pues toda bola abierta está totalmente contenida en \mathbb{R}^n .

2) Si $x \in \bigcup_i^\infty A_i$, entonces existe algún índice k tal que $x \in A_k$. Como A_k es abierto, para algún radio r_k debe ser $B(x, r_k) \subset A_k$. Por propiedades de conjuntos, $A_k \subset \bigcup_i^\infty A_i$, luego se tiene

$$B(x, r_k) \subset A_k \subset \bigcup_i^\infty A_i$$

de donde se sigue que la unión es un conjunto abierto.

3) Si $x \in \bigcap_i^n A_i$, entonces $x \in A_k$ para todo $k = 1, 2, \dots, n$. Como cada A_k es abierto, para cada uno de ellos existe una bola de centro en x y radios r_k tal que $B(x, r_k) \subset A_k$. Si elegimos el menor de estos r_k y lo llamamos r , entonces

$$B(x, r) \subset B(x, r_k) \subset A_k, \quad \forall k = 1, 2, \dots, n$$

Por tanto, $B(x, r) \subset \bigcap_i^n A_i$, siguiéndose que la intersección de un número finito de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

Nota:

- Cuando una colección \mathcal{T} de subconjuntos de \mathbb{R}^n contiene al mismo \mathbb{R}^n , al conjunto \emptyset y satisface que la *unión arbitraria* y la *intersección finita* de elementos de \mathcal{T} es un elemento de \mathcal{T} , se dice que dicha colección es una *topología* de \mathbb{R}^n .
- Es claro entonces que, la familia de conjuntos abiertos de \mathbb{R}^n es una *topología* para \mathbb{R}^n .

Ejemplo 2.4.12. La intersección arbitraria (no finita) de abiertos, puede no ser un abierto. Para ver esto, consideramos $H = \left\{ \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) / n \in \mathbb{N} \right\}$ con la métrica usual de \mathbb{R} , entonces

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) = \{0\}$$

y $\{0\}$ no es abierto

Definición 2.4.13. Sea (X, d) un espacio métrico, y $x \in V \subset X$. Se dice que V es un **entorno** de x si existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset V$.

Ejemplo 2.4.14.

- Una bola abierta en un espacio métrico, es entorno de todos sus puntos (Hausdorff).
- Si $A = (0, 1)$ es un subconjunto de \mathbb{R} , y ponemos la métrica usual, entonces A es entorno de todos sus puntos, pues se puede formar una bola con centro en cualesquiera de sus puntos y hacer que ella sea subconjunto de $(0, 1)$. Por ejemplo, si $x = \frac{1}{2}$, entonces $B(\frac{1}{2}, \frac{1}{10}) \subset A$. En general, en \mathbb{R} con métrica usual, un intervalo abierto, es entorno de todos sus puntos.
- Si $A = [0, 1)$ es un subconjunto de \mathbb{R} , y ponemos la métrica usual, entonces A no es entorno del 0, pero sí de cualquier otro punto de A .

Definición 2.4.15. Sea (X, d) un espacio métrico. Un subconjunto A de X es **cerrado** si su complemento es un abierto de (X, d) . Es decir,

$$A \text{ es cerrado} \iff (X - A) \text{ es abierto}$$

Ejemplo 2.4.16.

- En \mathbb{R} con la métrica usual, los intervalos cerrados son conjuntos cerrados, como también lo son $[a, \infty)$, $(-\infty, a]$. En cambio, $(a, b]$ y $[a, b)$ no son conjuntos cerrados.
- En \mathbb{R}^2 con la métrica usual el siguiente conjunto no es cerrado

$$A = \{(x, y) / |x| \leq 1, \quad |y| < 2\}$$

- En \mathbb{R}^2 con la métrica usual el siguiente conjunto es cerrado.

$$A = \{(x, y) / |x| \leq 1, \quad |y| \leq 2\}$$

- En \mathbb{R}^2 con la métrica usual toda recta es un conjunto cerrado.

Definición 2.4.17. Sea (X, d) un espacio métrico. Un subconjunto H de X es **acotado** si existen $x_0 \in X$, $r > 0$ tal que $H \subset B(x_0, r)$.

Ejemplo 2.4.18.

- \mathbb{R} con la métrica usual es un espacio métrico no acotado.
- \mathbb{R} con la métrica discreta es acotado.
- En \mathbb{R} con la métrica usual, los conjuntos $[0, 1]$, $(0, 1]$ son acotados.
- Toda bola es un conjunto acotado.
- En \mathbb{R}^2 con métrica usual el conjunto $[0, 1] \times (0, 1]$ es acotado.

Geoméricamente, si el conjunto A puede ser encerrado en una bola de radio finito, entonces es acotado. Veamos otra forma de caracterizar conjuntos cerrados.

Definición 2.4.19. Sea (X, d) un espacio métrico. Un subconjunto A de X es **cerrado** si **todo** punto de A es punto adherente de A . Es decir

$$A \text{ cerrado} \iff A = \bar{A}$$

Proposición 2.4.20. Sea (X, d) un espacio métrico. Un subconjunto A de X es **cerrado** si A contiene a todos sus puntos de acumulación. Esto es,

$$A \text{ cerrado} \iff A' \subset A$$

Se deduce de esta proposición que un conjunto que carezca de puntos de acumulación es cerrado ($\emptyset \subset A$, $\forall A$). Por ejemplo, el conjunto de los números enteros \mathbb{Z} es cerrado en \mathbb{R} y carece de puntos de acumulación.

Definición 2.4.21. Sea (X, d) un espacio métrico. Un subconjunto A de X se dice **denso** en X , si $\bar{A} = X$

El conjunto de los números racionales \mathbb{Q} es denso en el conjunto de los números reales \mathbb{R} pues satisface la propiedad indicada. En \mathbb{R}^n el conjunto A cuyas coordenadas son racionales es también denso en \mathbb{R}^n .

2.4.2. Conjuntos Compactos - Conexos

Dos nociones topológicas fundamentales para \mathbb{R}^n son la de “compacidad” y la “conexidad” que están fuertemente ligada a resultados con continuidad. El siguiente resultado es el célebre teorema de Heine - Borel, con validez sólo en \mathbb{R}^n . La prueba de esta importante propiedad se sale de los propósitos de este curso.

Teorema 2.4.22. (Heine - Borel): Un conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.

Ejemplo 2.4.23.

1. En \mathbb{R} , con métrica usual, el conjunto $[0, 1]$ es compacto
2. En \mathbb{R}^2 el conjunto $A = [0, 1] \times [0, 1]$ es compacto
3. En \mathbb{R} con la métrica usual, $[a, \infty)$ es un conjunto cerrado, pero no compacto (falla que sea acotado)
4. En \mathbb{R}^2 con la métrica usual toda recta es un conjunto cerrado, pero como no es acotado, no es un conjunto compacto

Los conjuntos compactos tienen la propiedad que todo subconjunto infinito de ellos posee un punto de acumulación en él.

Definición 2.4.24. Un conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ es conexo si no existen dos abiertos A y B disjuntos, tales que

- $E \cap A \neq \emptyset$
- $E \cap B \neq \emptyset$
- $E \subset A \cup B$

Esta definición no es fácil de manejar, por eso presentamos una caracterización geométrica de los conjuntos conexos que nos será de mucha utilidad.

Geoméricamente, la definición asegura que un conjunto E de puntos es **conexo** si dos puntos cualquiera de él pueden unirse mediante una poligonal enteramente contenida en E . Aprovechando este punto de vista, un conjunto E de puntos se llama **convexo** si para dos puntos cualesquiera $x, y \in E$, todos los puntos del segmento cerrado definido por x e y pertenecen a E . Esto es,

$$\alpha x + (1 - \alpha)y \in E, \quad \alpha \in [0, 1]$$

Además, un conjunto E se llama **simplemente conexo** cuando cualquier curva cerrada en su interior puede comprimirse a un punto del conjunto E . Un conjunto **múltiplemente conexo** es aquél que no es simplemente conexo. Un conjunto E abierto y conexo se llama **región**.

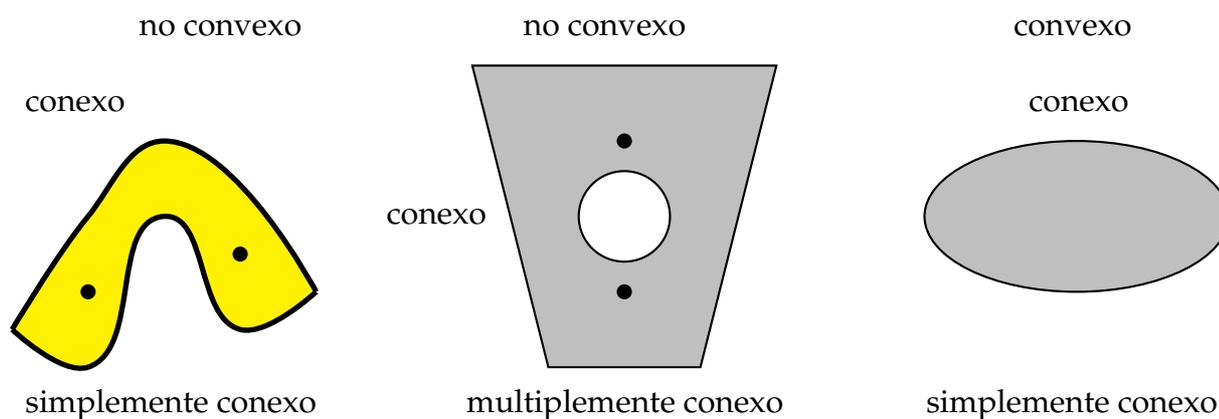


figura 2.6

Ejemplo 2.4.25.

- Conjuntos como círculos, rectángulos, elipses, semiplanos, son conjuntos conexos, convexos, simplemente conexos, y excluyendo su frontera son regiones. El anillo $\{1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ es conexo pero no convexo. No es simplemente conexo sino múltiplemente conexo.
- En \mathbb{R} los conjuntos conexos son los intervalos finitos o infinitos.
- En \mathbb{R} el conjunto $A = (0, 1) \cup \{2\}$ no es conexo.
- En \mathbb{R}^2 una recta es un conjunto conexo.
- En \mathbb{R}^2 los conjuntos siguientes son conexos:

$$A = \{(x, y) / |x| \leq 1, |y| < 2\} \quad B = \{(x, y) / |x| \leq 1, |y| \leq 2\}$$

Nota Como un adelanto de la importancia de la compacidad y conexidad podemos decir que, cuando una función continua se aplica a un conjunto compacto o bien conexo, su imagen es también un conjunto compacto o bien conexo.

2.5. Funciones vectoriales

En nuestro estudio del espacio \mathbb{R}^n hemos podido ver que del cálculo de una variable se han generalizado importantes conceptos matemáticos. Todo ello permite ampliar nuestro horizonte e iniciar ahora el estudio de las funciones de varias variables que nos van a ayudar en la descripción de muchos fenómenos físicos con mayor grado de realismo.

Sabido es que, una función real de variable real, que se anota $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, asocia a cada número real x del dominio, un único elemento $y = f(x)$ en su recorrido.

Definición 2.5.1. La función \vec{f} que a todo elemento de $A \subset \mathbb{R}^n$ asocia un único elemento en $B \subset \mathbb{R}^m$ se llama vectorial. Se anota

$$\vec{f} : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow B \subset \mathbb{R}^m, \quad \vec{x} \mapsto \vec{f}(\vec{x}) = \vec{y}$$

Se usa la letra \vec{f} en negritas para denotar cualquier función vectorial, o bien \vec{f} , salvo en el caso $n = m = 1$, en que usamos $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. El conjunto A se llama dominio de la función y B el codominio. Dentro de este grupo de funciones se distinguen tres tipos:

Funciones de \mathbb{R} en \mathbb{R}^m : Se llaman funciones vectoriales de una variable real, y hacen corresponder a un número real un vector. Son de gran utilidad en la descripción del movimiento de una partícula.

Funciones de \mathbb{R}^n en \mathbb{R} : Se denominan funciones reales de varias variables, o **campos escalares**. Hacen corresponder a un elemento de un espacio vectorial un número real. Se presentan con frecuencia en problemas de valores extremos (máximos y mínimos) y en otras aplicaciones en áreas tales como matemática, física, economía, etc.

Funciones de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^n : Reciben el nombre de funciones vectoriales de varias variables o bien **campos vectoriales**. Hacen corresponder a un vector otro vector. Son de gran utilidad en el estudio de flúidos.

2.5.1. Funciones Coordenadas

Si $\vec{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una función vectorial, $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ es un punto de su dominio e $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ de su codominio, entonces se puede escribir

$$\vec{f}(x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1, y_2, \dots, y_m)$$

como las coordenadas (y_1, y_2, \dots, y_m) están únicamente determinadas por el vector \vec{y} , entonces asociada a la función \vec{f} existen m funciones \vec{f}_i de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ llamadas **funciones coordenadas** de \vec{f} , las que están definidas mediante la regla de correspondencia $y_k = \vec{f}_k(\vec{x})$, de manera que escribimos

$$\vec{f}(\vec{x}) = (\vec{f}_1(\vec{x}), \vec{f}_2(\vec{x}), \dots, \vec{f}_m(\vec{x}))$$

Escribir la función vectorial \vec{f} en términos de sus funciones componentes simplifica todas las técnicas del cálculo de las funciones de varias variables, y se puede ver con mayor nitidez que es una extensión de lo visto para funciones de una variable en lo que respecta a límite, continuidad, diferenciación e integración.

2.6. Funciones de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$

Esta clase de funciones tienen como dominio un subconjunto de \mathbb{R} y como codominio un subconjunto de \mathbb{R}^n . El conocer el rango o recorrido de estas funciones vectoriales es interesante cuando se estudia el movimiento de una partícula.

Definición 2.6.1.

- El rango o recorrido de una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es el conjunto

$$Rec(\vec{f}) = \{\vec{f}(t) \in \mathbb{R}^n / t \in dom(\vec{f})\}$$

- El gráfico de la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es el conjunto

$$graf(f) = \{(t, f(t)) / t \in \mathbb{R}\}$$

Ejemplo 2.6.2. El rango de la función $\vec{f}(t) = (t, t, t^2); -3 \leq t \leq 3$ es un subconjunto de \mathbb{R}^3 , su gráfica un subconjunto de \mathbb{R}^4 , que obviamente no podemos visualizar. Para determinar su rango procedemos como sigue. El elemento (x, y, z) está en el rango de \vec{f} siempre que $x = t, y = t, z = t^2; -3 \leq t \leq 3$. De las dos primeras ecuaciones se halla $y = x$, lo que corresponde a un plano que pasa por el origen. En este plano $z = t^2$ es una parábola de ecuación $z = x^2$ o bien $z = y^2, z \in (0, 9)$. (figura 2.7)

Ejemplo 2.6.3. El rango de la función $\vec{f}(t) = (\cos 3t, \sin 3t, t); t \geq 0$ es un subconjunto de \mathbb{R}^3 y su gráfica un subconjunto de \mathbb{R}^4 . El rango es una hélice (figura 2.8) que se va enrollando sobre el cilindro de ecuación $x^2 + y^2 = 1$. Ello se debe a que

$$x = \cos 3t, \quad y = \sin 3t, \implies x^2 + y^2 = 1$$

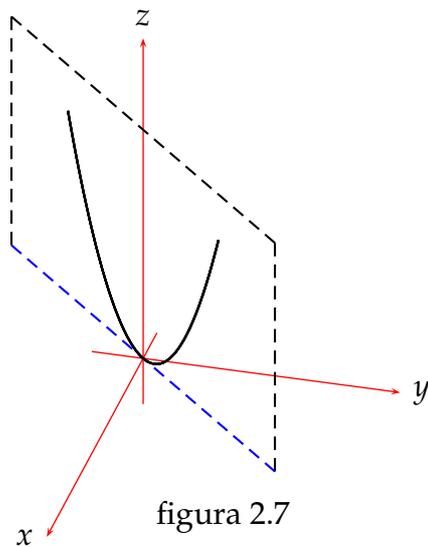


figura 2.7

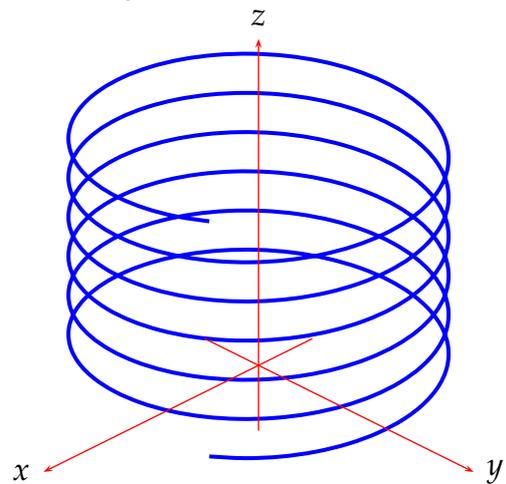


figura 2.8

2.7. Límites

Presentamos ahora, para las funciones $\vec{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, el concepto de límite. Con ello entramos de lleno en el estudio del cálculo diferencial.

Definición 2.7.1. Sea $\vec{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ función. El vector \vec{L} es el **límite** de la función \vec{f} en el punto $t = t_0$ (punto de acumulación en el dominio de \vec{f}) si y sólo si

$$(\forall \epsilon > 0) (\exists \delta > 0) \text{ tal que } 0 < |t - t_0| < \delta \implies \|\vec{f}(t) - \vec{L}\| < \epsilon$$

Se anota, $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{f}(t) = \vec{L}$

Esta definición es idéntica a la de límite de funciones ordinarias con la sola excepción del cambio del valor absoluto por módulo, pues $\vec{f}(t) - \vec{L}$ es un vector en \mathbb{R}^n y $\|\vec{f}(t) - \vec{L}\|$ es la distancia de $\vec{f}(t)$ a \vec{L} .

Como siempre, las definiciones no son el elemento más apropiado de cálculo. El siguiente resultado permite extender toda la operatoria del cálculo de una variable.

Teorema 2.7.2. Sean $\vec{L} = (L_1, \dots, L_n) \in \mathbb{R}^n$, $\vec{f} = (f_1, \dots, f_n)$ función de \mathbb{R} en \mathbb{R}^n . El límite de la función \vec{f} conforme t tiende hacia t_0 (punto de acumulación en el dominio de \vec{f}) es el vector \vec{L} , si y sólo si para cada $i = 1, \dots, n$ el límite de cada función componente es L_i . Anotamos

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{f}(t) = \vec{L} \iff \lim_{t \rightarrow t_0} f_i(t) = L_i, \text{ para } i = 1, \dots, n$$

Este resultado puede visualizarse, y por ende recordarse con mayor facilidad, si se escribe en la forma

$$\boxed{\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{f} = (\lim_{t \rightarrow t_0} f_1, \lim_{t \rightarrow t_0} f_2, \dots, \lim_{t \rightarrow t_0} f_n) = \vec{L}}$$

Ejercicio 2.7.3. Probemos que la función $\vec{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \vec{f}(t) = (t, t^2 + 1)$ es tal que $\lim_{t \rightarrow 1} \vec{f}(t) = (1, 2)$.

De acuerdo con la definición, sea $\epsilon > 0$ dado, vamos a encontrar $\delta > 0$, $0 < |t - 1| < \delta$ que hace que $\|\vec{f}(t) - \vec{L}\| < \epsilon$

$$\begin{aligned} \|\vec{f}(t) - \vec{L}\| &= \|(t, t^2 + 1) - (1, 2)\| = \sqrt{(t - 1)^2 + (t^2 - 1)^2} \\ &\leq \sqrt{(t - 1)^2} + \sqrt{(t^2 - 1)^2} = |t - 1| + |t^2 - 1| \\ &\leq |t - 1| + |t - 1| |t + 1| = |t - 1| (1 + |t + 1|) \end{aligned}$$

Se acota el factor $|t + 1|$ a partir de la hipótesis de que $0 < |t - 1| < \delta$. Para ello consideremos $\delta = 1$. Se tiene

$$-1 < t - 1 < 1 \implies 1 < t + 1 < 3 \implies |t + 1| < 3$$

con lo cual se obtiene

$$\|\vec{f}(t) - \vec{L}\| < \delta + 3\delta = 4\delta = \epsilon$$

se sigue de esto que eligiendo $\delta = \min\{1, \frac{\epsilon}{4}\}$ se satisface la definición, con lo cual $\lim_{t \rightarrow 1} \vec{f}(t) = (1, 2)$.

Ejemplo 2.7.4.

- Si $\vec{f}(t) = (\ln t, \sqrt{1 + t^2}, \frac{2t}{4 - t^2})$, entonces $\lim_{t \rightarrow 2} \vec{f}(t)$ no existe ya que el límite de la tercera función coordenada para $t \rightarrow 2$ no existe.
- Si $\vec{f}(t) = (\frac{t}{1 + t^2}, \frac{\text{sen } t}{t}, e^t)$, entonces $\lim_{t \rightarrow 0} \vec{f}(t) = (0, 1, 1)$

2.7.1. Algebra de límites

Teorema 2.7.5. Sean $\vec{f}, \vec{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t_0 \in \text{dom}(\vec{f} \cap \vec{g})$ punto de acumulación. Si existen $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{f}(t) = \vec{L}$ y $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{g}(t) = \vec{M}$, entonces:

1. $\lim_{t \rightarrow t_0} (\vec{f} \pm \vec{g})(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{f}(t) \pm \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{g}(t) = \vec{L} \pm \vec{M}$
2. $\lim_{t \rightarrow t_0} (\vec{f} \circ \vec{g})(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{f}(t) \circ \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{g}(t) = \vec{L} \circ \vec{M}$
3. $\lim_{t \rightarrow t_0} (\vec{f} \times \vec{g})(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{f}(t) \times \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{g}(t) = \vec{L} \times \vec{M}$, válida sólo en \mathbb{R}^3

2.8. Continuidad

Al igual que la definición de límite, la de continuidad la damos en términos del delta - epsilon.

Definición 2.8.1. La función $\vec{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continua en el punto t_0 si y sólo si

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0) \text{ tal que } |t - t_0| < \delta \implies \|\vec{f}(t) - \vec{f}(t_0)\| < \epsilon$$

El resultado que facilita la determinación de la continuidad para esta clase de funciones es, como se espera, en términos de las funciones componentes.

Teorema 2.8.2. Sea $\vec{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ función de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t_0 \in \text{dom} \vec{f}$. La función \vec{f} es continua en t_0 si y sólo si f_i es continua en t_0 para cada $i = 1, 2, \dots, n$. La función \vec{f} es continua sobre un conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ si es continua en cada punto de D .

La demostración de este hecho es consecuencia inmediata de expresar la función \vec{f} en componentes.

Ejemplo 2.8.3. A la función $\vec{f}(t) = \left(\frac{\sin t}{t}, \frac{1 - \cos t}{t}, \frac{1}{t} \ln(1 + t) \right)$ si $t \neq 0$, se debe asignar el valor $f(0) = (1, 0, 1)$ para que ella sea continua en $t = 0$.

Definición 2.8.4. La función $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua se denomina **trayectoria o curva**.

Teorema 2.8.5. Si $\vec{f}, \vec{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ son funciones continuas en el punto t_0 , entonces $\vec{f} + \vec{g}$, $\vec{f} - \vec{g}$, $\vec{f} \circ \vec{g}$, $\vec{f} \times \vec{g}$, son continuas en t_0 .

2.9. La derivada

Definición 2.9.1. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ función. La derivada de \vec{f} , que se anota \vec{f}' , o bien $D\vec{f}$, es la función vectorial con regla de correspondencia

$$\vec{f}'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{f}(t+h) - \vec{f}(t)}{h}$$

La derivada en un punto t_0 corresponde a

$$\vec{f}'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\vec{f}(t) - \vec{f}(t_0)}{t - t_0}$$

El cálculo de la derivada, en funciones componentes, es garantizado por el siguiente resultado:

Teorema 2.9.2. Sea $\vec{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$ función. La derivada de \vec{f} es la función vectorial

$$D\vec{f}(t) = \vec{f}'(t) = (f_1'(t), f_2'(t), \dots, f_n'(t))$$

Demostración

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{f}(t+h) - \vec{f}(t)}{h} = \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_1(t+h) - f_1(t)}{h}, \dots, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_n(t+h) - f_n(t)}{h} \right)$$

como este límite existe si y sólo si $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_i(t+h) - f_i(t)}{h}$ existe para todo i finito, entonces bajo esta hipótesis se tiene

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{f}(t+h) - \vec{f}(t)}{h} = (f_1'(t), f_2'(t), \dots, f_n'(t))$$

Ejemplo 2.9.3. La derivada de $\vec{f}(t) = (t^2 + 2t - 1, 3t^3 - 2)$ es la función $D\vec{f} = \vec{f}'(t) = (2t + 2, 9t^2)$

Ejemplo 2.9.4. La función $\vec{f}(t) = |t|\vec{i} - t^2\vec{j}$ es continua para todo valor de t , pero no es derivable en $t = 0$.

2.9.1. Interpretación de la derivada

Sea C la curva descrita por una función $\vec{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, con $\vec{f}(t) = (f_1(t), f_2(t))$. Si se multiplica el vector $\vec{f}(t+h) - \vec{f}(t)$ por el escalar $\frac{1}{h}$, el resultado es un vector con la misma dirección si $h > 0$, y con dirección opuesta si $h < 0$. Si $h \rightarrow 0$, entonces el vector $\frac{1}{h} (\vec{f}(t+h) - \vec{f}(t))$ se aproxima a un vector que tiene una de sus representaciones tangente a la curva C en el punto P (figura 2.9).

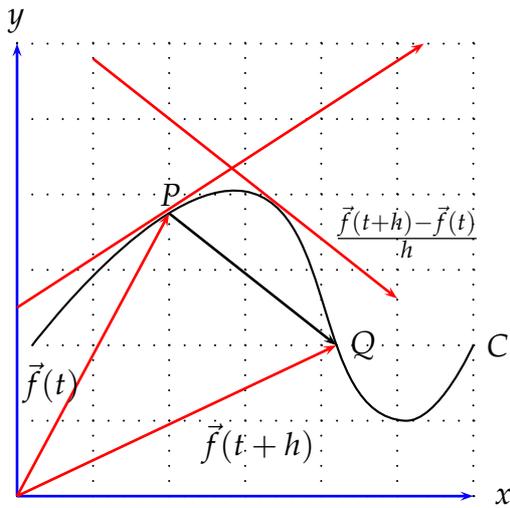


figura 2.9

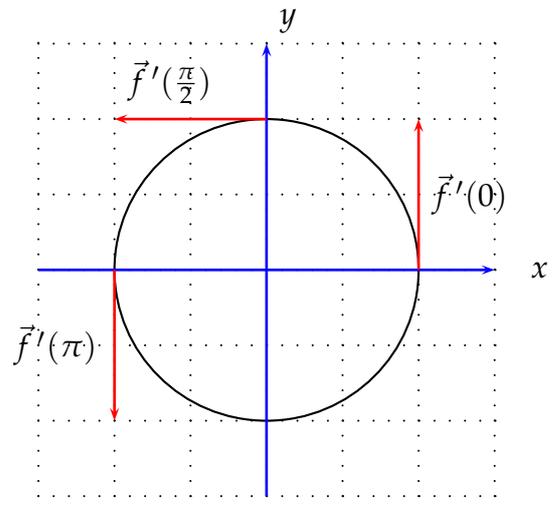


figura 2.10

Definición 2.9.5. Sea C la curva descrita por la función continua $\vec{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Si $\vec{f}'(t)$ existe y no es nula, entonces el vector $\vec{f}'(t)$ se llama **vector tangente** a la curva C en el punto $\vec{f}(t)$. La recta que tiene la misma dirección que el vector tangente se llama **recta tangente**, y su ecuación es

$$L = \{ \vec{f}(t) + t \vec{f}'(t) / t \in \mathbb{R} \}$$

Ejemplo 2.9.6. La función $\vec{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ representa una circunferencia unitaria con centro en el origen de coordenadas (Figura 2.10). Algunos cálculos con derivada, y que muestra la figura son:

1. $\vec{f}'(t) = (-\sin t, \cos t)$
2. $\|\vec{f}'(t)\| = 1$
3. $\vec{f}'(\pi) = (0, -1) = -\vec{j}$
4. $\vec{f}'(0) = (0, 1) = \vec{j}$
5. $\vec{f}'(\frac{\pi}{2}) = (-1, 0) = -\vec{i}$

Teorema 2.9.7. Sea $\vec{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ función derivable y de longitud constante sobre un intervalo abierto de $I \subset \mathbb{R}$, entonces $\vec{f} \cdot \vec{f}' = 0$ en I . Esto es, \vec{f}' es perpendicular a \vec{f} en todo punto $t \in I$.

Demostración

La longitud de \vec{f} constante significa que $\|\vec{f}(t)\|^2 = \vec{f} \cdot \vec{f} = k$. Como \vec{f} es derivable se tiene $2 \vec{f} \cdot \vec{f}' = 0$, de donde $\vec{f} \cdot \vec{f}' = 0$ en I . Esto es, \vec{f} y \vec{f}' son perpendiculares. En términos geométricos, la trayectoria descrita por \vec{f} se encuentra contenida en una circunferencia de centro el origen y radio k , tal como el ejemplo 2.9.6.

2.10. Funciones diferenciables

Definición 2.10.1. Una función $\vec{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ se dice **diferenciable** si $\vec{f}'(t)$ existe $\forall t \in \text{dom}(\vec{f})$

Como se espera, la propiedad de ser diferenciable hace que la función tenga continuidad. Se tiene

Teorema 2.10.2. Si la función $\vec{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es diferenciable en t_0 entonces es continua en t_0 .

Demostración

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{f}(t) &= \lim_{t \rightarrow t_0} \left(\frac{\vec{f}(t) - \vec{f}(t_0)}{t - t_0} \cdot (t - t_0) + \vec{f}(t_0) \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} \left(\frac{\vec{f}(t) - \vec{f}(t_0)}{t - t_0} \right) \cdot \lim_{t \rightarrow t_0} (t - t_0) + \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{f}(t_0) \\ &= \vec{f}'(t_0) \cdot 0 + \vec{f}(t_0) = \vec{f}(t_0) \quad ; \text{continuidad !!} \end{aligned}$$

La diferenciabilidad es una propiedad aplicable a las operaciones algebraicas.

Teorema 2.10.3. Sean $\vec{f}, \vec{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, \psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones diferenciables entonces

1. $D(\vec{f} \pm \vec{g}) = D\vec{f} + D\vec{g}$
2. $D(\vec{f} \circ \vec{g}) = \vec{f} \circ D\vec{g} + D\vec{f} \circ \vec{g}$
3. $D(\vec{f} \times \vec{g}) = D\vec{f} \times \vec{g} + \vec{f} \times D\vec{g}$ sólo $n = 3$
4. $D(\psi \vec{f}) = (D\psi) \vec{f} + \psi (D\vec{f})$

Demostración

El operador D significa que $\vec{f}' = D\vec{f}$. Probamos la parte 2, las restantes quedan para los interesados.

Sean $\vec{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n), \vec{g} = (g_1, g_2, \dots, g_n)$, entonces:

$$\begin{aligned} D(\vec{f} \circ \vec{g}) &= D(f_1 g_1 + f_2 g_2 + \dots + f_n g_n) = D(f_1 g_1) + D(f_2 g_2) + \dots + D(f_n g_n) \\ &= D(f_1) g_1 + f_1 D(g_1) + \dots + D(f_n) g_n + f_n D(g_n) \\ &= (f_1 (Dg_1) + f_2 (Dg_2) + \dots + f_n (Dg_n)) + ((Df_1) g_1 + (Df_2) g_2 + \dots + (Df_n) g_n) \\ &= (f_1, \dots, f_n) \circ (Dg_1, \dots, Dg_n) + (Df_1, \dots, Df_n) \circ (g_1, \dots, g_n) \\ &= \vec{f} \circ D\vec{g} + \vec{g} \circ D\vec{f} \end{aligned}$$

Teorema 2.10.4. Sea $g : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable sobre I ; $\vec{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciable sobre $g(I)$, entonces la función $\vec{f} \circ g$ es diferenciable sobre I , y se tiene

$$(\vec{f} \circ g)'(t) = \vec{f}'(g(t)) \circ g'(t)$$

Demostración

$$(\vec{f} \circ g)(t) = \vec{f}(g(t)) = (f_1 \circ g, \dots, f_n \circ g)(t)$$

Luego

$$\begin{aligned} (\vec{f} \circ g)'(t) &= ((f_1 \circ g)'(t), (f_2 \circ g)'(t), \dots, (f_n \circ g)'(t)) \\ &= (f_1'(g(t)) g'(t), \dots, f_n'(g(t)) g'(t)) \\ &= (f_1'(g(t)), \dots, f_n'(g(t))) \circ g'(t) = \vec{f}'(g(t)) g'(t) \end{aligned}$$

2.11. La Diferencial

Este concepto fue visto en el estudio de las funciones reales de una variable real. Veamos su generalización a esta clase de funciones.

Definición 2.11.1. Sea $\vec{f} : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ función, y sean $t, t + h$ puntos distintos en el intervalo $[a, b]$. La expresión $\Delta \vec{f}(t, h) = \vec{f}(t + h) - \vec{f}(t)$ se denomina **incremento** de \vec{f} en t , correspondiente al incremento h de la variable t .

Cuando la función \vec{f} es diferenciable en t , escribimos

$$\Delta \vec{f}(t, h) = \vec{f}(t + h) - \vec{f}(t) = h \vec{f}'(t) + h \alpha(t, h)$$

en donde $\alpha(t, h) = \frac{1}{h} [\vec{f}(t + h) - \vec{f}(t)] - \vec{f}'(t)$. Como $\lim_{h \rightarrow 0} \alpha(t, h) = 0$, se tiene que el incremento $\Delta \vec{f}(t, h)$ es aproximadamente igual a $h \vec{f}'(t)$ para valores pequeños de h .

Definición 2.11.2. El vector $h \vec{f}'(t)$ se llama **diferencial** de \vec{f} en t correspondiente al incremento h en t . Se anota $d\vec{f}(t, h)$. Esto es

$$d\vec{f}(t, h) = h \vec{f}'(t)$$

En base a esto, el incremento toma la forma

$$\Delta \vec{f}(t, h) = d\vec{f}(t, h) + h \alpha(t, h)$$

Como $\alpha \rightarrow 0$ cuando $h \rightarrow 0$, se tiene, para h pequeño

$$\Delta \vec{f}(t, h) \approx d\vec{f}(t, h)$$

y de esto

$$\vec{f}(t + h) - \vec{f}(t) \approx d\vec{f}(t, h)$$

O bien

$$\vec{f}(t + h) \approx \vec{f}(t) + d\vec{f}(t, h) \approx \vec{f}(t) + h \vec{f}'(t)$$

La notación más común de la diferencial se obtiene con $h = dt$, $d\vec{f}(t, h) = d\vec{f}$.

$$d\vec{f} = \vec{f}'(t) dt$$

Esta última expresión es la generalización de la correspondiente a la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y que usamos en cálculos aproximados.

Si la función \vec{f} se expresa en términos de sus componentes, la diferencial toma la forma

$$\begin{aligned} \vec{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n) &\implies d\vec{f} = \vec{f}'(t) dt = (f_1'(t) dt, \dots, f_n'(t) dt) \\ &\implies d\vec{f} = (df_1, \dots, df_n)(t) \end{aligned}$$

Fuera del interés teórico de la generalización, la diferencial no tiene mayores aplicaciones en esta clase de funciones.

2.12. Integración

Tal como se ha podido apreciar en el trabajo de límite, continuidad y diferenciabilidad, el expresar una función del tipo que estamos considerando en términos de las funciones componentes, simplifica todo el proceso de cálculo. En cuanto a la integración, ello resulta nuevamente fundamental.

Definición 2.12.1. Sea $\vec{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n) : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, entonces

$$\int_a^b \vec{f}(t) dt = \left(\int_a^b f_1(t) dt, \int_a^b f_2(t) dt, \dots, \int_a^b f_n(t) dt \right)$$

Ya que la definición se basa en las componentes, la validez de los teoremas fundamentales del cálculo siguen vigentes.

Teorema 2.12.2. (Primer Teorema fundamental)

Sea $\vec{f} : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ función continua y sea $\psi(x) = \int_a^x \vec{f}(t) dt$, entonces $\psi'(x)$ existe y se tiene $\psi'(x) = \vec{f}(x)$, $\forall x \in [a, b]$

La demostración es sencilla y se hace aplicando el primer teorema fundamental a cada función componente.

Teorema 2.12.3. (Segundo Teorema fundamental)

Sea $\vec{f} : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ función de clase ζ^1 entonces

$$\int_a^b \vec{f}'(t) dt = \vec{f}(b) - \vec{f}(a)$$

Ejemplo 2.12.4. El vector $\vec{r}(t)$ para el cual $\frac{d}{dt}\vec{r}(t) = e^{-t}\vec{i} + e^t\vec{j}$, $\vec{r}(0) = \vec{i} + \vec{j}$ es

$$\vec{r} = \vec{i} \int_a^b e^{-t} dt + \vec{j} \int_a^b e^t dt = \vec{i}(-e^{-t} + C_1) + \vec{j}(e^t + C_2)$$

Como $\vec{r}(0) = \vec{i} + \vec{j}$, entonces

$$\vec{i} + \vec{j} = \vec{i}(-1 + C_1) + \vec{j}(1 + C_2)$$

Luego $C_1 = 2$, $C_2 = 0$, con lo cual

$$\vec{r}(t) = (-e^{-t} + 2)\vec{i} + e^t\vec{j}$$

2.13. Longitud de un arco de curva

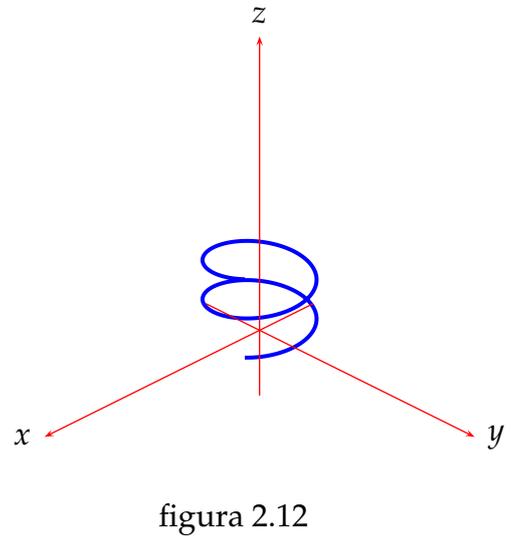
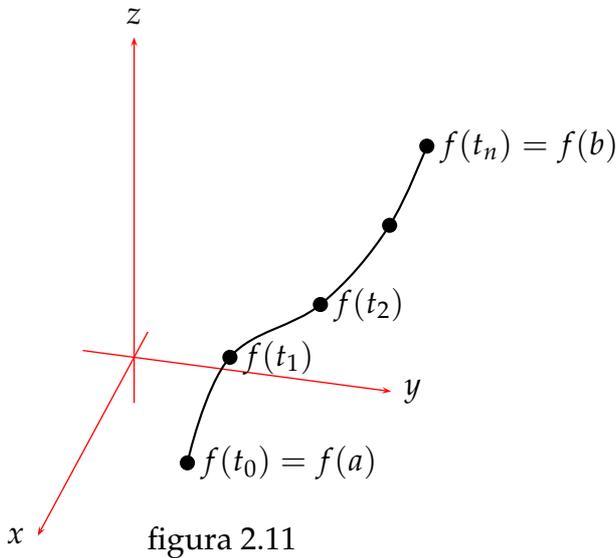
Sabemos que una *curva* es el rango o recorrido de una función vectorial continua definida en un intervalo cerrado $[a, b]$. Es decir,

$$f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow C \subset \mathbb{R}^n$$

Si el recorrido es \mathbb{R}^2 se obtiene una curva plana, y si es \mathbb{R}^3 una curva alabeada. Además:

2.13 Longitud de un arco de curva

- Si el comienzo de la curva coincide con el final de ella, entonces la curva es **cerrada**, y si no coinciden, es un **arco** de curva.
- Si la función vectorial es inyectiva en (a, b) , entonces la curva se llama **simple**, y si la curva es cerrada y simple, entonces recibe el nombre de **curva de Jordan**.



Se considera una función vectorial derivable f , definida en un intervalo cerrado $[a, b]$ con recorrido en \mathbb{R}^3 , y la curva asociada C que muestra la figura 2.11. Es decir,

$$f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

entonces al efectuar una partición del intervalo $[a, b]$, la trayectoria se subdivide en pequeñas trayectorias determinadas por los puntos $\{f(t_0), f(t_1), f(t_2), \dots, f(t_n)\}$ sobre la curva C , como muestra la figura 2.11.

Al unir estos puntos se obtiene una poligonal. El cálculo de la longitud de esta poligonal se hace trayectoria por trayectoria, al sumar se tiene una primera aproximación. El empleo del teorema del valor medio en cada trayectoria y posteriormente tomar que $n \rightarrow \infty$ hace que la longitud de la poligonal se transforme en la longitud de la curva, ya que se está en presencia de una integral definida. Si llamamos L a la longitud de C , entonces

$$L = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt$$

La cantidad subradical en el integrando corresponde exactamente a la longitud del vector tangente, esto es

$$\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}$$

podemos escribir

$$L = \int_a^b \|\vec{r}'(t)\| dt$$

Un hecho interesante resulta de fijar un punto en la curva y dejar variable el segundo, ya que en este caso, hay un cambio de notación, se cambia L por $s(t)$, y se anota

$$s(t) = \int_a^t \|\vec{r}'(t)\| dt$$

Del teorema fundamental del cálculo se tiene que

$$\frac{ds}{dt} = \|\vec{r}'(t)\| = \|\vec{v}(t)\|$$

Ejemplo 2.13.1. La curva $x = 2\cos t$, $y = 2\sen t$, $z = t$, $0 \leq t \leq 2\pi$ representa una hélice sobre la superficie del cilindro $x^2 + y^2 = 4$ (figura 2.12).

Para hallar la longitud de esta curva, desde el punto que corresponde a $t = 0$, a saber $(2, 0, 0)$, hasta $t = 2\pi$ cuyo punto es $(2, 0, 2\pi)$, se necesita el vector tangente

$$\vec{r} = (2\cos t, 2\sen t, z = t) \implies \vec{r}'(t) = (-2\sen t, 2\cos t, 1)$$

Su norma es $\|\vec{r}'(t)\| = \|(-2\cos t, 2\cos t, 1)\| = \sqrt{5}$. Finalmente,

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{5} dt = 2\pi \sqrt{5}$$

En términos de la diferencial de un punto, la diferencial de arco toma la forma Esta última se considera en el plano, como la longitud de un segmento corto de recta tangente a la curva, como muestra la figura 2.13.

- $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ si $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$
- $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

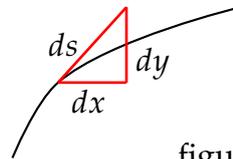


figura 2.13

2.14. Movimiento de una partícula

Lo primero que debemos decir es que, el *movimiento* es el cambio continuo de la posición de un objeto en el transcurso del tiempo. Para conocer el movimiento de un objeto es necesario hacerlo respecto a un sistema de referencia, donde se ubica un observador en el origen del sistema de referencia, que es quien hace la descripción. El sistema de referencia que usaremos es el sistema cartesiano.

Para estudiar el movimiento de una partícula sobre una recta se usa un sistema de coordenadas rectilíneo. Para analizar el movimiento de una partícula a lo largo de una curva se utilizan los vectores. En particular, la función vectorial continua $\vec{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ sirve como modelo matemático para describir el movimiento. Para analizar este movimiento, que por lo general se limita a un plano, es necesario conocer la posición de la partícula en todo momento. Esta posición está dada por el **vector de posición**

$$\vec{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), \dots, x_n(t))$$

2.14 Movimiento de una partícula

Las derivadas primera y segunda de este vector de posición sirven para hallar la velocidad y aceleración de la partícula. La longitud del vector velocidad $\|\vec{r}'(t)\|$ se conoce como **rapidez**. Habíamos tenido la oportunidad de señalar que, dado que la longitud de arco de una curva se expresa mediante

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\vec{r}'(t)\| dt$$

entonces, al derivar respecto de t esta expresión, se obtiene

$$s'(t) = \|\vec{r}'(t)\|$$

Esto significa que la rapidez de una partícula es la razón de cambio con respecto al tiempo de la distancia recorrida a lo largo de la curva. De igual forma la aceleración es la razón de cambio de la velocidad respecto del tiempo.

Ejemplo 2.14.1. El movimiento de una partícula está dado por $\vec{r}(t) = (3\cos 2t, 3\sin 2t)$.

- $\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = (-6\sin 2t, 6\cos 2t)$
- $\vec{a}(t) = \vec{r}''(t) = (-12\cos 2t, -12\sin 2t)$
- $L = s(t) = \int_0^\pi \|\vec{r}'(t)\| dt = 6\pi$
- $\|\vec{a}(t)\| = 12$
- $\vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t) = 0$ ¡perpendiculares!
- $\vec{v}(\frac{\pi}{6}) = (-3\sqrt{3}, 3), \vec{a}(\frac{\pi}{6}) = (-6, -6\sqrt{3})$

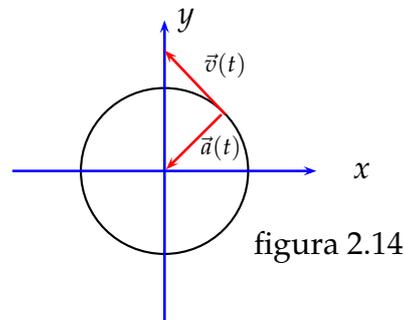


figura 2.14

La figura 2.14 muestra la trayectoria, una circunferencia de radio 3. En $t = \frac{\pi}{6}$ el punto en la curva tiene coordenadas cartesianas $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\sqrt{3})$. Además,

$$\vec{v}(\frac{\pi}{6}) = (-3\sqrt{3}, 3) \implies \operatorname{tg} \theta = \frac{3}{-3\sqrt{3}} \implies \theta = \frac{5\pi}{6}$$

$$\vec{a}(\frac{\pi}{6}) = (-6, -6\sqrt{3}) \implies \operatorname{tg} \theta = \frac{-6}{-6\sqrt{3}} \implies \theta = \frac{7\pi}{6}$$

Se está usando el término “objeto” y “partícula” como sinónimos, ambos indican un objeto muy pequeño, que desde el punto de vista matemático corresponde a la idealización de un objeto considerado como un punto sin dimensiones, que tiene sólo posición, masa y movimiento de traslación.

Ejemplo 2.14.2. Suponemos que un proyectil se mueve en un plano vertical y que la única fuerza que actúa sobre él es su peso, el cual tiene una dirección hacia abajo y una magnitud de mg libras, donde m es su masa y g es la constante de aceleración originada por la gravedad (se desprecia la resistencia del aire). La dirección positiva se toma verticalmente hacia arriba y horizontalmente a la derecha. Vamos a establecer su ecuación

Sea α el ángulo de elevación del arma que lanza el proyectil, \vec{v}_0 la velocidad inicial dada por el vector

$$\vec{v}_0 = v_0 \cos\alpha \vec{i} + v_0 \operatorname{sen}\alpha \vec{j}$$

t es el tiempo, medido en segundos, transcurridos desde que el arma fue disparada, x la distancia en pies horizontales en t segundos al punto de partida, y la altura en pies verticales en t segundos desde el punto de partida.

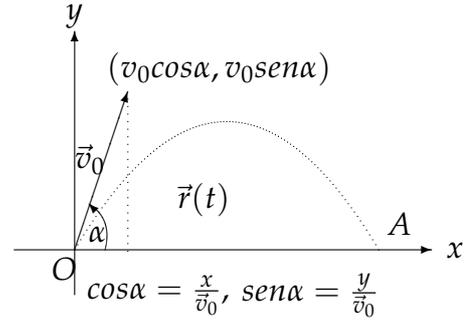


figura 2.15

$\vec{r}(t)$, $\vec{v}(t)$, $\vec{a}(t)$ los vectores posición, velocidad y aceleración del proyectil. La segunda Ley de Newton afirma que

$$\vec{f} = m \cdot \vec{a}$$

Como la única fuerza que actúa sobre el proyectil es su peso (mg libras) y es hacia abajo, entonces

$$\vec{f} = -mg \vec{j}$$

de aquí que

$$m \cdot \vec{a} = -mg \vec{j} \implies \vec{a} = -g \vec{j}$$

como $\vec{a}(t) = \vec{v}'(t)$, entonces $\vec{v}'(t) = -g \vec{j}$. Luego, integrando respecto de t se tiene

$$\vec{v}(t) = -gt \vec{j} + C$$

cuando $t = 0$, $\vec{v} = \vec{v}_0$, de manera que, $\vec{v}(0) = C \implies C = \vec{v}_0$. Por lo tanto

$$\vec{v}(t) = -gt \vec{j} + \vec{v}_0$$

O bien, $\vec{r}'(t) = -gt \vec{j} + \vec{v}_0$, de donde

$$\vec{r}(t) = -\frac{gt^2}{2} \vec{j} + \vec{v}_0 t + C_1$$

Como $t = 0 \implies \vec{r} = \vec{0}$, entonces $\vec{r}(0) = C_1 \implies C_1 = \vec{0}$. Así;

$$\vec{r}(t) = -\frac{1}{2}gt^2 \vec{j} + t \vec{v}_0$$

Finalmente, reemplazando $\vec{v}_0 = v_0 \cos\alpha \vec{i} + v_0 \operatorname{sen}\alpha \vec{j}$ en esta última ecuación se tiene;

$$\vec{r}(t) = -\frac{1}{2}gt^2 \vec{j} + (v_0 \cos\alpha \vec{i} + v_0 \operatorname{sen}\alpha \vec{j}) t$$

O bien

$$\vec{r}(t) = tv_0 \cos\alpha \vec{i} + (tv_0 \operatorname{sen}\alpha - \frac{1}{2}gt^2) \vec{j}$$

El ejemplo precedente muestra el problema del lanzamiento de un proyectil en forma general. El siguiente, muestra un problema particular.

Ejemplo 2.14.3. Un proyectil es lanzado por un arma en un ángulo de elevación de $\frac{\pi}{6}$ radianes. Su velocidad inicial es 480 p/seg. Entonces

1. Vector de posición del proyectil para todo t :

Considerando que $\alpha = \frac{\pi}{6}$ y que $\vec{v}_0 = 480\text{p/seg}$, entonces

$$\vec{v}_0 = 480 \cos \frac{\pi}{6} \vec{i} + 480 \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \vec{j}$$

lo que equivale a tener

$$\vec{v}_0 = 240\sqrt{3} \vec{i} + 240 \vec{j}$$

Así, el vector que entrega la posición del proyectil en cualquier instante de tiempo es

$$\vec{r}(t) = 480t \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{i} + \left(480t \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2}gt^2\right) \vec{j}$$

lo que simplificado corresponde a

$$\vec{r}(t) = 240t\sqrt{3} \vec{i} + \left(240t - \frac{1}{2}gt^2\right) \vec{j}$$

2. El tiempo de recorrido:

El tiempo de recorrido queda determinado cuando el proyectil vuelve a tocar tierra. Se calcula haciendo $y = 0$.

$$y = 240t - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \implies t(240 - \frac{1}{2}gt) = 0$$

Se obtienen las soluciones $t = 0$, que corresponde al principio del lanzamiento, y $t = \frac{480}{g}$ al final del recorrido. Con $g = 32$ se tiene $t = 15$ seg.

3. El rango $|OA|$:

El rango se encuentra en $x = \|\mathbf{OA}\|$ con $t = 15$.

$$x = 240t\sqrt{3} \implies x = 3600\sqrt{3} \text{ pies}$$

4. La altura máxima que alcanza el proyectil:

La altura máxima alcanzada por el proyectil se obtiene cuando la componente vertical del vector velocidad es cero. Esto es, si $\frac{dy}{dt} = 0$. Se tiene

$$y = 240t - \frac{1}{2}gt^2 \implies \frac{dy}{dt} = 240 - gt = 0$$

A partir de lo cual, $t = \frac{240}{g}$. Si se considera que $g = 32$, entonces $t = \frac{15}{2}$. De esta manera el valor de la altura y es

$$y = 240 \cdot \frac{15}{2} - \frac{1}{2} \cdot 32 \cdot \frac{225}{4} = 900 \text{ pies}$$

5. El vector velocidad del proyectil en el impacto:

Siendo el tiempo de vuelo 15 seg, el vector velocidad en el impacto es $\vec{v}(15)$. Como $\vec{v}(t) = 240\sqrt{3} \vec{i} + (240 - gt) \vec{j}$, entonces

$$\vec{v}(15) = 240\sqrt{3} \vec{i} - 480 \vec{j}$$

6. El vector de posición y el vector velocidad en 2 seg:

$$\begin{aligned} \vec{r}(2) &= 480\sqrt{3} \vec{i} + 416 \vec{j} \\ \vec{v}(2) &= 240\sqrt{3} \vec{i} + 176 \vec{j} \end{aligned}$$

7. La rapidez en 2 seg:

$$\|\vec{v}(2)\| = \sqrt{(240\sqrt{3})^2 + (176)^2} = 16\sqrt{16} \approx 2,9 \text{ p/seg}$$

8. La ecuación cartesiana de la curva:

Para determinar la ecuación cartesiana se tiene

$$x = 240t\sqrt{3}, \quad y = 240t - \frac{1}{2}gt^2$$

De la primera ecuación $t = \frac{x}{240\sqrt{3}}$, de manera que al reemplazar en la segunda:

$$y = \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{x^2}{10800} \quad \text{¡parábola!}$$

Un problema interesante surge con la aceleración cuando una partícula se mueve con rapidez constante sobre una circunferencia.

Ejemplo 2.14.4. Si una partícula se mueve con rapidez constante k sobre una circunferencia de radio r , entonces el vector aceleración tiene magnitud constante k^2/r , y su dirección apunta hacia el centro de la circunferencia.

2.15 Vector tangente y normal unitario

En efecto, la figura 2.16 muestra el vector de posición $\vec{r}(t)$, al ángulo θ positivo entre el eje x y el vector de posición. En el tiempo $t = 0$ la partícula se encuentra en el punto $(r, 0)$. Ahora, como la rapidez de la partícula es constante e igual a k , entonces recorre un arco de longitud kt durante el tiempo t . Esto es así ya que

$$s(t) = \int_0^t \|\vec{r}'(t)\| dt = kt$$

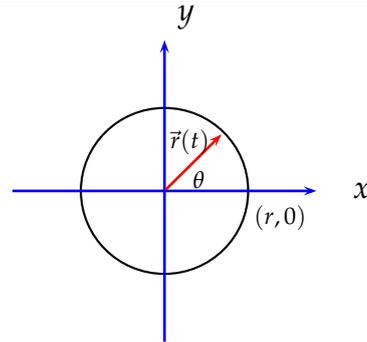


figura 2.16

De acuerdo a la medida en radianes, $\theta = \frac{kt}{r}$. Ahora podemos dar respuesta al problema.

$$\vec{r}(t) = (x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta) = \left(r \cos \frac{kt}{r}, r \sin \frac{kt}{r}\right)$$

Para hallar la velocidad derivamos respecto de t . Se tiene

$$\vec{v} = \left(-k \sin \frac{kt}{r}, k \cos \frac{kt}{r}\right)$$

Se sigue que

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{k^2}{r} \left(\cos \frac{kt}{r}, -\sin \frac{kt}{r}\right) = -\frac{k^2}{r} \vec{r}(t)$$

Esto prueba que la dirección es opuesta a la del vector de posición, y por consiguiente, apunta hacia el centro de la circunferencia. La norma del vector aceleración es

$$\|\vec{a}(t)\| = \frac{k^2}{r}$$

2.15. Vector tangente y normal unitario

Al estudiar el movimiento de una partícula a lo largo de una curva en el plano, surgen dos vectores unitarios de particular importancia. Uno de ellos tangente a la curva, y el otro perpendicular. De la figura 2.17 se observa que cada uno de ellos tiene dos sentidos. La pregunta es ¿cuál de ellos elegir? Para dar la respuesta, sea C una curva suave en el plano descrita por una función $\vec{r}(t)$. Si $\vec{r}'(t) \neq 0$, el vector

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|}$$

se denomina vector **tangente unitario** a la curva en el punto P . Si $\vec{r}'(t) = \vec{0}$ no se define vector tangente.

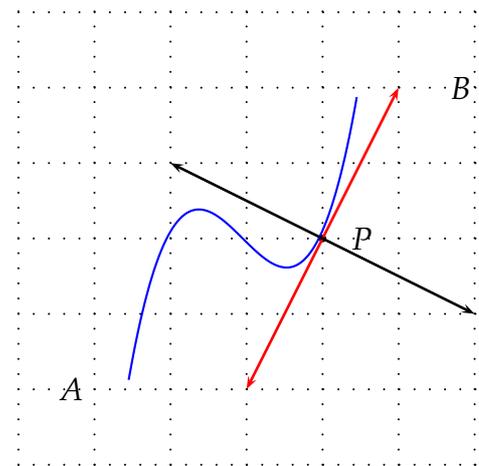


Figura 2.17

El vector $\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{\|\vec{T}'(t)\|}$ se llama vector **normal unitario** a la curva C en el punto P .

Dado que $\vec{r}'(t) = \vec{v}(t) \neq \vec{0}$, entonces el vector

$$\vec{T} = \frac{\vec{v}(t)}{\|\vec{v}(t)\|} = \frac{\vec{v}(t)}{v(t)}$$

es unitario y tiene la misma dirección y sentido que $\vec{v}(t)$. Luego, el vector tangente unitario apunta en la dirección del movimiento de la partícula.

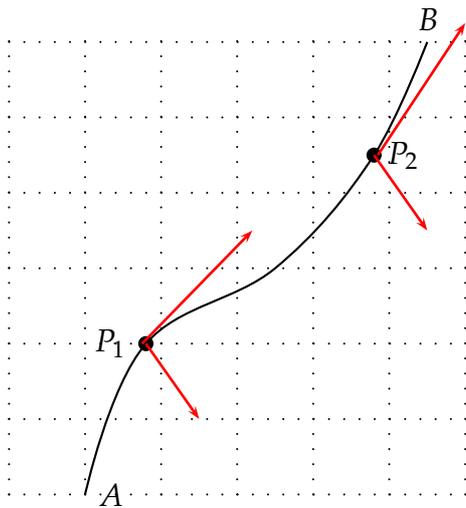


figura 2.18

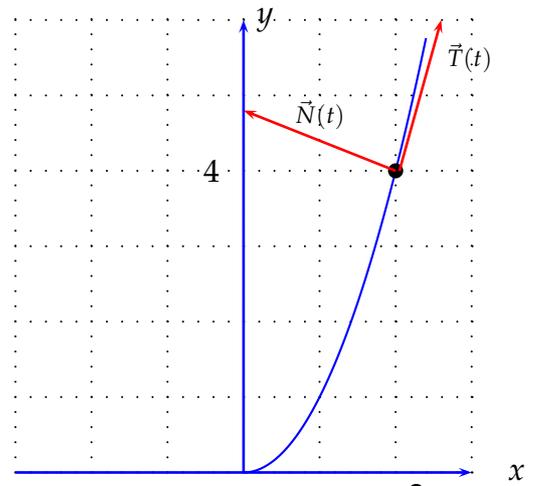


figura 2.19

La tendencia de \vec{T} a cambiar de dirección viene medida por su derivada \vec{T}' , pues como \vec{T} tiene longitud constante, entonces, la derivada \vec{T}' es perpendicular a \vec{T} . El vector normal unitario, perpendicular al tangente unitario, tiene la misma dirección de \vec{T}' , y se elige en la dirección hacia la cual la partícula gira (izquierda o derecha). Más claro, el normal unitario apunta hacia el lado cóncavo de la curva (figura 2.18).

Ejemplo 2.15.1. Si la trayectoria de un objeto es $\vec{r}(t) = (t, t^2)$, entonces

$$\vec{r}'(t) = (1, 2t) \implies \|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{1 + 4t^2}$$

El vector tangente unitario es

$$\vec{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + 4t^2}} (1, 2t) = \left(\frac{1}{\sqrt{1 + 4t^2}}, \frac{2t}{\sqrt{1 + 4t^2}} \right)$$

Derivando respecto de t

$$\vec{T}'(t) = \left(\frac{-4t}{\sqrt{(1 + 4t^2)^3}}, \frac{2}{\sqrt{(1 + 4t^2)^3}} \right)$$

La norma de este vector es $\|\vec{T}'\| = \frac{2}{1+4t^2}$. Luego,

$$\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{\|\vec{T}'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}(-2t, 1)$$

La figura 2.19 muestra los vectores tangente y normal unitario en el punto $t = 2$.

2.16. Componentes Tangencial y Normal

Si una partícula se mueve con rapidez constante, los vectores velocidad y aceleración son perpendiculares, esto es, $\vec{r}' \cdot \vec{r}'' = 0$. Cuando la rapidez no es constante, entonces no necesariamente los vectores mencionados son perpendiculares. Los vectores tangente y normal unitario permiten descomponer el vector aceleración como la suma de una componente tangencial, que actúa en la dirección del movimiento, y una componente normal, que actúa en forma perpendicular a la dirección del movimiento.

Proposición 2.16.1. Sea $\vec{r}(t)$ el vector de posición de una curva C de clase ζ^1 (primera derivada continua). El vector aceleración \vec{a} pertenece al plano determinado por los vectores \vec{T} y \vec{N} . Es decir,

$$\vec{a} = \alpha \vec{T} + \beta \vec{N}$$

Demostración

En términos del vector de posición, el vector tangente unitario \vec{T} se escribe

$$\vec{T} = \frac{\vec{r}'}{\|\vec{r}'\|} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

Al escribir $\vec{v} = \vec{T} \|\vec{v}\|$ se tiene

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\|\vec{v}\|}{dt} \cdot \vec{T} + \|\vec{v}\| \cdot \frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{d\|\vec{v}\|}{dt} \cdot \vec{T} + \|\vec{v}\| \vec{T}' \cdot \frac{\|\vec{T}'\|}{\|\vec{T}'\|} \\ &= \frac{d\|\vec{v}\|}{dt} \cdot \vec{T} + \|\vec{v}\| \|\vec{T}'\| \vec{N} \end{aligned}$$

Como \vec{a} es combinación lineal de \vec{T} y \vec{N} , se sigue que pertenece al plano que ellos determinan.

Los coeficiente de \vec{T} y \vec{N} , en la proposición, se denominan **componente tangencial** y **normal**, respectivamente, de la aceleración. Su notación es

$$a_T = \frac{d}{dt} (\|\vec{v}\|), \quad a_N = \|\vec{v}\| \|\vec{T}'\|$$

A partir de lo cual se escribe

$$\vec{a} = a_T \vec{T} + a_N \vec{N}$$

Teorema 2.16.2. Sea $\vec{r}(t)$ el vector de posición de una curva C de clase ζ^1 , entonces

$$a_T = \vec{a} \circ \vec{T} = \frac{\vec{a} \circ \vec{v}}{\|\vec{v}\|}, \quad a_N = \vec{a} \circ \vec{N} = \frac{\|\vec{v} \times \vec{a}\|}{\|\vec{v}\|}$$

Demostración

Sabemos que el vector aceleración pertenece al plano formado por los vectores \vec{T} y \vec{N} , y que además la magnitud de la proyección vectorial de \vec{a} sobre \vec{T} corresponde a la componente tangencial y que la magnitud de la proyección vectorial de \vec{a} sobre \vec{N} es la correspondiente componente normal. Esto es,

$$\begin{aligned} a_T &= \text{comp}_{\vec{T}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \circ \vec{T}}{\|\vec{T}\|} = \vec{a} \circ \vec{T} \\ a_N &= \text{comp}_{\vec{N}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \circ \vec{N}}{\|\vec{N}\|} = \vec{a} \circ \vec{N} \end{aligned}$$

Considerando que $\vec{T} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$, entonces $a_T = \frac{\vec{a} \circ \vec{v}}{\|\vec{v}\|}$

Esta expresión en función del vector de posición toma la forma

$$a_T = \frac{\vec{r}' \circ \vec{r}''}{\|\vec{r}'\|}$$

Para hallar la expresión de la componente normal en función del vector de posición, recurrimos a la ecuación $\vec{a} = a_T \vec{T} + a_N \vec{N}$ y al hecho que $\vec{T} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$. Se tiene

$$\begin{aligned} \vec{v} \times \vec{a} &= \|\vec{v}\| \vec{T} \times (a_T \vec{T} + a_N \vec{N}) = a_T \|\vec{v}\| (\vec{T} \times \vec{T}) + a_N \|\vec{v}\| (\vec{T} \times \vec{N}) \\ &= a_N \|\vec{v}\| (\vec{T} \times \vec{N}) \end{aligned}$$

Se debe observar que $\vec{T} \times \vec{T} = \vec{0}$. La norma de este vector es

$$\|\vec{v} \times \vec{a}\| = a_N \|\vec{v}\| \|\vec{T} \times \vec{N}\| = a_N \|\vec{v}\|$$

Usando $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \text{sen } \theta$, resulta sencillo ver $\|\vec{T} \times \vec{N}\| = 1$. Ahora se despeja a_N para obtener

$$a_N = \frac{\|\vec{v} \times \vec{a}\|}{\|\vec{v}\|}$$

Finalmente, reemplazando velocidad y aceleración en función del vector de posición

$$a_N = \frac{\|\vec{r}' \times \vec{r}''\|}{\|\vec{r}'\|}$$

2.17. Aceleración y Curvatura

En una recta el vector tangente unitario \vec{T} no cambia su dirección y por tanto, $\vec{T}' = \vec{0}$. Si la curva no es una recta, la derivada \vec{T}' mide la tendencia de la tangente a cambiar su dirección. El coeficiente de variación o derivada de la tangente unitaria respecto a la longitud de arco se denomina **vector curvatura** de la curva. Se designa $\frac{d\vec{T}}{ds}$.

En términos del tiempo t , la regla de la cadena y el hecho que $s'(t) = v(t)$ permiten relacionar el vector curvatura $\frac{d\vec{T}}{ds}$ con la derivada \vec{T}' mediante la ecuación

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d\vec{T}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{1}{s'(t)} \cdot \vec{T}' = \frac{1}{v(t)} \cdot \vec{T}'$$

como el vector \vec{T}' se puede expresar por medio de \vec{N} , se tiene

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{\|\vec{T}'\|}{v(t)} \cdot \vec{N}(t), \quad v(t) = \|\vec{v}(t)\|$$

de esta forma, el vector curvatura tiene la misma dirección que la normal principal $\vec{N}(t)$. El factor escalar que multiplica a $\vec{N}(t)$ en la ecuación anterior es un número no negativo llamado **curvatura** de la curva que se designa por κ . Así, la curvatura $\kappa(t)$ definida como la longitud del vector curvatura está dada por la expresión

$$\kappa(t) = \frac{\|\vec{T}'\|}{v(t)} = \left| \frac{d\vec{T}}{ds} \right| = \|\vec{T}'\| \frac{dt}{ds}$$

En términos geométricos, la curvatura representa la razón de cambio del ángulo θ respecto de la longitud de arco s . En lenguaje físico, cuando la partícula recorre la curva C , su velocidad puede cambiar lenta o rápidamente dependiendo de que la curva C se doble gradual o bruscamente. La curvatura mide cuánto es ese “doblamiento”, cuanto mayor es la magnitud de $\vec{T}'(s)$ tanto más se dobla la curva en el punto. En la figura 2.20 la curvatura es mayor en el punto A que en el punto B .

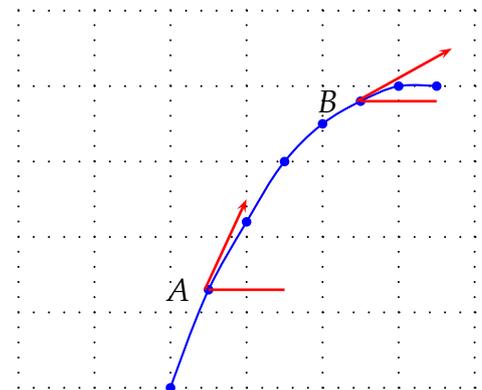


Figura 2.20

2.17.1. Fórmula de la curvatura

La forma más sencilla de cálculo de la curvatura es en función del vector de posición $\vec{r}(t)$. Vamos a verificar que

$$\kappa = \frac{\|\vec{r}' \times \vec{r}''\|}{\|\vec{r}'\|^3}$$

En efecto, si $s' = \|\vec{r}'\|$, $\vec{r}' = s' \vec{T}$, $\vec{r}'' = (s' \vec{T})' = \vec{T}' s' + s'' \vec{T}$, entonces

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{\|\vec{r}' \times \vec{r}''\|}{\|\vec{r}'\|^3} = \frac{\|\vec{T} s' \times (\vec{T}' s' + \vec{T} s'')\|}{s'^3} \\ &= \frac{\|s'^2 (\vec{T} \times \vec{T}') + s' s'' (\vec{T} \times \vec{T})\|}{s'^3} \end{aligned}$$

como $\vec{T} \times \vec{T} = \vec{0}$, entonces la expresión anterior se reduce a

$$\kappa = \frac{\|\vec{T} \times \vec{T}'\|}{s'}$$

Ahora bien, la identidad de Lagrange asegura que

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - \|\vec{a} \cdot \vec{b}\|^2$$

Luego, en la última expresión de la curvatura se tiene

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{\|\vec{T} \times \vec{T}'\|}{s'} = \frac{\sqrt{\|\vec{T}\|^2 \|\vec{T}'\|^2 - \|\vec{T} \cdot \vec{T}'\|^2}}{s'} \\ &= \frac{\|\vec{T}\| \|\vec{T}'\|}{s'} = \frac{\|\vec{T}'\|}{s'} = \left| \frac{d\vec{T}}{ds} \right| \end{aligned}$$

se hizo uso del hecho que $\|\vec{T}\| = 1$ y que $\vec{T} \cdot \vec{T}' = 0$

Sigamos averiguando que sucede con aceleración y curvatura. Para el vector tangente unitario, que es el cociente entre el vector velocidad y su norma, se tiene

$$\vec{T} = \frac{\vec{r}'}{\|\vec{r}'\|} \implies \vec{T} = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{1}{\vec{r}'} = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds}$$

a partir de lo cual obtenemos que

$$\vec{T} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \vec{v} \cdot \frac{dt}{ds} \implies \vec{v} = \frac{ds}{dt} \cdot \vec{T}$$

Para tener la aceleración, derivemos la velocidad respecto de t .

$$\begin{aligned}
 \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{ds}{dt} \cdot \vec{T} \right) = \frac{d^2s}{dt^2} \cdot \vec{T} + \frac{ds}{dt} \cdot \frac{d\vec{T}}{dt} \\
 &= \frac{d^2s}{dt^2} \cdot \vec{T} + \frac{ds}{dt} \cdot \frac{d\vec{T}}{dt} \cdot \frac{\|\vec{T}'\|}{\|\vec{T}'\|} \\
 &= \frac{d^2s}{dt^2} \cdot \vec{T} + \frac{ds}{dt} \cdot \frac{\vec{T}'}{\|\vec{T}'\|} \cdot \|\vec{T}'\| \\
 &= \frac{d^2s}{dt^2} \cdot \vec{T} + \frac{ds}{dt} \cdot \vec{N} \cdot \kappa \cdot \frac{ds}{dt} \\
 &= \frac{d^2s}{dt^2} \cdot \vec{T} + \kappa \cdot \left(\frac{ds}{dt} \cdot \frac{ds}{dt} \right) \cdot \vec{N} \\
 &= \frac{d^2s}{dt^2} \cdot \vec{T} + \kappa \cdot \vec{N} \cdot \left(\frac{ds}{dt} \right)^2
 \end{aligned}$$

Esta última igualdad tiene un significado cinemático conocido e importante: la aceleración de un punto en movimiento tiene una componente tangencial a la trayectoria cuyo valor es la aceleración absoluta, y una componente normal cuyo valor es el producto de la curvatura por el cuadrado de la velocidad absoluta. Lo interesante es que esto permitir calcular la curvatura.

Empleando las notaciones

$$a_T = \frac{d^2s}{dt^2}, \quad a_N = \kappa \cdot \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \tag{2.1}$$

tenemos el vector aceleración expresado como la suma de dos vectores perpendiculares. ¡historia conocida! Uno paralelo al vector velocidad, \vec{T}' , y el otro perpendicular a éste, \vec{N} . Esto significa que el vector aceleración pertenece al plano determinado por \vec{T} y \vec{N} .

$$\vec{a} = a_T \cdot \vec{T} + a_N \cdot \vec{N}$$

Observar también que la norma del vector aceleración satisface $\|\vec{a}\|^2 = a_T^2 + a_N^2$.

Los escalares a_T , a_N son la componente tangencial y normal de la aceleración, respectivamente. En la ecuación 2.1, de acuerdo con la segunda ley de Newton ($\vec{F} = m \cdot \vec{a}$), se tiene que la componente de la fuerza tangencial a la trayectoria del cuerpo controla la razón de cambio de la rapidez del cuerpo ya que

$$m \cdot a_T = m \cdot \frac{d^2s}{dt^2} = m \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{ds}{dt} \right)$$

Esta componente es negativa cuando un objeto frena, y positiva cuando acelera. Luego, la componente tangencial es función exclusivamente de la longitud de arco y es independiente de la curvatura. Por otra parte, la componente de la fuerza normal a la dirección del movimiento del cuerpo controla la curvatura de la trayectoria en la que aquél se desplaza. Esta componente es función de

la rapidez y de la curvatura. Además, A_N es siempre positivo y A_T puede ser positivo o negativo, dependiendo esto de que la partícula esté ganando o perdiendo rapidez (Figura 2.21).

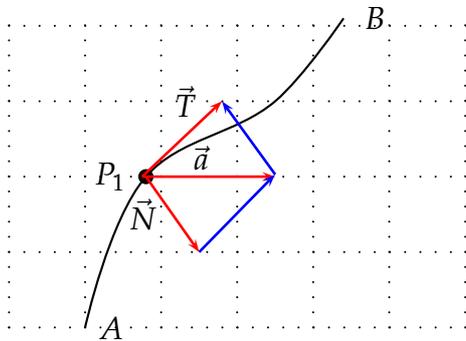


figura 2.21

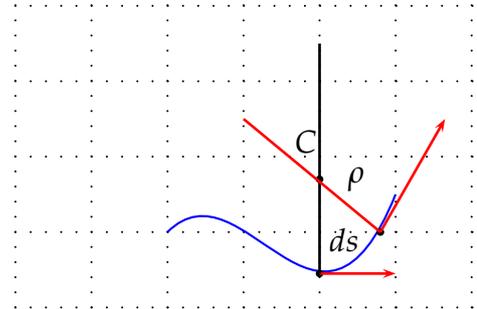


figura 2.22

Definición 2.17.1. La cantidad $\rho = \frac{1}{\kappa}$, el recíproco de la curvatura, se llama **radio de curvatura** ($\kappa \neq 0$).

Así como la tangente es la recta que mejor aproxima la curva en un punto dado, el círculo de curvatura es el círculo que mejor se acerca a la curva en un punto dado. El centro de este círculo se llama **centro de curvatura** y su radio es el de curvatura. La inversa de este radio se denomina **curvatura** de la curva en tal punto. Cuando una curva es más pronunciada su curvatura es mayor y su osculador menor y viceversa.

El radio de curvatura ρ y el centro C del círculo de curvatura se calcula como sigue: Se ubican dos puntos cercanos en la curva y se trazan los respectivos vectores tangente y normal (figura 2.22). Las normales se cortan en el centro C del círculo de curvatura, y la distancia del centro a cada par de puntos infinitamente próximos entre sí es el radio de curvatura. El círculo de curvatura en un punto de la curva es el que más aproxima la curva en dicho punto. En el plano formal, se define como aquél cuyas primera y segunda derivadas coinciden con las correspondientes de la curva en dicho punto, y que además yace en el lado cóncavo.

Ejemplo 2.17.2. Para la curva $\vec{r}(t) = (1 - t, t, t^2 - t^3)$ determinemos su curvatura en el punto $(1, 0, 0)$.

Usaremos la fórmula para curvas parametrizadas.

$$\kappa = \frac{\|\vec{r}' \times \vec{r}''\|}{\|\vec{r}'\|^3}$$

El punto se obtiene con $t = 0$. Luego,

- $\vec{r}'(t) = (-1, 1, 2t - 3t^2) \implies \vec{r}'(0) = (-1, 1, 0)$
- $\vec{r}''(t) = (0, 0, 2 - 6t) \implies \vec{r}''(0) = (0, 0, 2)$
- $\vec{r}'''(t) = (0, 0, -6) \implies \vec{r}'''(0) = (0, 0, -6)$
- $\|\vec{r}'(0)\| = \|(-1, 1, 0)\| = \sqrt{2}$

Ahora se calcula el numerador

$$\vec{r}'(0) \times \vec{r}''(0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (2, 2, 0) \implies \|\vec{r}'(0) \times \vec{r}''(0)\| = 2\sqrt{2}$$

De esta forma,

$$\kappa = \frac{\|\vec{r}' \times \vec{r}''\|}{\|\vec{r}'\|^3} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 1$$

Fórmulas de la Curvatura

Las siguientes, son expresiones para la curvatura, cuando la curva se expresa en forma cartesiana o paramétrica.

1. Si el parámetro es la longitud de arco s , entonces

$$\kappa = \|\vec{T}'(s)\| = \|\vec{r}''(s)\|$$

2. En función del tangente unitario

$$\kappa = \frac{\|\vec{T}'\|}{\|\vec{r}'\|}$$

3. En función del vector de posición

$$\kappa = \frac{\|\vec{r}' \times \vec{r}''\|}{\|\vec{r}'\|^3}$$

4. En función del normal unitario

$$\kappa = \frac{\vec{a} \circ \vec{N}}{\|\vec{v}\|^2}$$

5. Si la curva plana C viene dada en forma cartesiana mediante la función $y = f(x)$ dos veces diferenciable, entonces

$$\kappa = \left| \frac{d\theta}{ds} \right| = \left| \frac{y''(x)}{(1 + y'^2)^{3/2}} \right|$$

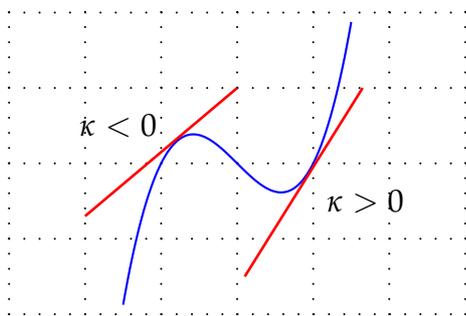


figura 2.23

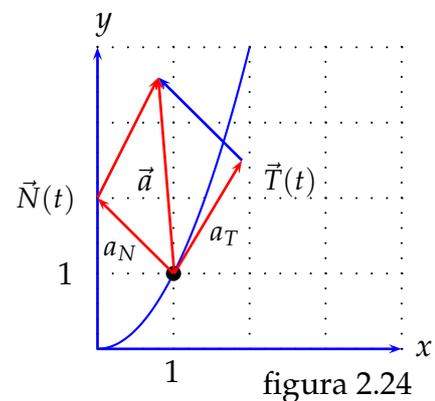


figura 2.24

En esta expresión cartesiana, el signo del valor absoluto se considera positivo si la curva se dobla hacia la izquierda en el punto, y negativo si se dobla a la derecha. Esto es, κ es positiva para $y'' > 0$ (f convexa), y κ negativa para $y'' < 0$ (f cóncava). (figura 2.23)

Ejemplo 2.17.3. Una partícula se mueve sobre la curva $\vec{r}(t) = (t, t^2)$. Determinar \vec{r} , \vec{v} , \vec{a} , a_N y a_T en $t = 1$.

Como el vector de posición está dado, entonces $\vec{r}(1) = (1, 1)$, $\vec{r}'(t) = \vec{v}(t) = (1, 2t)$, $\vec{a}(t) = (0, 2)$
Para hallar a_T usamos

$$a_T = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{ds}{dt} \right) = \frac{d}{dt} (\|\vec{v}(t)\|) = \frac{d}{dt} (\sqrt{1+4t^2}) = \frac{4t}{\sqrt{1+4t^2}}$$

Para determinar la componente normal hacemos uso del hecho que $\|\vec{a}\|^2 = a_T^2 + a_N^2$. Se tiene

$$4 = \left(\frac{4t}{\sqrt{1+4t^2}} \right)^2 + a_N^2 \implies a_N = \frac{2}{\sqrt{1+4t^2}}$$

En $t = 1$ las componentes de la aceleración son:

$$a_T = \frac{4}{\sqrt{5}}, \quad a_N = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

La figura 2.24 muestra las componentes tangencial y normal de la aceleración en este caso.

Ejemplo 2.17.4. Sea $\vec{r}(t) = (1 + \cos t - \sin t)\vec{i} + (\sin t + \cos t)\vec{j}$ la posición de una partícula en el plano. Se tiene:

- $\vec{v} = (-\sin t - \cos t)\vec{i} + (\cos t - \sin t)\vec{j}$
- $\vec{a} = (-\cos t + \sin t)\vec{i} + (-\sin t - \cos t)\vec{j}$
- $\|\vec{v}\| = \sqrt{(\sin t + \cos t)^2 + (\cos t - \sin t)^2} = \sqrt{2}$
- $a_T = \frac{d^2s}{dt^2} \implies a_T = \left(\frac{ds}{dt} \right)' = \frac{d}{dt} \cdot \|\vec{r}'(t)\| = \frac{d}{dt}(\sqrt{2}) = 0$
- $a_N = \kappa \cdot \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = \kappa \cdot (\sqrt{2})^2 = 2\kappa$

Para determinar la curvatura κ ,

$$\vec{T} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-\sin t - \cos t, \cos t - \sin t)$$

de donde

$$\vec{T}' = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-\cos t + \sin t, -\sin t - \cos t) \implies \|\vec{T}'\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} = 1$$

Como, $s'(t) = \|\vec{r}'(t)\|$, entonces $\frac{dt}{ds} = (\|\vec{r}'(t)\|)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Se concluye que

$$\kappa = 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Como $a_N = 2 \kappa$, entonces $a_N = \sqrt{2}$.

2.18. Planos osculador, normal y rectificante

Cuando una partícula se mueve a lo largo de una recta y los vectores velocidad y aceleración no son cero, el vector aceleración es paralelo al vector velocidad. En el movimiento circular, una partícula con velocidad angular constante (fuerza centrípeta) la dirección del vector aceleración es opuesta a la del vector de posición. Es decir, el vector aceleración está dirigido hacia el centro de la circunferencia, teniéndose además, que el vector aceleración es perpendicular al vector velocidad.

En una trayectoria cualquiera hemos probado que el vector aceleración es la suma de dos vectores perpendiculares. Vamos a ver ahora que si el movimiento no es rectilíneo, esos dos vectores perpendiculares determinan un plano llamado **Plano Osculador** (figura 2.25).

Definición 2.18.1.

1. Se llama **Plano Osculador** de la curva C en el punto P , al plano que pasa por P y que contiene los vectores \vec{T} y \vec{N} . Para una partícula desplazándose en el espacio el plano osculador coincide con el plano que en cada instante contiene a la aceleración y la velocidad.
2. El vector $\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}$ se llama **Binormal**, y es normal unitario al plano osculador.
3. El **Plano Normal** es el que pasa por P , y es perpendicular al plano tangente. Contiene a los vectores \vec{B} y \vec{N} .
4. El **Plano Rectificante** es el que pasa por P , y es perpendicular a la normal principal. Contiene a los vectores \vec{B} y \vec{T} .

El concepto de plano osculador se utiliza sólo en curvas que no estén contenidas en un plano. Geométricamente, el plano osculador es el plano más próximo a la curva que pasa por ese punto. Por lo tanto una curva tiene infinitos planos osculadores. Desde el punto de vista topológico el plano osculador es el que contiene más aproximadamente a la curva en una vecindad del punto.

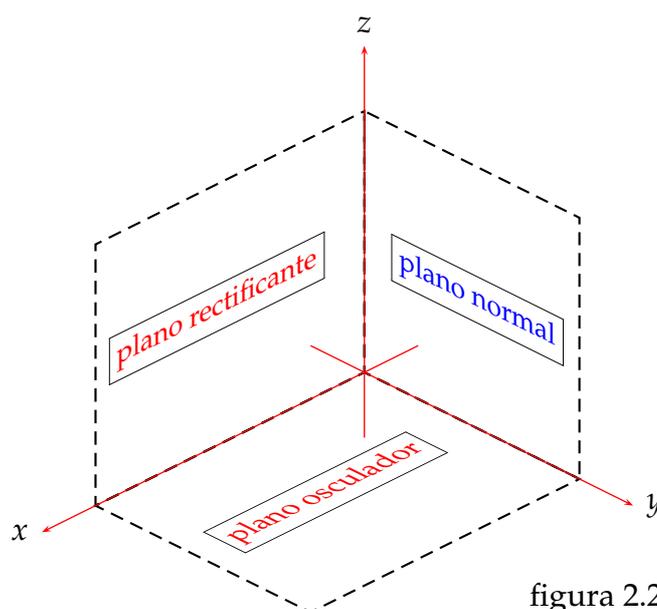


figura 2.25

Veamos otros hechos interesantes que surgen de estas definiciones. Sean \vec{T} , \vec{N} , \vec{B} los vectores tangente normal y binormal respectivamente, considerados en función de la longitud de arco s , entonces

$$\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N} \implies \frac{d\vec{B}}{ds} = \frac{d}{ds} (\vec{T} \times \vec{N}) = \vec{T} \times \frac{d\vec{N}}{ds} + \frac{d\vec{T}}{ds} \times \vec{N}$$

de donde

$$\frac{d\vec{B}}{ds} = \vec{T} \times \frac{d\vec{N}}{ds} + (\kappa \vec{N} \times \vec{N})$$

Se concluye que

$$\frac{d\vec{B}}{ds} = \vec{T} \times \frac{d\vec{N}}{ds} \quad (2.2)$$

Se ha usado el hecho que $\vec{N} \times \vec{N} = \vec{0}$. Para $\frac{d\vec{N}}{ds}$ se tiene

$$\vec{N} \circ \vec{N} = 1 \implies \frac{d}{ds} (\vec{N} \circ \vec{N}) = \frac{d}{ds} (1) \implies \vec{N} \frac{d\vec{N}}{ds} + \frac{d\vec{N}}{ds} \vec{N} = \vec{0} \implies \vec{N} \frac{d\vec{N}}{ds} = \vec{0}$$

Se concluye que los vectores \vec{N} y $\frac{d\vec{N}}{ds}$ son **perpendiculares**.

Observando la ecuación 2.2 vemos que el vector $\frac{d\vec{B}}{ds}$ es normal al vector \vec{T} y al vector $\frac{d\vec{N}}{ds}$. Como $\frac{d\vec{N}}{ds} \perp \vec{N}$, entonces $\frac{d\vec{B}}{ds}$ y \vec{N} son paralelos. Esto es:

$$\frac{d\vec{B}}{ds} = -\tau \vec{N}, \quad \tau \in \mathbb{R}$$

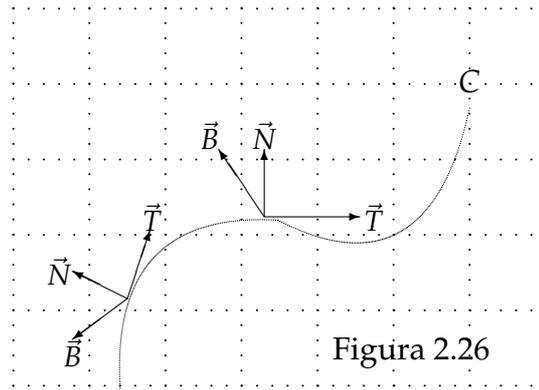


Figura 2.26

El número τ se llama **torsión** de la curva en el punto. Como \vec{B} es el vector de dirección del plano osculador, $\frac{d\vec{B}}{ds}$ mide la rapidez de “torsión” del plano osculador por cambio unitario en la longitud de arco. Se ha elegido el signo menos con el propósito que la torsión sea positiva cuando el vector \vec{B} gira a la derecha en dirección de $-\vec{N}$ (como tornillo de rosca) cuando hay desplazamiento en la dirección creciente de t .

Tal como la curvatura de una curva en el plano, en un punto de la curva, mide la rapidez con la que la curva abandona la tangente en ese punto, la torsión mide la variación de la dirección del plano osculador. El término “torsión” reemplaza al de curvatura para las curvas en el espacio. En el caso de la curvatura de una superficie, el concepto es similar. La curvatura de una superficie, en un punto, mide la rapidez con la que la curva abandona el plano tangente a la curva en ese punto.

El sistema de vectores $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$ constituye una base ortonormal positivamente orientada y recibe el nombre de **triedro de Frenet** o **triedro móvil**, ello permite decir también, que la torsión mide la cantidad que se dobla la curva en el sentido de que el sistema formado por $(\vec{T}, \vec{B}, \vec{N})$ en el punto parece girar alrededor de C conforme el punto se mueve a lo largo de la curva. (figura 2.26)

2.18.1. Cálculo de la Torsión

La torsión τ para una curva en \mathbb{R}^3 puede hallarse empleando el vector de posición mediante la expresión

$$\tau = \frac{(\vec{r}' \times \vec{r}'') \circ \vec{r}'''}{\|\vec{r}' \times \vec{r}''\|^2}$$

De igual forma, los vectores Normal y Binormal tienen expresiones simples de cálculo, mediante el empleo del vector posición. Al respecto, se tiene

$$\vec{B} = \frac{\vec{r}' \times \vec{r}''}{\|\vec{r}' \times \vec{r}''\|}, \quad \vec{N} = \frac{(\vec{r}' \times \vec{r}'') \times \vec{r}'}{\|(\vec{r}' \times \vec{r}'') \times \vec{r}'\|}$$

2.18.2. Fórmulas de Frenet

Sabemos que los vectores tangente, normal y binormal satisfacen

$$\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}; \quad \vec{T} = \vec{N} \times \vec{B}; \quad \vec{N} = \vec{B} \times \vec{T}$$

De la tercera de ellas se obtiene

$$\vec{N} = \vec{B} \times \vec{T} \implies \frac{d\vec{N}}{ds} = \vec{B} \times \frac{d\vec{T}}{ds} + \frac{d\vec{B}}{ds} \times \vec{T}$$

También se sabe que

$$\frac{d\vec{B}}{ds} = -\tau \cdot \vec{N} \quad \text{y} \quad \frac{d\vec{T}}{ds} = \kappa \cdot \vec{N} \quad (2.3)$$

Luego,

$$\frac{d\vec{N}}{ds} = \vec{B} \times (\kappa \cdot \vec{N}) - \tau \cdot \vec{N} \times \vec{T} = \kappa \cdot (\vec{B} \times \vec{N}) - \tau \cdot (\vec{N} \times \vec{T})$$

Concluimos que

$$\frac{d\vec{N}}{ds} = -\kappa \cdot \vec{T} + \tau \cdot \vec{B} \quad (2.4)$$

Las ecuaciones 2.3 y 2.4 constituyen las llamadas, **fórmulas de Frenet - Serret**.

Ejemplo 2.18.2. Sea C la Hélice circular parametrizada por las ecuaciones

$$x = 3 \cos t, \quad y = 3 \sin t, \quad z = 4t$$

1. El vector de posición $\vec{r} = (3 \cos t, 3 \sin t, 4t)$
2. El vector velocidad $\vec{r}' = (-3 \sin t, 3 \cos t, 4)$, su norma $\|\vec{r}'\| = 5$
3. El vector aceleración $\vec{r}'' = (-3 \cos t, -3 \sin t, 0)$
4. El vector tangente unitario $\vec{T} = \frac{\vec{r}'}{\|\vec{r}'\|} = \frac{1}{5}(-3 \sin t, 3 \cos t, 4)$
5. Para el normal unitario \vec{N} tenemos:

$$\vec{r}' \times \vec{r}'' = (-3 \sin t, 3 \cos t, 4) \times (-3 \cos t, -3 \sin t, 0) = (12 \sin t, -12 \cos t, 9)$$

$$(\vec{r}' \times \vec{r}'') \times \vec{r}' = (12 \sin t, -12 \cos t, 9) \times (-3 \sin t, 3 \cos t, 4) = (-75 \cos t, -75 \sin t, 0)$$

$$\|(\vec{r}' \times \vec{r}'') \times \vec{r}'\| = 75$$

Se concluye que $\vec{N} = -(\cos t, \sin t, 0)$

6. La curvatura es

$$\kappa = \frac{\|\vec{r}' \times \vec{r}''\|}{\|\vec{r}'\|^3} = \frac{\|(12\operatorname{sen} t, -12\operatorname{cos} t, 9)\|}{125} = \frac{3}{25}$$

7. El radio de curvatura, $\rho = \frac{1}{\kappa} \implies \rho = \frac{25}{3}$

8. Para el vector binormal tenemos:

$$\vec{B} = \frac{\vec{r}' \times \vec{r}''}{\|\vec{r}' \times \vec{r}''\|} = \frac{(12\operatorname{sen} t, -12\operatorname{cos} t, 9)}{15} = \frac{1}{5}(4\operatorname{sen} t, -4\operatorname{cos} t, 3)$$

9. La torsión es

$$\tau = \frac{(\vec{r}' \times \vec{r}'') \cdot \vec{r}'''}{\|\vec{r}' \times \vec{r}''\|^2} = \frac{(12\operatorname{sen} t, -12\operatorname{cos} t, 9) \cdot (3\operatorname{sen} t, -3\operatorname{cos} t, 0)}{9} = \frac{4}{25}$$

10. El radio de torsión es $\delta = \frac{1}{\tau} = \frac{25}{4}$

Ejemplo 2.18.3. Para la curva parametrizada $x = t$, $y = t^2$, $z = \frac{2}{3}t^3$, se tiene:

1. El vector de posición es $\vec{r} = (t, t^2, \frac{2}{3}t^3)$

2. El vector velocidad, $\vec{r}' = (1, 2t, 2t^2)$, su norma $\|\vec{r}'\| = 1 + 2t^2$

3. El tangente unitario es

$$\vec{T} = \frac{1}{1 + 2t^2} \cdot (1, 2t, 2t^2) = \left(\frac{1}{1 + 2t^2}, \frac{2t}{1 + 2t^2}, \frac{2t^2}{1 + 2t^2} \right)$$

4. El normal unitario es $\vec{N} = \frac{(-2t, 1 - 2t^2, 2t)}{1 + 2t^2}$

5. El binormal

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \vec{T} \times \vec{N} = \frac{(1, 2t, 2t^2)}{1 + 2t^2} \times \frac{(-2t, 1 - 2t^2, 2t)}{1 + 2t^2} \\ &= \frac{1}{(1 + 2t^2)^2} \cdot \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2t & 2t^2 \\ -2t & 1 - 2t^2 & 2t \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(1 + 2t^2)^2} \cdot (2t^2 + 4t^4, -2t - 4t^3, 1 + 2t^2) \end{aligned}$$

Después de simplificar

$$\vec{B} = \frac{(1+2t^2)}{(1+2t^2)^2} \cdot (2t^2, -2t, 1) = \frac{(2t^2, -2t, 1)}{1+2t^2}$$

6. Para el cálculo de la curvatura tenemos

$$\kappa = \left\| \frac{d\vec{T}}{ds} \right\| \implies \kappa = \frac{2}{1+2t^2} \cdot \frac{1}{1+2t^2} = \frac{2}{(1+2t^2)^2}$$

7. El radio de curvatura es $\rho = \frac{(1+2t^2)}{2}$

8. La torsión viene dada por $\tau = \frac{2}{(1+2t^2)^2}$

9. En $t = 1$ los vectores unitarios tienen los siguientes valores:

$$\vec{T}(1) = \frac{1}{3} (1, 2, 2) \quad \text{vector tangente}$$

$$\vec{N}(1) = \frac{1}{3} (-2, -1, 2) \quad \text{vector normal}$$

$$\vec{B}(1) = \frac{1}{3} (2, -2, 1) \quad \text{vector binormal}$$

10. Para hallar la ecuación de la recta tangente, el punto en la curva es $(1, 1, \frac{2}{3})$, y el vector director de esta recta es $\vec{d} = (1, 2, 2)$, de modo que

$$\vec{L} = (1, 1, \frac{2}{3}) + t (1, 2, 2)$$

es la ecuación de la recta tangente. en forma simétrica,

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-\frac{2}{3}}{2}$$

11. Para hallar la ecuación de la recta normal, el punto sobre la curva, con $t = 1$, es $(1, 1, \frac{2}{3})$, el vector director $\vec{d} = (-2, -1, 2)$, de manera que

$$\vec{L} = (1, 1, \frac{2}{3}) + t (-2, -1, 2)$$

O bien

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-\frac{2}{3}}{2}$$

son las ecuaciones vectorial y simétrica, respectivamente, de la recta normal.

12. Para la ecuación de la recta binormal, el punto sobre la curva, con $t = 1$, es $(1, 1, \frac{2}{3})$, el vector director $\vec{d} = (2, -2, 1)$, de manera que

$$\vec{L} = (1, 1, \frac{2}{3}) + t(2, -2, 1)$$

O bien

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-\frac{2}{3}}{1}$$

son las ecuaciones vectorial y simétrica, respectivamente, de la recta binormal.

13. Para hallar la ecuación del plano osculador, el punto en el plano es $\vec{r}(1) = (1, 1, \frac{2}{3})$. El vector normal es $\vec{B}(1) = \frac{1}{3}(2, -2, 1)$. Luego, la ecuación del plano osculador es

$$(x-1, y-1, z-\frac{2}{3}) \circ \frac{1}{3}(2, -2, 1) = 0$$

al simplificar

$$6x - 6y + 3z - 2 = 0$$

14. La ecuación del plano tiene como vector normal a $\vec{T}(1) = \frac{1}{3}(1, 2, 2)$. Luego,

$$(x-1, y-1, z-\frac{2}{3}) \cdot \frac{1}{3}(1, 2, 2) = 0$$

simplificando, la ecuación del plano normal es

$$3x + 6y + 6z - 13 = 0$$

15. La ecuación del plano rectificante tiene vector normal $\vec{N}(1) = \frac{1}{3}(-2, -1, 2)$. Luego

$$(x-1, y-1, z-\frac{2}{3}) \cdot \frac{1}{3}(-2, -1, 2) = 0$$

al simplificar, la ecuación del plano rectificante es

$$6x + 3y - 6z - 5 = 0$$

2.19. Problemas resueltos

Ejemplo 2.19.1. Probemos $Fr(E) = Fr(E^c)$

Sea $V(x)$ una vecindad o entorno cualquiera del elemento x . De acuerdo con la definición de frontera, se tiene

$$\begin{aligned} x \in Fr(E) &\iff V(x) \cap E \neq \phi \wedge V(x) \cap E^c \neq \phi, \forall V(x) \\ &\iff V(x) \cap E^c \neq \phi \wedge V(x) \cap (E^c)^c \neq \phi \\ &\iff x \in Fr(E^c) \end{aligned}$$

Ejemplo 2.19.2. Sea $E \subset \mathbb{R}^n$. Demostremos que si E es un conjunto abierto, entonces E no contiene puntos frontera.

Sea $V(x)$ una vecindad cualquiera del elemento x . De acuerdo con la definición de abierto, se tiene

$$\begin{aligned} x \in E &\implies \exists V(x) \text{ tal que } V(x) \subset E \\ &\implies V(x) \cap E \neq \phi \wedge V(x) \cap E^c = \phi \\ &\implies x \notin Fr(E) \end{aligned}$$

Ejemplo 2.19.3. Sea $E \subset \mathbb{R}^n$. Demostrar que si E es un conjunto cerrado, entonces E contiene los puntos frontera.

Sea x punto frontera de E y tal que $x \notin E$. En estas condiciones $x \in E^c$, y como el conjunto E^c es abierto (E es cerrado) entonces existe una vecindad $V(x) \subset E^c$. De aquí que

$$V(x) \cap E^c \neq \phi \wedge V(x) \cap E = \phi$$

A partir de esto se tiene que x no sería punto frontera, y en consecuencia entramos en contradicción. De esta forma, $x \in E$, es decir, E contiene a sus puntos frontera.

Ejemplo 2.19.4. Demostremos que $A^\circ \cap B^\circ = (A \cap B)^\circ$

Como se trata de una igualdad, debemos probar una doble implicación.

\implies) Se sabe que $A^\circ \subset A$ y que $B^\circ \subset B$, de modo que $A^\circ \cap B^\circ \subset A \cap B$. Como $A^\circ \cap B^\circ$ es una intersección de conjunto abiertos, entonces $A^\circ \cap B^\circ$ es un conjunto abierto. Siendo $(A \cap B)^\circ$ el conjunto abierto más grande contenido en $(A \cap B)$, se tiene necesariamente

$$A^\circ \cap B^\circ \subset (A \cap B)^\circ$$

\impliedby) Para probar en el sentido inverso tenemos que $A \cap B \subset A$ y $A \cap B \subset B$, de manera que es válido entonces que

$$(A \cap B)^\circ \subset A^\circ \quad \text{y} \quad (A \cap B)^\circ \subset B^\circ$$

de lo cual se obtiene que $(A \cap B)^\circ \subset A^\circ \cap B^\circ$.

Se concluye que $A^\circ \cap B^\circ = (A \cap B)^\circ$

Ejemplo 2.19.5. Para el conjunto $A = \{(-\frac{1}{n}, 0), n \in \mathbb{N}^*\} \cup (-2, -1) \times [-1, 2]$ se tiene:

1. $\text{Int } A = (-2, -1) \times (-1, 2)$
2. $\text{Ext } A = \mathbb{R}^2 - [-2, -1] \times [-1, 2] - (-\frac{1}{n}, 0) - \{(0, 0)\}$
3. $\bar{A} = [-2, -1] \times [-1, 2] \cup (-\frac{1}{n}, 0) \cup \{(0, 0)\}$
4. $A' = [-2, -1] \times [-1, 2] \cup \{(0, 0)\}$
5. $\text{Fr}(A) = \{-2 \leq x \leq -1, y = -1\} \cup \{-2 \leq x \leq -1, y = 2\} \cup \{-1 \leq y \leq 2, x = -2\} \cup \{-1 \leq y \leq 2, x = -1\} \cup (-\frac{1}{n}, 0) \cup \{(0, 0)\}$
6. Como $\text{Int } A \neq A$ se concluye que A no es abierto.
7. Como $\bar{A} \neq A$ se concluye que A no es cerrado.

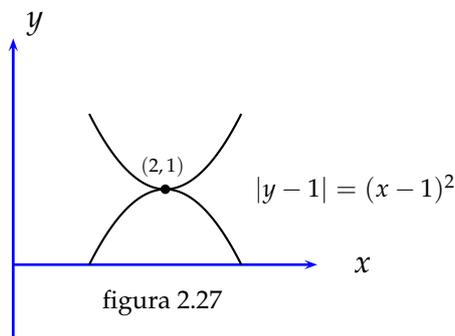
Ejemplo 2.19.6. Sea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |y - 1| < (x - 2)^2\}$. Se tiene lo siguiente:

1. La gráfica del recinto A la muestra la figura 2.27.
2. El punto $P(2, 1) \notin A$, luego no es **punto interior**.
3. El punto $P(2, 1)$ es punto frontera pues $\forall V(2, 1)$ se satisface que

$$V(2, 1) \cap A \neq \phi, \quad V(2, 1) \cap A^c \neq \phi$$

4. El punto $P(2, 1)$ es de acumulación pues $(V(2, 1) - \{(2, 1)\}) \cap A \neq \phi$
5. $\bar{A} = \{(x, y) / |y - 1| \leq (x - 2)^2\}$, $A^\circ = A \implies A$ es abierto, y además,

$$\text{Fr}(A) = \{(x, y) / y - 1 = (x - 2)^2 \wedge y - 1 = -(x - 2)^2\}$$



Ejemplo 2.19.7. Un proyectil es lanzado en un ángulo de elevación de 45° con velocidad inicial de 2500 p/seg. Determinemos el rango del proyectil, la máxima altura alcanzada, y su velocidad de impacto.

Se sabe que el vector de posición para un proyectil que es lanzado bajo cierto ángulo y con velocidad inicial es

$$\vec{r}(t) = tv_0 \cos \alpha \vec{i} + (tv_0 \sin \alpha - \frac{1}{2}gt^2) \vec{j}$$

Si consideramos que $g = 32$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ y $v_0 = 2500$, entonces, el vector de posición del proyectil es

$$\vec{r}(t) = 1250t\sqrt{2} \vec{i} + (1250t\sqrt{2} - 16t^2) \vec{j}$$

Para determinar el rango, resolvemos la ecuación $\vec{r}(t) = 0$, de la cual se halla $t = 0$, $t = \frac{1}{8} 625\sqrt{2}$, que es el tiempo de vuelo. Ahora, con este valor de t reemplazado en la primera coordenada del vector de posición, se encuentra que el rango es

$$x = 2500 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{8} 625\sqrt{2} = \frac{1}{2} 390625$$

Para hallar la altura máxima se recurre a la derivada de la segunda componente del vector de posición respecto del tiempo. Se tiene

$$\frac{dy}{dt} = 0 \implies t = \frac{625\sqrt{2}}{16}$$

con lo cual, la altura máxima es

$$H(\text{máxima}) = 1250 \cdot \frac{625\sqrt{2}}{16} \cdot \sqrt{2} - 16 \cdot \left(\frac{625\sqrt{2}}{16}\right)^2$$

Al simplificar se obtiene

$$H(\text{máxima}) = \frac{390,625}{8}$$

Para el cálculo de la velocidad de impacto, que es la velocidad en el tiempo de vuelo, tenemos

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= 1250t\sqrt{2} \vec{i} + (1250t\sqrt{2} - 16t^2) \vec{j} \\ \vec{v}(t) &= 1250\sqrt{2} \vec{i} + (1250\sqrt{2} - 32t) \vec{j} \\ \vec{v}\left(\frac{625\sqrt{2}}{8}\right) &= 1250\sqrt{2} \vec{i} + \left(1250\sqrt{2} - 32 \cdot \frac{625\sqrt{2}}{8}\right) \vec{j} \\ &= 1250\sqrt{2} \vec{i} - 1250\sqrt{2} \vec{j} \end{aligned}$$

Ejemplo 2.19.8. Un proyectil es lanzado desde lo alto de un edificio de 96 pies de altura en un ángulo de 30° con la horizontal. Si la velocidad inicial es de 1600 p/seg, vamos a encontrar el tiempo de vuelo y la distancia de la base del edificio al punto donde el proyectil aterriza.

En este caso tenemos que

$$\vec{r}(t) = (tv_0\cos\alpha, tv_0\sen\alpha - \frac{1}{2}gt^2 + 96)$$

Si consideramos $g = 32$, $\alpha = 30^\circ$, $v_0 = 1600$, entonces el vector de posición del proyectil es

$$\vec{r}(t) = 800t\sqrt{3}\vec{i} + (800t - 16t^2 + 96)\vec{j}$$

Para determinar el tiempo de vuelo resolvemos la ecuación $800t - 16t^2 + 96 = 0$, de la cual se halla $t = 25 + \sqrt{631}$.

La distancia del aterrizaje lo entrega la primera coordenada del vector de posición en el tiempo de vuelo. Esto es

$$x = 800 \cdot \sqrt{3} \cdot (25 + \sqrt{631}) = 20,000\sqrt{3} + 800\sqrt{1893}$$

Ejemplo 2.19.9. Desde un punto ubicado a 256 pies de altura en el cerro Ñielol, se lanza una pelota en forma horizontal, con velocidad inicial de 50 pies/seg. Vamos a determinar el tiempo de vuelo de la pelota, y la distancia de la base del cerro al punto donde la pelota desciende.

Con los datos del problema, el vector de posición es

$$\vec{r}(t) = (50t, -16t^2 + 256) = 50 \cdot t\vec{i} + (-16t^2 + 256)\vec{j}$$

El tiempo de vuelo se encuentra al resolver la ecuación $16t^2 - 256 = 0$, teniéndose $t = 4$. Con este valor de t se obtiene $x = 200$ que es la distancia pedida.

Ejemplo 2.19.10. Hallemos los vectores tangente y normal unitario de la curva de ecuaciones paramétricas $x = \frac{1}{3}t^3 - t$, $y = t^2$, en el punto $t = 2$.

El vector de posición de la curva es $\vec{r} = (\frac{1}{3}t^3 - t, t^2)$, de modo que $\vec{r}' = (t^2 - 1, 2t)$, y en $t = 2$ es $\vec{r}'(2) = (3, 4)$. Ahora bien, la norma de este vector es $\|\vec{r}'(2)\| = 5$, con lo cual $\vec{T} = \frac{1}{5}(t^2 - 1, 2t)$, de aquí que $\vec{T}(2) = \frac{1}{5}(3, 4)$.

Para hallar el vector normal unitario usemos el tangente unitario.

$$\begin{aligned} \vec{T} &= \frac{1}{5}(t^2 - 1, 2t) \implies \vec{T}' = \frac{2}{(1+t^2)}(2t, 1-t^2) \implies \|\vec{T}'\| = \frac{2}{(1+t^2)} \\ \vec{N} &= \frac{\vec{T}'}{\|\vec{T}'\|} = \frac{1}{(1+t^2)}(2t, 1-t^2) \implies \vec{N}(2) = \frac{1}{5}(4, -3) \end{aligned}$$

Ejemplo 2.19.11. Una partícula se mueve sobre la curva $y^2 = 8x$ con rapidez constante e igual a k . Vamos a encontrar en el punto $(2, 4)$ los vectores de posición, velocidad, aceleración, tangente unitario, y normal unitario, como también, las componentes tangencial y normal.

Con $y = t$ se tiene $t^2 = 8x$, con lo cual el vector de posición es $\vec{r}(t) = (\frac{t^2}{8}, t)$, y en particular, $\vec{r}(4) = (2, 4)$. Para hallar el vector velocidad se tiene

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}, \quad \text{y} \quad 2y\dot{y} = 8\dot{x}$$

Como se sabe que $\|\vec{v}\| = k$, con k una constante, entonces

$$\begin{aligned} (\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 = k^2 &\implies (\dot{x})^2 + \frac{16}{y^2} (\dot{x})^2 = k^2 \\ &\implies (\dot{x})^2 \left(1 + \frac{16}{y^2}\right) = k^2 \\ &\implies (\dot{x})^2 (y^2 + 16) = k^2 y^2 \\ &\implies \dot{x} = \frac{ky}{\sqrt{y^2 + 16}} \implies \dot{x}(2,4) = \frac{k}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Análogamente, $\dot{y}(2,4) = \frac{k}{\sqrt{2}}$. En consecuencia

$$\vec{v}(2,4) = \frac{k}{\sqrt{2}} \vec{i} + \frac{k}{\sqrt{2}} \vec{j}$$

Ahora vamos a determinar el vector aceleración. Para ello escribimos el vector velocidad en la forma

$$\vec{v} = \dot{x} \vec{i} + \dot{y} \vec{j} = \frac{ky}{\sqrt{y^2 + 16}} \vec{i} + \frac{4k}{\sqrt{y^2 + 16}} \vec{j}$$

Derivamos para tener

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{16k}{\sqrt{(y^2 + 16)^3}} \vec{i} - \frac{4ky}{\sqrt{(y^2 + 16)^3}} \vec{j}$$

Se debe tener en cuenta que $y = t \implies dy = dt$. En el punto $(2,4)$ tenemos

$$\vec{a}(2,4) = \frac{k\sqrt{2}}{16} \vec{i} - \frac{k\sqrt{2}}{16} \vec{j} = \frac{k\sqrt{2}}{16} (1, -1)$$

Se puede escribir $\vec{A} = \frac{k^2}{16} (1, -1)$, pues $k = \sqrt{2}$.

El vector tangente unitario se encuentra como cociente del vector velocidad y su norma. Esto es

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{y}{\sqrt{(y^2 + 16)}} \vec{i} + \frac{4}{\sqrt{(y^2 + 16)}} \vec{j} \implies \vec{T}(2,4) = \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{j}$$

El vector normal unitario se encuentra como cociente del vector tangente unitario derivado y su norma. Esto es

$$\vec{N} = \frac{\vec{T}'}{\|\vec{T}'\|}$$

Se tiene

$$\begin{aligned}\vec{T}' &= \frac{16}{\sqrt{(y^2 + 16)^3}} \vec{i} - \frac{4y}{\sqrt{(y^2 + 16)^3}} \vec{j} \\ \vec{T}'(2,4) &= \frac{1}{8\sqrt{2}} \vec{i} - \frac{1}{8\sqrt{2}} \vec{j}, \quad \|\vec{T}'(2,4)\| = \frac{1}{8} \\ \vec{N}(2,4) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{i} - \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{j}\end{aligned}$$

Para la componente a_T se tiene

$$a_T = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{ds}{dt} \right) = \frac{d}{dt} (\|\vec{r}'\|) = \frac{d}{dt} (\|\vec{v}\|) = \frac{d}{dt} (k) = 0$$

La componente $A_N = \kappa \left(\frac{ds}{dt} \right)^2$, en donde κ es la curvatura de la curva. Se tiene

$$\kappa = \left\| \frac{d\vec{T}}{ds} \right\| = \left\| \frac{d\vec{T}}{dt} \right\| \left| \frac{dt}{ds} \right| = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{k} = \frac{1}{8k}$$

Luego, la componente normal es

$$A_N = \frac{1}{8k} \cdot k^2 = \frac{k}{8}$$

Ejemplo 2.19.12. Hallemos los elementos del triedro de Frenet de $\vec{r}(t) = (e^t, e^{-t}, t\sqrt{2})$, cuando $t = 0$.

El valor $t = 0$ define el punto $P = (1, 1, 0)$. Sabemos que el vector tangente unitario en P es paralelo a $\vec{r}'(0)$ y que el vector binormal es paralelo a $\vec{r}'(0) \times \vec{r}''(0)$. Por último, sabemos que el vector normal principal es paralelo al vector que resulta de multiplicar vectorialmente $\vec{r}' \times \vec{r}''(0)$ por $\vec{r}'(0)$. Tenemos:

- $\vec{r}(t) = (e^t, e^{-t}, t\sqrt{2}) \implies \vec{r}'(t) = (e^t, -e^{-t}, \sqrt{2}) \implies \vec{r}'(0) = (1, -1, \sqrt{2})$.
- $\vec{r}'(t) = (e^t, -e^{-t}, \sqrt{2}) \implies \vec{r}''(t) = (e^t, e^{-t}, 0) \implies \vec{r}''(0) = (1, 1, 0)$.
- $\vec{r}'(0) \times \vec{r}''(0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2) \implies (-1, 1, \sqrt{2})$
- $(\vec{r}'(0) \times \vec{r}''(0)) \times \vec{r}'(0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 2 \\ 1 & -1 & \sqrt{2} \end{vmatrix} = (4, 4, 0) \implies (1, 1, 0)$

Esto nos lleva a establecer que los elementos del triedro de Frenet son:

Recta tangente : $\frac{x-1}{\boxed{1}} = \frac{y-1}{\boxed{-1}} = \frac{z}{\boxed{\sqrt{2}}}$

$$\text{Plano normal : } \boxed{1}(x-1) + \boxed{-1}(y-1) + z\boxed{\sqrt{2}} = 0$$

$$\text{Recta binormal : } \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Plano osculador : } -1(x-1) + 1(y-1) + z\sqrt{2} = 0$$

$$\text{Recta normal principal : } \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{0}$$

$$\text{Plano rectificante : } \boxed{1}(x-1) + \boxed{1}(y-1) + \boxed{0}z = 0$$

Ejemplo 2.19.13. Hallemos los elementos del triedro de Frenet, en $(1, 0, 0)$, de la curva $\vec{r}(t) = (t - \cos t, \sin t, t)$.

El valor $t = 0$ define el punto $P = (1, 0, 0)$. Tenemos:

$$\blacksquare \vec{r}(t) = (t - \cos t, \sin t, t) \implies \vec{r}'(t) = (1 + \sin t, \cos t, 1) \implies \vec{r}'(0) = (1, 1, 1).$$

$$\blacksquare \vec{r}'(t) = (1 + \sin t, \cos t, 1) \implies \vec{r}''(t) = (\cos t, -\sin t, 0) \implies \vec{r}''(0) = (1, 0, 0).$$

$$\blacksquare \vec{r}'(0) \times \vec{r}''(0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, 1, -1)$$

$$\blacksquare (\vec{r}'(0) \times \vec{r}''(0)) \times \vec{r}'(0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (2, -1, -1)$$

Luego, los elementos del triedro de Frenet son:

$$\text{Recta tangente : } \frac{x+1}{\boxed{1}} = \frac{y}{\boxed{1}} = \frac{z}{\boxed{1}}$$

$$\text{Plano normal : } (x+1) + y + z = 0$$

$$\text{Recta binormal : } \frac{x+1}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$$

$$\text{Plano osculador : } y - z = 0$$

$$\text{Recta normal principal : } \frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-1}$$

$$\text{Plano rectificante : } \boxed{2}(x+1) + \boxed{-1}y + \boxed{-1}z = 0$$

Ejemplo 2.19.14. Hallemos curvatura y torsión en cualquier punto de la curva $\vec{r}(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$.

Debemos encontrar las tres primeras derivadas

$$\vec{r}'(t) = (3 - 3t^2, 6t, 3 + 3t^2), \quad \vec{r}''(t) = (-6t, 6, 6t), \quad \vec{r}'''(t) = (-6, 0, 6)$$

para calcular :

- $\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 - 3t^2 & 6t & 3 + 3t^2 \\ -6t & 6 & 6t \end{vmatrix} = 18(t^2 - 1, -2t, t^2 + 1)$
- $|\vec{r}'(t)| = 3\sqrt{(1 - t^2)^2 + 4t^2 + (1 + t^2)^2} = 3\sqrt{2}(1 + t^2)$
- $|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)| = 18\sqrt{(t^2 - 1)^2 + 4t^2 + (1 + t^2)^2} = 18\sqrt{2}(1 + t^2)$
- $(\vec{r}' \times \vec{r}'') \cdot \vec{r}''' = 108 \begin{vmatrix} 1 - t^2 & 2t & 1 + t^2 \\ -t & 1 & t \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 216$

Con estos datos se tiene:

$$\text{curvatura} : \kappa(t) = \frac{|\vec{r}' \times \vec{r}''|}{|\vec{r}'|^3} = \frac{18\sqrt{2}(1 + t^2)}{54\sqrt{2}(1 + t^2)^3} = \frac{1}{3(1 + t^2)^2}$$

$$\text{torsión} : \tau = \frac{(\vec{r}' \times \vec{r}'') \cdot \vec{r}'''}{\|\vec{r}' \times \vec{r}''\|^2} = \frac{216}{648(1 + t^2)^2} = \frac{1}{3(1 + t^2)^2}$$

Como la curvatura y la torsión son iguales en cada punto, la curva es una hélice.

Ejemplo 2.19.15. Dada la curva $\vec{r}(t) = (2\cos t, 2\sin t, t)$, hallar los puntos de ésta para los cuales el plano osculador por dicho punto es paralelo a la recta $\{x + 2z = 2, x - y = 2\}$.

Un plano es paralelo a una recta si y sólo si el vector normal del plano y el vector director de la recta son perpendiculares. Por tanto, se trata de comprobar que el vector normal del plano osculador es perpendicular al vector director de la recta. El vector perpendicular del plano osculador es el vector binormal. Por tanto, vamos a hallar la dirección del vector binormal (no hace falta calcular el propio vector binormal) en cada punto y el vector director de la recta, y después, vamos a imponer que ambos sean perpendiculares.

$$\vec{r}'(t) = (-2\sin t, 2\cos t, 1), \quad \vec{r}''(t) = (-2\cos t, -2\sin t, 0)$$

de lo cual,

$$\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2\sin t & 2\cos t & 1 \\ -2\cos t & -2\sin t & 0 \end{vmatrix} = (2\sin t, -2\cos t, 4) \implies (\sin t, -\cos t, 2)$$

Calculamos ahora el vector director de la recta. Dicha recta viene dada como intersección de dos planos. Por tanto, el vector director de ella se obtiene de multiplicar vectorialmente los vectores normales de los respectivos planos:

- plano $x + 2z = 2 \implies \vec{n}_1 = (1, 0, 2)$.
- plano $x - y = 2 \implies \vec{n}_2 = (1, -1, 0)$.

Así, el vector director de la recta es

$$\vec{d} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (2, 2, -1)$$

Por consiguiente, para el que el plano osculador sea paralelo a la recta, se debe cumplir que

$$(\sin t, -\cos t, 2) \cdot (2, 2, -1) = 0 \implies \sin t - \cos t - 1 = 0 \implies \sin t - \cos t = 1$$

Esta ecuación tiene dos soluciones:

- ⊕ $\sin t = 1 \wedge \cos t = 0 \implies t = \frac{\pi}{2}$ más $2n\pi$ por periodicidad.
- ⊕ $\sin t = 0 \wedge \cos t = -1 \implies t = \pi$ más $2n\pi$ por periodicidad.

Ejemplo 2.19.16. Dada la curva $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, f(t))$, comprobar que si $f(t) = \alpha \sin t + \beta \cos t$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces la curva es plana.

Hay que comprobar que la torsión de la curva es cero. Para ello se tiene que, si

$$\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, \alpha \sin t + \beta \cos t)$$

entonces

- $\vec{r}'(t) = (-\sin t, \cos t, \alpha \cos t - \beta \sin t)$
- $\vec{r}''(t) = (-\cos t, -\sin t, -\alpha \sin t - \beta \cos t)$
- $\vec{r}'''(t) = (\sin t, -\cos t, -\alpha \cos t + \beta \sin t)$

Se observa que los vectores $\vec{r}'(t)$ y $\vec{r}'''(t)$ son proporcionales (uno de ellos multiplicado por -1 da como resultado el otro), por consiguiente,

$$\tau = \frac{(\vec{r}' \times \vec{r}'') \circ \vec{r}'''}{\|\vec{r}' \times \vec{r}''\|^2} = 0$$

por lo que deducimos que la curva es plana.

Ejemplo 2.19.17. Demostremos que la curva $\vec{r}(t) = (t^2 + 2, t^2 + 2t + 3, t + 1)$ es plana y hallar la ecuación del plano que la contiene.

Ya sabemos que para comprobar que la curva es plana, basta verificar que su torsión es cero. Esto es, que

$$(\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)) \circ \vec{r}'''(t) = 0$$

Las componentes de la curva son polinomios de grado menor que 3 y, por tanto, su derivada tercera es cero para todo t . Esto significa que $\vec{r}'''(t) = (0, 0, 0)$ y, por consiguiente, la torsión es nula. Luego la curva es plana y está contenida en el **plano osculador**. En otras palabras, el plano osculador a la curva en todos sus puntos es siempre el mismo y la curva está contenida en dicho plano. Para hallar su ecuación, basta considerar uno cualquiera de sus puntos, por ejemplo, tomamos $t = 0$, con lo que estamos en el punto $P = (2, 3, 1)$.

- $\vec{r}'(t) = (2t, 2t + 2, 1) \implies \vec{r}'(0) = (0, 2, 1)$
- $\vec{r}''(t) = (2, 2, 0) \implies \vec{r}''(0) = (2, 2, 0)$
- $\vec{r}'(0) \times \vec{r}''(0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-2, 2, -4) \implies (1, -1, 2)$

Por tanto, la ecuación del plano osculador en todos los puntos de la curva (y a su vez, el plano que contiene a la curva) es

$$x - 2 - (y - 3) + 2(z - 1) = 0 \implies x - y + 2z = 1$$

Ejemplo 2.19.18. Dada la curva $\vec{r}(t) = (t^2, 2t, \cos t)$, se pide:

1. Hallar un punto P de dicha curva en el que la torsión sea nula.
2. Hallar las ecuaciones de las rectas tangente, normal y binormal por el punto P .

Para hallar el punto necesitamos las derivadas:

$$\vec{r}'(t) = (2t, 2, -\text{sen } t), \quad \vec{r}''(t) = (2, 0, -\text{cos } t), \quad \vec{r}'''(t) = (0, 0, \text{sen } t)$$

Ahora, la torsión debe ser cero, por tanto,

$$(\vec{r}' \times \vec{r}'') \circ \vec{r}''' = 0 \implies \begin{vmatrix} 2t & 2 & -\text{sen } t \\ 2 & 0 & -\text{cos } t \\ 0 & 0 & \text{sen } t \end{vmatrix} = -4t = 0 \implies t = 0$$

Luego, el único punto donde la torsión se anula es $P = (0, 0, 1)$.

La determinación de las rectas pedidas requieren de las siguientes derivadas en $t = 0$. Se tiene:

- $\vec{r}'(0) = (0, 2, 0) \implies (0, 1, 0)$
- $\vec{r}''(0) = (2, 0, -1)$
- $\vec{r}'(0) \times \vec{r}''(0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-2, 0, -4) \implies (1, 0, 2)$

$$\blacksquare (\vec{r}'(0) \times \vec{r}''(0)) \times \vec{r}'(0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (8, 0, -4) \implies (2, 0, -1)$$

De esta manera,

$$\text{Recta tangente : } \frac{x}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{0}$$

$$\text{Recta binormal : } \frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z-1}{2}$$

$$\text{Recta normal : } \frac{x}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z-1}{-1}$$

Ejemplo 2.19.19. Dada la curva regular $\vec{r}(t) = (\cos^2 t, \sin^2 t, t + 1)$, hallar:

1. los vectores del Triedro de Frenet en el punto $P = (1, 0, 1)$.
2. las ecuaciones implícitas de la recta normal principal en el punto P .
3. las ecuaciones paramétricas del plano rectificante en P .
4. la curvatura en P .
5. ¿Es plana la curva? En caso afirmativo, hallar la ecuación del plano que la contiene.

El punto P se obtiene con $t = 0$. Por tanto nuestra primera tarea es encontrar las derivadas en ese punto.

$$\blacksquare \vec{r}'(t) = (-2\sin t \cos t, 2\sin t \cos t, 1) \implies \vec{r}'(0) = (0, 0, 1)$$

$$\blacksquare \vec{r}''(t) = (-2\cos^2 t + 2\sin^2 t, 2\cos^2 t - 2\sin^2 t, 0) \implies \vec{r}''(0) = (-2, 2, 0)$$

$$\blacksquare \vec{r}'(0) \times \vec{r}''(0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-2, -2, 0) \implies (1, 1, 0)$$

$$\blacksquare |\vec{r}'(0)| = 1 \quad \text{y} \quad |\vec{r}'(0) \times \vec{r}''(0)| = 2\sqrt{2}$$

Por tanto,

$$\blacksquare \vec{T}(0) = \frac{\vec{r}'(0)}{|\vec{r}'(0)|} = (0, 0, 1)$$

$$\blacksquare \vec{B}(0) = \frac{\vec{r}'(0) \times \vec{r}''(0)}{|\vec{r}'(0) \times \vec{r}''(0)|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, -1, 0)$$

$$\blacksquare \vec{N}(0) = \vec{B}(0) \times \vec{T}(0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0)$$

Recta normal : Es la recta que pasa por el punto P y tiene la dirección del vector normal.

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-1}{0} \implies \{x+y=1, z=1\}$$

Plano rectificante : Es el plano que pasa por el punto P y tiene como vector perpendicular al vector normal. O dicho de otro modo, se trata del plano que pasa por P y está generado por las direcciones del vector tangente unitario y del vector binormal. Por tanto, sus ecuaciones paramétricas son:

$$x = 1 + t, y = t, z = 1 + s, \quad t, s \in \mathbb{R}$$

curvatura : La curvatura en P viene dada por

$$\kappa(0) = \frac{|\vec{r}' \times \vec{r}''|}{|\vec{r}'|^3} = 2\sqrt{2}$$

¿curva plana? : Para que la curva sea plana, la torsión debe ser 0 en todos los puntos. Como la torsión viene dada por la expresión

$$\tau = \frac{(\vec{r}' \times \vec{r}'') \cdot \vec{r}'''}{\|\vec{r}' \times \vec{r}''\|^2}$$

entonces debemos calcular las derivadas correspondientes:

- $\vec{r}'(t) = (-2\text{sen } t \cos t, 2\text{sen } t \cos t, 1)$
- $\vec{r}''(t) = (-2\cos^2 t + 2\text{sen}^2 t, 2\cos^2 t - 2\text{sen}^2 t, 0)$
- $\vec{r}'''(t) = (8\text{sen } t \cos t, -8\text{sen } t \cos t, 0)$

De esto formamos el numerador de la torsión

$$(\vec{r}'(0) \times \vec{r}''(0)) \cdot \vec{r}'''(0) = \begin{vmatrix} -2\text{sen } t \cos t & 2\text{sen } t \cos t & 1 \\ -2\cos^2 t + 2\text{sen}^2 t & 2\cos^2 t - 2\text{sen}^2 t & 0 \\ 8\text{sen } t \cos t & -8\text{sen } t \cos t & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Por consiguiente, la curva es plana y el plano que la contiene es el plano osculador. Por ser plana la curva, el plano osculador por cualquiera de sus puntos es siempre el mismo. Como tenemos que determinar la ecuación de dicho plano, basta elegir un punto cualquiera de la curva, por ejemplo, el propio punto $P = (1, 0, 1)$. De esta forma, el plano osculador pasa por el punto P y tiene como vector perpendicular al vector binormal en P o cualquier otro paralelo a él, como por ejemplo, el vector $(1, 1, 0)$. Así, la ecuación del plano es

$$\boxed{1}(x-1) + \boxed{1}(y-0) + \boxed{0}(z-1) = 0 \implies x+y=1$$

2.20. Problemas propuestos

1. Encontrar para cada conjunto A siguiente: interior, frontera, conjunto derivado y clausura. Deducir de esto si A es un conjunto abierto o cerrado.

a) $A = (0, 1] \subset \mathbb{R}$

d) $A = \{(x, 0) / 0 < x < 1\} \subset \mathbb{R}^2$

b) $A = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}^+\}$

e) $A = \{(x, 0) / 0 \leq x \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$

c) $A = \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

f) $A = \{(x, y) / a < x < b, c < y < d\}$

2. Determinar centro y radio de las siguientes vecindades en \mathbb{R}^2 . Hallar también la frontera, los puntos de acumulación, y el interior.

a) $A = \{(x, y) / x^2 + y^2 < 9\}$

c) $A = \{(x, y) / (x - 2)^2 + (y - 3)^2 - 4 < 0\}$

b) $A = \{(x, y) / \sqrt{(x - 1)^2 + y^2} < 2\}$

d) $A = \{(x, y) / \sqrt{(x + 2)^2 + (y + 1)^2} < 3\}$

3. Determinar frontera y puntos de acumulación de los siguientes conjuntos:

a) $A = \{(x, y) / x^2 + y^2 \leq 4\}$

h) $S = \{(x, y) / x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}\}$

b) $A = \{(x, y) / x < y < 2\}$

i) $S = \{(x, y) / x^2 + y^2 < 1\} - \{(0, 0)\}$

c) $A = \{(x, y) / 2 > y \leq x \leq 0\}$

j) $S = \{(x, y) / |x| \leq 0\}$

d) $S = \{(x, y) / x < 0\}$

k) $S = \{(x, y) / xy < 1\}$

e) $S = \{(x, y) / 0 < x < y < 1\}$

l) $S = \mathbb{R}^2 - \{(x, y) / \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1\}$

f) $S = \{(x, y) / x, y \in \mathbb{Z}\}$

m) $A = \{(x, y) / \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1\} - \{(0, 0)\}$

g) $S = \{(x, y) / x^2 = y\}$

4. Demostrar las siguientes proposiciones:

▪ $A \subset B \implies A' \subset B'$

▪ $\overline{A - B} \subset \overline{A} - \overline{B}$

▪ $\overline{A} = A \cup A'$

▪ $Fr(A) \subset A \iff A$ cerrado

▪ $A \subset B \implies \overline{A} \subset \overline{B}$

▪ A abierto $\implies A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$

▪ $A \subset \overline{A}$

▪ $Fr(A) \cap A = \emptyset \iff A$ abierto

▪ $(A \cup B)' = A' \cup B'$

▪ $A^\circ \cup B^\circ = (A \cup B)^\circ$

▪ $\overline{A} = int(A) \cup Fr(A)$

▪ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

▪ $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$

▪ A finito $\implies A$ cerrado

▪ $Fr(A^\circ) \subset Fr(A)$

▪ $Fr(A) = \emptyset \iff A$ abierto y cerrado

5. Probar que $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset \implies Fr(A \cup B) = Fr(A) \cup Fr(B)$

6. Determinar si los siguientes conjuntos son: conexos, simplemente conexos, convexos, acotados.

a) $S = \{(x, y) / x^2 + y^2 \leq 9\} - \{(x, y) / x^2 + y^2 \leq 4\}$

b) $S = \{(x, y) / x^2 + y^2 \leq 9\} - \{(x, y) / x^2 + y^2 < 1\}$

c) $S = \{(x, y) / x = \frac{1}{2^n}, y = \frac{n+1}{2n}, n \in \mathbb{N}\}$

d) $S = \{(x, y) / 0 < x < 2, y = 1 - |x - 1|\}$

7. Sea $\vec{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(t) = (2t, t, 0)$. Graficar $rec(\vec{f})$.

8. Sea $\vec{f}: [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{f}(t) = (\cos t, \sin t, 0)$. Graficar $rec(\vec{f})$.

9. Graficar el recorrido de la función $\vec{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (3t, t^2)$.

10. Sea $I = [0, 2\pi]$. Averiguar si las funciones; $\alpha_1(t) = (\cos t, \sin t)$, $\alpha_2(t) = (\cos 2t, \sin 2t)$, $\alpha_3(t) = (\cos t, -\sin t)$, representan la misma curva.

11. Hallar el dominio de las funciones:

a) $\vec{f}(t) = (\frac{1}{t-1}, \sqrt{t-2}, t^3)$

b) $\vec{f}(t) = (\ln t, \sin t, \cos t)$

12. Determinar los siguientes límites:

a) $\lim_{t \rightarrow 2} (\sqrt{t}, t^2, \sin t)$

b) $\lim_{t \rightarrow 3} \left(\frac{t}{1+t^2}, \frac{1+2t}{t^2}, 3t^2 \right)$

c) $\lim_{t \rightarrow 0} \left(2, t, t \sin\left(\frac{1}{t}\right) \right)$

13. Estudiar continuidad para las siguientes funciones:

a) $\vec{f}(t) = (2\sin t, 4\cos t, t^2)$

c) $\vec{f}(t) = (\sin t, \sqrt{t}, e^2)$

b) $\vec{f}(t) = \left(t \sin\left(\frac{1}{t}\right), t, \sin t \right)$

d) $\vec{f}(t) = \left(\frac{1}{t-2}, \ln t, t^3 \right)$

14. Hallar $\vec{f}'(0)$ para las funciones que se indican:

a) $\vec{f}(t) = (t, 2 - t^3, 4\ln(1 - t))$.

b) $\vec{f}(t) = \left(\sqrt[3]{t}, 3t^2, \sqrt[5]{t} \right)$.

c) $\vec{f}(t) = \begin{cases} (e^{2t}, t^2, \sin t) & , t \neq 0 \\ (1, 0, 0) & , t = 0 \end{cases}$

15. Calcular la función vectorial \vec{f} en los siguientes casos:

a) $\vec{f}'(t) = (\sin^2 t, 2\cos^2 t,)$, $\vec{f}(\pi) = 0$

b) $\vec{f}'(t) = (e^t \sin t, e^t \cos t)$, $\vec{f}(0) = (1, 1)$

16. Hallar las integrales siguientes:

a) $\int (8t^3\vec{i} + 3t^2\vec{j}) dt$

b) $\int_0^2 (t, t^3, t^7) dt$

17. Hallar el vector de posición \vec{r} si el vector velocidad es tal que $\vec{v}(0) = (1, 1)$, el vector aceleración $\vec{a}(t) = (2\cos t, 2\sin t)$, y $\vec{r}(0) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

18. Calcular la longitud de arco de la curva que se indica.

a) $x = \frac{1}{2}t^2 + t, y = \frac{1}{2}t^2 - t$, desde $t = 0$ hasta $t = 1$.

b) $r = 1 - \sin \theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi$

c) $x = t, y = \frac{t^2}{\sqrt{2}}, z = \frac{1}{3}t^3, 0 \leq t \leq 2$

19. Hallar curvatura de la curva $4x^2 + 9y^2 = 36$ en el punto $(0, 2)$.

20. Hallar los vectores $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$, la curvatura, la ecuación de la recta tangente, y la ecuación del plano osculador de las curvas:

a) $x = 1 + t, y = 3 - t, z = 2t + 4, t = 3$

b) $x = \frac{1}{3}t^3, y = 2t, z = \frac{2}{t}, t = 2$

21. Hallar los vectores velocidad, aceleración, la rapidez, el radio de curvatura, los vectores tangente y normal unitario, la componente tangencial y normal de la aceleración, de las curvas:

a) $x = t, y = \frac{3}{2}t^2, z = \frac{2}{3}t^3, t = 2$

b) $x = t \cos t, y = t \sin t, z = t, t = 0$

22. Determinar la torsión de la curva $\vec{r}(t) = (t \cos t, t \sin t, t)$ en $t = 0$

Resp. $\tau = \frac{3}{4}$

23. Hallar el vector tangente unitario a la curva de intersección de las superficies:

a) $z = x^2 + y^2, z = 2$, en $P(1, 1, 2)$

Resp. $\frac{1}{2}(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$

b) $z = x^2, y = 2$, en $P(1, 2, 1)$

Resp. $\frac{1}{\sqrt{5}}(1, 0, 2)$

24. Determinar $\vec{T}, \vec{N}, \vec{b}$, curvatura y torsión de las curvas:

a) $\vec{r} = (t^4/4, t^3/3, t^2/2), t = 1$

b) $\vec{r} = (t \cos t, t \sin t, t), t = 0$

c) $\vec{r} = (1 + t, 3 - t, 2t + 4), t = 3$

Resp.

a) $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1), \frac{1}{\sqrt{18}}(-3, 0, 3), \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, -1), \tau = -\frac{1}{3}, \kappa = \frac{\sqrt{2}}{3}$

b) $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1), \frac{1}{4}(0, 4, 0), \frac{1}{\sqrt{8}}(-2, 0, 2), \tau = -\frac{3}{4}, \kappa = 1$

c) $\frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, 2), \vec{\beta}, \vec{\beta}, \vec{\beta}, \kappa = 0$

2.21. Problemas adicionales

- Sea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |y - 1| < (x - 2)^2\}$
 - Graficar el conjunto de puntos que describen A .
 - Determinar si $P(2, 1)$ es un punto interior, de acumulación, o frontera de A .
 - Hallar adherencia, interior y frontera del conjunto A .
 - Decidir si A es un conjunto abierto.
- Sea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R} / |y| < x^2\} \cup \{(\frac{1}{n}, 0) / n \in \mathbb{N}\}$
 - Graficar el conjunto A .
 - Hallar el conjunto derivado (A').
 - Determinar si A es abierto, cerrado, conexo
- Sea $S = \{(x, y) / \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1\} - \{(0, 0)\}$. Hallar: interior, frontera, conjunto derivado y adherencia de S . Averiguar si S abierto o cerrado.
- Se dispara un proyectil a nivel de tierra y formando un ángulo de 10° con la horizontal. Hallar la velocidad inicial mínima si el proyectil debe llegar a una distancia de 100 mts.
- Sea $S = \{(x, y) / x + 2y < 4\} \cap \{(x, y) / x > y, y > 0\}$. Hallar interior, frontera y adherencia del conjunto S .
- La tangente a la curva $x = t, y = \ln(\sec t), z = f(t)$ forma un ángulo de 60° con el eje z . Determinar la función $f(t)$.
- Considerar la curva $x = t, y = \frac{3}{2}t^2, z = \frac{2}{3}t^3$. Determinar en $t = 2$
 - El vector tangente unitario \vec{T} .
 - El vector normal unitario \vec{N} .
 - La curvatura κ .
 - Las componentes a_N y a_T del vector aceleración.
 - La ecuación del plano rectificante.
- Graficar la curva vectorial $\vec{r}(t) = t\vec{i} + 2t\vec{j} + 5t^2\vec{k}$
- Hallar $\lim_{t \rightarrow 2} (t^2, \sqrt{4 - t^2}, 1)$.
- Sea $S = \{(x, y) / 0 \leq x \leq y, y \geq 0, |y - 1| < (x - 2)^2\}$.
 - Graficar el conjunto de puntos que describen S .

- b) Determinar si el conjunto S es, abierto, cerrado, conexo, convexo. Justificar
11. En el instante t una partícula tiene vector de posición $\vec{r}(t) = (t^2, \frac{1}{2}t^4)$.
- Determinar la ecuación cartesiana de la trayectoria.
 - Hallar velocidad \vec{v} y aceleración \vec{a} .
 - Hallar las componente tangencial (a_T) y normal (a_N) de la aceleración.
 - Trazar \vec{a} , $a_T\vec{T}$ y $a_N\vec{N}$ en un gráfico cartesiano.
12. Determinar curvatura y torsión de la curva $x = e^t$, $y = e^{-t}$, $z = t\sqrt{2}$.
13. Graficar la trayectoria $\vec{r}(t) = t \cos t \vec{i} + t \sin t \vec{j} + t \vec{k}$, $0 \leq t \leq 2\pi$
14. Hallar el punto de máxima curvatura de la curva $y = \ln x$
15. Graficar la trayectoria $\alpha(t) = (t, t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 4\pi$.
16. Graficar la trayectoria $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = \sin t$ para $0 \leq t \leq 2\pi$.
17. Sean $\vec{r}(t) = (1, 1)$, $\vec{v}(t) = (3, 4)$, $\vec{A} = (3, -3)$, los vectores de posición, velocidad y aceleración respectivamente, de una partícula en el instante t .
- Graficar, \vec{r} , \vec{v} , \vec{a} .
 - Calcular a_T y a_N .
 - ¿ Está aumentando o disminuyendo la rapidez de la partícula?
18. Sea $\vec{r}(t)$ el vector de posición de una partícula en función del tiempo t . Si el módulo de su velocidad en $t = 1$ es de 3 mts por segundo, hallar $\vec{v}(1) \circ \vec{T}(1)$.
19. Escribir la ecuación del plano normal a la curva $\{y = x, z = x^2 - y^2\}$ en el punto $(0, 0, 0)$.
Resp. $x + y = 0$
20. Escribir la ecuación del plano osculador a la curva $\{y^2 = x, x^2 = z\}$ en el punto $(1, 1, 1)$.
Resp. $6x - 8y - z + 3 = 0$
21. Demostrar que $\vec{r}(t) = (2t^2 + 3t + 4, 5t^2 + 6t + 7, 8t^2 + 9t + 10)$ es una curva plana. Resp. $\tau = 0$
22. Una partícula se mueve sobre la curva $x^2 = 8y$ de tal manera que su rapidez es siempre constante. Cuando la partícula está en $(4, 2)$ calcular:
- El vector velocidad.
 - el vector aceleración.
 - el vector tangente unitario.
 - El vector normal unitario.

e) Los vectores a_T y a_N .

23. La aceleración de una partícula en función del tiempo $t \geq 0$ es

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} = (12\cos 2t, -8\sin 2t, 16t)$$

Si la velocidad \vec{v} y el desplazamiento \vec{R} son nulos en $t = 0$, hallar \vec{v} y \vec{R} en función del tiempo.

24. Determinar $\vec{f}(t)$ de modo que la curva $\vec{R} = (t, \sin t, f(t))$ tenga sus binormales paralelas al plano yz .

25. Demostrar que la curvatura de la hélice $(a\cos t, a\sin t, bt)$, $a > 0$, es $\kappa = \frac{a}{a^2+b^2}$.

26. Una partícula se mueve a lo largo de la curva $\vec{r}(t) = (3 + 4\sin t, 5 - 4\cos t)$ con rapidez constante $|\vec{v}| = 10$ m/seg. Hallar el módulo de la aceleración en cualquier punto de la curva. Resp. 25

27. Un móvil tiene posición inicial $\vec{r}(0) = (2, 0)$, velocidad inicial $\vec{v}(0) = (1, -1)$ y aceleración $\vec{a}(t) = (2, 6t)$. Hallar posición y velocidad en el tiempo t .

28. Demostrar que

$$\frac{d}{dt} \left[\vec{A} \times \frac{d\vec{B}}{dt} - \frac{d\vec{A}}{dt} \times \vec{B} \right] = \vec{A} \times \frac{d^2\vec{B}}{dt^2} - \frac{d^2\vec{A}}{dt^2} \times \vec{B}$$

29. Si $\frac{d^2\vec{a}}{dt^2} = (6t, -24t^2, 4\sin t)$. Hallar \vec{a} sabiendo que $\vec{a}(0) = (2, 1, 0)$ y que $\frac{d\vec{a}}{dt}(0) = (-1, 0, -3)$

30. Determinar la ecuación de la recta tangente a la curva $x = z^3$, $y = x$ en el punto $(1, 1, 1)$.

31. Hallar el plano normal en $t = 2$ a la curva $\alpha(t) = (t + 2, t^2 - 6t + 5, t^3 - 4t^2 + 3t)$.

32. Hallar la ecuación del plano osculador a la curva $z = y^2$, $x = z^2$ en el punto $(1, 1, 1)$.

33. Hallar la ecuación de la normal principal en $t = 0$ a la curva $\alpha(t) = (e^t \sin 2t, e^t \cos 2t, 2e^t)$.

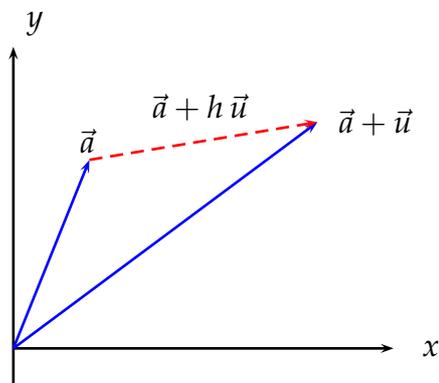
34. Hallar la ecuación de la recta binormal principal en $t = 1$ a la curva $\alpha(t) = (3t, 2t^2, 2t^3)$.

En toda labor hay frutos,
Mas las vanas palabras de
los labios empobrecen.

Proverbios 14:23

CAPÍTULO

CAMPOS 3 ESCALARES



Derivada direccional

3.1. Introducción

Toda región del espacio donde una magnitud, escalar o vectorial, toma un valor diferente en cada instante de tiempo y en cada punto de la región se denomina **campo**. Se distinguen campos **escalares** y campos **vectoriales**. Por ejemplo, la temperatura queda totalmente definida utilizando un escalar, en tanto que la velocidad necesita de un vector para indicar además de la velocidad lineal, la dirección y el sentido del movimiento. De esta manera, en el primer caso hablamos de campo escalar, y en el segundo de campo vectorial.

Otro ejemplo de campo escalar es la presión atmosférica, ya que en cada punto de la atmósfera terrestre tiene un valor y sólo uno. A cada punto del espacio que rodea la Tierra corresponde un valor de la aceleración de la gravedad, lo cual constituye un campo vectorial de aceleraciones.

La teoría de campos escalares nos proporciona las herramientas necesarias y suficientes para estudiar adecuadamente una gran cantidad de fenómenos físicos en que intervienen magnitudes escalares. Los campos con los cuales es común trabajar presentan algunas de las siguientes características:

- **univaluado**: si el valor de la cantidad vectorial o escalar asociado a cada punto es única.
- **acotado**: si existe un número real M tal que la magnitud del campo es menor que ese número, esto es:

$$f \text{ acotado} \iff \exists M \in \mathbb{R} \text{ tal que } \|f\| \leq M$$

- **continuo** en un punto: si los valores del campo, conforme nos aproximamos a ese punto, desde cualquier dirección, son iguales, finitos y coinciden con el valor del campo en ese punto. Es decir:

$$f \text{ continuo en } x_0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

- **diferenciable**: si tiene derivada en cada punto en el que está definido. Esto es

$$f \text{ diferenciable en } x \iff f'(x) \text{ existe para todo } x$$

Definición 3.1.1. Un **campo escalar** corresponde a una magnitud física que requiere sólo de un número para su caracterización. En términos matemáticos, un campo escalar es una función, escalar, cuyo valor depende del punto del espacio en que se considere, y que escribimos en la forma

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \vec{x} \mapsto f(\vec{x}) = y$$

3.2. Campos escalares

Hemos dicho que un campo escalar es una función de la forma

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(\vec{x}) = y$$

y que puede representar la densidad de masa de la atmósfera, la presión del agua en un punto de un lago, la temperatura en cada punto de una montaña, etc. El cálculo diferencial e integral de estos campos escalares es rico en aplicaciones en áreas tales como matemática, física, economía.

3.2.1. Dominio - Rango - Gráfica

El **dominio** del campo escalar $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es un subconjunto de A de \mathbb{R}^n en el que tiene sentido la expresión que define la función, o más simplemente, el conjunto de puntos A que tienen imagen. El **rango** o **recorrido** es el subconjunto $f(A)$ de \mathbb{R} . La gráfica del campo escalar es

$$Gr(f) = \{(\vec{x}, f(\vec{x})) \in \mathbb{R}^{n+1} / \vec{x} \in \mathbb{R}^n, y = f(\vec{x}) \in \mathbb{R}\}$$

y corresponde a una **superficie** en \mathbb{R}^{n+1}

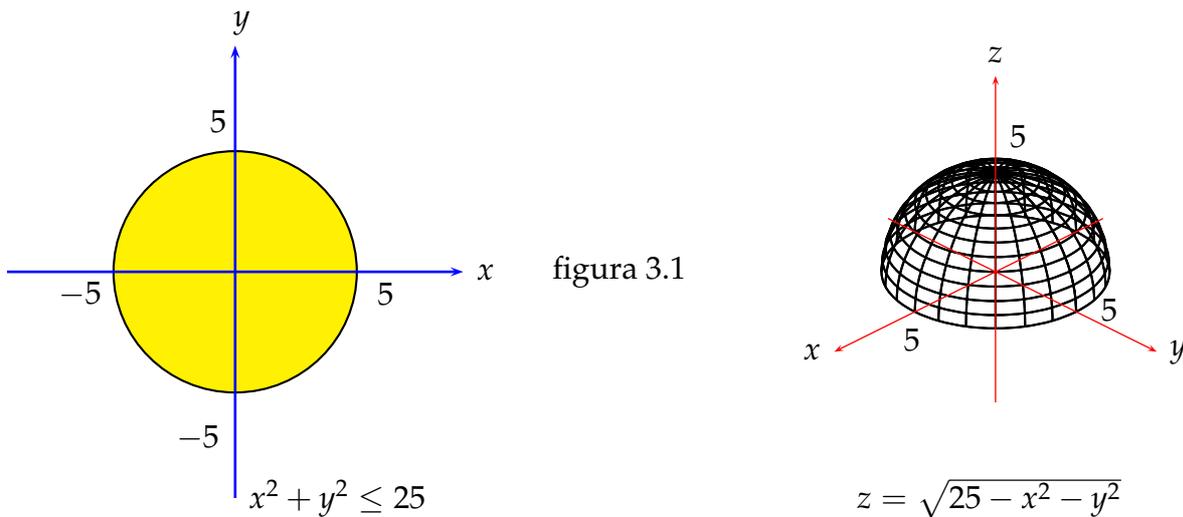


figura 3.1

Ejemplo 3.2.1. El campo escalar $f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ es tal que:

1. Su dominio es el conjunto $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 25 - x^2 - y^2 \geq 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 25\}$, que corresponde a la región que encierra la circunferencia de centro el origen y de radio igual a 5.
2. El rango, un subconjunto de \mathbb{R} , es

$$Ran(f) = \{z \in \mathbb{R} / 0 \leq z \leq 5\}$$

3. La gráfica de este campo, una superficie de \mathbb{R}^3 , es la semiesfera de centro el origen y radio 5.

$$Gr(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 25, \quad 0 \leq z \leq 5\}$$

3.3. Superficies de nivel

Para representar los campos escalares se recurre a las superficies de nivel o superficies equiescalares. Si consideramos un campo escalar descrito por

$$w = f(x, y, z)$$

se denomina **superficie de nivel** al lugar geométrico de los puntos en que la magnitud del campo w toma el mismo valor. Precisamos esto

Definición 3.3.1. Dado un campo escalar $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se llama **superficie de nivel** de f , $N(f)$, pasando por $x_0 \in A$ al conjunto

$$N(f, x_0) = \{x \in A / f(x) = f(x_0)\}$$

Estas superficies deben su nombre a la analogía con las curvas de nivel utilizadas en los mapas topográficos. De modo que para $n = 2$ estos conjuntos reciben el nombre de *curvas de nivel*. En ocasiones se emplean otros términos para nombrar una superficie de nivel. Así por ejemplo, si f representa el potencial de un campo eléctrico o gravitacional, se habla de superficie **equipotencial**, si f representa una temperatura, se habla de superficie **isotérmica**, si f representa la presión, se habla de superficie **isobárica**. En economía se habla de **isocosto** e **isocuanta**.

Es importante tener presente lo siguiente:

- ☞ **Todos** los puntos de la superficie de nivel tienen el mismo valor
- ☞ Dos superficies de nivel nunca se pueden cortar
- ☞ Hay infinitas superficies de nivel

Por lo estudiado de gráficas, sabemos que si conocemos los cortes que se producen en la gráfica mediante planos horizontales (trazas) tenemos perfectamente determinada la gráfica de la superficie. Estos "cortes" son las curvas de nivel. Ellas permiten representar superficies tridimensionales mediante un mapa plano. Cabe señalar que es importante elegir valores de z adecuadamente para que el mapa genere una clara visualización de la superficie.

Ejemplo 3.3.2. La temperatura en cada punto de una región viene dada por $T(x, y) = 100 - x^2 - y^2$. Describir las curvas de nivel de T (isotermas).

Al tomar $T = k$ se obtiene $100 - x^2 - y^2 = k$, o en forma análoga

$$x^2 + y^2 = 100 - k$$

este es el conjunto de curvas de nivel, que para diferentes valores de k proporciona **una** curva de nivel. Es claro que $100 - k \geq 0$, pues una suma de cuadrados tiene el valor mínimo 0, se sigue que $k \leq 100$. veamos que sucede:

3.3 Superficies de nivel

- Si $k > 100$ el conjunto de curvas de nivel es \emptyset
- Si $k = 100$, entonces el conjunto de curvas de nivel es un punto $\{(0,0)\}$
- Si $k < 100$, entonces el conjunto de curvas de nivel son circunferencias de centro el origen y radio $r = \sqrt{100 - k}$

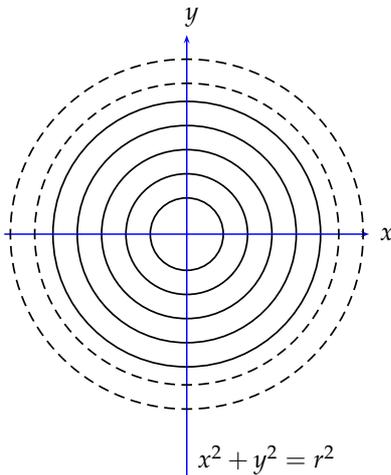
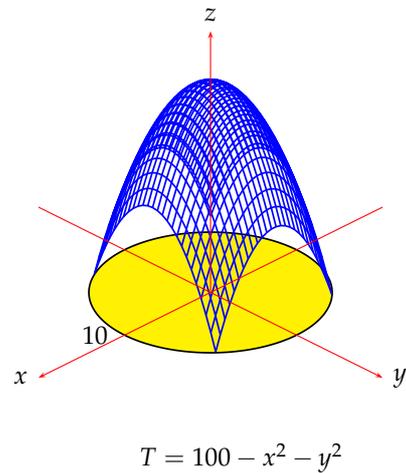


figura 3.2



La figura 3.2 muestra algunas curvas de nivel y la gráfica de la superficie.

Ejemplo 3.3.3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. El gráfico de este campo escalar es la parte superior de la superficie de un cono (figura 3.3). Veamos sus curvas de nivel.

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \implies x^2 + y^2 = k^2$$

- Si $k = 0$, el conjunto de curvas de nivel es un punto $\{(0,0)\}$
- Si $k > 0$, el conjunto de nivel son circunferencias de centro el origen y radio k

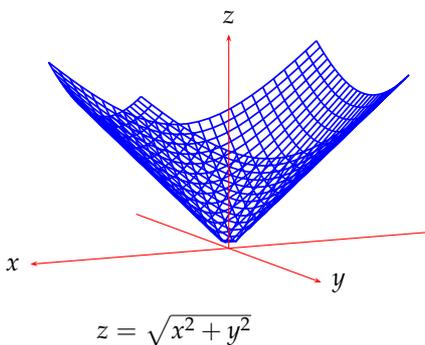
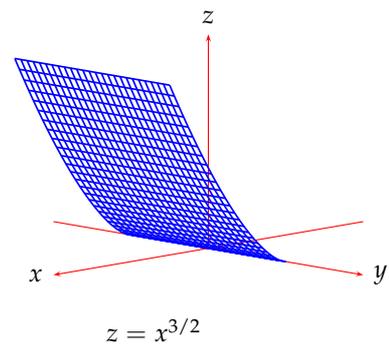


figura 3.3



Ejemplo 3.3.4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = x^{3/2}$. La gráfica de este campo escalar la muestra la figura 3.3. Sus curvas de nivel son rectas de la forma $x = k^{2/3}$.

3.3.1. Álgebra de campos escalares

Los campos escalares se pueden combinar de la misma forma que las funciones de una variable. Por tanto se pueden sumar, restar, multiplicar, dividir, etc.

- $(f + g)(\vec{x}) = f(\vec{x}) + g(\vec{x})$
- $(f - g)(\vec{x}) = f(\vec{x}) - g(\vec{x})$
- $\left(\frac{f}{g}\right)(\vec{x}) = \frac{f(\vec{x})}{g(\vec{x})}, g(\vec{x}) \neq 0$
- $(f \cdot g)(\vec{x}) = f(\vec{x}) \cdot g(\vec{x})$

Operar con campos significa trabajar con las imágenes de un mismo punto, por tanto, para realizar las operaciones los campos deben tener el mismo número de variables. Por ejemplo, se pueden sumar las funciones

$$f(x, y) = x^2, g(x, y) = x + y \implies (f + g)(x, y) = f(x, y) + g(x, y) = x^2 + x + y$$

En cambio, no se pueden sumar las funciones

$$f(x) = x^2, g(x, y) = x + y$$

3.3.2. Composición de campos escalares

La composición de los campos escalares, sólo es posible si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Esto indica que $g \circ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es otro campo escalar, con regla de correspondencia

$$(g \circ f)(\vec{x}) = g(f(\vec{x}))$$

Ejemplo 3.3.5. Componer los campos escalares $f(x, y, z) = x + y + z$ y $g(t) = t^2$

En forma esquemática, la situación que se tiene es la siguiente

$$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

se sigue que

$$(g \circ f)(x, y, z) = g(f(x, y, z)) = g(x + y + z) = (x + y + z)^2$$

3.4. Cálculo en campos escalares

En el trabajo con funciones de una variable hemos aprendido sobre el problema de la aproximación local (mediante polinomios) de estas funciones. De hecho, dada una función $y = f(x)$ que es derivable en un punto x_0 , entonces la recta tangente

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

es aquella que mejor aproxima a la gráfica de f cuando nos acercamos a x_0 . Recordemos en qué sentido decimos que es la mejor recta: si se considera cualquier recta de la forma

$$y = f(x_0) + m(x - x_0)$$

podemos considerar la diferencia

$$(\text{función en } x) - (\text{recta en } x) = f(x) - (f(x_0) + m(x - x_0))$$

Para que la recta sea una buena aproximación de f cerca de x_0 esta diferencia tiene que hacerse más y más pequeña a medida que x se acerque a x_0 . Para garantizar que esta cantidad es pequeña la comparamos con una cantidad que de antemano sabemos que es pequeña: la diferencia entre x y x_0 . Estas ideas nos llevan a considerar el cociente

$$\frac{(\text{función en } x) - (\text{recta en } x)}{x - x_0} = \frac{f(x) - (f(x_0) + m(x - x_0))}{x - x_0}$$

Para que la recta sea una buena aproximación, el numerador de este cociente debe ser más pequeño que el denominador cuando nos acercamos a x_0 . Por eso imponemos esta condición

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - (f(x_0) + m(x - x_0))}{x - x_0} = 0$$

y nos preguntamos ¿cuál es el valor de m que hace que esto se cumpla? La respuesta es

“ si f es derivable en x_0 , la única recta que hace que el anterior límite sea 0 es la recta tangente, cuya pendiente es $m = f'(x_0)$ ”.

La idea es generalizar lo anterior al caso de los campos escalares de dos variables y posteriormente a más. Se considera la función $z = f(x, y)$ que puede ser bastante complicada, y queremos aproximarla mediante una fórmula muy sencilla, de manera que esa aproximación sea muy buena cerca de un cierto punto dado $z_0 = (x_0, y_0)$. En el caso anterior, usamos una recta para aproximar una curva. Eso significa que para aproximar una función $y = f(x)$ cerca de x_0 buscábamos rectas de la forma

$$y = f(x_0) + k(x - x_0)$$

Y se trata de escoger el valor de k que produce la recta que más se parece a f cerca de x_0 . Pues bien, si tenemos una función de dos variables $z = f(x, y)$, lo natural es buscar una aproximación de la forma

$$z = f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0)$$

Esta ecuación describe a un plano que pasa por el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, y que cambia su inclinación según los valores de A y B .

Parece natural por tanto buscar un plano tangente como sustituto de la recta tangente cuando pasamos a funciones de dos variables. Y para garantizar que ese plano tangente es una buena aproximación tenemos que pedir que la diferencia entre la función y el plano sea pequeña. Vamos a usar

el plano para aproximar a la función f en un punto (x, y) que está muy cerca de (x_0, y_0) . Así que suponemos que (x, y) y (x_0, y_0) no son muy distintos, con lo que la diferencia entre ellos es una cantidad pequeña. Parece natural entonces expresar lo que queremos conseguir mediante el cociente:

$$\frac{\text{función} - (\text{plano tangente})}{\text{diferencia entre } (x, y) \text{ y } (x_0, y_0)}$$

El primer problema con esta fórmula es que (x, y) y (x_0, y_0) son puntos del plano, y la diferencia entre ellos es un **vector**, no un número. Así que no podemos usar directamente esa diferencia para el cociente (no es posible dividir vectores). Pero es fácil ver cuál es la solución: si la diferencia entre los dos puntos es pequeña, la distancia (que es el módulo del vector diferencia) también debe ser pequeña y viceversa. Así que el cociente que escribimos es

$$\frac{\text{función} - (\text{plano tangente})}{\text{distancia entre } (x, y) \text{ y } (x_0, y_0)}$$

El denominador se puede escribir entonces en la forma

$$\text{distancia entre } (x, y) \text{ y } (x_0, y_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

Con lo que se obtiene

$$\frac{\text{función} - (\text{plano tangente})}{\text{distancia entre } (x, y) \text{ y } (x_0, y_0)} = \frac{f(x, y) - [f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0)]}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}$$

Definición 3.4.1. (Provisional)

Si existen números A y B tales que

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{f(x, y) - (f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0))}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0$$

se dice que el plano $z = f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0)$ es el plano tangente a la gráfica de f en (x_0, y_0) , y que la función es diferenciable en (x_0, y_0) .

Naturalmente, todo depende de los números A y B que controlan la inclinación del plano. Si el plano está mal colocado, no podemos esperar que produzca una buena aproximación. Esta definición provisional plantea varios problemas, que vamos a tratar de resolver a contar de ahora:

- ☞ En la definición aparece el límite de una función de dos variables. Tendremos que analizar estos límites y descubrir en que se parecen y en que difieren de los límites de funciones de una variable.
- ☞ Los números A y B que aparecen ¿cómo se eligen? para que el plano que definen sea realmente el plano tangente
- ☞ Finalmente, ¿este plano candidato, es realmente una buena aproximación a la función? Esto nos conducirá al concepto de **diferenciabilidad**

3.5. Límite en un campo escalar

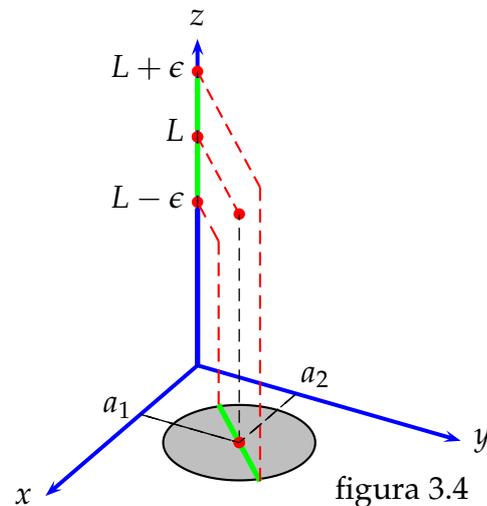
La idea intuitiva es similar a la del caso de funciones reales de una variable real, con las generalizaciones correspondientes.

Definición 3.5.1. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ campo escalar. El número $L \in \mathbb{R}$ es el límite del campo f en el punto de acumulación $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, que se anota $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x}) = L$, si y sólo si

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(0 < \|\vec{x} - \vec{a}\| < \delta \implies |f(\vec{x}) - L| < \epsilon$$

Esto significa, entre otras cosas que,

- ☞ El límite de una función en un punto es L si los valores que toma la función en una vecindad del punto están tan cerca de L como queramos ($|f(\vec{x}) - L| < \epsilon$).
- ☞ El valor que la función tome en el punto **no interesa** a la hora de calcular el límite ($0 < \|\vec{x} - \vec{a}\| < \delta$).
- ☞ Para poder hablar de límite de una función en un punto, la función tiene que estar definida en una vecindad del punto.



En el caso de dos variables (figura 3.4), $\vec{a} = (a_1, a_2)$, la expresión $\delta - \epsilon$ equivale a decir que

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(0 < |x - a_1| < \delta, \quad |y - a_2| < \delta \implies |f(x, y) - L| < \epsilon$$

Ejemplo 3.5.2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ campo escalar tal que $f(x, y) = x^2 + 2xy$. Probemos que $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(x, y) = 3$ con $\vec{a} = (3, -1)$.

Mediante la definición se comprueba si un límite dado es o no correcto, pero no es la herramienta para calcular límites. La definición se usa partiendo de la base que el ϵ ya está dado, y la tarea es encontrar el valor de δ que la hace cierta. También es bueno decir que los factores $(x - a_1)$ y $(y - a_2)$ deben formar parte de $f(\vec{x}) - L$. Se parte entonces como sigue.

$$\begin{aligned} |f(\vec{x}) - L| &= |x^2 + 2xy - 3| = |(x - 3)(x + 3) + 6 + 2xy| \\ &\leq |x - 3| |x + 3| + |2x(y + 1) - 2(x - 3)| \\ &< \delta |x + 3| + 2|x| |y + 1| + 2|x - 3| \\ &< 7\delta + 2 \cdot 4 \cdot \delta + 2\delta = 17\delta \end{aligned}$$

Observar que el acotamiento para $|x + 3|$ y $|x|$ se obtienen al considerar $\delta = 1$ en $|x - 3| < \delta$. Dado que se tomó un valor particular $\delta = 1$, para que se verifique la definición se debe elegir

$$\delta = \min\left\{1, \frac{\epsilon}{17}\right\}$$

Con esto concluye la demostración.

Teorema 3.5.3. Sean $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ campos escalares que satisfacen, $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x}) = L$, $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} g(\vec{x}) = M$, entonces

1. $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} (f + g)(\vec{x}) = \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x}) + \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} g(\vec{x}) = L + M$
2. $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} (f \cdot g)(\vec{x}) = \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x}) \cdot \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} g(\vec{x}) = L \cdot M$
3. $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \left(\frac{f}{g}\right)(\vec{x}) = \frac{\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x})}{\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} g(\vec{x})} = \frac{L}{M}, M \neq 0$

3.5.1. Cálculo del límite

Para determinar si una función de una variable tiene límite, sólo necesitamos comprobar que ocurre al aproximarnos por dos direcciones (izquierda y derecha). Si la función tiende al mismo límite por izquierda y derecha podemos concluir que el límite existe. Sin embargo, en funciones de dos variables existen infinitos caminos para acercarnos a un punto (figura 3.5). Si el límite existiera, **todos** los caminos nos deben conducir al mismo límite. Para ver que una función no tiene límite en un punto se siguen varios caminos de aproximación al punto (de acumulación de cada camino) y se ve que la función tiene un límite distinto en al menos un camino. El problema de determinar si existe un camino que conduzca a un valor diferente es a veces un tanto dificultoso. No obstante, en este proceso hay caminos que son muy comunes, como rectas, ejes, parábolas y otros. Podemos establecer, que cuando se “sospeche” que un límite en varias variables no existe, el siguiente resultado.

Teorema 3.5.4. (No existencia) Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ campo escalar. Si S_1 y S_2 son conjuntos diferentes de puntos, para los que \vec{a} es punto de acumulación, y si $\lim_{\vec{a} \in S_1} f(\vec{x}) \neq \lim_{\vec{a} \in S_2} f(\vec{x})$ entonces $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x})$ **no existe**

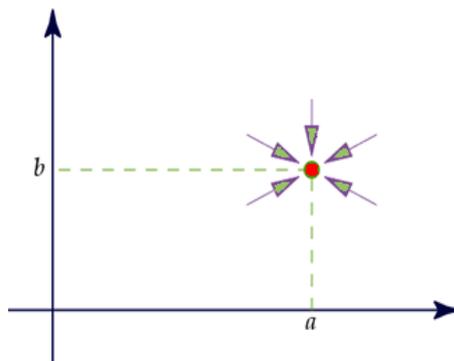


figura 3.5

Ejemplo 3.5.5. Hallemos el límite del campo escalar $f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$ en $(0, 0)$.

Al mirar la expresión del límite, es sencillo darse cuenta que el campo tiene problemas en $(0, 0)$. Un camino que pase por ese punto es

$$S_1 = \{(x, y) / x = 0\}$$

Una vez fijado el camino se tiene

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$$

Probemos ahora otro camino, por ejemplo,

$$S_2 = \{(x, y) / y = 0\}$$

como $y = 0$ ya está establecido, entonces

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

Se concluye que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ **no existe**

Ejemplo 3.5.6. Determinemos si existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$.

El punto al que debemos aproximarnos es el $(0, 0)$. Caminos que pasen por este punto hay “todos estos”, pero siempre podemos escoger los más adecuados con sólo mirar la expresión dada. Los caminos más comunes para acercarse son los ejes coordenados ($x = 0$, e $y = 0$).

- Camino $y = 0$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot 0}{x^4 + 0^2} = 0$$

- Camino $x = 0$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0^2 \cdot y}{0^4 + y^2} = 0$$

Se puede pensar que esto es alentador y da la impresión que debiéramos probar que el límite es 0. Sin embargo, conviene analizar otros acercamientos al origen. Debemos recordar que una sola coincidencia entre límites por distintos acercamientos no garantiza nada; por el contrario, un solo caso de límite distinto prueba que no existe el límite.

- Camino $y = x^2$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot x^2}{x^4 + (x^2)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2}$$

Esto es ¡grandioso!, ahora podemos afirmar que el límite que estamos calculando **no existe**.

3.5.2. Manipulación algebraica

A veces una simple manipulación algebraica puede ayudar a resolver el cálculo de un límite.

Ejemplo 3.5.7. Calcular $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{x^2 - y^2}{x + y}$

La “máscara” de este límite es $\frac{0}{0}$. ¡Qué tiempos aquellos de nuestro héroe y a la vez villano L'Hôpital!, pero hay que saber que no existe en dimensiones mayores. Se recurre a operaciones algebraicas, de modo de “cancelar” ambos ceros.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{x^2 - y^2}{x + y} = \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{(x - y)(x + y)}{x + y} = \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} (x - y) = 2$$

Ejemplo 3.5.8. Calcular $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} \frac{6x - 2y}{9x^2 - y^2}$

La “máscara” del límite es $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} \frac{6x - 2y}{9x^2 - y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} \frac{2(3x - y)}{(3x - y)(3x + y)} = \lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} \frac{2}{3x + y} = \frac{1}{3}$$

3.5.3. Acotada por nula

Si una función tiene límite cero en un punto y otra está acotada en los alrededores del punto, entonces su producto también tiene límite cero en dicho punto.

Ejemplo 3.5.9. $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} (2x - y) \operatorname{sen} \frac{y}{x - 1} = 0 \cdot \text{acotada} = 0$.

La función seno es acotada ($-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$)

3.5.4. Uso de infinitésimos equivalentes

Definición 3.5.10. La función f es un infinitésimo en a si en un entorno reducido de a es

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \quad \text{y} \quad f(x) \neq 0$$

Definición 3.5.11. Las funciones f y g son **equivalentes por cociente** en a si

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

La equivalencia de funciones es importante en los casos en que las dos funciones son infinitésimos en a o cuando las funciones son divergentes a $\pm\infty$ en a , ya que en ellos la definición de equivalencia da indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$ respectivamente.

Algunas equivalencias interesantes son:

3.5 Límite en un campo escalar

- $\operatorname{sen} x \sim x$ en $x = 0$.
- $\operatorname{tg} x \sim x$ en $x = 0$.
- $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ en $x = 0$.
- $\operatorname{arcsen} x \sim x$ en $x = 0$.
- $\operatorname{arctg} x \sim x$ en $x = 0$.
- $e^x - 1 \sim x$ en $x = 0$.
- $\log(x + 1) \sim x$ en $x = 0$.
- $\operatorname{tg}(x^2 - 1) \sim x^2 - 1$ en $x = 1$.
- $a^x - 1 \sim x \log a$ en $x = 1$.
- $\log x \sim x - 1$ en $x = 1$.

Ejemplo 3.5.12. Hallar $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{1 - \cos(x^2 + y)}{(x - \sqrt{-y})^2}$

Sabemos que, en la vecindad de 0, es válido $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$. Luego,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{1 - \cos(x^2 + y)}{(x - \sqrt{-y})^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{(x^2 + y)^2}{2(x - \sqrt{-y})^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{(x + \sqrt{-y})^2}{2} = 2$$

Ejemplo 3.5.13. Hallar $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\ln(1 + x^2y^2)}{x^2 + y^2}$

En este caso, $\ln(1 + z) \sim z$ cerca de $z = 0$. Luego,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\ln(1 + x^2y^2)}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2 + y^2} = 0 \cdot \text{acotada} = 0$$

3.5.5. Paso a coordenadas polares

Supongamos que tenemos un campo escalar $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ para el que planteamos el límite en un punto (a, b) . Para calcular $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)$ podemos probar haciendo el cambio de variable

$$x = a + r \cos \theta \quad \text{y} \quad y = b + r \operatorname{sen} \theta$$

El caso más sencillo y el que más habitualmente vamos a utilizar es cuando $a = 0, b = 0$, es decir, cuando estamos con el punto $(0, 0)$, en el que queda:

$$x = r \cos \theta \quad \text{y} \quad y = r \operatorname{sen} \theta$$

Concretamente se tiene la siguiente relación:

Proposición 3.5.14. Supongamos que $F(r, \theta) = f(a + r \cos \theta, b + r \operatorname{sen} \theta)$ y que $\lim_{r \rightarrow 0} F(r, \theta) = L$ y que no depende de $\theta \in [0, 2\pi)$. Si existe una función real de una variable real $G(r)$ cumpliendo que

$$|F(r, \theta) - L| \leq G(r) \rightarrow 0 \text{ para } r \rightarrow 0 \text{ y } \forall \theta \in [0, 2\pi)$$

entonces $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L$

Lo que este resultado afirma es que:

1. Si $\lim_{r \rightarrow 0} F(r, \theta)$ depende de θ , no existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)$.
2. Si $\lim_{r \rightarrow 0} F(r, \theta)$ no depende de θ , no hay conclusión sobre $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)$.
3. Si $0 \leq |F(r, \theta) - L| \leq G(r) \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow 0$, entonces $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L$.

Ejemplo 3.5.15. Calcular $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

Al hacer los cambios a coordenadas polares

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r \cos\theta r \sin\theta}{\sqrt{r^2 \cos^2\theta + r^2 \sin^2\theta}} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2 \cos\theta \sin\theta}{r}$$

Al simplificar,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2 \cos\theta \sin\theta}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} r \cos\theta \sin\theta = 0$$

pues tenemos el caso 0 por acotada, la expresión $|\sin\theta \cos\theta| \leq 1$. Con esto aún no hemos probado que este límite es cero, nos falta ver el acotamiento

$$|F(r, \theta) - L| = |r \cos\theta \sin\theta| \leq |r| = G(r) \rightarrow 0$$

Ahora sí, con esto hemos probado que el límite es cero.

Ejemplo 3.5.16. Hallar $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2}$

Es claro que polares es una elección adecuada.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2 \cos^2\theta}{r^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \cos^2\theta$$

Como este límite no es único, pues varía con el ángulo, el límite no existe.

Ejemplo 3.5.17. Sea $f(x, y) = \frac{3x^2y}{x^2 + y^2}$ campo escalar. Estudiemos el comportamiento del límite en $(0, 0)$

Veamos que sucede si elegimos trabajar por caminos:

Si tomamos el camino $S_1 = \{y = mx\}$, entonces

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3mx^3}{x^2 + m^2x^2} = 0$$

3.5 Límite en un campo escalar

Si tomamos el camino $S_2 = \{y = x^2\}$, entonces

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^4}{x^2 + x^4} = 0$$

Entramos en “sospecha” de que que el límite es cero. Para salir de la duda tenemos dos formas:

- **polares**

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{3r^3 \cos^2 \theta \sin \theta}{r^2} = \lim_{r \rightarrow 0} 3r \cos^2 \theta \sin \theta = 0$$

En donde, además, se verifica que

$$|3r \cos^2 \theta \sin \theta - 0| \leq 3|r| = G(r) \rightarrow 0$$

Con lo cual se concluye que el límite es cero.

- **La definición $\delta - \epsilon$**

$$|f(x,y) - 0| = \frac{|3x^2y|}{|x^2 + y^2|} = \frac{3|x^2| |y|}{|x^2 + y^2|} \leq \frac{3(x^2 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2}}{|x^2 + y^2|} < 3\delta = \epsilon$$

de esto $\delta = \frac{\epsilon}{3}$. Esto prueba que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$

Observar que como $\|\vec{x} - \vec{0}\| < \delta \implies \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$, entonces es válido el acotamiento

$$\sqrt{x^2} = |x| \leq \sqrt{x^2 + y^2} \quad \sqrt{y^2} = |y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$$

Ejemplo 3.5.18. Estudiemos $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$

En primer lugar, vemos por caminos que no existe tal límite.

- Por el camino $x = 0$ se tiene que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{0 + y^4} = 0$$

- Por el camino $x = y^2$ se tiene que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^4}{2y^4} = \frac{1}{2}$$

Se concluye que, efectivamente, el límite no existe. Veamos lo que sucede si pasamos a polares.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r \cos \theta \operatorname{sen}^2 \theta}{\cos^2 \theta + r^2 \operatorname{sen}^4 \theta} = 0$$

Se recuerda que esto no conduce a asegurar que el límite de $f(x, y) = 0$. Para concluir que este límite polar es equivalente al obtenido por caminos en cartesianas se debiera encontrar una función $G(r)$ tal que

$$\left| \frac{r \cos \theta \operatorname{sen}^2 \theta}{\cos^2 \theta + r^2 \operatorname{sen}^4 \theta} \right| < G(r) \rightarrow 0 \text{ para } r \rightarrow 0$$

Lo que no es posible, ya que al considerar $\theta = \frac{\pi}{2}$ y $r = \frac{\cos \theta}{\operatorname{sen}^2 \theta}$ se tiene que $r \rightarrow 0$ y que

$$\frac{r \cos \theta \operatorname{sen}^2 \theta}{\cos^2 \theta + r^2 \operatorname{sen}^4 \theta} = \frac{\cos^2 \theta}{2 \cos^2 \theta} = \frac{1}{2}$$

En consecuencia, el límite de $f(x, y)$ no existe en $(0, 0)$.

Ejemplo 3.5.19. Probemos que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + 3xy^2}{x^2 + y^2} = 0$.

Podemos usar la definición $\delta - \epsilon$. No obstante, lo hacemos en coordenadas polares. La expresión a acotar es

$$\left| \frac{r^3 \cos^3 \theta + 3r^3 \cos \theta \operatorname{sen}^2 \theta}{r^2} - 0 \right| = |r \cos^3 \theta + 3r \cos \theta \operatorname{sen}^2 \theta| \leq |r \cos^3 \theta| + 3|r \cos \theta \operatorname{sen}^2 \theta| \leq 4|r| = G(r) \rightarrow 0$$

Luego, el límite del campo escalar dado es 0.

Debe quedar absolutamente claro que probar que un límite existe no puede hacerse mediante trayectorias, ya que **nunca** se podrá establecer la existencia **para toda** trayectoria. A los hechos ya mencionados, operaciones algebraicas, acotada por cero, polares, agregamos el siguiente resultado.

Teorema 3.5.20. Suponemos que $|f(x, y) - L| \leq g(x, y)$ para todos los (x, y) en un círculo centrado en (a, b) , con la posible excepción de (a, b) . Si $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x, y) = 0$, entonces $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L$.

Demostración

De la hipótesis $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x, y) = 0$ tenemos que para cualquier $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que

$$0 < \|(x, y) - (a, b)\| < \delta \implies |g(x, y) - L| < \epsilon$$

Para tales puntos (x, y) se satisface

$$|f(x, y) - L| \leq g(x, y) < \epsilon$$

de esto se deduce que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$$

Si la memoria no los engaña este resultado tiene un gran parecido con el teorema del sandwich, ya que en este caso, lo que este teorema establece es que si una función queda “atrapada” entre el 0 (el valor absoluto nunca es negativo) y una función que tiende a cero, entonces debe tener límite 0.

El procedimiento para aplicar este resultado es que, si el límite por varias trayectorias es el mismo, entonces se busca una función que sea mayor que $|f(x,y) - L|$, con lo cual se obtiene el límite.

Ejemplo 3.5.21. *Determinemos si existe* $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$.

De seguro que al ver el límite se te vino a la memoria el uso de coordenadas polares. Eso está bien, pero veamos como lo hacemos por el uso de este último resultado.

Las trayectorias, $x = 0$, $y = 0$, $y = x$ y otras que se te ocurran, pero que pasen por el $(0,0)$, dan como resultado que el límite es 0. Por tanto, la “sospecha” es que ése es el límite. Veamos como lo logramos.

$$|f(x,y) - L| = \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} - 0 \right| = \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right|$$

El denominador $|x^2 + y^2| = x^2 + y^2 \geq x^2$, luego,

$$|f(x,y) - L| = \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{x^2 |y|}{x^2} = |y|$$

Como $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |y| = 0$, entonces

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$$

Ejemplo 3.5.22. *Determinemos si existe* $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{(x-1)^2 \ln x}{(x-1)^2 + y^2}$.

Para diversas trayectorias, tales como $x = 1$, $y = 0$, $y = x - 1$, todas las cuales pasan por el $(1,0)$, el límite es 0. Por tanto, creemos que ese es el límite. Tenemos

$$|f(x,y) - L| = \left| \frac{(x-1)^2 \ln x}{(x-1)^2 + y^2} - 0 \right| = \left| \frac{(x-1)^2 \ln x}{(x-1)^2 + y^2} \right|$$

El denominador $|(x-1)^2 + y^2| = (x-1)^2 + y^2 \geq (x-1)^2$. Luego,

$$|f(x,y) - L| = \left| \frac{(x-1)^2 \ln x}{(x-1)^2 + y^2} \right| \leq \frac{(x-1)^2 |\ln x|}{(x-1)^2} = |\ln x|$$

Dado que $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} |\ln x| = 0$, entonces el límite dado existe y se tiene

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{(x-1)^2 \ln x}{(x-1)^2 + y^2} = 0$$

3.5.6. Límites iterados

Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función real de dos variables y $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Llamamos límites iterados de f en el punto (a, b) a los siguientes límites:

- $\lim_{x \rightarrow a} (\lim_{y \rightarrow b} f(x, y)) = L_1$ y
- $\lim_{y \rightarrow b} (\lim_{x \rightarrow a} f(x, y)) = L_2$

La interpretación que hacemos de esto es la siguiente.

Ejemplo 3.5.23. Estudiemos el límite de $f(x, y) = \frac{x + y}{x - y}$

- $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x + y}{x - y} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1.$
- $\lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + y}{x - y} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{-y} = -1.$

Los límites iterados no tienen por que existir. De hecho hay ejemplos en los que no existe ninguno o existe sólo uno de los dos. Incluso aunque existan ambos no tienen por que coincidir. Además la existencia de estos no está determinada completamente por la existencia del $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L$ ni viceversa. A este respecto lo que sí podemos decir es lo siguiente:

Proposición 3.5.24. Supongamos que existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L$ y es finito. Si existe alguno de los límites iterados con valor finito, entonces coincide con el límite L .

Lo que estamos diciendo es que, si existen L_1 y L (con valor finito), entonces $L = L_1$. Si existen (con valor finito) L y L_2 entonces $L = L_2$, y si existen (con valor finito) L , L_1 y L_2 entonces $L = L_1 = L_2$. Esto nos proporciona el siguiente criterio que nos da una situación en la que el $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)$ no existe.

Corolario 3.5.25.

- Si los límites iterados existen con valor finito y no coinciden entonces no puede existir el $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)$.
- Si existe alguno de los límites iterados con valor finito y no coincide con el $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)$, entonces tampoco existe el límite.

Es sencillo darse cuenta que este proceso de límites iterados es muy similar al método de los caminos para hallar el límite de un campo escalar.

3.6 Continuidad en un campo escalar

Ejemplo 3.5.26. Veamos que sucede con los límites iterados y el límite de $f(x, y) = x \cos \frac{1}{y}$ en $(0, 0)$.

Tenemos lo siguiente:

- $L_1 = \lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{y} \right)$ no existe, puesto que no existe $\lim_{y \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{y}$.
- $L_2 = \lim_{y \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)) = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{y} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} (0) = 0$, porque el límite del paréntesis es cero por acotada.
- $L = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \cos \frac{1}{y} = 0$, porque es el límite del producto de una cantidad que tiende a cero, x , por otra que está acotada.

Se observa que uno de los límites iterados es finito y coincide con el valor del límite de la función.

También es posible que los límites de funciones de varias variables sean infinitos, generalizando la definición dada para funciones reales de una variable.

Definición 3.5.27. Una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ posee límite ∞ en x_0 cuando para todo M existe un $\delta > 0$ de modo que si $x \in B(x_0, \delta)$, $x \neq 0$, entonces $f(x) > M$.

Ejemplo 3.5.28. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{x} = \frac{1}{0} = \infty$.

Ejemplo 3.5.29. $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,0)} \frac{1+x}{(x-2)^2 + y^2} = \frac{3}{0} = \infty$.

Ejemplo 3.5.30. $\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} \frac{1}{x^2 + y^2} = \frac{1}{\infty} = 0$.

Ejemplo 3.5.31. $\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, -\infty)} x^2 + y^2 = \infty$.

3.6. Continuidad en un campo escalar

Definición 3.6.1. El campo escalar $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se dice continuo en el punto $\vec{a} \in \text{dom}(f)$ si y sólo si

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\|\vec{x} - \vec{a}\| < \delta \implies |f(\vec{x}) - f(\vec{a})| < \epsilon)$$

Se debe observar que ahora sí interesa el valor de la función en el punto

En lugar de la definición $\delta - \epsilon$ es mejor considerar la siguiente alternativa:

Definición 3.6.2. Una función se dice que es continua en un punto, si el valor que toma la función en el punto coincide con el límite en dicho punto. En el caso de dos variables, es decir, para una función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ se dice que es continua en el punto (x_0, y_0) si:

1. f está definida en (x_0, y_0) .
2. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ existe
3. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$

Como consecuencia de las propiedades de los límites, la suma, el producto y el cociente de funciones continuas es otra función continua y esto también sucede para la composición de funciones.

Todas las funciones elementales son continuas en todos los puntos en los que están definidas, luego para calcular el límite de una función elemental en un punto (x_0, y_0) en el que está definida basta sustituir x e y por x_0 e y_0 respectivamente. El problema está en los puntos en los que la función no está definida. Por lo tanto, al calcular un límite lo primero que se intenta es la sustitución directa (hallar la máscara), y sólo en el caso de encontrarse con una indeterminación se intenta romperla por algún método (camino o polares).

Ejemplo 3.6.3. El campo escalar $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^2y}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

es continuo en el origen, y por supuesto en cualquier otro punto del plano. Es sencillo ver que, en polares, el límite es cero, y que entonces, coincide con el valor de la función en el origen que es cero.

Ejemplo 3.6.4. El campo escalar $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

es continuo en todo punto de \mathbb{R}^2 , excepto en el $(0, 0)$, pues allí el límite de la función no existe (ver polares).

3.7. Derivada direccional

La derivada direccional informa sobre el crecimiento de la función en la dirección que se desee, ya que representa, en esa dirección, la pendiente de la recta tangente. En particular, si las direcciones escogidas son los ejes coordenados, la derivada direccional pasa a denominarse **derivada parcial**, y por supuesto, mide a que tasa crece o decrece la función f al movernos en la dirección de los ejes coordenados.

Ejemplo 3.7.1. Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar y $\vec{a} \in \text{int}(A)$. Supongamos que $f(\vec{a})$ mide la temperatura en un punto \vec{a} dentro de una habitación donde hay una ventana abierta y un radiador. Si queremos hallar la variación de temperatura cuando nos movemos desde el punto \vec{a} , hasta otro próximo, dependerá de la dirección que se tome. Para fijar ideas nos movemos desde el punto \vec{a} hasta el punto $\vec{a} + \vec{u}$ a través del segmento de recta que los une (figura 3.6) que tiene la forma $\vec{a} + h\vec{u}$ donde $0 \leq h \leq 1$.

La distancia entre \vec{a} y $\vec{a} + h\vec{u}$ es $\|\vec{a} + h\vec{u} - \vec{a}\| = |h| \|\vec{u}\|$. El incremento medio de temperatura entre ambos puntos será

$$\frac{f(\vec{a} + h\vec{u}) - f(\vec{a})}{h \|\vec{u}\|}$$

Si se toma el vector \vec{u} de norma unidad se tiene

$$\frac{f(\vec{a} + h\vec{u}) - f(\vec{a})}{h}$$

Si lo que queremos es hallar el incremento instantáneo de temperatura en el punto \vec{a} hemos de tomar límite para $h \rightarrow 0$ en esta expresión, esto es,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{a} + h\vec{u}) - f(\vec{a})}{h}$$

Definición 3.7.2. Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ campo escalar, $\vec{x} \in \text{Int}(A)$, sea \vec{u} vector unitario de \mathbb{R}^n . Se llama **derivada direccional** de f en la dirección del vector \vec{u} , que se denota por $D_{\vec{u}}f$, al siguiente límite

$$D_{\vec{u}}f(\vec{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x} + h\vec{u}) - f(\vec{x})}{h}$$

Cabe indicar que si:

- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\vec{x} = x$, $\vec{u} = 1$, entonces

$$D_{\vec{u}}f(\vec{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

lo que significa que la derivada direccional, es efectivamente, la generalización de la derivada de funciones de una variable.

Ejemplo 3.7.3. Hallemos derivada direccional del campo $f(x, y) = x^2 + y^2 - 8$ en el punto $(2, 2)$ en dirección del punto $(0, 4)$.

Está dado el campo y el punto donde se pide la derivada direccional, pero la dirección está “disfrazada”. Para hallarla, nos paramos en $(2, 2)$ miramos el $(0, 4)$ y formamos el vector unitario

$$\vec{u} = \frac{(0, 4) - (2, 2)}{\|(0, 4) - (2, 2)\|} = \frac{(-2, 2)}{\sqrt{8}} = \frac{(-1, 1)}{\sqrt{2}}$$

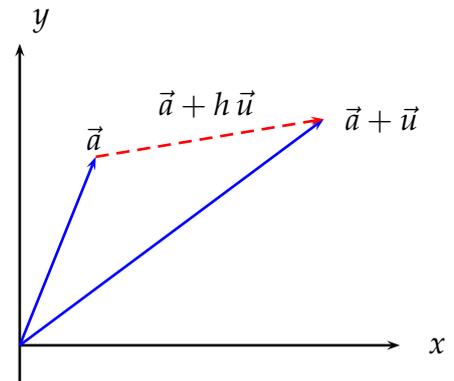


Figura 3.6

Tenemos todos los ingredientes para calcular

$$\begin{aligned} D_{\vec{u}}f(\vec{x}) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f[(2,2) + h \cdot \frac{(-1,1)}{\sqrt{2}}] - f(2,2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2 - \frac{h}{\sqrt{2}}, 2 + \frac{h}{\sqrt{2}}) - f(2,2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2 - \frac{h}{\sqrt{2}})^2 + (2 + \frac{h}{\sqrt{2}})^2 - 8}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2}{h} = 0 \end{aligned}$$

Es evidente, que esta forma de calcular derivadas direccionales es no es una tarea simple. A no desmayar, ya viene una mejor herramienta de cálculo para esta clase de derivadas.

3.7.1. Derivada direccional no implica continuidad

Para verificar esta proposición basta con mostrar un caso.

Ejemplo 3.7.4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ campo escalar definido por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Vamos a probar que este campo tiene derivada direccional en el origen en toda dirección, pero no es continuo en el origen. Para ello, sea $\vec{u} = (u_1, u_2)$ un vector unitario arbitrario, entonces

$$\begin{aligned} D_{\vec{u}}f(0,0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(hu_1, hu_2) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 u_1^2 u_2 - 0}{h(h^2 u_2^2 + h^4 u_1^4)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u_1^2 u_2}{u_2^2 + h^2 u_1^4} = \begin{cases} 0, & \text{si } u_2 = 0 \\ \frac{u_1^2}{u_2}, & \text{si } u_2 \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Así, $D_{\vec{u}}f(0,0)$ existe en cualquier dirección. Para ver que el campo no es continuo en $(0,0)$ se considera el camino $S_1 = \{y = x^2\}$ para tener

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2} \neq f(0,0) = 0$$

De este modo, el campo no es continuo.

3.8. Derivadas parciales

El caso particular de la derivada direccional, en el que el vector unitario a considerar sea uno de los vectores coordenados unitarios, conduce a establecer la siguiente clase de derivada.

Definición 3.8.1. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ campo escalar, $\vec{u} = \vec{u}_k$ el k -ésimo vector coordenado unitario, entonces $D_{\vec{u}_k}f$ se llama **derivada parcial** de f respecto de la k -ésima coordenada. Anotamos

$$D_{\vec{u}_k}f = D_kf = \frac{\partial f}{\partial x_k}$$

En particular,

$$\begin{aligned} D_1f(\vec{x}) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + h, x_2, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{h} \\ D_2f(\vec{x}) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2 + h, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{h} \\ &\vdots \\ D_kf(\vec{x}) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_k + h, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_n)}{h} \end{aligned}$$

Esto se interpreta en el sentido de que para hallar una derivada parcial basta con hallar la derivada del campo en función de la variable que se desee (en dirección del vector unitario), manteniendo constante las restantes. Veamos como funciona esta forma de cálculo.

Ejemplo 3.8.2. Sea $f(x, y, z) = x^2y + y^2z + z^2x$, entonces la derivada parcial del campo f en dirección del vector $(1, 0, 0)$, de acuerdo con la definición es

$$\begin{aligned} D_1f(\vec{x}) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y, z) - f(x, y, z)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x + h)^2y + y^2z + z^2(x + h) - (x^2y + y^2z + z^2x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2hxy + h^2y + z^2h}{h} = 2xy + z^2 \end{aligned}$$

Si derivamos respecto de cada variable, manteniendo constantes las restantes, entonces

$$D_1f(\vec{x}) = \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + z^2$$

$$D_2f(\vec{x}) = \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2yz$$

$$D_3f(\vec{x}) = \frac{\partial f}{\partial z} = y^2 + 2xz$$

3.8.1. Interpretación geométrica

Damos respuesta a la pregunta de ¿cómo se deben escoger los números A y B para que el plano

$$z = f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0)$$

que definen sea un buen candidato a plano tangente?

Para entender la respuesta a esta pregunta vamos a combinar las ideas que acabamos de ver con el estudio de las secciones con planos verticales. La aproximación mediante un plano que estamos tratando de lograr se puede expresar en la forma

$$f(x, y) \sim f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0), \quad \text{cuando } (x, y) \text{ está cerca de } (x_0, y_0)$$

En lugar de estudiar esta aproximación para un punto (x, y) cualquiera, lo que sería tal vez demasiado complicado, podemos tratar de entenderla mejor estudiando un caso particular. Sustituiremos en esta aproximación (x, y) por un punto de la forma (x, y_0) . Es decir, que dejamos fija la coordenada y . Está claro que si x se acerca a x_0 , el punto de la forma (x, y_0) se acerca al punto (x_0, y_0) . La ventaja de hacer esto es que, al fijar la variable y , en lugar de estudiar una fórmula con dos variables libre pasamos a estudiar una fórmula con sólo una variable libre, la x .

Ejemplo 3.8.3. *Vamos a encontrar el plano tangente a la gráfica de la función $z = f(x, y) = 8 - x^2 - y^2$ en el punto $(x_0, y_0, z_0) = (1, 2, 3)$.*

Observar que $z_0 = 3 = f(1, 2)$, de manera que $(x_0, y_0) = (1, 2)$. El plano que buscamos será por tanto de la forma

$$z = f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0) = 3 + A(x - 1) + B(y - 2)$$

Para tratar de encontrar el número A sustituimos, como habíamos dicho, y por $y_0 = 2$. Hacemos la sustitución tanto en el plano como en la fórmula $z = f(x, y)$. Al sustituir en el plano, el término que contiene a B se anula y se obtiene

$$z_{\text{plano}} = 3 + A(x - 1)$$

La fórmula que hemos obtenido para z_{plano} es un polinomio de primer grado en x . Es decir, que si pensamos en las variables x, z esto no es más que la ecuación de una recta.

Por otro lado, al sustituir en $z = f(x, y)$ se tiene

$$z_{\text{función}} = f(x, 2) = 8 - x^2 - 4 = 4 - x^2$$

La fórmula obtenida depende sólo de la variable x . Para referirnos a esta fórmula vamos a ponerle un nombre

$$z_{\text{función}} = f_2(x) = f(x, 2) = 4 - x^2$$

Para acercarnos al punto (x_0, y_0) debemos pensar que en estas fórmulas el valor de x está muy cerca de 1. Y el problema de aproximación queda planteado así

“¿cómo hay que escoger A para que z_{plano} se parezca mucho a $z_{\text{función}}$ cuando x está cerca de 1”

Este problema ya está resuelto: es el problema de aproximación para funciones de una variable. Y la respuesta es clara: el valor A es la derivada de la función $f_1(x) = 4 - x^2$ en el punto $x = 1$. Es decir,

$$f'_1(x) = -2x \implies f'_1(1) = -2$$

De la misma forma, el valor para B se obtiene sustituyendo x por $x_0 = 1$, tanto en la ecuación del plano como en la de la función $z = f(x, y)$, para luego aproximar y a $y_0 = 2$. Al sustituir en el plano se obtiene

$$z_{\text{plano}} = 3 + B(y - 2)$$

que describe una recta cuando si se piensa en las variables x e y . Si sustituimos x por 1 en la función se obtiene ahora

$$z_{\text{función}} = f_1(y) = f(1, y) = 7 - y^2$$

Y lo que tenemos que hacer es seleccionar el valor de B para que la recta

$$z = 3 + B(y - 2)$$

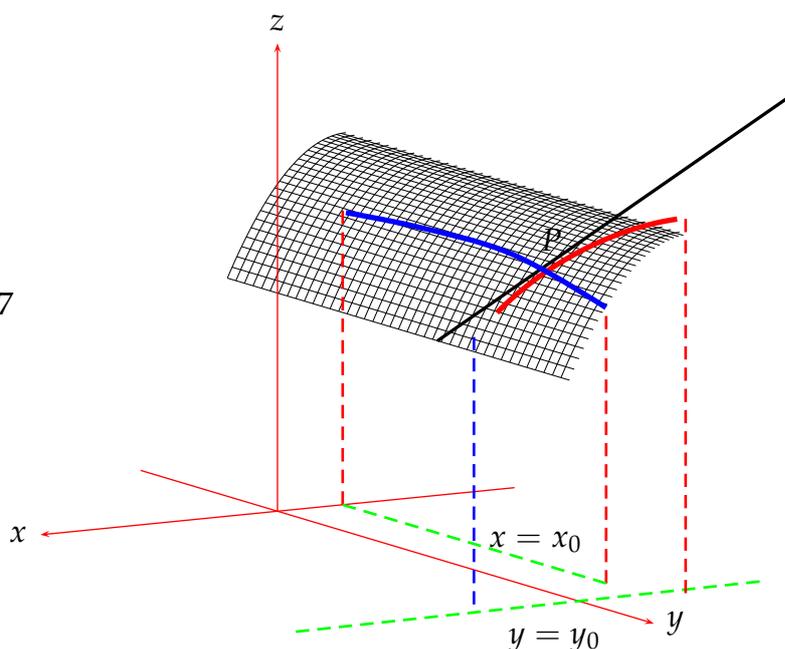
sea la recta que mejor aproxima a $f_1(y) = f(1, y) = 7 - y^2$ cuando y está cerca de 2. La respuesta, naturalmente, es que se debe tomar $B = f'_1(2)$ y como $f'_1(y) = -2y$, entonces $B = -4$. Así que todo esto nos llevan a considerar

$$z = 3 - 2(x - 1) - 4(y - 2)$$

como un candidato razonable a ser el plano tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0, y_0, z_0) = (1, 2, 3)$.

Este ejemplo ilustra la forma en que podemos razonar, aprovechando lo conocido del cálculo de una variable, para obtener un candidato a ser el plano tangente.

figura 3.7



Usaremos esta forma de trabajo para hallar la ecuación del plano tangente al campo escalar $z = f(x, y)$ en un punto $P(x_0, y_0)$. En consecuencia, suponemos que tal plano es de la forma

$$z = f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0)$$

Para determinar los números A y B consideramos las funciones

$$\begin{cases} f_{y_0}(x) = f(x, y_0) \\ f_{x_0}(y) = f(x_0, y) \end{cases}$$

Hemos visto que lo sensato es tomar $A = f'_{y_0}(x_0)$, $B = f'_{x_0}(y_0)$, siempre que estas derivadas existan.

La función $f_{y_0}(x)$ aparece cuando se corta la gráfica de f con un plano vertical paralelo al plano xz que pase por (x_0, y_0, z_0) (la ecuación de ese plano vertical es $y = y_0$). Es una función que sólo depende de x puesto que hemos fijado la y . Usando el cálculo de una variable medimos su pendiente, es decir su inclinación, en ese punto, mediante la derivada $f'_{y_0}(x_0)$. Ese valor nos permite medir la inclinación del plano tangente en esa dirección, paralela al eje x . Si obtenemos también la inclinación $f'_{x_0}(y_0)$ del plano tangente en la dirección paralela al eje y tendremos suficiente información (un punto y dos vectores directores) para determinar el plano. La figura 3.7 ilustra la geometría que hay detrás de estas ideas

Definición 3.8.4. Se llama plano tangente a una superficie en un punto P de la misma, al plano que contiene todas las tangentes a las curvas trazadas sobre la superficie por el punto P .

3.9 Derivadas parciales de orden superior

☞ Si la ecuación de la superficie está definida de manera explícita $z = f(x, y)$ entonces la ecuación del plano tangente en el punto P viene definida por

$$z - z_0 = (x - x_0) \cdot D_1f(P) + (y - y_0) \cdot D_2f(P)$$

☞ Si la superficie viene definida de manera implícita por la ecuación $F(x, y, z) = 0$, entonces la ecuación del plano tangente en un punto P de la superficie es

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (D_1, D_2, D_3)(P) = 0$$

Ejemplo 3.8.5. Hallar el plano tangente a la superficie $f(x, y) = 16 - x^2 - y^2$ en el punto $(1, 1, 14)$

La superficie viene dada en forma explícita. Las derivadas parciales y sus valor en el punto $(1, 1)$ son:

$$D_1f(x, y) = -2x \implies D_1f(1, 1) = -2$$

$$D_2f(x, y) = -2y \implies D_2f(1, 1) = -2$$

Luego, la ecuación del plano tangente es

$$z - 14 = (-2) \cdot (x - 1) + (-2) \cdot (y - 1)$$

que al reducir equivale a $2x + 2y + z - 18 = 0$

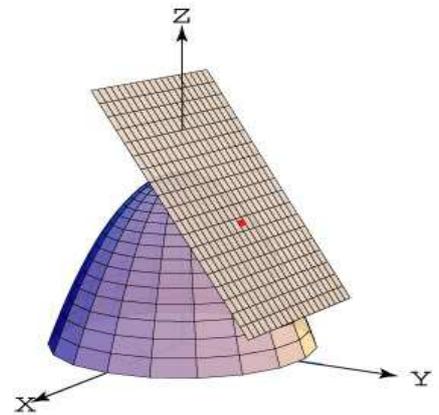


figura 3.8

3.9. Derivadas parciales de orden superior

Al igual que en el caso de las funciones de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ el proceso de calcular derivadas de órdenes superiores en campos escalares es posible. Un ejemplo nos permitirá mostrar las notaciones

Ejemplo 3.9.1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = xy - x^2$ campo escalar.

La derivada parcial en dirección del vector $\vec{u} = (1, 0)$ es

$$D_1f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} = y - 2x$$

La derivada en dirección del vector $\vec{u} = (0, 1)$ es

$$D_2f(x, y) = x$$

Ahora bien, las derivadas de órdenes superiores de este campo son

$$D_1 D_1 f(x, y) = D_{11} f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -2$$

$$D_1 D_2 f(x, y) = D_{12} f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 1$$

$$D_2 D_1 f(x, y) = D_{21} f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 1$$

$$D_2 D_2 f(x, y) = D_{22} f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0$$

En general, la derivada respecto de la j -ésima variable de la derivada respecto de la i -ésima variable se anota:

$$D_j D_i(f) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

Cuando se quiere calcular la derivada de una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en un punto, es frecuente que, dadas las características de la función, se deba utilizar la definición y no calcular primero la derivada en cualquier punto y luego evaluar en el punto particular. En campos escalares esto también debe tenerse presente.

Ejemplo 3.9.2. Calculemos $D_{12}f(0,0)$ y $D_{21}f(0,0)$ si f es el campo

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Para los valores $(x, y) \neq (0, 0)$ se tiene

$$\begin{aligned} D_1 f(x, y) &= \frac{\{y(x^2 - y^2) + 2x^2 y\}(x^2 + y^2) - 2x^2 y(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{(3x^2 y - y^3)(x^2 + y^2) - 2x^2 y(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

En el origen tenemos

$$D_1 f(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

Luego, la función $D_1f(x, y)$ queda definida como sigue

$$D_1f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Para la derivada parcial en dirección de $(0, 1)$ y para los valores $(x, y) \neq (0, 0)$ se tiene

$$\begin{aligned} D_2f(x, y) &= \frac{(x(x^2 - y^2) - 2xy^2)(x^2 + y^2) - 2xy^2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{(x^3 - 3xy^2)(x^2 + y^2) - 2xy^2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

La derivada parcial $D_2f(0, 0)$ es tal que

$$D_2f(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h + 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

Se tiene entonces que la función $D_2f(x, y)$ queda definida como sigue

$$D_2f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2 + y^2)^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Ahora podemos determinar las derivadas mixtas $D_{12} = D_1(D_2)$, $D_{21} = D_2(D_1)$.

$$D_{12}f(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{D_2f(h, 0) - D_2f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^5}{h^5} = 1$$

Análogamente

$$D_{21}f(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{D_1f(0, h) - D_1f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} -\frac{h^5}{h^5} = -1$$

Hemos obtenido así $D_{12} \neq D_{21}$. La igualdad de las derivadas mixtas, requiere de las siguientes condiciones:

Teorema 3.9.3. Si la función f , y las derivadas parciales D_1f , D_2f , $D_{12}f$ existen y son **continuas**, entonces la derivada parcial $D_{21}f$ existe y se tiene $D_{12} = D_{21}$

3.10. Diferenciación en un campo escalar

Dada una función real de variable real, esto es $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, se dice que es diferenciable en el punto a si existe

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

En esta forma es imposible extenderla la idea a dimensiones mayores. Veamos entonces como modificarla para que tenga sentido su generalización. Reescribimos tal límite en la forma

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - (x - a)f'(a)}{x - a} = 0 \quad (3.1)$$

Ahora bien, la ecuación de la recta tangente que pasa por el punto $(a, f(a))$ y de pendiente $f'(a)$ es

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

De aquí que esta recta sea considerada una buena aproximación a la función f en el sentido de que la diferencia entre ella y la función tiende a cero aún cuando x está próximo a a . Si hacemos $h = x - a$, entonces la ecuación 3.1 se convierte en

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a) - hf'(a)}{h} = 0 \quad (3.2)$$

Si consideramos la aplicación lineal $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\lambda(h) = f'(a) \cdot h$, entonces la definición de derivada es equivalente a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a) - \lambda(h)}{h} = 0$$

Esta definición tiene una sencilla generalización a dimensiones superiores que conserva la misma interpretación geométrica, que hicimos con anterioridad, de las derivadas parciales. Recordemos en parte esta idea.

En el caso de un campo $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la idea de recta tangente se reemplaza por plano tangente. La característica geométrica de este plano, es que entre todos los planos que pasan por un punto de una superficie, es él el que más pegado está a ella, el que más se le aproxima en las cercanías del punto, el que proporciona una idea del comportamiento de la superficie en el punto. Al alejarse del punto, lo más seguro es que el plano tangente y la superficie tengan muy poco en común, esto es lo de menos, lo que interesa es que diga como es la superficie en un trocito, tan pequeño como queramos, que contenga al punto. Esto es el plano tangente; un trocito suyo puede sustituir sin que se note al trocito de superficie que se trate.

La gráfica del campo $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es un subconjunto de \mathbb{R}^3 . Para hallar la ecuación del plano tangente a la superficie en un punto $(a, b, f(a, b))$ consideremos que su ecuación es de la forma $z = mx + ny + c$. Como debe ser tangente a la superficie generada por f debe tenerse que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = m, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = n$$

3.10 Diferenciación en un campo escalar

ya que estas son las razones de cambio de f respecto de los ejes \vec{x} e \vec{y} . La constante c se determina considerando que $z = f(x, y)$, con lo cual $c = f(a, b) - ma - nb$. De esto, se obtiene que

$$z = f(a, b) + (x - a) \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + (y - b) \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$$

es la ecuación del plano tangente en el punto $(a, b, f(a, b))$ a la superficie. Se tiene entonces la siguiente generalización de diferenciabilidad

Definición 3.10.1. El campo $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en el punto $\vec{a} = (a, b)$ si $\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{a})$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(\vec{a})$ existen, y se satisface

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \frac{f(\vec{x}) - f(\vec{a}) - \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{a})(x - a) - \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{a})(y - b)}{\|\vec{x} - \vec{a}\|} = 0$$

Al considerar

$$\vec{x} = (x, y), \quad \vec{a} = (a, b), \quad \vec{h} = (h_1, h_2)$$

y hacer

$$\vec{x} - \vec{a} = \vec{h}, \quad \vec{v} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) (\vec{a})$$

la definición de diferenciabilidad toma la forma

$$\lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \frac{f(\vec{a} + \vec{h}) - f(\vec{a}) - \vec{v} \cdot \vec{h}}{\|\vec{h}\|} = 0$$

O en término de la aplicación λ

$$\lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \frac{f(\vec{a} + \vec{h}) - f(\vec{a}) - \lambda(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = 0$$

en donde $\lambda(\vec{h}) = \vec{v} \cdot \vec{h}$. Esta es la definición que generalizamos.

Definición 3.10.2. Un campo escalar $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, si existe una aplicación lineal $\lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \frac{f(\vec{a} + \vec{h}) - f(\vec{a}) - \lambda(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = 0$$

La aplicación lineal $\lambda(\vec{h}) = \vec{v} \cdot \vec{h}$ se representa por $df(\vec{a}, \vec{h})$, y recibe el nombre de **diferencial** de f en \vec{a} . Esto queda establecido en el siguiente resultado.

Teorema 3.10.3. Si el campo escalar $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en $a = (a_1, a_2, a_2, \dots, a_n)$, entonces existe una única aplicación lineal λ tal que

$$\lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \frac{|f(\vec{a} + \vec{h}) - f(\vec{a}) - \lambda(\vec{h})|}{\|\vec{h}\|} = 0$$

Esta aplicación lineal viene dada por

$$\lambda(\vec{h}) = df(\vec{a}, \vec{h}) = (D_1f, \dots, D_nf)(a_1, \dots, a_n) \circ \vec{h} = Df(\vec{a}) \circ \vec{h}$$

Definición 3.10.4. Para el campo escalar $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se llama **derivada del campo**, que se anota Df a la expresión

$$Df(\vec{x}) = (D_1f, D_2f, \dots, D_nf)(\vec{x})$$

En los casos particulares $n = 1, 2, 3$ se tiene que:

- Si $n = 1$, entonces $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$. En consecuencia,

$$Df(a) = f'(a), \quad Df(a) \cdot \vec{h} = f'(a) dx = dy$$

- Si $n = 2$, entonces $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $z = f(x, y)$. En consecuencia,

$$Df(\vec{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) (\vec{a}), \quad Df(\vec{a}) \cdot \vec{h} = dz = \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{a}) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{a}) dy$$

- Si $n = 3$, entonces $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $w = f(x, y, z)$. En consecuencia,

$$Df(\vec{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) (\vec{a})$$

de donde

$$Df(\vec{a}) \circ \vec{h} = dw = \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{a}) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{a}) dy + \frac{\partial f}{\partial z}(\vec{a}) dz$$

Ejemplo 3.10.5. Probar que el campo $f(x, y) = x^2 + xy$ es diferenciable en el punto $(1, 2)$

Si el campo es diferenciable se debe verificar su definición. Para ello tenemos:

$$\vec{a} = (1, 2), \quad f(1, 2) = 3, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = 4, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = 1$$

con lo cual debemos probar que (definición 3.10.3)

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \frac{x^2 + xy - 4x - y + 3}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}} = 0$$

Hacemos la sustitución $x - 1 = r \cos \theta$, $y - 2 = r \sin \theta$ para transformar el límite en el siguiente

$$\lim_{r \rightarrow 0} (r \cos^2 \theta + r \sin \theta \cos \theta) = 0$$

Esto prueba que el campo es diferenciable en el punto $(1, 2)$. En realidad, se puede ver que el campo en cuestión es diferenciable en todo punto de \mathbb{R}^2 .

Consecuencias importante de la diferenciable de un campo escalar son:

■ **continuidad**

Si el campo $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en el punto $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, entonces es continuo en \vec{x}

El recíproco de este resultado es falso, el campo $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ es continuo en $(0, 0)$, pero no diferenciable en $(0, 0)$.

■ **diferenciabilidad**

Si las n derivadas parciales (D_1f, \dots, D_nf) del campo escalar $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ existen y son continuas en un punto \vec{x}_0 , entonces el campo f es diferenciable en \vec{x}_0

El recíproco de este hecho no se verifica, ya que el campo

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{, si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

es diferenciable en el origen y las derivadas parciales no son continuas en el origen.

■ **derivadas direccionales**

Si el campo escalar $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en cualquier punto \vec{x} , entonces la derivada direccional del campo f en cualquier dirección unitaria \vec{u} existe en \vec{x} y se tiene

$$D_{\vec{u}}f(\vec{x}) = Df(\vec{x}) \circ \vec{u}$$

■ **Álgebra de las funciones diferenciables**

Si $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ son campos escalares diferenciables en $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$D(f \pm g)(\vec{x}) = Df(\vec{x}) \pm Dg(\vec{x})$$

$$D(fg)(\vec{x}) = f(\vec{x}) \cdot Dg(\vec{x}) + g(\vec{x}) \cdot Df(\vec{x})$$

$$D\left(\frac{f}{g}\right)(\vec{x}) = \frac{g(\vec{x}) \cdot Df(\vec{x}) - f(\vec{x}) \cdot Dg(\vec{x})}{g^2(\vec{x})}, \quad g(\vec{x}) \neq 0$$

Ejemplo 2 Para el campo escalar

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. Analizar continuidad en $(0, 0)$

2. Determinar si $D_{21}f(0,0) = D_{12}f(0,0)$

3. Averiguar si el campo es diferenciable

1) El límite nos dirá si hay continuidad

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2} = \lim_{t \rightarrow 0} r^2 (\cos^3\theta \operatorname{sen} \theta - \cos \theta \operatorname{sen}^3 \theta) = 0$$

Como hay coincidencia con el valor de f en el punto, tenemos ¡continuidad!

2) Para las derivadas mixtas primero se establecen las de primer orden

- La derivada $D_1f(x,y)$ para valores $(x,y) \neq (0,0)$ es

$$D_1f(x,y) = \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2}$$

- La derivada en el origen es

$$D_1f(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

- Se concluye que la función derivada es

$$D_1f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Análogamente:

- $D_2f(x,y)$ para valores $(x,y) \neq (0,0)$ es

$$D_2f(x,y) = \frac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2 + y^2)^2}$$

- La derivada en el origen es

$$D_2f(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

- Se concluye que

$$D_2f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2 + y^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Ahora estamos en condiciones de calcular las derivadas mixtas en el origen

$$D_{21}f(0, 0) = D_2(D_1)f(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{D_1f(0, h) - D_1f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h^5}{h^5} = -1$$

$$D_{12}f(0, 0) = D_1(D_2)f(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{D_2f(h, 0) - D_2f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^5}{h^5} = 1$$

se concluye que las derivadas parciales mixtas son diferentes.

3) Para la diferenciabilidad se ve si las D_1 y D_2 son continuas. Es sencillo, en polares, determinar que ambas tienen límite cero, y coinciden con el valor que tienen asignado en el punto. Por tanto, la función f es diferenciable.

Ejemplo 3.10.6. La función $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{y^2 + x^4} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ tiene las siguientes propiedades:

- Es continua en todo el plano, incluyendo $(0, 0)$ pues

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{y^2 + x^4} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \cdot \frac{y^2}{y^2 + x^4} = 0$$

es el caso 0 por acotada.

- Las derivadas parciales $D_1f(0, 0)$ y $D_2f(0, 0)$ existen, en efecto:

$$D_1f(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

y también,

$$D_2f(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

- La función no es diferenciable en $(0, 0)$. Lo vemos mediante la definición, la cual es

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \frac{f(\vec{x}) - f(\vec{a}) - \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{a})(x - a) - \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{a})(y - b)}{\|\vec{x} - \vec{a}\|} = 0$$

En efecto,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{xy^2}{y^2+x^4} - 0 - 0(x-0) - 0(y-0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{(y^2+x^4)\sqrt{x^2+y^2}}$$

pasamos a coordenadas polares

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{(y^2+x^4)\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^3 \cos \theta \operatorname{sen}^2 \theta}{r(r^2 \operatorname{sen}^2 \theta + r^4 \operatorname{cos}^4 \theta)}$$

después de simplificar se llega a

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^3 \cos \theta \operatorname{sen}^2 \theta}{r(r^2 \operatorname{sen}^2 \theta + r^4 \operatorname{cos}^4 \theta)} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\cos \theta \operatorname{sen}^2 \theta}{\operatorname{sen}^2 \theta + r^2 \operatorname{cos}^4 \theta} = \cos \theta$$

límite que, claramente, depende del ángulo. Se sigue que la función dada no es diferenciable

Ejemplo 3.10.7. La función $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{y^2 + x^4}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ es tal que:

- Es continua en todo el plano, incluyendo $(0, 0)$ pues

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{y^2 + x^4} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^2 \cdot \frac{y^2}{y^2 + x^4} = 0$$

es el caso 0 por acotada.

- Las derivadas parciales $D_1 f(0, 0)$ y $D_2 f(0, 0)$ existen, en efecto:

$$D_1 f(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

y también,

$$D_2 f(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

- La función es diferenciable en $(0, 0)$. Lo vemos mediante la definición.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{x^2 y^2}{y^2+x^4} - 0 - 0(x-0) - 0(y-0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{(y^2+x^4)\sqrt{x^2+y^2}}$$

pasamos a coordenadas polares

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{(y^2+x^4)\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^4 \operatorname{cos}^2 \theta \operatorname{sen}^2 \theta}{r(r^2 \operatorname{sen}^2 \theta + r^4 \operatorname{cos}^4 \theta)}$$

después de simplificar se llega a

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^4 \cos^2 \theta \operatorname{sen}^2 \theta}{r(r^2 \operatorname{sen}^2 \theta + r^4 \cos^4 \theta)} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r \cos^2 \theta \operatorname{sen}^2 \theta}{\operatorname{sen}^2 \theta + r^2 \cos^4 \theta} = 0$$

Se concluye que la función dada es diferenciable.

- Se debe señalar que la $D_2 f$ no es continua en $(0, 0)$. En efecto, como

$$D_2 f(x, y) = \frac{2x^6 y}{(y^2 + x^4)^2}$$

entonces, al tomar el camino $y = x^2$ el límite es $\frac{1}{2}$, y si se toma el camino $y = 0$ el límite es 0. Lo que confirma que $D_2 f$ no es continua.

- La $D_1 f$ si es continua ¡verificarlo!

3.10.1. El Gradiente

Las derivadas parciales f_x y f_y de una función diferenciable $f(x, y)$ desempeñan un papel esencial, no sólo en la determinación del plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$, sino también en el cálculo de las derivadas direccionales y direcciones de máximo crecimiento o decrecimiento de la función $f(x, y)$. Por ello la función $\nabla : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que tiene regla de correspondencia

$$\nabla f(\vec{x}) = (D_1 f(\vec{x}), \dots, D_n f(\vec{x}))$$

se denomina **gradiente**. Se observa que las componentes del gradiente son las derivadas parciales de la función en el punto. Es importante decir que el gradiente de una función en un punto sólo está definido si la función es diferenciable en ese punto.

Sea $f(x, y)$ una función diferenciable. Las propiedades principales del gradiente son:

- ☞ La derivada direccional del campo $f(x, y)$ en el punto (a, b) en la dirección del vector unitario \vec{u} se puede escribir como

$$D_{\vec{u}} f(a, b) = \nabla f(a, b) \circ \vec{u}$$

Siendo ésta la mejor herramienta para el cálculo de la derivada direccional.

Ejemplo 3.10.8. Para el campo escalar $f(x, y) = xy - x^2$, su gradiente es $\nabla f(\vec{x}) = (y - 2x, x)$. La derivada direccional en el punto $(1, 1)$ en la dirección del vector unitario $\vec{u} = \frac{1}{5}(3, 4)$ es

$$D_{\vec{u}} f(1, 1) = \nabla f(1, 1) \cdot \frac{1}{5}(3, 4) = (-1, 1) \cdot \frac{1}{5}(3, 4) = \frac{1}{5}$$

Y la derivada direccional en el punto $(1, 1)$ en la dirección del vector unitario $\vec{u} = (1, 0)$ es

$$D_{\vec{u}} f(1, 1) = \nabla f(1, 1) \cdot (1, 0) = (-1, 1) \cdot (1, 0) = -1$$

☞ El gradiente indica el sentido de crecimiento más rápido de una función en un punto dado. La derivada direccional tiene su valor máximo en el sentido del gradiente y coincide con su módulo. En efecto, se sabe que

$$\text{comp}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{\|\vec{b}\|} \implies \vec{a} \circ \vec{b} = \|\vec{b}\| \text{comp}_{\vec{b}}\vec{a}$$

Luego,

$$D_{\vec{u}}f(\vec{x}) = \nabla f(\vec{x}) \circ \vec{u} \implies \nabla f(\vec{x}) \circ \vec{u} = \|\vec{u}\| (\text{comp}_{\vec{u}}\nabla f(\vec{x}))$$

como el vector \vec{u} es unitario, entonces

$$D_{\vec{u}}f(\vec{x}) = \nabla f(\vec{x}) \circ \vec{u} = (\text{comp}_{\vec{u}}\nabla f(\vec{x}))$$

Esta expresión señala que “la derivada direccional en la dirección del vector unitario \vec{u} es igual a la componente del gradiente en esa dirección”.

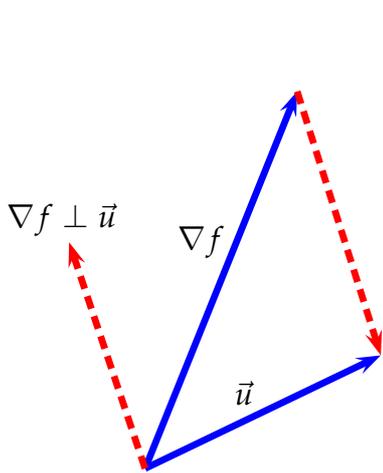


Figura 3.9

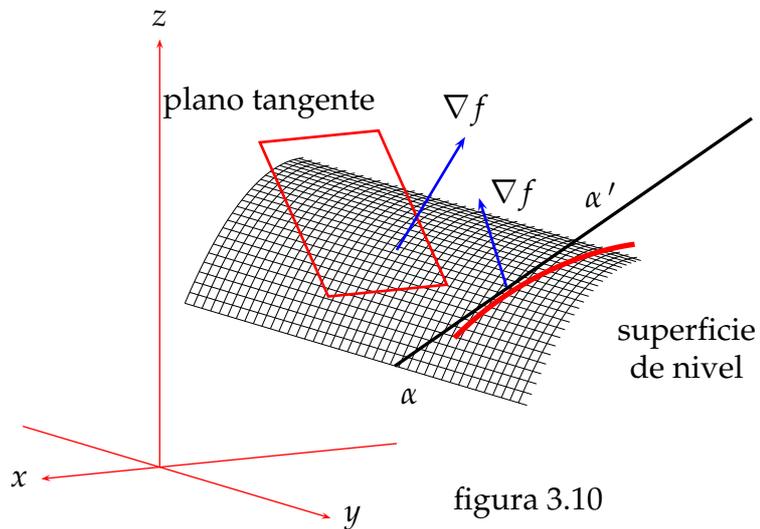


figura 3.10

Se sigue entonces que

- Si $\nabla f \perp \vec{u}$ entonces $D_{\vec{u}}f = 0$
- Si $\nabla f \parallel \vec{u}$ entonces $D_{\vec{u}}f$ es **máxima**, y este valor máximo es $\|\nabla f\|$
- El valor mínimo se obtiene en el sentido opuesto, y su valor es $-\|\nabla f\|$

Ejemplo 3.10.9. Hallar la dirección y magnitud de la máxima razón de cambio del campo $f(x, y) = x^2 + xy$ en el punto $(2, 3)$.

De acuerdo a lo señalado, cuando la derivada direccional va en la misma dirección del gradiente la razón de cambio es máxima. Luego

$$\nabla f(x, y) = (2x + y, x) \implies \nabla f(2, 3) = (7, 2)$$

3.10 Diferenciación en un campo escalar

de esto se sigue que $\|\nabla f(2,3)\| = \sqrt{53}$. En consecuencia, la dirección de cambio máxima está en $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{53}} \cdot (7,2)$ y su magnitud es $\sqrt{53}$.

Ejemplo 3.10.10. Sea $f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ el potencial eléctrico en cualquier punto $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$. Hallar la razón de cambio del potencial en $(2,2,-1)$ en la dirección del vector $(2,-3,6)$.

Se llama potencial de un campo vectorial \vec{F} al campo escalar f que satisface que $\nabla f = \vec{F}$. La razón de cambio del potencial en un punto en la dirección de un vector unitario viene dado por la derivada direccional, de modo que se tiene

$$\nabla f(x,y,z) = (-x, -y, -z) \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}$$

Ahora, un vector unitario en la dirección del vector $(2,-3,6)$ es $\frac{1}{7} \cdot (2,-3,6)$. Por tanto

$$D_{\vec{u}}f(2,2,-1) = \nabla f(2,2,-1) \cdot \frac{1}{7} \cdot (2,-3,6)$$

Esto es

$$D_{\vec{u}}f(2,2,-1) = \left(-2 \cdot \frac{1}{27}, -2 \cdot \frac{1}{27}, 1 \cdot \frac{1}{27} \right) \cdot \frac{1}{7} \cdot (2,-3,6) = \frac{8}{189}$$

☞ El gradiente es ortogonal al plano tangente y por ende a cualquier vector tangente.

En efecto, sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ campo escalar que satisface $f(\vec{x}) = c$, se sigue de esto que el conjunto $S = \{f(\vec{x}) = c\}$ es una superficie de nivel en \mathbb{R}^3 . Sea $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva tal que $\alpha(t) = \vec{x}$. La función compuesta $f \circ \alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ queda definida por $(f \circ \alpha)(t) = f(\vec{x}) = c$. Si α es diferenciable en t , entonces

$$(f \circ \alpha)(t) = c \implies D(f \circ \alpha)(t) \cdot \alpha'(t) = 0$$

$$\implies \nabla f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) = 0$$

$$\implies \nabla f(\alpha(t)) \perp \alpha'(t)$$

Esto prueba que el gradiente es un vector normal del plano tangente.

Ejemplo 3.10.11. Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ campo escalar tal que $f(x,y,z) = w = z - 2x^2 - y^2$. Hallar la ecuación del plano tangente en $(1,2,6)$.

El gráfico del campo escalar se encuentra en \mathbb{R}^4 , pero una superficie de nivel, para $w = 0$, es $2x^2 + y^2 - z = 0$. Por lo visto recién, un vector ortogonal al plano es el gradiente

$$\nabla f(x,y,z) = (4x, 2y, -1) \implies \nabla f(1,2,6) = (4,4,-1)$$

de manera que la ecuación del plano tangente es

$$(x-1, y-2, z-6) \cdot (4,4,-1) = 0 \implies 4x + 4y - z - 6 = 0$$

3.11. Incremento y diferencial total

En el caso de las funciones de una variable se estudia como aproximar la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en el punto $x_0 + \Delta x$ conociendo, el valor de la función f y de su derivada f' en el punto x_0 , y un incremento Δx pequeño. La figura 3.11 muestra que

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta y$$

Ahora bien, como aproximación a $f(x_0 + \Delta x)$ se considera la distancia hasta la recta tangente. Esto es,

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + \Delta y_{tg}$$

donde Δy_{tg} es la elevación de la recta tangente entre el punto x_0 y $x_0 + \Delta x$. La pendiente de la recta tangente es

$$f'(x_0) = \frac{\Delta y_{tg}}{\Delta x}$$

De esto se sigue que

$$\Delta y_{tg} = f'(x_0) \cdot \Delta x \quad (3.3)$$

Se concluye que la aproximación es

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x \quad (3.4)$$

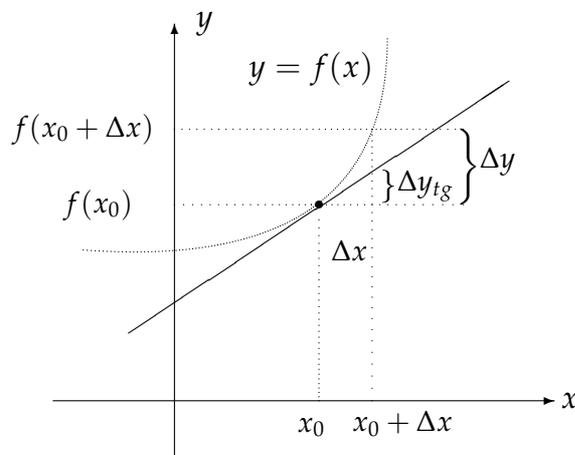


figura 3.11

Hacemos notar que $\Delta y - dy$ se aproxima a cero más rápidamente que Δx , ya que

$$\epsilon = \frac{\Delta y - dy}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x) - f'(x) \Delta x}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - f'(x)$$

al hacer $\Delta x \rightarrow 0$ se tiene que $\epsilon \rightarrow 0$. Por tanto,

$$\Delta y = dy + \epsilon \Delta x$$

Ejemplo 3.11.1. Para aproximar $\sqrt{5}$ se considera la función $f(x) = \sqrt{x}$. El punto adecuado es $x = 4$, de modo que el incremento $\Delta x = 1$. La derivada de la función viene dada por $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. En consecuencia

$$f(5) = \sqrt{5} \approx f(4) + \frac{1}{2\sqrt{4}} \cdot 1 = 2,25$$

Un concepto ligado al de incremento es el de diferencial. Para una función derivable $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $x \mapsto y = f(x)$, La **diferencial** de f en x_0 es la función lineal $dy = f'(x_0) dx$ de la variable dx . Si la función f es derivable en todo punto de su dominio, entonces $dy = f'(x) dx$. Al usar diferenciales la fórmula de aproximación se convierte en

$$f(x_0 + dx) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot dx \tag{3.5}$$

Esta aproximación se denomina **aproximación por diferenciales**, y se considera como la mejor aproximación **lineal** a $f(x)$ en la vecindad de x_0 . Se observa también que, si $f'(x) \neq 0$, entonces $dy = \Delta y_{tg}$ aproxima al incremento en y (que es Δy), satisfactoriamente, para valores de Δx pequeños. Es decir, se tiene que $dy \approx \Delta y$.

3.11.1. Incremento en dos variables

Al extender la idea de incremento al caso de un campo escalar $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $(x, y) \mapsto z = f(x, y)$ el problema consiste en que si x e y son incrementados en Δx y Δy respectivamente, entonces el correspondiente incremento de $z = f(x, y)$ es

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \tag{3.6}$$

Con lo cual Δz representa el cambio en el valor de f cuando (x, y) cambia a $(x + \Delta x, y + \Delta y)$.

Vamos a encontrar una expresión para la diferencial de $z = f(x, y)$

En la ecuación 3.6 sumamos y restamos el término $f(x, y + \Delta y)$

$$\Delta z = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] + [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)]$$

Vamos a reescribir las expresiones que aparecen en los corchetes en forma separada.

- Dividiendo los términos del primer corchete por Δx y tomando límite para $\Delta x \rightarrow 0$ se obtiene

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)}{\Delta x} = \frac{\partial f(x, y + \Delta y)}{\partial x}$$

La igualdad a la derivada parcial de f respecto de x está justificada desde el momento que se observa que sólo la primera coordenada varía, la segunda permanece constante. Además, si “eliminamos” el límite, entonces

$$\frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)}{\Delta x} = \frac{\partial f(x, y + \Delta y)}{\partial x} + \epsilon_1$$

O bien,

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) = \frac{\partial f(x, y + \Delta y)}{\partial x} \Delta x + \epsilon_1 \Delta x$$

donde ϵ_1 es un infinitésimo para el que se cumple que $\epsilon_1 \rightarrow 0$ si $\Delta x \rightarrow 0$. Además

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\partial f(x, y + \Delta y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$$

- El segundo corchete lo dividimos por Δy y pasamos al límite para tener que

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$$

Que se escribe, sin límite, en la forma

$$f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Delta y + \epsilon_2 \Delta y$$

Con ϵ_2 otro infinitésimo que cumple que $\epsilon_2 \rightarrow 0$ si $\Delta y \rightarrow 0$.

Reemplazando lo anterior en Δz se obtiene

$$\Delta z = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y$$

Hemos probado el siguiente resultado.

Teorema 3.11.2. (aproximación lineal)

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar continuo sobre A . Suponemos que Δx y Δy son los incrementos de x e y lo suficientemente pequeños para que $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in A$. Si las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en (x_0, y_0) , entonces el incremento de la variable dependiente z

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

puede escribirse como

$$\Delta z = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y$$

con $\epsilon_1 \rightarrow 0$ para $\Delta x \rightarrow 0$ y $\epsilon_2 \rightarrow 0$ para $\Delta y \rightarrow 0$.

Los incrementos Δx y Δy se llaman diferenciales de las variables independientes y se denotan por dx y dy .

Definición 3.11.3. Sean $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ campo escalar y Δx y Δy los incrementos de x e y respectivamente.

- Se llama **fórmula de aproximación por incrementos** a la expresión

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Delta y \quad (3.7)$$

Recordar que $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$.

- Se llama **diferencial total** de la función $f(x, y)$ a:

$$dz = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy \quad (3.8)$$

A la luz de la definición de dz , el teorema 3.11.2 afirma que el cambio real en z es aproximadamente igual a la diferencial total dz , cuando los incrementos Δx y Δy son pequeños. Es decir, $\Delta z \sim dz$.

Ejemplo 3.11.4. El radio de la base y la altura de un cono circular recto miden 10 cm y 25 cm, respectivamente, con un posible error en la medición, de a lo sumo, 0,01 cm en la base y en la altura. Usemos diferenciales para estimar el error máximo en el volumen del cono.

El volumen de un cono es $V = \frac{\pi}{3} r^2 h$, con lo cual la diferencial total es

$$dV = \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{\partial V}{\partial h} dh = \frac{2\pi}{3} r h dr + \frac{\pi}{3} r^2 dh$$

Dado que $|\Delta r| \leq 0,1$ y $|\Delta h| \leq 0,1$, entonces para estimar el máximo error en el volumen, tomamos el máximo error en las medidas de r y h , esto es, $dr = 0,1$ y $dh = 0,1$. Como además, $r = 10$ y $h = 25$, entonces

$$dV = \frac{500\pi}{3} 0,1 + \frac{100\pi}{3} 0,1 = 20\pi$$

Ejemplo 3.11.5. Usar diferenciales para hallar un valor aproximado de $(3,04)^3 (1,99)^2$

Por la forma de la expresión a aproximar, la función adecuada es $z = f(x, y) = x^3 y^2$, con $x = 3$, $\Delta x = 0,04$, $y = 2$, $\Delta y = -0,01$. Las derivadas parciales de la función z son:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 y^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3 y$$

sus valores en el punto $(3, 2)$ son 108 y 108 respectivamente, entonces la aproximación es

$$\begin{aligned} f(3,04; 1,99) &\sim f(3, 2) + 108(0,04) + 108(-0,01) = 108(1 + 0,04 - 0,01) \\ &\sim 108(1,03) = 111,24 \end{aligned}$$

A las funciones que pueden aproximarse linealmente de la manera descrita por el teorema 3.11.2 reciben un nombre especial, que ya conocemos, y que pasamos a formular a continuación

Definición 3.11.6. Dado el campo escalar $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continuo en A y con derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ continuas en $(x_0, y_0) \in A$. Si Δz puede expresarse como

$$\Delta z = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y$$

donde $\epsilon_1 \rightarrow 0$ para $\Delta x \rightarrow 0$ y $\epsilon_2 \rightarrow 0$ para $\Delta y \rightarrow 0$, entonces f se dice **diferenciable** en (x_0, y_0) .

Observación: Este resultado significa que “una función es diferenciable en (x_0, y_0) si la diferencial total dz es una buena aproximación al incremento total Δz ”. En otras palabras, cuando $\Delta z = dz$.

Este concepto de aproximación se puede generalizar a campos escalares $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, en donde para simplificar la escritura se considera, $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$, $\Delta \vec{x} = (\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n)$, teniéndose

$$f(\vec{x} + \Delta \vec{x}) \approx f(\vec{x}) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}) \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{x}) \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}) \Delta x_n \quad (3.9)$$

De la misma forma, la diferencial total puede extenderse a campos escalares que dependen de más de dos variables independientes. La diferencial total del campo $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es

$$dw = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

3.12. Regla de la cadena

La regla de la cadena para funciones de una variable es bien conocido. Dadas dos funciones $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que pueden ser compuestas en la forma $g \circ f$ (rango de f subconjunto de dominio de g) tales que f derivable en a y g derivable en $f(a)$, entonces $g \circ f$ es derivable en a y se tiene

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

La regla de la cadena para funciones de varias variables tiene dos versiones diferentes según la forma en que se realiza la composición.

Caso I: $\mathbb{R} \xrightarrow{\vec{g}} \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R} \implies \mathbb{R} \xrightarrow{f \circ \vec{g}} \mathbb{R}$

Este caso corresponde a componer el campo escalar f con la función vectorial \vec{g} . Por simplicidad nos abocamos al caso particular

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad z = f(x, y)$$

$$\vec{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \vec{g}(t) = (x(t), y(t))$$

3.12 Regla de la cadena

De esta forma, hemos construido el campo escalar $f \circ \vec{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, que es composición de f con \vec{g} , y que tiene regla de correspondencia

$$(f \circ \vec{g})(t) = z = f(x(t), y(t))$$

Nuestra tarea: Hallar $\frac{dz}{dt}$

De la sección anterior sabemos que el incremento Δz es

$$\Delta z = D_1 f(x, y) \Delta x + D_2 f(x, y) \Delta y + \Delta x \epsilon_1(x, y) + \Delta y \epsilon_2(x, y)$$

con $\epsilon_1 \rightarrow 0$, $\epsilon_2 \rightarrow 0$ para $\Delta x \rightarrow 0$ y $\Delta y \rightarrow 0$. Ahora, dividimos por Δt y consideramos que $\Delta t \rightarrow 0$, para tener:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(D_1 f(x, y) \frac{\Delta x}{\Delta t} + D_2 f(x, y) \frac{\Delta y}{\Delta t} + \epsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta t} + \epsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta t} \right) \\ \frac{dz}{dt} &= D_1 f(x, y) \frac{dx}{dt} + D_2 f(x, y) \frac{dy}{dt} + 0 \cdot \frac{dx}{dt} + 0 \cdot \frac{dy}{dt} \\ &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} \end{aligned}$$

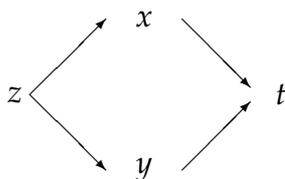
Esta idea se generaliza a un campo escalar $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, y a una función vectorial $\vec{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\vec{g}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$, teniéndose

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial w}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{\partial w}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt}$$

Si se multiplica por dt , se obtiene la ya conocida **diferencial total**

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial w}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial w}{\partial x_n} dx_n$$

Una forma visual de obtener la regla de la cadena es la siguiente.



$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

Ejemplo 3.12.1. Hallar $\frac{dz}{dt}$ si, $z = f(x, y) = 300 - 20x^2 + 30y$, $x = t + 2$, $y = 4 + t^2$

El campo f va de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R} . La función vectorial es $\vec{g}(t) = (t + 2, 4 + t^2)$ y va de \mathbb{R} en \mathbb{R}^2 . Las derivadas son:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -40x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 30, \quad \frac{dx}{dt} = 1, \quad \frac{dy}{dt} = 2t$$

Luego,

$$\frac{dz}{dt} = -40x \cdot 1 + 30 \cdot 2t$$

En términos de t se tiene

$$\frac{dz}{dt} = -40t - 80 + 60t = 20t - 80$$

Con el fin de comprobar que lo realizado está correcto hacemos primero la composición de los campos y luego derivamos.

$$f(\vec{g}(t)) = 300 - 20(t + 2)^2 + 30(4 + t^2) = 10t^2 - 80t + 340$$

Ahora se deriva f respecto de t .

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 20t - 80$$

Ejemplo 3.12.2. Sean $z = x^5 - 2xy^2$, $x = t + 2$, $y = 4 + t^3$. Hallar $\frac{dz}{dt}$.

La función vectorial es $\vec{g}(t) = (t + 2, 4 + t^3)$. Las derivadas son:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 5x^4 - 2y^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -4xy, \quad \frac{dx}{dt} = 1, \quad \frac{dy}{dt} = 3t^2$$

Luego

$$\frac{dz}{dt} = (5x^4 - 2y^2) \cdot 1 + (-4xy) \cdot (3t^2)$$

En términos de t se tiene

$$\frac{dz}{dt} = 5(t + 2)^4 - 2(4 + t^3)^2 - 4(t + 2)(4 + t^3)(3t^2)$$

Si se quiere esta derivada en un valor particular, digamos $t = 0$, entonces

$$\frac{dz}{dt} = 5 \cdot 16 - 2 \cdot 16 - 4 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 0 = 48$$

Ejemplo 3.12.3. Sea $f(x, y) = \frac{x}{y}$. Si $x = t + e^t$, $y = 1 + t + t^2$. Establecemos la composición y hallamos la derivada que corresponde.

3.12 Regla de la cadena

La composición es en la forma

$$h = f \circ g : \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

tal que

$$t \longmapsto g(t) = (t + e^t, 1 + t + t^2) = (x, y) \longmapsto f(x, y) = \frac{x}{y} = h(t)$$

Tenemos que hallar la derivada de h respecto de t .

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{1}{y} \cdot (1 + e^t) - \frac{x}{y^2} \cdot (1 + 2t)$$

Escribiendo todo en términos de t se halla que

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{1 + t + t^2} \cdot (1 + e^t) - \frac{t + e^t}{(1 + t + t^2)^2} \cdot (1 + 2t)$$

Al reunir términos semejantes

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1 - t^2 - te^t + t^2e^t}{(1 + t + t^2)^2}$$

Ejemplo 3.12.4. *Un cono circular recto tiene en cierto tiempo t una altura de 18 cms y crece a razón de 2 cms por segundo. El radio de la base en el mismo tiempo t es de 3 cms y crece a razón de 1 cm por segundo. Hallar la velocidad con que crece el volumen del cono en el tiempo t .*

El volumen de un cono circular recto es $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, siendo en este caso $h = h(t)$, $r = r(t)$. De la regla de la cadena se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial h} \frac{dh}{dt} + \frac{\partial V}{\partial r} \frac{dr}{dt} = \frac{1}{3}\pi r^2 \frac{dh}{dt} + \frac{2}{3}\pi r h \frac{dr}{dt} \\ &= \frac{1}{3}\pi \cdot 9 \cdot 2 + \frac{2}{3}\pi \cdot 3 \cdot 18 \cdot 1 = 42\pi \text{ cm}^3/\text{seg} \end{aligned}$$

Caso II: $\mathbb{R}^n \xrightarrow{\vec{g}} \mathbb{R}^m \xrightarrow{f} \mathbb{R} \implies \mathbb{R}^n \xrightarrow{f \circ \vec{g}} \mathbb{R}$

Al considerar el campo escalar $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ y el campo vectorial $\vec{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, se construye el campo escalar $f \circ \vec{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ con regla de correspondencia

$$(f \circ \vec{g})(\vec{x}) = f(\vec{g}(\vec{x}))$$

Al igual que el caso anterior, tratamos con $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ y $\vec{g} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Nuestra tarea: Hallar $\frac{\partial z}{\partial t}$ y $\frac{\partial z}{\partial s}$

Sean $z = f(x, y)$, $\vec{g}(s, t) = (x(s, t), y(s, t))$. El procedimiento para determinar estas dos derivadas tiene como punto de partida el hecho que

$$\Delta z = D_1 f(x, y) \Delta x + D_2 f(x, y) \Delta y + \Delta x \epsilon_1 + \Delta y \epsilon_2$$

Ahora, se divide por Δt , se considera que la variable s es constante, y se toma límite tendiendo a cero de Δt .

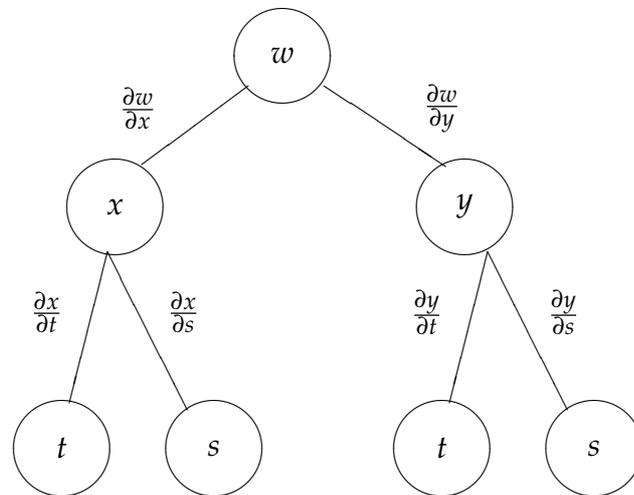
$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(D_1 f(x, y) \frac{\Delta x}{\Delta t} + D_2 f(x, y) \frac{\Delta y}{\Delta t} + \epsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta t} + \epsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta t} \right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = D_1 f(x, y) \frac{\partial x}{\partial t} + D_2 f(x, y) \frac{\partial y}{\partial t} + 0 \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + 0 \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

$$= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}$$

Análogamente, $\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}$

La forma gráfica de recordar esta forma es



Ejemplo 3.12.5. Sean $w = f(x, y, z, u) = x^2 + y^2 - z^2 - u^2 + 3x - 2y + z - u$, $x = 2r + s - t$, $y = r - 2s + t$; $z = 3r - 2s + t$; $u = r - s - t$. Hallar

$$\frac{\partial w}{\partial r}, \frac{\partial w}{\partial s}, \frac{\partial w}{\partial t}$$

3.13 Derivación de funciones definidas implícitamente

En este caso, podemos considerar que la función compuesta se genera en la forma $f \circ \vec{g}$ con $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ y $\vec{g} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$, con lo cual el campo escalar es

$$f \circ \vec{g} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

Se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial r} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial r} \\ &= (2x + 3) \cdot 2 + (2y - 2) \cdot 1 + (1 - 2z) \cdot 3 - (1 + 2u) \cdot 1 \\ &= 4x + 2y - 6z - 2u + 6 \\ &= 4(2r + s - t) + 2(r - 2s + t) - 6(3r - 2s + t) - 2(r - s - t) + 6 \\ &= -10r + 14s - 6t + 6 \end{aligned}$$

De la misma forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial s} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial s} \\ &= (2x + 3) \cdot 1 + (2y - 2) \cdot (-2) + (1 - 2z) \cdot (-2) - (1 + 2u) \cdot (-1) \\ &= 2x - 4y + 4z + 2u + 8 \\ &= 14r - 4t + 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} \\ &= (2x + 3) \cdot (-1) + (2y - 2) \cdot 1 + (1 - 2z) \cdot 1 - (1 + 2u) \cdot (-1) \\ &= -2x + 2y - 2z + 2u - 4 \\ &= -6r - 4s - 4 \end{aligned}$$

En el caso general $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\vec{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, sean $w = f(\vec{x})$, $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\vec{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n)$, $\vec{g}(\vec{t}) = \vec{x}(\vec{t})$, entonces

$$\frac{\partial w}{\partial t_k} = \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_k} + \frac{\partial w}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_k} + \dots + \frac{\partial w}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial t_k}$$

para $k = 1, 2, \dots, n$

3.13. Derivación de funciones definidas implícitamente

Una aplicación de la regla de la cadena tiene que ver con la derivación de funciones dadas en forma implícita.

Supongamos que $F(x, y) = 0$ define implícitamente y como función de x , en la forma $y = f(x)$, de modo que $F(x, f(x)) = 0$.

Consideremos una función auxiliar $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $h(t) = F(t, f(t))$. De acuerdo con la regla de la cadena

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial t}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial f(t)}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot f'(t)$$

como $h(t) = F(t, f(t)) = 0$ se tiene

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot f'(t) = 0 \implies f'(t) = -\frac{F_x}{F_y}$$

expresión que permite el cálculo de la derivada de y con respecto a x sin conocer una fórmula explícita para $y = f(x)$.

Este resultado, ya conocido de los cursos anteriores, se puede extender a más variables. Veamos el caso en que tenemos $F(x, y, z) = 0$. Bajo ciertas condiciones se puede definir z como función de x e y en la forma $z = f(x, y)$, resultando tal función z derivable. Para ello consideremos la función auxiliar $h(x, y) = F(x, y, f(x, y))$. Derivando respecto de x e y se tiene:

$$h_x = 0 = F_x \cdot 1 + F_y \cdot 0 + F_z \cdot \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$h_y = 0 = F_x \cdot 0 + F_y \cdot 1 + F_z \cdot \frac{\partial f}{\partial y}$$

Al despejar:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} \quad y \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$$

Esto último corresponde al teorema de la función implícita que pasamos a enunciar.

Teorema 3.13.1. Sea $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Si se satisface que:

1. Existe un punto (a, b, c) en el cual $F(a, b, c) = 0$
2. F_x, F_y, F_z son continuas en (a, b, c)
3. $F_z(a, b, c) \neq 0$

entonces $F(x, y, z) = 0$ define implícitamente a z como función de x e y en un entorno de (a, b, c) , resultando que z es derivable, teniéndose:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} \quad y \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$$

Ejemplo 3.13.2. Hallemos $\frac{dy}{dx}$ si $x^3 + 2x^2y^2 - 2x + y - 3 = 0$.

La ecuación está en la forma $F(x, y) = 0$. Lo primero es verificar que estamos en las condiciones del teorema:

3.13 Derivación de funciones definidas implícitamente

1. $(0, 3)$ es un punto en el cual $F(0, 3) = 0$
2. $F_x = 3x^2 + 4xy^2 - 2$, $F_y = 4x^2y + 1$ son continuas en $(0, 3)$
3. $F_y(0, 3) = 1 \neq 0$

Se sigue que podemos hallar la derivada. De hecho, se tiene

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{3x^2 + 4xy^2 - 2}{1 + 4x^2y}$$

Siendo la derivada en el punto

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(0,3)} = -\frac{-2}{1} = 2$$

Ejemplo 3.13.3. Determinar un punto en el cual el campo $F(x, y, z) = \cos x^2y - yz^3 + xz^2 = 0$ sea diferenciable y hallar $\frac{\partial x}{\partial z}$.

La función dada está en forma implícita. Un punto que la anule es $(-1, 0, 1)$. Las derivadas parciales son:

1. $F_x = -2xy \operatorname{sen} x^2y + z^2$, $F_y = -x^2 \operatorname{sen} x^2y - z^3$, $F_z = -3yz^2 + 2xz$
2. $F_z = -3yz^2 + 2xz \implies \left. F_z \right|_{(-1,0,1)} = -2 \neq 0$

En consecuencia, las derivadas en el punto $(-1, 0, 1)$ son:

$$\frac{\partial x}{\partial z} = -\frac{F_z}{F_x} = -\frac{-3yz^2 + 2xz}{-2xy \operatorname{sen} x^2y + z^2} = 2$$

Generalización: Para un campo $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, y $x_n = g(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$, y $\frac{\partial f}{\partial x_n} \neq 0$ se tiene

$$\frac{\partial x_n}{\partial x_1} = -\frac{F_{x_1}}{F_{x_n}}, \quad \frac{\partial x_n}{\partial x_2} = -\frac{F_{x_2}}{F_{x_n}}, \quad \dots, \quad \frac{\partial x_n}{\partial x_{n-1}} = -\frac{F_{x_{n-1}}}{F_{x_n}}$$

Interpretación Geométrica

Geoméricamente el teorema de la función implícita señala que, dada una superficie $F(x, y, z) = 0$ con la función F de clase ζ^1 (primera derivada continua), y dado un punto \vec{x}_0 en donde el plano tangente no es paralelo al eje z ($F_z \neq 0$), entonces en una vecindad $V(\vec{x}_0)$, la superficie tiene una representación única de la forma $z = f(x, y)$. Condiciones análogas se mantienen para tener representaciones únicas en las formas $x = f(y, z)$ e $y = f(x, z)$.

Interpretación Algebraica

En términos algebraicos, el teorema se interpreta en la forma, de que dada una ecuación $F(x, y, z) = 0$ bajo las condiciones por él impuestas, entonces es posible resolver esta ecuación para z en términos de x e y .

Ejemplo 3.13.4. Probemos que $xz^3 + yz + 6 = 0$ se puede resolver para z en la vecindad $V(0, 2, -3)$ y hallemos las derivadas parciales z_x, z_y .

Si $F(x, y, z) = xz^3 + yz + 6$, entonces $F(0, 2, -3) = 0$ y $F_z(0, 2, -3) = 2 \neq 0$. De donde se sigue que es posible hallar las derivadas parciales. Ellas son:

$$\begin{aligned} \blacksquare z_x &= -\frac{z^3}{3xz^2 + y} \implies z_x(0, 2, -3) = \frac{27}{2} \\ \blacksquare z_y &= -\frac{z}{3xz^2 + y} \implies z_y(0, 2, -3) = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

3.13.1. Sistema de funciones implícitas

Es posible extender la derivación implícita a un sistema de funciones. Veamos el caso en que las ecuaciones

$$F(x, y, u, v) = 0, \quad G(x, y, u, v) = 0 \tag{3.10}$$

definen u y v como funciones de x e y . Derivemos parcialmente cada ecuación con respecto de x , y también con respecto de y . Se tiene

$$F_x + F_u u_x + F_v v_x = 0, \quad F_y + F_u u_y + F_v v_y = 0 \tag{3.11}$$

$$G_x + G_u u_x + G_v v_x = 0, \quad G_y + G_u u_y + G_v v_y = 0 \tag{3.12}$$

Al resolver separadamente estos sistemas, y sin conocer explícitamente las funciones u y v , se encuentran las derivadas parciales. Los determinantes de la forma

$$J = \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}$$

se llaman **Jacobianos**. Por tratarse de un sistema, es requisito indispensable que este Jacobiano no sea nulo, en el punto que se especifique, para poder hallar u_x y u_y .

Ejemplo 3.13.5. Determinemos si las ecuaciones $2x - y + u^3 - v^2 = 1$, $x + y + u^2 + v^3 = 4$ se pueden resolver para $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ en una vecindad $V(1, 1)$, en la cual $u(1, 1) = v(1, 1) = 1$. Si es así, vamos a hallar $\frac{\partial u}{\partial x}$ y $\frac{\partial v}{\partial y}$ en $(1, 1)$.

3.13 Derivación de funciones definidas implícitamente

En primer lugar verificamos que el jacobiano del denominador es distinto de cero en el punto $(1, 1)$.

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} F_u F_v \\ G_u G_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3u^2 - 2v \\ 2u3v^2 \end{vmatrix} = 9u^2v^2 + 4uv = 13 \neq 0$$

Luego, el sistema se puede resolver para u_x y v_x . Se tiene

$$\begin{aligned} 2 + 3u^2 u_x - 2v v_x &= 0 \quad | \cdot 3v \\ 1 + 2u u_x + 3v^2 v_x &= 0 \quad | \cdot 2 \end{aligned}$$

al sumar y factorizar, $u_x(1, 1) = -\frac{2 + 6v}{4u + 9u^2v} = -\frac{8}{13}$ y $v_x = -\frac{1}{13}$

A continuación un par de resultados que involucran Jacobianos. El primero de ellos es muy semejante a la regla de la cadena, y el segundo, consecuencia del primero, permite hallar el Jacobiano de la inversa sin conocer explícitamente la inversa.

Proposición 3.13.6. Sean $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ con x e y funciones de las variables independientes r y s , entonces

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(r, s)} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, s)}$$

Para probar esto tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, s)} &= \begin{vmatrix} u_x u_y \\ v_x v_y \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_r x_s \\ y_r y_s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_x x_r + u_y y_r & u_x x_s + u_y y_s \\ v_x x_r + v_y y_r & v_x x_s + v_y y_s \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} u_r u_s \\ v_r v_s \end{vmatrix} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(r, s)} \end{aligned}$$

Proposición 3.13.7. Si $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ se pueden resolver para obtener relaciones inversas $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, entonces

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \cdot \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = 1$$

Para probar esto sólo basta cambiar las variables r y s por u y v en la conclusión de la proposición anterior, ya que de esta forma, el segundo miembro de ella corresponde al primero en esta proposición. Como además

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} 10 \\ 01 \end{vmatrix} = 1$$

entonces

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \cdot \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = 1$$

3.14. Aproximación local de Taylor

Como es de todos conocido, los polinomios son funciones muy fáciles de estudiar -por ejemplo, son fáciles de evaluar, de derivar, integrar, etc-. Por este motivo a lo largo de la historia ha sido grande el interés por tratar de “aproximar” algunas funciones por polinomios. Cuando una función resulta difícil de evaluar con exactitud, se intenta buscar un polinomio que se le parezca y se usa dicho polinomio en su lugar. En este proceso es obvio que se pierde la exactitud de cálculo y se gana la operatividad. Las aproximaciones de una función mediante polinomios que nos ocupan será de tipo local, en el sentido de que ellas se basan en la construcción de un polinomio que coincida con la función de partida y con algunas de sus derivadas en un único punto. En las proximidades de ese punto el polinomio toma valores muy parecidos a la función, pero no necesariamente iguales, y lejos de ese punto el polinomio no tiene por qué parecerse a la función.

3.14.1. En funciones de una variables

Se sabe que si una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y derivable en un punto x_0 , la recta más parecida a la función en un entorno de x_0 es la recta tangente y su ecuación es $y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Dicha recta define un polinomio $P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ que verifica $P_1(x_0) = f(x_0)$ y $P_1'(x_0) = f'(x_0)$. Geométricamente esto significa que la recta pasa por el mismo punto que la función en x_0 y además, la inclinación de la función en ese punto es la misma que la de la recta. El polinomio $P_1(x)$ es una primera aproximación de la función $f(x)$ y cabe esperar que al aumentar su grado de algún modo, es decir al construir un polinomio

$$P_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + a(x - x_0)^2$$

con un valor de a adecuado, se tenga un polinomio que se parezca aún más a $f(x)$. En concreto, si $f(x)$ es dos veces derivable en x_0 y se calcula a imponiendo que $P_2(x_0) = f(x_0)$ y $P_2'(x_0) = f'(x_0)$, se tiene un polinomio de grado dos que verifica

$$P_2(x_0) = f(x_0), \quad P_2'(x_0) = f'(x_0), \quad P_2''(x_0) = f''(x_0)$$

Geométricamente, esto se traduce en que el polinomio $P_2(x)$ tiene una curvatura o concavidad muy parecida a la de $f(x)$ en un entorno de x_0 . Tal polinomio es de la forma

$$P_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$$

Si $f(x)$ es n veces derivable en x_0 se puede repetir este proceso y obtener un polinomio de grado n .

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Tal polinomio se llama de Taylor. Si $x_0 = 0$, el polinomio se denomina de **Maclaurin**.

3.14.2. En funciones de varias variable

La idea que queremos desarrollar es una generalización natural de lo que hemos hecho en el caso de las funciones de una variable. Para hacer gradualmente este proceso de generalización, empezamos por considerar el caso de una función de dos variables, $z = f(x, y)$, que queremos aproximar cerca de un punto $p = (x_0, y_0)$ mediante polinomios.

Sabemos que la estrategia para obtener aproximaciones más y más precisas consiste en considerar polinomios de grado cada vez más alto. El polinomio de grado uno de una función $z = f(x, y)$ es, obviamente, el polinomio que define a su plano tangente. De manera que, si llamamos $T_1(x, y)$ a ese polinomio de grado 1 en el punto p , se tiene

$$T_1(x, y) = f(x_0, y_0) + D_1f(x_0, y_0)(x - x_0) + D_2f(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Si hacemos $x - x_0 = dx$ e $y - y_0 = dy$, entonces podemos escribir

$$T_1(x, y) = f(x_0, y_0) + D_1f(x_0, y_0) dx + D_2f(x_0, y_0) dy$$

Como un plano es un objeto lineal, no puede detectar fenómenos como la curvatura. Si queremos obtener una aproximación más precisa y con más información, debemos considerar un polinomio de grado superior.

Para llegar a este polinomio de grado superior lo hacemos mediante la diferencial. Para el campo $z = f(x, y)$ sabemos que su diferencial es

$$dz = d f = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

Vamos a determinar la diferencial segunda, teniendo presente que ella existe si las segundas derivadas existen y son continuas en el punto a considerar, y que la diferencial primera es función de las variables x e y .

$$\begin{aligned} d^2f = d(df) &= d \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \right) = d \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) dx + d \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) dy \\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dy \right) dx + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy \right) dy \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 \end{aligned}$$

Esta diferencial se puede escribir en la forma

$$d^2f = \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} \right)^{(2)} f$$

en donde el exponente indica que después de elevar al cuadrado se deben reemplazar las potencias y productos por índices de derivación. En general, si las derivadas parciales n -ésima existen y son continuas en el punto considerado, se tiene

$$d^n f = \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} \right)^{(n)} f$$

Definición 3.14.1. (Polinomio de Taylor de grado dos)

Si $z = f(x, y)$ es de clase ζ^2 en el punto (x_0, y_0) , entonces su polinomio de Taylor de grado dos en el punto es

$$T_2(x, y) = f(x_0, y_0) + D_1 f(x_0, y_0)(x - x_0) + D_2 f(x_0, y_0)(y - y_0) + \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (x - x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} (x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} (y - y_0)^2 \right]$$

En la segunda línea de esta fórmula aparecen los términos de grado dos, que involucran a las derivadas segundas de f en (x_0, y_0) . Como puede verse, los términos de grado menor coinciden con los del polinomio de Taylor de orden uno. Esta es una propiedad general de los polinomios de Taylor, y que ya conocemos en el caso de funciones de una variable: al aumentar el grado del polinomio se añaden nuevos términos a los ya conocidos.

En general, la aproximación de Taylor, de orden n , para $f(x, y)$ en el punto (a, b) (en forma diferencial) es:

$$f(x, y) \sim T_n(x, y) = f(a, b) + \frac{df(a, b)}{1!} + \frac{d^2 f(a, b)}{2!} + \dots + \frac{d^n f(a, b)}{n!}$$

Ejemplo 3.14.2. Hallemos el polinomio de Taylor T_3 de la función $f(x, y) = e^{2x} \cos y$ en $(0, 0)$.

Para simplificar hacemos uso de la notación con subíndices para derivadas parciales. El polinomio de Taylor para $f(x, y)$ en $(0, 0)$ tiene la forma

$$f(x, y) = f(0, 0) + x f_x(0, 0) + y f_y(0, 0) + \frac{1}{2!} \left(x^2 f_{xx} + 2xy f_{xy} + y^2 f_{yy} \right) (0, 0) + \frac{1}{3!} \left(x^3 f_{xxx} + 3x^2 y f_{xxy} + 3xy^2 f_{xyy} + y^3 f_{yyy} \right) (0, 0)$$

Ahora se calculan y evalúan en $(0, 0)$ las derivadas

$$\begin{aligned} f(x, y) &= e^{2x} \cos y \implies f(0, 0) = 1 \\ f_x(x, y) &= 2e^{2x} \cos y \implies f_x(0, 0) = 2 \\ f_y(x, y) &= -e^{2x} \sen y \implies f_y(0, 0) = 0 \\ f_{xx}(x, y) &= 4e^{2x} \cos y \implies f_{xx}(0, 0) = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_{xy}(x, y) &= -2e^{2x} \operatorname{sen} y \implies f_{xy}(0, 0) = 0 \\
 f_{yy}(x, y) &= -e^{2x} \cos y \implies f_{yy}(0, 0) = -1 \\
 f_{xxx}(x, y) &= 8e^{2x} \cos y \implies f_{xxx}(0, 0) = 8 \\
 f_{xxy}(x, y) &= -4e^{2x} \operatorname{sen} y \implies f_{xxy}(0, 0) = 0 \\
 f_{xyy}(x, y) &= -2e^{2x} \cos y \implies f_{xyy}(0, 0) = -2 \\
 f_{yyy}(x, y) &= e^{2x} \operatorname{sen} y \implies f_{yyy}(0, 0) = 0
 \end{aligned}$$

Al sustituir estos valores en la serie de Taylor se obtiene

$$e^{2x} \cos y = 1 + 2x + \frac{1}{2!}(4x^2 - y^2) + \frac{1}{3!}(8x^3 - 6xy^2)$$

Observar que si $y = 0$, se tiene el desarrollo de la función de una variable $f(x) = e^{2x}$.

3.15. Máximos y Mínimos

En el cálculo de una variable, la segunda derivada de la función permite determinar la existencia de un máximo o de un mínimo, como así mismo, conocer la clase de concavidad que presenta la función. Así por ejemplo, si $f''(x_0) > 0$, entonces la curva es cóncava hacia arriba en una vecindad de x_0 , y la recta tangente se encuentra entonces bajo la gráfica de f . De forma análoga, si $f''(x_0) < 0$ la curva tiene su concavidad hacia abajo en la vecindad de x_0 , y la recta tangente está sobre la gráfica de la función. (figura 3.11)

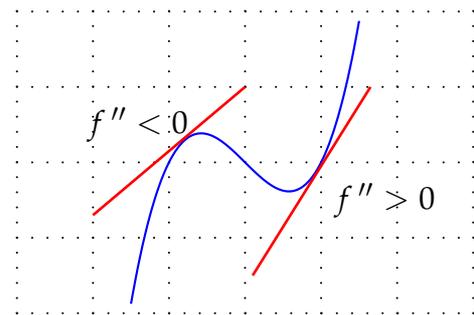


figura 3.12

Para una función de dos variables (campo escalar bidimensional), la diferencial segunda cumple un rol similar. En efecto, sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $z = f(x, y)$ campo escalar. El polinomio de Taylor de este campo en el punto (x_0, y_0) hasta la diferencial de orden dos es

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0) + \frac{1}{2!}d^2f(x_0, y_0) \tag{3.13}$$

Por otra parte, el plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto (x_0, y_0) es, como sabemos

$$z = f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0) \tag{3.14}$$

Al comparar las ecuaciones 3.13 y 3.14 se observa que si $d^2f(x_0, y_0) > 0$ el campo f se encuentra sobre el plano tangente en una vecindad de (x_0, y_0) para $(x, y) \neq (x_0, y_0)$. De igual manera, si $d^2f(x_0, y_0) < 0$ el campo f está bajo el plano tangente en una vecindad de (x_0, y_0) para $(x, y) \neq$

(x_0, y_0) . Esto resulta de particular importancia ya que de esta forma podemos decidir si un punto es máximo o mínimo observando si el plano tangente se encuentra sobre o bajo la superficie en ese punto. Este es el problema que pasamos a ver de inmediato.

Definición 3.15.1. El campo escalar $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tiene:

- Un **máximo local** en el punto $\vec{x}_0 \in A$, si y sólo si $f(\vec{x}) \leq f(\vec{x}_0)$, $\forall \vec{x} \in V(\vec{x}_0)$
- Un **mínimo local** en el punto \vec{x}_0 si y sólo si $f(\vec{x}) \geq f(\vec{x}_0)$, $\forall \vec{x} \in V(\vec{x}_0)$
- Un **máximo absoluto** en el conjunto A , si existe por lo menos un punto $\vec{x}_0 \in A$ tal que

$$f(\vec{x}) \leq f(\vec{x}_0), \forall \vec{x} \in A$$

- Un **mínimo absoluto** en el conjunto A , si existe por lo menos un punto $\vec{x}_0 \in A$ tal que

$$f(\vec{x}) \geq f(\vec{x}_0), \forall \vec{x} \in A$$

- Todo número que sea máximo o mínimo relativo del campo f se llama **extremo relativo** de f .
- Un punto crítico que no sea un extremo relativo se llama **punto de silla**. Debe su nombre a que las funciones en estos puntos tienen forma de silla de montar.

Tal como en el caso de una variable, si el campo f posee un extremo en un punto \vec{x}_0 , y las derivadas parciales existen en $V(\vec{x}_0)$, entonces ellas deben ser nulas. Esta es una condición necesaria. Para comprender mejor esto, veamos como funciona en el caso del campo $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $(x, y) \mapsto z = f(x, y)$, y posteriormente vemos el caso general.

Sea (a, b) el punto candidato a extremos, entonces fijando $y = b$, se tiene la función $f(x, b)$ de sólo una variable. Si la derivada en $x = a$ no es cero, entonces la función es estrictamente monótona y no habría extremo en (a, b) . El mismo argumento sirve para probar que la otra derivada parcial en (a, b) debe ser cero. Es decir

$$f_x(a, b) = 0 \quad , \quad f_y(a, b) = 0 \tag{3.15}$$

Geoméricamente, si el campo f es diferenciable, entonces la ecuación 3.15 indica que el plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ es **horizontal**. Esto es, paralelo al plano xy . En efecto,

$$(x - a, y - b, z - f(a, b)) \cdot (f_x, f_y, -1)(a, b) = 0 \implies z = f(a, b)$$

Teorema 3.15.2. Si el campo $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tiene un valor extremo en $\vec{x}_0 \in \text{Int } A$, y si $D_k f(\vec{x}_0)$ existe, entonces $D_k f(\vec{x}_0) = 0$

Demostración

Suponemos que f tiene un mínimo local en \vec{x}_0 entonces para todo vector coordenado unitario $\vec{u}_k \in \mathbb{R}^n$, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$-\epsilon < h < \epsilon \implies f(\mathbf{x}_0) \leq f(\mathbf{x}_0 + h \mathbf{u}_k)$$

Para $0 < h < \epsilon$ tenemos

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(\mathbf{x}_0 + h \mathbf{u}_k) - f(\mathbf{x}_0)}{h} \geq 0$$

Esto es

$$D_k f(\mathbf{x}_0) = Df(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{u}_k \geq 0 \quad (3.16)$$

Para $-\epsilon < h < 0$ tenemos

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(\mathbf{x}_0 + h \mathbf{u}_k) - f(\mathbf{x}_0)}{h} = Df(\vec{x}_0) \cdot (-\vec{u}_k) \geq 0 \quad (3.17)$$

De las ecuaciones 3.16 y 3.17 se tiene $D_k f(\vec{x}_0) = 0$

Definición 3.15.3. Aquellos puntos en donde **todas** las derivadas parciales $D_k f$ son cero se llaman **puntos críticos** de f

En la práctica, la búsqueda de extremos comienza por resolver el sistema formado por todas las derivadas parciales igualadas a cero, ya que esa es la condición necesaria para su existencia. Veamos un ejemplo para el caso bidimensional.

Ejemplo 3.15.4. Hallar puntos críticos del campo $f(x, y) = 2x^2 + 4xy + 5y^2 + 2x - y$

En primer lugar, hay que anular las derivadas parciales pues, de allí salen los potenciales puntos de extremo. Se tiene

$$\begin{aligned} D_1 f(\vec{x}) &= 4x + 4y + 2 = 0 \\ D_2 f(\vec{x}) &= 4x + 10y - 1 = 0 \end{aligned}$$

Al resolver el sistema se encuentra que $(-1, \frac{1}{2})$ es un punto crítico, y que $f(-1, \frac{1}{2}) = \frac{5}{4}$ es un probable valor extremo.

El teorema 3.15.2 indica donde se deben buscar los valores extremos pero no señala su naturaleza. Si se recurre a la gráfica de la superficie, es posible que se determine la naturaleza del punto crítico, pero como no siempre es fácil graficar, nos encontramos sin métodos para decidir que clase de punto extremo es ese punto.

3.15.1. Criterio de la segunda derivada

Las condiciones **suficientes** que garanticen la existencia de extremos relativos se encuentran a partir de la fórmula de Taylor y se conoce como "criterio de la segunda derivada". Veamos esto para el campo escalar $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Definición 3.15.5. Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ campo escalar definido en el abierto A , tal que todas sus derivadas de segundo orden existen en punto $x_0 \in A$. Se define la matriz Hessiana como

$$H(f) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

Además, si f es de clase ζ^2 , entonces la matriz hessiana esta bien definida. Esta matriz debe su nombre al matemático alemán Ludwig Otto **Hesse** (1811-1874).

Definición 3.15.6. Sea $[a_{ij}]$ con $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$ una matriz simétrica y consideremos las submatrices

$$A_1 = [a_{11}], \quad A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad A_n = A$$

Definimos $\Delta_k = \det(A_k), k = 1, 2, 3, \dots, n$

1. A se dice **definida positiva** si y sólo si $\Delta_k > 0, \forall k$.
2. A se dice **definida negativa** si y sólo si los Δ_k tienen signos alternados, comenzando con $\Delta_k < 0$.

Teorema 3.15.7. (criterio de la segunda derivada)

Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ campo escalar de clase ζ^3 , definido en un abierto $A \subset \mathbb{R}^n$, \vec{x}_0 punto crítico.

1. Si $H(\vec{x}_0)$ es definida positiva, entonces \vec{x}_0 es un punto de mínimo local.
2. Si $H(\vec{x}_0)$ es definida negativa, entonces \vec{x}_0 es un punto de máximo local.

3.15.2. Hessiana en dos dimensiones

Teorema 3.15.8. (criterio de la segunda derivada)

Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ campo escalar de clase ζ^3 definido sobre un abierto A de \mathbb{R}^2 . Sea $\vec{x}_0 \in A$ punto crítico. La matriz

$$H(f) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

llamada **matriz Hessiana**, afirma que

1. $H(f(\vec{x}_0))$ definida positiva $\implies f$ tiene un mínimo local en \vec{x}_0 .

3.15 Máximos y Mínimos

2. $H(f(\vec{x}_0))$ definida negativa $\implies f$ tiene un máximo local en \vec{x}_0 .
3. $|H(f(\vec{x}_0))| < 0 \implies$ existe un punto de silla.
4. $|H(f(\vec{x}_0))| = 0 \implies$ no hay información.

Esta matriz Hessiana tiene su origen en la segunda diferencial del campo f , ya que si $\vec{x}_0 = (a, b)$ es el punto crítico, entonces

$$d^2f(a, b) = \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial x^2} (x - a)^2 + 2 \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial x \partial y} (x - a)(y - b) + \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial y^2} (y - b)^2$$

es una forma cuadrática en las variables $(x - a)$ e $(y - b)$. En efecto, al escribir la diferencial segunda del campo escalar en la forma

$$d^2f(a, b) = (x - a, y - b) \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix}$$

Se observa que la matriz asociada a la forma cuadrática es, exactamente, la Hessiana. La condición de que sea definida positiva equivale a que $d^2f(a, b) > 0$.

Si bien la notación empleada para las derivadas parciales es la más común y elegante, también haremos uso, por simplicidad, de la siguiente para dos y tres variables:

$$H(f) = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} \quad H(f) = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{bmatrix}$$

3.15.3. Hessiana en tres dimensiones

Definición 3.15.9. (criterio de la segunda derivada)

- La matriz Hessiana H es definida positiva si satisface

$$0 < |H| = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{vmatrix}, \quad 0 < \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}, \quad f_{xx} > 0$$

Si esto se satisface para la Hessiana en un punto, entonces el campo escalar $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tiene un **mínimo** relativo en ese punto.

- La matriz Hessiana H está definida negativa si

$$|H| < 0, \quad 0 < \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}, \quad f_{xx} < 0$$

Si esto se satisface para la Hessiana en un punto, entonces el campo escalar $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tiene un **máximo** relativo en el punto.

Ejemplo 3.15.10. Sea $f(x, y) = 2x^2 + 4xy + 5y^2 + 2x - y$ campo escalar. Determinar la naturaleza de sus puntos críticos

Recordar que este problema ya fue considerado, encontrando que tiene un único punto crítico; $(-1, \frac{1}{2})$. A partir de las derivadas parciales de primer orden

$$\begin{aligned} D_1 f(x) &= 4x + 4y + 2 \\ D_2 f(x) &= 4x + 10y - 1 \end{aligned}$$

se halla que las derivadas de orden superior tienen los siguientes valores.

$$D_{11} = 4, D_{12} = D_1(D_2) = 4, D_{22} = 10, D_{21} = D_2(D_1) = 4$$

Luego la matriz Hessiana tiene la forma

$$Hf(-1, \frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$$

De la cual

$$|Hf(-1, \frac{1}{2})| > 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$$

Esto es, $Hf(-1, \frac{1}{2})$ **definida positiva**. Luego $f(-1, \frac{1}{2}) = -\frac{5}{4}$ es un mínimo.

Ejemplo 3.15.11. Hallar las dimensiones de un container rectangular abierto de volumen máximo, si el área de la superficie de dicho container es de 12 metros.

Sea $V = xyz$ el volumen del container en donde x, y, z son sus lados, y sea $A = xy + 2yz + 2xz = 12$ el área de la superficie del container. Al reemplazar en el volumen el valor de z que se obtiene en A se reduce en una variable el problema. Lo cual, por supuesto, simplifica los cálculos. Se tiene

$$z = \frac{12 - xy}{2(x + y)} \implies V = \frac{xy(12 - xy)}{2(x + y)}$$

Las primeras derivadas de V son

$$\begin{aligned} D_1 V &= \frac{(y(12 - xy) - xy^2)(x + y) - xy(12 - xy)}{2(x + y)^2} \\ &= \frac{y^2(12 - x^2 - 2xy)}{2(x + y)^2} \\ D_2 V &= \frac{(x(12 - xy) - x^2y)(x + y) - xy(12 - xy)}{2(x + y)^2} \\ &= \frac{x^2(12 - y^2 - 2xy)}{2(x + y)^2} \end{aligned}$$

Igualando a cero estas derivadas se obtiene el sistema

$$\begin{aligned}x^2 + 2xy &= 12 \\y^2 + 2xy &= 12\end{aligned}$$

que al resolverlo nos indica que $(2, 2)$ es el único punto crítico. Ahora se forma la matriz Hessiana con las derivadas mixtas y de orden 2.

$$\begin{aligned}D_{11} &= \frac{-y^2(12 + y^2)}{(x + y)^3} \\D_{22} &= \frac{-x^2(x^2 + 12)}{(x + y)^3} \\D_{21} &= D_{12} = \frac{xy(12 - x^2 - 3xy - y^2)}{(x + y)^3}\end{aligned}$$

Al evaluarlas en el punto $(2, 2)$ se obtiene la Hessiana

$$Hf(2, 2) = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

Como $|Hf(2, 2)| = \frac{3}{4}$, $D_{11} < 0$, entonces H es definida negativa y en consecuencia hay **máximo** en el punto $(2, 2, 1)$, y éste es $V(2, 2, 1) = 4$

Esta clase de problemas, en el que los valores extremos del campo están sujetos a una restricción (satisfacer que el área sea de 12 metros), son frecuentes en campos $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Generalmente son tratados mediante los llamados *Multiplicadores de Lagrange*.

Ejemplo 3.15.12. Hallar los extremos del campo $w = 5x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy + 2z$, y determinar su naturaleza.

Derivamos e igualamos a cero las derivadas parciales de w . Se tiene

$$\begin{aligned}w_x &= 10x + 2y = 0 \\w_y &= 2x + 4y = 0 \\w_z &= 2 + 2z = 0\end{aligned}$$

Al resolver este sistema se obtiene el punto crítico $(0, 0, -1)$. Ahora formamos la Hessiana en el punto. Para ello necesitamos las derivadas mixtas y de orden superior

$$\begin{aligned}w_{xx} &= 10, w_{xy} = 2, w_{xz} = 0 \\w_{yy} &= 4, w_{yx} = 2, w_{yz} = 0 \\w_{zz} &= 2, w_{zx} = 0, w_{zy} = 0\end{aligned}$$

A partir de esto

$$H(0,0,-1) = \begin{vmatrix} 102 & 0 \\ 24 & 0 \\ 00 & 2 \end{vmatrix}$$

Como $w_{xx} = 10 > 0$, $|H| = 72 > 0$, $\left| \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \right| = 36 > 0$, entonces H es

definida positiva, lo que implica que en el punto $(0,0,-1)$ existe un **mínimo**.

3.16. Multiplicadores de Lagrange

Se quieren determinar los valores extremos del campo escalar f cuando la variable x está restringida a actuar en algún subconjunto del dominio de f . Tales problemas se presentan con frecuencia en las aplicaciones, y no son sencillos de resolver. Exponemos a continuación el método de los multiplicadores de Lagrange¹ para el caso bidimensional. Su demostración general es más bien propia del análisis matemático, razón por la cual se omite.

Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ campo escalar de clase ζ^1 , sujeto a satisfacer la relación $g(x,y) = 0$, g de clase ζ^1 es llamada **restricción**. Esta función g corresponde a una curva en el plano.

En primer lugar, sabemos que $\nabla g = (D_1g, D_2g) \neq 0$ es perpendicular a la curva en todos sus puntos y que $\nabla f = (D_1f, D_2f)$ apunta en la dirección de máximo crecimiento de f . Ahora bien, en un punto (x_0, y_0) de la curva $g(x,y) = 0$ en donde f tiene un extremo local, la derivada direccional de f a lo largo de la curva debe ser cero ($\nabla f \cdot \vec{u} = D_{\vec{u}}f = 0$). Esto significa que ∇f es normal a la curva. Luego, ∇f y ∇g son paralelos en dicho punto. Esto es, existe un $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla f = \lambda \nabla g \iff (D_1f, D_2f) = \lambda(D_1g, D_2g) \quad (3.18)$$

Esta ecuación más la restricción $g(x,y) = 0$, da origen a tres ecuaciones

$$D_1f = \lambda D_1g; \quad D_2f = \lambda D_2g; \quad g(x,y) = 0 \quad (3.19)$$

las que pueden ser resueltas para x, y, λ . Estas tres ecuaciones forman parte de las condiciones de los multiplicadores de Lagrange.

Si consideramos la función $H(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$ observamos que al anular las derivadas parciales de primer orden de H (candidatos a puntos críticos), las ecuaciones en 3.19 son equivalentes a las siguientes

$$\frac{\partial H}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial H}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial H}{\partial \lambda} = 0 \quad (3.20)$$

¹Joseph Louis Lagrange. Matemático Francés (1736-1813)

3.16 Multiplicadores de Lagrange

La variable λ se llama **multiplicador de Lagrange**, y un punto que satisfaga la ecuación 3.20 es candidato a máximo o mínimo del campo f sujeto a la restricción $g(x, y) = 0$. Cuando existe sólo un punto crítico, las condiciones físicas o geométricas de él permiten decidir su naturaleza. La existencia de más de un punto crítico obliga a estudiar cada punto en particular mediante la Hessiana de la función de Lagrange en cada valor del parámetro λ obtenido.

Cuando existen n restricciones g_i se deben incluir en la función de Lagrange tantos multiplicadores como ecuaciones de enlace existan. Esto significa que se tiene una ecuación por resolver de la forma

$$H = f + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \cdots + \lambda_n g_n$$

Se debe tener presente que el número de restricciones debe ser menor que el de variables.

El siguiente link presenta una versión animada²

Ejemplo 3.16.1. Hallar los puntos del plano $2x - 2y + z = 4$ más próximos al origen.

Sea (x, y, z) el punto buscado, entonces la función a minimizar es

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Por simplicidad, vamos a considerar la función distancia al cuadrado. Esto es,

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

con la restricción $2x - 2y + z - 4 = 0$. Con esto se forma la ecuación $H(x, y, z, \lambda)$ siguiente

$$H(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda(2x - 2y + z - 4)$$

Ahora, al resolver el sistema de las derivadas parciales igualadas a cero,

$$\begin{cases} D_1 H = 2x - 2\lambda = 0 \\ D_2 H = 2y + 2\lambda = 0 \\ D_3 H = 2z - \lambda = 0 \\ D_4 H = -2x + 2y - z = -4 \end{cases}$$

se encuentra que $\lambda = x$, $\lambda = -y$, $\lambda = 2z$, que al reemplazar en la cuarta ecuación del sistema, dan como resultado que $\lambda = \frac{8}{9}$, valor que a su vez, entrega que

$$x = \frac{8}{9}; \quad y = -\frac{8}{9}; \quad z = \frac{4}{9}$$

Esto significa que el punto más próximo, en el plano, al origen de coordenadas es

$$\left(\frac{8}{9}, -\frac{8}{9}, \frac{4}{9}\right)$$

²<http://valle.fciencias.unam.mx/intermat/ArticuloLag/articuloPDFb.pdf>

y su distancia mínima es

$$f\left(\frac{8}{9}, -\frac{8}{9}, \frac{4}{9}\right) = \sqrt{\frac{64}{81} + \frac{64}{81} + \frac{16}{81}} = \frac{4}{3}$$

Ejemplo 3.16.2. Los cursos de dos ríos en la IX región se representan aproximadamente por la parábola $y = x^2$ y la recta $x - y = 2$. La Intendencia Regional, a petición de los pequeños agricultores de la zona, solicita un estudio que determine por cuales puntos debe trazarse un canal de mínima longitud que una ambos ríos.

Vamos a mostrar tres formas de resolver este problema.

Método 1

Vamos a minimizar la función distancia entre un punto $P_1(x_1, y_1)$ sobre la parábola y un punto $P_2(x_2, y_2)$ sobre la recta. Esto es

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

por simplicidad tomamos esta distancia al cuadrado. Es claro que este problema puede considerarse desde el punto de vista de los multiplicadores como un problema de optimización que involucra dos restricciones. Se tiene la siguiente ecuación de Lagrange.

$$H(x_1, y_1, x_2, y_2, \lambda_1, \lambda_2) = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - \lambda_1(y_1 - x_1^2) - \lambda_2(x_2 - y_2 - 2)$$

El sistema con derivadas parciales es:

$$\begin{aligned} (1) \quad D_1 H &= -2(x_2 - x_1) + 2x_1\lambda_1 = 2x_1(\lambda_1 + 1) - 2x_2 = 0 \\ (2) \quad D_2 H &= -2(y_2 - y_1) - \lambda_1 = 2y_1 - 2y_2 - \lambda_1 = 0 \\ (3) \quad D_3 H &= 2(x_2 - x_1) - \lambda_2 = 2x_2 - 2x_1 - \lambda_2 = 0 \\ (4) \quad D_4 H &= 2(y_2 - y_1) + \lambda_2 = 2y_2 - 2y_1 + \lambda_2 = 0 \\ (5) \quad D_5 H &= y_1 - x_1^2 = 0 \\ (6) \quad D_6 H &= x_2 - y_2 - 2 = 0 \end{aligned}$$

Al sumar las ecuaciones (2) y (4) se obtiene $\lambda_1 = \lambda_2$, y de las ecuaciones (1) y (3) $2x_1\lambda_1 - \lambda_2 = 0$, con lo cual, al reemplazar aquí $\lambda_1 = \lambda_2$ tenemos

$$\lambda_1 = 0 \quad \vee \quad x_1 = \frac{1}{2}$$

si $\lambda_1 = 0$, entonces $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$. Al considerar esto en las ecuaciones (5) y (6) se tiene

$$\begin{aligned} x_2 = 2 + y_2 \implies x_1 = 2 + y_1 &\implies y_1 - (2 + y_1)^2 = 0 \\ &\implies y_1^2 - 3y_1 + 4 = 0 \end{aligned}$$

esta ecuación no tiene soluciones reales, por lo cual descartamos que $\lambda_1 = 0$. Veamos que sucede si consideramos ahora $x_1 = \frac{1}{2}$. Al reemplazar en la ecuación (5) resulta $y_1 = \frac{1}{4}$. Tenemos así que el

punto sobre la parábola es $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$. Para hallar el punto en la recta consideramos las ecuaciones (3) y (4) para tener

$$\begin{aligned} 2x_2 - 2x_1 - \lambda_2 = 0 &\implies 2x_2 - 1 - \lambda_2 = 0 \\ 2y_2 - 2y_1 + \lambda_2 = 0 &\implies 2y_2 - \frac{1}{2} + \lambda_2 = 0 \end{aligned}$$

Al sumar ambas ecuaciones se obtiene $x_2 + y_2 = \frac{3}{4}$, de donde $y_2 = \frac{3}{4} - x_2$, lo que al reemplazar en la ecuación (6) entrega $x_2 = \frac{11}{8}$. Ahora, con este valor de x_2 se encuentra que $y_2 = -\frac{5}{8}$. Luego, el punto sobre la recta tiene coordenadas $\left(\frac{11}{8}, -\frac{5}{8}\right)$. La respuesta al problema es que por esos puntos que hemos hallado debe ser trazado el canal de mínima longitud.

Método 2

Si consideramos que (x, y) es el punto sobre la parábola por donde debe trazarse el canal, entonces su distancia a la recta es

$$d = \frac{x - y - 2}{\sqrt{2}}$$

distancia que vamos a optimizar mediante multiplicadores.

$$H(x, y, \lambda) = \frac{x - y - 2}{\sqrt{2}} + \lambda(y - x^2)$$

A partir de esta ecuación tenemos el sistema

$$\begin{cases} D_1H = \frac{1}{\sqrt{2}} - 2\lambda = 0 \\ D_2H = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \lambda = 0 \\ D_3H = y - x^2 = 0 \end{cases}$$

del cual se obtiene que $x = \frac{1}{2}$, $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $y = \frac{1}{4}$. De esta forma, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ es el punto crítico sobre la parábola. Para hallar el punto en la recta se minimiza la distancia (al cuadrado)

$$d^2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2$$

Usando Lagrange nuevamente, se tiene la ecuación

$$H(x, y, \lambda) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2 + \lambda(x - y - 2)$$

La que da origen al sistema

$$D_1H = 2\left(x - \frac{1}{2}\right) + \lambda = 0$$

$$D_2H = 2\left(y - \frac{1}{4}\right) - \lambda = 0$$

$$D_3H = x - y - 2 = 0$$

de las ecuaciones (1) y (2) se halla que $y = \frac{3}{4} - x$, la que al ser reemplazada en la ecuación 3) entrega los valores $x = \frac{11}{8}$, $y = -\frac{5}{8}$. En consecuencia los puntos por los cuales debe trazarse el canal son $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ en la parábola, y $\left(\frac{11}{8}, -\frac{5}{8}\right)$ en la recta.

Observar que esta forma de resolver el problema es análoga a la anterior pues igual se tuvo que recurrir a las dos restricciones.

Método 3

Ahora vamos a apelar a nuestros conocimientos básicos de cálculo y geometría analítica. Al obtener la recta tangente a la parábola, con la misma pendiente de la recta dada, la mínima distancia será el segmento perpendicular en los puntos a determinar. Se tiene:

Pendiente de la recta tangente $y' = 2x$, pendiente de la recta dada $m = 1$. Luego, de $2x = 1$ se obtiene $x = \frac{1}{2}$, y de esto $y = \frac{1}{4}$, con lo cual el punto en la parábola es $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$. Ahora, la ecuación de la recta tangente en este punto es

$$y - \frac{1}{4} = 1\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

la cual es equivalente con $y = x - \frac{1}{4}$. La ecuación de la recta perpendicular a ésta en el punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ es $y - \frac{1}{4} = (-1)\left(x - \frac{1}{2}\right)$. O bien $y = \frac{3}{4} - x$.

Ahora se encuentra el punto de intersección de esta recta con la recta $y = x - 2$.

$$x - 2 = \frac{3}{4} - x \implies x = \frac{11}{8}$$

De esto, $y = -\frac{5}{8}$. Con lo cual el problema está resuelto.

3.17. Extremos Absolutos

Al igual que ocurría con las funciones de una variable, los extremos absolutos de una función de varias variables han de alcanzarse en alguno de los extremos relativos o en uno de los puntos de

la frontera del dominio. Ha de tenerse en cuenta que en el caso de regiones cerradas y acotadas (lo que en la literatura se suele llamar regiones compactas), el teorema de Weierstrass asegura que toda función continua alcanza sus extremos absolutos (y no únicamente relativos), por lo que cotejando los resultados obtenidos en el interior y en la frontera se puede determinar de manera directa cuáles son dichos extremos absolutos.

Ejemplo 3.17.1. Hallar máximo y mínimo absoluto del campo $z = x^3 + y^3 - 3xy$ en la región

$$R = \{(x, y) / 0 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 2\}$$

Tal como se indicó al principio de la sección, tenemos que estudiar que sucede en el interior de la región, y luego en su frontera. Veamos la existencia de valores extremos.

$$\begin{cases} D_1z = 3x^2 - 3y = 0 \\ D_2z = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases}$$

se obtienen $(0,0)$ y $(1,1)$ como puntos críticos. Al determinar su naturaleza tenemos que $D_{11}z = 6x$, $D_{12}z = -3$, $D_{22}z = 6y$. Con estos datos la Hessiana es

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} 2x - 1 & \\ & -12y \end{pmatrix}$$

En $(0,0)$ la Hessiana tiene determinante negativo, razón por la cual el campo en ese punto tiene un "punto de silla". En $(1,1)$ la matriz Hessiana viene definida positiva, por lo cual existe allí un mínimo relativo, siendo éste $z(1,1) = -1$. Visto lo que pasa en el interior de la región R , nos preocupamos ahora de ver que sucede en la frontera de R , la que es la unión de los conjuntos.

- $R_1 = \{(x, y) / x = 0, -1 \leq y \leq 2\}$
- $R_2 = \{(x, y) / x = 2, -1 \leq y \leq 2\}$
- $R_3 = \{(x, y) / y = -1, 0 \leq x \leq 2\}$
- $R_4 = \{(x, y) / y = 2, 0 \leq x \leq 2\}$

☞ Frontera $x = 0, -1 \leq y \leq 2$

Se intersecta $x = 0$ con la superficie. Eso genera la curva $z = y^3$, ya que

$$x = 0 \implies z = y^3 \implies z'(y) = 3y^2 = 0 \implies y = 0$$

Así, $y = 0$ es punto crítico. Veamos que sucede a izquierda y derecha de él.

$$z'(y) = 3y^2 \implies \begin{cases} z' > 0, y < 0 \\ z' > 0, y > 0 \end{cases}$$

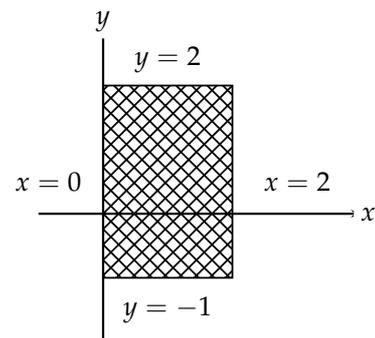


figura 3.13

Se concluye que en $(0, 0)$ no existe máximo ni mínimo (Punto de silla). En los extremos del intervalo se tiene, $z(-1) = -1$, $z(2) = 8$.

$$\Rightarrow \boxed{\text{Frontera } x = 2, -1 \leq y \leq 2}$$

$x = 2 \implies z = 8 + y^3 - 6y \implies z'(y) = 3y^2 - 6 = 0 \implies y = \pm\sqrt{2}$. Luego, $y = \sqrt{2}$ es el único punto crítico, ya que $y = -\sqrt{2}$ no pertenece al intervalo $(-1, 2)$.

Para este punto crítico tenemos que, $z'(1) < 0$, $z'(1,5) > 0$. Se concluye que en $(2, \sqrt{2})$ existe mínimo relativo ($z = 8 - 4\sqrt{2}$).

En los extremos del intervalo se tiene, $z(-1) = 13$, $z(2) = 4$.

$$\Rightarrow \boxed{\text{Frontera } y = -1, 0 \leq x \leq 2}$$

$y = -1 \implies z = x^3 - 1 + 3x \implies z'(x) = 3x^2 + 3 = 0 \implies \nexists$ punto crítico.

En los extremos del intervalo se tiene, $z(0) = -1$, $z(2) = 13$.

$$\Rightarrow \boxed{\text{Frontera } y = 2, 0 \leq x \leq 2}$$

$y = 2 \implies z = x^3 + 8 - 6x \implies z'(x) = 3x^2 - 6 = 0 \implies y = \sqrt{2}$

Para este punto crítico tenemos que, $z'(0) < 0$, $z'(1,5) > 0$. Se concluye que en $(\sqrt{2}, 2)$ existe un mínimo relativo ($z = 8 - 4\sqrt{2}$).

En los extremos del intervalo se tiene, $z(0) = 8$, $z(2) = 4$.

Conclusión:

El mínimo absoluto es -1 , y se encuentra en los puntos $(0, -1)$ y $(1, 1)$. El máximo absoluto es 13 y se halla en el punto $(2, -1)$.

3.18. Aplicaciones en Economía

Finalizamos lo referente a la determinación de valores extremos, con la aplicación de estos conceptos a la economía. En primer lugar damos a conocer algunas definiciones preliminares que constituyen el lenguaje habitual.

Función de Demanda

Si x e y son cantidades demandadas de dos artículos relacionados entre sí, de precios p y q respectivamente, entonces las funciones de **demanda** son

$$x = x(p, q), \quad y = y(p, q)$$

En la práctica, x, y, p, q son cantidades mayores o iguales que cero. La gráfica de estas funciones de demanda son superficies en \mathbb{R}^3 .

Demanda Marginal

Si $x = x(p, q)$, $y = (p, q)$, entonces las expresiones:

$$\frac{\partial x}{\partial p}, \quad \frac{\partial x}{\partial q}, \quad \frac{\partial y}{\partial p}, \quad \frac{\partial y}{\partial q}$$

se llaman, respectivamente, *Demanda Marginal parcial* de x respecto a p , de x respecto a q , de y respecto a p , y de y respecto a q .

En la práctica, las cantidades $\frac{\partial x}{\partial p}, \frac{\partial x}{\partial q}, \frac{\partial y}{\partial p}, \frac{\partial y}{\partial q}$, son negativas. Esto significa que si el precio crece, entonces la cantidad demandada decrece y viceversa.

Ejemplo 3.18.1. Si las funciones de demanda de dos artículos x e y son

$$x = 12 - 6p - 4q, \quad y = 10e^{-2p-3q}$$

entonces las demandas marginales son

$$\frac{\partial x}{\partial p} = -6, \quad \frac{\partial x}{\partial q} = -4, \quad \frac{\partial y}{\partial p} = -20e^{-2p-3q}, \quad \frac{\partial y}{\partial q} = -30e^{-2p-3q}$$

Función de Producción

La producción de un artículo requiere de varios factores de producción. Si la cantidad z de un artículo se produce utilizando cantidades x e y de dos factores de producción, entonces la **Producción** P es una ecuación de la forma

$$P = P(x, y)$$

Las expresiones $\frac{\partial P}{\partial x}$ y $\frac{\partial P}{\partial y}$ corresponden a las productividades marginal respecto de x e y , respectivamente.

Ejemplo 3.18.2. Si la función producción viene dada por $P = 15xy - 4x^2 - 6y^2$, entonces las productividades marginales en el punto $(3, 2)$ son

$$\frac{\partial P}{\partial x}(3, 2) = 6, \quad \frac{\partial P}{\partial y}(3, 2) = 21$$

Función de Costo

Si se producen cantidades x e y de dos artículos, entonces la función de **costo total** tiene la forma

$$C = C(x, y)$$

Los costo marginales, del costo total, respecto de x e y , corresponden a las expresiones

$$\frac{\partial C}{\partial x}, \quad \frac{\partial C}{\partial y}$$

Ejemplo 3.18.3. Si el costo total de dos artículos es $C = 120 + 10x^2 + 6y^2$, entonces los costos marginales parciales son

$$\frac{\partial C}{\partial x} = 20x, \quad \frac{\partial C}{\partial y} = 12y$$

La función de costo total puede expresarse también, en términos de un costo fijo y de un costo variable. Esto es,

$$C = C_F + C_V = C_F + x C_A + y C_B$$

Las expresiones C_A, C_B son costos unitarios.

Ejemplo 3.18.4. Una fábrica produce x unidades de un artículo A e y unidades de un artículo B . Sus costos unitarios son de \$5 y \$8 respectivamente. Si el costo fijo es de \$12, entonces la función de costo es

$$C = C_F + x C_A + y C_B = 12 + x \cdot 5 + y \cdot 8$$

Los costos marginales son

$$\frac{\partial C}{\partial x} = 5, \quad \frac{\partial C}{\partial y} = 8$$

Función de Ingreso

Si un producto A de x unidades posee una demanda $p = p(x)$. Otro producto, independiente, B de y unidades posee una demanda $q = q(y)$, entonces el **Ingreso Total**, I , está dado por

$$I = I_A + I_B = xp + yq$$

En donde, I_A es el ingreso por el producto A , e I_B el ingreso por el producto B . Además, se definen los ingresos marginales parciales, respecto de x e y , como

$$\frac{\partial I}{\partial x}, \quad \frac{\partial I}{\partial y}$$

Ejemplo 3.18.5. Una fábrica produce dos artículos A y B , de unidades x e y . Sus respectivas demandas son $p = 6 - 2x$, $q = 12 - 3y$. Entonces la función de Ingreso Total viene dada por

$$\begin{aligned} I &= I_A + I_B = xp + yq \\ &= x(6 - 2x) + y(12 - 3y) \\ &= 6x + 12y - 2x^2 - 3y^2 \end{aligned}$$

Los Ingresos marginales parciales son:

$$\frac{\partial I}{\partial x} = 6 - 4x, \quad \frac{\partial I}{\partial y} = 12 - 6y$$

Función de Ganancia

Si al operar con varios productos se posee un Ingreso total I , siendo C el Costo total, entonces la función de **Ganancia Total** es

$$G = I - C$$

Si se trabaja con dos productos A y B que poseen; un número de unidades x e y , demandas p y q , costos unitarios c_A y c_B , existiendo además un costo fijo C_F , entonces

$$\begin{aligned} G &= I - C = I_A + I_B - (C_F + C_A + C_B) \\ &= xp + yq - (C_F + xC_A + yC_B) \end{aligned}$$

Ejemplo 3.18.6. Una fábrica produce dos artículos A y B , de unidades x e y . Sus respectivas demandas son $p = 8 - 2x$, $q = 18 - 6y$, con costos unitarios de \$4 y \$3 respectivamente. Además, posee un costo fijo de \$ 24. Entonces la función Ganancia viene dada por

$$\begin{aligned} G &= I - C = xp + yq - (C_F + xC_A + yC_B) \\ &= x(8 - 2x) + y(18 - 6y) - (24 + 4x + 3y) \\ &= 4x + 15y - 2x^2 - 6y^2 - 24 \end{aligned}$$

Tomando como base las ideas anteriores, podemos resolver una gran cantidad de problemas de economía, que involucran máximos y/o mínimos. El procedimiento es análogo al empleado en los problemas que hemos resuelto.

Ejemplo 3.18.7. Una fábrica produce dos artículos A y B , con números de unidades x e y respectivamente. La función de Costo es $C = 2x^2 + y^2 - 80x - 30y + 2000$. Vamos a determinar cuántos artículos se deben producir para tener el mínimo costo.

Derivamos la función de Costo para hallar los puntos críticos.

$$\begin{aligned} D_1C &= 4x - 80 = 0 \\ D_2C &= 2y - 30 = 0 \end{aligned} \implies x = 20, y = 15$$

De esta forma, el costo mínimo es, $C(20, 15) = 975$.

Al igual que en los problemas de geometría, cuando existe sólo un punto crítico, es innecesario verificar que este es de máximo o de mínimo. Sin embargo, para dejar establecida la naturaleza del punto encontrado, vamos a probar que es de mínimo.

La matriz Hessiana en el punto $(20, 15)$ es

$$H(20, 15) = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Como $D_{11} > 0$ y el determinante de la Hessiana es $8 > 0$, el punto en cuestión es de mínimo.

Ejemplo 3.18.8. Hallar el máximo ingreso que se obtiene de tres artículos A , B , y C de unidades x , y , z , cuyas demandas son $p = 56 - 7x$, $q = 48 - 3y$, $r = 72 - 4z$ respectivamente.

El ingreso total corresponde a la suma de los ingresos de los tres artículos A , B , C . Esto es

$$I = I_A + I_B + I_C = xp + yq + zr$$

Cada ingreso es el producto de la cantidad demandada por su demanda. Luego,

$$I = x(56 - 7x) + y(48 - 3y) + z(72 - 4z) = 56x + 48y + 72z - 7x^2 - 3y^2 - 4z^2$$

A la función de Ingreso le buscamos los puntos críticos mediante derivación parcial

$$\begin{aligned} D_1 &= 56 - 14x = 0 \\ D_2 &= 48 - 6y = 0 \quad \implies x = 4, y = 8, z = 9 \\ D_3 &= 72 - 8z = 0 \end{aligned}$$

En consecuencia, el Ingreso máximo es

$$I(4, 8, 9) = 628$$

Es claro, que las demandas respectivas, para este ingreso máximo son

$$p = 56 - 4 \cdot 7 = 28, \quad q = 48 - 3 \cdot 8 = 24, \quad r = 72 - 4 \cdot 9 = 36$$

Ejemplo 3.18.9. Hallar la máxima ganancia, si la función de producción de un artículo A de z unidades es $z = 20 + 41x + 33y - x^2 - 2y^2$, que depende de los factores de producción B y C de unidades x , y . El costo unitario del artículo B es de \$1, del artículo C es de \$3. El ingreso se obtiene por la venta del artículo A a \$5.

La Ganancia viene definida por ingresos menos costos. Los ingresos están definidos como el precio de venta por las unidades del artículo A , que están determinadas por la función de producción. Esto es,

$$\begin{aligned} G(x, y) &= I - C = 5z - (x C_B + y C_C) \\ &= 5(20 + 41x + 33y - x^2 - 2y^2) - (x + 3y) \\ &= 100 + 204x + 162y - 5x^2 - 10y^2 \end{aligned}$$

Ahora, derivando e igualando a cero las derivadas parciales de la función Ganancia se obtienen los puntos críticos.

$$\begin{aligned} D_1 &= 204 - 10x = 0 \\ D_2 &= 162 - 20y = 0 \quad \implies x = 20, y = 8 \end{aligned}$$

Luego, la máxima ganancia es $G(20, 8) = \$2844$.

Ejemplo 3.18.10. Una Empresa posee 40 Departamentos para arriendo a \$ 100 mil c/u. Sin embargo, su gerencia observa que puede incrementar en \$ 5 mil el arriendo por cada vez que arrienda un Departamento menos. ¿Cuántos departamentos debe arrendar para obtener máximo ingreso?

Para formalizar, desde el punto de vista matemático, el problema, sean x el número de departamentos arrendados e y el número de departamento no arrendados. Esto significa que $x + y = 40$. De acuerdo con los multiplicadores, esta es la restricción. Esto significa que

$$g(x, y) = x + y - 40 = 0$$

La función de Ingreso (en miles de pesos) se obtiene a partir de las siguientes consideraciones:

$$\begin{aligned} \text{Arriendo inicial} &: \$100 \\ \text{Incremento por cada Dpto no arrendado} &: \$5 \\ \text{Incremento por } y \text{ Dpto no arrendado} &: \$5y \\ \text{Ingreso por arriendo de 1 Dpto} &: \$(100 + 5y) \\ \text{Ingreso por arriendo de } x \text{ Dpto} &: \$(100 + 5y)x \end{aligned}$$

Luego, la función Ingreso es

$$I = x(100 + 5y)$$

Con el Ingreso y la restricción se conforma la función

$$H(x, y, \lambda) = x(100 + 5y) + \lambda(x + y - 40)$$

Las derivadas parciales de esta función son

$$\left. \begin{aligned} D_1H &= 100 + 5y + \lambda = 0 \\ D_2H &= 5x + \lambda = 0 \\ D_3H &= x + y - 40 = 0 \end{aligned} \right\} \implies x = 30, y = 10, \lambda = -150$$

En consecuencia, el Ingreso máximo es

$$I(x, y) = 30 (100 + 5 \cdot 10)\text{miles} = \$4,500,000$$

El número de departamento que determina el máximo Ingreso es de 30.

Ejemplo 3.18.11. *El Banco del Estado cobra una tarifa de \$ 20 por cada \$ 1000 de transacción comercial que efectúa. Ofrece una rebaja de \$ 0,1 por cada \$ 1000 por sobre el monto de \$ 100.000. La rebaja afecta a toda la transacción. Hallemos el máximo Ingreso.*

Formalizamos los siguientes datos:

$$\begin{aligned} \text{Número de miles de pesos de transacción total} &: x \\ \text{Número de miles de pesos por sobre } \$ 100.000 &: y \end{aligned}$$

De ellos se tiene que, $x = 100,000 + y$. Luego, la restricción es

$$g(x, y) = x - y - 100 = 0$$

Veamos los datos de los Ingresos:

$$\begin{aligned}
 &\text{Tarifa inicial por } \$ 1.000 : \$20 \\
 &\text{Rebaja por } \$1.000 \text{ sobre } \$ 100.000 : \$0,1 \\
 &\text{Rebaja por } y \text{ miles sobre } \$ 100.000 : \$0,1y \\
 &\text{Tarifa con rebaja por } \$1.000 : \$(20 - 0,1y) \\
 &\text{Tarifa con rebaja por } x \text{ miles : } \$x(20 - 0,1y)
 \end{aligned}$$

El Ingreso Total es, $I = x(20 - 0,1y)$. Luego la función a optimizar es

$$H(x, y, \lambda) = x(20 - 0,1y) + \lambda(x - y - 100)$$

Sus derivadas parciales, igualadas a cero, entregan la siguiente información:

$$\left. \begin{aligned}
 D_1H &= 20 - 0,1y + \lambda = 0 \\
 D_2H &= -0,1x - \lambda = 0 \\
 D_3H &= x - y - 100 = 0
 \end{aligned} \right\} \implies x = 150, y = 50, \lambda = -15$$

Ahora se reemplaza en el ingreso y se obtiene que el máximo Ingreso es

$$I(150, 50) = 150(20 - 0,1 \cdot 50) = 2250 \text{ miles} = \$2,250,000$$

3.19. Problemas resueltos

Ejemplo 3.19.1. Demostremos que $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} (2x + 3y) = 11$

Se usa la definición, y para ello partimos del hecho que $|f(x, y) - L| < \epsilon$.

$$\begin{aligned} |f(x, y) - L| &= |2x + 3y - 11| = |2(x - 1) + 3(y - 3)| \\ &\leq 2|x - 1| + 3|y - 3| \end{aligned}$$

De esta forma, la diferencia $|f(x, y) - L|$ se ha expresado en términos de $(x - a)$ e $(y - b)$, lo que es una obligación, para poder usar posteriormente el requisito que $\|(x, y) - (a, b)\| < \delta$. Para el cual se tiene

$$\|(x, y) - (a, b)\| = \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 3)^2} < \delta$$

de esto

$$\begin{aligned} |x - 1| &= \sqrt{(x - 1)^2} \leq \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 3)^2} < \delta \\ |y - 3| &= \sqrt{(y - 3)^2} \leq \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 3)^2} < \delta \end{aligned}$$

A partir de los hechos anteriores

$$|f(x, y) - L| \leq 2|x - 1| + 3|y - 3| < 2\delta + 3\delta = \epsilon$$

De manera que $\delta = \frac{\epsilon}{5}$. Se concluye que $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} (2x + 3y) = 11$.

Ejemplo 3.19.2. Demostrar que $\lim_{x^2 + y^2} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ **no** existe si $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

Para no existencia, busquemos dos “camino” o conjuntos de puntos del plano xy , que tengan al punto $(0, 0)$ como **punto de acumulación**.

$$S_1 = \{(x, y) / x = 0\} \implies \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x=0, y \rightarrow 0} 0 = 0$$

$$S_2 = \{(x, y) / x = y\} \implies \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x=y, y \rightarrow 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Se concluye que el límite del campo no existe en el punto. Observar que en coordenadas polares el cálculo es sencillo y también prueba no existencia del límite.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \text{sen } \theta \text{ cos } \theta$$

Como para ángulos distintos se puede hallar límites diferentes, el límite no existe.

Ejemplo 3.19.3. Demostremos que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x - y}$ **no** existe si $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

En este caso preferimos usar coordenadas polares,

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \operatorname{sen} \theta$$

El que $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ es equivalente en polares a que $r \rightarrow 0$. Luego

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x - y} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2(\cos^3 \theta + \operatorname{sen}^3 \theta)}{\cos \theta - \operatorname{sen} \theta}$$

Este límite no existe para $\theta = \frac{\pi}{4}(4k - 3)$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Ejemplo 3.19.4. Demostremos que $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^4 + yx^3 + x^2z^2}{x^4 + y^4 + z^4}$ **no** existe.

Busquemos “caminos” en el espacio que tengan al punto $(0, 0, 0)$ como punto de acumulación, y evaluemos los límites.

$$S_1 = \{(x, y, z) / x = y = 0\} \implies \lim_{z \rightarrow 0} \frac{x^4 + yx^3 + x^2z^2}{x^4 + y^4 + z^4} = 0$$

$$S_2 = \{(x, y, z) / x = y, z = 0\} \implies \lim_{z \rightarrow 0} \frac{x^4 + yx^3 + x^2z^2}{x^4 + y^4 + z^4} = 1$$

Se concluye que el límite del campo no existe en el punto $(0, 0, 0)$.

Ejemplo 3.19.5. Demostremos que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$

Se parte de considerar $|f(x, y) - L| < \epsilon$.

$$|f(x, y) - L| = \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| = \frac{|x||y|}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Como

$$|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} < \delta, \quad |y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$$

noindent entonces

$$|f(x, y) - L| < \delta = \epsilon$$

Concluyendo que el límite es el indicado. En coordenadas polares la demostración es inmediata.

Ejemplo 3.19.6. Demostremos que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{x} \operatorname{sen}(xy) = 0, x \neq 0$

$$\left| \frac{1}{x} \operatorname{sen}(xy) - 0 \right| = \left| \frac{1}{x} \operatorname{sen}(xy) \right| < \frac{|x||y|}{|x|} = |y|$$

Como $|y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$, entonces

$$\left| \frac{1}{x} \operatorname{sen}(xy) - 0 \right| < \delta = \epsilon$$

De este modo, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{x} \operatorname{sen}(xy) = 0$

Ejemplo 3.19.7. Probemos que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \operatorname{arccos}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$ no existe.

Hacemos uso de coordenadas polares, intentando acotar

$$\left| \operatorname{arccos}\left(\frac{r \cos \theta}{r}\right) - L \right| = \left| \operatorname{arccos}(\cos \theta) - L \right| = |\theta - L|$$

Dado que θ puede aumentar tanto como se quiera, es imposible acotar la expresión anterior, luego el límite considerado no existe.

Ejemplo 3.19.8. Probemos que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{\operatorname{sen} \sqrt{x^2 + y^2}} = 0$.

Por la forma del campo, las polares aparecen como una alternativa adecuada. Tenemos que acotar

$$\left| \frac{e^{-\frac{1}{r^2}}}{\operatorname{sen} r} - 0 \right| = \left| \frac{e^{-\frac{1}{r^2}}}{\operatorname{sen} r} \right| = G(r)$$

Hay que probar que $\lim_{r \rightarrow 0^+} G(r) = 0$. Tenemos:

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{r^2}}}{\operatorname{sen} r} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{-t^2}}{\operatorname{sen} \frac{1}{t}}$$

Hicimos el cambio de variables $t = \frac{1}{r}$. Se observa que estamos en presencia de un límite con máscara $\frac{0}{0}$, por lo que podemos usar L' Hôpital.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{-t^2}}{\operatorname{sen} \frac{1}{t}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-2te^{-t^2}}{-\frac{1}{t^2} \cos \frac{1}{t}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2t^3 e^{-t^2}}{\cos \frac{1}{t}}$$

Como $\cos \frac{1}{t} \rightarrow 1$ y $\frac{2t^3}{e^{t^2}} \rightarrow 0$, se sigue que el límite del campo escalar dado es, efectivamente, cero.

Ejemplo 3.19.9. Hallar $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + x^2 - 2y^3 + y^2}{x^2 + y^2}$

Trabajemos en coordenadas polares

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^3 \cos^3 \theta + r^2 \cos^2 \theta - 2r^3 \sin^3 \theta + r^2 \sin^2 \theta}{x^2 + y^2} = \lim_{r \rightarrow 0} (r \cos^3 \theta - 2r \sin^3 \theta + 1) = 1$$

para cualquier valor de θ , nuestro candidato a límite es $L = 1$ por lo que buscaremos una función $G(r)$ que cumpla lo requerido.

$$|F(r, \theta) - 1| = |r \cos^3 \theta - 2r \sin^3 \theta| \leq |r \cos^3 \theta| + |2r \sin^3 \theta| \leq 3|r| = G(r)$$

Claramente, $G(r) \rightarrow 0$. En consecuencia, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + x^2 - 2y^3 + y^2}{x^2 + y^2} = 1$.

Ejemplo 3.19.10. Estudiar el límite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2) \ln(2 - x)}{x^2 + y^2}$.

Aplicando la conocida equivalencia $\operatorname{sen} t \sim t$ cuando $t \rightarrow 0$ se tiene que $\operatorname{sen}(x^2 + y^2) \sim x^2 + y^2$. Por tanto,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2) \ln(2 - x)}{x^2 + y^2} \sim \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x^2 + y^2) \ln(2 - x)}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \ln(2 - x) = \ln 2$$

Ejemplo 3.19.11. Estudiar el límite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,-2)} \frac{\operatorname{sen} x^2}{x} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{y+2}\right)$.

Hacemos uso de infinitésimos, pues, $\operatorname{sen} x^2 \sim x^2$ cerca del 0. Por tanto,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,-2)} \frac{\operatorname{sen} x^2}{x} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{y+2}\right) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,-2)} x \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{y+2}\right) = 0$$

esto se debe a que se trata del producto de una función que tiende a cero por otra acotada.

Ejemplo 3.19.12. Consideremos el campo escalar

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & (x, y) = (0, 0) \\ \frac{2y^2 - 3xy - 5x^2}{x + y}, & (x, y) \neq (0, 0) \end{cases}$$

1. f es un campo **continuo** en $(0, 0)$ ya que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2y^2 - 3xy - 5x^2}{x + y} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (2y - 5x) = 0$$

2. Ahora que sabemos que f es un campo continuo en $(0,0)$, veamos si es diferenciable en $(0,0)$. Para ello tenemos

$$D_1f(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0 - 5h^2}{h^2} = -5$$

$$D_2f(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h^2 - 0 - 0}{h^2} = 2$$

veamos ahora que sucede con la derivada en los puntos $(x,y) \neq (0,0)$

$$D_1f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(2y - 5x) = -5$$

$$D_2f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(2y - 5x) = 2$$

Con esto tenemos definidos los campos D_1f y D_2f como sigue

$$D_1f(x,y) = \begin{cases} -5, & (x,y) = (0,0) \\ -5, & (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

$$D_2f(x,y) = \begin{cases} 2, & (x,y) = (0,0) \\ 2, & (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

Esto significa que las derivadas parciales son **continuas**, y de ello se infiere que el campo es diferenciable en el $(0,0)$.

3. Calculemos la máxima y mínima razón de cambio de la derivada direccional del campo f en el punto $(1,8)$. Para esto es necesario determinar el gradiente en $(1,8)$ ya que en dirección de este se halla la razón de cambio máxima.

$$\nabla f(x,y) = (D_1f(x,y), D_2f(x,y)) = (-5,2)$$

De aquí, $\nabla f(1,8) = (-5,2)$ es la dirección de la máxima razón de cambio, esto corresponde a un ángulo $\theta = \arctg(2/-5)$ del segundo cuadrante. La mínima está en dirección del vector $-\nabla f(1,8) = (5,-2)$, esto es, de un ángulo $\theta = \arctg(-2/5)$ del cuarto cuadrante. El valor de la máxima es $\sqrt{29}$ y la mínima $-\sqrt{29}$.

4. El plano tangente al campo f , en el punto $(1,8)$ es

$$(x - 1, y - 8, z - f(1,8)) \cdot (-5, 2, -1) = 0$$

Al realizar el producto punto y simplificar se obtiene que la ecuación del plano tangente es $5x - 2y + z = 0$

Ejemplo 3.19.13. Consideremos el campo escalar

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x^2 + |xy|)}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

1. Estudiemos su continuidad. Si $x > 0$, entonces $|xy| = x|y|$, con lo cual

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen}(x^2 + |xy|)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos(x^2 + x|y|)}{1} \cdot (2x + |y|) = 1 \cdot (0 + |y|) = |y|$$

Si $y = 0$ hay continuidad en $(0, 0)$, pues el límite coincide con el valor del campo en el punto. Si $y \neq 0$ no hay continuidad. Con esto, es claro que no hay continuidad en $(0, 1)$.

Se puede obtener el límite usando infinitésimos. En efecto,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen}(x^2 + |xy|)}{x} \sim \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + x|y|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + |y|) = |y|$$

2. Como el campo f no es continuo en $(0, 1)$ se sigue que no es diferenciable en $(0, 1)$.

3. Veamos existencia de derivadas parciales en $(0, 1)$.

$$D_1 f(0, 1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 1) - f(0, 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(h^2 + |h|)}{h^2}, \quad \text{no existe}$$

$$D_2 f(0, 1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, 1 + h) - f(0, 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

Ejemplo 3.19.14. Consideremos el campo escalar

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq 0 \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- Averiguemos sobre la continuidad del campo en $(0, 0)$.

Límite en polares

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^3(\cos^3 \theta + \operatorname{sen}^3 \theta)}{r^2} = 0 = f(0, 0)$$

Y además,

$$\left| \frac{r^3(\cos^3 \theta + \operatorname{sen}^3 \theta)}{r^2} \right| = |r(\cos^3 \theta + \operatorname{sen}^3 \theta)| \leq 2|r| = G(r) \rightarrow 0$$

En consecuencia, el campo es continuo.

- Hallemos derivadas parciales en $(0,0)$.

$$D_1f(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h - 0}{h} = 1$$

$$D_2f(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h - 0}{h} = 1$$

Para valores $(x,y) \neq (0,0)$ se tiene

$$D_1f(x,y) = \frac{3x^2(x^2 + y^2) - 2x(x^3 + y^3)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$D_2f(x,y) = \frac{3y^2(x^2 + y^2) - 2y(x^3 + y^3)}{(x^2 + y^2)^2}$$

Queda como ejercicio verificar que estas derivadas parciales no son continuas.

- Veamos si existe $D_{22}f(0,0)$

$$\begin{aligned} D_{22}f(0,0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{D_2f(0,h) - D_2f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - 1}{h} = 0 \end{aligned}$$

Luego, $D_{22}f(0,0)$ existe.

Ejemplo 3.19.15. Sea $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(x^2 + |xy|)}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$. Averiguemos continuidad de f en $(0,0)$ y en $(0,1)$, la diferenciabilidad de f en $(0,1)$, y el valor de las derivadas $D_1f(0,1)$ y $D_2f(0,1)$.

Para la continuidad lo primero es “sacarse” el valor absoluto

$$|xy| = \begin{cases} xy, & \text{si } xy > 0 \\ -xy, & \text{si } xy < 0 \end{cases}$$

Si $x > 0$, entonces $|xy| = x|y|$. Luego,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\text{sen}(x^2 + |xy|)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\text{cos}(x^2 + |xy|)}{1} \cdot (2x + |y|) = |y|$$

Se nota que L'Hôpital no nos abandona en momentos conflictivos. Se deduce del valor de este límite que, si $y = 0$, tenemos continuidad, y que si $y = 1$, no hay continuidad (no hay coincidencia con el valor asignado a la función).

Si no hay continuidad en $(0,1)$, no hay diferenciabilidad en $(0,1)$. Veamos que sucede con las derivadas parciales

$$\begin{aligned} D_1 f(0,1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h,1) - f(0,1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(h^2 + |h|)}{h^2} \\ &= \begin{cases} \infty, & h > 0 \\ -\infty, & h < 0 \end{cases} \implies \text{No existe límite} \end{aligned}$$

Para la otra derivada tenemos:

$$D_2 f(0,1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,1+h) - f(0,1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

Ejemplo 3.19.16. Dada el campo escalar $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^5}{(x^2+y^2)^3} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

- Estudiamos la continuidad de $f(x,y)$ en el punto $(0,0)$.

Para que la función $f(x,y)$ sea continua en $(0,0)$ tiene que ser $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$. Para ver esto usemos coordenadas polares.

$$\left| \frac{r^7 \cos^2 \theta \text{sen}^5 \theta}{r^6} \right| \leq |r| \rightarrow 0$$

En consecuencia, la función $f(x,y)$ es continua en $(0,0)$.

- Estudiamos la existencia de las derivadas parciales en el punto $(0,0)$.

Como se trata de hallar derivadas en un punto, usaremos la definición

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = 0$$

Así, Las derivadas parciales existen en $(0,0)$ y son nulas.

- Veamos la diferenciabilidad de $f(x,y)$ en el punto $(0,0)$.

Hacemos uso de la definición

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - df(0,0)(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^5}{(x^2 + y^2)^3 \sqrt{x^2 + y^2}}$$

Ahora, pasando a coordenadas polares veamos si este límite es cero.

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^7 \cos^2 \theta \text{sen}^5 \theta}{r^7} = \cos^2 \theta \text{sen}^5 \theta$$

Se concluye que el límite no existe, y en consecuencia, la función no es diferenciable en $(0,0)$.

Ejemplo 3.19.17. Estudiemos continuidad del campo $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Para el cálculo del límite la opción más adecuada parece ser caminos.

- Por el camino $y = x$, que pasa por el origen, se tiene

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^4 + 0} = 1$$

- Otro camino que pase por $(0, 0)$ y con el cual se tenga límite diferente se encuentra parametrizando. En efecto, el factor $(x - y)$ es el que complica el problema, por tanto, si consideramos la curva

$$x = t, \quad y = t(1 - t) \implies (x - y)^2 = t^4$$

que no es otra cosa que la parábola $y = x - x^2$, que también pasa por origen. Con esto se tiene que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^4 (1 - t)^2}{t^4 (1 - t)^2 + t^4} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1 - t)^2}{(1 - t)^2 + 1} = \frac{1}{2}$$

De este resultado deducimos que el límite de $f(x, y)$ no existe en el origen, y en consecuencia, la función no es continua en $(0, 0)$.

Ejemplo 3.19.18. Probemos que la función $z = \ln(x^2 + xy + y^2)$ satisface la ecuación diferencial en derivadas parciales $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2$.

Hay que formar la ecuación diferencial calculando las derivadas parciales involucradas.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x + y}{x^2 + xy + y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x + 2y}{x^2 + xy + y^2}$$

Luego

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x(2x + y)}{x^2 + xy + y^2} + \frac{y(x + 2y)}{x^2 + xy + y^2} = \frac{2x^2 + 2xy + 2y^2}{x^2 + xy + y^2} = 2$$

Ejemplo 3.19.19. Demostremos que la función $z = y \psi(x^2 - y^2)$ satisface la ecuación diferencial

$$\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$$

Lo primero es darnos cuenta que la función ψ tiene un argumento que tienen dos variables. Se trata entonces de una función compuesta. Estos casos se resuelven por una sustitución adecuada. En este caso, $u = x^2 - y^2$, entonces

$$z = y \psi(u) \implies \frac{\partial z}{\partial x} = y \psi'(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = y \psi'(u) 2x$$

$$z = y \psi(u) \implies \frac{\partial z}{\partial y} = \psi(u) + y \psi'(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \psi(u) + y \psi'(u) (-2y)$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{1}{x} \cdot 2xy \cdot \psi'(u) - \frac{1}{y} \cdot 2y^2 \cdot \psi'(u) + \frac{\psi(u)}{y} \\ &= 2y \psi'(u) - 2y \psi'(u) + \frac{\psi(u)}{y} = \frac{z}{y^2} \end{aligned}$$

Ejemplo 3.19.20. Probemos que la función $z = xy + x \psi\left(\frac{y}{x}\right)$ satisface la ecuación diferencial

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = xy + z$$

Este problema es análogo al anterior. Hacemos la sustitución $u = \frac{y}{x}$ para tener

$$\begin{aligned} z = xy + x \psi(u) &\implies \frac{\partial z}{\partial x} = y + \psi(u) + x \cdot \psi'(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \\ &\implies \frac{\partial z}{\partial x} = y + \psi(u) + x \cdot \psi'(u) \cdot \left(\frac{-y}{x^2}\right) \\ &\implies \frac{\partial z}{\partial x} = y + \psi(u) - \frac{y}{x} \cdot \psi'(u) \\ z = xy + x \psi(u) &\implies \frac{\partial z}{\partial y} = x + x \cdot \psi'(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \\ &\implies \frac{\partial z}{\partial y} = x + \psi'(u) \end{aligned}$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} &= x \left(y + \psi(u) - \frac{y}{x} \cdot \psi'(u) \right) + y \left(x + \psi'(u) \right) \\ &= xy + x \psi(u) - y \psi'(u) + xy + y \psi'(u) \\ &= 2xy + x \psi(u) \end{aligned}$$

como $\psi(u) = \frac{z-xy}{x}$, entonces

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = xy + z$$

Ejemplo 3.19.21. Mediante el empleo de la regla de la cadena vamos a encontrar

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \text{si } z = u^v, \quad u = \text{sen } x, \quad v = \text{cos } x$$

Teniendo presente que $z = z(u, v)$, $u = u(x)$, $v = v(x)$, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \\ &= vu^{v-1} \cos x + u^v \ln u \cdot (-\operatorname{sen} x) \\ &= \cos x (\operatorname{sen} x)^{\cos x - 1} \cdot \cos x - (\operatorname{sen} x)^{1 + \cos x} \cdot \ln(\operatorname{sen} x) \\ &= (\operatorname{sen} x)^{\cos x} \left(\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x} - \operatorname{sen} x \cdot \ln(\operatorname{sen} x) \right) \\ &= (\operatorname{sen} x)^{\cos x} (\cos x \cdot \operatorname{ctg} x - \operatorname{sen} x \cdot \ln(\operatorname{sen} x)) \end{aligned}$$

Ejemplo 3.19.22. Mediante el uso de la diferencial total hallemos un valor aproximado de $(1, 02)^{3,01}$.

La función asociada a la expresión que se le determina un valor aproximado es $z = x^y$. Si se considera ahora, que $x = 1$, $y = 3$, $\Delta x = 0,02$ y $\Delta y = 0,01$, entonces

$$dz \approx y \cdot x^{y-1} \cdot dx + x^y \cdot \ln x \cdot dy = 3 \cdot 1^2 \cdot 0,02 + 1^3 \cdot \ln 1 \cdot 0,01 \approx 0,06$$

En consecuencia $(1, 02)^{3,01} = 1 + 0,06 = 1,06$.

Ejemplo 3.19.23. Una caja cerrada de dimensiones exteriores 10, 8, y 6 cms está hecha de madera contrachapada de 2mm de espesor. Vamos a determinar, usando diferenciales, el volumen aproximado del material gastado en hacer la caja.

El volumen de la caja es $V = xyz$, siendo x, y, z los lados de la caja. Además, $2\text{mm} = 0,2\text{cm}$. Su variación es

$$\begin{aligned} dV &= D_1 dx + D_2 dy + D_3 dz = yz \cdot 0,4 + xz \cdot 0,4 + xy \cdot 0,4 \\ &= 48 \cdot 0,4 + 60 \cdot 0,4 + 80 \cdot 0,4 = 75,2 \text{ cms}^3 \end{aligned}$$

Ejemplo 3.19.24. Para el campo $f(x, y) = \begin{cases} x + y - 2, & x = 1 \vee y = 1 \\ 2, & x \neq 1 \wedge y \neq 1 \end{cases}$ tenemos que:

1. No es continuo en $(1, 1)$, ya que $f(1, 1) = 0$ y $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} f(x, y) = 2$.
2. Las derivadas parciales en el punto $(1, 1)$ son

$$\begin{aligned} D_1 f(1, 1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h, 1) - f(1, 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1+h+1-2}{h} = 1 \\ D_2 f(1, 1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1, h+1) - f(1, 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1+h+1-2}{h} = 1 \end{aligned}$$

Luego, las funciones D_1 y D_2 vienen dadas por

$$D_1f(x,y) = D_2f(x,y) = \begin{cases} 1, & x = 1 \vee y = 1 \\ 0, & x \neq 1 \wedge y \neq 1 \end{cases}$$

En consecuencia, las funciones D_1 y D_2 no son continuas en $(1,1)$.

Ejemplo 3.19.25. En una placa rectangular situada en el plano xy , la temperatura en cualquier punto es $T(x,y) = x^2 + y^2$. Vamos a determinar la rapidez de cambio de la temperatura en el punto $(3,4)$ en la dirección en que hace un ángulo de $\frac{\pi}{3}$ con la dirección positiva del eje x , la dirección para la cual la rapidez de cambio en el punto $(3,4)$ es máxima, y también cuando es mínima.

Lo primero es obtener el gradiente

$$T(x,y) = x^2 + y^2 \implies \nabla T = (2x, 2y)$$

de manera que en el punto $(3,4)$ se tiene $\nabla T(3,4) = (6,8)$. Para hallar el vector unitario que hace un ángulo de $\frac{\pi}{3}$ con la dirección positiva del eje x , recurrimos a $\vec{u} = (\cos \frac{\pi}{3}, \sin \frac{\pi}{3})$. Esto es, $\vec{u} = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$. Se tiene

$$D_{\vec{u}}T(3,4) = \nabla T(3,4) \cdot \vec{u} = (6,8) \cdot (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) = 3 + 4\sqrt{3}$$

Sabemos que la dirección en la que se produce la máxima razón de cambio es la del gradiente. Luego $D_{\vec{u}}T(3,4)$ es máxima en dirección del vector $\frac{1}{10} (6,8)$. Es claro que $\theta = \text{arctg}(\frac{4}{3})$ se encuentra en el primer cuadrante.

La mínima se encuentra en dirección opuesta. Esto es, $D_{\vec{u}}T(3,4)$ mínima en dirección del vector $-\frac{1}{10} (6,8)$. El ángulo es $\theta = \text{arctg}(\frac{4}{3})$, en el tercer cuadrante.

Ejemplo 3.19.26. El volcán Llaima se puede representar aproximadamente por la ecuación $z = 1200 - 3x^2 - 2y^2$. Los ejes x e y apuntan hacia el este y el norte, respectivamente. Un escalador está en el punto $(-10, 5, 850)$. Vamos a determinar: La dirección en que la ladera es más pronunciada, si el escalador asciende o desciende cuando se mueve en dirección este, y también en dirección suroeste, y a calcular su rapidez de ascenso o descenso.

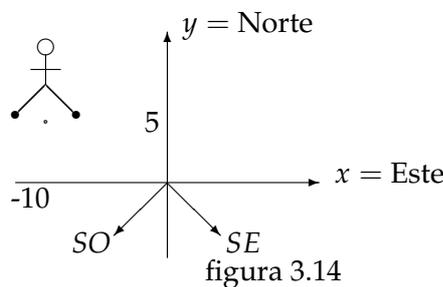


figura 3.14

1. La máxima rapidez de cambio está en dirección del vector gradiente.

$$\nabla f(x,y) = (-6x, -4y) \implies \nabla f(-10,5) = (60, -20)$$

Se necesita conocer la norma de este gradiente en el punto.

$$\|\nabla f(-10,5)\| = 20\sqrt{10}$$

Con estos datos se deduce que la ladera más pronunciada a partir del punto $(-10,5)$ se encuentra en dirección del vector

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{10}} (3, -1)$$

2. Al observar la figura es fácil darse cuenta que la dirección **este** se encuentra en la dirección del vector unitario $(1,0)$. En consecuencia

$$D_{\vec{u}}f(-10,5) = \nabla f(-10,5) \cdot (1,0) = 60 \text{ pies/seg.}$$

el signo positivo indica que el escalador está subiendo.

3. La dirección **suroeste** se encuentra en la dirección del vector unitario $\frac{1}{\sqrt{2}} (-1, -1)$. En consecuencia

$$D_{\vec{u}}f(-10,5) = (60, -20) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (-1, -1) = -20\sqrt{2} \text{ pies/seg.}$$

El signo negativo indica que el escalador está bajando.

Ejemplo 3.19.27. Probemos que $2\sqrt{5}$ es la derivada direccional del campo $f(x,y,z) = z^2x + y^3$ en el punto $(1,1,2)$, en la dirección del vector $\vec{u} = (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0)$

Unos cuantos cálculos nos llevan a establecer la veracidad de lo establecido

$$\nabla f(x,y,z) = (z^2, 3y^2, 2xz) \implies \nabla f(1,1,2) = (4,3,4)$$

En consecuencia

$$D_{\vec{u}}f(1,1,2) = \nabla f(1,1,2) \cdot \vec{u} = (4,3,4) \cdot (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0) = 2\sqrt{5}$$

Ejemplo 3.19.28. Hallemos el plano tangente a la superficie $S = \{x^2 + 2y^2 + 3xz = 10\}$, en el punto $(1,2,\frac{1}{3})$.

Hacemos uso del gradiente para encontrar el vector normal al plano

$$\nabla S = (2x + 3z, 4y, 3x) \implies \nabla S(1,2,\frac{1}{3}) = (3,8,3)$$

Luego,

$$\nabla S \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = (3,8,3) \cdot (x - 1, y - 2, z - \frac{1}{3}) = 0$$

de donde, la ecuación del plano es, $3x + 8y + 3z - 20 = 0$

Ejemplo 3.19.29. Un campo escalar f tiene en el punto $(1, 2)$ derivada direccional 2 según $(2, 2)$, y tiene derivada direccional -2 en la dirección según $(1, 1)$. Vamos a determinar $\nabla f(1, 2)$ y la derivada direccional en $(1, 2)$ según la dirección del punto $(4, 6)$.

Sean $P = (1, 2)$, $P_1 = (2, 2)$, $P_2 = (1, 1)$, entonces $PP_1 = (1, 0) = \vec{u}_1$, $PP_2 = (0, -1) = \vec{u}_2$. Ahora bien,

$$D_{\vec{u}_1}f(1, 2) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) \cdot (1, 0) = 2$$

$$D_{\vec{u}_2}f(1, 2) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) \cdot (0, -1) = -2$$

de lo cual tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2$$

y a partir de esto $f(x, y) = 2x + 2y$ concluimos que $\nabla f(1, 2) = (2, 2)$

Si ahora es $P_3 = (4, 6) \implies PP_3 = (3, 4) \implies \vec{u}_3 = \frac{1}{5}(3, 4)$, de donde

$$D_{\vec{u}_3}f(1, 2) = (2, 2) \cdot \frac{1}{5}(3, 4) = \frac{14}{5}$$

Ejemplo 3.19.30. Hallemos el valor de las constantes a, b, c tales que la derivada direccional de $f(x, y, z) = axy^2 + byz + cz^2x^3$ en $(1, 2, -1)$ tenga un valor máximo de 64 en una dirección paralela al eje z .

La máxima variación de la derivada direccional la entrega $\|\nabla f\|$. Luego,

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y, z) &= (ay^2 + 3cz^2x^2, 2axy + bz, by + 2czx^3) \\ \nabla f(1, 2, -1) &= (4a + 3c, 4a - b, 2b - 2c) \\ D_{\vec{u}}f(1, 2, -1) &= (4a + 3c, 4a - b, 2b - 2c) \cdot (0, 0, 1) = 2b - 2c \end{aligned}$$

Se sigue que, debe tenerse $2b - 2c = 64$; $4a + 3c = 0$; $4a - b = 0$. A partir de lo cual, $a = 6$, $b = 24$, $c = -8$

Ejemplo 3.19.31. La temperatura en cierta región del plano viene dada por

$$T = \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad k \in \mathbb{R}$$

Hallemos la dirección en que la razón de cambio de la temperatura es máxima, a partir del punto $(1, \sqrt{3})$.

$$\nabla T = \left(\frac{-kx}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \frac{-ky}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \right) = \frac{-k}{(x^2 + y^2)^{3/2}}(x, y) \implies \nabla T(1, \sqrt{3}) = -\frac{k}{8}(1, \sqrt{3})$$

se concluye que el ángulo en que se produce la máxima razón de cambio, a partir del punto $(1, \sqrt{3})$, es $\theta = 240^\circ$. La mínima es evidentemente en dirección opuesta, esto es, en dirección de $\theta = 60^\circ$.

Ejemplo 3.19.32. La temperatura en cualquier punto del plano (x, y) está dada por

$$T(x, y) = \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Hallemos la rapidez con que varía la temperatura a lo largo de la curva $C = \{(x, y) / y^2 - 4x - 2y + 1 = 0\}$ en el tiempo $t = 1$.

En esta clase de problemas se debe parametrizar la curva. Por ejemplo, $\{x = t^2, y = 2t + 1\}$. Para $t = 1$ tenemos el punto $(1, 3)$. Como

$$D_{\vec{u}}T = \nabla T \cdot \vec{u}$$

entonces falta determinar un vector unitario, que obtenemos de la curva misma

$$\alpha(t) = (t^2, 2t + 1) \implies \alpha'(t) = (2t, 2) \implies \alpha'(1) = (2, 2)$$

De modo que el vector unitario es

$$\vec{u} = \frac{(1, 1)}{\sqrt{2}}$$

Por otra parte,

$$\nabla T(x, y) = \left(-\frac{kx}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, -\frac{ky}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \right) \implies \nabla T(1, 3) = -\frac{k}{(10)^{3/2}}$$

En consecuencia,

$$D_{\vec{u}}T(1, 3) = \nabla T(1, 3) \cdot \vec{u} = -\frac{k}{(10)^{3/2}} \cdot \frac{(1, 1)}{\sqrt{2}} = -\frac{2k}{5\sqrt{10}}$$

Pudiera ser que alguien tenga otra parametrización de la curva. No es inconveniente, sólo debe saber que estará calculando la razón de cambio en puntos distintos de la curva. Por ejemplo, si la parametrización es

$$\beta(t) = \left(\frac{1}{4}(t-1)^2, t \right)$$

en $t = 1$ se obtiene el punto $(0, 1)$ de la curva. Allí, el vector unitario es

$$\beta'(t) = \left(\frac{1}{2}(t-1), 1 \right) \implies \beta'(1) = (0, 1) = \vec{u}$$

Además,

$$\nabla T(x, y) = \left(-\frac{kx}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, -\frac{ky}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \right) \implies \nabla T(0, 1) = (0, -k)$$

Por tanto, la razón de cambio, a partir del punto $(0, 1)$ de la curva, es

$$D_{\vec{u}}T(0, 1) = \nabla T(0, 1) \cdot \vec{u} = (0, -k) \cdot (0, 1) = -k$$

Los resultados no tienen por que ser los mismos, son puntos diferentes. Si en la segunda parametrización se toma $t = 3$ se halla que estamos en el mismo punto de la primera parametrización, y ahí sí que tenemos el mismo resultado.

Ejemplo 3.19.33. *Determinemos las dimensiones de una caja rectangular de volumen máximo que se puede ubicar de manera que sus caras coincidan con los planos coordenados y un vértice quede en el plano $x + y + z = 1$.*

Como el volumen de la caja es $V = xyz$, siendo x, y, z las dimensiones de sus lados, y teniendo por restricción el que uno de los vértices este en el plano, entonces según multiplicadores de Lagrange se tiene

$$H(x, y, z, \lambda) = xyz - \lambda(x + y + z - 1)$$

Esto da origen al sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} D_1 H = yz - \lambda & = 0 \\ D_2 H = xz - \lambda & = 0 \\ D_3 H = xy - \lambda & = 0 \\ D_4 H = x + y + z - 1 & = 0 \end{cases}$$

De las dos primeras ecuaciones se encuentra $yz = xz \implies z(y - x) = 0$, de lo cual $z = 0 \vee y = x$. Si $y = x$, entonces $y = \sqrt{\lambda}$. Si $z = 0$, entonces $\lambda = 0$, y de aquí que $x = 0 \vee y = 0$, y se tiene mínimo. Luego, nos quedamos con $y = \sqrt{\lambda} = x$, del cual se obtiene $z = \sqrt{\lambda}$. Reemplazando en la última ecuación se encuentra que $\lambda = \frac{1}{9}$. De esta forma, se tiene como punto crítico $x = y = z = \frac{1}{3}$. Por tratarse de un problema de carácter geométrico este punto debe ser de máximo, pero vamos a comprobarlo mediante el empleo del criterio de la segunda derivada (Hessiana).

Bajemos en un grado el problema. Si de la ecuación del plano despejamos la variable z , esto es, $z = 1 - x - y$. Al reemplazar en el volumen se halla la ecuación

$$V = xy - x^2y - xy^2$$

de la cual se obtienen las derivadas

$$D_1 = y - 2xy - y^2, D_{11} = -2y, D_2 = x - x^2 - 2xy, D_{22} = -2x, D_{21} = D_{12} = 1 - 2x - 2y$$

Con ellas formamos la Hessiana

$$H = \begin{pmatrix} -2y & 1 - 2x - 2y \\ 1 - 2x - 2y & -2x \end{pmatrix}$$

La cual evaluada en el punto crítico entrega la matriz

$$H\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} -2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

Es claro que $|H| > 0$, $a_{11} < 0$. Esto quiere decir que la matriz está **definida negativa**, con lo cual tenemos \ddot{y} máximo !!, siendo éste

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$$

Ejemplo 3.19.34. La intersección entre el plano $x - 4y - z = 0$ y el elipsoide $x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 4 = 0$ determina una curva en el espacio. Hallemos la mínima distancia de esa curva al origen de coordenadas.

Usemos multiplicadores. La función restricción viene dada por ambas superficies. Esto es,

$$\begin{aligned} g(x, y, z) &= \lambda_1 g_1(x, y, z) + \lambda_2 g_2(x, y, z) \\ &= \lambda_1(x - 4y - z) + \lambda_2(x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 4) \end{aligned}$$

La función a optimizar es la función distancia, la que consideramos al cuadrado. Esto es,

$$d^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Con los datos formalizados matemáticamente, se arma la función H , de cinco variables.

$$H(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_1(x - 4y - z) + \lambda_2(x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 4)$$

Con las derivadas parciales se forma el sistema.

$$\begin{cases} D_1H = 2x + \lambda_1 + 2x\lambda_2 = 0 \\ D_2H = 2y - 4\lambda_1 + 8y\lambda_2 = 0 \\ D_3H = 2z - \lambda_1 + 8z\lambda_2 = 0 \\ D_4H = x - 4y - z = 0 \\ D_5H = x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

Al resolver se encuentra que $x = 0$, $y = \frac{1}{\sqrt{17}}$, $z = -\frac{4}{\sqrt{17}}$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -\frac{1}{4}$ es el único punto crítico. No es necesario verificar que es el que produce la mínima distancia. Esta es

$$d\left(0, \frac{1}{\sqrt{17}}, -\frac{4}{\sqrt{17}}\right) = 1$$

Ejemplo 3.19.35. La función de Producción de un artículo C , cuyo número de unidades es z viene dada por $z = 84x + 96y - 3x^2 - 4y^2$. Este artículo utiliza los factores de producción A y B , cuyas unidades son x e y respectivamente. Hallar el máximo de la Producción.

En este problema se trata de obtener el máximo de la Producción, cuya ecuación viene dada por la función de dos variables

$$z = 84x + 96y - 3x^2 - 4y^2$$

Las derivadas parciales conforman el sistema

$$\begin{cases} D_1z = 84 - 6x = 0 \\ D_2z = 96 - 8y = 0 \end{cases} \implies x = 14, y = 12$$

Con este único punto crítico se tiene que el máximo de la Producción es

$$z(14, 12) = 1164$$

Ejemplo 3.19.36. Producir dos artículos A y B , por unidad, cuesta \$ 30 y \$ 12 respectivamente, agregándose un costo fijo de \$ 1500. Las demandas son $p = 150 - 3x$, $q = 180 - 12y$, en donde x e y son las unidades respectivas de los dos artículos. Hallemos la máxima Ganancia.

La ganancia es la diferencia entre Ingresos (I) y Costos (C). Luego,

$$\begin{aligned} G &= I - C = I_A + I_B - (c_A + c_B + C_F) \\ &= xp + yq - (xc_A + yc_B + C_F) \\ &= x(150 - 3x) + y(180 - 12y) - (30x + 12y + 1500) \\ &= -3x^2 - 12y^2 + 120x + 168y - 1500 \end{aligned}$$

Con las derivadas parciales de esta función de dos variables se forma el sistema

$$\begin{cases} D_1G = -6x + 120 = 0 \\ D_2G = -24y + 168 = 0 \end{cases} \implies x = 20, y = 7$$

La ganancia máxima se obtiene al reemplazar el punto crítico

$$G(20, 7) = \$2184$$

Ejemplo 3.19.37. Una fábrica produce dos artículos A y B , cuyas unidades son x e y . Cuando la fábrica utiliza toda su capacidad produce entre ambos artículos, un total de 120 unidades. Si la función de costo total conjunto es $C = 3x^2 + 5y^2 + 5000$ pesos, hallemos el costo mínimo.

La función a optimizar es el costo $C = 3x^2 + 5y^2 + 5000$, y la restricción la capacidad total de producción, $x + y = 120$. Se tiene así la función de Lagrange

$$H(x, y, \lambda) = 3x^2 + 5y^2 + 5000 + \lambda (x + y - 120)$$

Con las derivadas parciales de esta función de tres variables se forma el sistema

$$\begin{cases} D_1H = 6x + \lambda = 0 \\ D_2H = 10y + \lambda = 0 \\ D_3H = x + y - 120 = 0 \end{cases} \implies x = 75, y = 45, \lambda = -450$$

El costo mínimo se obtiene al reemplazar el punto crítico

$$C(75, 45) = \$32000$$

Ejemplo 3.19.38. El Casino de la UFRO vende almuerzo a \$1200. Ofrece una rebaja de \$10 por almuerzo, por sobre 80 que pueda vender. La rebaja afecta a todos los almuerzos vendidos. Vamos a encontrar el máximo ingreso según este plan de ventas.

Formalizamos los datos en lenguaje matemático

Número de almuerzos a vender : x

Número de almuerzos sobre 80 : y

Con estos datos se tiene que la restricción es $x = 80 + y$. Luego, la función restricción es

$$g(x, y) = x - y - 80 = 0$$

Planteamos ahora los ingresos.

Precio inicial de un almuerzo : \$1200

Rebaja por 1 almuerzo, sobre 80 : \$10

Rebaja por y almuerzos, sobre 80 : \$10 y

Precio final de 1 almuerzo : \$(1200 - 10 y)

Precio final de x almuerzos : \$ $x(1200 - 10y)$

Ahora se forma la función de Lagrange

$$H(x, y, \lambda) = I + \lambda g(x, y) = x(1200 - 10y) + \lambda (x - y - 80)$$

Con las derivadas parciales de esta función de tres variables se forma el sistema

$$\begin{cases} D_1H = 1200 - 10y + \lambda = 0 \\ D_2H = -10x - \lambda = 0 \\ D_3H = x - y - 80 = 0 \end{cases} \implies x = 100, y = 20, \lambda = -1000$$

El ingreso máximo se obtiene al vender 100 almuerzos (20 sobre los 80).

$$I(100, 20) = \$100,000$$

3.20. Problemas propuestos

1. Establecer el dominio y recorrido de los siguientes campos escalares:

$$a) f(x, y) = x + y^2$$

$$d) f(x, y) = 1 + \sqrt{-(x - y)^2}$$

$$b) f(x, y) = x^2 + \frac{y^2}{4}, x > 0$$

$$e) f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

$$c) f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$f) f(x, y) = y^2 - x^2 - 1 = 0$$

2. Si $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2xy}$, calcular $f(2, -3)$ y $f(1, \frac{y}{x})$.

3. Hallar $f(x, y)$ si $f(x + y, x - y) = xy + y^2$.

4. Hallar $f(y, x)$, $f(-x, -y)$, $f(\frac{1}{x}, \frac{1}{y})$ si $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{2xy}$

5. Determinar $f(x)$ si $f(\frac{y}{x}) = \frac{1}{y} \sqrt{x^2 + y^2}$, $xy > 0$

6. Determinar las funciones f y z tales que $z = \sqrt{y} + f(\sqrt{x} - 1)$, $y = 1 \implies z = x$.

7. Determinar las funciones f y z tales que, $z = xf(\frac{y}{x})$, $x = 1 \implies z = \sqrt{1 + y^2}$.

8. Graficar algunas superficies de nivel de los siguientes campos:

$$a) z = x + y$$

$$c) z = \frac{y}{x^2}$$

$$e) w = x^2 + y^2 + z^2$$

$$b) z = \sqrt{xy}$$

$$d) z = x^2 - y^2$$

$$f) w = x + y + z$$

9. Graficar la región de continuidad de los siguientes campos escalares.

$$a) f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}$$

$$b) f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{4x^2 + 9y^2 - 36}}$$

10. Demostrar usando la definición $\delta \epsilon$ que $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} (3x^2 + y) = 5$.

11. Calcular los siguientes límites:

$$a) \lim_{(x,y) \rightarrow (2,3)} (x^2, 3y)$$

$$d) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} \frac{\text{sen}xy}{x}$$

$$g) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{x + y}$$

$$b) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{x^2y}{x^4 + y^2} \right)$$

$$e) \lim_{(x,y) \rightarrow (2,0)} \frac{x - y}{x}$$

$$h) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

$$c) \lim_{(x,y) \rightarrow (-2,4)} y \sqrt{x^3 + 2y}$$

$$f) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\text{sen}(x - y)}{x + y}$$

12. Demostrar que los siguientes límites **no** existen en $(0,0)$.

a) $f(x,y) = \frac{x^4 y^4}{(x^2 + y^4)^3}$

d) $f(x,y,z) = \frac{x^4 + yx^3 + x^2 z^2}{x^4 + y^4 + z^4}$

b) $f(x,y) = \frac{x^4 + 3x^2 y^2 + 2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}$

e) $f(x,y,z) = \frac{x^3 + yz^2}{x^4 + y^2 + z^4}$

c) $f(x,y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y}$

f) $f(x,y,z) = \frac{x^2 + y^2 - z^2}{x^2 + y^2 + z^2}$

13. Demostrar que los campos escalares dados son diferenciables:

a) $f(x,y) = 2xy$

b) $f(x,y) = x^2 + y^2$

c) $f(x,y) = x^2 y + x^3$

14. Dado el campo escalar $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & , x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & , x = y = 0 \end{cases}$, probar que no es continuo en $(0,0)$ y que $D_1 f(0,0)$ y $D_2 f(0,0)$ no existen.

15. Probar que el campo $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^6}{x^6 + (x^2 - y)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ no es continuo en $(0,0)$.

16. Probar que el campo escalar $f(x,y) = \begin{cases} \frac{3x^2 y^2}{x^4 + y^4} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$ no es diferenciable en $(0,0)$, y que $D_1 f(0,0)$ y $D_2 f(0,0)$ existen.

17. Hallar las derivadas direccionales en la dirección señaladas para los campos que se indican:

a) $f(x,y) = x^2 y, \vec{u} = (1,0)$

c) $f(x,y,z) = \frac{xz+4}{x+y}, \vec{u} = (1,0,0)$

b) $f(x,y) = x^2 y, \vec{u} = (0,1)$

18. Demostrar que $w = (x - y)(y - z)(z - x)$ satisface la ecuación diferencial

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

19. Determinar la función z que satisface la ecuación diferencial indicada:

a) $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}$

b) $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2 + y^2}{x}, z(1) = \text{sen } y$

20. Usar la regla de la cadena para hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$, si:

a) $z = f(w), w = xy + \frac{y}{x}$

b) $z = \arctg\left(\frac{y}{x}\right), y = x^2$

21. En un rectángulo, sus lados tienen medidas $a = 10$ cm, $b = 24$ cm. Determinar la variación de la diagonal L del rectángulo, si el lado a se alarga en 4mm, y el lado b se acorta en 1mm. Comparar la variación aproximada con la exacta. (Resp. $dL = 0,062$, $L = 0,065$)

22. Hallar empleando la diferencial, un valor aproximado de $(1,02)^3 \cdot (0,97)^2$ Resp. 1

23. Hallar empleando la diferencial, un valor aproximado de $\text{sen } 32^\circ \cdot \text{cos } 59^\circ$ Resp. 0,273

24. Hallar la diferencial del orden que se indica, para cada campo dado

a) $D^1 f, f(x, y) = x^4 + 3xy^2$

b) $D^2 f, f(x, y) = x^4 + 3xy^2$

Resp. $12x^2 dx^2 + 12y dx dy + 6x dy^2$

c) $D^2 f, f(x, y, z) = x^2 + y^3 z^4$

Resp. $2x^2 dx^2 + 6yz^4 dy^2 + 12y^3 z^2 dz^2 + 24y^2 z^3 dy dz$

d) $D^3 f, f(x, y) = x^3 y^4 + 3x$

Resp. $6y^4 dx^3 + 72xy^3 dx^2 dy + 108x^2 y^2 dx dy^2 + 24x^3 y dy^3$

25. Si $F(x - az, y - bz) = 0$, demostrar que $az_x + bz_y = 1$

26. Si $F\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0$, demostrar que $xz_x + yz_y = z$

27. Sean $f(x, y) = x^3 + y^3, g(x, y) = x^2 - xy + y^2$. Hallar $J\left(\frac{f, g}{x, y}\right)$ Resp. $-3x^3 + 6x^2 y - 6xy^2 + 3y^3$

28. Si las funciones u, v, x, y están relacionadas por la ecuación $\begin{cases} xyu - yv^2 + x^2 = 0 \\ 4u^2 + 2v^2 - yx^3 = 0 \end{cases}$, hallar

$$\frac{\partial u}{\partial x'}, \frac{\partial u}{\partial v'}, \frac{\partial v}{\partial y'}, \frac{\partial x}{\partial u'}, \frac{\partial x}{\partial v'}, \frac{\partial y}{\partial u'}, \frac{\partial y}{\partial v'}$$

29. Si las ecuaciones para u y v $\begin{cases} x^2 + yu + 2z - v = 0 \\ xv + y^2 + 3zu^2 - 5 = 0 \end{cases}$ pueden resolverse en términos de

x, y, z . Hallar $\frac{\partial u}{\partial x'}, \frac{\partial v}{\partial x'}$.

Resp. $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{2(x^2+v^2)}{xy+12uvz}, \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{12xuz-yv}{xy+12uvz}$

30. Sean $f(x, y) = \ln xy, g(x, y) = e^{xy} - 1$. Hallar $J\left(\frac{f, g}{x, y}\right)$ Resp. 0

31. Sean $u = u(x, y), v = v(x, y), u^2 - 3v + x^2 + 2y = 0, u + v^2 - x + 3y^2 = 0$. Hallar u_x, u_y, v_x, v_y

Resp. $\frac{3-4xv}{3+4uv'}, \frac{-4v-18y}{3+4uv'}, \frac{2u+2x}{3+4uv'}, \frac{2-12uy}{3+4uv}$

32. Si $u^2 - v^2 = 2x, y = uv, z = w$. Hallar $J\left(\frac{x, y, z}{u, v, w}\right)$ Resp. $u^2 + v^2$

33. Transformar la ecuación que se indica, empleando la sustitución dada.

a) $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 2x \frac{dy}{dx} + y = 0, x = e^t$

Resp. $\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y = 0$

3.20 Problemas propuestos

b) $(1 - x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} = 0, x = \cos t$ Resp. $\frac{d^2y}{dt^2} = 0$

34. Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie dada.

a) $x^2 + y^2 - z = 0, P = (4, 3, 25)$ Resp. $8x + 6y - z = 25$

b) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, P = (0, 0, a)$ Resp. $z = a$

c) $2xz^2 - 3xy - 4x - 7 = 0, P = (1, -1, 2)$ Resp. $7x - 3y + 8z = 26$

d) $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, en el punto $(2, 3, \sqrt{3})$. Resp. $2x + 3y + z\sqrt{3} - 16 = 0$

e) $z = x + y$, en el punto $(1, 1, 2)$. Resp. $x + y - z = 0$

f) $z = x^2y^2$, en el punto $(1, 2, 4)$. Resp. $8x + 4y - z - 12 = 0$

35. Expresar en potencias de $x - 2$ e $y - 1$ el campo $f(x, y) = xy^2 + 2x - 1$.

Resp. $5 + 3(x - 2) + 4(y - 1) + 2(x - 2)(y - 1) + 2(y - 1)^2 + (x - 2)(y - 1)^2$

36. Expresar en potencias de $x - 1$ e $y - 2$ el campo $f(x, y) = x^2y$.

Resp. $2 + 4(x - 1) + (y - 2) + 2(x - 1)^2 + 2(x - 1)(y - 2) + (x - 1)^2(y - 2)$

37. Sea f campo escalar tal que $f(0, 0) = 4, f_x(0, 0) = 2, f_y(0, 0) = -1, f_{xx}(0, 0) = 3, f_{yy}(0, 0) = 2, f_{xy}(0, 0) = -1, f_{xxx}(0, 0) = 5, f_{xxy}(0, 0) = 7, f_{xyy} = -2, f_{yyy}(0, 0) = 3$. Escribir los 10 primeros términos de la serie de Taylor de f en potencias de x e y .

Resp. $4 + 2x - y + \frac{3}{2}x^2 - xy + y^2 + \frac{5}{6}x^3 + \frac{7}{2}x^2y - \frac{1}{3}xy^2 + \frac{1}{2}y^3$

38. Desarrollar el campo escalar $f(x, y) = -x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 2y - 4$, según Taylor, en una vecindad de $(-2, 1)$.

Resp. $f(x, y) = 1 - (x + 2)^2 + 2(x + 2)(y - 1) + 3(y - 1)^2$

39. Determinar los extremos relativos de los siguientes campos:

a) $f(x, y) = 6x - y^2 - x^2$. Resp. Max. $f(3, 0) = 9$.

b) $f(x, y) = 18x^2 - 32y^2 - 36x - 128y - 110$ Resp. $(1, -2)$ punto silla.

c) $f(x, y) = \text{sen}(x + y) + \text{sen } x + \text{sen } y$. Resp. $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ máximo, $(\frac{5\pi}{3}, \frac{5\pi}{3})$.

d) $f(x, y) = 4xy^2 - 2x^2y - x$. Resp. $(0, \frac{1}{2})$ y $(0, -\frac{1}{2})$ puntos silla.

e) $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy - 6x - 2z + 21$. Resp. Min. $f(6, 3, 1) = 2$.

f) $f(x, y, z) = xyz + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$. Resp. mín $f(1, 1, 1) = 4$. máx $f(-1, -1, -1) = -4$

40. Resolver los siguientes problemas de optimización:

a) Hallar tres números cuya suma sea 21 y su producto máximo. Resp. $x = y = z = 7$

b) Determinar las dimensiones de una caja rectangular, sin tapa, que posee un volumen de 32 cm^3 , de tal forma que su superficie sea mínima.

Resp. $x = y = 4, z = 2. S_{\min} = 48 \text{ cm}^2$

c) Un pentágono está formado por un rectángulo coronado por un triángulo isosceles. El perímetro del pentágono es $P = 10$ cm. Hallar las dimensiones que hagan el área mínima.

$$\text{Resp. } x = 2,68, y = 2,11, z = 1,55. \quad A_{max} = 6,7 \text{ cm}^2$$

d) Hallar las dimensiones del paralelepípedo de volumen máximo que se puede inscribir en un elipsoide de semiejes $a = 3, b = 4, c = 6$.

$$\text{Resp. } x = \frac{6}{\sqrt{3}}, y = \frac{8}{\sqrt{3}}, z = \frac{12}{\sqrt{3}}$$

41. Usar multiplicadores de Lagrange para hallar los puntos críticos de los campos y restricciones que se indican.

a) $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$, restricción $x - y = 3$ Resp. $(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$

b) $f(x, y) = 25 - x^2 - y^2$, restricción $x^2 + y^2 - 4y = 0$ Resp. $(0, 0)$ y $(0, 4)$

c) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, restricción $3x - 2y + z - 4 = 0$ Resp. $(\frac{6}{7}, -\frac{4}{7}, \frac{2}{7})$

42. Inscribir en una semicircunferencia de radio $r = 10$ el rectángulo de área máxima.

$$\text{Resp. } x = 3,53, y = 7,07, A_{max} = 100.$$

43. Hallar las dimensiones del paralelepípedo de volumen máximo que puede inscribirse en un cono de altura $h = 12$, radio basal $r = 4$.

$$\text{Resp. } x = y = 1,88, z = 4, V_{max} = \frac{512}{9}.$$

44. Hallar la distancia mínima entre la parábola $4y = 4x^2 - 7$ y el punto $(3, 2)$ (Ind. Operar con la distancia al cuadrado).

$$\text{Resp. } \sqrt{\frac{17}{16}}.$$

45. Hallar la distancia mínima entre el origen de coordenadas y el plano $3x + 6y + 2z - 28 = 0$ (Ind. Operar con la distancia al cuadrado).

$$\text{Resp. } 4.$$

46. Una casa de comida rápida vende dos clases de sandwich: *chanchoman* y *polloman*. El costo de los primeros es \$ 40 y de \$ 50 los segundos. Si el precio de venta de los *chanchoman* es de \$ x , la venta total mensual de ellos es $(3200 - 50x + 25y)$ unidades. Si el precio de venta de los *polloman* es de \$ y , entonces la venta total mensual de estos es $(25x - 25y)$ unidades. Determinar el precio de venta de cada marca de sandwich para tener la máxima utilidad.

$$\text{Resp. } 84 \text{ y } 89 \text{ dólares}$$

47. La producción de un artículo depende de dos compras, cuyos montos vienen dados por $100x$ y $100y$, y cuyos precios por unidad son de 4 y 1 dólar respectivamente. El monto de la producción está dado por $100z$, siendo su precio por unidad de 9 dólares. La función de producción es $f(x, y) = 5 - \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$. Hallar la máxima utilidad.

$$\text{Resp. } \max(\frac{3}{2}, 3), U_{max} = 2700 \text{ dólares.}$$

48. La función producción de un artículo es

$$f(x, y) = x + \frac{5}{2}y - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}y^2 - \frac{9}{8}$$

3.21 Problemas adicionales

La producción depende de dos compras, cuyos montos vienen dados por $100x$ y $100y$, y cuyos precios por unidad son de 4 y 8 dólar respectivamente. El monto de la producción está dado por $100z$ y cuyo precio por unidad es de 16 dólares. Hallar la máxima utilidad.

Resp. 6400 dólares.

49. Una fábrica produce dos artículos, A y B , cuyas unidades son x e y . A máxima capacidad la fábrica produce, entre ambos artículos, 120 unidades. La función de costo total conjunto es $C = 3x^2 + 5y^2 + 5000$ pesos. hallar el costo mínimo. Resp. \$ 32000

50. La función de ganancia total $G = 10xy - 5x^2 - 7y^2 + 40x$ corresponde a la producción de dos artículos, A y B , de unidades x e y . Si la producción de los dos artículos es de 13, hallar la ganancia máxima. Resp. \$ 225

51. Un vendedor recibe 12 tangas para vender en las playas de Licanray, a \$ 3000 cada una. Al observar la demanda entre las clientas, el vendedor nota que por cada tanga que no pone en venta, ellas están dispuestas a pagarle \$ 500 más por tanga en venta. Determinar el máximo ingreso de esta venta. Resp. \$40 500, (pto crítico, en venta $x = 9$, no en venta $y = 3$).

3.21. Problemas adicionales

1. Bosquejar el dominio del campo escalar $f(x, y) = \begin{cases} |y| \sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}} & , x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & , x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$.

2. Hallar los valores reales de la constante k para los que el campo escalar

$$f(x, y) = \frac{x^6 y^6}{x^4 + ky^4}$$

en una vecindad del $(0, 0)$, tenga límite real finito.

3. Describir gráficamente la región de continuidad del campo

$$f(x, y) = \frac{\ln(|x| + |y|)}{|x| + |y| - 1}$$

4. Una ecuación que relaciona un campo escalar y sus derivadas se llama ecuación diferencial en derivadas parciales. Demostrar que la función $w(x, y) = xy f\left(\frac{x+y}{xy}\right)$ satisface la ecuación diferencial parcial

$$x^2 \frac{\partial w}{\partial x} - y^2 \frac{\partial w}{\partial y} = wG(x, y)$$

y hallar $G(x, y)$.

5. Sean f y g funciones arbitrarias de una variable. Demostrar que $z = f(x - kt) + g(x + kt)$, siendo k una constante, es solución de la ecuación diferencial en derivadas parciales

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

6. Demostrar que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$ para

$$f : \{(x,y) / x^2 < |y|\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x,y) = \frac{x^2 \operatorname{sen}(x^y)}{\sqrt{y^2 + |y|}}$$

7. Sea $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x(y-1)}{x^2+(y-1)^2} & , (x,y) \neq (0,1) \\ 0 & , (x,y) = (0,1) \end{cases}$

- a) Analizar continuidad de f en $(0,1)$
 b) Analizar la continuidad de $D_1 f(x,y)$ y $D_2 f(x,y)$ en $(0,1)$.
 c) Estudiar la diferenciabilidad de f en $(0,1)$
8. Calcular $D_{21} f(0,0)$ y $D_{12} f(0,0)$ para el campo escalar

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

9. Determinar si el campo escalar dado es continuo en $(0,0)$.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{(1+4x)(1+6y)} - 1}{2x+3y} & , (x,y) \neq (0,0) \\ -1 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

10. El volumen de un cono truncado se determina mediante la expresión

$$V = \frac{\pi}{3} h (R^2 + r^2 + rR)$$

siendo, h la altura, r y R radios superior e inferior. Si $r = 20$ dm, $R = 30$ dm, $h = 40$ dm. Determinar aproximadamente la variación del volumen si R aumenta en 0,3 dm, r aumenta en 0,4 dm, y h aumenta en 0,2 dm. Hallar también el porcentaje de esta variación respecto del volumen inicial.

3.21 Problemas adicionales

11. Sea $T(x, y, z, t) = xy^2 + 2yzt + \text{sen } xt$ la temperatura en el punto (x, y, z) en el instante t . La rapidez de variación de la temperatura respecto del tiempo es

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T, \quad \mathbf{v} = \text{velocidad}$$

Determinar la rapidez de variación de la temperatura con respecto al tiempo que experimenta una partícula al pasar por el punto $(2, 3, 1)$ con velocidad $\vec{v} = (1, 1, -2)$ en el instante $t = 0$.

$$\text{Resp. } \frac{dT}{dt} = 29$$

12. Sean a, b, c los lados de un triángulo. Si $b = 4, 10, c = 3, 95, A = 62^\circ$. Determinar el lado a en forma aproximada.
13. Los lados de un terreno triangular miden 100, y 125 metros con un error posible de 0,2 mts. El ángulo comprendido entre los lados es de 60° . ¿Cuál es el error aproximado con que se mide el área del terreno?
14. Hallar $\frac{\partial z}{\partial x}(1, 3)$ y $\frac{\partial z}{\partial y}(1, 3)$ si $x^2 - xz + z^2 + yz = 4$.
15. El punto $P(x, y)$ describe la curva $y = (3x - 4)^4$. Se sabe que $\frac{dx}{dt}(2, 16) = \frac{1}{16}$. Hallar $\frac{dy}{dt}(2, 16)$.
16. Si $w = f(u, v)$, $u = x + y$, $v = 2x - 2y$, demostrar que

$$\frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} = \left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2 - 4 \left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2$$

17. Sean $u = 2z - y$, $v = z + 2y$, $yw = f(u, v)$ función de clase ζ^2 . Demostrar que

$$\frac{\partial^2 w}{\partial v \partial u} = \frac{1}{25} \left(2 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + 3 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial y} - 2 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

18. Hallar $D_{\vec{u}}f$ para el campo escalar $f(x, y) = x^2 - xy - 2y^2$ en $(1, 2)$ y en la dirección que forma un ángulo de 60° con el eje Ox .
19. Hallar $D_{\vec{u}}f$ para el campo escalar $f(x, y) = x^2y^3 - 3y^2$ en $(-3, 4)$ en dirección hacia el origen de coordenadas.
20. Hallar $D_{\vec{u}}f$ para el campo escalar $f(x, y, z) = xy^2 - xyz + z^3$ en $(1, 1, 2)$ y en la dirección que forma ángulos de $60^\circ, 45^\circ, y 60^\circ$ con los ejes coordenados.
21. Si $z = f(x^2y)$ es diferenciable, demostrar que $x \frac{\partial z}{\partial x} = 2y \frac{\partial z}{\partial y}$
22. Hallar la distancia mínima del origen $(0, 0, 0)$ a la curva $\{x(x + 8y) = 45 - 7y^2, z = 0\}$.

23. Sea $f(x, y) = \frac{x}{x - 2y}$

- Determinar el dominio de definición del campo escalar f .
- Determinar la región de continuidad del campo f .
- Hallar $D_1f(0, 0)$ y $D_2f(0, 0)$.
- Determinar si f es diferenciable en $(0, 0)$.

24. La función $z = f(x, t)$ describe la temperatura en función de la posición x y del tiempo t . Demostrar que $z = e^{\pi^2 a^2 t} \cos \pi x$ satisface la ecuación $a^2 f_{xx} = -f_t$.

25. Hallar los valores de a de modo que el campo $z = 3axy - x^3 - y^3$ tenga un máximo.

26. Maximizar la utilidad $u = x^{1/3}y^{1/2}$ si la restricción de presupuesto es $10x + 3y = 140$.

27. Hallar una constante c tal que en todo punto de intersección de las esferas

$$(x - c)^2 + y^2 + z^2 = 3, \quad x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 1$$

los planos tangentes correspondientes sean perpendiculares.

Resp. $c = \pm\sqrt{3}$

28. Sea $w = f(x, y)$, si $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$. Demostrar que

$$\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2$$

29. Una fábrica produce sólo dos artículos; *cinturones* y *carteras*. La función de costo total viene dada por $C = 8x^2 - xy + 12y^2$. La fábrica está obligada por contrato a producir 42 unidades entre cinturones y carteras. Determinar la producción necesaria de cada uno de estos artículos con el fin de minimizar los costos.

30. Hallar los valores extremos del campo $f(x, y) = 8x^2 - 24xy + y^2$, sujeto a la restricción $x^2 + y^2 = 1$.

31. Un carpintero debe construir una caja abierta y de base cuadrada. Los lados de la caja tienen un costo de \$ 3 el cm^2 y la base \$ 4 el cm^2 . Hallar las dimensiones de la caja de volumen máximo que se puede construir con \$ 48.

32. Hallar los valores extremos del campo $f(x, y) = y + xz - 2x^2 - y^2 - z^2$, sujeto a la restricción $z = 35 - x - y$.

33. Hallar e identificar los puntos críticos de la función $f(x, y) = y^3 + 3x^2y - 3x^2 - 3y^2 + 2$.

34. Sea $z = f(x, y)$, $x = u + v$, $y = u - v$. Hallar $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}$ en términos de x e y .

35. Hallar el punto de intersección de las esferas $(x - 2)^2 + y^2 + z^2 = 12$, $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, más próximo al punto $(1, 1, 0)$.
36. Hallar los valores máximos y mínimos del campo $z = x^2y(4 - x - y)$ sobre el recinto acotado por las rectas $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 6$.
37. Se dispone de \$1600 para construir una caja rectangular cerrada de base cuadrada. El precio del material, por metro cuadrado, es de \$ 200 para la tapa y el fondo y de \$ 100 para los lados. Hallar el máximo volumen de la caja a construir.
38. Una caja rectangular debe quedar exactamente dentro del elipsoide $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 18$, con cada arista paralela a uno de los eje coordenados. Hallar su máximo volumen.
39. Determinar las dimensiones de una caja rectangular de volumen máximo que se puede ubicar de manera que sus caras coincidan con los planos coordenados y un vértice quede en el plano $x + y + z = 1$.
40. Estudiar el campo escalar $f(x, y) = x^2y^3(6 - x - y)$ en lo referente a existencia de puntos extremos y puntos sillas.
41. Un lago tiene la forma de la elipse $x^2 + 4y^2 = 4$. Se traza una carretera siguiendo la curva $x + y = 4$. Hallar el punto más cercano entre la carretera y el lago.
42. Este problema es de PLANTEAMIENTO (no para resolver).
¿Cual debe ser el diseño que involucre un mínimo gasto de material al construir una cisterna metálica abierta, con un triángulo rectángulo como base y de lados verticales si el volumen de la cisterna debe ser de 2 metros cúbicos?
43. La temperatura en un punto (x, y) es $T = \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $k \in \mathbb{R}$
- Hallar la dirección en la cual la razón de cambio de la temperatura es máxima en el punto $(1, \sqrt{3})$
 - Un insecto se detiene en el punto $(1, \sqrt{3})$ y nota que la temperatura aumenta en la vecindad de dicho punto. Hallar la dirección en el cual debe moverse de modo que la temperatura sea menor.
44. Sea $V(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ el potencial eléctrico de un campo escalar en el punto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Determinar la rapidez de cambio del potencial en $(2, 2, -1)$ en la dirección del punto $(2, -3, 6)$.
45. El volumen de un silo cilíndrico con cúpula semiesférica es $V = \pi r^2 h + \frac{2}{3} \pi r^3$, siendo h la altura, r el radio. Estimar el cambio en el volumen de un silo de 6 pies de radio y 30 pies de altura si el radio aumenta en 4 pulgadas y la altura disminuye en 6 pulgadas.
46. El radio r y la altura h de un cilindro circular recto aumentan a razón de 0,01 cm/min. y 0,02 cm/min. respectivamente. Hallar la tasa de crecimiento del volumen respecto al tiempo cuando $r = 4$ cm, $h = 7$ cm.

47. La temperatura T en un punto (x, y) de una placa de metal colocada en el plano xy es inversamente proporcional a la distancia al origen. La temperatura en el punto $P(3, 4)$ es de 100^0 .
- Hallar la razón de cambio de la temperatura en P en dirección del vector $(1, 1)$.
 - Hallar la dirección de máximo aumento de la temperatura a partir del punto P .
 - Hallar la dirección de mínimo aumento de la temperatura a partir del punto P .
 - Hallar la dirección en la que se anula la tasa de variación.

48. Estimar $(1, 02)^2 \ln(0, 97)$ mediante un polinomio de Taylor de orden 2.

49. La temperatura en cada punto de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 50$ viene dada por $T(x, y, z) = 100 + x^2 + y^2$. Hallar la temperatura máxima sobre la curva de intersección de la esfera con el plano $x + y + z = 5$.

50. Hallar los extremos del campo escalar $f(x, y) = 2x + y$ en la región R acotada por $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 4$, $3x + y \leq 6$.

51. Considerar el campo escalar

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- Determinar continuidad en $(0, 0)$
 - Hallar $D_1 f(0, 0)$ y $D_2 f(0, 0)$
 - Averiguar si el campo es diferenciable en $(0, 0)$
52. Usar diferenciales para hallar un valor **aproximado**, con dos decimales, de

$$\sqrt{(0, 98)^2 + (2, 01)^2 + (1, 94)^2}$$

53. La derivada direccional de un campo escalar $w = f(x, y)$ en el punto $P_0(1, 2)$ en la dirección hacia $P_1(2, 3)$ es $2\sqrt{2}$, y en dirección hacia $P_2(1, 0)$ es -3 . Hallar la derivada direccional en P_0 en dirección hacia el origen de coordenadas. Determinar además, en que dirección, a partir de P_0 se encuentra el máximo incremento del campo.

54. El Comandante del avión LAN 707, que se dirige de Santiago a Puerto Montt, informa a la torre de control del aeropuerto Maquehue que la temperatura T en cualquier punto del espacio es $T = T(x, y, z)$, que las coordenadas x e y aumentan a razón de 4 millas por segundo, y que la coordenada z disminuye a razón de 3 millas por segundo. La computadora de la nave le indica que

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 4, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 7, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 9$$

Con el fin de dar con la ruta correcta el comandante necesita saber $\frac{dT}{dt}$. Determinar la respuesta correcta que debe dar la torre de control.

55. Sea $w = f(u, v)$ función de clase c^2 , con $x = u + v$, $y = u - v$. Demostrar que

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

56. Se fabrica un artículo K , de insumos A y B cuyas unidades son x e y . La función de producción de K es P , cuya venta a V pesos determina el Ingreso. Los costos unitarios de los insumos son C_A y C_B , el costo fijo es C_F . Hallar la máxima ganancia.

$$P = 180x + 240y - 5xy - 3x^2 - 5y^2, \quad V = 10, \quad C_A = 30, \quad C_B = 50, \quad C_F = 0$$

57. Hallar mínima distancia entre el paraboloides $x^2 + y^2 + z - 9 = 0$ y el plano $2x + 4y + z - 56 = 0$.

58. Hallar la derivada direccional del campo $f(x, y, z) = x^3 + 4xy + z^2 - 2yz$ en dirección de la curva $\vec{r}(t) = t\vec{i} + 2t^2\vec{j} + t^3\vec{k}$ en $t = 1$. Graficar la trayectoria. (Ind. usar definición adecuada)

59. Suponer que $T(x, y) = 40 - x^2 - 2y^2$ representa la distribución de temperatura en el plano xy . La temperatura es en grados celsius, x e y en metros. La reina "mechona" de la UFRO se halla en el punto $(3, 2)$ y pretende dar un paseo. Quien desee acompañarla deberá resolver los siguientes acertijos del Oráculo del ayudante:

- a) Describir el lugar geométrico de los puntos que debe recorrer si "ella" desea disfrutar siempre de la misma temperatura que en el punto $(3, 2)$.
- b) Hallar la dirección y sentido que debe tomar para ir en camino del máximo crecimiento de la temperatura.
- c) Si camina $\sqrt{5}$ metros en la dirección del vector $\vec{a} = -6\vec{i} - 8\vec{j}$, determinar la temperatura en ese punto.

60. Considerar el campo escalar $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = 0 \end{cases}$

- a) Determinar si el campo es continuo en $(0, 0)$
- b) Hallar $D_{21}f(0, 0)$ y $D_{12}f(0, 0)$.
- c) Averiguar si el campo es diferenciable en $(0, 0)$.

61. Probar que las superficies $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 6y + 2z + 10 = 0$ y $G(x, y, z) = x^2 + 4y^2 - 4z^2 - 4 = 0$ son tangentes en el punto $(2, 1, 1)$.

los planos tangentes lo solucionan

62. Hallar el punto sobre la superficie $z = x^2 - 2y^2 + 3y$ donde el plano tangente es paralelo al plano $2x - 5y - z + 5 = 0$. Resp. $(1, 2, -1)$

63. Se considera el campo escalar que asocia a cada punto su distancia al origen de coordenadas. Determinar:

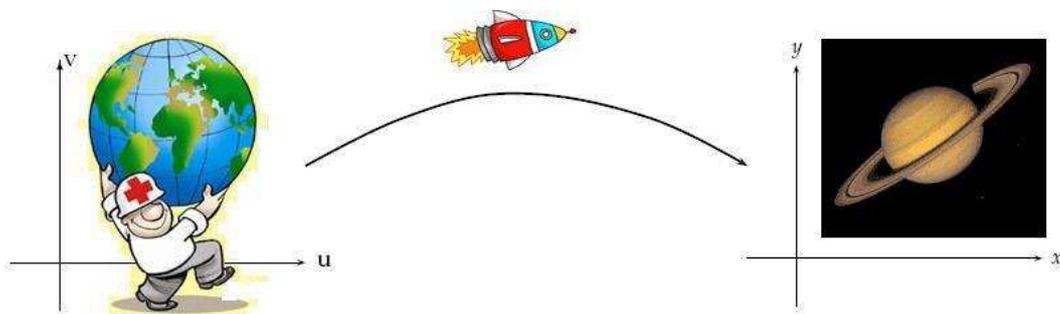
- a) las superficies equiescalares. Resp. Esferas de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = C$
- b) la superficie equiescalar que pasa por $(1, 1, 1)$. Resp. $x^2 + y^2 + z^2 = 3$
- c) el gradiente en $(1, 1, 1)$. Resp. $\nabla f = (1, 1, 1)$
64. Para la superficie $x^2 + 3xyz + z^3 - 5 = 0$, determinar el plano tangente en el punto $(1, 1, 1)$. Resp. $5x + 3y + 6z - 14 = 0$
65. Calcular dz si $xyz = 2x + 4y + 3z$. Resp. $dz = \frac{yz-2}{3-xy}dx + \frac{xz-4}{3-xy}dy$
66. Hallar los extremos de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ en el recinto limitado por las rectas $y = 1 - x$, $y = 1 + x$, $y = -1 - x$, $y = -1 + x$. Resp. mínimo en $(0, 0, 0)$ y máximos en $(0, 1, 1)$, $(0, -1, 1)$, $(1, 0, 1)$, $(-1, 0, 1)$

Bienaventurado el hombre
que halla la sabiduría
Y ante todas sus posesiones
adquiere inteligencia.

Proverbios 1:7

CAPÍTULO

INTEGRALES 4 MÚLTIPLES



4.1. Introducción

Generalizamos la integral de Riemann, de funciones reales de una variable real sobre un intervalo $[a, b]$, a funciones reales de varias variables reales (campos escalares) y a conjuntos que son más generales que un intervalo. Dejamos claramente establecido que la integral de Riemann tiene sólo un gran valor teórico, su definición no permite calcular integrales múltiples, pero si nos proporciona un sustento matemático adecuado del concepto de integral múltiple. Afortunadamente, los teoremas fundamentales proporcionan las herramientas de cálculo de dichas integrales. Nuestro trabajo consta de dos partes, la primera considera la extensión de la integral a intervalos de \mathbb{R}^n , y la segunda a conjuntos acotados de \mathbb{R}^n . Interesan de manera especial los casos particulares $n = 2$ y $n = 3$, por esta razón, la teoría se mantiene a nivel de \mathbb{R}^n y los ejemplos y algunas demostraciones se realizan para $n = 2$. Posteriormente, se analiza el cálculo de las integrales dobles y triples en forma separada con algunas de sus aplicaciones más interesantes.

4.2. Intervalos

En el caso $n = 1$. Esto es, para las funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, el proceso de la integral requiere como punto de partida, para desarrollar la teoría de la integral de Riemann, que la función f sea positiva y acotada sobre un intervalo de \mathbb{R} . Esto se mantiene en la generalización. Veamos el significado de intervalo en dimensiones superiores.

Definición 4.2.1. Sean $I_1 = [a_1, b_1]$, $I_2 = [a_2, b_2], \dots, I_n = [a_n, b_n]$ intervalos de \mathbb{R} , $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ elementos de \mathbb{R}^n . Se llama **intervalo cerrado** de \mathbb{R}^n al conjunto $[\vec{a}, \vec{b}]$ tal que

$$[\vec{a}, \vec{b}] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$$

En particular:

☞ Si $n = 1$, el intervalo cerrado $[a, b] \subset \mathbb{R}$ es el conjunto

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$$

☞ Si $n = 2$, el intervalo cerrado $[\vec{a}, \vec{b}] \subset \mathbb{R}^2$ con $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$, $\vec{x} = (x, y)$, es el conjunto

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 / a_1 \leq x \leq b_1, a_2 \leq y \leq b_2\} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$$

Observamos que $[\vec{a}, \vec{b}] \subset \mathbb{R}^2$, es un rectángulo de vértices (a_1, a_2) , (b_1, a_2) , (b_1, b_2) , (a_1, b_2) , con lados paralelos a los ejes coordenados. (figura 4.1)

☞ Si $n = 3$, el intervalo $[\vec{a}, \vec{b}]$ con $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{x} = (x, y, z)$ es el conjunto

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 / a_1 \leq x \leq b_1, a_2 \leq y \leq b_2, a_3 \leq z \leq b_3\} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$$

Este intervalo es un paralelepípedo rectangular. (figura 4.2).

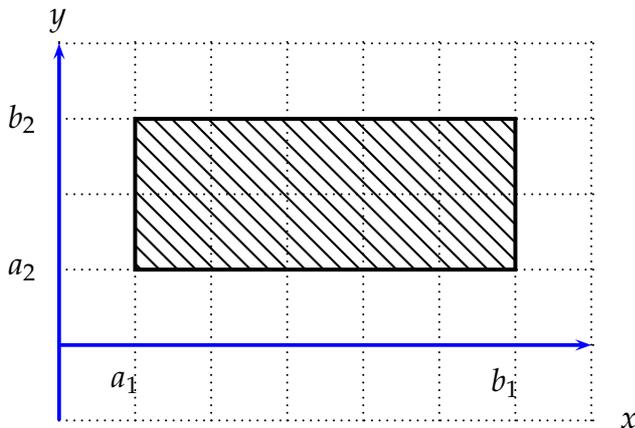


figura 4.1

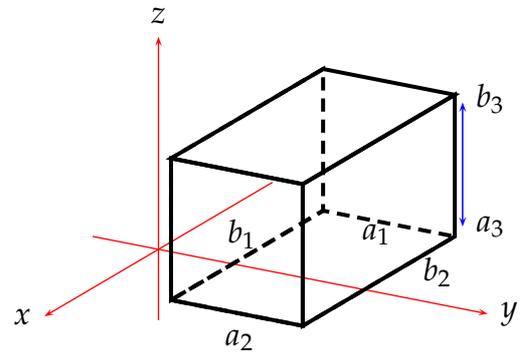


figura 4.2

4.3. Contenido

Es conocido que todo intervalo de la recta real tiene longitud, finita o infinita. En dimensiones superiores empleamos una nueva terminología que incluye este caso particular.

Definición 4.3.1. Sean $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, elementos de \mathbb{R}^n . El **contenido** del intervalo $[\vec{a}, \vec{b}] \subset \mathbb{R}^n$, que se denota por $\zeta([\vec{a}, \vec{b}])$ corresponde a

$$\zeta([\vec{a}, \vec{b}]) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$$

Si $n = 1$, el contenido del intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ es la **longitud** del intervalo unidimensional.

$$\zeta([a, b]) = L([a, b]) = b_1 - a_1$$

Si $n = 2$, el contenido del intervalo $[\vec{a}, \vec{b}] \subset \mathbb{R}^2$ es el **área** del rectángulo.

$$\zeta([\vec{a}, \vec{b}]) = A([\vec{a}, \vec{b}]) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2)$$

Si $n = 3$, el contenido del intervalo $[\vec{a}, \vec{b}] \subset \mathbb{R}^3$ es el **volumen** del paralelepípedo

$$\zeta([\vec{a}, \vec{b}]) = V([\vec{a}, \vec{b}]) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdot (b_3 - a_3)$$

4.4. Volumen bajo una superficie

Sea $f : R \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar positivo y acotado en el rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$. Pretendemos hallar el volumen del sólido que queda entre el grafo de f en R y el plano xy , tal como muestra la figura 4.3

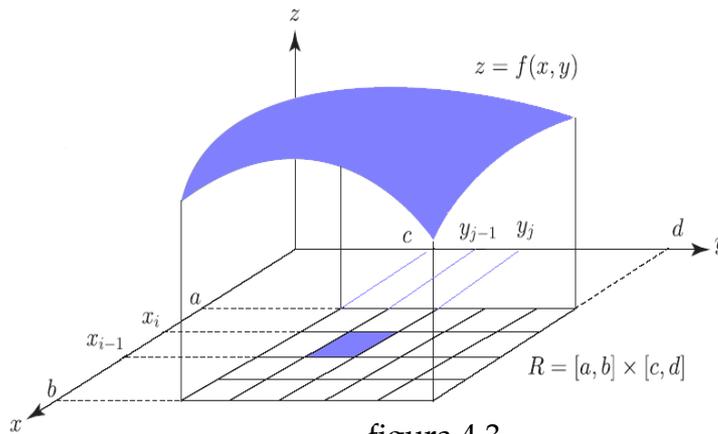


figura 4.3

Para este propósito, veamos en primer lugar, la generalización del concepto de partición. En el caso $n = 1$, una partición de $[a, b]$ es un conjunto de la forma

$$P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$$

siendo la norma de esta partición es $\|P\| = \max\{x_i - x_{i-1}\}$.

Para definir partición de un intervalo $[\vec{a}, \vec{b}] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}^2$, se consideran:

- $P_1 = \{x_i / i = 0, 1, 2, \dots, k\}$ partición de $[a_1, b_1] \subset \mathbb{R}$
- $P_2 = \{x_j / j = 0, 1, 2, \dots, k\}$ partición de $[a_2, b_2] \subset \mathbb{R}$.

En base a esto, la partición $P = P_1 \times P_2$ de $[\vec{a}, \vec{b}]$ corresponde al conjunto $P = \{(x_i, x_j)\}$. La generalización a dimensiones mayores es entonces evidente.

Definición 4.4.1. Sean $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$. Si P_i es una partición de $[a_i, b_i]$, entonces $P = P_1 \times P_2 \times \dots \times P_n$, se denomina **partición** de $[\vec{a}, \vec{b}]$, y $\|P\|$ es su **norma** o **mall**a, la que corresponde a $\|P\| = \max\{\|P_i\| / i = 1, 2, \dots, n\}$

Ejemplo 4.4.2. Los conjuntos $P_1 = \{0, 1/2, 1\}$, $P_2 = \{0, 1\}$ son particiones de $[0, 1] \subset \mathbb{R}$. Mientras que, $P = \{0, 1/2, 1/4, 1\}$, $Q = \{0, 1/3, 3/4\}$ **no** lo son. Además, $\|P_1\| = 1/2$, $\|P_2\| = 1$.

Ejemplo 4.4.3. Sean $[\vec{a}, \vec{b}] \subset \mathbb{R}^2$, con $\vec{a} = (2, 3)$, $\vec{b} = (4, 6)$, entonces $[\vec{a}, \vec{b}] = [2, 4] \times [3, 6]$. Si $P_1 = \{2, 3, 4\}$ y $P_2 = \{3, 5, 6\}$ son particiones de $[2, 4]$ y $[3, 6]$ respectivamente, entonces

$$P = \{(2, 3), (2, 5), (2, 6), (3, 3), (3, 5), (3, 6), (4, 3), (4, 5), (4, 6)\}$$

es una partición de $[\vec{a}, \vec{b}]$. Además, $\|P\| = \max\{\|P_1\|, \|P_2\|\} = 2$.

4.5. Sumas superior e inferior

Sean $f : [\vec{a}, \vec{b}] \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ función positiva y acotada, P partición de $[\vec{a}, \vec{b}]$, y R_i el i -ésimo intervalo de la partición P , $1 \leq i \leq n$. En estas condiciones existen escalares m y M tales que

$$m \leq f(\vec{x}) \leq M, \forall \vec{x} \in [\vec{a}, \vec{b}] \subset \mathbb{R}^n$$

Si definimos

$$m_i(f) = \inf\{f(\vec{x}) / \vec{x} \in R_i, \vec{x} \in \mathbb{R}^n\}$$

$$M_i(f) = \sup\{f(\vec{x}) / \vec{x} \in R_i, \vec{x} \in \mathbb{R}^n\}$$

cuya existencia está asegurada por la hipótesis de que f está acotada en $[\vec{a}, \vec{b}]$, entonces se satisface

$$m \leq m_i(f) \leq M_i(f) \leq M \tag{4.1}$$

Definición 4.5.1. Se denominan **suma inferior** y **suma superior**, respectivamente, de la función f , correspondientes a la partición P , a las expresiones

$$s(f, P) = \sum_{i=1}^n m_i(f) \zeta(R_i) \quad y \quad S(f, P) = \sum_{i=1}^n M_i(f) \zeta(R_i)$$

$\zeta(R_i)$ es el contenido del subintervalo R_i

4.5.1. Interpretación geométrica

La figura 4.4 muestra una superficie S que corresponde a la gráfica de un campo $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ positivo y acotado sobre un intervalo $[\vec{a}, \vec{b}]$. Para una partición P del intervalo la suma inferior representa la suma de los volúmenes de los paralelepípedos interiores, y la suma superior la suma de los volúmenes de los paralelepípedos exteriores.

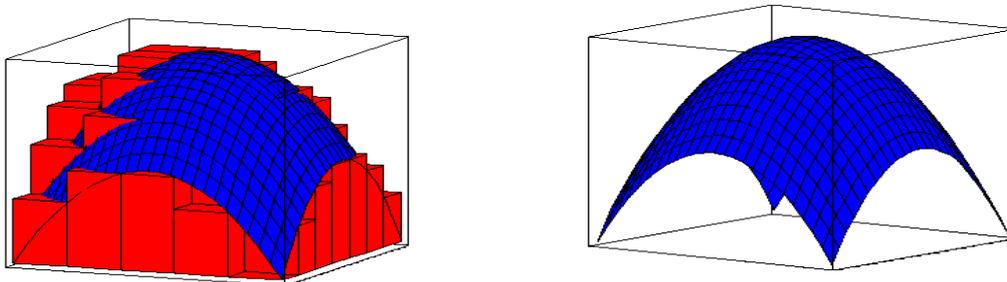


figura 4.4

Veamos en que forma podemos aproximarnos a una expresión matemática del volumen bajo la superficie.

Proposición 4.5.2. Sea $f : [\vec{a}, \vec{b}] \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ función positiva y acotada, entonces para toda partición P de $[\vec{a}, \vec{b}]$ se tiene

$$m \cdot \zeta([\vec{a}, \vec{b}]) \leq s(f, P) \leq S(f, P) \leq M \cdot \zeta([\vec{a}, \vec{b}])$$

Demostración.

Multiplicando la ecuación (4.1) por $\zeta(R_i)$ y aplicando sumatoria se tiene que

$$m \cdot \zeta([\vec{a}, \vec{b}]) = \sum_{i=1}^n m \zeta(R_i) \leq \sum_{i=1}^n m_i(f) \zeta(R_i) \leq \sum_{i=1}^n M_i \zeta(R_i) \leq \sum_{i=1}^n M \zeta(R_i) = M \zeta([\vec{a}, \vec{b}])$$

Esto es

$$m \cdot \zeta([\vec{a}, \vec{b}]) \leq s(f, P) \leq S(f, P) \leq M \cdot \zeta([\vec{a}, \vec{b}])$$

Es claro entonces, que el volumen bajo la superficie S satisface

$$s(f, P) \leq V(S) \leq S(f, P)$$

Esta aproximación mejora si se introduce el concepto de **refinamiento**.

Definición 4.5.3. Sean P y P' particiones de $[\vec{a}, \vec{b}] \subset \mathbb{R}^n$, tal que $P \subset P'$, entonces P' recibe el nombre de **refinamiento de P** .

Ejemplo 4.5.4. La partición $P_2 = \{0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$ del intervalo $[0, 1] \subset \mathbb{R}$, es un refinamiento de la partición $P_1 = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ del mismo intervalo.

Ejemplo 4.5.5. Para el intervalo $[0, 1] \times [0, 1]$ de \mathbb{R}^2 la partición

$$P_2 = \{(0,0), (0, \frac{1}{2}), (0,1), (\frac{1}{2}, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (1,0), (1, \frac{1}{2}), (1,1)\}$$

es un refinamiento de la partición

$$P_1 = \{(0,0), (0, \frac{1}{2}), (0,1), (1,0), (1, \frac{1}{2}), (1,1)\}$$

del intervalo considerado.

Si P es una partición de $[\vec{a}, \vec{b}] \subset \mathbb{R}^n$, y P' es un refinamiento de ella, entonces las sumas superior e inferior del campo f sobre el intervalo y respecto de estas particiones, satisface que

$$s(f, P) \leq s(f, P') \quad \text{y} \quad S(f, P') \leq S(f, P)$$

Tal como en integración unidimensional, lo que estamos afirmando, es que un refinamiento aumenta las sumas inferiores y disminuye las sumas superiores. Con lo cual la aproximación al volumen mejora tanto como podamos refinar.

4.6. Integral de Riemann

Ahora vamos a encontrar la **óptima** aproximación al volumen bajo la superficie, teniendo como base las ideas trabajadas anteriormente. Sea Γ el conjunto de todas las particiones de $[\vec{a}, \vec{b}] \subset \mathbb{R}^n$. De la expresión

$$m \cdot \zeta([\vec{a}, \vec{b}]) \leq s(f, P) \leq S(f, P) \leq M \cdot \zeta([\vec{a}, \vec{b}])$$

que se verifica para cada partición $P \in \Gamma$, se deduce que el conjunto $\{s(f, P) / P \in \Gamma\}$ está acotado superiormente, de hecho, $M \cdot \zeta([\vec{a}, \vec{b}])$ es una cota superior. Se sigue entonces, que este conjunto debe tener supremo. En forma análoga, el conjunto $\{S(f, P) / P \in \Gamma\}$ tiene una cota inferior, $m \cdot \zeta([\vec{a}, \vec{b}])$, siguiéndose entonces que este conjunto debe tener ínfimo. Debido a su importancia, a este supremo y a este ínfimo damos nombre y simbología propia.

Definición 4.6.1. Sea $\Gamma = \{P / P \text{ partición de } [\vec{a}, \vec{b}] \subset \mathbb{R}^n\}$, las expresiones siguientes se denominan **integral inferior** e **integral superior** respectivamente, de f sobre el intervalo $[\vec{a}, \vec{b}]$.

$$\int_{[\vec{a}, \vec{b}]} f = \sup\{s(f, P) / P \in \Gamma\} \quad , \quad \int_{[\vec{a}, \vec{b}]} f = \inf\{S(f, P) / P \in \Gamma\}$$

Se deduce, directamente de esta definición, que si f es una función acotada sobre $[\vec{a}, \vec{b}] \subset \mathbb{R}^n$, entonces **para toda** partición P de este intervalo se tiene

$$s(f, P) \leq \int_{[\vec{a}, \vec{b}]} f \leq \int_{[\vec{a}, \vec{b}]} f \leq S(f, P) \tag{4.2}$$

Definición 4.6.2. Una función f definida sobre $[\vec{a}, \vec{b}] \subset \mathbb{R}^n$ es **Riemann Integrable**, o simplemente **integrable** si está acotada sobre $[\vec{a}, \vec{b}]$ y satisface

$$\int_{[\vec{a}, \vec{b}]} f = \int_{[\vec{a}, \vec{b}]} f$$

El valor común se denota $\int_{[\vec{a}, \vec{b}]} f$, y recibe el nombre de **integral definida** o de **Riemann**

Si $n = 2$, la integral de la función f sobre $[\vec{a}, \vec{b}] \subset \mathbb{R}^2$ se llama **integral doble**, y su notación es

$$\int_{[\vec{a}, \vec{b}]} f = \int \int_{[\vec{a}, \vec{b}]} f(x, y) dA$$

dA es la diferencial de área.

Si $n = 3$, la integral de la función f sobre $[\vec{a}, \vec{b}] \subset \mathbb{R}^3$ se llama **integral triple**, y se anota

$$\int_{[\vec{a}, \vec{b}]} f = \int \int \int_{[\vec{a}, \vec{b}]} f(x, y, z) dV$$

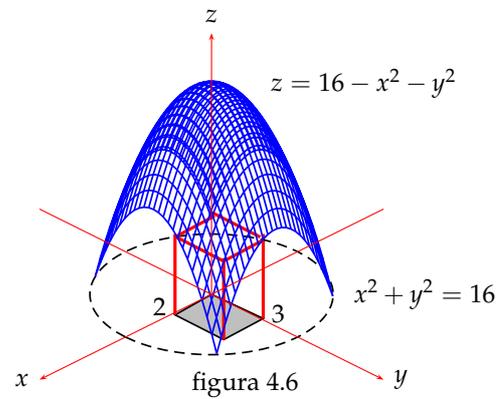
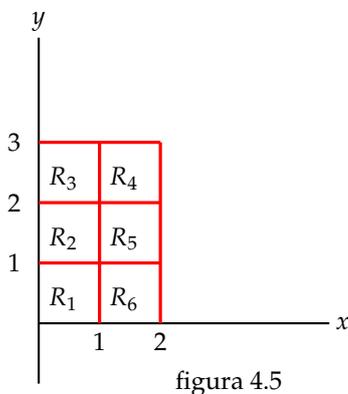
dV es la diferencial de volumen.

Consecuencia inmediata de (4.2) es que si f es integrable sobre $[\vec{a}, \vec{b}] \subset \mathbb{R}^n$, P partición de $[\vec{a}, \vec{b}]$, entonces

$$s(f, P) \leq \int_{[\vec{a}, \vec{b}]} f \leq S(f, P) \tag{4.3}$$

Este resultado es una herramienta que permite el cálculo aproximado de la integral. Mostramos esto para el caso $n = 2$.

Ejemplo 4.6.3. Sea $f(x, y) = 16 - x^2 - y^2$, $[\vec{a}, \vec{b}] = [0, 2] \times [0, 3]$ Es claro que f es acotada y no negativa sobre el intervalo $[\vec{a}, \vec{b}]$. Vamos a encontrar un valor aproximado de la integral de f sobre $[\vec{a}, \vec{b}]$, usando las particiones $P_1 = \{0, 1, 2\}$ y $P_2 = \{0, 1, 2, 3\}$ de $[0, 2]$ y $[0, 3]$, respectivamente.



La figura 4.5 muestra la partición del intervalo y la figura 4.6 la superficie que es un paraboloides. Una aproximación, no muy buena, viene dada por la aplicación de la proposición (4.5.2). Para ello debemos determinar el valor de la función en todos los puntos de la partición.

$$P = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 0), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$$

de $[0, 2] \times [0, 3]$. Los valores de la función son: $f(0, 0) = 16$, $f(0, 1) = 15$, $f(1, 0) = 15$, $f(1, 1) = 14$, $f(0, 2) = 12$, $f(1, 2) = 11$, $f(0, 3) = 7$, $f(1, 3) = 6$, $f(2, 3) = 3$, $f(2, 2) = 8$, $f(2, 1) = 11$, $f(2, 0) = 12$. Con lo que $m = 3$, $M = 16$. Luego,

$$6 \cdot 3 = 18 \leq \int_{[\vec{a}, \vec{b}]} (16 - x^2 - y^2) dA \leq 16 \cdot 6 = 96$$

Una mejor aproximación se encuentra mediante el empleo de las sumas superior e inferior de la función sobre el intervalo. En efecto,

$$\begin{aligned} s(f, P) &= \sum_{i=1}^6 m_i(f) A(R_i) = f(1, 1) + f(1, 2) + f(1, 3) + f(2, 3) + f(2, 2) + f(2, 1) \\ &= 14 + 11 + 6 + 3 + 8 + 11 = 53 \end{aligned}$$

De igual forma se obtiene la suma superior

$$\begin{aligned} S(f, P) &= \sum_{i=1}^6 M_i(f) A(R_i) = f(0,0) + f(0,1) + f(0,2) + f(1,2) + f(1,1) + f(1,0) \\ &= 16 + 15 + 12 + 11 + 14 + 15 = 83 \end{aligned}$$

Esto significa que

$$53 \leq \int_{[\vec{a}, \vec{b}]} (16 - x^2 - y^2) dA \leq 83$$

La aproximación media aritmética de $s(f, P)$ y $S(f, P)$ entrega la aproximación

$$\int_{[\vec{a}, \vec{b}]} (16 - x^2 - y^2) dx dy \approx \frac{1}{2} (53 + 83) = 68$$

El valor exacto de la integral es 70. De aquí que el uso de la media aritmética de las sumas superior e inferior, nos ha llevado a cometer un error de 2 unidades.

El siguiente resultado entrega condiciones de integrabilidad para una función acotada, tomando como base las sumas superior e inferior.

Teorema 4.6.4. Una función acotada f es integrable sobre el intervalo $[\vec{a}, \vec{b}] \subset \mathbb{R}^n$ si y sólo si, para cada $\epsilon > 0$ existe P partición de $[\vec{a}, \vec{b}]$ tal que $S(f, P) - s(f, P) < \epsilon$.

Demostración.

(\Leftarrow) Suponemos que para todo $\epsilon > 0$ existe P partición tal que $S(f, P) - s(f, P) < \epsilon$.

Del hecho de que $s(f, P) \leq \int_{[\vec{a}, \vec{b}]} f$ se sigue que

$$-s(f, P) \geq - \int_{[\vec{a}, \vec{b}]} f \tag{4.4}$$

Además sabemos que

$$S(f, P) \geq \int_{[\vec{a}, \vec{b}]} f \tag{4.5}$$

Luego, de las ecuaciones (4.4) y (4.5) se sigue que

$$S(f, P) - s(f, P) \geq \int_{[\vec{a}, \vec{b}]} f - \int_{[\vec{a}, \vec{b}]} f \tag{4.6}$$

Al considerar la hipótesis $S(f, P) - s(f, P) < \epsilon$ en la ecuación 3.6 tenemos que

$$0 \leq \int_{[\vec{a}, \vec{b}]} f - \int_{[\vec{a}, \vec{b}]} f < \epsilon$$

de donde se concluye que f es integrable sobre $[\vec{a}, \vec{b}] \subset \mathbb{R}^2$.

(\implies) Suponemos ahora que f integrable sobre $[\vec{a}, \vec{b}]$. Entonces

$$\int_{[\vec{a}, \vec{b}]} f = \int_{[\vec{a}, \vec{b}]} f = \int_{[\vec{a}, \vec{b}]} f$$

Luego

$$\int_{[\vec{a}, \vec{b}]} f = \sup\{s(f, P)\} = \inf\{S(f, P)\}$$

Como la integral es el supremo de las sumas inferiores, para cada $\epsilon > 0$, existe P_1 partición tal que

$$\int_{[\vec{a}, \vec{b}]} f - s(f, P_1) < \frac{\epsilon}{2}$$

Ahora, dado que la integral es el ínfimo de las sumas superiores, existe partición P_2 tal que

$$S(f, P_2) - \int_{[\vec{a}, \vec{b}]} f < \frac{\epsilon}{2}$$

Al sumar estas desigualdades,

$$S(f, P_2) - s(f, P_1) < \epsilon$$

Si P es un refinamiento de P_1 y de P_2 , entonces

$$S(f, P) - s(f, P) \leq S(f, P_2) - s(f, P_1) < \epsilon$$

con lo cual se concluye la demostración.

4.7. Propiedades de la integral

Enunciamos las propiedades básicas de la integral, que son las herramientas que permiten operar con cierta facilidad los conceptos ya definidos. Como se trata de una generalización, no debe extrañar que sean las mismas propiedades de la integral unidimensional.

Propiedad 1

Si $c : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función constante, entonces ella es integrable sobre $[\vec{a}, \vec{b}]$, y se tiene

$$\int_{[\vec{a}, \vec{b}]} c = c \zeta([\vec{a}, \vec{b}])$$

Propiedad 2 (Linealidad)

Si las funciones f y g son integrables sobre $[\vec{a}, \vec{b}] \subset \mathbb{R}^n$, entonces la función $(f + g)$ es integrable sobre $[\vec{a}, \vec{b}]$, y se tiene

$$\int_{[\vec{a}, \vec{b}]} (f + g) = \int_{[\vec{a}, \vec{b}]} f + \int_{[\vec{a}, \vec{b}]} g$$

Propiedad 3 (Linealidad)

Si f es integrable sobre $[\vec{a}, \vec{b}] \subset \mathbb{R}^n$ y $c : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función constante, entonces la función (cf) es integrable sobre $[\vec{a}, \vec{b}]$, y se tiene

$$\int_{[\vec{a}, \vec{b}]} cf = c \int_{[\vec{a}, \vec{b}]} f$$

Propiedad 4

Si las funciones f y g son integrables sobre $[\vec{a}, \vec{b}] \subset \mathbb{R}^n$, entonces la función producto $(f \cdot g)$ es integrable sobre $[\vec{a}, \vec{b}]$.

Propiedad 5 (Monotonía)

Si las funciones f y g son integrables sobre $[\vec{a}, \vec{b}] \subset \mathbb{R}^n$ y se satisface $f(\vec{x}) \leq g(\vec{x}) \forall \vec{x} \in [\vec{a}, \vec{b}]$, entonces

$$\int_{[\vec{a}, \vec{b}]} f \leq \int_{[\vec{a}, \vec{b}]} g$$

Propiedad 6 (Desigualdad triangular)

Si la función f es integrable sobre $[\vec{a}, \vec{b}] \subset \mathbb{R}^n$, entonces la función $|f|$ es integrable sobre $[\vec{a}, \vec{b}]$, y se tiene

$$\left| \int_{[\vec{a}, \vec{b}]} f \right| \leq \int_{[\vec{a}, \vec{b}]} |f|$$

Dejamos hasta aquí el estudio de la integral sobre un intervalo. Vamos a extender la idea a conjuntos acotados, y una vez que hagamos esto, volveremos a ella en mejores condiciones para su evaluación.

4.8. Integral sobre conjuntos acotados

Si E un conjunto acotado \mathbb{R}^n , entonces es posible hallar un rectángulo que lo contenga completamente. Sea $E \subset [\vec{a}, \vec{b}]$ tal rectángulo y consideremos que f es una función acotada sobre E . Se define la función **asociada** al conjunto E , que se anota por f_E a

$$f_E(\vec{x}) = \begin{cases} f(\vec{x}) & , \text{si } \vec{x} \in E \\ 0 & , \text{si } \vec{x} \notin E \end{cases}$$

Esta función f_E es la que permite, en forma sencilla, extender la integral a cualquier conjunto acotado E . Se tiene lo siguiente:

Definición 4.8.1. Sea $E \subset [\vec{a}, \vec{b}] \subset \mathbb{R}^n$ conjunto acotado. Si la integral de f_E sobre $[\vec{a}, \vec{b}]$ existe, entonces la integral de f sobre E existe y se tiene

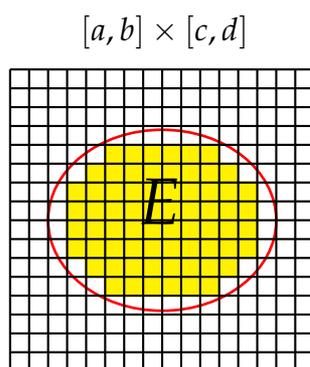
$$\int_E f = \int_{[\vec{a}, \vec{b}]} f_E$$

Si la función $f(\vec{x}) = 1$, entonces la función asociada 1_E pasa a llamarse **función característica** del conjunto E . Esto es,

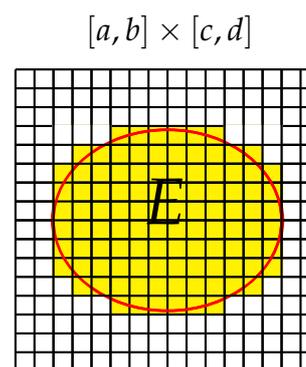
$$1_E(\vec{x}) = \begin{cases} 1, & \text{si } \vec{x} \in E \\ 0, & \text{si } \vec{x} \notin E \end{cases}$$

4.9. Contenido de E

Sea $E \subset [\vec{a}, \vec{b}]$ conjunto acotado del plano xy , tal como muestran las figuras 4.7 y 4.8.



rectángulos inscritos
figura 4.7



rectángulos circunscritos
figura 4.8

Sea P partición de $[\vec{a}, \vec{b}]$, y R_j el j -ésimo intervalo de P . Las figuras 4.7 y 4.8 muestran rectángulos inscritos y circunscritos a la región acotada por E . Sea E° el interior de E (el conjunto abierto más grande contenido en E), \bar{E} la adherencia o clausura de E (el conjunto cerrado más pequeño que contiene a E). A partir de esto es claro que se satisface la relación

$$E^\circ \subset E \subset \bar{E}$$

Se consideran luego, las funciones características asociadas 1_{E° y $1_{\bar{E}}$. Con los rectángulos inscritos a la región E se pueden formar las sumas inferiores

$$s(1_{E^\circ}, P) = \sum_{i=1}^n m_j(1_{E^\circ}) A(R_j)$$

las cuales son evidentemente acotadas y tienen como supremo una integral inferior. Es decir,

$$\sup\{s(1_{E^\circ}, P) / p \in \Gamma\} = \int_{[\vec{a}, \vec{b}]} 1_{E^\circ} = \zeta^\circ(E)$$

que recibe el nombre de **contenido interior** de E . Análogamente, con los rectángulos circunscritos se forman sumas superiores de la forma

$$S(1_{\bar{E}}, P) = \sum_{i=1}^n M_j(1_{\bar{E}}) A(R_j)$$

las cuales tienen como **ínfimo** una integral superior. Esto es,

$$\inf\{S(1_{\bar{E}}, P) / p \in \Gamma\} = \int_{[\vec{a}, \vec{b}]} 1_{\bar{E}} = \bar{\zeta}(E)$$

el que recibe el nombre de **contenido exterior** de E .

Cuando $\zeta^0(E) = \bar{\zeta}(E)$, la función $1_E(\vec{x})$ es integrable sobre $[\vec{a}, \vec{b}]$, y su valor común se llama **contenido** de E . La herramienta de cálculo del contenido de un conjunto es la siguiente.

Teorema 4.9.1. *Si $E \subset [\vec{a}, \vec{b}] \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto acotado y con contenido, entonces*

$$\zeta(E) = \int_{[\vec{a}, \vec{b}]} 1_E$$

Demostración.

Se sabe que el interior de un conjunto está contenido en el conjunto, y que éste a su vez es un subconjunto de su clausura o adherencia. Es decir,

$$E^0 \subset E \subset \bar{E}$$

Para la función característica, aplicada a estos conjuntos, se cumple

$$0 \leq 1_{E^0}(\vec{x}) \leq 1_E(\vec{x}) \leq 1_{\bar{E}}(\vec{x}), \forall \vec{x} \in [\vec{a}, \vec{b}]$$

Luego, al tomar integrales

$$0 \leq \zeta^0(E) = \int_{[\vec{a}, \vec{b}]} 1_{E^0} \leq \int_{[\vec{a}, \vec{b}]} 1_E \leq \int_{[\vec{a}, \vec{b}]} 1_{\bar{E}} = \bar{\zeta}(E)$$

Como por hipótesis, E tiene contenido, entonces $\zeta^0(E) = \bar{\zeta}(E)$. De aquí que

$$\zeta(E) = \int_{[\vec{a}, \vec{b}]} 1_E$$

Los casos $n = 2$, $n = 3$ corresponden al área y al volumen, respectivamente.

El contenido de un conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ satisface las siguientes propiedades:

1. $\zeta(E) \geq 0$
2. $\zeta(E \cap F) = \zeta(E) + \zeta(F) - \zeta(E \cup F)$
3. $E \subset F \implies \zeta(E) \leq \zeta(F)$
4. $\zeta(E \cup F) = \zeta(E) + \zeta(F) - \zeta(E \cap F)$

El siguiente resultado establece que el conjunto de las funciones integrables sobre un intervalo cerrado $[\vec{a}, \vec{b}]$ contiene al conjunto de todas las funciones que son acotadas sobre $[\vec{a}, \vec{b}]$ para las que el conjunto de puntos de discontinuidad sobre $[\vec{a}, \vec{b}]$ tiene contenido cero. Como las funciones continuas sobre $[\vec{a}, \vec{b}]$ son acotadas, se concluye que ellas también son integrables sobre $[\vec{a}, \vec{b}]$.

Teorema 4.9.2. *Sea f función acotada sobre $[\vec{a}, \vec{b}] \subset \mathbb{R}^n$ tal que el conjunto de discontinuidades de f tenga contenido cero, entonces $\int_{[\vec{a}, \vec{b}]} f$ existe.*

Por ejemplo, si consideramos el intervalo $[0, 1] \times [0, 1]$, y la función $f(x, y) = \frac{1}{x - y}$ definida allí, observamos que la recta $y = x$ es el conjunto de puntos de discontinuidades de f , pero como en \mathbb{R}^2 una recta tiene contenido cero (área cero), entonces el teorema asegura la existencia de la integral de f sobre $[0, 1] \times [0, 1]$

Otros conjuntos de contenido cero en \mathbb{R}^n son el vacío y un punto para cualquier exponente n , un plano para $n \geq 3$, etc.

4.10. Suma de Riemann

Cuando la función f es continua sobre $E = [\vec{a}, \vec{b}] \subset \mathbb{R}^n$, el conjunto $D = \{\vec{x} / f \text{ discontinua}\} = \emptyset$ y la integral de f sobre $[\vec{a}, \vec{b}]$ se puede calcular usando la llamada suma de Riemann, que en el caso $n=2$ tiene la forma

$$\int_E f \, dA = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i,j=1}^n f_E(x_i, y_j) A(R_{ij})$$

Ejemplo 4.10.1. *Calculemos $\int_E (2x + y) \, dA$, $E = [0, 1] \times [0, 2]$.*

La función $f(x, y) = 2x + y$ es continua sobre E , de manera que el conjunto de puntos de discontinuidades es vacío, el cual como sabemos tiene contenido cero.

Sean $P_1 = \{x = \frac{i}{n}, 0 \leq i \leq n\}$ partición de $[0, 1]$, $P_2 = \{y = \frac{j}{n}, 0 \leq j \leq 2n\}$ partición de $[0, 2]$, entonces $P = P_1 \times P_2 = \{(\frac{i}{n}, \frac{j}{n})\}$, es partición de E , con $\|P\| = \frac{1}{n}$. El área del rectángulo $R_{ij} = \frac{1}{n^2}$. Si consideramos que los puntos de la partición tienen la forma (x_i, y_j) , entonces la suma de Riemann es

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n (2x_i + y_j) A(R_{ij}) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{2n} \left(2 \cdot \frac{i}{n} + \frac{j}{n}\right) \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{2n} (2i + j) \\ &= \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n (4ni + n(2n + 1)) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n (4i + 2n + 1) \\ &= \frac{1}{n^2} (2n(n + 1) + 2n^2 + n) = \frac{1}{n^2} (4n^2 + 3n) \end{aligned}$$

Se concluye que

$$\int_E (2x + y) dA = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} (4n^2 + 3n) = 4$$

Por la forma en que pasamos a definir la integral sobre un conjunto acotado, mediante la función f_E , resulta claro que se deben mantener las mismas propiedades enunciadas para la integral sobre un rectángulo. Por esta razón, no volvemos a enunciarlas.

4.11. Integrales dobles iteradas

La evaluación directa de integrales múltiples, mediante el cálculo de sumas superiores e inferiores, y en el mejor de los casos, el que f sea continua, mediante sumas de Riemann es un proceso largo, complicado, y difícil de llevar a cabo. Es de imaginar un cálculo para $n \geq 3$, si ya para $n = 2$ presentó grandes dificultades. Afortunadamente, existe un método directo y sencillo que permite el cálculo de la integral múltiple, conocido como “integración iterada”, que a continuación pasamos a conocer y estudiar en dos y tres dimensiones. Tal método se extiende a n dimensiones en forma natural. Se ha preferido partir con el caso de la integral doble iterada con el fin de agilizar la comprensión del concepto.

Definición 4.11.1. Se llaman **integrales dobles iteradas** o **sucesivas** de la función f a las expresiones:

$$\begin{aligned} \blacksquare \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy dx & \qquad \blacksquare \int_c^d \int_{g(y)}^{h(y)} f(x, y) dx dy \end{aligned}$$

Los conjuntos siguientes

$$\begin{aligned} \blacksquare R_1 &= \{(x, y) / a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\} \\ \blacksquare R_2 &= \{(x, y) / c \leq y \leq d, g(y) \leq x \leq h(y)\} \end{aligned}$$

se denominan **recintos** de integración, y su visualización e identificación resulta gravitante en el cálculo de la integral. El cálculo de estas integrales es como sigue.

☞ Para calcular el valor de la primera de estas integrales, se realiza en primer lugar la integración respecto de la variable y , manteniendo x constante. Luego, este resultado se integra respecto de x , obteniendo el valor de la integral doble iterada.

☞ Para calcular el valor de la integral restante, se procede de manera análoga. Esto es, en primer lugar la integración se hace respecto de la variable x , manteniendo y constante. Luego, este resultado se integra respecto de y , obteniendo el valor de la integral doble iterada.

Veamos un par de ejemplos de integrales iteradas.

Ejemplo 4.11.2. Calculemos la integral iterada $\int_0^2 \int_0^{2x} xy dy dx$

El recinto de integración lo muestra la figura 4.9 y corresponde a

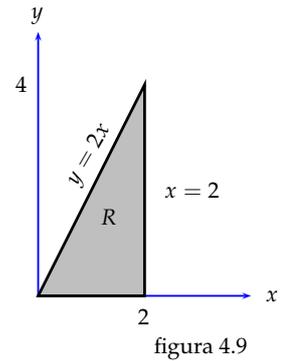
$$R = \{(x, y) / 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2x\}$$

Luego,

$$\int_0^2 \int_0^{2x} xy \, dy \, dx = \int_0^2 \left(\frac{1}{2} xy^2 \right)_0^{2x} dx$$

Al evaluar los límites superior e inferior tenemos

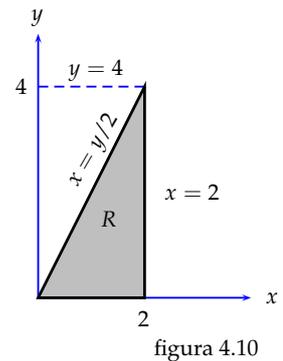
$$\int_0^2 \int_0^{2x} xy \, dy \, dx = \int_0^2 2x^3 \, dx = 8$$



Ejemplo 4.11.3. Hallemos la integral iterada $\int_0^4 \int_{y/2}^2 xy \, dx \, dy$

Se observa ahora que el integrando y el recinto de integración son el mismo del problema anterior, pero que las diferenciales no mantienen el mismo orden. La figura 4.10 muestra el recinto.

$$\int_0^4 \int_{y/2}^2 xy \, dx \, dy = \int_0^4 \left(\frac{1}{2} y x^2 \right)_{y/2}^2 dy$$



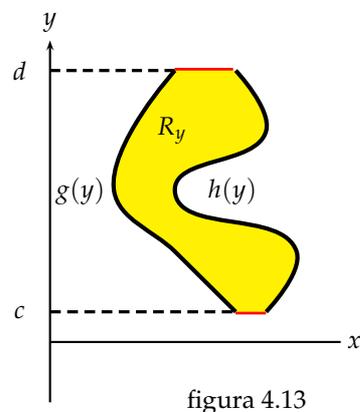
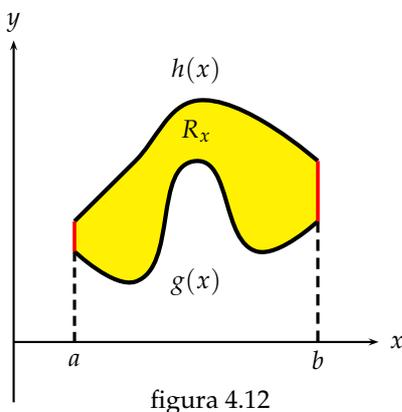
Al evaluar los límites superior e inferior tenemos

$$\int_0^4 \int_{y/2}^2 xy \, dx \, dy = \int_0^4 \frac{1}{2} y \left(4 - \frac{y^2}{4} \right) dy = \int_0^4 \left(2y - \frac{y^3}{8} \right) dy = \left(y^2 - \frac{y^4}{32} \right)_0^4 = 8$$

El mismo resultado anterior.

4.12. Recintos de Integración

Vamos a clasificar los recintos del plano xy sobre los que hacemos las integraciones.



4.12 Recintos de Integración

Recinto R_x : $R_x = \{(x, y) / a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}$

Recinto R_y : $R_y = \{(x, y) / c \leq y \leq d, g(y) \leq x \leq h(y)\}$

Las funciones g y h son continuas sobre el intervalo que se considere. Toda otra región que no sea del tipo R_x o R_y , será una combinación de un número finito de regiones de estos tipos.

Los siguientes resultados garantizan que una integral doble puede expresarse como una integral iterada, tanto en el caso de intervalos como en el de conjuntos acotados.

Teorema 4.12.1. (Fubini) - (Intervalos)

Sea f función acotada y continua sobre el intervalo $[\vec{a}, \vec{b}] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ de \mathbb{R}^2 , salvo quizás, en un número finito de puntos de $[\vec{a}, \vec{b}]$, entonces

$$\int_{[\vec{a}, \vec{b}]} f(x, y) dA = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} f(x, y) dy dx$$

Teorema 4.12.2. (Fubini) - (Recintos)

Si f es continua sobre un recinto del tipo R_x o R_y , entonces

- $\int_{R_x} f(x, y) dA = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy dx$
- $\int_{R_y} f(x, y) dA = \int_a^b \int_{g(y)}^{h(y)} f(x, y) dx dy$

Demostración.

Consideremos la figura 4.14 para probar la primera afirmación, en la cual $[\vec{a}, \vec{b}] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, $a_2 \leq g(x)$, $h(x) \leq b_2$.

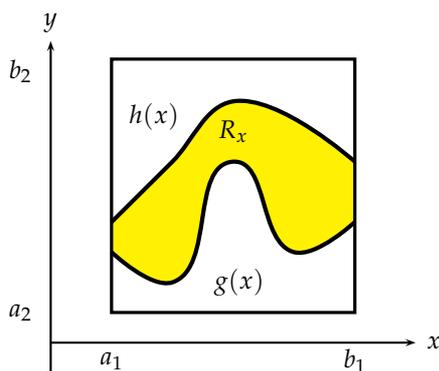


figura 4.14

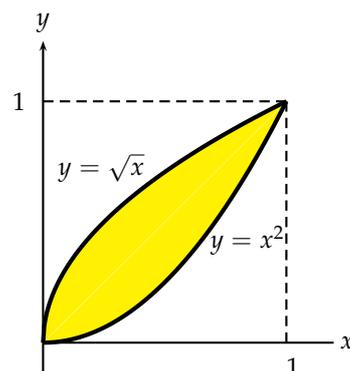


figura 4.15

Como $f_{R_x}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & , \text{si } (x, y) \in R_x \\ 0 & , \text{si } (x, y) \notin R_x \end{cases}$, entonces

$$\begin{aligned}
\int_{R_x} f(x, y) dA &= \int_{[a, b]} f_{R_x}(x, y) dA = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} f_R(x, y) dy dx \\
&= \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{g(x)} 0 dy dx + \int_{a_1}^{b_1} \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy dx + \int_{a_1}^{b_1} \int_{h(x)}^{b_2} 0 dy dx \\
&= \int_{a_1}^{b_1} \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy dx
\end{aligned}$$

Al intercambiar x por y se obtiene la segunda afirmación.

Ejemplo 4.12.3. Hallemos $\int_R (x + y) dA$, si R es la región acotada por las parábolas $y = x^2$, $y^2 = x$.

Si escribimos la región R como región R_x (figura 4.15).

$$R = R_x = \{(x, y) / 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$$

Luego,

$$\int_R (x + y) dA = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x + y) dy dx = \frac{3}{10}$$

Si en cambio elegimos región R_y , entonces

$$R = R_y = \{(x, y) / 0 \leq y \leq 1, y^2 \leq x \leq \sqrt{y}\}$$

de lo cual

$$\int_R (x + y) dA = \int_0^1 \int_{y^2}^{\sqrt{y}} (x + y) dx dy = \frac{3}{10}$$

4.13. Transformaciones

Vamos a ver ahora que sucede con la imagen de un conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ cuando se le aplica una transformación $T : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow T(A) \subset \mathbb{R}^2$. Esto interesa pues constituye la base del cambio de coordenadas en una integral múltiple. Para ello se requiere que la transformación T sea de clase ζ^1 (primeras derivadas continuas). Los siguientes ejemplos muestran como una transformación T puede “deformar” a un conjunto.

Ejemplo 4.13.1. Sea $D = [-1, 1] \times [-1, 1]$ subconjunto del plano uv . Vamos a determinar su imagen en el plano xy al aplicarle la transformación $T(u, v) = \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)$.

La figura 4.16 muestra el cuadrado en el plano uv y su imagen en el plano xy .

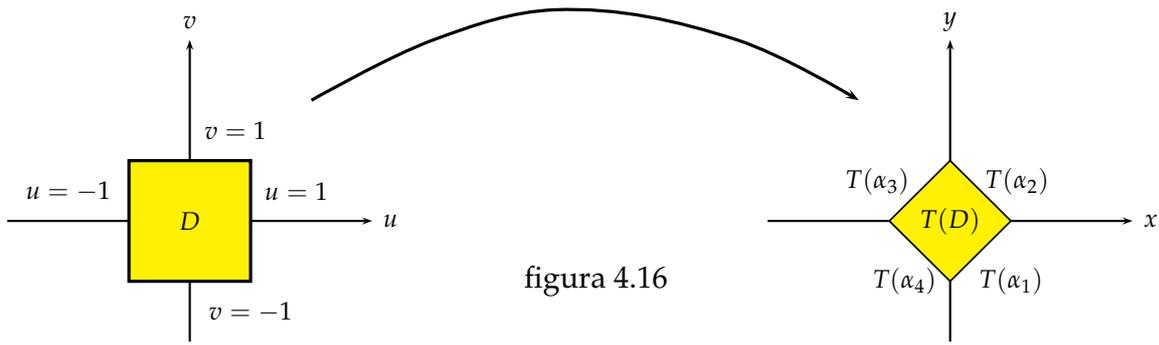


figura 4.16

Mostramos tres formas de hallar la imagen del cuadrado mediante esta transformación **lineal**.

Forma 1

La primera de ellas consiste en determinar los puntos imágenes de los vértices del cuadrado, y luego unir estos puntos por los respectivos segmentos de recta. Esto es así, en razón de que la transformación es lineal, y en consecuencia, transforma rectas en rectas. Se tiene

$$T(1,1) = (1,0), \quad T(1,-1) = (0,1), \quad T(-1,-1) = (-1,0), \quad T(-1,1) = (0,-1)$$

Al unir estos puntos se obtiene el conjunto que muestra la figura 4.16.

Forma 2

Una segunda forma de encarar el problema, es recurrir al hecho conocido, de que si f es una función continua y A un conjunto **compacto** (cerrado y acotado), entonces su imagen es un conjunto compacto. Para ello, sólo es necesario estudiar el efecto de T sobre cada uno de los segmentos de recta que componen la frontera del cuadrado. Esto lo hacemos mediante el uso de parametrizaciones.

La función $\alpha_1 : [-1, 1] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que $t \mapsto (t, 1)$ es una parametrización del segmento de recta $v = 1, -1 \leq u \leq 1$. Para determinar la imagen de este segmento mediante la transformación lineal T , se procede como sigue:

$$T(\alpha_1(t)) = T(t, 1) = \left(\frac{t+1}{2}, \frac{t-1}{2} \right)$$

Dado que en el conjunto de llegada los puntos son de la forma (x, y) , entonces

$$\left(\frac{t+1}{2}, \frac{t-1}{2} \right) = (x, y) \implies \begin{cases} x = \frac{t+1}{2} \\ y = \frac{t-1}{2} \end{cases} \quad -1 \leq t \leq 1$$

Luego, la expresión cartesiana es

$$y = x - 1, \quad 0 \leq x \leq 1$$

y ella representa la transformación del segmento de recta $\alpha_1(t)$ que se observa en la figura 4.16.

Análogamente, se halla para los restantes segmentos

$$\begin{aligned}\alpha_2(t) &= (1, t), & T(\alpha_2(t)) &= \{y = 1 - x, 0 \leq x \leq 1\} \\ \alpha_3(t) &= (t, -1), & T(\alpha_3(t)) &= \{y = 1 + x, -1 \leq x \leq 0\} \\ \alpha_4(t) &= (1, t), & T(\alpha_4(t)) &= \{y = -1 - x, -1 \leq x \leq 0\}\end{aligned}$$

Concluimos en que T transforma el cuadrado D en otro cuadrado $T(D)$, pero con distintos vértices, tal como indica la figura 4.16.

Forma 3

Cabe preguntarse ¿Es posible volver desde el plano de las xy al plano uv ? Adelantamos que en general, la respuesta es afirmativa bajo ciertas condiciones. En este ejemplo, la aplicación T es inyectiva. De manera que se tiene

$$\left. \begin{aligned}\frac{u+v}{2} &= x \\ \frac{u-v}{2} &= y\end{aligned}\right\} \implies \begin{cases} x+y = u \\ x-y = v \end{cases}$$

lo que indica, que en este caso se puede volver mediante la aplicación

$$T^{-1}(x, y) = (x + y, x - y)$$

Otra pregunta que nos podemos formular es ¿qué sucede con el área de los conjuntos D y $T(D)$? Calculemos ambas áreas:

- Área de D : El cuadrado tiene área 4
- Área de $T(D)$: El área del rombo es 4 veces el área de cada triángulo rectángulo que lo conforma. Esto es, $\frac{1}{2} \cdot 4 = 2$

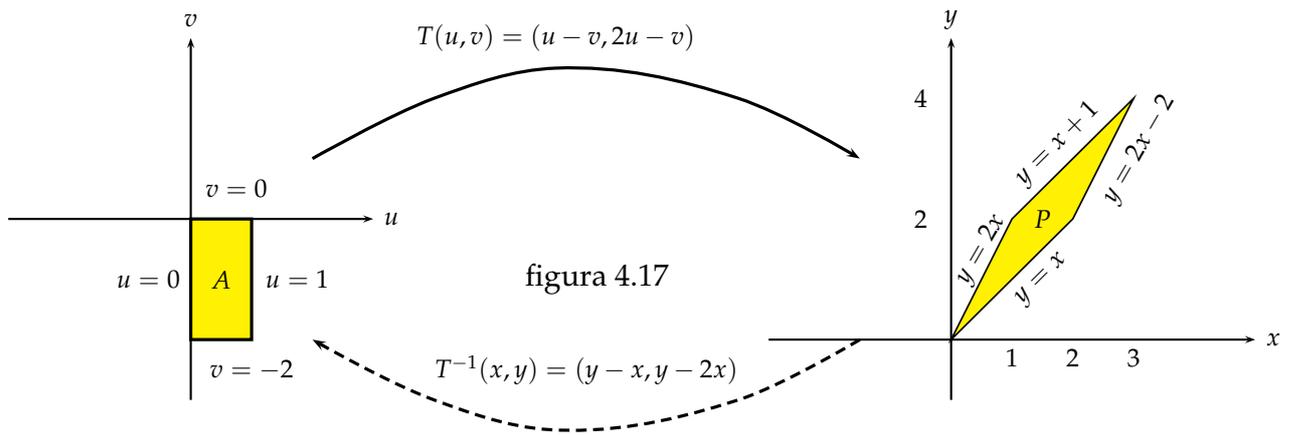
Es claro que las áreas son distintas. Además, el jacobiano de la transformación es

$$J(T) = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$

¿tendrá el jacobiano algo que ver con que las áreas sean diferentes?

Ejemplo 4.13.2. Sea P el paralelogramo acotado por las rectas $y = 2x - 2$, $y = x + 1$, $y = 2x$, $y = x$. Hallemos el conjunto A , en el plano uv , que al aplicarle la transformación $T(u, v) = (u - v, 2u - v)$ lo transforma en P .

Ubicamos el plano uv a la izquierda y por ende el xy a la derecha, la razón de ello la hacemos más adelante.



Ahora bien, para determinar el conjunto A tenemos que establecer la transformación inversa

$$T^{-1}(x, y) = (y - x, y - 2x)$$

que se obtiene de la transformación T despejando las variables u y v . Al igual como lo hicimos en el ejemplo anterior, pasamos en primer lugar los vértices del paralelogramo. Se tiene entonces

$$T^{-1}(0, 0) = (0, 0), \quad T^{-1}(1, 2) = (1, 0), \quad T^{-1}(2, 2) = (0, -2), \quad T^{-1}(3, 4) = (1, -2)$$

Se concluye que A es un rectángulo acotado por las rectas $v = 0, v = -2, u = 0, u = 1$. Respecto de las áreas se tiene lo siguiente:

- Área de P : El paralelogramo tiene área 2
- Área de A : El área del rectángulo es 2

Ahora las áreas son iguales y además, el jacobiano de la transformación es

$$J(T) = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 = J(T^{-1})$$

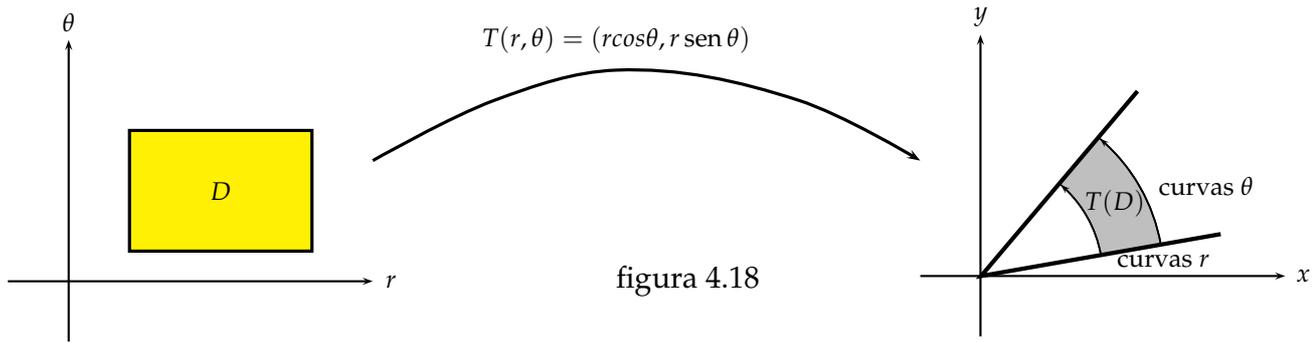
4.14. Transformación Polar

Un sistema de coordenadas conocido del primer curso de cálculo, y a partir de ahora de referencia habitual, es el de **coordenadas polares**. En esta oportunidad, volvemos a él, acompañados de la integral doble, en donde dichas coordenadas juegan un papel fundamental en la simplificación de muchos problemas que involucran cálculo de integrales. La transformación T dada por

$$T(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

se denomina transformación polar, siendo inyectiva si consideramos $r > 0$, y el ángulo θ variando en un intervalo de la forma $0 < \theta \leq 2\pi$ o bien $0 \leq \theta < 2\pi$. El jacobiano de esta transformación es

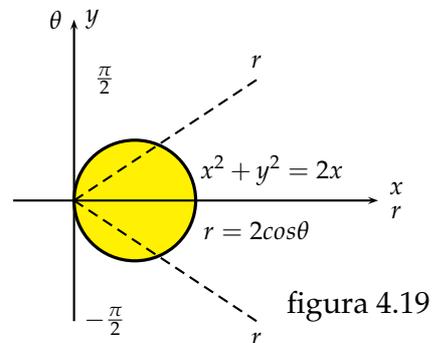
$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r$$



En términos geométricos las curvas r son rectas por el origen y las curvas θ son círculos concéntricos con el origen, siendo la imagen de un rectángulo en el plano $r\theta$ un “paralelogramo” en el plano de las xy limitado por dos radios y dos arcos de círculo, tal como lo muestra la figura 4.18.

Ejemplo 4.14.1. Escribimos la región $S = \{(x, y) / x^2 + y^2 \leq 2x\}$ en coordenadas polares.

Una manera sencilla de visualizar el radio y el ángulo en coordenadas polares consiste en sobreponer los planos polar y cartesiano, tal como muestra la figura 4.19. Se observa que el movimiento del ángulo es $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ y el radio, que nace del origen, “barre” la región desde 0 a la curva $r = 2\cos\theta$.

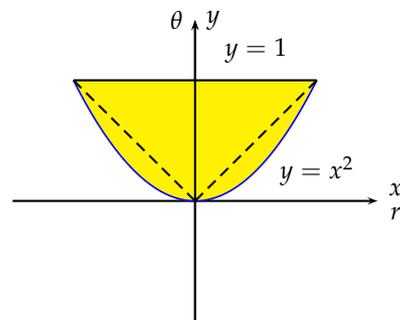
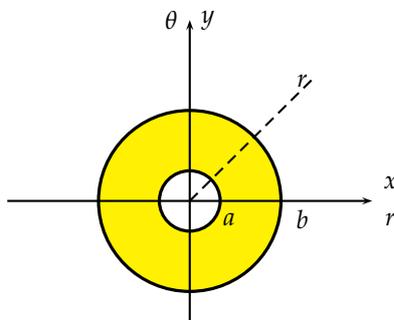


Analíticamente, de las expresiones $x = r\cos\theta, y = r\sen\theta$, se obtiene $r^2 = 2r\cos\theta$, y de esto

$$r(r - 2\cos\theta) = 0 \implies r = 0 \quad \vee \quad r = 2\cos\theta$$

Ejemplo 4.14.2. La región $S = \{(x, y) / a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2\}, a < b$, representa la región acotada que acotan círculos concéntricos de radios a y b , respectivamente. La figura 4.20 muestra el recinto, que en coordenadas polares, equivale a

$$S = \{(r, \theta) / 0 \leq \theta \leq 2\pi, a \leq r \leq b\}$$



Ejemplo 4.14.3. La región cartesiana $S = \{(x, y) / x^2 \leq y \leq 1, -1 \leq x \leq 1\}$, en coordenadas polares corresponde a la unión de tres regiones polares (figura 4.21). En efecto;

$$x^2 = y \implies r^2 \cos^2 \theta = r \operatorname{sen} \theta \implies r = 0 \vee r = \operatorname{tg} \theta \operatorname{sec} \theta$$

de modo que

$$S_1 = \{0 \leq r \leq \operatorname{tg} \theta \operatorname{sec} \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\}$$

Análogamente

$$\blacksquare S_2 = \{\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}, 0 \leq r \leq \operatorname{csc} \theta\} \quad \blacksquare S_3 = \{\frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \pi, 0 \leq r \leq \operatorname{tg} \theta \operatorname{sec} \theta\}$$

4.15. Cambio de variable

En la teoría de la integral definida unidimensional, el método de sustitución fue de gran ayuda en su cálculo. Es evidente que este proceso facilita el cálculo de la integral al reducir el integrando a uno más simple. Recordemos que el método de sustitución para esa clase de funciones asegura que

$$\int_a^b f(x) dx = \int_c^d f(g(t)) g'(t) dt$$

donde $a = g(c)$, $b = g(d)$, y bajo el supuesto que g tiene derivada continua en $[c, d]$. Es decir, $g \in \zeta^1$, y que f es continua en el intervalo $[g(c), g(d)]$.

En dimensiones superiores existe una versión de este método, que se aplica cuando se trata de un integrando complicado o de un recinto de integración difícil de visualizar y operar con la integración. En cualquier caso, hay que transformar una integral extendida a una región R_1 del plano xy , en otra integral extendida a una región R_2 del plano uv o bien a la inversa.

Teorema 4.15.1. (Cambio de variable)

Sea $T : D_1 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow D \subset \mathbb{R}^2$ transformación inyectiva de clase ζ^1 del plano uv en el plano xy tal que $T(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$. El Jacobiano de T , dado por

$$J(T) = J(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

mide (en valor absoluto) la distorsión que sufre el área del conjunto D_1 al ser llevada por T en D . Si la función $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable, entonces

$$\int_D f(x, y) dA_{xy} = \int_{D_1} f(T(u, v)) |J(T)| dA_{uv}$$

La situación es como sigue

$$\mathbb{R}_{uv}^2 \xrightarrow{T} \mathbb{R}_{xy}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

La función compuesta $f \circ T$ es la aplicación que conecta “directamente” \mathbb{R}_{uv}^2 con \mathbb{R}

La idea central del cambio de variable es trasladarse de un espacio, en el que el proceso de integración se dificulta, a otro espacio en el cual el cálculo es más sencillo. Por ejemplo, nos encontramos en la Tierra y nuestra mesa de trabajo es el plano uv , queremos obtener información del planeta Saturno tal como área, masa, momentos y centros de masa. Para este fin enviamos una nave espacial hasta allá para que recopile los datos que se encuentran sobre el plano xy de Saturno y nos lo envíe de vuelta a la Tierra. La figura 4.22 muestra esta idea, y es claro que el satélite juega el papel de la transformación T y es éste el Jacobiano que se necesita. Para no perder de vista esta ilustración, es conveniente mantener el plano xy a la derecha y el uv a la izquierda.

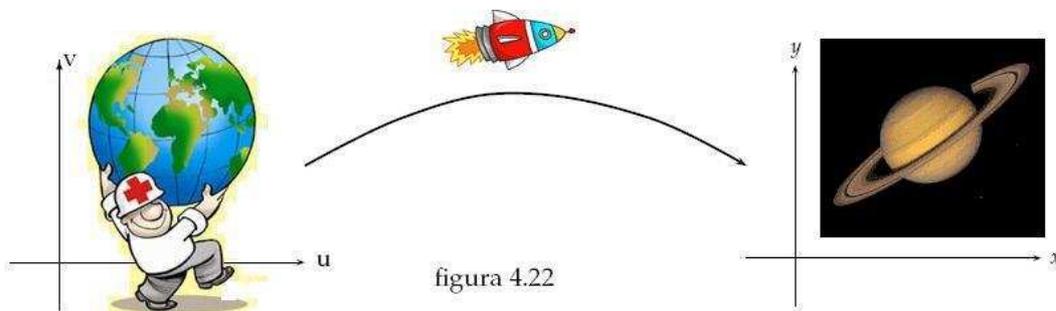


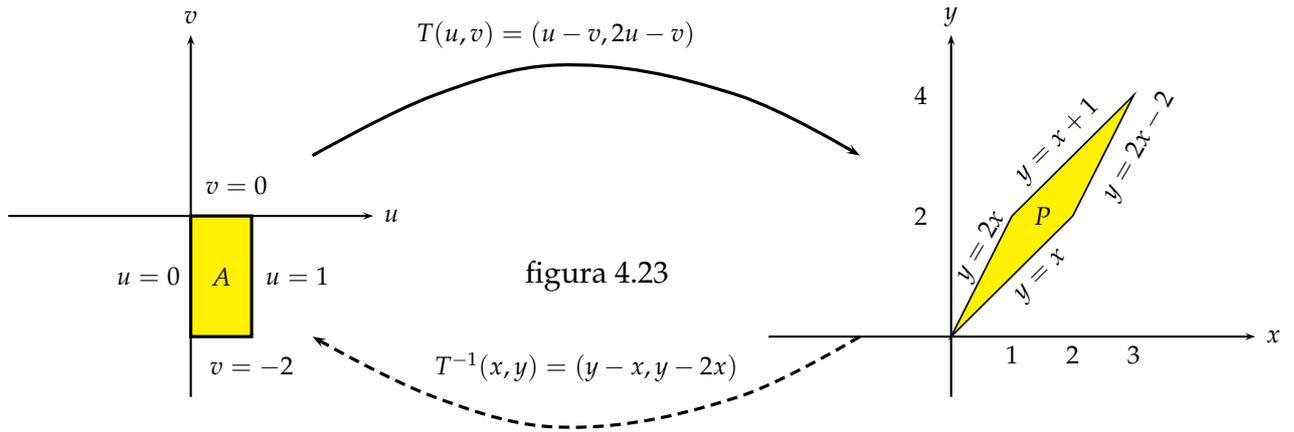
figura 4.22

En resumen, si tenemos que calcular una integral en el plano xy , y por la naturaleza del problema se observa que presenta dificultades, ya sea por el recinto de integración o bien por el campo escalar que hay que integrar, entonces se debe “pensar” en la alternativa del cambio de variables. Este cambio de variables (si no viene dado) se determina a partir de la naturaleza del recinto de integración o bien del campo escalar a integrar. El Jacobiano que se debe utilizar proviene de las ecuaciones que tengan las variables x e y despejadas, ya que así las derivadas serán respecto de las variables u y v . Esto indica que el trabajo que estamos realizando se traslada del plano xy al uv .

Ejemplo 4.15.2. Se considera el paralelogramo P acotado por las curvas $y = 2x - 2$, $y = x + 1$, $y = 2x$, $y = x$. Hallar $\int_P xy \, dx \, dy$, empleando la transformación $T(u, v) = (u - v, 2u - v)$ del plano uv en el plano xy .

Se observa que el proceso de integración sobre P no es sencillo, debemos dividir el recinto en tres (3) regiones R_x o bien en dos (2) regiones R_y . Esta es la razón por la cual se sugiere el uso de una transformación que simplifique el proceso. Este trabajo de graficación lo hicimos anteriormente. La aplicación T es lineal e inyectiva, y por construcción, lleva el rectángulo A acotado por las rectas $v = 0$, $v = -2$, $u = 0$, $u = 1$, en el paralelogramo P (figura 4.23). El jacobiano de la transformación es

$$J(T) = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1$$



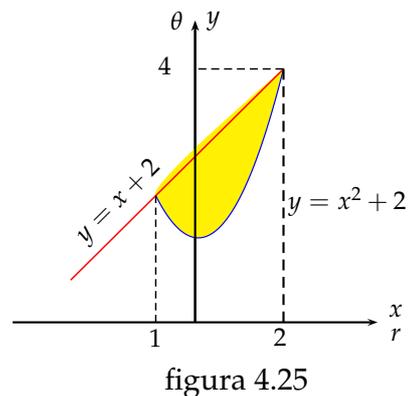
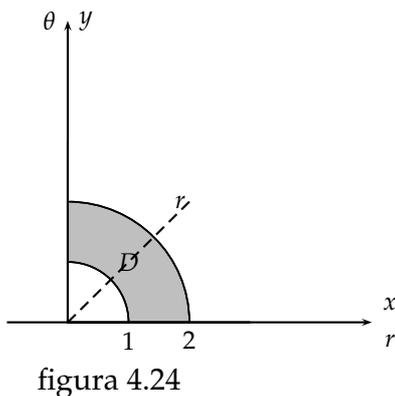
Luego, por el teorema del cambio de variables, la integral sobre el paralelepípedo P es equivalente con la integral sobre el rectángulo que es su pre-imagen. Esto es,

$$\int_P xy \, dx \, dy = \int_A (u - v)(2u - v) \, du \, dv = \int_{-2}^0 \int_0^1 (2u^2 - 3uv + v^2) \, du \, dv = 7$$

Ejemplo 4.15.3. Hallar $\int_D \ln(x^2 + y^2) \, dA$, si D es la región del primer cuadrante entre los círculos $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$.

La región de integración la muestra la figura 4.24, en donde se han sobrepuestos los planos cartesiano y polar. En polares los círculos tienen ecuaciones $r = 1$, $r = 2$, respectivamente. Es sencillo ver que el ángulo varía entre 0 y $\frac{\pi}{2}$. Sin olvidar que el Jacobiano de la transformación polar es r , la integral toma la forma

$$\int_D \ln(x^2 + y^2) \, dA = \int_1^2 \int_0^{\pi/2} r \ln r^2 \, d\theta \, dr = \frac{\pi}{2} \left(4 \ln 2 - \frac{3}{2} \right)$$



4.16. Aplicaciones de la integral doble

Vamos a estudiar algunas aplicaciones de la integral doble, tales como área, volumen bajo una superficie, centros y momentos de regiones planas, y volumen de revolución de una región en torno

a una recta en el plano. Como se puede ver, las aplicaciones son las mismas que se estudian en la integración unidimensional. En esta oportunidad vamos a ver que las cosas se simplifican.

4.16.1. Area

El área de una región $R_x = \{(x, y) / a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}$, mediante el cálculo integral unidimensional viene dado por

$$A(R_x) = \int_a^b [h(x) - g(x)] dx$$

Por otra parte, sabemos que el contenido de un conjunto R_x del plano, está dado por

$$A(R_x) = \int_{R_x} 1_{R_x}$$

y que el teorema de Fubini afirma que

$$\int_{R_x} 1_{R_x} = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} dy dx = \int_a^b [h(x) - g(x)] dx$$

Esto significa que ambas expresiones para el área son equivalentes.

Para calcular áreas de regiones del tipo R_y , el procedimiento es similar, se tiene

$$A(R_y) = \int_{R_y} 1_{R_y} = \int_a^b \int_{g(y)}^{h(y)} dx dy$$

Ejemplo 4.16.1. Hallemos el área limitada por la parábola $y = x^2 + 2$ y la recta $y = x + 4$.

En primer lugar, debemos definir el recinto de integración como R_x o R_y . La figura 4.25 muestra que es más sencillo tomar recinto del tipo R_x .

$$R = R_x = \{(x, y) / -1 \leq x \leq 2, x^2 + 2 \leq y \leq x + 4\}$$

entonces

$$A(R_x) = \int_{R_x} 1_{R_x} = \int_{-1}^2 \int_{x^2+2}^{x+4} dy dx = \int_{-1}^2 (x + 4 - x^2 - 2) dx = \frac{9}{2}$$

El lector interesado puede estudiar la dificultad al considerar un recinto del tipo R_y .

4.16.2. Masa - Centro de masa

Si un objeto está hecho de un material delgado y uniforme, entonces la masa de dicho objeto es un múltiplo del área de la región plana sobre la cual está situado. Este múltiplo depende de las unidades utilizadas. Si el objeto es de un material no uniforme, entonces se puede expresar la masa de él, en función de la densidad $\rho(x, y)$ del material en cualquier punto. Esto nos lleva al siguiente hecho

Definición 4.16.2. La masa de un objeto plano con densidad variable $\rho(x, y)$ que ocupa una región R del plano es

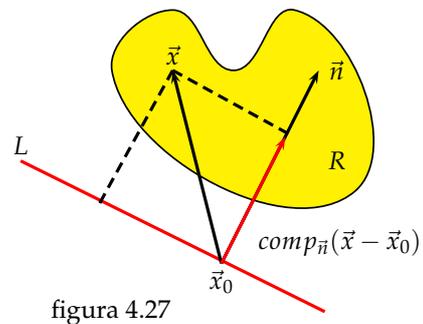
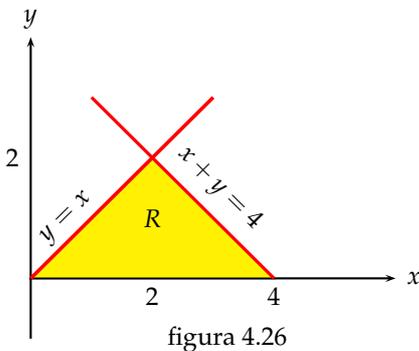
$$M = \int_R \rho(x, y) dA$$

En términos físicos, la masa es una medida de la tendencia de la materia a resistirse a un cambio del movimiento rectilíneo.

Ejemplo 4.16.3. Un objeto plano ocupa la región $R = \{y \leq x \leq 4 - y, y \geq 0\}$ del plano xy . La densidad en cada punto es $\rho(x, y) = 1 + 2x + y$. Hallemos su masa M .

Trabajar sin un recinto que modele la situación es muy complicado. La figura 4.26 muestra el recinto acotado que nos permitirá establecer los límites de integración. Elegimos recinto del tipo R_y , para tener que

$$M = \int_0^2 \int_y^{4-y} (1 + 2x + y) dx dy = \int_0^2 (x + x^2 + xy) dy = \frac{16}{3}$$



4.16.3. Momentos

Se considera una región R del plano cartesiano, una recta con normal n dirigida hacia la región, y un punto sobre esta recta (figura 4.27). Si x es un punto de la región, entonces la distancia de ese punto a la recta se puede calcular. De hecho, se construye el vector $\vec{x} - \vec{x}_0$ y se determina la magnitud de su proyección vectorial sobre el vector normal.

Definición 4.16.4. Sea \vec{x}_0 un punto fijo de una recta L y \vec{n} un vector normal a dicha recta. El **primer momento** (M_L), y el **segundo momento** o **momento de inercia** (I_L), de una región $R \subset \mathbb{R}^2$ con respecto a la recta L , vienen dados por la expresiones:

$$\blacksquare M_L = \int_R \text{comp}_{\vec{n}}(\vec{x} - \vec{x}_0) \rho dA, \quad \vec{x} \in R \quad \blacksquare I_L = \int_R \text{comp}_{\vec{n}}^2(\vec{x} - \vec{x}_0) \rho dA, \quad \vec{x} \in R$$

el número

$$\text{comp}_{\vec{n}}(\vec{x} - \vec{x}_0) = \frac{\vec{n} \circ (\vec{x} - \vec{x}_0)}{\|\vec{n}\|}$$

es la distancia dirigida del punto \vec{x} a la recta L .

4.16.4. Momentos respecto de los ejes coordenados

- Si en las definiciones de M_L y de I_L , se considera que L es el eje x , entonces se escoge el vector normal \vec{n} en la dirección positiva del eje y . Esto significa que puede ser elegido el vector unitario $\vec{j} = (0, 1)$, con lo cual, $comp_{\vec{n}}(\vec{x} - \vec{x}_0) = \vec{j} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) = \vec{j} \cdot ((x, y) - (x, 0)) = y$. Se concluye que

$$M_x = \int_R y \, dM \quad , \quad I_x = \int_R y^2 \, dM$$

- Si L se toma como el eje y , escogemos n en la dirección positiva del eje x , con lo cual el vector unitario $\vec{i} = (1, 0)$ es el elegido. Se tiene que, $comp_{\vec{n}}(\vec{x} - \vec{x}_0) = \vec{i} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) = \vec{i} \cdot ((x, y) - (0, y)) = x$. Luego,

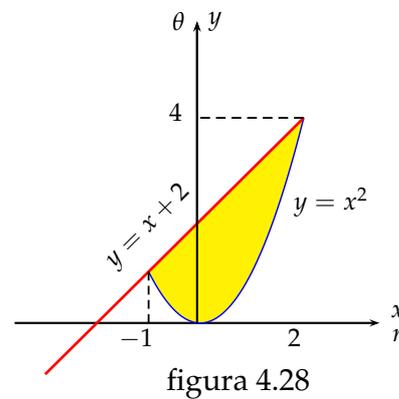
$$M_y = \int_R x \, dM \quad , \quad I_y = \int_R x^2 \, dM$$

Definición 4.16.5. Se llama **momento polar de inercia con respecto al origen**, a la expresión

$$I = \int_R (x^2 + y^2) \, dM = I_x + I_y$$

Ejemplo 4.16.6. Sea $R = \{(x, y) / -1 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq x + 2\}$, la región que muestra la figura 4.28. Se supone que la región es homogénea, lo que significa que la densidad es 1. Luego, $M = A$. Los momentos de la región R respecto de los ejes coordenados son:

- $M_x = \int_R y \, dA = \int_{-1}^2 \int_{x^2}^{x+2} y \, dy \, dx = \frac{36}{5}$
- $M_y = \int_R x \, dA = \int_{-1}^2 \int_{x^2}^{x+2} x \, dy \, dx = \frac{9}{4}$
- $I_x = \int_R y^2 \, dA = \int_{-1}^2 \int_{x^2}^{x+2} y^2 \, dy \, dx = \frac{423}{28}$
- $I_y = \int_R x^2 \, dA = \int_{-1}^2 \int_{x^2}^{x+2} x^2 \, dy \, dx = \frac{63}{20}$
- $I_z = I_x + I_y = \frac{639}{35}$



En términos físicos; El **momento** es una medida de la tendencia de la materia a girar alrededor de una recta. Al **Momento de Inercia** de un cuerpo se le considera como una medida de la oposición a girar de éste cuando actúa en él una fuerza de rotación.

Íntimamente ligado con la masa se encuentra el centro de masa de una región del plano.

Definición 4.16.7. El punto $P = (\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{M(R)} (M_y, M_x)$ se llama **centro de masa** de la región R o **centroide** si la densidad es constante.

Teorema 4.16.8. Si la recta L pasa por el centro de masa de la región plana R , entonces $M_L = 0$.

Demostración.

Para simplificar suponemos que la densidad en cada punto de R es 1. Sean $\vec{n} = (n_1, n_2)$ normal unitaria a la recta L , y $P = (\bar{x}, \bar{y})$ punto sobre L . Se tiene

$$\begin{aligned}
 M_L &= \int_R \text{comp}_{\vec{n}}(\vec{x} - \vec{P}) \, dA = \int_R \vec{n} \circ (\vec{x} - \vec{P}) \, dA \\
 &= \int_R \left[n_1 (x - \bar{x}) + n_2 (y - \bar{y}) \right] \, dA \\
 &= n_1 \int_R x \, dA - n_1 \bar{x} \int_R dA + n_2 \int_R y \, dA - n_2 \bar{y} \int_R dA \\
 &= n_1 M_y - n_1 \bar{x} A(R) + n_2 M_x - n_2 \bar{y} A(R) \\
 &= n_1 \left[M_y - \bar{x} A(R) \right] + n_2 \left[M_x - \bar{y} A(R) \right] \\
 &= n_1 [M_y - M_y] + n_2 [M_x - M_x] = 0
 \end{aligned}$$

4.16.5. Volumen

Sea E un subconjunto de \mathbb{R}^3 con contenido (volumen) que denotamos por $V(E)$. Si este conjunto E se encuentra limitado lateralmente por una superficie cilíndrica con generador paralelo al eje z , superiormente por una superficie de ecuación $z = f(x, y)$, e inferiormente por una región cerrada y acotada R del plano xy , entonces una representación gráfica de E puede ser la que muestra la figura 4.29.

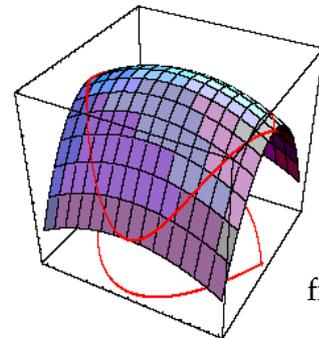


figura 4.29

Definición 4.16.9. Sea $f : R \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $z = f(x, y)$ es una superficie que denotamos por S y que tiene volumen V . Entonces

$$V(S) = \int_R f(x, y) \, dA$$

En el caso que el volumen se encuentre acotado inferior y superiormente por superficies de ecuaciones z_1 y z_2 , entonces

$$V(S) = \int_R (z_2 - z_1) \, dA$$

Ejemplo 4.16.10. Hallemos el volumen acotado inferiormente por el plano xy , lateralmente por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$, y superiormente por el paraboloides $z = x^2 + y^2$.

La región R del plano (figura 4.30) sobre la cual hacemos integración es

$$R = R_x = \{(x, y) / -2 \leq x \leq 2, -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\}$$

Luego

$$V = \int_R (x^2 + y^2) dA = \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (x^2 + y^2) dy dx = 8\pi$$

Por simetría de la región R respecto de los planos xz e yz , se puede escribir

$$V = 4 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (x^2 + y^2) dy dx$$

En coordenadas polares todo es más sencillo ya que

$$V = 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^2 r^3 dr d\theta = 8\pi$$

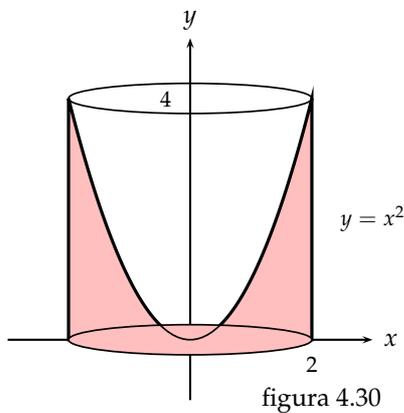


figura 4.30

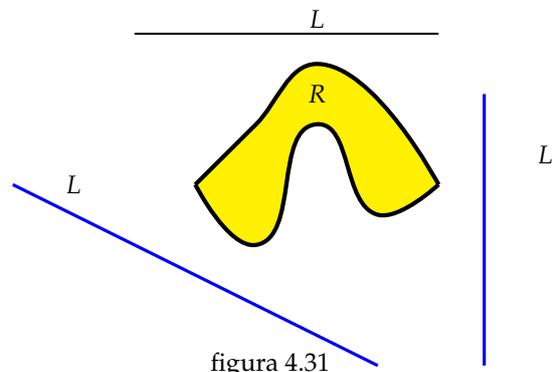


figura 4.31

4.16.6. Volumen de revolución

Consideremos una región acotada R del plano xy y una recta L que no intersecte el interior de R (L puede ser frontera de R). Además de las situaciones que muestra la figura 4.31, la recta L puede estar bajo la región o bien a su izquierda. Si R gira un ángulo α alrededor de la recta L , entonces se tienen tres situaciones:

- ☞ Si la recta L es **paralela** al eje x , entonces es de la forma $y = c$, y el volumen que genera la región al rotar alrededor de L viene dado por

$$V(R) = \alpha \int_R |y - c| dA$$

- ☞ Si la recta es **paralela** al eje y , entonces es de la forma $x = c$, y el volumen que genera la región al rotar alrededor de L viene dado por

$$V(R) = \alpha \int_R |x - c| dA$$

4.16 Aplicaciones de la integral doble

☞ Si la recta **no es paralela** a los ejes coordenados, entonces Pappus se hace presente, y se tiene el siguiente resultado:

Teorema 4.16.11. (Pappus)

Si una región R gira un ángulo α alrededor de una recta L del plano, y si L no intersecta a R , entonces el volumen generado es igual a α veces el producto del área de R por la distancia recorrida por el centro de masa de R . Esto es,

$$V(R) = \alpha \cdot A(R) \cdot |(\bar{x}, \bar{y}) - L|$$

Ejemplo 4.16.12. Hallemos el volumen generado al rotar la región acotada por la curva $y = x^2$, y las rectas $x = 2$, $y = 0$ alrededor de:

- 1) El eje x 2) El eje y 3) La recta $x = 5$ 4) La recta $x + y = 6$

Soluciones:

1) El eje x tiene ecuación $y = 0$, de modo que la rotación se hace respecto de una recta paralela al eje x , y en tal caso

$$V = 2\pi \int_R y \, dA = 2\pi \int_0^2 \int_0^{x^2} y \, dy \, dx = \frac{32\pi}{5}$$

2) En este caso la rotación es con respecto a una paralela al eje y .

$$V = 2\pi \int_R x \, dA = 2\pi \int_0^2 \int_0^{x^2} x \, dy \, dx = 8\pi$$

Observar que el recinto de integración es el mismo anterior.

3) La recta $x = 5$ es una paralela al eje y , por tanto

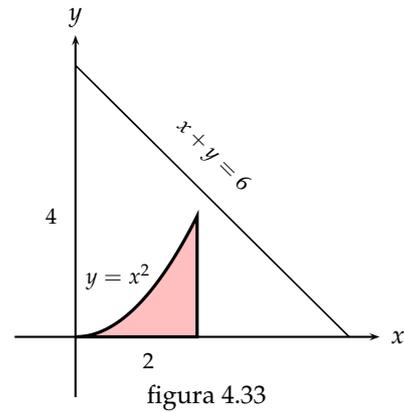
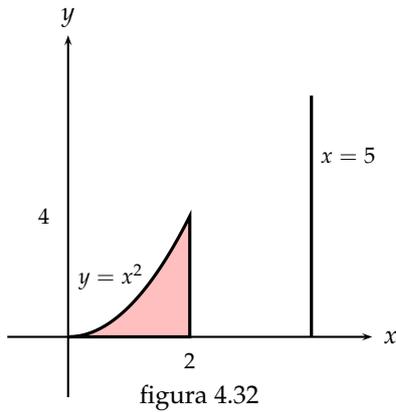
$$V = 2\pi \int_R |x - 5| \, dA = 2\pi \int_0^2 \int_0^{x^2} (5 - x) \, dy \, dx = \frac{56\pi}{3}$$

4) Para hallar el volumen de rotación respecto a la recta $x + y = 6$ se hace uso del Teorema de Pappus. Para ello debemos determinar el centro de masa de la región, y la distancia de éste a la recta. Los momentos M_x y M_y los obtenemos de los resultados de las partes a) y b) dividiendo por 2π . Se tiene, $M_x = \frac{16}{5}$, $M_y = 4$. El área del recinto R es $\frac{8}{3}$. En consecuencia, el centro de masa tiene coordenadas $\bar{x} = \frac{3}{2}$, $\bar{y} = \frac{6}{5}$. La distancia del centro de masa a la recta es

$$d[(\bar{x}, \bar{y}), L] = \frac{\frac{3}{2} + \frac{6}{5} - 6}{\sqrt{2}} = \frac{33}{10\sqrt{2}}$$

En consecuencia,

$$V = 2\pi \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{33}{10\sqrt{2}} = \frac{44\pi\sqrt{2}}{5}$$



4.17. Integrales triples Iteradas

La extensión de integral iterada de dos a tres o más dimensiones se realiza de manera natural.

Definición 4.17.1. Se llama *integral iterada tridimensional* a una integral de la forma

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x, y, z) dz dy dx$$

El siguiente ejemplo muestra que su determinación es análoga a la de la integral doble iterada, en el sentido de que se consideran constantes, para la primera integración respecto de z , las variables x e y . Una vez realizada esta integración y evaluado su resultado en $h_1(x, y)$ y $h_2(x, y)$ se procede con la integración respecto de la variable y . Su resultado, luego de evaluarlo en $g_1(x)$ y $g_2(x)$ se integra respecto de la variable x y se evalúa entre a y b .

Ejemplo 4.17.2. Hallemos $\int_0^5 \int_0^2 \int_1^3 (x^2 + 2yz) dx dy dz$

Al mirar los límites de la integral se observa que el recinto de integración es un cubo de dimensiones $[1, 3] \times [0, 2] \times [0, 5]$. La integración se realiza como sigue:

$$\begin{aligned} \int_0^5 \int_0^2 \int_1^3 (x^2 + 2yz) dx dy dz &= \int_0^5 \int_0^2 \left(\frac{x^3}{3} + 2xyz \right) \Big|_1^3 dy dz \\ &= \int_0^5 \int_0^2 \left(\frac{26}{3} + 4yz \right) dy dz \\ &= \frac{560}{3} \end{aligned}$$

4.17.1. Recintos de integración

El número de integrales triples iteradas es de seis (3!) y son:

- | | | |
|--|--|--|
| 1. $\int_{[\vec{a}, \vec{b}]} f(x, y, z) dx dy dz$ | 3. $\int_{[\vec{a}, \vec{b}]} f(x, y, z) dy dz dx$ | 5. $\int_{[\vec{a}, \vec{b}]} f(x, y, z) dz dy dx$ |
| 2. $\int_{[\vec{a}, \vec{b}]} f(x, y, z) dy dx dz$ | 4. $\int_{[\vec{a}, \vec{b}]} f(x, y, z) dx dz dy$ | 6. $\int_{[\vec{a}, \vec{b}]} f(x, y, z) dz dx dy$ |

Esto quiere decir que existen seis recintos de integración, uno por cada integral iterada. Estos recintos tienen las siguientes formas:

$$\begin{aligned}
 R_{xy} &= \{a \leq x \leq b, f_1(x) \leq y \leq f_2(x), g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y)\} \\
 R_{yx} &= \{a \leq y \leq b, f_1(y) \leq x \leq f_2(y), g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y)\} \\
 R_{xz} &= \{a \leq x \leq b, f_1(x) \leq z \leq f_2(x), g_1(x, z) \leq y \leq g_2(x, z)\} \\
 R_{zx} &= \{a \leq z \leq b, f_1(z) \leq x \leq f_2(z), g_1(z, x) \leq y \leq g_2(z, x)\} \\
 R_{yz} &= \{a \leq y \leq b, f_1(y) \leq z \leq f_2(y), g_1(y, z) \leq x \leq g_2(y, z)\} \\
 R_{zy} &= \{a \leq z \leq b, f_1(z) \leq y \leq f_2(z), g_1(z, y) \leq x \leq g_2(z, y)\}
 \end{aligned}$$

Se observa que estas regiones de \mathbb{R}^3 están relacionadas con las de la integral doble en \mathbb{R}^2 . Por ejemplo, la región R_{xy} en el plano cartesiano de las xy se corresponde con una región del tipo R_x .

Respecto del proceso de integración en \mathbb{R}^3 debe tenerse muy clara la forma en que las regiones definen los límites de integración en la integral triple iterada. Por ejemplo, si ya tenemos definida la región en la forma R_{xy} entonces **lateralmente** debe acotar la variable x , **frontal** y **posteriormente** debe hacerlo la variable y , y **superior** e **inferiormente** la variable z .

Ejemplo 4.17.3. La región R del espacio tridimensional que se encuentra en el primer octante y acotada por la esfera unitaria de centro el origen de coordenadas, tiene las siguientes representaciones:

$$\begin{aligned}
 R_{xy} &= \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}\} \\
 R_{yx} &= \{0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq \sqrt{1-y^2}, 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}\} \\
 R_{zy} &= \{0 \leq z \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1-z^2}, 0 \leq x \leq \sqrt{1-y^2-z^2}\} \\
 R_{zx} &= \{0 \leq z \leq 1, 0 \leq x \leq \sqrt{1-z^2}, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2-z^2}\} \\
 R_{xz} &= \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2}, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2-z^2}\} \\
 R_{yz} &= \{0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq \sqrt{1-y^2}, 0 \leq x \leq \sqrt{1-y^2-z^2}\}
 \end{aligned}$$

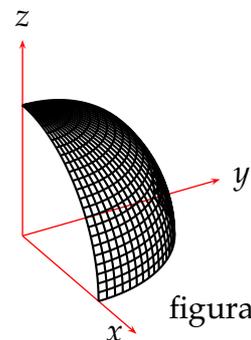


figura 4.34

4.18. Transformación de coordenadas

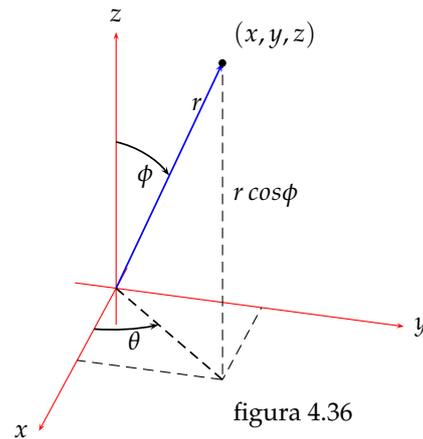
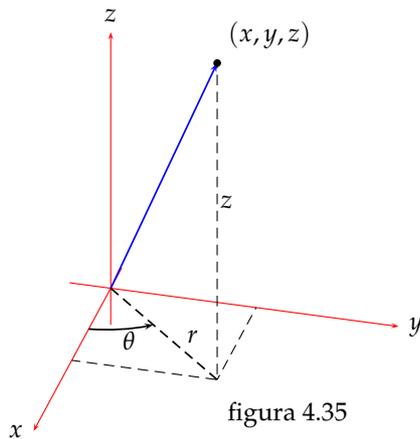
Al igual que en integración doble, el cambio de variable permite calcular integrales de integrando difícil o integrales sobre recintos complicados. En \mathbb{R}^3 existen dos cambios de coordenadas muy importantes; las coordenadas cilíndricas y las coordenadas esféricas.

4.18.1. Coordenadas cilíndricas

Si $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es la aplicación $T(r, \theta, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z) = (x, y, z)$, tal que $r > 0$, $0 < \theta \leq 2\pi$, entonces ella es inyectiva y de clase ζ^1 , con Jacobiano

$$J(r, \theta, z) = \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -r \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

Esta aplicación T da origen a las denominadas **coordenadas cilíndricas**. La figura 4.35 ilustra la relación que existe entre coordenadas rectangulares (x, y, z) y las coordenadas cilíndricas de un punto P de \mathbb{R}^3 .



La transformación a coordenadas cilíndricas $T : D_1 \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow D \subset \mathbb{R}^3$, para una función $f : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ integrable es tal que

$$\int_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_{D_1} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta dz$$

4.18.2. Coordenadas esféricas

La transformación $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$T(r, \theta, \phi) = (r \cos \theta \sin \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \phi)$$

4.18 Transformación de coordenadas

con $r > 0$; $0 < \theta \leq 2\pi$; $0 \leq \phi \leq \pi$, es inyectiva y de clase ζ^1 . Se llama **transformación esférica**, y su Jacobiano es

$$J(r, \theta, \phi) = \begin{vmatrix} \cos \theta \operatorname{sen} \phi & \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi & \cos \phi \\ -r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi & r \cos \theta \operatorname{sen} \phi & 0 \\ r \cos \theta \cos \phi & r \operatorname{sen} \theta \cos \phi & -r \operatorname{sen} \phi \end{vmatrix} = -r^2 \operatorname{sen} \phi$$

Respecto de la integral, una transformación en coordenadas esféricas $T : D_1 \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow D \subset \mathbb{R}^3$, para una función $f : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ integrable, satisface

$$\int_D f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_{D_1} f(r, \theta, \phi) \cdot r^2 \operatorname{sen} \phi \, d\theta \, dr \, d\phi$$

La figura 4.36 muestra la relación existente para un punto P , entre las coordenadas rectangulares y las coordenadas esféricas.

Ejemplo 4.18.1. El punto rectangular $(0, 3, 4)$ en coordenadas cilíndricas y esféricas satisface la siguiente relación:

rectangular	cilíndrica	esférica
$(0, 3, 4)$	$(3, \frac{\pi}{2}, 4)$	$(5, \frac{\pi}{2}, \arccos \frac{4}{5})$

Ejemplo 4.18.2. El punto $(1, \frac{\pi}{4}, 1)$ en coordenadas cilíndricas, satisface en coordenadas rectangulares y esféricas la siguiente relación:

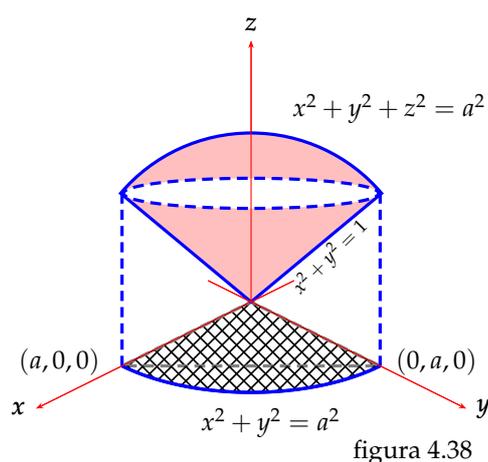
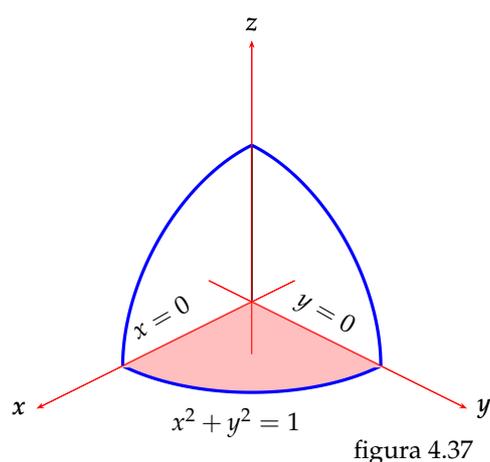
cilíndricas	rectangular	esféricas
$(1, \frac{\pi}{4}, 1)$	$(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$	$(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$

Ejemplo 4.18.3. Para hallar $\int_D e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \, dV$, siendo D el recinto del primer octante que acota la esfera unitaria de \mathbb{R}^3 , usemos la transformación esférica, en virtud de que el exponente de la función exponencial así lo aconseja. La figura 4.37 muestra el recinto. Se observa además, que una integración en coordenadas rectangulares resulta tarea imposible. El recinto en coordenadas esféricas tiene la forma

$$D = \{(r, \theta, \phi) / 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}\}$$

Luego

$$\begin{aligned} \int_D e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \, dV &= \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} e^{r^3} r^2 \operatorname{sen} \phi \, d\theta \, d\phi \, dr = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \int_0^{\pi/2} e^{r^3} r^2 \operatorname{sen} \phi \, d\phi \, dr \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^1 e^{r^3} r^2 \, dr = \frac{\pi}{6} (e - 1) \end{aligned}$$



Ejemplo 4.18.4. Vamos a escribir el volumen de la región R que es interior a la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geq 0$ y se encuentra dentro del cono $z^2 = x^2 + y^2$, en coordenadas rectangulares, cilíndricas y esféricas. Calculamos la expresión más simple.

La figura 4.38 muestra la parte del recinto de integración correspondiente al primer octante.

$$\text{Cartesianas: } V = 4 \int_0^{a/\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{a^2/2-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} dz dy dx$$

$$\text{Cilíndricas: } V = 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^{a/\sqrt{2}} \int_r^{\sqrt{a^2-r^2}} r dz dr d\theta$$

$$\text{Esféricas: } V = \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_0^{\pi/4} r^2 \sin \phi d\phi dr d\theta$$

Calculemos esta última integral. Al intersectar ambas superficies se obtiene $2z^2 = a^2$, de donde se deduce que $z = a/\sqrt{2}$. Como $z = r \cos \phi$, entonces $\phi = \frac{\pi}{4}$.

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_0^{\pi/4} r^2 \sin \phi d\phi dr d\theta = - \int_0^{2\pi} \int_0^a \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right) r^2 dr d\theta \\ &= -2\pi \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right) \cdot \frac{r^3}{3} \Big|_0^a = \frac{2\pi}{3} a^3 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \end{aligned}$$

4.19. Aplicaciones

Dentro de las aplicaciones de la integral triple se encuentran el volumen que acota una superficie en el espacio, los momentos de un sólido respecto de una recta o plano, y el centro de masa de un sólido.

4.19.1. Volumen

Si un conjunto E de \mathbb{R}^3 tiene contenido (volumen) $V(E)$, entonces

$$V(E) = \int_E 1_E = \int \int \int_E dx dy dz$$

Ejemplo 4.19.1. Hallemos el volumen que acotan, en el primer octante, los planos coordenados y el plano $x + y + z = 1$.

La figura 4.39 muestra que el recinto es una pirámide. Como estamos usando una integral triple, lo primero es establecer los límites de integración. Para ello, ponemos un “monito” dentro del recinto y vemos por donde puede caminar, y al saltar, donde golpean los pies y la cabeza.

- Puede caminar en el triángulo del plano xy , acotado por $x = 0, y = 0$ y $x + y = 1$, de tal forma que:

$$0 \leq x \leq 1 \quad y \quad 0 \leq y \leq 1 - x$$

- Los pies están sobre el plano xy , que tiene por ecuación $z = 0$. La cabeza “choca” contra el plano de ecuación $x + y + z = 1$. Luego, $0 \leq z \leq 1 - x - y$.

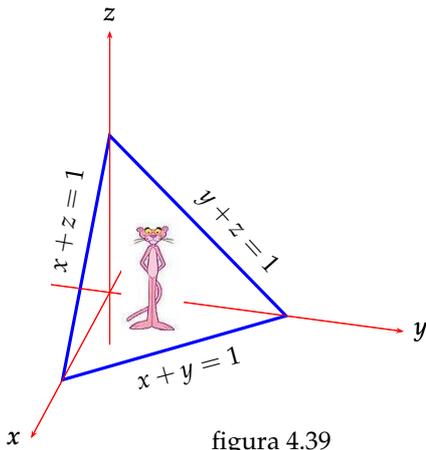


figura 4.39

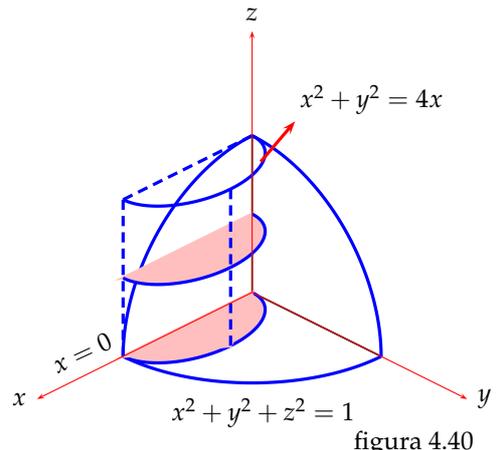


figura 4.40

$$V = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} dz dy dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y) dy dx = \frac{1}{6}$$

4.19.2. Masa - Momento - Centro de masa

Si un sólido tiene densidad $\rho(x, y, z)$ en cada punto, entonces su **masa** M se determina mediante la expresión

$$M = \int_R \rho(x, y, z) dV$$

Ejemplo 4.19.2. Hallemos la **masa** del sólido que en el primer octante es interior a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ y al cilindro $x^2 + y^2 = 4x$. La densidad de volumen en el sólido varía con su distancia al plano xy .

La figura 4.40 muestra el recinto de integración. Al considerarlo en forma R_{xy} , entonces

$$R = \{0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq \sqrt{4x - x^2}, 0 \leq z \leq \sqrt{16 - x^2 - y^2}\}$$

Es claro que el "monito" está obligado a moverse dentro de la parte del cilindro que queda en el primer octante, y cuando salta, los pies tocan el plano xy , de ecuación $z = 0$, y la cabeza queda bajo la esfera. Como la densidad es $\rho(x, y, z) = z$, entonces la masa es tal que

$$M = \int_R z \, dV = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{4x-x^2}} \int_0^{\sqrt{16-x^2-y^2}} z \, dz \, dy \, dx = \frac{1}{2} \int_0^4 \int_0^{\sqrt{4x-x^2}} (16 - x^2 - y^2) \, dy \, dx$$

Al cambiar esta integral a coordenadas polares se tiene

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{4\cos\theta} (16 - r^2) r \, dr \, d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \left(8r^2 - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^{4\cos\theta} d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} (64\cos^2\theta - 32\cos^4\theta) \, d\theta = \int_0^{\pi/2} 32\cos^2(1 + \sin^2\theta) \, d\theta \\ &= 16\left(\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right) + 4\left(\theta - \frac{\sin 4\theta}{4}\right) \Big|_0^{\pi/2} = 10\pi \end{aligned}$$

Definición 4.19.3. Sea \vec{x}_0 un punto fijo de un plano P y \vec{n} su vector normal. Si R es una región en \mathbb{R}^3 , se definen:

- El primer momento de R respecto de P como

$$M_P = \int_R \text{comp}_{\vec{n}}(\vec{x} - \vec{x}_0) \, dM$$

- El momento de Inercia de R con respecto a P como

$$I_P = \int_R \text{comp}_{\vec{n}}^2(\vec{x} - \vec{x}_0) \, dM$$

Los casos particulares son:

- Si P es el plano xy , se escoge el vector \vec{n} en la dirección positiva del eje z , teniéndose que

$$\text{comp}_{\vec{n}}(\vec{x} - \vec{x}_0) = \vec{k} \circ (\vec{x} - \vec{x}_0) = z$$

de donde,

$$M_{xy} = \int_R z \, dM, \quad I_{xy} = \int_R z^2 \, dM$$

- Si P es el plano yz , se escoge \vec{n} en dirección positiva del eje x . Se tiene que

$$\text{comp}_{\vec{n}}(\vec{x} - \vec{x}_0) = \vec{i} \circ (\vec{x} - \vec{x}_0) = x$$

Luego,

$$M_{yz} = \int_R x \, dM, \quad I_{yz} = \int_R x^2 \, dM$$

- Si P es el plano xz , se elige \vec{n} en dirección positiva del eje y . Se tiene

$$\text{comp}_{\vec{n}}(\vec{x} - \vec{x}_0) = \vec{j} \circ (\vec{x} - \vec{x}_0) = y$$

Luego

$$M_{zx} = \int_R y \, dM, \quad I_{zx} = \int_R y^2 \, dM$$

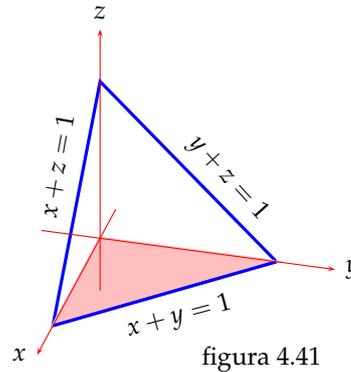
Definición 4.19.4. El centro de masa de un sólido de masa M en \mathbb{R}^3 es el punto de coordenadas

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \frac{1}{M}(M_{yz}, M_{zx}, M_{xy})$$

Ejemplo 4.19.5. Hallemos: masa, centro de masa, primer y segundo momento respecto de los planos coordenados de la región que en el primer octante acotan los planos coordenados y el plano $x + y + z = 1$. La densidad $\rho = 1$ en cada punto del sólido.

El recinto de integración lo muestra la figura 4.41 y se trata de un tetraedro.

Como recinto R_{xy} se tiene



$$R = \{(x, y, z) / 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x, 0 \leq z \leq 1 - x - y\}$$

Masa :

$$M = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} dz \, dy \, dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} (1 - x - y) \, dy \, dx = \frac{1}{6}$$

Primeros momentos :

$$M_{xy} = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} x \, dz \, dy \, dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} x(1 - x - y) \, dy \, dx = \frac{1}{24}$$

Segundos momentos :

$$I_{xy} = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} x^2 \, dz \, dy \, dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} x^2(1 - x - y) \, dy \, dx = \frac{1}{60}$$

Por simetría, $M_{zx} = M_{xz} = \frac{1}{24}$. En consecuencia, el centro de masa es el punto $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$. Análogamente, $I_{zx} = I_{xz} = \frac{1}{60}$.

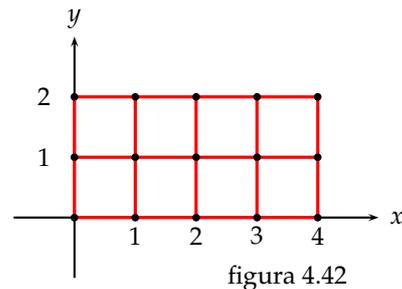
4.20. Problemas resueltos

Ejemplo 4.20.1. Aproximemos por la media aritmética de las sumas superior e inferior

$$\int_R (x^2 + y) dA, \quad R = [0, 4] \times [0, 2], P_1 = \{0, 1, 2, 3, 4\}, \quad P_2 = \{0, 1, 2\}$$

Las particiones P_1 y P_2 dan origen a la partición del intervalo $[a, b]$ que muestra la figura 4.42. En cada subrectángulo R_j se considera el valor que toma la función f en los vértices. Se obtiene

- $f(0,0) = 0, f(0,1) = 1, f(4,0) = 16$
- $f(1,1) = 2, f(0,2) = 2, f(3,1) = 10$
- $f(2,0) = 4, f(2,1) = 5, f(3,2) = 11$
- $f(3,0) = 9, f(1,2) = 3, f(4,1) = 17$
- $f(1,0) = 1, f(2,2) = 6, f(4,2) = 18$



De este modo, en R_1 el mínimo es $m_1 = 0$, el máximo $M_2 = 2$. En R_2 es $m_2 = 1$, $M_2 = 3$, y así sucesivamente. Se tiene entonces

$$s(f, P) = \sum_{i=1}^8 m_i(f) A(R_i) = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 10 \cdot 1 + 9 \cdot 1 = 32$$

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^8 M_i(f) A(R_i) = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 6 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 11 \cdot 1 + 10 \cdot 1 + 18 \cdot 1 + 17 \cdot 1 = 72$$

De esto obtenemos

$$\int_R (x^2 + y) dA = \frac{1}{2} \cdot (s(f, P) + S(f, P)) = 52$$

El valor exacto de esta integral es

$$\int_R (x^2 + y) dA = \int_0^4 \int_0^2 (x^2 + y) dy dx = \int_0^4 (2x^2 + 2) dx = \frac{152}{3} = 50,66$$

Ejemplo 4.20.2. Hallemos, mediante una suma de Riemann, $\int_R f(x, y) dA$, si $f(x, y) = x + 4y$, $R = [0, 2] \times [0, 1]$.

Como se trata de una suma de Riemann, lo primero es dividir los intervalos $[0, 2]$ y $[0, 1]$ en n subintervalos de igual longitud, para posteriormente, obtener la partición del intervalo $[0, 2] \times [0, 1]$. Tenemos:

- $P_1 = \{x = \frac{i}{n}, 0 \leq i \leq 2n\}$

- $P_2 = \{y = \frac{j}{n}, 0 \leq j \leq n\}$
- $P = \{(\frac{i}{n}, \frac{j}{n})\}$ es partición de $[0, 2] \times [0, 1]$
- $A(R_{ij}) = \frac{1}{n^2}$ y $\|P\| = \frac{1}{n}$

Con estos datos se tiene lo que sigue

$$\begin{aligned}
 \int_R f(x,y) dA &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^n (x_i + 4y_j) \cdot A(R_{ij}) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^n \left(\frac{i}{n} + \frac{4j}{n}\right) \cdot \frac{1}{n^2} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{2n} (n \cdot i + 2n(n+1)) \cdot \frac{1}{n^3} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{2n} (i + 2n + 2) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \cdot (n(2n+1) + 2n(2n+n)) = 6
 \end{aligned}$$

Ejemplo 4.20.3. Sea $R = [-1, 1] \times [0, 3]$. Tracemos un diagrama de la partición de este recinto, indicando los valores que toma la función escalonada $f(x, y) = [x + 1][y]$ sobre R .

- $[x + 1] = 0 \iff -1 \leq x < 0$
- $[x + 1] = 1 \iff 0 \leq x < 1$
- $[y] = 0 \iff 0 \leq y < 1$
- $[y] = 1 \iff 1 \leq y < 2$
- $[y] = 2 \iff 2 \leq y < 3$

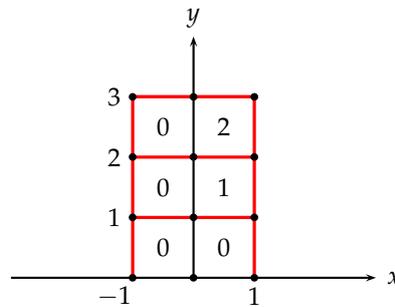


figura 4.43

En consecuencia

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x < 0, 0 \leq y < 3 \\ 0, & 0 \leq x < 1, 0 < y < 1 \\ 1, & 0 \leq x < 1, 1 \leq y < 2 \\ 2, & 0 \leq x < 1, 2 \leq y < 3 \end{cases}$$

Ejemplo 4.20.4. Calculemos $\int_R [x+1][y] dA$, si $R = [-1, 1] \times [0, 3]$.

El recinto de integración es el del ejemplo anterior, con lo cual se conocen los valores de la parte entera. Hacemos la integración en el orden $dy dx$. Tenemos:

$$\begin{aligned} \int_R [x+1][y] dA &= \int_{-1}^1 \int_0^3 [x+1][y] dy dx = \int_{-1}^1 \left(\begin{cases} 3, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & -1 \leq x < 0 \end{cases} \right) dx \\ &= \int_{-1}^0 0 dx + \int_0^1 3 dx = 3 \end{aligned}$$

Ejemplo 4.20.5. Escribimos el recinto R que se señala como un recinto R_x y como recinto R_y :

1. R es el recinto limitado por las rectas $y = x$, $x = 0$, $y = 1$.

La figura 4.44 muestra el recinto de integración.

$$R_x = \{(x, y) / 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1\} \quad R_y = \{(x, y) / 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y\}$$

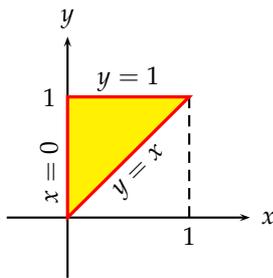


figura 4.44

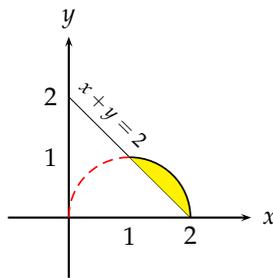


figura 4.45

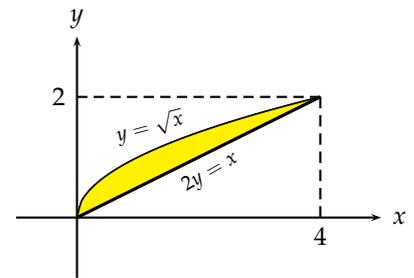


figura 4.46

2. R es la región que acotan $x + y = 2$, $x^2 + y^2 - 2x = 0$, $x \geq 0$, $y \geq 0$

La figura 4.45 muestra el recinto de integración

- $R_x = \{(x, y) / 1 \leq x \leq 2, 2 - x \leq y \leq \sqrt{2x - x^2}\}$
- $R_y = \{(x, y) / 0 \leq y \leq 1, 2 - y \leq x \leq 1 + \sqrt{1 - y^2}\}$

3. R es la región que acotan $y = \sqrt{x}$, $x = 2y$, $x \geq 0$, $y \geq 0$

La figura 4.46 ilustra el recinto de integración.

$$R_x = \{(x, y) / 0 \leq x \leq 4, \frac{x}{2} \leq y \leq \sqrt{x}\} \quad R_y = \{(x, y) / 0 \leq y \leq 2, y^2 \leq x \leq 2y\}$$

Ejemplo 4.20.6. Calculemos $\int_R |\cos(x+y)| dA$, si $R = [0, \pi] \times [0, \pi]$.

La función coseno presenta cambio de signo a medida que $x + y$ recorre desde 0 hasta 2π . Se tiene:

$$|\cos(x + y)| = \begin{cases} \cos(x + y), & 0 \leq x + y \leq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \leq x + y \leq 2\pi \\ -\cos(x + y), & \frac{\pi}{2} \leq x + y \leq \pi, \pi \leq x + y \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

Sea $f(x, y) = \cos(x + y)$, entonces la integral se descompone como sigue

$$\begin{aligned} \int_R |f| dx dy &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2-x} f dy dx - \int_0^{\pi/2} \int_{\pi/2-x}^{\pi-x} f dy dx - \int_0^{\pi/2} \int_{\pi-x}^{\pi} f dy dx \\ &\quad - \int_{\pi/2}^{\pi} \int_{\pi-x}^{\pi/2-x} f dy dx - \int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^{\pi-x} f dy dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \int_{3\pi/2-x}^{\pi} f dy dx \\ &= \int_0^{\pi/2} (1 - \operatorname{sen} x) dx + \int_0^{\pi/2} dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \operatorname{sen} x dx - \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(x + \pi) dx \\ &\quad + \int_{\pi/2}^{\pi} dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (1 + \operatorname{sen}(x + \pi)) dx = 2\pi \end{aligned}$$

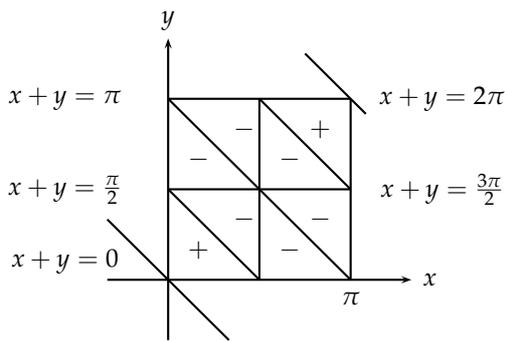


figura 4.47

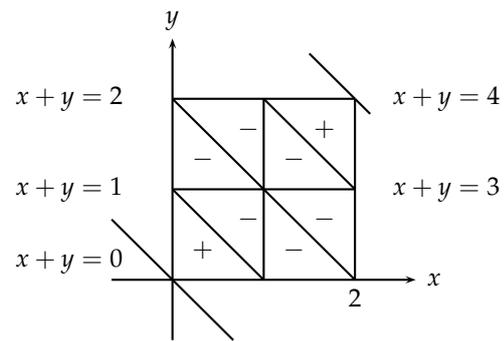


figura 4.48

Ejemplo 4.20.7. Calculemos $\int_R [x + y] dA$, si $R = [0, 2] \times [0, 2]$.

La función máximo entero presenta cambio de valores a medida que $x + y$ recorre desde 0 hasta 2. La figura 4.48 muestra la situación, y se tiene que

$$[x + y] = \begin{cases} 0, & 0 \leq x + y < 1 \\ 1, & 1 \leq x + y < 2 \\ 2, & 2 \leq x + y < 3 \\ 3, & 3 \leq x + y < 4 \end{cases}$$

A partir de esto, la integral dada se descompone como sigue

$$\begin{aligned}
\int_R [x+y] dx dy &= \int_0^1 \int_0^{1-x} 0 dy dx + \int_0^1 \int_{1-x}^{2-x} 1 dy dx + \int_1^2 \int_0^{2-x} 1 dy dx + \\
&= + \int_0^1 \int_{2-x}^2 2 dy dx + \int_1^2 \int_{2-x}^{3-x} 2 dy dx + \int_1^2 \int_{3-x}^2 3 dy dx \\
&= \int_0^1 dx + \int_1^2 (2-x) dx + 2 \int_0^1 x dx + 3 \int_1^2 (x-1) dx \\
&= 1 + 2 - 2 + \frac{1}{2} + 1 + 2 + \frac{3}{2} = 6
\end{aligned}$$

Ejemplo 4.20.8. Hallemos $\int_R \sin^2 x \sin^2 y dA$, si $R = [0, \pi] \times [0, \pi]$.

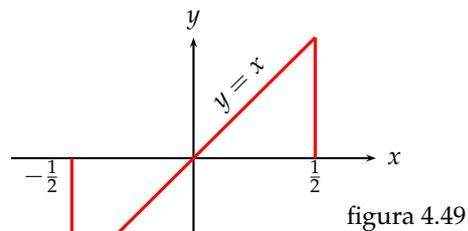
En este caso, el recinto de integración es sencillo. Las funciones trigonométricas que están al cuadrado tienen una identidad conocida. Se tiene,

$$\begin{aligned}
\int_R \sin^2 x \sin^2 y dA &= \int_0^\pi \int_0^\pi \sin^2 x \sin^2 y dy dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi (x - \sin 2x) \sin^2 y \Big|_0^\pi dy \\
&= \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \sin^2 y dy = \frac{\pi^2}{4}
\end{aligned}$$

Ejemplo 4.20.9. Hallar $I = 2 \int_{-1/2}^1 \int_0^x e^{-y^2} dy dx$, en función de A y B , si $A = \int_0^1 e^{-t^2} dt$, $B = \int_0^{1/2} e^{-t^2} dt$. Determinar constantes $m, n \in \mathbb{Z}^+$, tales que $I = mA - nB + e^{-1} - e^{-1/4}$

Un esquema gráfico de la situación (figura 4.49) nos ayuda en la determinación exacta de los límites de integración.

$$\begin{aligned}
I &= 2 \left(\int_{-1/2}^0 \int_0^x e^{-y^2} dy dx + \int_0^1 \int_0^x e^{-y^2} dy dx \right) \\
&= 2 \left(- \int_{-1/2}^0 \int_{-1/2}^y e^{-y^2} dx dy + \int_0^1 \int_y^1 e^{-y^2} dx dy \right) \\
&= 2 \left(- \int_{-1/2}^0 e^{-y^2} \left(y + \frac{1}{2} \right) dy + \int_0^1 (1-y) e^{-y^2} dy \right) \\
&= e^{-1} - e^{-1/4} - \int_0^{1/2} e^{-t^2} dt + 2A
\end{aligned}$$



Para determinar las constantes m y n tenemos que, $I = mA - nB + e^{-1} - e^{-1/4} = e^{-1} - e^{-1/4} - B + 2A$, de lo cual $n = 1$, $m = 2$.

Ejemplo 4.20.10. Bosquejamos el recinto cartesiano dado S y lo escribimos en coordenadas polares.

- $S = \{(x, y) / x^2 + y^2 \leq a^2, a > 0\}$

La figura 4.50 muestra el recinto en el plano xy , y sobre él se ha superpuesto el plano polar. Con esto logramos visualizar en forma rápida el movimiento del radio polar y del ángulo. Se tiene el siguiente recinto polar:

$$S = \{(r, \theta) / 0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

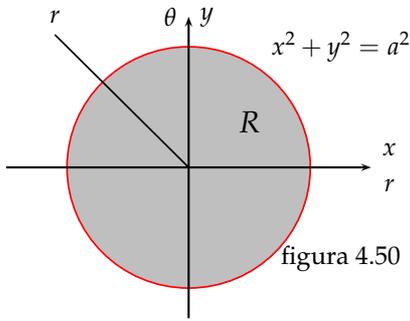


figura 4.50

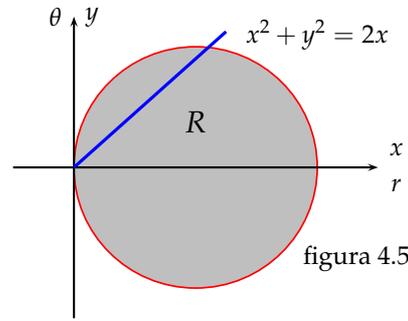


figura 4.51

2. $S = \{(x, y) / x^2 + y^2 \leq 2x\}$

La curva que acota el recinto (figura 4.51) es una circunferencia cuya ecuación en el plano polar, se halla como sigue:

$$r^2 = 2rcos \theta \implies r(r - 2cos \theta) = 0$$

de donde $r = 0 \vee r = 2cos \theta$. Luego

$$S = \{(r, \theta) / -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 2cos \theta\}$$

Ejemplo 4.20.11. En los ejercicios siguientes transformamos a coordenadas polares y calculamos la integral:

1. $A = \int_0^{2a} \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} (x^2 + y^2) dy dx$

Se lee de la integral dada que, el recinto de integración está acotado por las curvas, $x = 0$, $x = 2a$, $y = 0$, $y = \sqrt{2ax - x^2}$ (figura 4.52). La última de estas curvas es una porción de la circunferencia de centro $(a, 0)$ y radio a . Su ecuación es, $(x - a)^2 + y^2 = a^2$. En consecuencia

$$\int_0^{2a} \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} (x^2 + y^2) dy dx = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2cos \theta} r^3 dr d\theta = \frac{3}{4} \pi a^4$$

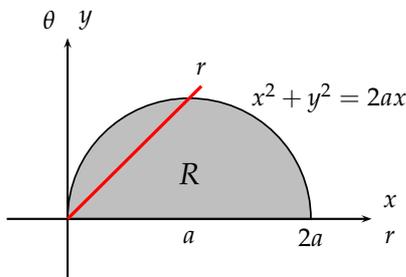


figura 4.52

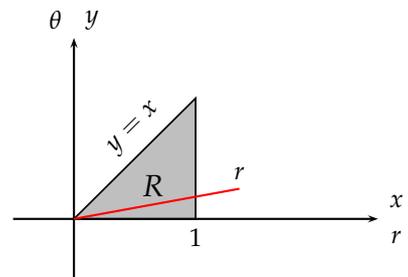


figura 4.53

$$2. A = \int_0^a \int_0^x \sqrt{x^2 + y^2} dy dx$$

La integral nos dice que el recinto de integración satisface que

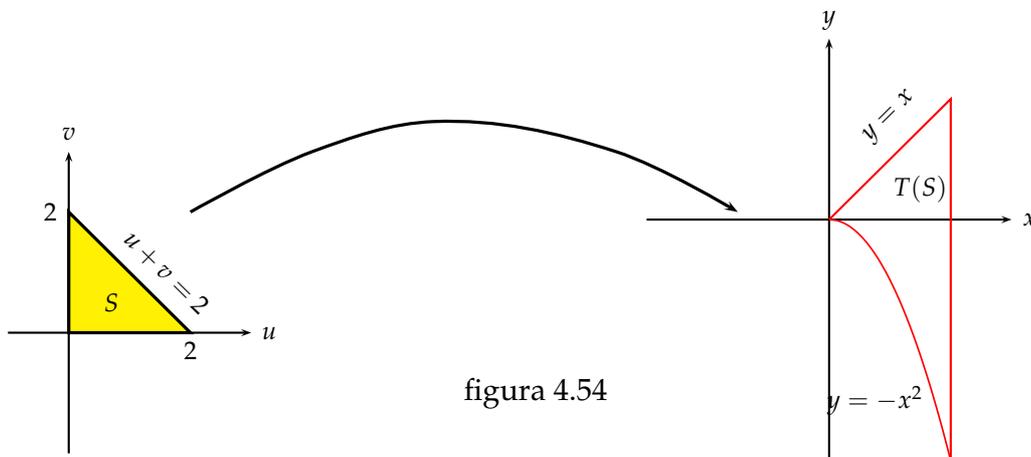
$$0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq x$$

Luego, la integral en coordenadas polares es

$$\begin{aligned} \int_0^a \int_0^x \sqrt{x^2 + y^2} dy dx &= \int_0^{\pi/4} \int_0^{a/\cos \theta} r^2 dr d\theta = \frac{1}{3} \int_0^{\pi/4} a^3 \sec \theta d\theta \\ &= \frac{a^3}{6} \ln(1 + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

Ejemplo 4.20.12. Sea $T(u, v) = (u + v, v - u^2)$ aplicación del plano uv en el plano xy . Vamos a determinar: El Jacobiano de T . La imagen del conjunto S por la transformación T , esto es, $T(S)$, siendo S el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 2)$ en el plano uv . El área de $T(S)$ mediante una integral doble en el plano xy , y por una integral doble en el plano uv .

Cuando de transformaciones se trata, la ubicación adecuada de los sistemas cartesianos ayuda bastante a la hora de saber cual es el Jacobiano que se necesita poner en la integral. Como siempre, elegimos que el plano uv esté a la izquierda y el xy a la derecha (figura 4.54)



Es evidente que la transformación T nace del plano uv y llevará al conjunto S en otro conjunto que denotamos $T(S)$. El Jacobiano de T es

$$J(T) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2u & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2u$$

La frontera de S se parametriza

$$\begin{aligned} \alpha_1(t) &= (0, t) \implies T(\alpha_1(t)) = (t, t) \implies y = x \\ \alpha_2(t) &= (t, 0) \implies T(\alpha_2(t)) = (t, -t^2) \implies y = -x^2 \\ \alpha_3(t) &= (t, 2-t) \implies T(\alpha_3(t)) = (2, 2-t-t^2) \implies x = 2 \end{aligned}$$

en donde el parámetro t es tal que $0 \leq t \leq 2$. Luego, $T(S)$ es como muestra la figura 4.16

Area en el plano xy

$$A[T(S)] = \int_0^2 \int_{-x^2}^x dy dx = \frac{14}{3}$$

Area en el plano uv

$$A[T(S)] = \int_0^2 \int_0^{2-u} (1+2u) dv du = \frac{14}{3}$$

Ejemplo 4.20.13. Hallemos $\int_R x^2 y^2 dx dy$, si R es el recinto que acotan en el primer cuadrante las curvas $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x$, $y = 4x$.

Método 1: Directo

Los puntos de intersección de las cuatro curvas se encuentran resolviendo los sistemas

$$\{y = x, xy = 1\}, \quad \{y = x, xy = 2\}, \quad \{y = 4x, xy = 1\}, \quad \{y = 4x, xy = 2\}$$

Se obtiene

$$(1, 1), \quad (\sqrt{2}, \sqrt{2}), \quad \left(\frac{1}{2}, 2\right), \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 2\sqrt{2}\right)$$

Si $f(x, y) = x^2 y^2$, entonces

$$\begin{aligned} \int_R f dA &= \int_1^{\sqrt{2}} \int_{1/y}^y f dx dy + \int_{\sqrt{2}}^2 \int_{1/y}^{2/y} f dx dy + \int_2^{2\sqrt{2}} \int_{y/4}^{2/y} f dx dy \\ &= \int_1^{\sqrt{2}} \left(\frac{y^5}{3} - \frac{1}{3y}\right) dx + \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{7}{3y} dy + \int_2^{2\sqrt{2}} \left(\frac{8}{3y} - \frac{y^5}{192}\right) dy \\ &= \frac{7}{3} \ln 2 \end{aligned}$$

Método 2: Transformación

La figura 4.55 muestra S y $T(S)$. La transformación que estamos considerando es $T(x, y) = (xy, y)$ la cual se obtiene al considerar $xy = u$, $y = v$. Su Jacobiano es $J(T) = y$. Luego, $J(T^{-1}) = \frac{1}{y} = \frac{1}{v}$.

Otra forma de obtener este resultado es considerar la transformación inversa de T , la que viene dada por $T^{-1}(u, v) = \left(\frac{u}{v}, v\right)$. Para determinar el conjunto en el plano uv que por la transformación T corresponde al conjunto S del plano xy , tenemos dos formas; una parametrizando cada curva frontera de S y enviándola por T al plano uv , o bien, lo que es más sencillo, reemplazar directamente en las curvas. Veamos ambas formas, dejando al lector la metodología futura a emplear.

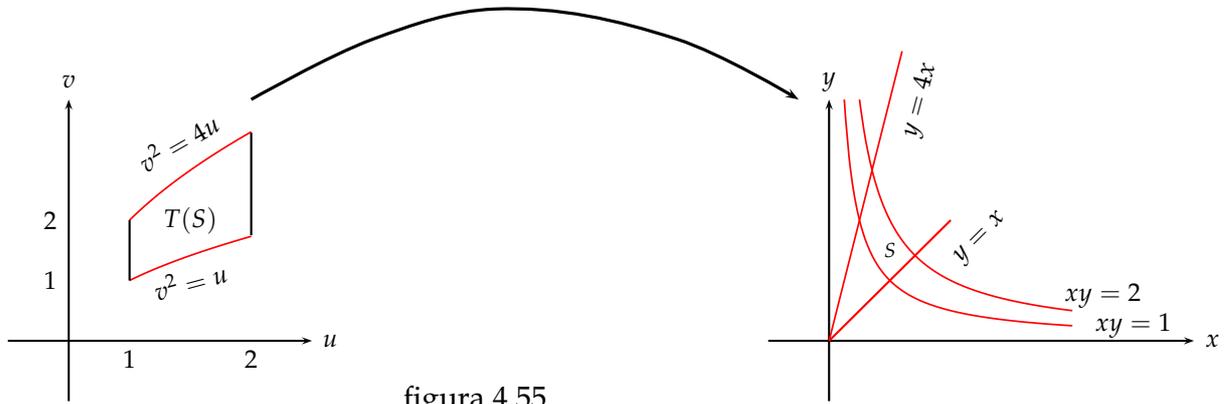


figura 4.55

Parametrización I

Una parametrización que se puede elegir es la siguiente

$$\alpha_1(t) = \left(t, \frac{1}{t}\right), \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \implies T(\alpha_1(t)) = \left(1, \frac{1}{t}\right), \quad u = 1, \quad v = \frac{1}{t}$$

$$\alpha_2(t) = \left(t, \frac{2}{t}\right), \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \leq t \leq \sqrt{2} \implies T(\alpha_2(t)) = \left(2, \frac{2}{t}\right), \quad u = 2, \quad v = \frac{2}{t}$$

$$\alpha_3(t) = (t, 4t), \quad 1 \leq t \leq \sqrt{2} \implies T(\alpha_3(t)) = (4t^2, 4t), \quad v = u^2$$

$$\alpha_4(t) = (t^2, t), \quad 1 \leq t \leq \sqrt{2} \implies T(\alpha_4(t)) = (t^2, t), \quad u = v^2$$

Reemplazando

En lugar de parametrizar, se puede usar el hecho de que como $xy = u$, entonces en el plano uv se tiene que $u = 1$ y $u = 2$ son las curvas frontera que acotan el recinto. Para transformar la recta $y = x$, consideramos $y = v$, y que $xy = u$, con lo cual la dependencia entre u y v es $v^2 = u$. De la misma forma se encuentra que a la curva $y = 4x$ corresponde $v^2 = 4u$.

Parametrización II

Una parametrización más adecuada que la anterior, y que se obtiene de la forma del recinto de

integración es considerar $xy = u$, $\frac{y}{x} = v$. Esta transformación es

$$T(x, y) = \left(xy, \frac{y}{x}\right)$$

A partir de ella se obtiene el recinto $\{(u, v) / 1 \leq u \leq 2, 1 \leq v \leq 4\}$, cuyo Jacobiano es

$$J(T) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = \frac{2y}{x}$$

se concluye que

$$J(T^{-1}) = \frac{x}{2y} = \frac{1}{2v}$$

En este caso, la situación gráfica es mucho más simple que la anterior (figura 4.56)

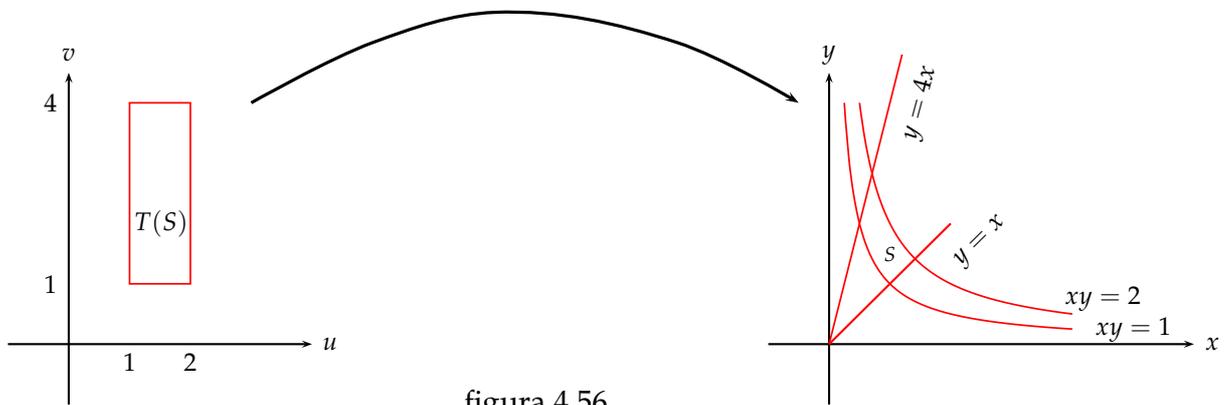


figura 4.56

Vamos a calcular la integral dada mediante la primera de las transformaciones. Queda como ejercicio el cálculo por la transformación restante.

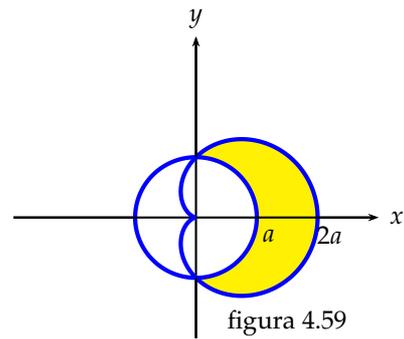
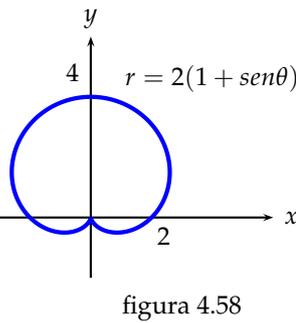
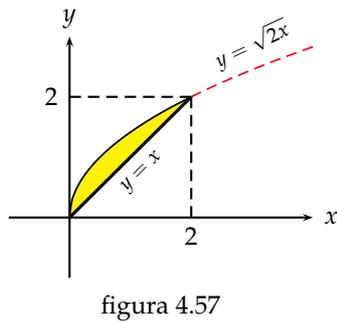
$$\begin{aligned} \int_S x^2 y^2 dx dy &= \int_1^2 \int_1^4 \frac{1}{2v} \cdot \frac{u^2}{v^2} \cdot v^2 dv du = \frac{1}{2} \int_1^2 \int_1^4 \frac{u^2}{v} dv du \\ &= \frac{1}{2} \int_1^2 u^2 \ln 4 du = \frac{7}{3} \ln 2 \end{aligned}$$

Ejemplo 4.20.14. Hallemos el área de las regiones acotadas que se indican:

1. La región R está acotada por la parábola $y^2 = 2x$ y la recta $y = x$.

La figura 4.57 muestra el recinto de integración, siendo claro que

$$A = \int_0^2 \int_x^{x\sqrt{2}} dy dx = \int_0^2 \int_{y^2/2}^y dx dy = \frac{2}{3}$$



2. La región R es interior a la cardiode $r = 2(1 + \text{sen } \theta)$.

El radio barre desde cero hasta la curva polar $r = 2(1 + \text{sen } \theta)$, y que el ángulo varía desde 0 hasta 2π (figura 4.58). En consecuencia

$$A = \int_0^{2\pi} r \int_0^{2(1+\text{sen } \theta)} dr d\theta = 6\pi$$

3. La región R es interior a la cardiode $r = a(1 + \cos \theta)$ y exterior al círculo $r = a$.

En la figura 4.59 se observa que el radio barre desde a hasta la curva polar $r = a(1 + \cos \theta)$ y el ángulo varía desde $-\frac{\pi}{2}$ hasta $\frac{\pi}{2}$. Luego

$$A = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_a^{a(1+\cos \theta)} r dr d\theta = \frac{a^2}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2\cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta = \frac{a^2}{4} (\pi + 8)$$

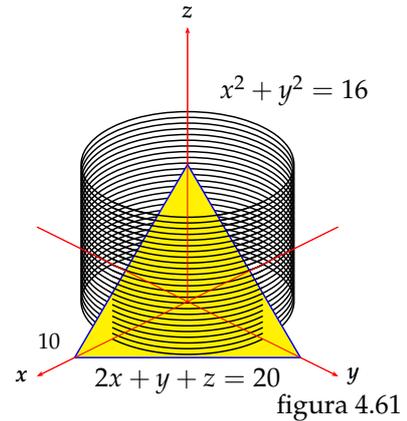
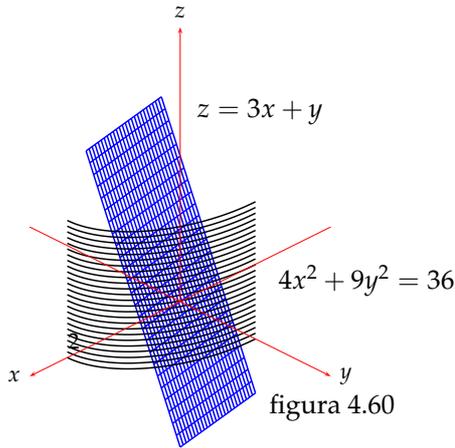
Ejemplo 4.20.15. Calculemos el volumen de la región $R = \{(x, y, z) / 4x^2 + 9y^2 \leq 36, x > 0, y > 0, z = 3x + y, z \geq 0\}$.

En el espacio la ecuación $4x^2 + 9y^2 = 36$ representa un cilindro elíptico, que crece en dirección del eje z . En la figura 4.60 se muestra la parte correspondiente al primer octante. El plano $z = 3x + y$, además de pasar por el origen de coordenadas, en el primer octante para **sobre** la elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$. Esto significa que este plano corresponde a la superficie que acota superiormente el recinto, ya que la inferior es $z = 0$. Como vamos a usar una integral doble, los límites de integración los consideramos en el plano xy y corresponde a la región que delimita la elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$ y los ejes coordenados. Se tiene lo siguiente:

$$V = \int_0^3 \int_0^{\sqrt{36-4x^2}/3} (3x + y) dy dx = \int_0^3 \left(x\sqrt{36-4x^2} + \frac{1}{18} (36-4x^2) \right) dx$$

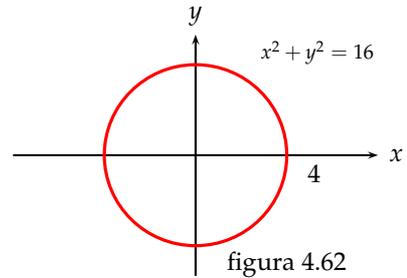
de donde,

$$V = -\frac{1}{12}(36-4x^2)^{3/2} + \frac{1}{54}(108x-4x^3) \Big|_0^3 = 4 + 18 = 22$$



Ejemplo 4.20.16. Hallemos volumen que acota $R = \{(x, y, z) / x^2 + y^2 \leq 16, 2x + y + z = 20, z \geq 0\}$.

En la figura 4.61 hay una idea de como van situados el plano y el cilindro. Es claro que el plano corta al cilindro y lo cubre superiormente. Una integración en coordenadas cartesianas debe considerar 4 volúmenes V_1, V_2, V_3, V_4 , ya que no es posible calcular V_1 por ejemplo, y luego multiplicar por 4, pues el plano al crecer genera volúmenes distintos sobre cada octante.



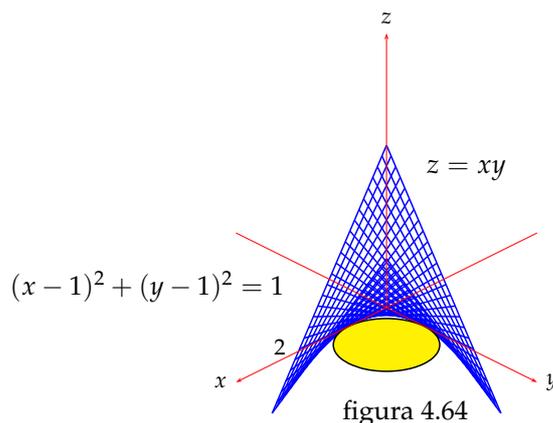
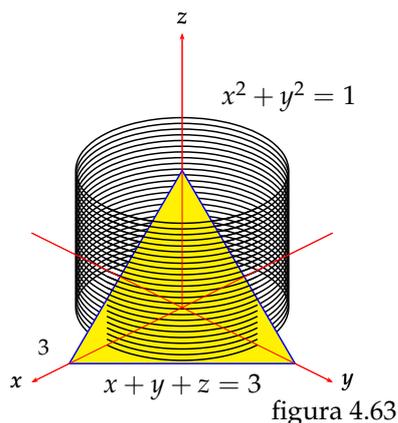
El cálculo en coordenadas polares es más sencillo, ello se debe a que el cilindro proporciona los límites laterales de integración (figura 4.62). Si $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, entonces su jacobiano es $J(r, \theta) = r$, y se tiene

$$V = \int_0^4 \int_0^{2\pi} (20 - 2r \cos \theta - r \sin \theta) r \, d\theta \, dr = 320\pi$$

Ejemplo 4.20.17. Calculemos el volumen que acotan las superficies $z = 0, x^2 + y^2 = 1, x + y + z = 3$.

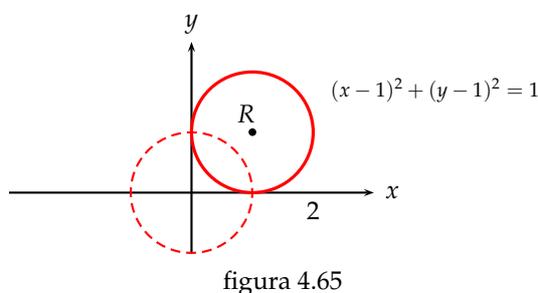
La superficie $z = 0$ corresponde al plano xy . El cilindro $x^2 + y^2 = 1$, centrado en el origen, es de radio 1 y sigue la dirección del eje z . El plano $x + y + z = 3$ corta a los ejes coordenados en los puntos $(0, 0, 3), (3, 0, 0), (0, 3, 0)$. La gráfica de esta superficie se muestra en la figura 4.63. El volumen viene dado por

$$V = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (3 - x - y) \, dy \, dx = 3\pi$$



Ejemplo 4.20.18. Hallemos volumen acotado por las superficies $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$, $xy = z$, $z = 0$.

La figura 4.64 muestra el sólido al cual se determina el volumen. El cilindro pone los límites laterales y la superficie $z = xy$ (parecida a la silla de montar) pone la tapa superior al recinto que calculamos su volumen. Para simplificar los cálculos, nos vamos a coordenadas polares. La figura 4.65 muestra el recinto de integración en el plano. La sustitución adecuada es



$$x - 1 = r \cos \theta, \quad y - 1 = r \sin \theta$$

cuyo Jacobiano es r . Es conocido que esto conlleva un proceso de traslación al origen de coordenadas. Con esto,

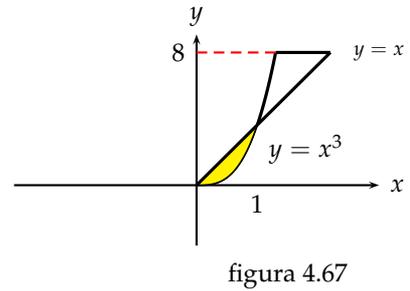
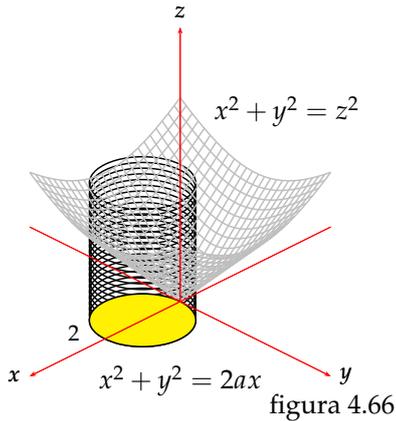
$$V = \int_R xy \, dy \, dx = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1 + r \cos \theta)(1 + r \sin \theta) r \, d\theta \, dr = \pi$$

Al integrar, primero respecto de θ , las integrales que contienen seno y coseno se anulan.

Ejemplo 4.20.19. Hallemos volumen acotado por las superficies $z = 0$, $x^2 + y^2 - 2ax = 0$, $x^2 + y^2 = z^2$.

Si usamos coordenadas polares debemos escribir las curvas que acotan el sólido en esas coordenadas. La curva $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ en el plano xy es una circunferencia de centro $(a, 0)$ y radio a , la que en coordenadas polares tiene ecuación $r = 2a \cos \theta$. En el espacio $x^2 + y^2 = z^2$ es un cono de ecuación polar $z = r$. La figura 4.66 da una idea del recinto que queda sobre el plano $z = 0$ y que encierra lateralmente el cilindro. La tapa inferior la pone $z = 0$ y la superior el cono. dado que el Jacobiano es $J = r$, y el ángulo θ recorre desde 0 hasta $\frac{\pi}{2}$, entonces

$$V = 2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2a \cos \theta} r^2 \, dr \, d\theta = \frac{16a^3}{3} \int_0^{\pi/2} \cos^3 \theta \, d\theta = \frac{32a^3}{9}$$



Ejemplo 4.20.20. Al calcular, por doble integración, el volumen V limitado superiormente por una superficie $z = f(x, y)$ e inferiormente por una región S del plano xy , se ha llegado a la siguiente suma de integrales

$$V = \int_1^2 \int_x^{x^3} f(x, y) dy dx + \int_2^3 \int_x^8 f(x, y) dy dx$$

Dibujar la región S y expresar el volumen V mediante una integral iterada con el orden de integración invertido. Calcular V si $f(x, y) = \frac{x}{y}$.

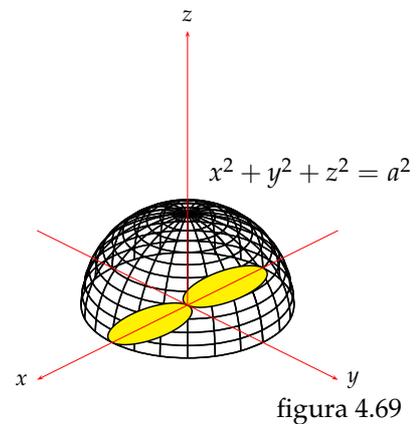
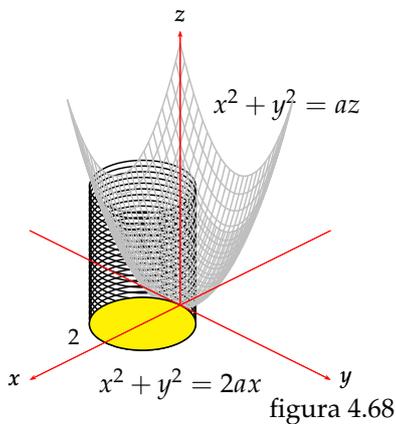
La figura 4.67 muestra el recinto de integración en el plano xy . La integral iterada que proporciona el volumen V , es

$$V = \int_1^8 \int_{y^{1/3}}^y \frac{x}{y} dx dy = \frac{1}{2} \int_1^8 \frac{x^2}{y} \Big|_{y^{1/3}}^y dy = \frac{1}{2} \int_1^8 \left(y - \frac{1}{y^{1/3}} \right) dy = \frac{27}{2}$$

Ejemplo 4.20.21. Calculemos el volumen acotado por las superficies $x^2 + y^2 = 2ax$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = az$.

La figura 4.68 muestra el cilindro y el paraboloides. Al considerar coordenadas polares:

$$V = \frac{1}{a} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2a \cos \theta} r^3 dr d\theta = 4a^3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 \theta d\theta = \frac{3\pi a^3}{2}$$



Ejemplo 4.20.22. Hallemos el volumen del recinto interior al cilindro $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ y a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0$.

El cilindro (especie de lemniscata) tiene ecuación polar $r^2 = a^2 \cos 2\theta$. La figura 4.69 muestra el cilindro y la esfera. Se tiene

$$\begin{aligned} V &= 4 \int_0^{\pi/4} \int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} \sqrt{a^2 - r^2} r dr d\theta = -\frac{8}{3} \int_0^{\pi/4} (a^2 - r^2)^{3/2} \Big|_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} d\theta \\ &= -\frac{8a^3}{3} \int_0^{\pi/4} \left((1 - \cos 2\theta)^{3/2} - 1 \right) d\theta \end{aligned}$$

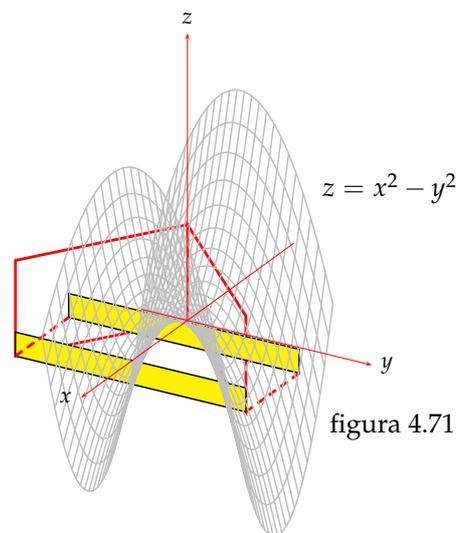
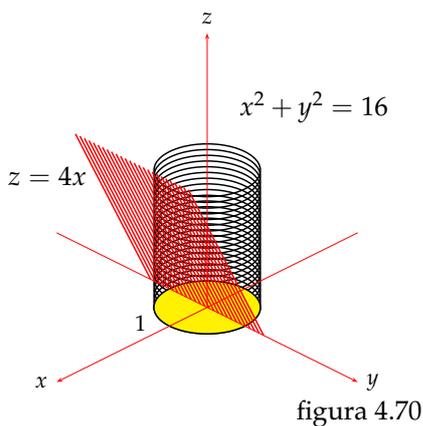
Dado que $\sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$, entonces

$$\begin{aligned} V &= \frac{8a^3}{3} \left(\frac{\pi}{4} - \int_0^{\pi/4} (2 \sin^2 \theta)^{3/2} d\theta \right) = \frac{8a^3}{3} \left(\frac{\pi}{4} - 2^{3/2} \int_0^{\pi/4} \sin^3 \theta d\theta \right) \\ &= \frac{2a^3}{3} \left(\frac{\pi}{4} - 2^{3/2} (-\cos \theta + \frac{1}{3} \cos^3 \theta) \right)_0^{\pi/4} = \frac{a^3}{18} (3\pi + 20 - 16\sqrt{2}) \end{aligned}$$

Ejemplo 4.20.23. Hallemos volumen acotado por el cilindro $x^2 + y^2 = 16$ y los planos $z = 4x, z \geq 0$.

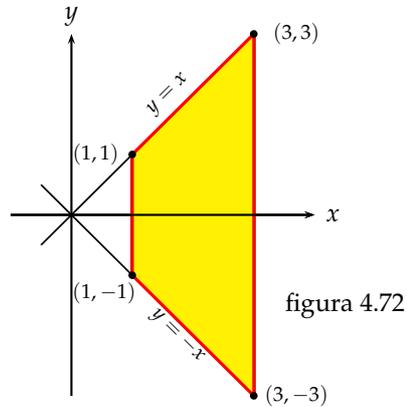
La figura 4.70 proporciona información sobre el recinto al que calculamos su volumen. La porción de volumen del primer octante es equivalente a la del cuarto. El plano $z = 4x$ es la tapa superior del recinto, y el cilindro aporta los límites de integración. Por tanto,

$$V = 2 \int_0^4 \int_0^{\sqrt{16-x^2}} 4x dy dx = 8 \int_0^4 x \sqrt{16-x^2} dx = \frac{512}{3}$$



Ejemplo 4.20.24. Hallemos volumen del recinto acotado por la superficie $z = x^2 - y^2$, $z \geq 0$ y los planos $x = 1$, $x = 3$

En la figura 4.71 tenemos un “bosquejo” de la situación gráfica. La superficie es la silla de montar y ella sirve de tapa para el recinto, luego, los límites de integración se obtienen de las demás hipótesis. La figura 4.72 muestra el recinto en el plano. La traza de la silla en el plano xy se obtiene de $x^2 - y^2 = 0$, de lo cual $y = \pm x$. Esto hace que existen dos porciones equivalentes, ubicadas en el primer y cuarto cuadrante. Por tanto, el valor de la integral lo encontraremos multiplicando la primera porción por 2. Tenemos que,

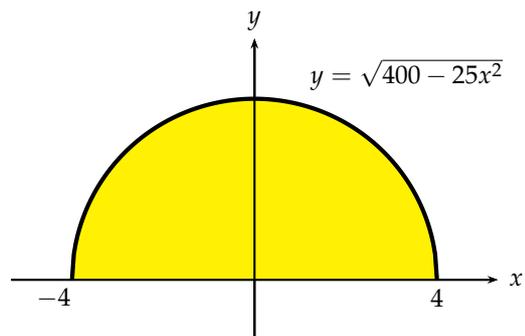
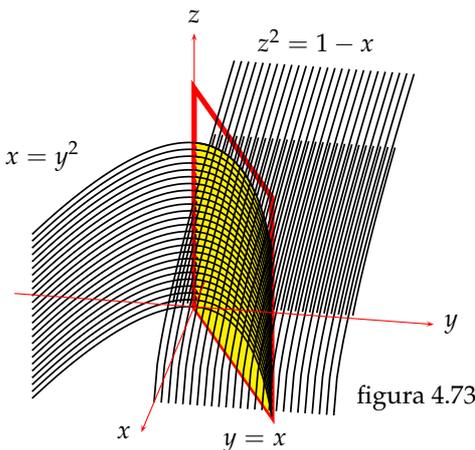


$$V = 2 \int_1^3 \int_0^x (x^2 - y^2) dy dx = 2 \int_1^3 (x^3 - \frac{x^3}{3}) dx = \frac{80}{3}$$

Ejemplo 4.20.25. Hallemos volumen, en el primer octante, acotado por $x + z^2 = 1$, $x = y$, $x = y^2$.

Mirando la figura 4.73, se observa que el cilindro $z^2 = 1 - x$ pone la tapa superior y que los límites de integración se obtiene en el plano xy del recinto que acotan $y = x$ y $x = y^2$. Se sigue que el volumen es

$$V = \int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} \sqrt{1-x} dy dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x) \sqrt{1-x} dx = \frac{\pi}{8} - \frac{4}{15}$$



Ejemplo 4.20.26. Hallemos centro de masa de la región que acota la curva $y = \sqrt{400 - 25x^2}$ y la recta $y = 0$.

Se observa de la figura 4.74 que el eje y es de simetría de la región, por tanto, $\bar{x} = 0$. Ahora calculamos el área de la región y el M_x para dar respuesta al problema.

$$A(R) = \int_{-4}^4 \int_0^{5\sqrt{16-x^2}} dy dx = 10 \int_0^4 \sqrt{16-x^2} dx$$

Esta integral se calcula con $x = 4\text{sen } \theta$, ya que entonces $dx = 4\text{cos } \theta d\theta$, con $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Luego

$$A(R) = 10 \int_0^{\pi/2} 16 \text{cos}^2 \theta d\theta = 40\pi$$

$$M_x = \int_{-4}^4 \int_0^{5\sqrt{16-x^2}} y dy dx = \frac{25}{2} \int_{-4}^4 (16-x^2) dx = \frac{256}{3}$$

En consecuencia, $(0, \frac{32}{15\pi})$ es el centro de masa.

Ejemplo 4.20.27. Hallemos centro de masa de la región que acota $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$ en el primer cuadrante.

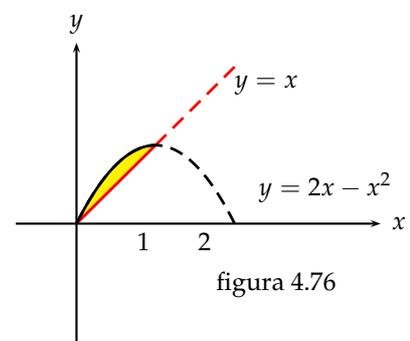
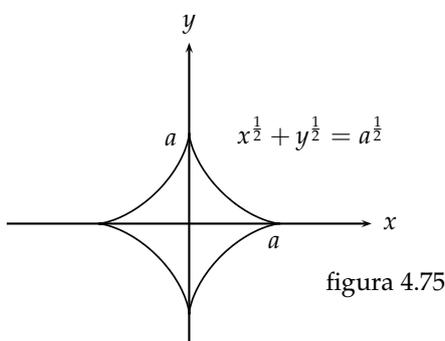
En la figura 4.75 se muestra la región. Para el centro de masa se necesitan los momentos respecto de los ejes coordenados y el área de la región.

$$A(R) = \int_0^a \int_0^{(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2} dy dx = \frac{a^2}{6}$$

$$M_y = \int_0^a \int_0^{(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2} x dy dx = \int_0^a x(a+x-2\sqrt{a}\sqrt{x}) dx = \frac{a^3}{30}$$

$$M_x = \int_0^a \int_0^{(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2} y dy dx = \frac{a^3}{30}$$

Luego; $\bar{x} = \frac{a}{5} = \bar{y}$



Ejemplo 4.20.28. Hallemos los momentos de inercia con respecto a cada uno de los ejes coordenados de la región $R = \{(x, y) / y = 2x - x^2, y = x\}$

La figura 4.76 permite observar que las integrales que definen los momentos de inercia son:

$$I_x = \int_0^1 \int_x^{2x-x^2} y^2 dy dx = \frac{1}{3} \int_0^1 (8x^3 - 12x^4 + 6x^5 - x^6 - x^3) dx = \frac{29}{420}$$

$$I_y = \int_0^1 \int_x^{2x-x^2} x^2 dy dx = \int_0^1 x^2(x - x^2) dx = \frac{1}{20}$$

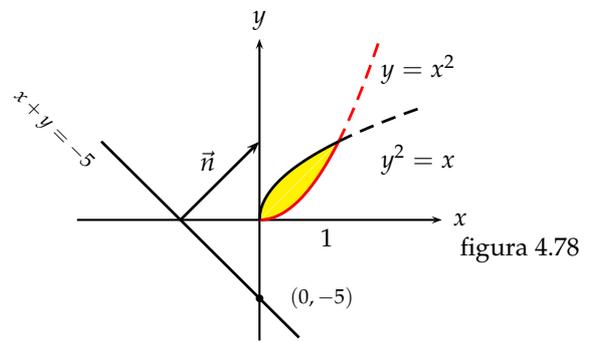
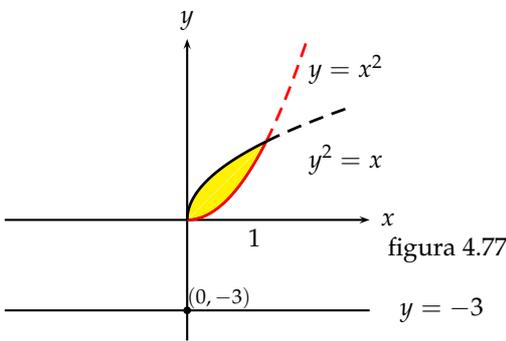
Ejemplo 4.20.29. Sea R la región acotada por las curvas $y = x^2, y^2 = x$. Calculemos I_L si L es la recta $y = -3$.

Sea $\vec{n} = (0, 1)$ vector normal a la recta. Elegimos un punto (x, y) cualquiera sobre la región y el punto $(0, -3)$ sobre la recta dada, entonces

$$\text{comp}_{\vec{n}}(x - x_0) = \frac{\vec{n} \circ (x - x_0)}{\|\vec{n}\|} = y + 3$$

De esta manera,

$$I_L = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (y + 3)^2 dy dx = \frac{233}{56}$$



Ejemplo 4.20.30. Si R es la región acotada por $y = x^2, y^2 = x$, hallemos I_L , con L la recta $x + y + 5 = 0$.

De la recta $x + y + 5 = 0$ se deduce que $\vec{n} = (1, 1)$ es un vector normal y apunta hacia la región. En la región, elegimos un punto de la forma (x, y) arbitrario. En la recta dada escogemos el punto $(0, -5)$. De esta forma, la componente es

$$\text{comp}_{\vec{n}}(x - x_0) = \frac{\vec{n} \circ (x - x_0)}{\|\vec{n}\|} = \frac{x + y + 5}{\sqrt{2}}$$

Luego,

$$I_L = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x + y + 5)^2 dy dx = \frac{2451}{420}$$

Ejemplo 4.20.31. Calculemos los momentos que se indican para la región R que acotan $y = x^2$ e $y^2 = x$.

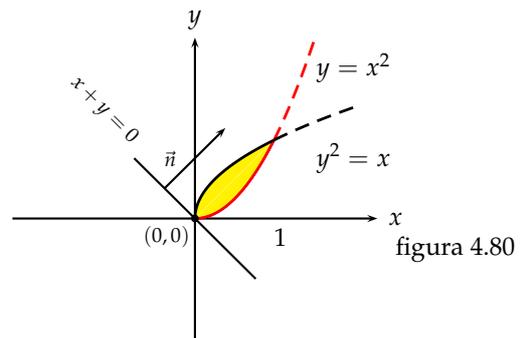
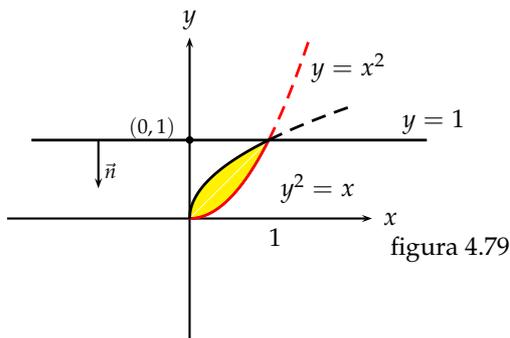
1. M_L si L es la recta $y = 1$.

La figura 4.79 sirve como modelo para establecer las hipótesis requeridas por cada problema. Un vector normal a la recta $y = 1$ es $\vec{n} = (0, -1)$. Como siempre, (x, y) representa un punto arbitrario en la región, y elegimos $(0, 1)$ como punto sobre la recta dada, entonces

$$\text{comp}_{\vec{n}}(x - x_0) = \frac{\vec{n} \circ (x - x_0)}{\|\vec{n}\|} = 1 - y$$

Luego

$$M_L = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (1 - y) dy dx = \frac{11}{60}$$



2. M_L si L es la recta $x + y = 0$.

La figura 4.80 ilustra este caso. Se considera $\vec{n} = (1, 1)$ como vector normal a la recta, (x, y) un punto arbitrario en la región, y $(0, 0)$ un punto sobre la recta dada, entonces

$$\text{comp}_{\vec{n}}(x - x_0) = \frac{\vec{n} \circ (x - x_0)}{\|\vec{n}\|} = \frac{x + y}{\sqrt{2}}$$

Luego

$$M_L = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x + y) dy dx = \frac{3\sqrt{2}}{20}$$

Ejemplo 4.20.32. Sea R la región limitada por las parábolas $y = x^2$, $x = y^2$ (Figura 4.80). La figura 4.81 muestra la región rotando sobre diversas rectas L . Verificar que el resultado en cada caso es el que se indica:

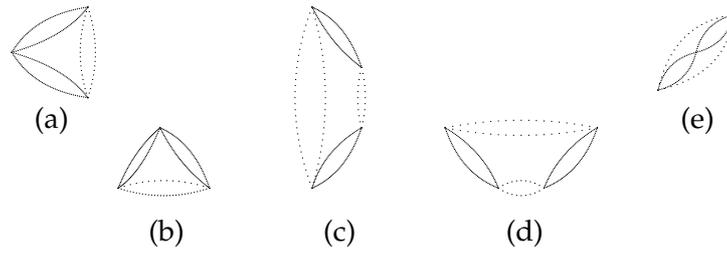


figura 4.81

1. L es el eje x . Figura 4.81(a)

$$V = 2\pi \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} y \, dy \, dx = \frac{3\pi}{10}$$

2. L es la recta $x = 1$. Figura 4.81(b)

$$V = 2\pi \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} |x - 1| \, dy \, dx = \frac{11\pi}{30}$$

3. L es la recta $y = 2$. Figura 4.81(c) Resp. $V = \frac{31\pi}{10}$

4. L es la recta $x = -3$. Figura 4.81(d) Resp. $V = \frac{23\pi}{10}$

5. L es la recta $x + y = 0$. Figura 4.81(e). Resp $V = \frac{3\pi\sqrt{2}}{10}$.

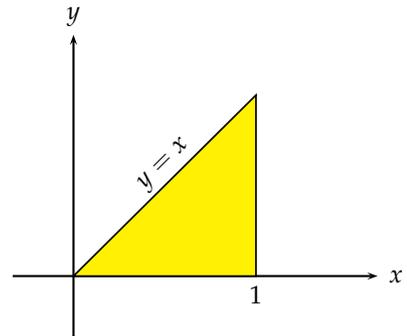
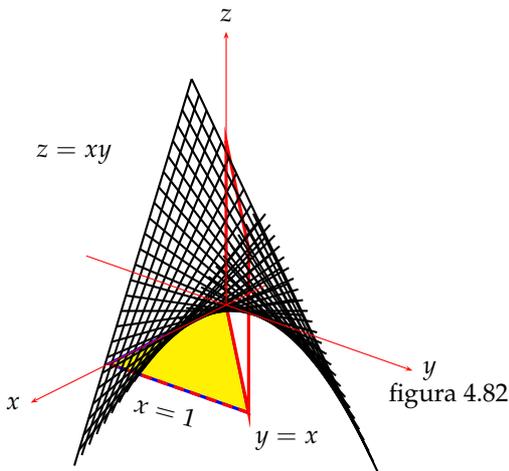
Ejemplo 4.20.33. Calculemos $\int_S x y^2 z^3 \, dV$, con S el sólido que acotan los planos $y = x$, $x = 1$, $z = 0$, $y = 0$ y la superficie $z = xy$.

La superficie $z = xy$ pasa sobre el recinto y sirve de tapa superior (figura 4.82), siendo la inferior $z = 0$. Los límites de integración los hallamos en el plano xy (figura 4.83). De esta forma tenemos el siguiente recinto

$$R = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x, 0 \leq z \leq xy\}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \int_S x y^2 z^3 \, dV &= \int_0^1 \int_0^x \int_0^{xy} x y^2 z^3 \, dz \, dy \, dx = \frac{1}{4} \int_0^1 \int_0^x x^2 y^6 \, dy \, dx \\ &= \frac{1}{28} \int_0^1 x^{\frac{1}{2}} \, dx = \frac{1}{364} \end{aligned}$$

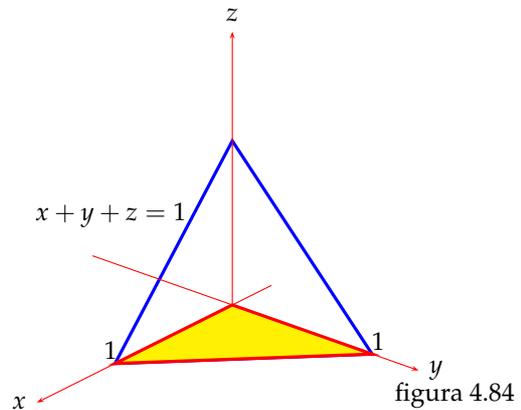


Ejemplo 4.20.34. Hallemos $\int_S (1 + x + y + z)^{-3} dV$, si S es el sólido que acotan, en el primer octante, los planos coordenados y el plano $x + y + z = 1$.

La figura 4.84 muestra el tetraedro que se forma en el primer octante. El acotamiento lateral lo vamos a encontrar en el plano xy . El acotamiento inferior y superior en dirección del eje z . Se tiene el recinto de integración

$$R = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x, 0 \leq z \leq 1 - x - y\}$$

Luego,



$$\begin{aligned} \int_S (1 + x + y + z)^{-3} dV &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} (1 + x + y + z)^{-3} dz dy dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{1-x} \left(\frac{1}{4} - (1 + x + y) \right) dy dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1-x}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{1+x} \right) dx = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{5}{16} \end{aligned}$$

Ejemplo 4.20.35. Hallemos $\int_S \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dV$, si S es el sólido $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

El recinto de integración es un elipsoide de semiejes a, b, c . El cálculo en coordenadas cartesianas es largo y complicado. Preferimos un cambio de variables de la forma:

$$x = a r \cos \theta \sin \phi, \quad y = b r \sin \theta \sin \phi, \quad z = c r \cos \phi$$

El Jacobiano es $J = abc r \operatorname{sen} \phi$. En consecuencia

$$\begin{aligned} \int_S \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dV &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi abc r^4 \operatorname{sen} \phi \, d\phi \, d\theta \, dr = 2abc \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^4 \, d\theta \, dr \\ &= 4\pi abc \int_0^1 r^4 \, dr = \frac{4}{5} \pi abc \end{aligned}$$

Ejemplo 4.20.36. Hallemos, por integral triple, el volumen del sólido acotado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Escribimos la integral en coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas.

■ **Coordenadas cilíndricas**

En este caso, con $z = 0$ obtenemos que el recinto plano de integración es la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$. Por tanto,

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \operatorname{sen} \theta, \quad z = z \implies J(r, \theta, z) = r$$

Es claro que el ángulo θ varía entre 0 y 2π , que el radio r barre desde 0 hasta a y que el acotamiento inferior y superior, que corresponde a la variable z , es desde 0 hasta $\sqrt{a^2 - r^2}$. Luego, considerando volúmenes equivalentes en los 8 octantes, tenemos:

$$\begin{aligned} \int_S dx \, dy \, dz &= 8 \int_0^{\pi/2} \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2 - r^2}} r \, dz \, dr \, d\theta \\ &= 8 \int_0^{\pi/2} \int_0^a r \sqrt{a^2 - r^2} \, dr \, d\theta \\ &= \frac{8}{3} \int_0^{\pi/2} a^3 \, d\theta = \frac{4\pi a^3}{3} \end{aligned}$$

■ **Coordenadas cartesianas**

Al considerar el primer octante, el recinto R de integración de las variables x e y es la cuarta parte de la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$. Esto es,

$$R = \{(x, y) / 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2}\}$$

Por lo tanto,

$$V = 8 \int_S dx \, dy \, dz = 8 \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dz \, dy \, dx = \frac{4\pi a^3}{3}$$

■ **Coordenadas esféricas**

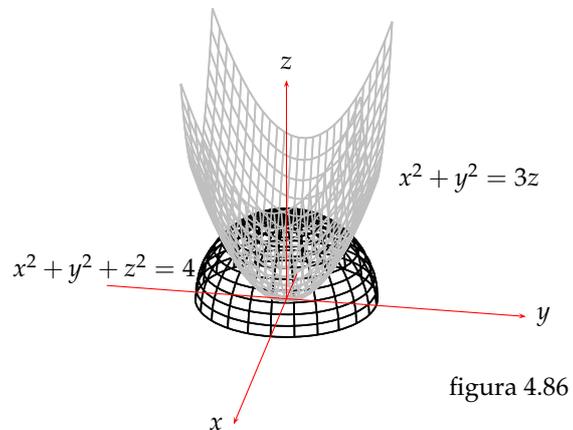
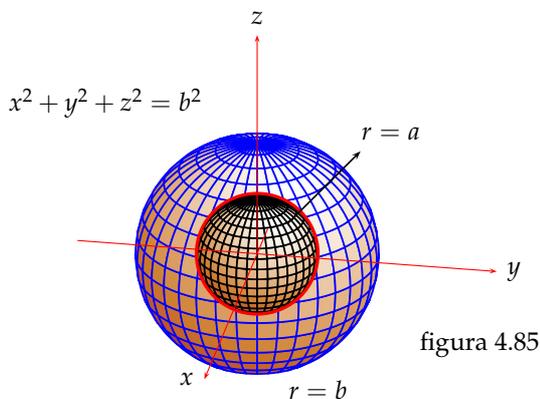
Lo más claro es que el radio r varía de 0 hasta a (se mide desde el origen hasta la cáscara de la esfera). Para determinar el ángulo θ (el mismo de las polares) se tiene en cuenta el Ecuador de la esfera, lo que significa que $0 \leq \theta \leq 2\pi$. finalmente, el ángulo ϕ considera la medida desde el polo norte al polo sur, esto es, $0 \leq \phi \leq \pi$. En consecuencia,

$$\int_S dx \, dy \, dz = \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^2 \operatorname{sen} \phi \, d\phi \, d\theta \, dr = \frac{4\pi a^3}{3}$$

Ejemplo 4.20.37. Halleemos el volumen que queda entre dos esferas concéntricas de radios a y b .

Suponemos $0 < a < b$, y usamos coordenadas esféricas para calcular el volumen (Figura 4.85).

$$\begin{aligned} \int_S dx dy dz &= 8 \int_a^b \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} r^2 \operatorname{sen} \psi d\theta dr d\psi \\ &= 8 \int_a^b \int_0^{\pi/2} r^2 d\theta dr \\ &= 4\pi \int_a^b r^2 dr = \frac{4\pi}{3} (b^3 - a^3) \end{aligned}$$



Ejemplo 4.20.38. Calculemos el volumen del cuerpo limitado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, y el paraboloide $x^2 + y^2 = 8z$

En la figura 4.86 se ve que la esfera es la tapa superior del recinto y que el paraboloide es la inferior. la intersección de ambas superficie nos proporcionará el recinto de integración para las variables x e y .

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ x^2 + y^2 = 8z \end{cases} \implies z^2 + 8z - 9 = 0$$

de lo cual, $(z - 1)(z + 9) = 0 \implies z = 1$ única solución. Por tanto, a esa altura ($z = 1$) se genera una circunferencia

$$x^2 + y^2 = 8$$

que es nuestro recinto de integración. En polares se tiene que

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \operatorname{sen} \theta \implies 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq 2\sqrt{2}$$

Ahora, establecemos la integral que entrega el volumen en cilíndricas.

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^{2\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \int_{r^2/8}^{\sqrt{9-r^2}} r \, dz \, d\theta \, dr = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\sqrt{2}} \left(\sqrt{9-r^2} - \frac{r^2}{8} \right) r \, dr \, d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{3}(9-r^2)^{3/2} - \frac{r^4}{32} \right) \Big|_0^{2\sqrt{2}} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{20}{3} d\theta \\
 &= \frac{40\pi}{3}
 \end{aligned}$$

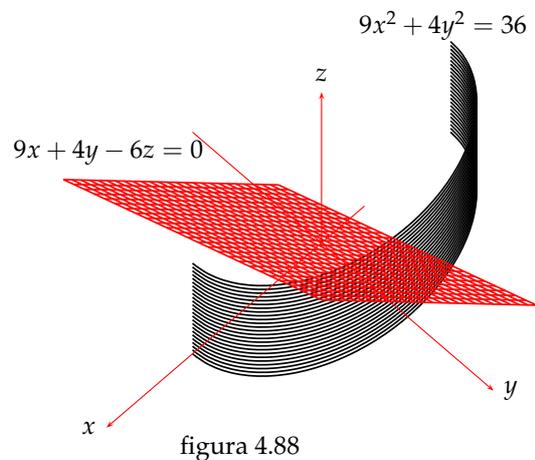
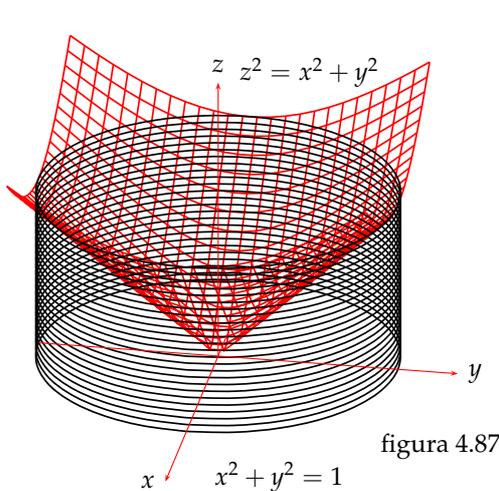
Ejemplo 4.20.39. Hallemos el volumen del recinto que es exterior a la hoja superior del cono $z^2 = x^2 + y^2$ e interior al cilindro $x^2 + y^2 = 1$, con $z \geq 0$.

Mirando la figura 4.87, se observa que el cono pone la tapa superior y que los límites de integración se obtiene en el plano xy del recinto que acota el cilindro. Las coordenadas cilíndricas facilitan los cálculos. El recinto del plano xy es

$$R = \{(r, \theta) / 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq 1\}$$

El volumen tiene su equivalente integral:

$$V = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^r r \, dz \, d\theta \, dr = 2\pi \int_0^1 r^2 \, dr = \frac{2\pi}{3}$$



Ejemplo 4.20.40. Hallemos volumen del sólido que se encuentra en el primer octante acotado por la superficie $9x^2 + 4y^2 = 36$ y el plano $9x + 4y - 6z = 0$.

En la figura 4.88 se ve que el plano acota superiormente y que el cilindro aporta los límites laterales. En cilíndricas se tiene el recinto

$$R = \{(r, \theta, z) / 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq z \leq \frac{1}{6}(18r \cos \theta + 12r \sin \theta) = A\}$$

Cabe indicar que hicimos

$$x = 2r \cos \theta, \quad y = 3r \sin \theta \implies J(r, \theta) = 6r$$

Tenemos:

$$V = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^A 6r \, dz \, d\theta \, dr = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \cdot (18r \cos \theta + 12r \sin \theta) \, d\theta \, dr$$

Al integrar respecto de θ

$$V = \int_0^1 \left(18r^2 \sin \theta - 12r^2 \cos \theta \right)_0^{\frac{\pi}{2}} dr = \int_0^1 30r^2 dr = 10$$

Ejemplo 4.20.41. Hallemos volumen del sólido interior a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y al cilindro $x^2 + y^2 = 2y$.

Para situarse en la hipótesis del problema, la figura 4.89 nos sirve de ayuda. La esfera pone la tapa superior al recinto y el cilindro entrega los límites de integración para las variables x y y . En coordenadas cartesianas el recinto es

$$\{(x, y, z) / -1 \leq x \leq 1, 1 - \sqrt{1 - x^2} \leq y \leq 1 + \sqrt{1 - x^2}, 0 \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}\}$$

Nos cambiamos a polares

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \implies J(r, \theta) = r$$

Esto es más sencillo que haber considerado polares modificadas, esto es

$$x = r \cos \theta, \quad y = \frac{1}{2} + r \sin \theta \implies J(r, \theta) = r$$

La ecuación de la esfera en coordenadas cilíndricas, con polares tradicionales, es $z^2 + r^2 = 4$. Por lo tanto, el recinto tiene la forma

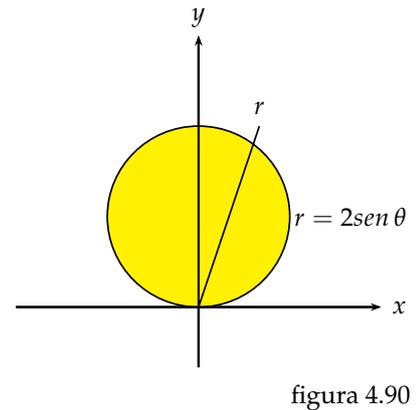
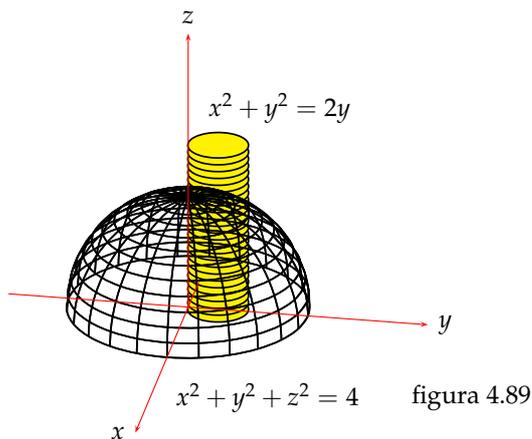
$$\{(r, \theta, z) / 0 \leq r \leq 2 \sin \theta, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq z \leq \sqrt{4 - r^2}\}$$

Por simetría del recinto consideramos 2 veces $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Luego,

$$V = 2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2 \sin \theta} \int_0^{\sqrt{4 - r^2}} r \, dz \, d\theta \, dr = 2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2 \sin \theta} r \sqrt{4 - r^2} \, d\theta \, dr$$

La última es directa, de modo que

$$V = \frac{16}{3} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^3 \theta) \, d\theta \, dr = \frac{16}{3} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right) = \frac{8\pi}{3} - \frac{32}{9}$$



Ejemplo 4.20.42. Hallemos el volumen dentro del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y bajo el plano $z = 4$

En la figura 4.91 se muestran el cono y el plano. Es claro que este plano es la tapa superior y el cono la inferior. Para saber los límites de integración debemos intersectar el plano y el cono para conocer el máximo conjunto en el cual se mueven las variables x e y . Al efectuar la intersección se halla

$$x^2 + y^2 \leq 16$$

Pasando a coordenadas polares, $x = r \cos \theta$, $y = r \text{sen } \theta$, se tiene el recinto

$$\{(r, \theta, z) / 0 \leq r \leq 4, 0 \leq \theta \leq 2\pi, r \leq z \leq 4\}$$

Por tanto,

$$V = 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^4 \int_r^4 r \, dz \, d\theta \, dr = \int_0^{\pi/2} \int_0^4 r(4-r) \, dr \, d\theta = 4 \int_0^{\pi/2} \left(2r^2 - \frac{r^3}{3}\right)_0^4 \, d\theta$$

Después de evaluar

$$V = 4 \cdot \frac{16\pi}{3} = \frac{64\pi}{3}$$

Para quienes son fanáticos de las coordenadas esféricas, el volumen es

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{4/\cos\phi} r^2 \text{sen } \phi \, dr \, d\phi \, d\theta = \frac{64\pi}{3}$$

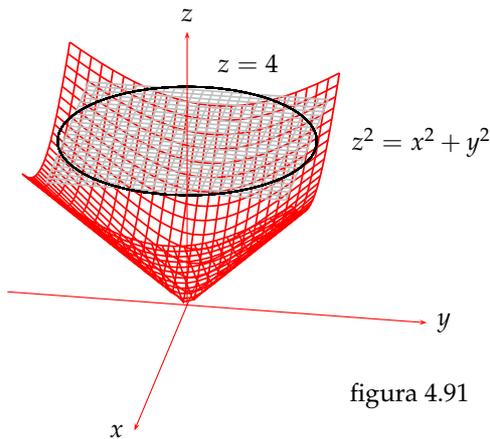


figura 4.91

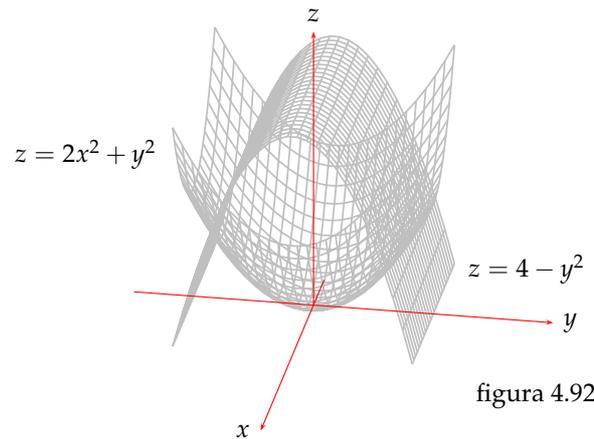


figura 4.92

Ejemplo 4.20.43. Hallemos el volumen limitado por $z = 2x^2 + y^2$, $z = 4 - y^2$.

El recinto que se obtiene al dibujar el paraboloides $z = 2x^2 + y^2$ y el cilindro $z = 4 - y^2$ es el que se muestra en la figura 4.92. Es claro que el cilindro pone la tapa superior y el paraboloides la inferior. Los límites de integración se encuentran después de intersectar ambas superficies.

$$\begin{cases} z = 2x^2 + y^2 \\ z = 4 - y^2 \end{cases} \implies x^2 + y^2 = 2$$

Luego, el recinto de integración es el disco de ecuación $x^2 + y^2 \leq 2$. Pasando a cilíndricas se tiene

$$V = \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \int_{r^2(1+\cos^2\theta)}^{4-r^2\sin^2\theta} r \, dz \, d\theta \, dr = \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} r(4 - 2r^2) \, d\theta \, dr = 4\pi$$

Ejemplo 4.20.44. Hallar el volumen de la región definida por las desigualdades $x^2 + y^2 - 2x \leq 0$, $0 \leq z \leq x^2$.

Estamos en presencia de dos cilindros; uno de ellos $x^2 + y^2 - 2x = 0$ rectilíneo y con centro en $(1, 0, 0)$ que pone los límites laterales, y el otro $z = x^2$ parabólico que sirve de tapa superior del recinto. El volumen que vamos a calcular se representa en la figura 4.93.

Tomamos coordenadas polares centradas en $(0, 0)$, el cambio es

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z \implies J(r, \theta, z) = r$$

La figura 4.94 muestra el recinto plano de integración. Se observa que tenemos dos recintos de volúmenes equivalentes, por ello, los límites de integración los consideramos como sigue:

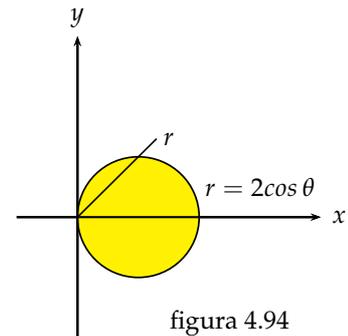
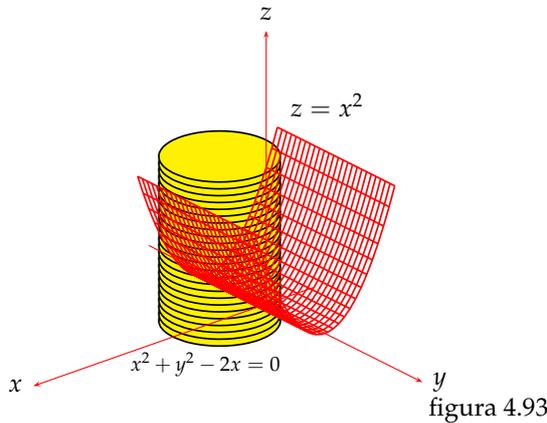
$$\{(r, \theta, z) / 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq r \cos \theta, 0 \leq z \leq r^2 \cos^2 \theta\}$$

con lo cual,

$$V = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} \int_0^{r^2\cos^2\theta} r \, dz \, dr \, d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} r^3 \cos^2\theta \, dr \, d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^4}{4} \Big|_0^{2\cos\theta} \cos^2\theta \, d\theta$$

Lo que equivale a tener

$$V = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 \theta d\theta = 8 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{5\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$



Ejemplo 4.20.45. Hallemos $\iiint_R z dV$ sobre el recinto R limitado por abajo por la hoja superior del cono $z^2 = x^2 + y^2$ y por arriba por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

El recinto R aparece dibujado en la figura 4.95. La intersección de ambas superficies da como resultado $z = \frac{3}{\sqrt{2}}$, de lo cual, la curva de intersección es $x^2 + y^2 = \frac{9}{2}$. Calcularemos todo en coordenadas esféricas

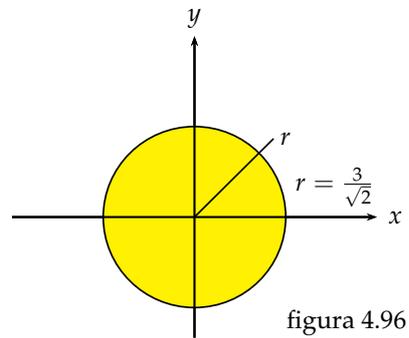
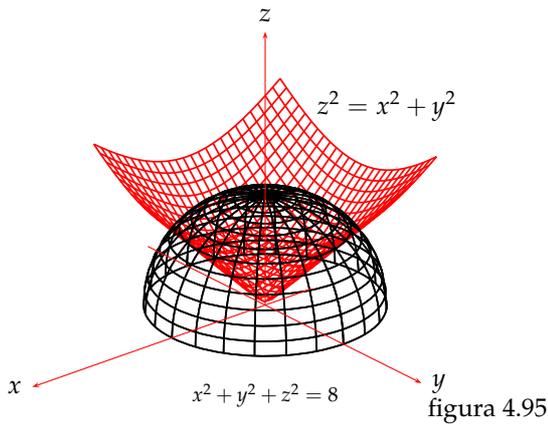
$$R = \{(r, \theta, \phi) / 0 \leq r \leq 3, 0 \leq \theta \leq 2\pi, \frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}\}$$

de lo cual

$$\iiint_R z dV = \int_0^3 \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} r \operatorname{sen} \phi r^2 \cos \phi d\phi d\theta dr = \frac{81\pi}{8}$$

Para los amantes de las cilíndricas, su expresión es

$$\iiint_R z dV = \int_0^{3/\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \int_r^{\sqrt{9-r^2}} z r dz d\theta dr = \frac{81\pi}{8}$$



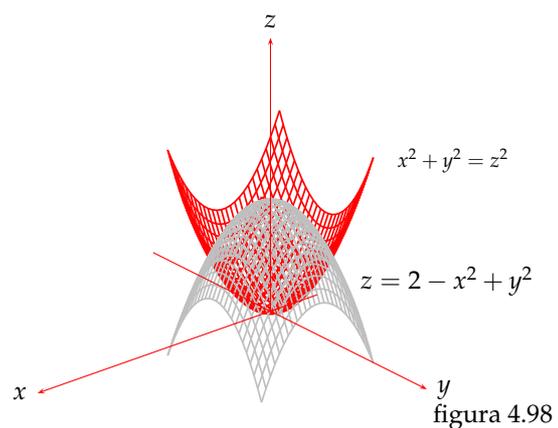
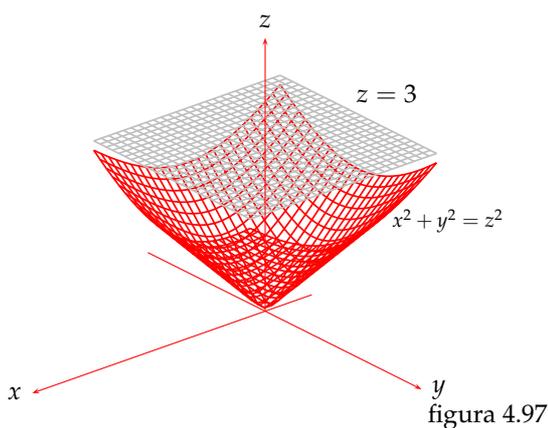
Ejemplo 4.20.46. Calculemos el volumen limitado por el cono de ecuación $x^2 + y^2 = z^2$, $z \geq 0$ y el plano $z = 3$.

Lo primero es graficar el cono y el plano (figura 4.97) para visualizar correctamente los límites de integración. Se observa que el plano $z = 5$ es la tapa superior y el cono la inferior. La intersección de estos proporciona el recinto en que se mueven las variables x e y . Se obtiene $x^2 + y^2 = 9$. En coordenadas cilíndricas

$$\{(r, \theta, z) / 0 \leq r \leq 3, 0 \leq \theta \leq 2\pi, r \leq z \leq 3\}$$

Con lo cual el volumen se representa como

$$V = \int_0^3 \int_0^{2\pi} \int_r^3 r dz d\theta dr = 9\pi$$



Ejemplo 4.20.47. Hallemos el volumen limitado por las superficies $z = x^2 + y^2$ y $z = 2 - x^2 - y^2$.

Aquí la figura 4.98 es nuestro bosquejo de la situación. El primer paraboloide pone la tapa inferior y el segundo la superior. La intersección de ambos entrega el recinto del plano en que se mueven las variables x e y . La curva de intersección es $x^2 + y^2 = 1$. Por tanto, el recinto es el interior a esta circunferencia. Las coordenadas cilíndricas permiten escribir el recinto como

$$\{(r, \theta, z) / 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, r^2 \leq z \leq 2 - r^2\}$$

Con lo cual el volumen es

$$V = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{r^2}^{2-r^2} r \, dz \, d\theta \, dr = \pi$$

Ejemplo 4.20.48. Hallemos el volumen del cuerpo definido por $\{(x, y, z) / 0 \leq z \leq \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1\}$.

Aquí la figura 4.99 ilustra la situación. La superficie $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$ es un paraboloide elíptico y $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ un cilindro recto. El paraboloide pone la tapa inferior y el cilindro los laterales. La intersección de ambos entrega el recinto del plano en que se mueven las variables x e y . Al intersectarlas se halla $z = 1$, con lo cual, la curva de intersección es $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$. Por tanto, el recinto es el interior a esta elipse. Usemos coordenadas cilíndricas modificadas

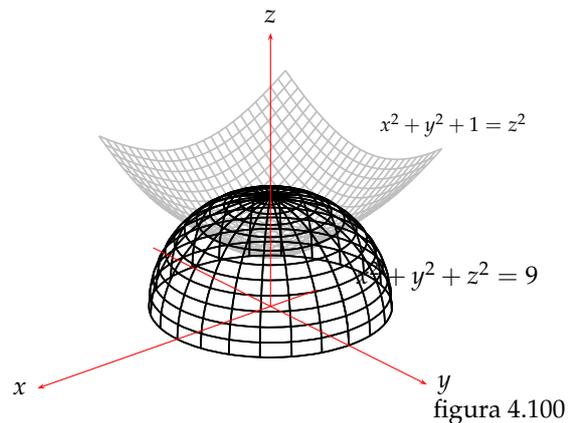
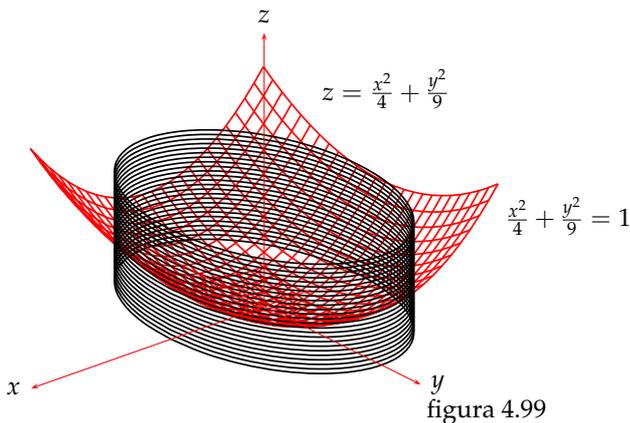
$$x = 2r \cos \theta, \quad y = 3r \sin \theta, \quad z = z \implies J(r, \theta, z) = 6r$$

Por lo tanto,

$$\{(r, \theta, z) / 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq r^2\}$$

Con lo cual el volumen es

$$V = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{r^2} 6r \, dz \, d\theta \, dr = 3\pi$$



Ejemplo 4.20.49. Calculemos la masa del sólido limitado por la hoja superior del hiperboloide de dos hojas $x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, y cuya densidad en cada punto es $\rho(x, y, z) = z^2$.

Al mirar la figura 4.100 se observa que la esfera pone la tapa superior al recinto y que la hoja superior del hiperboloide la inferior. La intersección de ambas superficies es la curva $x^2 + y^2 = 4$. Por tanto, el recinto de integración del plano xy es el disco $x^2 + y^2 \leq 4$. En coordenadas cilíndricas la integral que proporciona la masa es

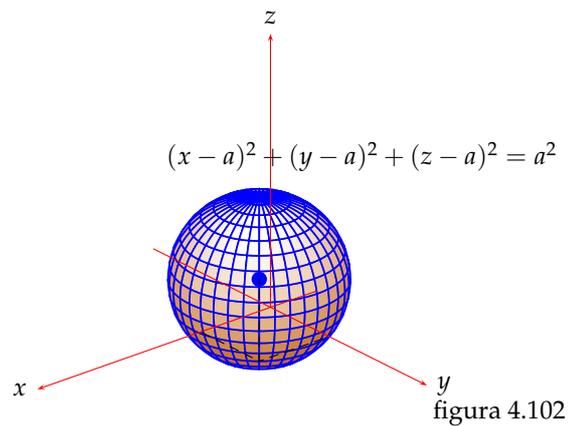
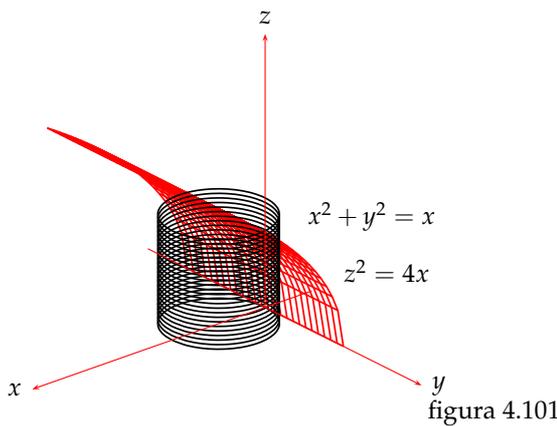
$$M = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \int_{\sqrt{1+r^2}}^{\sqrt{9-r^2}} r \cdot z^2 dz dr d\theta = \frac{4\pi}{15} (122 - 25\sqrt{5})$$

Ejemplo 4.20.50. Hallemos el volumen del sólido acotado por los planos $y = 0$, $z = 0$, y las superficies $y^2 = x - x^2$ y $z^2 = 4x$.

El cilindro $z^2 = 4x$ es la tapa superior del recinto y el cilindro pone los límites laterales. La figura 4.101 muestra esto. En coordenadas cilíndricas la integral de volumen es

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos \theta} \int_0^{2\sqrt{r \cos \theta}} r dz dr d\theta = \frac{8}{15}$$

Hay que tener presente que es sólo la parte del primer octante.



Ejemplo 4.20.51. Hallar la masa de la esfera $(x - a)^2 + (y - a)^2 + (z - a)^2 = a^2$, si la densidad en cada punto de la esfera es igual a la suma de los cubos de sus coordenadas.

Con sólo mirar la ecuación de la esfera dan ganas de hacer una traslación

$$x - a = u, \quad y - a = v, \quad z - a = w$$

Ahora tenemos la esfera centrada en el sistema u, v, w .

$$M = \iiint_R (x^3 + y^3 + z^3) dV = \iiint_{R^*} [(a + u)^3 + (v + a)^3 + (a + w)^3] dV$$

Nos vamos a esféricas

$$u = r \cos \theta \sin \phi, \quad v = r \sin \theta \sin \phi, \quad w = r \cos \phi$$

Como $J(r, \theta, \phi) = r^2 \text{sen } \phi$, entonces

$$M = \int_0^\pi \int_0^a \int_0^{2\pi} [3a^3 + 3a^2(u + v + w) + 3a(u^2 + v^2 + w^2) + u^3 + v^3 + w^3] r^2 \text{sen } \phi \, d\theta \, dr \, d\phi$$

Algunas integrales de seno y coseno se anulan después de integrar respecto de θ , de modo que

$$M = \int_0^a (12a^3 \pi r^2 + 12a \pi r^4) \, dr = \frac{32\pi}{5} a^6$$

Ejemplo 4.20.52. Hallemos el volumen que encierran los cilindros $z^2 = y$, $y^2 = x$, $z^2 = 2y$, $y^2 = 2x$, $x^2 = z$, $x^2 = 2z$

Los seis cilindros, al mismo tiempo, dan un susto terrible. Pero aquí es donde entra todo el cuento de saber si tenemos la película clara. Por supuesto que se puede hacer así como está dado el problema, pero un **cambio de variables** es mejor. Mirando los cilindros se ve que la transformación adecuada es

$$T(x, y, z) = \left(\frac{z^2}{y}, \frac{y^2}{x}, \frac{x^2}{z} \right) = (u, v, w)$$

su Jacobiano es

$$J = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{z^2}{y^2} & \frac{2z}{y} \\ -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} & 0 \\ \frac{2x}{z} & 0 & -\frac{x^2}{z^2} \end{vmatrix} = -7$$

Como este Jacobiano deber estar en valor absoluto, entonces $|J| = 7$. Pero, la transformación que hicimos “nace” del plano xyz , que es el plano donde la cosa estaba difícil, luego, el Jacobiano que se necesita es $|J^{-1}| = \frac{1}{7}$. En consecuencia,

$$V = \frac{1}{7} \int_1^2 \int_1^2 \int_1^2 dw \, dv \, du = \frac{1}{7}$$

Dibujar el recinto que encierran los seis cilindros es tarea titánica. Pero la transformación hace que el recinto que ellos acotan se transforme en un cubo (figura 4.104) es

$$\frac{z^2}{y} = 1, \frac{z^2}{y} = 2, \frac{y^2}{x} = 1, \frac{y^2}{x} = 2, \frac{x^2}{z} = 1, \frac{x^2}{z} = 2$$

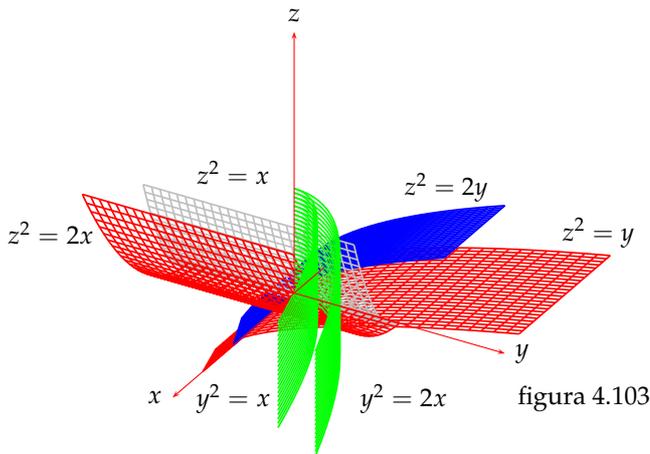


figura 4.103

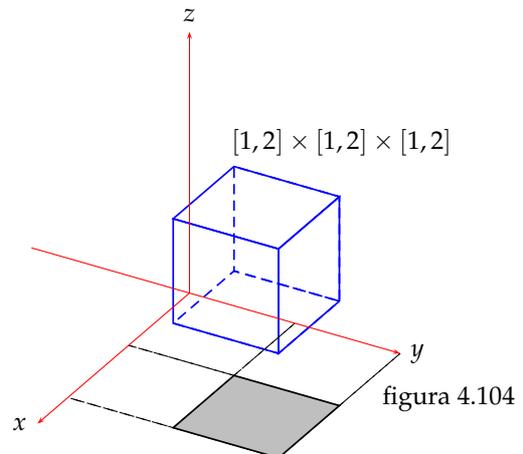


figura 4.104

Ejemplo 4.20.53. Escribimos en cilíndricas $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{1+x+y} (x^2 + y^2) dz dy dx$

En esta clase de problemas debemos fijar nuestra atención en los límites de integración de cada variable y hacer un bosquejo del recinto. Podemos particionar el problema mirando primero los límites del recinto plano xy , que son las variables finales de integración (z va primero de acuerdo al orden entregado). Tenemos:

$$\{(x, y) / 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$$

Su gráfica se ve en la figura 4.105. Además, la variable z tiene al plano xy como tapa inferior del recinto y al plano $z = 1 + x + y$ como tapa superior. En cilíndricas se tiene:

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{1+x+y} (x^2 + y^2) dz dy dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \int_0^{1+r\cos\theta+r\sin\theta} r^3 dz dr d\theta$$

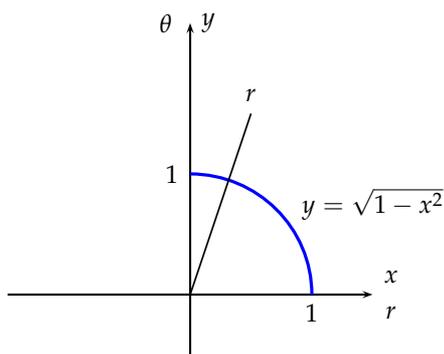


figura 4.105

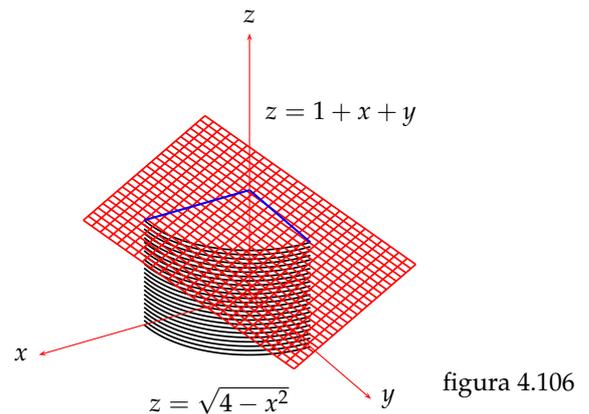


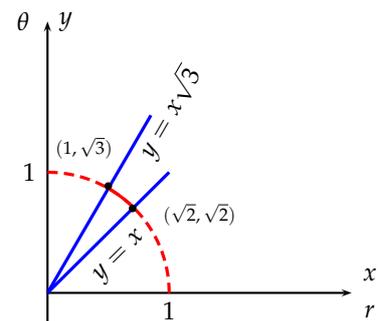
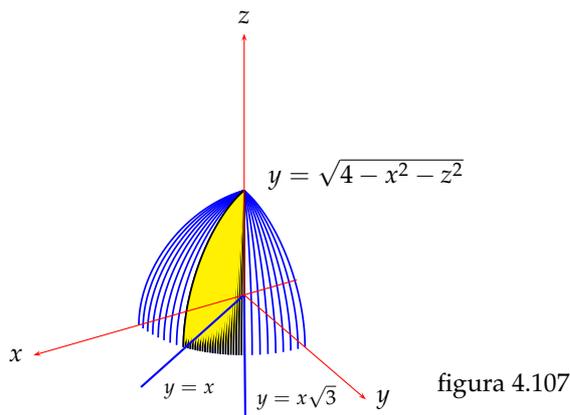
figura 4.106

Ejemplo 4.20.54. Escribir en coordenadas esféricas la región que, en el primer octante, acota la superficie $y = \sqrt{4-x^2-z^2}$ entre los planos $y = x$ e $y = x\sqrt{3}$.

Lo primero es hacer un buen bosquejo del recinto (figura 4.107). Se trata de una esfera cortada por dos planos. La esfera pone la tapa superior y el plano $z = 0$ la inferior. la figura 4.108 muestra el plano xy donde está el movimiento de las variables x e y . El recinto en esféricas es

$$\{(r, \theta, \phi) / 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}\}$$

La figura 4.108 muestra el movimiento del ángulo θ . El movimiento del radio en las esféricas se inicia en el origen y llega a la superficie que acota superiormente, en este caso, desde 0 hasta el radio de la esfera $r = 2$. El movimiento del ángulo ϕ se mide desde el polo norte a la base $z = 0$, es decir, desde 0 hasta $\frac{\pi}{2}$.



Ejemplo 4.20.55. Calculemos $\int_R \frac{\text{sen}(x + y - z)}{x + 2y + z} dV$, si el recinto R es el siguiente

$$R = \{(x, y, z) / 1 \leq x + 2y + z \leq 2, 0 \leq x + y - z \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq z \leq 1\}$$

Es suficiente con mirar el integrando o bien el recinto de integración para darse cuenta que tenemos que hacer un cambio de variables, lo que equivale a definir una transformación adecuada. Se tiene

$$u = x + 2y + z, \quad v = x + y - z, \quad z = z$$

Su Jacobiano es

$$J(u, v, z) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

Como en la integral el Jacobiano va en valor absoluto, entonces

$$\int_R \frac{\text{sen}(x + y - z)}{x + 2y + z} dV = \int_1^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^1 \frac{\text{sen } v}{u} dz dv du$$

Al integrar se llega a

$$\int_1^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^1 \frac{\text{sen } v}{u} dz dv du = (1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}) \ln 2$$

4.21. Problemas propuestos

1. Encontrar las funciones que verifican las condiciones indicadas:

$$a) \frac{\partial f}{\partial x} = 3x + y, \frac{\partial f}{\partial y} = x + 4y^3 + 7, f(0,0) = 5$$

$$b) \frac{\partial f}{\partial x} = xy e^x, \frac{\partial f}{\partial y} = x e^x - e^x + y^{-1/2}, f(0,4) = 3$$

$$\text{Resp } \frac{3}{2}x^2 + xy + y^4 + 7y + 5, \quad ye^x(x-1) + 2\sqrt{y} + 3$$

2. Encontrar la función $f(x, y)$ que verifica las siguientes tres propiedades:

$$a) \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y + y^2.$$

$$b) \frac{\partial f}{\partial y} = x^3 + 2xy.$$

$$c) \iint_D f(x, y) dx dy = 1, D \text{ es el interior del triángulo de vértices } (0,0), (1,1) \text{ y } (2,0).$$

$$\text{Resp } f(x, y) = x^3y + xy^2 + \frac{2}{5}$$

3. Calcular las siguientes integrales:

$$a) \int_0^3 \int_2^4 x^2y dx dy$$

$$b) \int_2^4 \int_0^3 x^2y dx dy$$

$$c) \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} xy^3 dy dx$$

$$\text{Resp } 84, 54, \frac{1}{24}$$

4. Calcular las integrales dobles por integración sucesiva:

$$a) \iint_I xy(x+y) dx dy \text{ donde } I = [0,1] \times [0,1].$$

$$\text{Resp } \frac{1}{3}$$

$$b) \iint_I \text{sen}^2x \text{sen}^2y dx dy \text{ donde } I = [0, \pi] \times [0, \pi].$$

$$\text{Resp } \frac{\pi^2}{4}$$

$$c) \iint_I \text{sen}(x+y) dx dy \text{ donde } I = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}].$$

$$\text{Resp } 2$$

5. Escribir una suma de Riemann cuyo límite cuando $n \rightarrow \infty$ sea igual a

$$\int_5^{10} \int_{-2}^2 (x^2 + 3xy) dy dx$$

$$\text{Resp. } \sum_{i=1}^{5n} \sum_{j=1}^{4n} (x_i^2 + 3x_i y_j) \cdot \frac{1}{n^2}$$

$$6. \text{ Sea } R = \{y = \sqrt{x}, y = x\}. \text{ Si } f(x, y) = \begin{cases} \frac{\text{sen } y}{y}, & y \neq 0 \\ 1, & y = 0 \end{cases}, \text{ hallar } \int_R f(x, y) dA.$$

$$\text{Resp. } 1 - \text{sen } 1$$

7. Hallar el volumen de los sólidos descritos a continuación:

- a) La región bajo la superficie $z = 4 - 2x + y$ y sobre el dominio $D = \{(x, y) / 0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 3\}$.
- b) La región bajo la superficie $z = x^2 + y^2$ y sobre el dominio acotado por $x = 0, x = 2, y = 0$ e $y = x^2$.
- c) La región bajo la superficie $z = xy^2$ y sobre el dominio acotado por $y = x$ e $y = x^2$.
- d) La región bajo la superficie $z = 4 - x$ y sobre el dominio acotado por la parábola $(y - 2)^2 = 4x$ y la recta $y + 2 = 2x$.

Resp 10, $\frac{1312}{105}, \frac{1}{40}, 21, 6$

8. Calcular la integral $\int_0^1 \int_0^x e^{x+y} dy dx$.

Resp $\frac{1}{2}(e^2 - 2e + 1)$

9. Calcular la integral $\int_0^1 \int_0^1 \ln(x+1)(y+1) dx dy$.

Resp $4 \ln 2 - 2$

10. Calcular la integral $\int_0^2 \int_{-1}^0 |y| \cos \frac{\pi x}{4} dy dx$.

Resp $\frac{2}{\pi}$

11. Calcular la integral $\int_{-1}^1 \int_{-2|x|}^{|x|} e^{x+y} dy dx$.

Resp $\frac{e^2}{2} + \frac{1}{e} + \frac{1}{3e^3} - \frac{5}{6}$

12. Sea D la región comprendida entre las gráficas de las curvas $y = x^2, y = -x^2$, y las rectas $x = -1, x = 1$. Dibujar el recinto de integración y calcular $\iint_D (x^2 - 1) dx dy$.

Resp $-\frac{4}{15}$

13. Hallar el volumen bajo el plano $z = x + y$ y sobre el recinto limitado por $x = 0, x = 2, x^2 + y^2 = 16$.

Resp $\frac{128}{3} - 16\sqrt{16}$

14. Calcular $\int_1^3 \int_0^{\ln y} y e^x dx dy$.

Resp $\frac{14}{3}$

15. Sea R el recinto acotado por $y = 1 - x, x = e, y = \ln x$. Hallar:

a) el área de R .

b) el volumen del sólido que se encuentra sobre el recinto R y bajo la superficie $z = 3 - x$.

16. Hallar $\iint_D (xy - y^3) dx dy$, siendo D el recinto plano limitado por las rectas $y = 0, y = 1, x = -1, x = y$.

Resp. $-\frac{23}{40}$

17. Calcular $\iint_D (x^2 - y) dx dy$, siendo D la región comprendida entre las gráficas de las curvas $y = x^2, y = -x^2$, y las rectas $x = 1, x = -1$.

Resp $\frac{4}{5}$

18. Hallar $\iint_D xy dx dy$, siendo D la región del primer cuadrante encerrada por las parábolas $y^2 = x, y = x^2$.

Resp $\frac{1}{12}$

19. Sea $D = \{(x, y) / x^2 + y^2 \leq 2, y \geq 0\}$. Hallar $\iint_D (1 + xy) dA$. Resp $\frac{\pi}{2}$

20. Cambiar el orden de integración en cada una de las integrales siguientes:

$$a) \int_0^1 \int_{x^4}^{x^2} f(x, y) dy dx \quad b) \int_0^1 \int_{-y}^y f(x, y) dx dy \quad c) \int_1^4 \int_x^{2x} f(x, y) dy dx$$

$$\text{Resp. } \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[4]{y}} f(x, y) dx dy$$

$$\int_{-1}^0 \int_{-x}^1 f(x, y) dy dx + \int_0^1 \int_x^1 f(x, y) dy dx$$

$$\int_1^2 \int_1^y f(x, y) dx dy + \int_2^4 \int_{y/2}^y f(x, y) dx dy + \int_4^8 \int_{y/2}^4 f(x, y) dx dy$$

21. Considerar la aplicación $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por:

$$T(u, v) = (u + v, v - u^2)$$

Sea D^* el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 2)$ en el plano uv . Hallar $T(D^*) = D$ y calcular el área de D , mediante una integral doble en las variables x e y , y también una integral doble en las variables u y v . Resp = $\frac{14}{3}$.

22. Calcular la integral $\iint_D e^{(x+y)^2} \left(1 + \frac{y}{x}\right) dx dy$, donde D es la región limitada por las rectas $y = x$, $y = 2x$, $x + y = 1$, $x + y = 2$. Sugerencia: usar $x + y = u$, $\frac{y}{x} = v$. Resp $\frac{1}{2}(e^4 - e)$.

23. Sean f una función real continua, $S = \{(x, y) / |x| + |y| \leq 1\}$

a) Usar el cambio de variables $u = x + y$, $v = x - y$ para demostrar que

$$\iint_S f(x + y) dx dy = \iint_{-1}^1 f(u) du$$

b) Calcular $\iint_S (x^2 + y^2 + 2xy) dx dy$. Resp $\frac{2}{3}$.

24. Mediante el cambio de variable, $x = u + v$, $y = v$, calcular

$$\iint_D (x + y) dx dy$$

D es el paralelogramo de vértices $(1, 1)$, $(3, 1)$, $(0, 0)$ y $(2, 0)$. Resp 4

25. Usar el cambio de variables $u = y - x$, $v = y + x$ para hallar

$$\iint_D \operatorname{sen} \left(\frac{y - x}{y + x} \right) dx dy$$

donde D es el trapecio con vértices $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(4, 0)$, $(2, 0)$. Resp $3(\cos 1 - 1)$.

26. Calcular

$$\iint_D (2x + y)^{-3} e^{\frac{x-2y}{2x+y}} dx dy$$

donde D es la región acotada por $2x + y = 1$, $2x + y = 4$, $x - 2y = -1$, $x - 2y = 1$.

$$\text{Resp } -\frac{1}{5}(e^{1/4} + e^{-1/4} - e^{-1})$$

27. Hallar las siguientes integrales dobles utilizando un cambio de variable adecuado:

a) $\iint_R e^{\frac{x-y}{x+y}} dA$, donde R es el triángulo limitado por las rectas $x = 0$, $y = 0$ y $x + y = 1$.

$$\text{Resp } \frac{1}{4}(e - e^{-1})$$

b) $\iint_D \frac{x^2 e^{x^2/y}}{y(x^2 + y^2)} dA$, donde D es el recinto limitado por las curvas $x = y$, $x = 2y$, $x^2 = y$ y $x^2 = 2y$.

$$\text{Resp } (e^2 - e)(\arctg 2 - \frac{\pi}{4})$$

c) $\iint_D \sqrt{y^2 - 4x^2} dx dy$, donde D es el recinto acotado por las curvas $y - 2x = -1$, $y + 2x = -1$ e $y^2 - 4x^2 = \frac{1}{4}$.

$$\text{Resp } \frac{1}{\sqrt{2}}(7 - 3 \ln 2)$$

28. Calcular $\iint_D (x + y)^2 dx dy$, si D el paralelogramo limitado por $y = -x$, $y = -x + 1$, $y = 2x$, $y = 2x - 3$.

$$\text{Resp } \frac{1}{3}$$

29. Hallar $\iint_D xy dx dy$, si D la región del primer cuadrante acotada por las curvas $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 9$, $x^2 - y^2 = 4$, $x^2 - y^2 = 1$.

$$\text{Resp } \frac{15}{8}$$

30. Sea D la región $\{0 \leq y \leq x, 0 \leq x \leq 1\}$. Evaluar $\iint_D (x + y) dx dy$ haciendo el cambio $x = u + v$, $y = u - v$.

$$\text{Resp } \frac{1}{2}$$

31. Sea $T(u, v) = (4u, 2u + 3v)$. Sea $D^* = [0, 1] \times [1, 2]$. Hallar $T(D^*) = D$ y calcular:

a) $\iint_D xy dx dy$. Resp 140 b) $\iint_D (x - y) dx dy$. Resp -42

32. Sea R la región en el plano limitada por las curvas $x^2 - y^2 = 1$, $x^2 - y^2 = 9$, $x + y = 4$, $x + y = 6$. Mediante el cambio de variables $u = x + y$, $v = x - y$, se transforma la región dada en otra región T . Se pide:

a) Representar gráficamente las regiones R y T .

b) Calcular el área de la región R utilizando T . Resp $A = 4 \ln \frac{3}{2}$

33. Se llama valor medio de una función $f(x, y)$ sobre una región, de área A , al valor

$$\text{valor medio} = \frac{1}{A} \iint_R f(x, y) dA$$

Calcular el valor medio de las siguientes funciones en la región indicada:

- a) $f(x, y) = x$, con R el rectángulo de vértices $(0, 0), (4, 0), (4, 2), (0, 2)$
 b) $f(x, y) = x^2 + y^2$, con R el cuadrado de vértices $(0, 0), (2, 0), (2, 2), (0, 2)$
 c) $f(x, y) = xy$ en el dominio acotado por $x = 0, x = 2, y = 0$ e $y = 3$.
 d) $f(x, y) = 4 - 2x + y$ en el dominio acotado por $x = 0, x = 2, y = 0$ e $y = 4$.

Resp. $2, \frac{8}{3}, \frac{3}{2}, 0$

34. Usar coordenadas polares para evaluar:

- a) $\iint_R (1 + x^2 + y^2)^{-3/2} dx dy$, R es el triángulo de vértices $(0, 0), (1, 0), (1, 1)$. Resp $\frac{\pi}{12}$
 b) $\iint_R (x^3 + y^3) dx dy$, siendo $R = \{(x, y) / x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1, x^2 + y^2 - 2x \geq 0\}$.
 Resp $\frac{1}{960}(203 + 453\sqrt{3} - 280\pi)$
 c) $\iint_R (x^2 + y^2)^{3/2} dx dy$, R es disco $x^2 + y^2 \leq 4$. Resp $\frac{64}{5}\pi$
 d) $\iint_R \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) dx dy$, R es el recinto que acota la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a, b > 0$. Resp $\frac{\pi ab}{2}$
 e) $\iint_D (x^2 + y^2) dA$, siendo $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x - 1)^2 + y^2 \leq 1\}$.

35. Calcular el área de la región del plano $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \leq 4x - x^2, y \geq 6 - 3x, y \geq 0\}$.Resp $\frac{151}{6}$ 36. Hallar el área del recinto encerrado por una elipse de semiejes a y b .Resp πab 37. Hallar el área comprendida entre las circunferencias $x^2 + y^2 = 2x, x^2 + y^2 = 4x$ y las rectas $y = x, y = 0$.Resp $\frac{3}{2} \left(\frac{\pi}{2} + 1\right)$ 38. Una pirámide está limitada por los tres planos coordenados y el plano $x + 2y + 3z = 6$. Representar el sólido y calcular su volumen por integración doble.

6

Resp

39. Calcular el volumen del sólido acotado, en el primer octante, por los planos $x = 1, y = 1$ y la superficie $z = x^2 + y^2$.Resp $\frac{2}{3}$ 40. Calcular el volumen del sólido acotado por la superficie $z = x^2 + y$, el rectángulo $R = [0, 1] \times [1, 2]$ y los lados verticales de R .Resp $\frac{11}{6}$

41. Hallar el volumen limitado por:

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 = 3z$.

b) $z = x^2 + 6y^2, x^2 + 4y^2 = 4, z = 0$.

Resp $\frac{19}{6}\pi$ y $\frac{20}{3}\pi$ 42. Calcular el volumen del sólido bajo el plano $z = 4x$ y que está sobre de la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$. Resp $\frac{512}{3}$

4.21 Problemas propuestos

43. Encontrar el volumen del sólido en el primer octante, limitado por las superficies $x + z^2 = 1$, $x = y$, $x = y^2$. Resp $\frac{1}{120}(15\pi - 32)$
44. Hallar el área de la región limitada por las curvas $y = x^2 - 9$ e $y = 9 - x^2$. Resp 72
45. Calcular el volumen del sólido bajo el plano $3x + 8y + 6z = 24$ y sobre la región del plano xy limitada por la parábola $y^2 = 2x$, la recta $2x + 3y = 10$ y el eje x . Resp. $\frac{337}{30}$
46. Calcular $\iiint_R (xz + 3z) dV$ si R es el paralelepípedo en el primer octante limitado por los planos coordenados y los planos $x = 2, y = 3, z = 4$. Resp. 192
47. Calcular $\iiint_R z dV$ si R es la región limitada por las superficies $z = x^2 + y^2$ y $z = 27 - 2x^2 - 2y^2$. Resp. $\frac{243}{2}\pi$
48. Calcular $\iiint_R (xz + 3z) dV$ si R es la región, sobre el plano xy , limitada por el cilindro $x^2 + z^2 = 9$ y los planos $x + y = 3, z = 0, y = 0$. Resp. $\frac{648}{5}$
49. Utilizar coordenadas cilíndricas para calcular el volumen del sólido en el primer octante limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y el plano $z = x$. Resp. $\frac{1}{3}$
50. Sea f una función definida en $I = [1, 2] \times [1, 4]$ como sigue:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{(x+y)^2}, & x \leq y \leq 2x \\ 0, & \text{en otra parte} \end{cases}$$

Indicar, mediante un dibujo, la porción del rectángulo I en la que f no es nula y calcule el valor de la integral allí. Resp $\frac{1}{6} \ln 2$

51. Un sólido está limitado por la superficie $z = x^2 - y^2$, el plano xy , y los planos $x = 1$ y $x = 3$. Calcular su volumen por doble integración. Resp $\frac{80}{3}$
52. Calcular $\iint_D x^2 y^2 dx dy$ siendo D la porción acotada del primer cuadrante situada entre las hipérbolas $xy = 1$ y $xy = 2$ y las rectas $y = x$ e $y = 4x$. Resp $\frac{7}{3} \ln 2$
53. Calcular $\iiint_V (2x^2 z + 2zy^2) dx dy dz$, siendo V el volumen exterior a la hoja superior del cono $z^2 = x^2 + y^2$ e interior al cilindro $x^2 + y^2 = 1$, con $z \geq 0$. Resp $\frac{\pi}{3}$
54. Calcular la integral $\iiint_R xyz dx dy dz$, siendo R el conjunto

$$R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$$

Resp. $\frac{1}{48}$

55. Calcular la integral $\iint_D (x^2 + 5y^2) dx dy$, extendida a la región del plano

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq 0, 4 \leq x^2 + y^2 \leq 16\}$$

Resp 180π

56. Calcular, mediante integración, el volumen del sólido limitado por el cono $x^2 + y^2 = 4z^2$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 5$, siendo $z \geq 0$.

Resp $\frac{10}{3}\pi(\sqrt{5} - 1)$

57. Calcular $\iint_I f(x, y) dx dy$ siendo $I = [0, 1] \times [0, 1]$, con

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y, & x^2 \leq y \leq 2x^2 \\ 0, & \text{en otra parte} \end{cases}$$

Resp $\frac{21}{40} - \frac{\sqrt{2}}{5}$

58. Calcular $\iint_A (x^2 + y^2) dx dy$ siendo $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Resp $\frac{1}{2}$

59. Calcular $\iint_A (4x + 7y) dx dy$ donde $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1, x^3 \leq y \leq x\}$.

Resp $\frac{6}{5}$

60. Considerar la aplicación T definida por las ecuaciones $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$:

a) Calcular el jacobiano $J(T(u, v))$.

Resp $J(T) = 4(u^2 + v^2)$

b) Sea R el rectángulo en el plano uv con vértices $(1, 1)$, $(2, 1)$, $(2, 3)$, $(1, 3)$. Representar, mediante un dibujo, la imagen $T(R)$ en el plano xy .

61. Considerar la aplicación T definida por las ecuaciones $x = u + v$, $y = v - u^2$.

a) Calcular el Jacobiano $J(T(u, v))$.

b) Un triángulo A en el plano (u, v) tiene vértices $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 2)$. Representar, mediante un dibujo, la imagen $T(A) = D$ en el plano xy .

c) Calcular el área de D mediante una integral doble extendida a D y también mediante otra integral doble extendida a A .

Resp $A = \frac{14}{3}$

62. Calcular $\iiint_A \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$, siendo A el sólido formado por la hoja superior del cono $z^2 = x^2 + y^2$ y el plano $z = 1$.

Resp. $\frac{\pi}{6}$

63. Calcular $\iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz$, siendo V el sólido limitado por la superficie $2z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 2$.

Resp. $\frac{16}{3}\pi$

64. Calcular $\int_0^1 \int_y^1 e^{y/x} dx dy$

Resp $\frac{e-1}{2}$

65. Invertir el orden de integración para $\int_1^2 \int_0^x f(x, y) dy dx$

Resp. $\int_0^1 \int_1^2 f(x, y) dx dy + \int_1^2 \int_y^2 f(x, y) dx dy$

4.21 Problemas propuestos

66. Sobre el rectángulo $R = [-1, 1] \times [0, 2]$ calcular $\iint_R \sqrt{|y - x^2|} dA$. Resp $\frac{\pi}{2} + \frac{4}{3}$
67. Calcular $\iiint_D \sqrt{x^2 + y^2} dA$ si $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z^2 \leq x^2 + y^2, x^2 + y^2 \leq 1, z \geq 0\}$. Resp. $\frac{2}{3}\pi$
68. Considerar la transformación $\phi(u, v) = (u^{2/3} v^{1/3}, u^{1/3} v^{2/3}) = (x, y)$. Calcular $\iint_{\phi(D)} xy dA$, si $D = \{(u, v) / u \geq 0, v \geq 0, u + v \leq 1\}$. Resp. $\frac{1}{72}$
69. Calcular $\iint_A e^{\frac{x-y}{x+y}} dx dy$, si $A = \{(x, y) / x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$. Resp $\frac{1}{4}(e - e^{-1})$
70. Si $D = \{(x, y) / 1 \leq x \leq 3, x^2 \leq y \leq x^2 + 1\}$, calcular el área de D . Resp 2
71. Si $D = \{(x, y) / 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$, calcular $\iint_D (x^2 + y^2) dA$. Resp $\frac{1}{3}ab(a^2 + b^2)$.
72. Utilizando el cambio $x = u - \frac{v}{\sqrt{3}}, y = \frac{2v}{\sqrt{3}}$. Calcular $\iint_M e^{x^2+y^2+xy} dx dy$ en donde
- $$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 + xy < 1\}$$
- Resp. $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}(1 - e^{-1})$.
73. Hallar el volumen que se encuentra sobre el recinto $\{(x, y) / -1 \leq x \leq 0, 1 \leq y \leq 4\}$ y bajo el plano $z = 2x + 5y + 1$. Resp $\frac{75}{2}$
74. Hallar el volumen del sólido que se encuentra sobre el recinto acotado por $y^2 = x$ e $y = x^2$, y bajo el paraboloido $z = x^2 + y^2$. Resp $\frac{6}{35}$
75. Calcular la masa, el centro de masa y los momentos de inercia de la lámina que se encuentra en el primer cuadrante, acotada por $y = x^2$ y la recta $y = 1$. La densidad $\rho(x, y) = xy$.
Resp $M = \frac{1}{6}, \bar{x} = \frac{4}{7}, \bar{y} = \frac{3}{4}, I_x = \frac{1}{10}, I_y = \frac{1}{16}$
76. Calcular $\iiint_E y dV$, donde E es el recinto que se encuentra bajo $z = x + 2y$ y sobre la región del plano xy acotada por $y = x^2, y = 0, x = 1$. Resp $\frac{5}{28}$
77. Calcular $\iiint_E x dV$, donde E está acotado por $x = 4y^2 + 4z^2$ y el plano $x = 4$. Resp $\frac{16\pi}{3}$
78. Hallar el volumen del sólido acotado por $x = y^2, z = 0, x + z = 1$. Resp $\frac{8}{15}$
79. Usar coordenadas cilíndricas para calcular:
- a) $\iiint_E (x^2 + y^2) dV$, donde E es la región acotada por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y los planos $z = -1, z = 2$ Resp. 24π
- b) $\iiint_E y dV$, donde E es la región que se encuentra sobre el plano xy , acotada por los cilindros $x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 4$ y bajo el plano $z = x + 2$. Resp. 0
80. Hallar la masa del sólido acotado por el paraboloido $z = 4x^2 + 4y^2$ y el plano $z = a, a > 0$. Considerar densidad constante e igual a 1. Resp $M = \frac{a^2\pi k}{8}$

81. Hallar el momento de inercia I_x de un cubo con densidad constante 2 y lado L , si uno de los vértices está en el origen y tres aristas caen en los ejes coordenados. Resp. $\frac{4L^5}{3}$
82. Calcular $\iint_A x^3 \cos(xy) dx dy$, donde A es la región del plano que acotan $y = x^2, y = 0, x = 2$. Resp $\frac{1}{3}(1 - \cos 8)$
83. Calcular $\iint_B 10dA$, donde $B = \{(x, y) / x \geq 0, y \geq 0, x^2 + (y - 2)^2 \leq 4\}$. Resp 20π
84. Calcular $\iint_A x e^{y^2} dx dy$, donde $A = \{(x, y) / x \geq 0, 0 \leq y \leq 4, x^2 \leq y\}$. Resp $\frac{1}{4}(e^{16} - 1)$
85. Calcular $\iint_A \sqrt{xy - y^2} dx dy$, siendo A el triángulo de vértices $(0, 0), (10, 1), (1, 1)$. Resp 6
86. Calcular $\iint_A e^{\frac{x}{y}} dx dy$, si A es la región acotada por $y^2 = x, x = 0, y = 1$. Resp $\frac{1}{2}$
87. Calcular $\iint_A ((x - 2)^2 + y^2) dx dy$, donde A es el círculo $x^2 + y^2 - 4x = 0$. Resp 8π
88. Calcular $\iint_A 4(x + y) e^{x-y} dx dy$, donde A es el triángulo de vértices $(-1, 1), (1, 1), (0, 0)$. Resp 6,623
89. Calcular el volumen del sólido limitado por $z = 4 - x^2 - y^2, z = 0$. Resp. 8π
90. Calcular el área encerrada por las gráficas $x = y^2 + 1, x = 0, y = 0, y = 2$. Resp. $\frac{14}{3}$
91. Hallar el área encerrada por las gráficas $x = y + 3, x = y^2 + 1$. Resp. $\frac{9}{2}$
92. Hallar área encerrada por las gráficas $y = 6x - x^2, y = x^2 - 2x$. Resp. $\frac{64}{3}$
93. Hallar área encerrada por las gráficas $x = -y, x = 2y - y^2$. Resp. $\frac{9}{2}$
94. Hallar volumen del sólido limitado por las superficies $z = 2x^2 + y^2, z = 4 - y^2$. Resp. 4π
95. Calcular el volumen limitado por el plano $2x + 2y - z + 2 = 0$ y el paraboloides $x^2 + y^2 = z$. Resp. 8π
96. Hallar volumen exterior a $z^2 = x^2 + y^2$ e interior a $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Resp. $\frac{2\pi\sqrt{2}}{3}$
97. Hallar volumen del sólido limitado por $z = 0, z = h$ que es exterior al cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e interior al hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$. Resp. $\frac{\pi}{3}h^3$
98. Hallar volumen del sólido limitado por los cilindros $x^2 + y^2 = a^2$ y $x^2 + z^2 = a^2$. Resp. $\frac{16}{3}a^3$
99. Hallar volumen limitado por las superficies $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1, z = xy, z = 0$. Resp. π
100. Hallar volumen interior al cilindro $x^2 + y^2 = 2ax$, limitado por el paraboloides $x^2 + y^2 = az$ y el plano $z = 0$. Resp. $\frac{3}{2}\pi a^3$

4.21 Problemas propuestos

101. Calcular $\iiint_A (x^2 + y^2)^2 dV$, si A es la región determinada por $z = 2, x^2 + y^2 = 2z$. Resp. $\frac{32\pi}{3}$

102. Calcular $\iiint_A \sqrt{x^2 + y^2} dV$, si A es la región limitada por el plano $z = 1$ y la hoja superior del cono $z^2 = x^2 + y^2$. Resp. $\frac{\pi}{6}$

103. Calcular $\iiint_A z dx dy dz$, si A es el recinto acotado del semiespacio $z \geq 0$ intersectado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y el cono $x^2 + y^2 = z^2$. Resp. $\frac{\pi}{8}$

104. Calcular, con el cambio de variable $u = x^n, v = y^n, w = z^n$ la integral triple:

$$\iiint_{V_n} x^{n-1} y^{n-1} z^{n-1} \sqrt{1 - x^n - y^n - z^n} dx dy dz$$

donde $V_n = \{(x, y, z) / x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^n + y^n + z^n \leq 1\}$, siendo n número natural mayor que uno. Resp. $\frac{8}{105n^3}$

105. En el rectángulo $[0, 1] \times [0, 1]$ se define la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{y^2}, & 0 < x < y < 1 \\ -\frac{1}{x^2}, & 0 < y < x < 1 \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$$

Demostrar que:

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy \neq \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dy dx$$

106. Calcular el volumen del sólido acotado inferiormente por el plano xy , superiormente por la superficie $9x^2 + 9y^2 + 16z^2 = 4^2 3^3$ y lateralmente por el cilindro $x^2 + y^2 - 4y = 0$.

Resp $16(\pi - \frac{4}{3})$

107. Calcular $\iint_R |\text{sen}(x + y)| dx dy$, si $r = [0, \pi] \times [0, \pi]$.

Resp 2π

108. Hallar el volumen de la región limitada por el paraboloide $z = 2 - x^2 - y^2$ e inferiormente por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Resp $\frac{5\pi}{6}$

109. Calcular $\iiint_R y dV$ si R está determinada por $z + x \leq 6, z \geq 0, y \leq 0, x \geq 3y^2$.

Resp. -6

110. Se consideran $g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones diferenciables. Se define $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(x, y) = \int_0^{x-y} g(t) dt + \int_{x+y}^0 h(t) dt$$

Probar que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

111. Esbozar la región de integración y cambiar el orden en la integral siguiente

$$\int_{-2}^0 \int_0^{(x+y)^2} f(x, y) dy dx + \int_0^2 \int_0^{(x-y)^2} f(x, y) dy dx$$

$$\text{Resp. } \int_0^4 \int_{\sqrt{y}-2}^{2-\sqrt{y}} f(x, y) dx dy$$

112. Hallar el volumen limitado por los paraboloides $z = x^2 + y^2$ y $z = 2 - x^2 - y^2$. Resp π

113. Hallar el volumen del cuerpo definido por $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq z \leq \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1\}$.

$$\text{Resp } 3\pi$$

114. Hallar el volumen comprendido entre $x^2 + y^2 + z^2 = 100$ y $x^2 + y^2 = z^2$, $z \geq 0$.

$$\text{Resp } \frac{1000\pi}{3}(2 - \sqrt{2})$$

115. Calcular el volumen interior al cilindro $x^2 + y^2 = 2ax$ limitado por las superficies $z = 0$ y $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, siendo $a > 0$.

$$\text{Resp. } \frac{8}{3}\pi a^3 - \frac{32}{9}a^3$$

116. Hallar la masa de la lámina limitada por las circunferencias $x^2 + y^2 = 2x$ y $x^2 + y^2 = 4x$ y función de densidad $\rho(x, y) = x$.

$$\text{Resp } 7\pi$$

117. Hallar el centro de masa de la lámina $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ que tiene densidad en cada punto $\rho(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

$$\text{Resp } (\frac{3}{8}, \frac{3}{8})$$

118. Calcular el centro de gravedad de un cilindro circular recto de radio de la base R , de altura h y cuya densidad varía proporcionalmente a su distancia a la base.

$$\text{Resp } (0, 0, \frac{2}{3}h)$$

119. Calcular el momento de inercia con respecto al eje y del área plana comprendida entre la parábola $y = a^2 - x^2$ y el eje x .

$$\text{Resp } \frac{4a^5}{15}$$

120. Calcular el momento de inercia con respecto al eje z del volumen del paraboloide $z = x^2 + y^2$, limitado por el plano $z = a$.

$$\text{Resp } \frac{\pi a^3}{6}$$

121. Usar coordenadas esféricas para calcular $\iiint_V (4x^2 + 9y^2 + 36z^2) dx dy dz$ siendo V el interior del elipsoide $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$

122. Usar coordenadas esféricas para calcular $\iiint_A (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$, siendo

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x^2 + y^2 \leq z^2, z \geq 0\}$$

4.22. Problemas adicionales

1. Sean $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |x| + |y| \leq 3\}$, $B = [-2, 2] \times [-2, 2]$ y χ_B la función característica correspondiente a B . Calcular $\int_A \chi_B(x, y) dx dy$ Resp. 14

2. Determinar los límites de integración, A, B, C, D (no necesariamente constantes) para que la siguiente igualdad de integrales iteradas sea correcta:

$$\int_1^2 \int_{(x-2)^2}^{\sqrt[3]{2-x}} f(x, y) dy dx = \int_A^B \int_C^D f(x, y) dx dy$$

Resp. $A = 0, B = 1, C = 2 - \sqrt{y}, D = 2 - y^3$

3. Sea P la partición $P = \{0, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$ sobre el rectángulo $A = [0, 3] \times [1, 3]$ y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x - y$. Calcular la suma superior de Riemann $S(f, P)$. Resp. 5

4. Sea $f : A = [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = xy$. Usar el límite de una suma de Riemann para probar que $\int_A xy dA = \frac{1}{4}$.

5. Hallar $\iiint_R z e^{-x^2-y^2} dx dy dz$, si $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$.

Resp. $\frac{\pi}{2}(1 - e^{-1})$

6. Calcular $\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \frac{dy dx}{\sqrt{x+y^2}}$.

Resp. $-4 + 4\sqrt{2}$

7. Hallar $\int_D (y^2 - x^2)^{xy} (x^2 + y^2) dx dy$ donde

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0, y > 0, a \leq xy \leq b, y^2 - x^2 \leq 1, x \leq y, \text{ con } 0 < a < b\}$$

Se sugiere el cambio de variable $u = x^2 - y^2, v = xy$.

Resp $\frac{1}{2} \log \frac{1+b}{1+a}$

8. Calcular el momento de inercia con respecto al eje y del área plana comprendida entre la parábola $y = a^2 - x^2$ y el eje x . Resp. $\frac{4a^5}{15}$.

9. Calcular $\iiint_A x dx dy dz$, si A es la región acotada por los planos $x = 0, y = 0, z = 2$ y la superficie $z = x^2 + y^2, x \geq 0, y \geq 0$. Resp. $\frac{8\sqrt{2}}{15}$

10. Hallar $\int_R xy dx dy$ si D es la región del primer cuadrante limitada por las curvas $x^2 + y^2 = 4, x^2 + y^2 = 9, x^2 - y^2 = 4$ y $x^2 - y^2 = 1$. Resp. $\frac{15}{8}$

11. Hallar la integral $\int_D (x^2 - y^2) dx dy$, siendo D la región del primer cuadrante limitada por las curvas $x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 4, y = x, y - x = 1$.

Índice alfabético

- abierto, 79
- aceleración, 104
- acotado, 81, 83, 137
- acumulación, 78
- adherencia, 78

- cambio de variable, 268
- campo escalar, 137
- cerrado, 81
- centro de masa, 271, 282
- cilindros, 34
- compacto, 83
- complemento, 77
- componentes, 102
- conexo, 83
- contenido, 248, 257
- continuidad, 88, 154
- convexo, 83
- coordenadas cilíndricas, 279
- coordenadas esféricas, 279
- curvatura, 104

- demanda marginal, 206
- denso, 83
- derivada, 88, 167
- derivada direccional, 155
- derivadas parciales, 158
- derivado, 78
- desigualdad triangular, 256
- diferenciable, 90, 165, 179
- diferencial, 92, 166
- diferenciales, 177
- distancia, 71

- dirección, 3, 5, 8
- distancia entre dos puntos, 2
- distancia punto - plano, 27
- distancia punto - recta, 30
- dominio, 138

- elipsoides, 37
- el plano, 23
- equivalentes por cociente, 147
- esferas, 36
- espacio métrico, 72, 74
- exterior, 77
- extremo, 193
- extremos absolutos, 204

- familias de planos, 29
- frontera, 78
- Fubini, 262
- función de costo, 206
- función de demanda, 205
- función de ganancia, 208
- función de ingreso, 207
- función de producción, 206
- función vectorial, 84
- funciones coordenadas, 85

- gradiente, 172

- Hausdorff, 77
- Heine - Borel, 82
- hiperboloide de dos hojas, 41
- hiperboloide de una hoja, 40

- integral inferior, 252

- integrales dobles, 260
- integral superior, 252
- intervalos, 247
- interior, 77

- jacobianos, 187
- Jordan, 94

- Lagrange, 199
- la recta, 18
- límite, 86, 144
- linealidad, 256

- magnitud, 3, 8
- masa, 271, 282
- matriz Hessiana, 195
- máximo absoluto, 193
- máximo local, 193
- mínimo absoluto, 193
- mínimo local, 193
- métrica, 71
- módulo, 5
- momento, 282
- momento de inercia, 273
- momento polar, 273
- momentos, 272
- monotonía, 256

- norma, 72
- normal unitario, 100

- octante, 2

- Pappus, 276
- paraboloide elíptico, 38
- paraboloide hiperbólico, 39
- partición, 249
- plano, 22, 34
- plano normal, 110
- plano osculador, 110
- plano rectificante, 110
- plano tangente, 143, 162
- planos proyectores, 32
- producto escalar, 10
- producto vectorial, 12

- proyección vectorial, 16
- punto de silla, 193

- radio de curvatura, 107
- rango, 86, 138
- refinamiento, 251
- recorrido, 86
- regla de la cadena, 179
- región, 83
- Riemann, 247, 252

- sentido, 3, 5, 8
- simplemente conexo, 83
- sistema cartesiano, 1
- suma de Riemann, 259
- suma inferior, 250
- suma superior, 250
- superficie de nivel, 139
- superficies, 34

- tangente unitario, 100
- Taylor, 189
- topología, 73
- torsión, 112
- transformación polar, 266
- transformaciones, 263
- triedro de Frenet, 112
- triple producto escalar, 14
- triple producto vectorial, 15

- univaluado, 137

- vector, 2, 4
- vector de posición, 7
- vector director, 19
- vector tangente, 90, 100
- volumen, 274
- volumen de revolución, 275