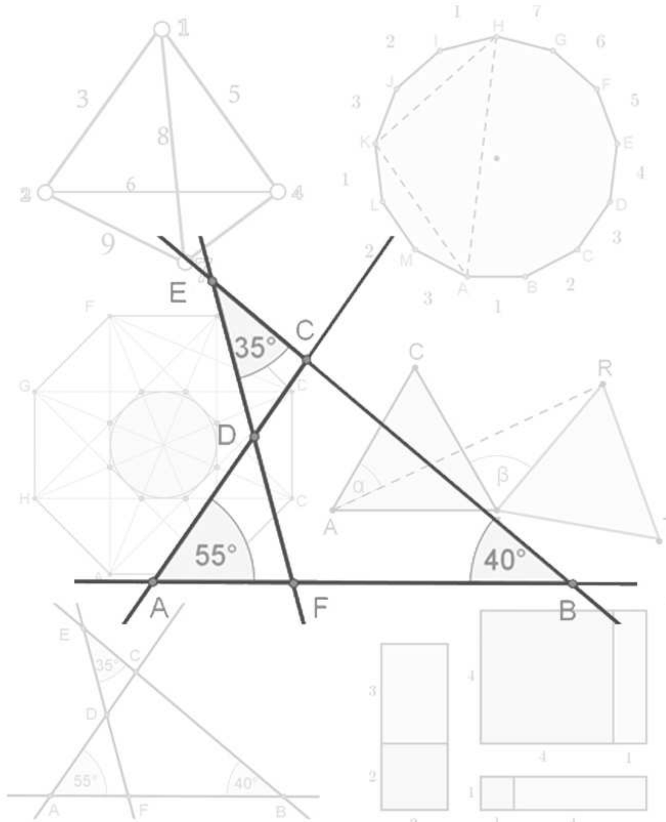
PROBLEMAS Y SOLUCIONES

6° Campeonato de Matemática
Universidad de La Frontera



Departamento de Matemática y Estadística
Universidad de La Frontera

El objetivo principal del matemático
consiste en formular y resolver problemas

"La resolución de problemas
es el corazón de la Matemática"

Soluciones de los Problemas a cargo del
Comité Académico del Campeonato Conformado por:

Hernán Burgos Vega
José Labrin Parra
Eduardo Milman Aguilar
Joan Molina Sandoval

Introducción

Este pequeño libro contiene los problemas del 6° Campeonato de Matemática de la Universidad de La Frontera año 2013, junto a sus soluciones, material que ponemos a disposición de cada uno de los colegas con la íntima esperanza y pretensión de que les sirvan de ayuda y motivación en sus clases de matemática.

Estamos convencidos de que estudiantes entusiasmados y motivados tendrán mayor éxito, como también, pensamos que problemas no triviales y que desafían el intelecto del estudiante lo ayudan a organizar, contar, razonar, encontrar secuencias y algoritmos que le permiten entender los problemas y resolverlos, y al final del proceso sentir el placer de haber resuelto un problema novedoso, que inicialmente era un desafío.

Este libro está dirigido especialmente a los colegas profesores de matemática de enseñanza básica y media de la región de La Araucanía, con el propósito de despertar el interés por la resolución y creación de problemas lúdicos y bonitos que motivan a nuestros estudiantes.

Quiero agradecer el importante aporte del comité académico del campeonato, en la resolución de los problemas seleccionados, además de agradecer por la lectura y correcciones del material a los profesores R. Benavides, E. Olivos y E. Uribe del Departamento de Matemática de nuestra Universidad. Debemos reconocer también el esforzado y excelente trabajo desarrollado por el profesor José Labrin en la escritura del texto en LaTeX.

Finalmente, es necesario destacar y reconocer el importante y decidido apoyo que nos entrega la dirección de nuestra Universidad, sin el cual no podríamos desarrollar este Campeonato.

Reiteramos nuestro íntimo deseo de que este material sea un pequeño aporte a los colegas en su práctica diaria.

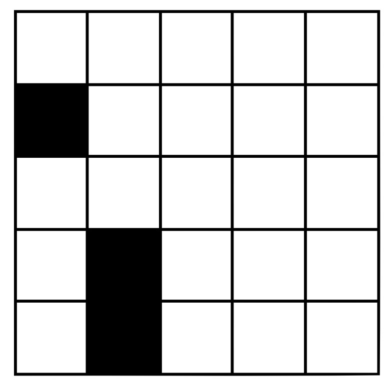
Dr. Hernán Burgos V.
Director Académico Campeonato de Matemática
Universidad de La Frontera

Temuco, Marzo 2014

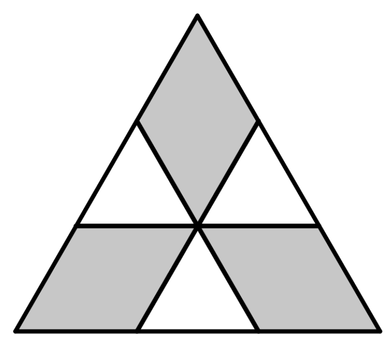
1

Problemas

Problema 1. Camilo y una amiga están jugando al "Combate Naval" en un tablero de 5×5. Camilo ya ha ubicado 2 barcos, como se muestra en la figura. Todavía tiene que colocar un barco de 3×1 para que cubra exactamente tres celdas. Sabiendo que dos barcos no pueden tener un punto en común. ¿Cuántas posiciones hay para su barco de 3×1?



Problema 2. En la imagen, el triángulo grande es equilátero y tiene área 9 cm^2. Las rectas son paralelas a los lados y dividen cada lado en 3 partes iguales. ¿Cuál es el área de la parte sombreada?



Problema 3. Roberto quiere decirle a Karina un número, en el cual el producto de sus dígitos es igual a 24. ¿Cuál es la suma de los dígitos del número más pequeño que Roberto puede decirle a Karina?

Problema 4. Laura, Iván, Valeria y Cata quieren estar juntos en una foto. Cata y Laura son las mejores amigas y quieren estar juntas. Iván quiere estar junto a Laura porque le gusta. ¿De cuántas formas pueden acomodarse para la foto?

Problema 5. En el colegio de animales hay 3 gatos, 4 patos, 2 gansos y varios corderos tomando clases. El profesor búho contó las patas de todos sus alumnos en su clase y obtuvo 44 patas. ¿Cuántos corderos hay en la clase?

Problema 6. Un globo lleno de Helio puede alzar una canasta que contiene cosas que pesan a lo más 80 kilos. Dos globos llenos de Helio pueden alzar la misma canasta que contiene cosas que pesan a lo más 180 kilos. ¿Cuánto pesa la canasta?

Problema 7. Los nietos, nietas, bisnietos y bisnietas del abuelo Anacleto juegan a la ronda, en total 40 niños y 28 niñas forman un círculo, tomados de la mano. Exactamente 18 niños dan su mano izquierda para una de las niñas. ¿Cuántos niños dan su mano derecha a una chica?

Problema 8. Escribe todas las secuencias de números enteros consecutivos que contengan al número 7, de forma tal que la razón entre números impares y números pares sea $\frac{2}{3}$.

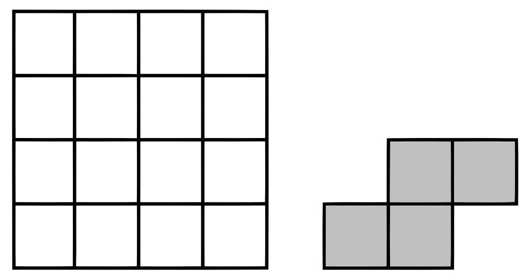
Problema 9. Miguel pensó en un número positivo, lo multiplicó por sí mismo, le sumó 1, multiplicó el resultado por 10, le sumó 3, luego multiplicó el resultado por 4 y después le sumó 1. Su último resultado fue 2013. ¿En qué número pensó Miguel?

Problema 10. Las masas de sal y agua en el mar de Pitágoras están en la razón 7 : 193. ¿Cuántos kilogramos de sal hay en 1000 kilogramos de agua de mar?

Problema 11. Un saco contiene bolitas de cinco colores diferentes. Dos son rojas, tres son azules, diez son blancas, cuatro son verdes y tres son negras. ¿Cuál es el número más pequeño de bolitas que se debería sacar del saco para asegurarse de sacar al menos dos bolitas del mismo color?

Problema 12. Sabiendo que $\dfrac{1111}{101} = 11$, encontrar el valor de $\dfrac{3333}{101} + \dfrac{6666}{303}$

Problema 13. Anita tiene una hoja cuadrada cuadriculada como la que se muestra en la figura. A partir de dicha hoja ella recorta figuras por las líneas del cuadriculado como la que se muestra en la imagen de la derecha. Después de realizar los recortes, ¿cuál es la mínima cantidad posible de cuadraditos restantes?



Problema 14. La Sra. Margarita compró cuatro choclos para cada miembro de su familia de cuatro personas. En la tienda recibió el descuento que le ofrecía la tienda. Oferta de choclos: 1 choclo 200 pesos. Cada 5 choclos el sexto es gratis ¿Cuánto tanto pagó?

Problema 15. Alex enciende una vela cada diez minutos. Cada vela encendida tiene una duración de cuarenta minutos. ¿Cuántas velas están encendidas después de cincuenta y cinco minutos a partir del momento en que Alex enciende la primera vela?

Problema 16. El número promedio de hijos en cinco familias no puede ser:

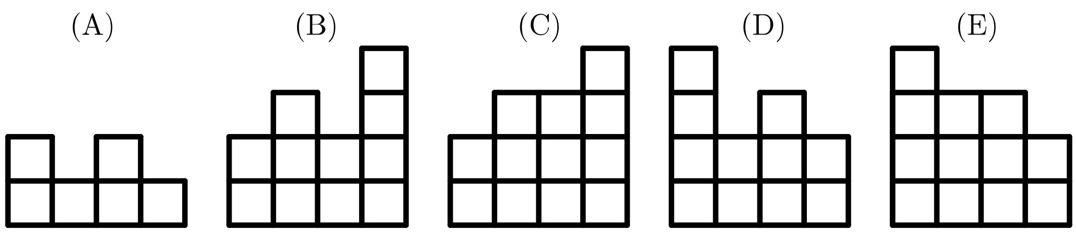
(A) $0,2$ (B) $1,2$ (C) $2,2$ (D) $2,4$ (E) $2,5$

Problema 17. Juan ha construido un edificio de cubos sobre una rejilla de 4×4. La imagen muestra el número de cubos que está sobre cada celda de la rejilla. Cuando Juan la mira desde atrás, ¿cuál de estas imágenes ve?

Vista Trasera

4	2	3	2
3	3	1	2
2	1	3	1
3	3	1	2

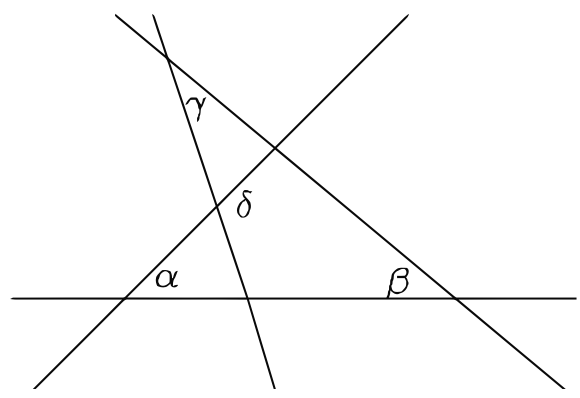
Vista Frontal



Problema 18. Marcos y Luisa están parados en lados opuestos de una fuente circular. Empiezan a correr en el sentido de las agujas del reloj alrededor de la fuente. La rapidez de Marcos es $\frac{9}{8}$ la rapidez de Luisa. ¿Cuantas vueltas ha dado Luisa antes de que Marcos la alcance por primera vez?

Problema 19. Los enteros positivos x, y, z satisfacen que $x \cdot y = 14$, $y \cdot z = 10$ y que $z \cdot x = 35$ ¿Cuál es el valor de $x + y + z$?

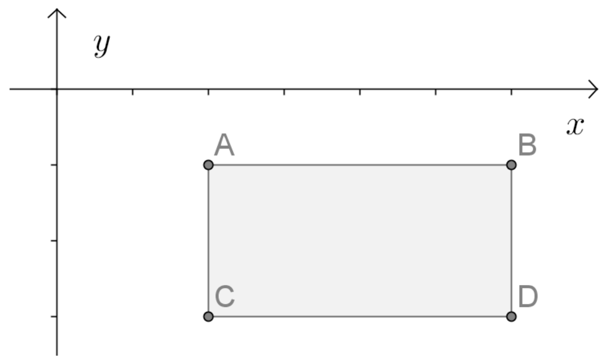
Problema 20. En el diagrama, $\alpha = 55°$, $\beta = 40°$, y $\gamma = 35°$. ¿Cuál es el valor de δ?



Problema 21. Vanessa escribió varios números enteros consecutivos. ¿Cuál de los siguientes no puede ser el porcentaje de números impares que hay en la lista de Vanessa?

(A) 40 %　(B) 45 %　(C) 48 %　(D) 50 %　(E) 60 %

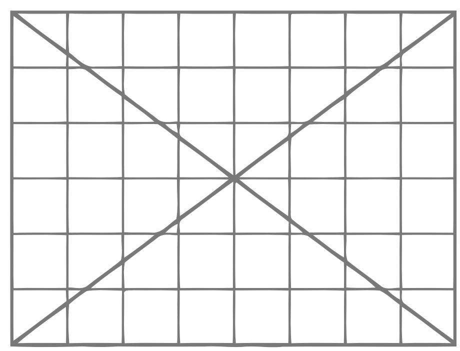
Problema 22. Los lados del rectángulo $CDBA$ son paralelos a los ejes coordenados. $CDBA$ está debajo del eje X y a la derecha del eje Y, como se muestra en la figura. Las coordenadas de los cuatro puntos A, B, C y D son todas números enteros.



Para cada uno de estos puntos calculamos el valor $\dfrac{coordenada\ y}{coordenada\ x}$ ¿Cuál de los cuatro puntos da el menor valor?.

Problema 23. Todos los enteros positivos de cuatro cifras que tienen los mismos dígitos que el número 2013 están escritos en la pizarra en orden creciente. ¿Cuál es la diferencia numérica más grande que hay entre dos números vecinos en la pizarra?

Problema 24. En la rejilla de 6×8 que se muestra, 24 de las celdas no son interceptadas por una de las diagonales. Cuando se dibujan las diagonales de una rejilla de 6×10, ¿Cuantas celdas no son interceptadas por las diagonales?

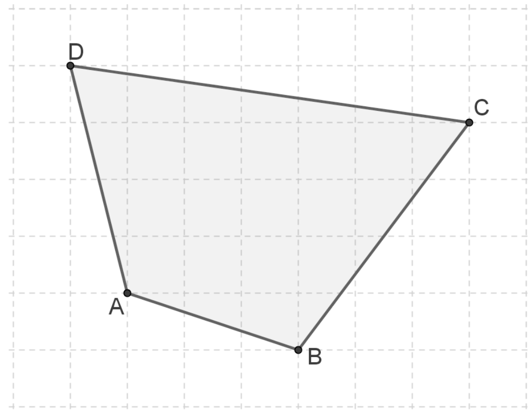


Problema 25. Sea S el número de cuadrados entre los enteros 1 y 2013^6. Sea Q el número de cubos entre los mismos números. ¿Cuál de las siguientes alternativas es verdadera?:

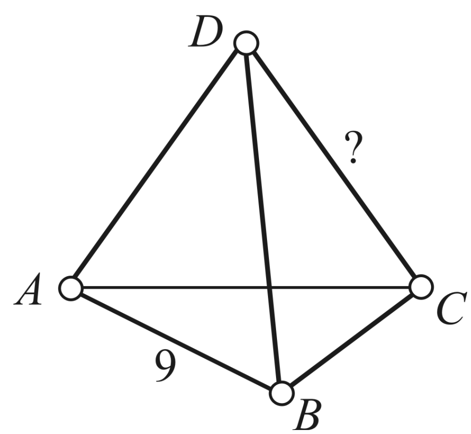
(A) $S = Q$ (B) $2S = 3Q$ (C) $3S = 2Q$
(D) $S = 2013Q$ (E) $SSS = QQ$

Problema 26. Andrés, Beatriz, Kathy, Daniela y Eduardo nacieron el 20/02/2001, 12/03/2000, 20/03/2001, 12/04/2000 y 23/04/2001 (día, mes, año). Andrés y Eduardo nacieron el mismo mes. Además, Beatriz y Kathy nacieron el mismo mes. Andrés y Kathy nacieron el mismo día de meses diferentes. Además Daniela y Eduardo nacieron el mismo día pero en meses distintos ¿Cuál de los niños es el más joven?

Problema 27. La figura muestra un cuadrilátero sombreado ABCD dibujado sobre un geoplano. Cada celda del geoplano tiene un lado de 2cm. ¿Cuál es el área del cuadrilátero ABCD?



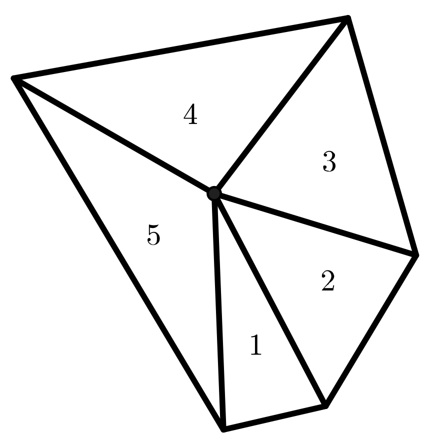
Problema 28. Cada uno de los cuatro vértices y seis aristas de un tetraedro está marcado con uno de los diez números $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11$ (se omite el 10). Cada número se usa una única vez. Por cada dos vértices del tetraedro, la suma de estos números en los vértices es el número de la arista que los conecta. La arista AB está marcada con un 9, ¿Qué número se usa para marcar la arista CD?



Problema 29. Cinco enteros positivos consecutivos tienen la siguiente propiedad: tres de ellos suman lo mismo que la suma de los otros dos. ¿Cuántos grupos de números enteros cumplen con esta propiedad?

Problema 30. ¿Cuántos decimales tiene el número $\dfrac{1}{1024000}$ escrito en su forma decimal?

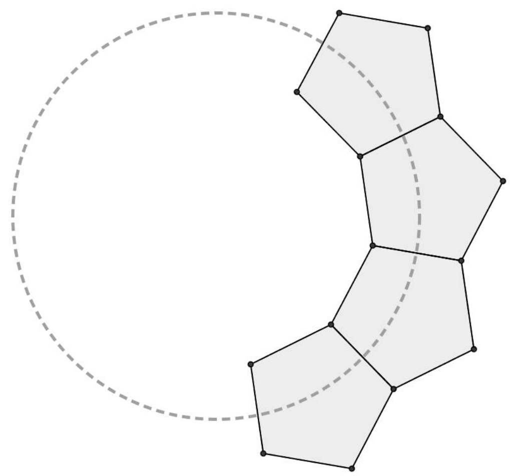
Problema 31. La imagen muestra cinco triángulos isósceles con ángulos superiores de 24°, 48°, 72°, 96° y 120°, todos múltiplos del ángulo superior más pequeño, y todos los ángulos tienen un valor entero. Si queremos aumentar la cantidad de triángulos isósceles tanto como sea posible. ¿Cuántos grados tiene el ángulo superior más pequeño para ese caso?



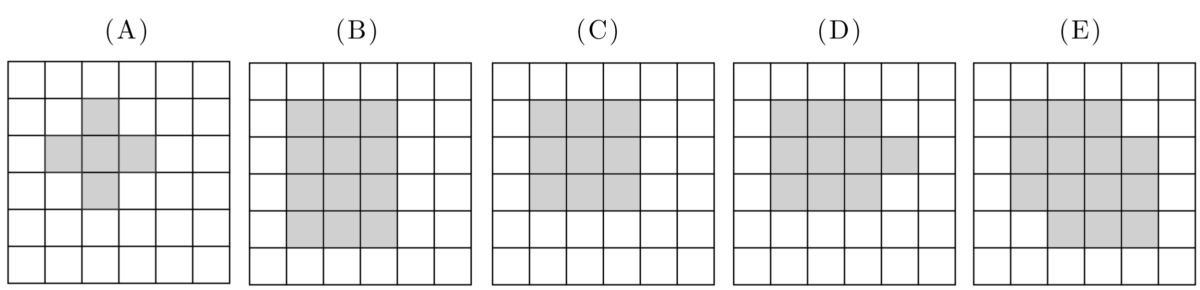
Problema 32. Romina hornea 6 pasteles de frambuesa uno después del otro, numerándolos del uno al seis en orden. Mientras hace esto, sus hijos a veces entran a la cocina y comen el pastel más caliente. ¿Cuál de las siguientes combinaciones no puede ser el orden en que los niños comen los pasteles?

(A) $1, 2, 3, 4, 5, 6$ (B) $1, 2, 5, 4, 3, 6$ (C) $3, 2, 5, 4, 6, 1$
(D) $4, 5, 6, 2, 3, 1$ (E) $6, 5, 4, 3, 2, 1$

Problema 33. Ricardo tiene piezas plásticas idénticas con la forma de un pentágono regular. Las pega juntas lado a lado para completar un círculo, como se ve en la figura. ¿Cuántas piezas tiene este círculo?



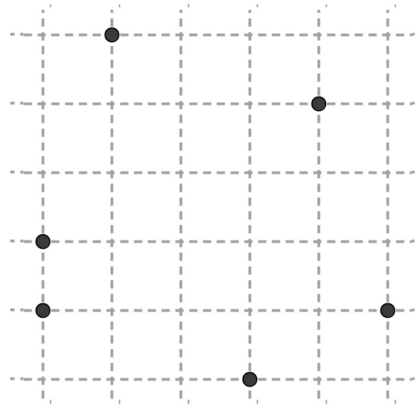
Problema 34. Una alfombra circular se pone sobre un piso con baldosas cuadradas. Todas las baldosas que tienen más de un punto en común con la alfombra se pintan gris. ¿Cuál de las siguientes imágenes representa un resultado no posible?



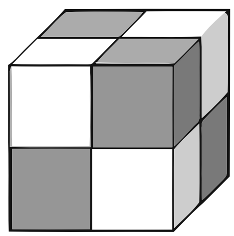
Problema 35. El número 200013 - 2013 no es divisible por:

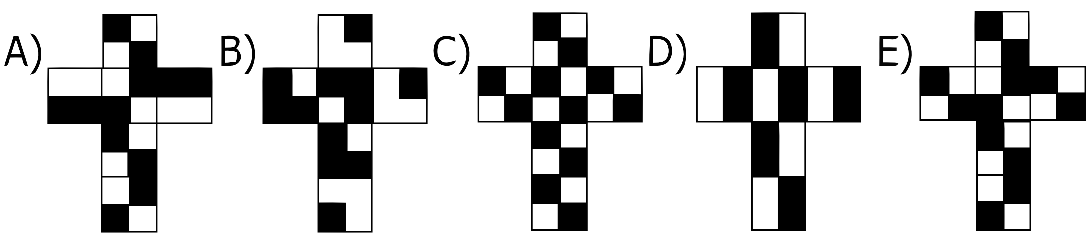
(A) 2 (B) 3 (C) 5 (D) 7 (E) 11

Problema 36. Seis puntos están marcados en un geoplano con celdas de lado 1. ¿Cuál es el área más pequeña de un triángulo con vértices en los lugares marcados?



Problema 37. Las caras de un cubo están pintadas con cuadrados blancos y negros como si estuviese hecho con cuatro cubos blancos y negros más pequeños. ¿Cuál de los siguientes esquemas sería el correcto para construirlo a partir de una hoja de papel?

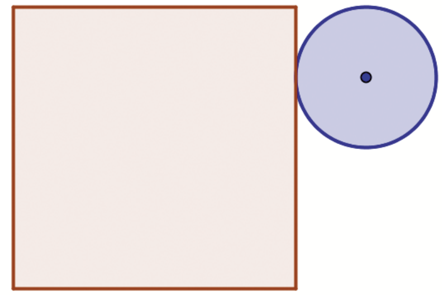




Problema 38. Una pelota de caucho cae verticalmente desde una altura de 15 metros del techo de un edificio. Después de cada impacto con el piso rebota hasta una altura de 4/5 de la altura anterior. ¿Cuántas veces aparecerá la pelota enfrente de una ventana regular cuyo borde inferior tiene una altura de $5,5$ metros y cuyo borde superior tiene una de $6,5$ metros?

Problema 39. El baile del tango se baila en parejas, cada una de un hombre y una mujer. Una noche en un baile no hay más de 50 personas presentes. En algún momento $\frac{3}{4}$ de los hombres está bailando con $\frac{4}{5}$ de las mujeres. ¿Cuántas personas están bailando en ese momento?

Problema 40. Dado el cuadrado de lado 4 de la figura, se tiene que sobre él se desliza una rueda de radio 1 sobre sus lados. Calcular la longitud del camino que recorre el centro de la rueda.



Problema 41. En la reunión anual de caracoles, el caracol Jacinto propone el siguiente desafío a sus amigos ¿Cuántos números de 4 dígitos en que el dígito de la decena y la centena son iguales poseen la propiedad siguiente: después de restar 2997 de dicho número, se obtiene un número de 4 dígitos que consiste en los mismos dígitos en orden inverso?. Resuelve tú el problema antes de que lo resuelvan los amigos caracoles.

Problema 42. Al sumarle 4^{15} a 8^{10}, Mónica ha obtenido un número que también es potencia de 2. Encuentra este número.

Problema 43. El abuelo Anacleto, matemático jubilado y aventurero, a construido una ventana con forma de trapecio cuyo perímetro es de 5 metros y la longitud de sus lados (medidos en metros) son números enteros. ¿Cuál es la medida de los dos ángulos más pequeños de la ventana que construyó el abuelo?

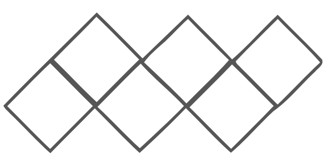
Problema 44. El abuelo Anacleto matemático jubilado y aventurero, sabe construir ventanas con forma de trapecio isósceles, él quiere construir algunas ventanas de perímetro 11 metros, tal que la longitud de sus lados (medidos en metros) sean números enteros. Encuentre todas las posibles ventanas con forma de trapecio que cumplen con estas condiciones.

Problema 45. El número de la casa de Ariel tiene tres dígitos. Si se remueve el primer dígito (el de la centena) de este número se obtiene el número de la casa de Benjamín. Si se remueve el primer dígito (el de la decena) del número de la casa de Benjamín, se obtiene el número de la casa de Clara. Si se suman los números de las casas de Ariel, Benjamín y Clara se obtiene 912. ¿Cuál es el segundo dígito del número de la casa de Ariel?

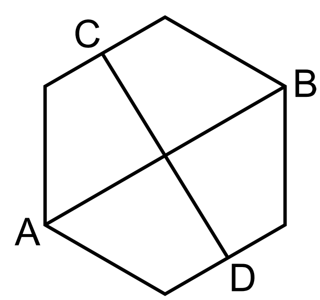
Problema 46. El número de la casa de Ariel tiene cuatro dígitos. Si se remueve el primer dígito de este número se obtiene el número de la casa de Benjamín. Si se remueve el primer dígito del número de la casa de Benjamín, se obtiene el número de la casa de Clara. Si se suman los números de las casas de Ariel, Benjamín y Clara se obtiene 5992. ¿Cuál es el número de la casa de Ariel si la suma de los dígitos de dicho número es 19?

Problema 47. Encuentre el último dígito (la cifra de las unidades) del número $4^{2013} - 3^{2013}$.

Problema 48. La siguiente figura muestra 6 cuadrados en zigzag de lados 1cm $\times$ 1cm. Su perímetro es 14cm, ¿Cuál es el perímetro de un zigzag hecho de la misma manera pero con 2013 cuadrados?



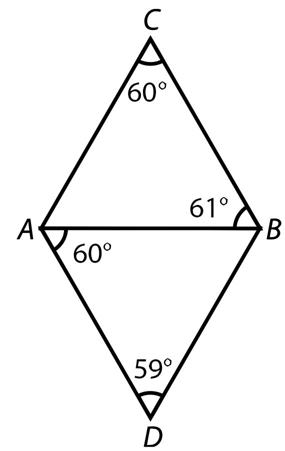
Problema 49. El segmento AB une dos vértices opuestos de un hexágono regular. El segmento CD une dos puntos medios de lados opuestos. Encuentra el producto entre los segmentos AB y CD si el área del hexágono es $60u^2$.



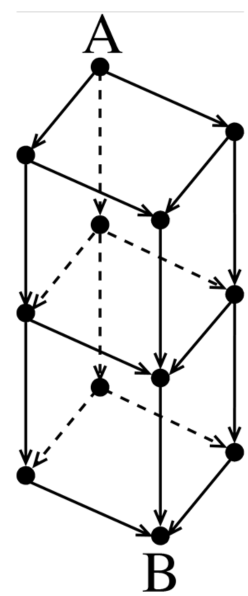
Problema 50. Un grupo de estudiantes tuvo una prueba. Si cada niño hubiese tenido 3 puntos más en su prueba, entonces el promedio del curso hubiese sido 1,2 puntos más alto de lo que fue. ¿Cuál es el porcentaje de niñas en el curso?

Problema 51. Hoy, Juan y su hijo están celebrando su cumpleaños. Juan multiplicó correctamente su edad con la de su hijo y obtuvo 2013 como resultado. ¿Qué edad tiene Juan?

Problema 52. Joaquín quería dibujar dos triángulos equiláteros pegados para formar un rombo. Pero no midió bien todas las distancias y, una vez que terminó, Alejandra midió los cuatro ángulos y vio que no eran iguales. ¿Cuál de los cuatro segmentos es el más largo?



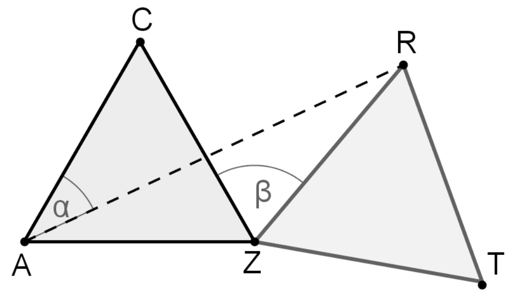
Problema 53. ¿Cuál es la máxima cantidad de caminos diferentes para llegar desde el punto A hasta el B en el gráfico siguiente?



Problema 54. Se da un número de seis dígitos. La suma de sus dígitos es par, el producto de sus dígitos es impar. ¿Cuál es la afirmación correcta sobre el número?

(A) Ya sea 2 o 4 dígitos del número son par
(B) Un número así no existe
(C) La cantidad de dígitos impares del número es impar
(D) El número puede estar formado por dígitos diferentes entre ellos
(E) Ninguna de las Anteriores

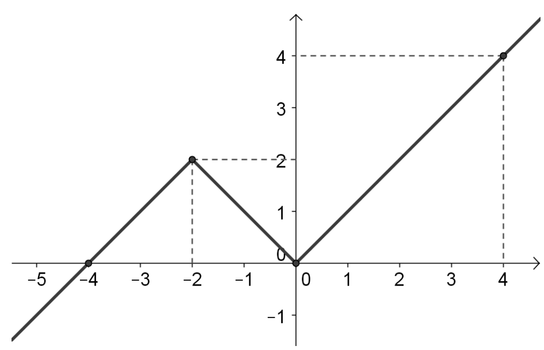
Problema 55. El triángulo RZT es el resultado del triángulo equilátero AZC al girarlo alrededor del punto Z, donde $\beta = \angle CZR = 70°$. Determine el valor del ángulo $\alpha = \angle CAR$.



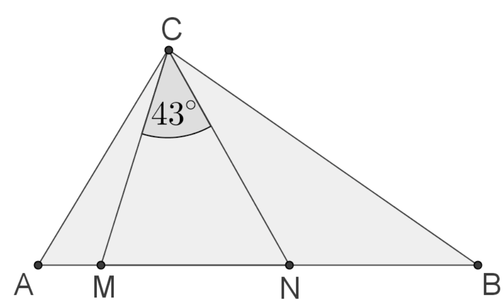
Problema 56. Considere un rectángulo, en el que uno de sus lados mide 5 unidades. El rectángulo puede ser cortado en un cuadrado y un rectángulo de lados enteros, uno de los cuales tiene área 4. ¿Cuántos rectángulos existen que cumplan con esto?

Problema 57. El número n es el entero positivo más grande para el cuál $4n$ es un número de tres dígitos, y m es el entero positivo más pequeño para el cuál $4m$ es un número de tres dígitos. ¿Cuál es el valor de $4n - 4m$?

Problema 58. Victor ha dibujado el gráfico de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, compuesto por dos rectas y un segmento de línea (ver figura). ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $f(f(f(x))) = 0$?



Problema 59. En el triángulo ABC los puntos M y N en el lado AB están ubicados de manera tal que $AN = AC$ y $BM = BC$. Encuentre el valor del ángulo $\angle ACB$ si $\angle MCN = 43°$



Problema 60. ¿Cuántos pares (x, y) de números enteros satisfacen la ecuación $x^2 \cdot y^3 = 6^{12}$?

Problema 61. Una caja contiene 900 cartas numeradas del 100 al 999. Dos cartas cualesquiera tienen números diferentes. Francisco toma algunas cartas y saca la suma de los dígitos de cada una. ¿Cuántas cartas debe tomar para asegurarse de tener tres cartas cuya suma sea igual?

Problema 62. Sea $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ la función definida por $f(n) = \frac{n}{2}$ si n es par, y por $f(n) = \frac{n-1}{2}$ si n es impar, para todos los números naturales n. Para el entero positivo k, $f^k(n)$ denota la expresión $f(f(\ldots f(n)\ldots))$, donde el símbolo f aparece k veces. Entonces el número de soluciones de la ecuación $f^{2013}(n) = 1$ es:

Problema 63. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por las siguientes propiedades: f es periódica de periodo 5 y la restricción de f al intervalo $[-2, 3[$ es $x \to f(x) = x^2$. ¿Cuánto vale $f(2013)$?

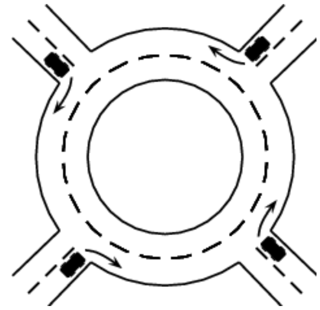
Problema 64. ¿Cuántas soluciones (x, y), donde x e y son números reales, tiene la ecuación $x^2 + y^2 = |x| + |y|$?

Problema 65. Hay algunas rectas dibujadas en el plano. La recta a intercecta exactamente a tres rectas y la recta b intercecta exactamente a 4 rectas. La recta c intercecta exactamente n rectas, con $n \neq 3, 4$. Determine el número de rectas dibujadas en el plano.

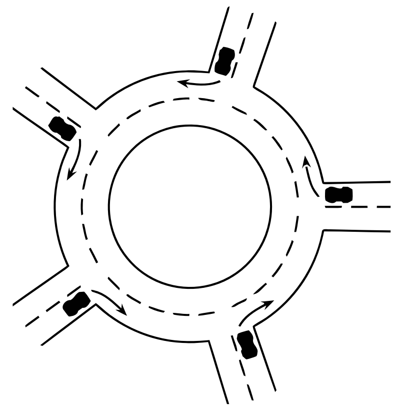
Problema 66. ¿Cuántos pares (x, y) de enteros con $x \leq y$ existen de manera que su producto sea 5 veces la suma de ambos?

Problema 67. Una secuencia comienza como $1, -1, -1, 1, -1$. Después del quinto término, cada término es igual al producto de los dos términos anteriores. Por ejemplo, el sexto término es igual al producto del cuarto término y el quinto término. ¿Cuál es la suma de los primeros 2013 términos?

Problema 68. Cuatro vehículos entran a una rotonda al mismo tiempo, cada uno de ellos desde una dirección diferente. Cada uno de los vehículos maneja por menos de una vuelta por la rotonda, y no hay ninguna pareja de carros que salgan por la misma dirección. ¿Cuántas maneras diferentes hay para que los vehículos salgan de la rotonda?



Problema 69. A la rotonda de la figura, entran cinco autos al mismo tiempo, cada uno por una pista diferente. Cada auto maneja menos de una vuelta por ella y ningún auto sale de la rotonda por la misma dirección que otro. ¿Cuántas diferentes combinaciones hay para que los autos salgan de la rotonda?



Problema 70. Un tipo de entero positivo N es más pequeño que la suma de sus tres divisores más grandes (evidentemente, se excluye el mismo número N). ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?
(A) Ese tipo de números son divisibles por 4.
(B) Ese tipo de números son divisibles por 5.
(C) Ese tipo de números son divisibles por 6.
(D) Ese tipo de números son divisibles por 7.
(E) No existe ese tipo de números.

Problema 71. A partir de una lista de tres números, el procedimiento "cambiasuma" crea una nueva lista mediante la sustitución de cada número por la suma de los otros dos. Por ejemplo, de la lista 3, 4, 6 el "cambiasuma" da 10, 9, 7 y de esta nueva lista el "cambiasuma" da como resultado la lista 16, 17, 19. Si empezamos con la lista 1, 2, 3, ¿Cuántos "cambiasuma" consecutivos son requeridos para obtener el número 2013 en una lista?

Problema 72. ¿Cuántos triángulos hay, cuyos vértices son escogidos de un polígono regular de trece lados y el centro de la circunferencia circunscrita al polígono quede dentro del triángulo?

Problema 73. Un vehículo partió del punto A y anduvo por un camino recto a una velocidad de 50km/h. Luego, a cada hora siguiente un nuevo vehículo parte del punto A a una velocidad 1km/h más rápida que el anterior. El último vehículo (a una velocidad de 100km/h) partió 50 horas después del primero. ¿Cuál es la velocidad del vehículo que va primero en la caravana 100 horas después de que partió el primero?

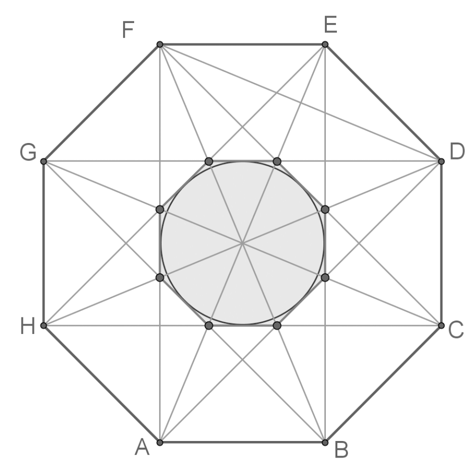
Problema 74. Un jardinero quiere plantar veinte árboles (alerces y robles) en una avenida del parque. Sabiendo que entre dos alerces no pueden haber tres árboles. ¿Cuál es el mayor número de alerces que puede plantar el jardinero?

Problema 75. Iván caminaba por la calle cuando vio un tractor que tiraba de una tubería. Decidiendo medir su longitud Iván caminó al lado de la tubería contra el movimiento del tractor y contó 20 pasos. Luego caminó en la misma dirección que el tractor y contó 140 pasos. Sabiendo que sus pasos miden un metro, Iván fue capaz de conocer la medida de la tubería. ¿Cuánto mide?

Problema 76. ¿Cuál de los siguientes números es el más grande?

(A) 2013 (B) 2^{0+13} (C) 20^{13} (D) 201^3 (E) $20 \cdot 13$

Problema 77. Los lados del octágono regular de la figura miden 10. ¿Cuál es el radio de la circunferencia inscrita en el octágono regular que muestra la figura?



Problema 78. Un prisma tiene 2013 caras. ¿Cuántas aristas tiene el prisma?

Problema 79. La raíz cúbica de 3^{3^3} es igual a:

Problema 80. El año 2013 tiene la propiedad de ser un número formado por los dígitos consecutivos 0, 1, 2 y 3. ¿Cuántos años han pasado desde la última vez que un año ha sido formado por 4 dígitos consecutivos?

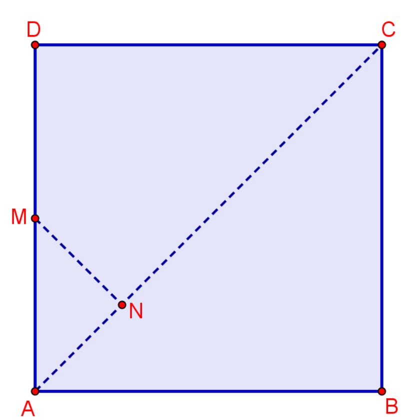
Problema 81. Sea f una función lineal para la cual $f(2013) - f(2001) = 100$. ¿Cuánto es $f(2031) - f(2013)$?

Problema 82. Seis súper héroes capturan a veinte villanos. El primer súper héroe captura un villano, el segundo captura dos villanos y el tercero captura tres. El cuarto súper héroe captura más villanos que cualquiera de los otros cinco héroes. ¿Cuál es el mínimo de villanos que pudo haber capturado el cuarto héroe?

Problema 83. Cuando cierta sustancia se derrite, su volumen se incrementa en $\frac{1}{12}$. ¿En cuánto decrece su volumen cuando vuelve a solidificarse?

Problema 84. ¿Cuántos enteros positivos existen de manera tal que $\dfrac{n}{3}$ y $3n$ sean enteros positivos de tres dígitos?

Problema 85. En la figura $ABCD$ es un cuadrado, M es el punto medio de AD y MN es perpendicular a AC. ¿Cuál es la razón entre el área del triángulo MNC y el área del cuadrado original?.

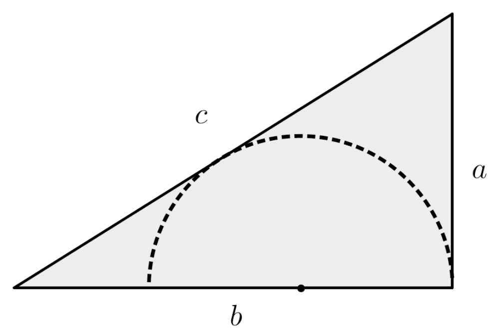


Problema 86. El abuelo Anacleto ha escrito los números del 1 al 120 en 15 filas, como se muestra en el diagrama. ¿Cuál de las columnas (de izquierda a derecha) tiene la mayor suma?

$$\begin{array}{lllll}
1 & & & & \\
2 & 3 & & & \\
4 & 5 & 6 & & \\
\vdots & & & & \\
106 & 107 & 108 & \ldots & 120
\end{array}$$

Problema 87. En veintidós cartas han sido escritos números enteros positivos desde el uno al veintidós. Con estas cartas se han hecho once fracciones. ¿Cuál es la máxima cantidad de dichas fracciones que pueden dar resultados enteros?

Problema 88. La figura siguiente muestra un triángulo rectángulo de lados a, b y c. ¿Cuál es el radio del semicírculo inscrito?



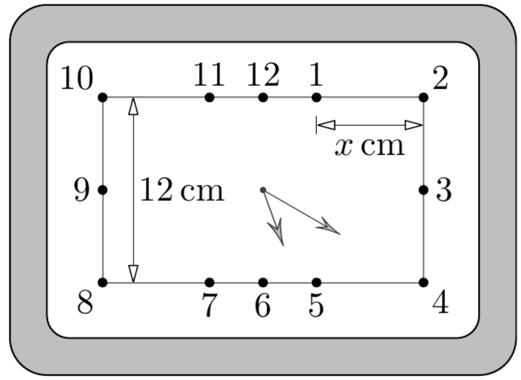
Problema 89. Andrés y Daniel recientemente tomaron parte en una maratón. Después de terminar, se dieron cuenta que Andrés terminó antes que el doble de personas que terminaron antes que Daniel, y que Daniel terminó antes que 1,5 de los corredores que terminaron antes que Andrés. Si Andrés finalizó en el vigésimo primer lugar. ¿Cuántos corredores compitieron en la maratón?

Problema 90. Julian ha escrito un algoritmo con el fin de crear una secuencia de números como

$$a_1 = 1, \quad a_{m+n} = a_n + a_m + n \cdot m$$

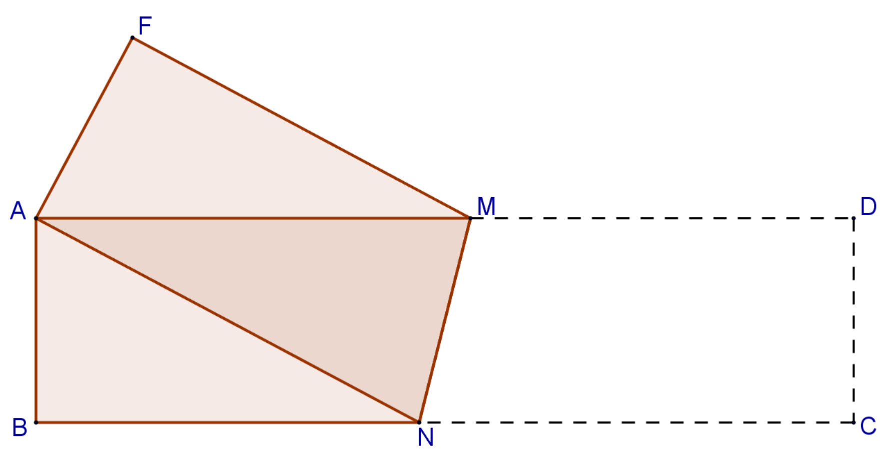
donde m y n son números naturales. Encuentre el valor de a_{2013}.

Problema 91. El reloj del dibujo es rectangular, cada manecilla se mueve a una velocidad constante, como un reloj normal (circular). Si la distancia entre los números 8 y 10 es de 12 cm. Calcular la distancia entre 1 y 2.



Problema 92. Todos los boletos para la primera fila de una función de cine están vendidos. Las sillas están numeradas consecutivamente comenzando desde el 1. Pero al cine llegaron dos personas más con entradas falsificadas para sillas numeradas consecutivamente. La suma de los números de los boletos recaudadas es igual a 857. ¿Cuáles son los posibles números de los boletos falsificados?

Problema 93. Un pedazo de papel rectangular $ABCD$ que mide 4cm $\times$ 16cm se dobla sobre la recta MN de tal forma que el vértice C coincida con el vértice A, como se muestra en la figura. ¿Cuál es el área del pentágono $ABNMF$?



Problema 94. Después de una lección de Álgebra, lo siguiente quedó en la pizarra: el gráfico de la función $y = x^2$ y 2013 rectas paralelas a la recta $y = x$ que cortan al eje y en $1, 2, \dots, 2013$, cada una de las cuales intersecta al gráfico en dos puntos generando 4026 puntos. Calcular la suma de las ordenadas de estos puntos de intersección de las rectas y la parábola.

Problema 95. El abuelo Anacleto matemático jubilado y aventurero suma los primeros n enteros positivos (consecutivos) hasta obtener un número de 3 dígitos donde todos los dígitos son iguales. ¿Cuántos números sumó el abuelo?.

Problema 96. Los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, y 10 están escritos alrededor de un círculo en orden arbitrario. Sumamos todos los números con sus vecinos, obteniendo diez sumas. ¿Cuál es el máximo valor posible para la más pequeña de estas sumas?

Problema 97. ¿Cuántos enteros positivos son múltiplos de 2013 y tienen exactamente 2013 divisores (incluyendo a 1 y al mismo número)?

Problema 98. Juan elige un entero positivo de 5 cifras y borra uno de sus dígitos para convertirlo en un número de 4 cifras. La suma de este número de 4 cifras con el número de 5 cifras es 52713. ¿Cuál es la suma de los dígitos del número original de 5 cifras?

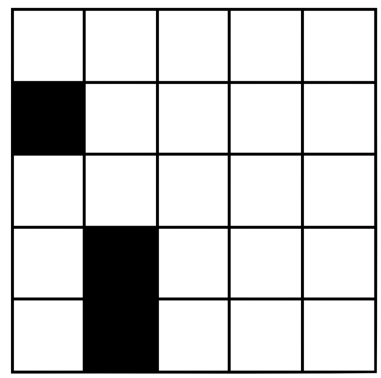
Problema 99. En una isla solo habían dos tipos de personas, los caballeros (que siempre dicen la verdad) y los bribones (que siempre mienten). Conocí dos hombres que vivían allí y le pregunté al más alto si ambos eran caballeros. El respondió, pero no pude darme cuenta de que era cada uno, así que le pregunté al hombre más bajo si el más alto era caballero. Me respondió, y después de eso supe que tipo era cada uno. ¿Eran caballeros o bribones?

(A) Ambos eran caballeros.
(B) Ambos eran mentirosos.
(C) El más alto era caballero y el más bajo era mentiroso.
(D) El más alto era mentiroso y el más bajo era caballero.
(E) No se da suficiente información.

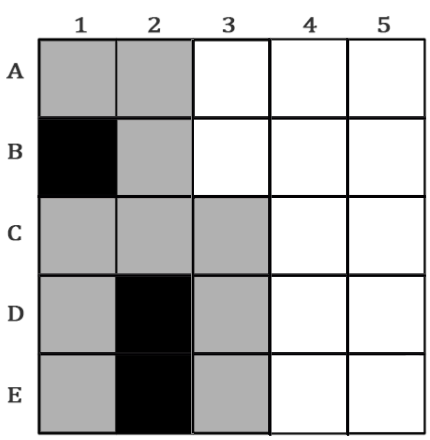
Problema 100. Un cubo esta ubicado en el espacio de manera tal que tres de sus vértices (no todos sobre la misma cara) son $P(3, 4, 1)$, $Q(5, 2, 9)$ y $R(1, 6, 5)$. Encuentra el centro del cubo.

2 Soluciones

Problema 1. Camilo y una amiga están jugando al “Combate Naval” en un tablero de 5×5. Camilo ya ha ubicado 2 barcos, como se muestra en la figura. Todavía tiene que colocar un barco de 3×1 para que cubra exactamente tres celdas. Sabiendo que dos barcos no pueden tener un punto en común. ¿Cuántas posiciones hay para su barco de 3×1?



Solución

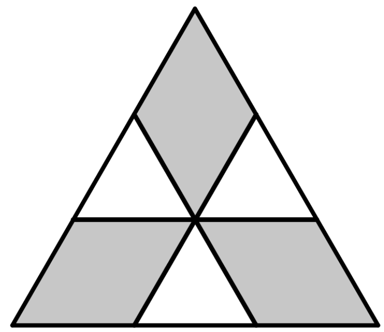


Dado que dos barcos no pueden tener un punto en común, entonces descartamos todas las casillas que están alrededor de cualquier barco, las casillas que no se utilizarán serán sombreadas para descartarlas. Por lo tanto podemos ubicar los barcos en los siguientes tríos de casillas:

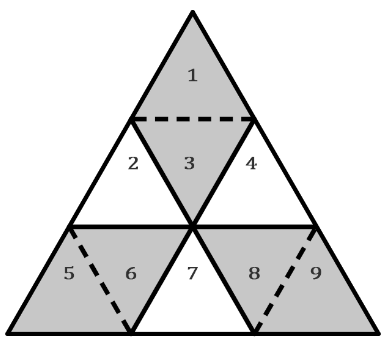
$$(A3, A4, A5);\ (B3, B4, B5);\ (A4, B4, C4);\ (A5, B5, C5);$$
$$(B4, C4, D4);\ (B5, C5, D5);\ (C4, D4; E4) \text{ y } (C5, D5, E5)$$

Así, Camilo tiene 8 posibles posiciones para colocar su barco de 3×1.

Problema 2. En la imagen, el triángulo grande es equilátero y tiene área 9 cm^2. Las rectas son paralelas a los lados y dividen cada lado en 3 partes iguales. ¿Cuál es el área de la parte sombreada?



Solución



Al trazar los segmentos punteados en la figura, se puede notar que los 9 triángulos generados son equiláteros e iguales (congruentes).

Sus alturas son iguales, dado que están entre rectas paralelas que se encuentran a igual distancia (pues dividimos los lados en tres partes iguales).

Además, sus bases son iguales, por la misma razón anterior.

Luego los nueve triángulos tienen la misma área. Finalmente considerando que son 6 los triángulos que forman la parte sombreada, entonces el área de esta es 6 cm^2

Problema 3. Roberto quiere decirle a Karina un número, en el cual el producto de sus dígitos es igual a 24. ¿Cuál es la suma de los dígitos del número más pequeño que Roberto puede decirle a Karina?

Solución

Para determinar el número de Roberto que cumpla con la condición de que la suma de sus dígitos sea la más pequeña, debemos hallar todos los números que tienen por producto de sus dígitos el número 24 y elegir el menor. Para ello determinaremos todos los divisores de 24 de un dígito.

$D\,(24) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$, notemos que existen muchas combinaciones de 4 dígitos $\{2223, 2232, 1831 \ldots\}$, también existen muchas combinaciones de

3 dígitos $\{423, 324, 831\ldots\}$, pero como debemos elegir la combinación que forme el número más pequeño, solamente estudiaremos las combinaciones de 2 dígitos. Por otra parte, el número 1 no modifica el producto, solo aumenta la suma de los dígitos por lo que lo descartaremos.

Las combinaciones posibles de dos dígitos que no contienen unos son.

- Con 3 y 8: 38, 83
- Con 4 y 6: 46, 64

Luego, el menor número es 38 y la suma de sus dígitos es $3 + 8 = 11$.

Problema 4. Laura, Iván, Valeria y Cata quieren estar juntos en una foto. Cata y Laura son las mejores amigas y quieren estar juntas. Iván quiere estar junto a Laura porque le gusta. ¿De cuántas formas pueden acomodarse para la foto?

Solución

Como Cata y Laura quieren estar juntas e Iván quiere estar junto a Laura, entonces las únicas dos posibles posiciones para ellos tres son:

$$CLI \qquad ILC$$

Por lo tanto en cada una de las posiciones Valeria puede ubicarse o a la izquierda o a la derecha. Luego las posibles posiciones son:

$$CLI - V \qquad V - CLI \qquad ILC - V \qquad V - ILC$$

En total hay 4 formas de acomodarse para la foto.

Problema 5. En el colegio de animales hay 3 gatos, 4 patos, 2 gansos y varios corderos tomando clases. El profesor búho contó las patas de todos sus alumnos en su clase y obtuvo 44 patas. ¿Cuántos corderos hay en la clase?

Solución

Como cada gato tiene 4 patas entonces en 3 gatos contaremos $3 \cdot 4 = 12$ patas. Como cada pato tiene 2 patas entonces en 4 patos contaremos $4 \cdot 2 = 8$ patas. Como cada ganso tiene 2 patas entonces en 2 ganso contaremos $2 \cdot 2 = 4$ patas.

es decir, en total tenemos $12+8+4 = 24$ patas, luego deberíamos contar 20 patas de cordero para llegar a las 44 patas que contó el profesor búho, y como cada cordero tiene 4 patas, entonces hay 5 corderos en clases pues $5 \cdot 4 = 20$.

Problema 6. Un globo lleno de Helio puede alzar una canasta que contiene cosas que pesan a lo más 80 kilos. Dos globos llenos de Helio pueden alzar la misma canasta que contiene cosas que pesan a lo más 180 kilos. ¿Cuánto pesa la canasta?

Solución

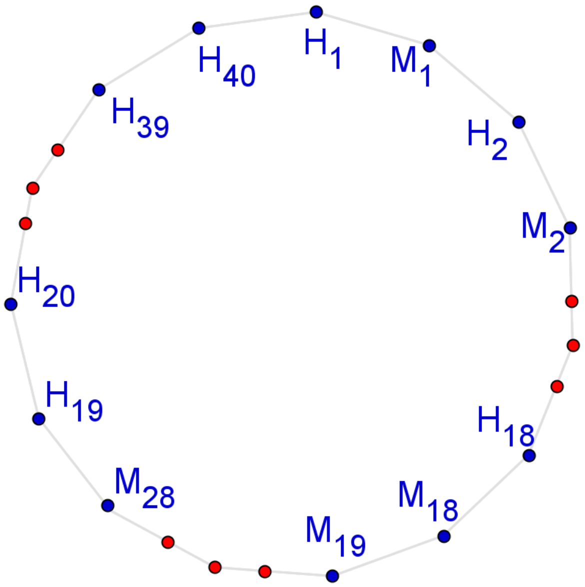
Notemos que:

1 globo soporta el peso de:	1 canasta	+	80 kilos de contenido (*)
2 globos soportan el peso de :	1 canasta	+	180 kilos de contenido (**)

Podemos deducir en (*) que 2 globos también pueden soportar 2 canastas con 160 kilos de contenido distribuido entre ambas. Luego por (**) una canasta debe pesar 20 kilos.

Problema 7. Los nietos, nietas, bisnietos y bisnietas del abuelo Anacleto juegan a la ronda, en total 40 niños y 28 niñas forman un círculo, tomados de la mano. Exactamente 18 niños dan su mano izquierda para una de las niñas. ¿Cuántos niños dan su mano derecha a una chica?

Solución



Pensemos en un arreglo posible para dicha ronda, como se muestra en el dibujo los primeros 36 nietos son ubicados en pareja, es decir, 18 niñas y 18 niños donde el niño H_1 da su mano izquierda a la niña M_1, el niño H_2 da su mano izquierda a la niña M_2 y así sucesivamente hasta que el niño H_{18} da su mano izquierda a la niña M_{18}.

Ahora para evitar que un niño vuelva a dar su mano izquierda a una niña ubicaremos las 10 niñas restantes inmediatamente después de la niña M_{18}, hasta ubicar a la última niña, M_{28}. Por último, ubicamos los niños restantes tal que el niño H_{19} dé su mano derecha a la niña M_{18} y su mano izquierda al niño H_{20}, hasta que el niño H_{40} de su mano izquierda al niño H_1.

De este modo, de los 18 niños ubicados en las 18 primeras parejas, solo 17 dan su mano derecha a una niña (pues H_1 da su mano derecha H_{40}). Por otra parte el niño H_{19} también da su mano derecha a la niña M_{28}. Finalmente solo 18 niños dan la mano derecha a una niña.

Problema 8. Escribe todas las secuencias de números enteros consecutivos que contengan al número 7, de forma tal que la razón entre números impares y números pares sea $\frac{2}{3}$.

Solución

Notemos que una razón es la comparación de dos cantidades, por ejemplo si en tu curso hay 16 niños y 20 niñas, la razón entre los niños y las niñas es $\frac{16}{20}$ o bien $\frac{4}{5}$.

Dado que la razón entre números impares y pares es:

$$\frac{\text{números impares}}{\text{números pares}} = \frac{2}{3}$$

Por cada cinco enteros consecutivos que contengan al número 7 debe haber 2 números impares y 3 números pares. Como el número 7 es impar, y queremos tener dos impares, debemos tener en la secuencia un impar más (el 5 o el 9).

Observemos además que en una secuencia de números consecutivos la diferencia entre la cantidad de números impares y pares es a lo más 1 (cuando hay dos pares en los extremos de la secuencia o dos impares en los extremos de la secuencia), por lo tanto es imposible tener otras cantidades que cumplan con la razón, por ejemplo no se pueden tener en una lista de números consecutivos cuatro impares y dos pares.

Luego se tiene que las únicas secuencias posibles son los conjuntos $\{4, 5, 6, 7, 8\}$ y $\{6, 7, 8, 9, 10\}$.

Problema 9. Miguel pensó en un número positivo, lo multiplicó por sí mismo, le sumó 1, multiplicó el resultado por 10, le sumó 3, luego multiplicó el resultado por 4 y después le sumó 1. Su último resultado fue 2013. ¿En qué número pensó Miguel?

Solución

Sabemos que:

- Miguel pensó en un número positivo, lo multiplicó por sí mismo, le sumó 1, multiplicó el resultado por 10, le sumó 3, luego multiplicó el resultado por 4. Su último resultado fue 2012.
- Miguel pensó en un número positivo, lo multiplicó por sí mismo, le sumó 1, multiplicó el resultado por 10, le sumó 3. Su último resultado fue 503.
- Miguel pensó en un número positivo, lo multiplicó por sí mismo, le sumó 1, multiplicó el resultado por 10. Su último resultado fue 500.
- Miguel pensó en un número positivo, lo multiplicó por sí mismo, le sumó 1. Su último resultado fue 50.
- Miguel pensó en un número positivo, lo multiplicó por sí mismo. Su resultado fue 49.

Luego el número que pensó Miguel es 7.

De otro modo podemos organizar la información en la siguiente tabla:

Enunciado	Resultado
Lo multiplicó por sí mismo	$n \cdot n$
Le sumó 1	$n \cdot n + 1$
Multiplicó el resultado por 10	$10 \cdot (n \cdot n + 1)$
Le sumó 3	$10 \cdot (n \cdot n + 1) + 3$
Multiplicó el resultado por 4	$4 \cdot [10 \cdot (n \cdot n + 1) + 3]$
Le sumó 1	$4 \cdot [10 \cdot (n \cdot n + 1) + 3] + 1$
Último Resultado	$4 \cdot [10 \cdot (n \cdot n + 1) + 3] + 1$
Último resultado fue 2013	$4 \cdot [10 \cdot (n \cdot n + 1) + 3] + 1 = 2013$

Resolvamos esta última ecuación:

$$
\begin{aligned}
4 \cdot [10 \cdot (n \cdot n + 1) + 3] + 1 &= 2013 \quad / - 1 \\
4 \cdot [10 \cdot (n \cdot n + 1) + 3] &= 2012 \quad / \cdot \frac{1}{4} \\
10 \cdot (n \cdot n + 1) + 3 &= 503 \quad / - 3 \\
10 \cdot (n \cdot n + 1) &= 500 \quad / \cdot \frac{1}{10} \\
n \cdot n + 1 &= 50 \quad / - 1 \\
n \cdot n &= 49 \\
n &= 7
\end{aligned}
$$

Luego, un número que multiplicado por sí mismo dé 49, se puede inferir que el número buscado es $n = 7$. Por lo tanto Miguel pensó en el número 7.

Problema 10. Las masas de sal y agua en el mar de Pitágoras están en la razón 7 : 193. ¿Cuántos kilogramos de sal hay en 1000 kilogramos de agua de mar?

Solución

Consideremos lo siguiente, dada la razón entre las masas de sal y agua, se tiene que por cada 7 kilos de sal hay 193 kilos de agua y en total $7+193 =$

200 kilos de agua de mar. En consecuencia por cada 200 kilos de agua de mar, hay 7 kilos son de sal.

Luego, como $1000 = 200 \cdot 5$, habrá $7 \cdot 5 = 35$ kilos de sal.

Otra forma de abordar el problema es considerando la siguiente proporción.

$$\frac{7}{200} = \frac{kilos\ de\ sal}{1000}$$
$$kilos\ de\ sal = \frac{7 \cdot 1000}{200}$$

Por lo tanto en 1000 kilogramos de agua de mar habrán 35 kilos de sal.

Problema 11. Un saco contiene bolitas de cinco colores diferentes. Dos son rojas, tres son azules, diez son blancas, cuatro son verdes y tres son negras. ¿Cuál es el número más pequeño de bolitas que se debería sacar del saco para asegurarse de sacar al menos dos bolitas del mismo color?

Solución

Como tenemos bolitas de 5 colores distintos, lo peor que puede ocurrir al sacar 5 es que todas salgan de distinto color (azul, blanca, verde, negra y roja), por lo que debemos sacar 6 bolitas, de este modo nos aseguramos que se repita una. Por lo tanto para poder estar seguro de tener 2 bolitas de un mismo color es necesario sacar 6 bolitas.

Problema 12. Sabiendo que $\dfrac{1111}{101} = 11$, encontrar el valor de $\dfrac{3333}{101} + \dfrac{6666}{303}$

Solución

Al reescribir $\dfrac{3333}{101}$, se tiene que:

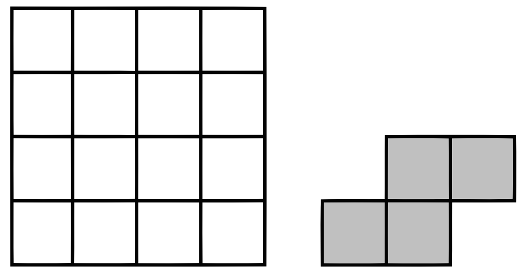
$$\frac{3333}{101} = \frac{3 \cdot 1111}{101} = 3 \cdot \frac{1111}{101} = 3 \cdot 11 = 33$$

Por otra parte, al reescribir $\dfrac{6666}{303}$, se tiene que:

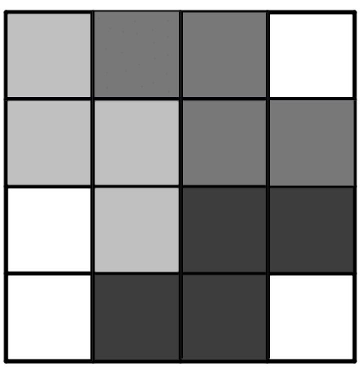
$$\frac{6666}{303} = \frac{6 \cdot 1111}{3 \cdot 101} = \frac{6}{3} \cdot \frac{1111}{101} = 2 \cdot 11 = 22$$

Finalmente la expresión $\dfrac{3333}{101} + \dfrac{6666}{303}$ equivale a sumar $33 + 22 = 55$.

Problema 13. Anita tiene una hoja cuadrada cuadriculada como la que se muestra en la figura. A partir de dicha hoja ella recorta figuras por las líneas del cuadriculado como la que se muestra en la imagen de la derecha. Después de realizar los recortes, ¿cuál es la mínima cantidad posible de cuadraditos restantes?



Solución



En un cuadriculado de 4×4 (16 cuadrados), a lo más podrían encajar 4 piezas pequeñas compuestas de 4 cuadrados (cuatriminos).

Observemos que si intentamos cubrir una de las esquinas del cuadrado mayor, por ejemplo la esquina superior izquierda (con la pieza gris clara), es imposible poder cubrir la esquina inferior izquierda con otra pieza de la forma pedida. Por lo tanto, no caben 4 piezas, por lo que deberíamos intentar con 3 piezas, de este modo obtenemos un armado como el que muestra la figura (este caso no es único).

Finalmente, la cantidad de cuadrados restantes (sin utilizar) son 4.

Problema 14. La Sra. Margarita compró cuatro choclos para cada miembro de su familia de cuatro personas. En la tienda recibió el descuento que le ofrecía la tienda. Oferta de choclos: 1 choclo 200 pesos. Cada 5 choclos el sexto es gratis ¿Cuánto tanto pagó?

Solución

Como son 4 choclos para cada uno de los 4 miembros de la familia, necesita $4 \cdot 4 = 16$ choclos. Como por cada 5 choclos le dan un sexto choclo, si compra 10 le dan 2 de regalo, luego tendrá $10 + 2 = 12$ choclos, así comprando 4 choclos más se llega a los 16 choclos requeridos, por lo tanto debe pagar 14 choclos ($14 \cdot 200 = \$2800$).

Problema 15. Alex enciende una vela cada diez minutos. Cada vela encendida tiene una duración de cuarenta minutos. ¿Cuántas velas están encendidas después de cincuenta y cinco minutos a partir del momento en que Alex enciende la primera vela?

Solución

Como una vela dura 40 minutos, y se enciende una cada 10 minutos, podemos realizar el siguiente análisis

- Al comenzar tenemos una vela encendida (minuto 0).
- Al minuto 10 encendemos la segunda vela (a la primera vela le quedan 30 minutos).
- Al minuto 20 encendemos la tercera vela (a la primera vela le quedan 20 minutos).
- Al minuto 30 encendemos la cuarta vela (a la primera vela le quedan 10 minutos).
- Al minuto 40 encendemos la quinta vela (la primera vela se apaga).

Desde este momento siempre habrá 4 velas encendidas, pues en el minuto 50 encendemos la sexta vela, pero se habrá apagado la primera y la segunda.

Finalmente en el minuto 55 estarán encendidas 4 velas.

Problema 16. El número promedio de hijos en cinco familias no puede ser:

(A) $0,2$ (B) $1,2$ (C) $2,2$ (D) $2,4$ (E) $2,5$

Solución

El promedio de niños en 5 familias equivale a la suma de todos los niños de las 5 familias dividida en el total de familias (5). Debe suceder que el total de niños no sea un número decimal, pues no se puede tener, por ejemplo, $1,4$ niños o $2,9$ niños en total. Sea a_1, el número de niños en la familia 1, a_2, el número de niños en la familia 2, ..., a_5, el número de niños en la familia 5.

$$\text{Promedio} = \frac{\mathrm{a}_1 + \mathrm{a}_2 + \mathrm{a}_3 + \mathrm{a}_4 + \mathrm{a}_5}{5}$$

por lo tanto, el total de niños es 5 veces el promedio.

$$\mathrm{a}_1 + \mathrm{a}_2 + \mathrm{a}_3 + \mathrm{a}_4 + \mathrm{a}_5 = 5 \cdot \text{Promedio}$$

- Para el Promedio $= 0,2$ se tiene que la cantidad de niños es $5 \cdot 0,2 = 1$
- Para el Promedio $= 1,2$ se tiene que la cantidad de niños es $5 \cdot 1,2 = 6$
- Para el Promedio $= 2,2$ se tiene que la cantidad de niños es $5 \cdot 2,2 = 11$
- Para el Promedio $= 2,4$ se tiene que la cantidad de niños es $5 \cdot 2,4 = 12$
- Para el Promedio $= 2,5$ se tiene que la cantidad de niños es $5 \cdot 2,5 = 12,5$

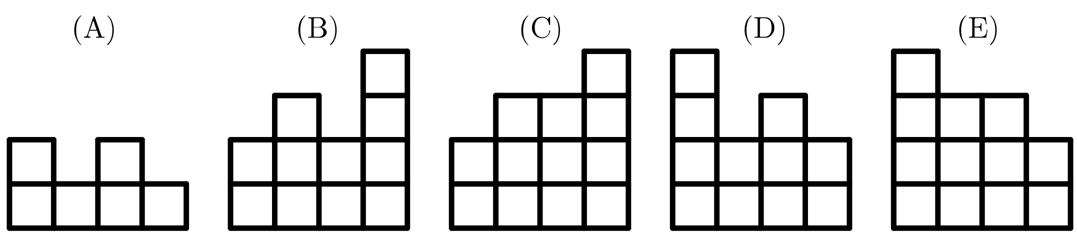
Luego no es posible tener $12,5$ niños en total, este promedio no puede ser $2,5$.

Problema 17. Juan ha construido un edificio de cubos sobre una rejilla de 4×4. La imagen muestra el número de cubos que está sobre cada celda de la rejilla. Cuando Juan la mira desde atrás, ¿cuál de estas imágenes ve?

Vista Trasera

4	2	3	2
3	3	1	2
2	1	3	1
3	3	1	2

Vista Frontal



Solución

Notemos que al mirarlo desde la vista trasera cambiará nuestra orientación, lo que desde el frente está a la derecha, en la vista trasera estará a la izquierda. Es decir, mirado desde atrás veremos desde izquierda a derecha 2, luego 3, luego 3 y luego 4. Notemos que en la tercera columna al mirar desde la vista trasera veremos primero dos cubos, pero atrás de ellos hay 3 cubos, por lo que la torre que se ve tiene altura 3. Luego la vista trasera del edificio será la vista (C).

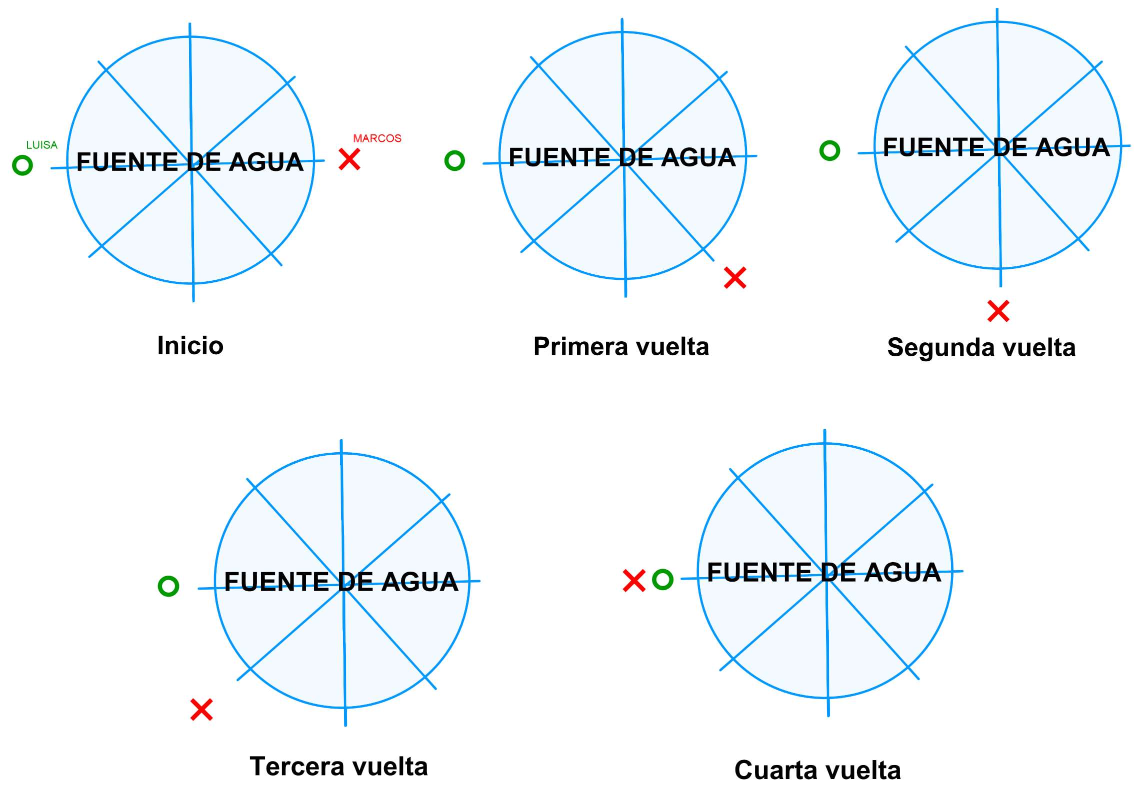
Problema 18. Marcos y Luisa están parados en lados opuestos de una fuente circular. Empiezan a correr en el sentido de las agujas del reloj alrededor de la fuente. La rapidez de Marcos es $\frac{9}{8}$ la rapidez de Luisa. ¿Cuantas vueltas ha dado Luisa antes de que Marcos la alcance por primera vez?

Solución

Como la velocidad de Marcos es $\frac{1}{8}$ más que la velocidad de Luisa, cuando Luisa ha dado 8 vueltas, Marcos ha dado 9 vueltas, ya que en cada vuelta Marcos avanza $\frac{1}{8}$ más.

Cuando Luisa da su primera vuelta, Marcos ya la ha dado y ha avanzado $\frac{1}{8}$ más que Luisa. Luego al dar Luisa su segunda vuelta, Marcos ya la ha dado y ha avanzado $\frac{1}{8}$ más, esto quiere decir que Marcos desde el inicio hasta la segunda vuelta ya ha avanzado $\frac{2}{8}$ más que Luisa. Sin pérdida de la generalidad, se puede notar que en la tercera vuelta de Luisa, Marcos ha dado su vuelta y ha avanzado $\frac{3}{8}$ más que Luisa. A la cuarta vuelta de Luisa, Marcos ha dado su vuelta y ha avanzado $\frac{4}{8}$ más desde su punto de partida, pero $\frac{4}{8}$ equivale a $\frac{1}{2}$.

Esto nos indica que cuando Luisa cumple su cuarta vuelta, Marcos está frente a su punto de partida, donde se encuentra Luisa, por lo tanto Marcos se encuentra con Luisa en la cuarta vuelta. Las siguientes imágenes detallan el proceso.



Problema 19. Los enteros positivos x, y, z satisfacen que $x \cdot y = 14$, $y \cdot z = 10$ y que $z \cdot x = 35$ ¿Cuál es el valor de $x + y + z$?

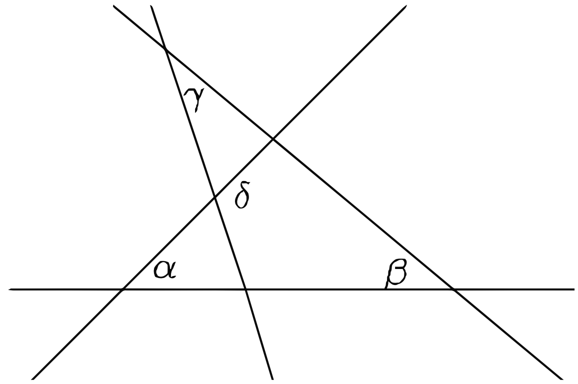
Solución

Debemos encontrar x, y y z, tales que $x \cdot y = 14$, $y \cdot z = 10$ y $z \cdot x = 35$. Para ello comenzaremos por la primera condición.

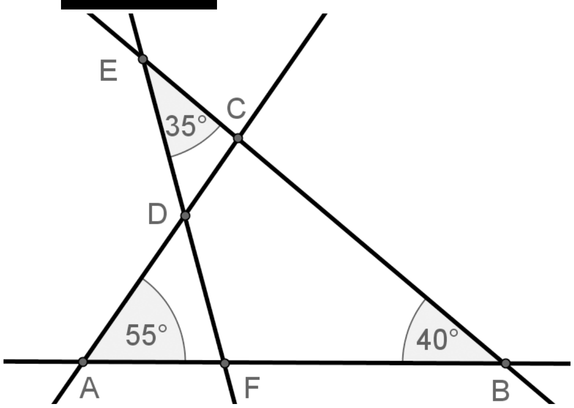
- Como $x \cdot y = 14$, entonces x e y son divisores de 14, por lo tanto tanto x e y pueden tomar los valores siguientes: 1, 2, 7, 14.
- Como $y \cdot z = 10$, entonces y y z son divisores de 10, por lo tanto y y z pueden tomar los valores siguientes: 1, 2, 5, 10.
- Como $z \cdot x = 35$, entonces z y x son divisores de 35, por lo tanto z y x pueden tomar los valores siguientes: 1, 5, 7, 35.

Si consideramos la primera y la segunda condición, el valor que se repite entre las soluciones para y es 2 , por lo tanto elegimos $y = 2$. Si consideramos la primera y la tercera condición, el valor que se repite entre las soluciones para x es 7, por lo tanto elegimos $x = 7$. Si consideramos la segunda y tercera condición, el valor que se repite entre las soluciones para z es 5, por lo tanto elegimos $z = 5$. Luego $x + y + z = 7 + 2 + 5 = 14$.

Problema 20. En el diagrama, $\alpha = 55°$, $\beta = 40°$, y $\gamma = 35°$. ¿Cuál es el valor de δ?



Solución



En el triángulo FBE el ángulo en $\measuredangle EFB$ es $105°$, por lo tanto el ángulo $\measuredangle EFA$ es $75°$ y en consecuencia el ángulo $\measuredangle ADF$ es $50°$, con lo que el ángulo $\measuredangle CDF = \delta = 130°$.

De otra manera, para calcular el ángulo $\measuredangle EFB$ se tiene que:

$$\begin{aligned} \measuredangle EFB + \gamma + \beta &= 180 \\ \measuredangle EFB + 35 + 40 &= 180 \\ \measuredangle EFB &= 105 \end{aligned}$$

Es decir, se tiene que el ángulo $\measuredangle EFA$, es el suplemento del ángulo $\measuredangle EFB$, pues la suma de ambos es $180°$. Por lo tanto, si el ángulo $\measuredangle EFB$ mide $105°$, entonces el ángulo $\measuredangle EFA$ mide $75°$.

Ya determinando el ángulo $\measuredangle EFA$, podemos calcular el ángulo $\measuredangle ADF$. Al sumar α con en ángulo $\measuredangle EFA$ y con el ángulo $\measuredangle ADF$, su suma debe dar 180° por ser ángulos interiores de un triángulo. Luego

$$\begin{aligned} \measuredangle EFA + \alpha + \measuredangle ADF &= 180 \\ 75 + 55 + \measuredangle ADF &= 180 \\ \measuredangle ADF &= 50 \end{aligned}$$

Finalmente el ángulo δ es el suplemento del ángulo $\measuredangle ADF$, pues la suma de ambos es 180°. En conclusión, se tiene que

$$\begin{aligned} \delta + \measuredangle ADF &= 180 \\ \delta &= 180 - 50 \\ \delta &= 130 \end{aligned}$$

Problema 21. Vanessa escribió varios números enteros consecutivos. ¿Cuál de los siguientes no puede ser el porcentaje de números impares que hay en la lista de Vanessa?

(A) 40 % (B) 45 % (C) 48 % (D) 50 % (E) 60 %

Solución

Como los números son consecutivos, solo hay tres posibilidades:

1. Que se escriba una cantidad par de números, con lo cual habrá igual cantidad de pares que de impares (50 % cada uno). Luego 50 % es posible.

2. Que se escriba una cantidad impar de números $(2k + 1)$, k números pares y $k + 1$ números impares en el caso de comenzar con un número impar.

3. Que se escriba una cantidad impar de números $(2k+1)$, $k+1$ números pares y k números impares en el caso de comenzar con un número par.

Entonces el problema se reduce a calcular el porcentaje que es k de $2k + 1$ o bien el porcentaje que es $k + 1$ de $2k + 1$, es decir:

$$\frac{100k}{2k+1} = x\,\% \quad \text{o bien} \quad \frac{100(k+1)}{2k+1} = x\,\%$$

Para cualquier valor de k , $100k$ y $100(k+1)$ es par, y como el denominador es impar, el resultado siempre es par con lo que se descarta el 45 %.

Otra forma de encontrar la solución es probar de acuerdo a cada alternativa.

Cuando nos dicen que el porcentaje de números impares es 40 %, quiere decir que $\frac{40}{100}$ es el porcentaje de números impares, ahora si simplificamos esa expresión obtendremos que $\frac{2}{5}$ es el porcentaje de números impares, lo que quiere decir que si consideramos 5 números consecutivos, es posible verificar que hay 2 impares entre ellos. En efecto consideremos el caso en donde el primer número sea par, por ejemplo 2, 3, 4, 5, 6, en donde 3 y 5 son nuestros números impares. Por lo tanto 2 números impares de 5 números consecutivos representa exactamente el 40 %.

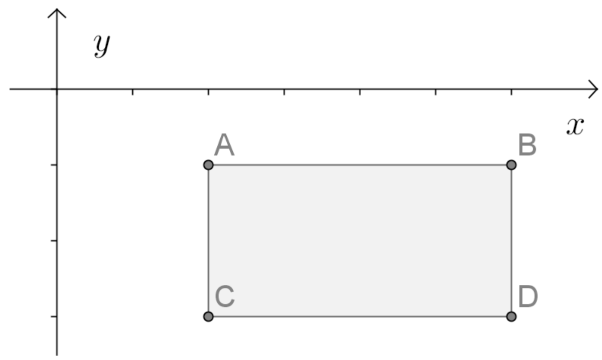
Sucede lo mismo si el porcentaje de números impares es el 60 %. Escrito como razón es $\frac{3}{5}$, por lo que basta considerar 5 enteros consecutivos, tales que el primero de ellos sea impar y se obtendrá la respuesta.

Verifiquemos si es posible contruir la lista con el 48 % de impares. En efecto, si consideramos que la representación de 48 % equivale a $\frac{48}{100} = \frac{12}{25}$, entonces de 25 enteros consecutivos cualesquiera, 12 de ellos son impares. Por ejemplo, considere todos los números desde el 2 hasta el 26, donde los números impares serán 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25. En total 12. Luego, este caso también es posible.

Consideremos la situación cuando el porcentaje de números impares es el 50 % de los números consecutivos. Basta considerar, por ejemplo, 10 enteros consecutivos, sí o sí 5 de ellos serán pares y los restantes 5 serán impares.

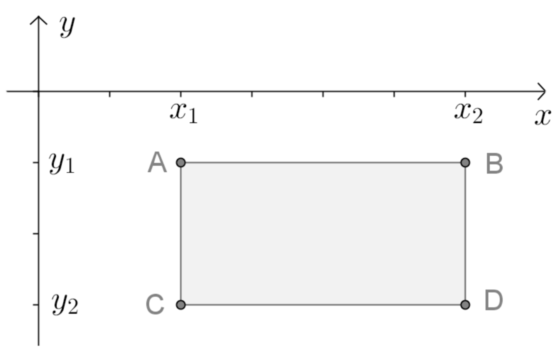
Verifiquemos que no es posible que dado una cantidad de números consecutivos, el 45 % de ellos sean impares. En efecto, se tiene que $45\,\% = \frac{45}{100} = \frac{9}{20}$. Lo que quiere decir que de 20 enteros consecutivos, 9 de ellos son impares y los restantes 11 son pares. Si considera 20 enteros consecutivos cualesquiera, el lector podrá percatarse que siempre 10 serán impares y 10 serán pares.

Problema 22. Los lados del rectángulo $CDBA$ son paralelos a los ejes coordenados. $CDBA$ está debajo del eje X y a la derecha del eje Y, como se muestra en la figura. Las coordenadas de los cuatro puntos A, B, C y D son todas números enteros.



Para cada uno de estos puntos calculamos el valor $\dfrac{coordenada\ y}{coordenada\ x}$ ¿Cuál de los cuatro puntos da el menor valor?.

Solución



Como se trata de encontrar el mínimo valor de una fracción sabemos que para fracciones positivas, mientras menor sea el numerador menor será la fracción (con iguales denominadores) y que mientras mayor sea el denominador menor será la fracción (con iguales numeradores).

Sin embargo estamos en el caso donde el numerador es negativo, entonces sabemos que mientras menor sea el numerador menor será la fracción (con iguales denominadores) y que mientras menor sea el denominador menor será la fracción (con iguales numeradores).

De esta manera, debemos elegir el menor numerador entre y_1 e y_2, por lo que elegimos y_2. Luego, los candidatos son C y D, y ahora elegimos el menor denominador entre x_1 y x_2, es decir, x_1, por lo que los candidatos son A y C.

Finalmente, C es el punto que da el menor valor.

Problema 23. Todos los enteros positivos de cuatro cifras que tienen los mismos dígitos que el número 2013 están escritos en la pizarra en orden creciente. ¿Cuál es la diferencia numérica más grande que hay entre dos números vecinos en la pizarra?

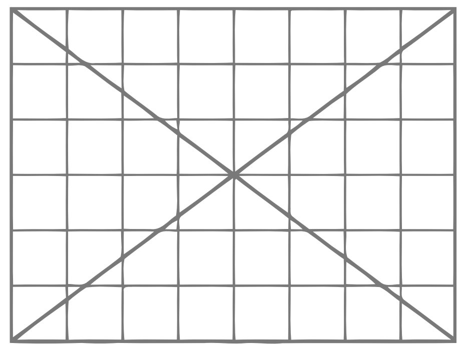
Solución

Determinemos, en orden creciente, todos los números de cuatro cifras que podemos formar con los dígitos de 2013.

1023, 1032, 1203, 1230, 1302, 1320
2013, 2031, 2103, 2130, 2301, 2310
3012, 3021, 3102, 3120, 3201, 3210

Notemos que al pasar de 1320 a 2013 y de 2310 a 3012 se producen las mayores diferencias. Luego para el primer caso, 1320 y 2013, la diferencia entre ellos es 693. Para el segundo caso, 2310 y 3012, la diferencia entre ellos es 702. Luego la mayor diferencia es entre 2310 y 3012.

Problema 24. En la rejilla de 6×8 que se muestra, 24 de las celdas no son interceptadas por una de las diagonales. Cuando se dibujan las diagonales de una rejilla de 6×10, ¿Cuantas celdas no son interceptadas por las diagonales?



Solución

Notemos que al trazar la diagonal de una cudrícula de $n \times m$ esta debe cortar un cuadrado de cada filas (n cuadrados por fila) y un cuadrado de cada columna (m cuadrados por columna). La diagonal debe cruzar $n+m-1$ cuadrados, restamos 1 pues estamos contando el vértice superior dos veces.

En nuestro caso, la diagonal cortaría $8+6-1=13$ cuadrados, pero por tener una cantidad par de columnas y de filas, la diagonal cruzará por el vértice común de los cuatro cuadrados centrales por lo que no cortará al cuadrado adyacente, por lo que (restamos nuevamente 1, luego cortará 12 cuadrados en lugar de 13).

Lo mismo ocurrirá en un rectángulo de 6×10, es decir, la diagonal cortará $6+10-1-1=14$ cuadraditos. Como trazamos las dos diagonales se cortarán 28 cuadraditos. Como la cuadrícula de 6×10 tiene 60 cuadraditos, no se cortarán 32 de ellos.

Problema 25. Sea S el número de cuadrados entre los enteros 1 y 2013^6. Sea Q el número de cubos entre los mismos números. ¿Cuál de las siguientes alternativas es verdadera?:

(A) $S = Q$ (B) $2S = 3Q$ (C) $3S = 2Q$
(D) $S = 2013Q$ (E) $SSS = QQ$

Solución

El número de cuadrados entre 1 y $2013^6 = \left(2013^3\right)^2$ es claramente 2013^3, es decir, $S = 2013^3$.

El número de cubos entre 1 y $2013^6 = \left(2013^2\right)^3$ es claramente 2013^2, es decir, $Q = 2013^2$.

Por lo tanto, como $2013^3 = 2013 \cdot 2013^2$, entonces $S = 2013 \cdot Q$.

Problema 26. Andrés, Beatriz, Kathy, Daniela y Eduardo nacieron el 20/02/2001, 12/03/2000, 20/03/2001, 12/04/2000 y 23/04/2001 (día, mes, año). Andrés y Eduardo nacieron el mismo mes. Además, Beatriz y Kathy nacieron el mismo mes. Andrés y Kathy nacieron el mismo día de meses diferentes. Además Daniela y Eduardo nacieron el mismo día pero en meses distintos ¿Cuál de los niños es el más joven?

Solución

Sabemos por el enunciado que:

- Andrés y Eduardo nacieron en el mismo mes. Así también Beatriz y Katherine nacieron en el mismo mes. Por lo tanto Daniela fue quien nació en un mes que no se repite (20/02/2001).

- Andrés y Katherine nacieron en el mismo día pero en meses distintos. Así también Daniela y Eduardo nacieron el mismo día pero en meses distintos. Por lo tanto Beatriz nació un día diferente al de los restantes (23/04/2001).

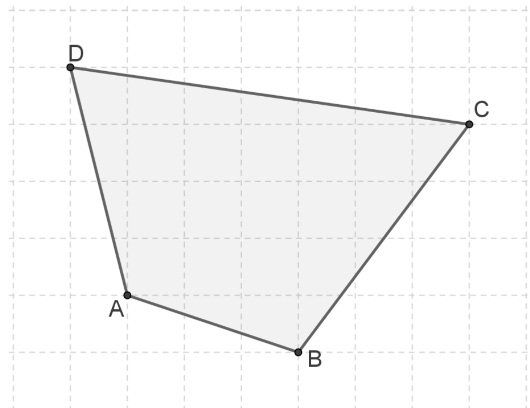
- Por otra parte, como Daniela y Eduardo nacieron el mismo día pero en meses distintos, como Daniela nació un día 20, entonces Eduardo nació también un día 20, por lo tanto Eduardo nació el 20/03/2001.

- Ahora como Andrés y Eduardo nacieron en el mismo mes, Andrés nació el 12/03/2000. Finalmente se tiene que Katherine nació en la fecha restante, vale decir que Katherine nació el 12/04/2000.

Ordenando la información se tiene que: Andrés nació el 12/03/2000, Beatriz nació el 23/04/2001, Katherine nació el 12/04/2000, Daniela nació el 20/02/2001, Eduardo nació el 20/03/2001, luego, el más joven de ellos es Beatriz.

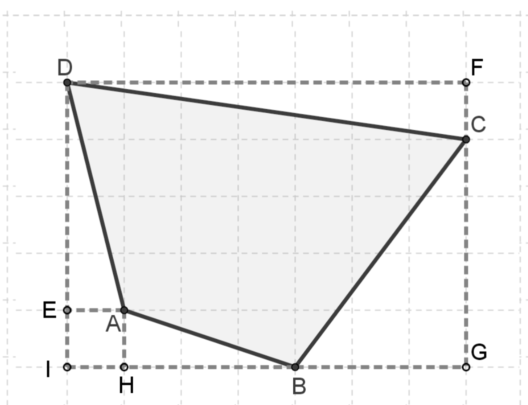
.

Problema 27. La figura muestra un cuadrilátero sombreado ABCD dibujado sobre un geoplano. Cada celda del geoplano tiene un lado de 2cm. ¿Cuál es el área del cuadrilátero ABCD?



Solución

Completamos el rectángulo $DIGF$ de $14 \times 10 = 140u^2$ y le quitamos los cuatro triángulos y el cuadradito pequeño, de este modo obtendremos el área de la región $ABCD$.

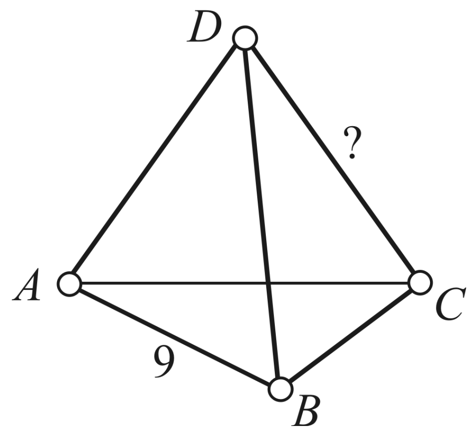


- $(\triangle AHB) = \dfrac{6 \cdot 2}{2} = 6u^2$
- $(\triangle BGC) = \dfrac{6 \cdot 8}{2} = 24u^2$
- $(\triangle DFC) = \dfrac{14 \cdot 2}{2} = 14u^2$
- $(\triangle DEA) = \dfrac{2 \cdot 8}{2} = 8u^2$
- $(\square EIHA) = 2 \cdot 2 = 4u^2$

Luego el área del cuadrilátero sombreado $ABCD$ es:

$$140 - (6 + 24 + 14 + 8 + 4) = 84u^2$$

Problema 28. Cada uno de los cuatro vértices y seis aristas de un tetraedro está marcado con uno de los diez números $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11$ (se omite el 10). Cada número se usa una única vez. Por cada dos vértices del tetraedro, la suma de estos números en los vértices es el número de la arista que los conecta. La arista AB está marcada con un 9, ¿Qué número se usa para marcar la arista CD?



Solución

Posibles aristas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	11
Posibles vértices	1	2	3	4	5	6	7	8	9	11

Observemos que como las aristas son el resultado de la suma de dos vértices, estas no pueden ser 1 ni 2. Además, en cada vértice concurren 3 aristas, por lo que 11, 9, 8 no pueden etiquetar algún vértice, pues el 8 a lo más podrá unirse con el 1 o con el 3 (formando solo dos aristas) , el 9 a lo más puede unirse con el 2 (formando solo una arista) y el once no genera ninguna arista, por lo tanto $11, 9, 8$ son aristas.

Posibles aristas	~~1~~	~~2~~	3	4	5	6	7	**8**	**9**	**11**
Posibles vértices	**1**	**2**	3	4	5	6	7	~~8~~	~~9~~	~~11~~

Como 1 y 2 son vértices, y dos vértices definen una arista, entonces $1 + 2 = 3$ corresponde a una arista. Por otra parte 4 no puede ser arista pues $4 = 1 + 3$ y 3 es arista, entonces 4 es vértice. Si 4 es vértice, entonces $1 + 4 = 5$, $2 + 4 = 6$ resultan ser aristas.

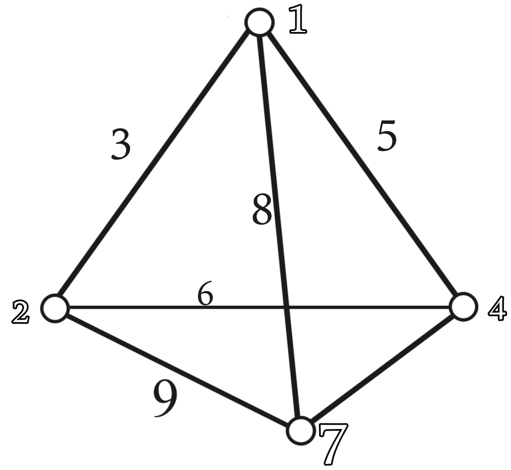
Posibles aristas	~~1~~	~~2~~	**3**	~~4~~	**5**	**6**	7	**8**	**9**	**11**
Posibles vértices	**1**	**2**	~~3~~	**4**	~~5~~	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~11~~

Además el tetraedro tiene 4 vértices, luego el 7 etiqueta un vértice.

$$\text{aristas: } \{3, 5, 6, 8, 9, 10\}$$

$$\text{vértices: } \{1, 2, 4, 7\}$$

Ahora ubicamos los vértices en la figura, comenzando por 7 y 2 que suman 9, luego como 4 y 1 son los vértices de la arista pedida, no importa como los ubiquemos, siempre la arista será 5.



Problema 29. Cinco enteros positivos consecutivos tienen la siguiente propiedad: tres de ellos suman lo mismo que la suma de los otros dos. ¿Cuántos grupos de números enteros cumplen con esta propiedad?

Solución

Sean $n-2$, $n-1$, n, $n+1$, $n+2$ $\;n \geq 3$ los cinco enteros positivos, con 3 de ellos haremos un grupo (una tripleta) y con el resto haremos otro (una dupla), tal que la suma de la tripleta sea igual a la suma de la dupla.

Notemos que

$$n-2 \;+\; n-1 \;+\; n \;+\; n+1 \;+\; n+2 \;=\; 5n$$

Como la suma total debe dividirse en dos grupos con igual suma, entonces $5n$ debe ser par, por lo que n es par, luego $n = 2m$, de este modo los cinco enteros consecutivos tienen la forma $2m-2$, $2m-1$, $2m$, $2m+1$, $2m+2$ $\;m > 1$ y la suma total es $10m$.

De modo que la suma de los números de la tripleta siempre será de la forma $6m+j$ y la suma de los números de la dupla será de la forma $4m+k$, tal que $j+k=0$, o sea $k=-j$. Luego como la suma de la tripleta debe ser igual a la suma de la dupla se tiene que:

De modo que la suma de los números de la tripleta siempre será de la forma $6m+j$ y la suma de los números de la dupla será de la forma $4m+k$, tal que $j+k=0$, o sea $k=-j$. Luego como la suma de la tripleta debe ser igual a la suma de la dupla se tiene que:

$$
\begin{aligned}
6m + j &= 4m - j \\
2m &= 2j \\
m &= j
\end{aligned}
$$

Concluimos entonces que m solamente puede ser 3 o 2. Finalmente, se tiene que los conjuntos que cumplen la propiedad son:

$$\{2, 3, 4, 5, 6\} \;\text{ y }\; \{4, 5, 6, 7, 8\}$$

,

De otro modo, podríamos haber tanteado los conjuntos, por ejemplo, siendo $n-2, n-1, n, n+1, n+2, \quad n \geq 3$ los cinco enteros positivos, veremos primero si es posible que el mayor $(n+2)$ esté en una tripleta. Para ello sumaremos el mayor con los dos menores en un grupo, y los dos restantes en el otro grupo, tal que dichas sumas sean iguales, es decir:

$$
\begin{aligned}
(n+2) + (n-2) + (n-1) &= n + (n+1) \\
3n - 1 &= 2n + 1 \\
n &= 2
\end{aligned}
$$

Pero $n \geq 3$, luego el entero más grande no puede estar en una tripleta.

Intentemos ahora construir tripletas que contengan al entero $n+1$ y no contengan a $n+2$, estas son $n-1, n, n+1$; $n-2, n, n+1$; $n-2, n-1, n+1$ y comparemos las sumas con las duplas:

$$
\begin{aligned}
(n-1) + n + (n+1) &= (n-2) + (n+2) \\
3n &= 2n \\
n &= 0
\end{aligned}
$$

Pero $n \geq 3$.

$$
\begin{aligned}
(n-2) + n + (n+1) &= (n-1) + (n+2) \\
3n - 1 &= 2n + 1 \\
n &= 2
\end{aligned}
$$

Pero $n \geq 3$.

$$\begin{aligned}(n-2)+(n-1)+(n+1) &= n+(n+2)\\ 3n-2 &= 2n+2\\ n &= 4\end{aligned}$$

Hemos encontrado un grupo que cumple esta propiedad $\{2, 3, 4, 5, 6\}$. Por último armemos la tripleta con los menores y la dupla con los mayores, de este modo tenemos:

$$\begin{aligned}(n-2)+(n-1)+n &= (n+1)+(n+2)\\ 3n-3 &= 2n+3\\ n &= 6\end{aligned}$$

Hemos encontrado otro grupo que cumple esta propiedad $\{4, 5, 6, 7, 8\}$. Finalmente tenemos 2 únicos grupos que cumplen la propiedad.

Problema 30. ¿Cuántos decimales tiene el número $\dfrac{1}{1024000}$ escrito en su forma decimal?

$\boxed{\text{Solución}}$

Notemos que:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1024000} &= \frac{1}{1024 \cdot 1000}\\ &= \frac{1}{2^{10} \cdot 10^3}\\ &= \overbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot ... \cdot \frac{1}{2}}^{\text{10 veces}} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10}\\ &= \overbrace{0,5 \cdot 0,5 \cdot ... \cdot 0,5}^{\text{10 veces}} \cdot 0,1 \cdot 0,1 \cdot 0,1\end{aligned}$$

Si contamos los factores, todos con un decimal veremos que el número $\dfrac{1}{1024000}$ tiene 13 decimales.

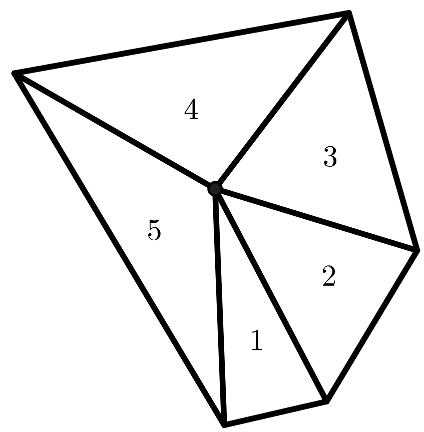
Observemos que siempre que multiplicamos 2 decimales el decimal resultante tiene tantos decimales como la suma de los decimales de sus dos factores, siempre que el producto no termine en cero, como es nuestro caso.

Por ejemplo:

- $0,3 \cdot 0,12 = 0,036$
  $0,3$ tiene 1 decimal, $0,12$ tiene 2 decimales, luego $0,3 \cdot 0,12 = 0,036$ tiene $1 + 2 = 3$ decimales.

- $0,14 \cdot 0,5 = 0,070 = 0,07$
  $0,14$ tiene 2 decimales, $0,5$ tiene 1 decimal, luego $0,14 \cdot 0,5 = 0,07$ tiene 2 decimales pues $14 \cdot 5$ termina en cero, pues por cada cero al final del resultado es un decimal menos.

Problema 31. La imagen muestra cinco triángulos isósceles con ángulos superiores de 24°, 48°, 72°, 96° y 120°, todos múltiplos del ángulo superior más pequeño, y todos los ángulos tienen un valor entero. Si queremos aumentar la cantidad de triángulos isósceles tanto como sea posible. ¿Cuántos grados tiene el ángulo superior más pequeño para ese caso?



Solución

Notar que.

$$
\begin{aligned}
360 &= 24 + 48 + 72 + 96 + 120 \\
&= 24 + 2 \cdot 24 + 3 \cdot 24 + 4 \cdot 24 + 5 \cdot 24 \\
&= 24 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5) \\
&= 24 \cdot \frac{n(n+1)}{2}, \quad n = 5 \text{ (5 triángulos)} \\
&= 25 \cdot 15
\end{aligned}
$$

Como se trata de determinar la mayor cantidad posible de triángulos isósceles con ángulos superiores todos múltiplos del más pequeño, debemos encontrar el máximo n tal que:

$$360 = k \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$
$$\frac{720}{k} = n(n+1)$$

Luego como n debe ser lo más grande posible, k debe ser lo más pequeño posible.

- $k = 1 \Rightarrow 720 = n(n+1)$, pero no existe $n \in \mathbb{N}$ que cumpla la condición.
- $k = 2 \Rightarrow 360 = n(n+1)$, pero no existe $n \in \mathbb{N}$ que cumpla la condición.
- $k = 3 \Rightarrow 240 = n(n+1)$, luego $n = 15$, pues $15 \cdot 16 = 240$.

Por lo tanto a lo más tendremos 15 triángulos con ángulo superior igual a $3°, 6°, 9°, \ldots, 45°$, y para este caso el ángulo superior más pequeño es de $3°$.

Problema 32. Romina hornea 6 pasteles de frambuesa uno después del otro, numerándolos del uno al seis en orden. Mientras hace esto, sus hijos a veces entran a la cocina y comen el pastel más caliente. ¿Cuál de las siguientes combinaciones no puede ser el orden en que los niños comen los pasteles?

(A) $1, 2, 3, 4, 5, 6$ (B) $1, 2, 5, 4, 3, 6$ (C) $3, 2, 5, 4, 6, 1$
(D) $4, 5, 6, 2, 3, 1$ (E) $6, 5, 4, 3, 2, 1$

Solución

Analicemos cada uno de los casos:

- $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Esta combinación es posible. Se hornea y se saca del horno el pastel 1 y los niños entran y lo comen, se hornea y se saca del horno el pastel 2 y los niños entran y lo comen, se hornea y se saca del horno el pastel 3 y los niños entran y lo comen, se hornea y se saca del horno el pastel 4 y los niños entran y lo comen, se hornea y se saca del horno el pastel 5 y los niños entran y lo comen, se hornea y se saca del horno el pastel 6 y los niños entran y lo comen..

- $1, 2, 5, 4, 3, 6$. Esta combinación es posible. Se hornea y se saca del horno el pastel 1 y los niños entran y lo comen, se hornea y se saca del horno el pastel 2 y los niños entran y lo comen, se hornea y se saca del horno el pastel 3, se hornea y se saca del horno el pastel 4, se hornea y se saca del horno el pastel 5 y los niños entran y comen el más caliente, es decir, el último que salió del horno, el pastel 5, mientras se hornea el pastel 6 entran nuevamente y entre el pastel 3 y el pastel 4 comen el más caliente, el pastel 4, luego antes de que salga el pastel 6 del horno entran nuevamente y comen el pastel 3, por último se saca del horno el pastel 6 los niños entran y lo comen.

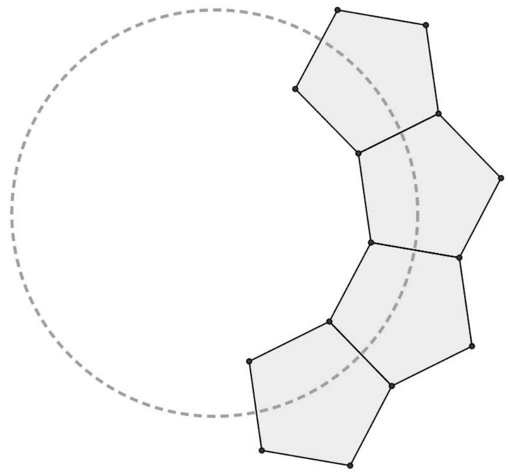
- $3, 2, 5, 4, 6, 1$. Esta combinación es posible. Se hornea y se saca del horno el pastel 1, se hornea y se saca del horno el pastel 2, se hornea y se saca del horno el pastel 3 y los niños entran y comen el más caliente, es decir, el último que salió del horno, el pastel 3, mientras se hornea el pastel 4 entran nuevamente y entre el pastel 1 y el pastel 2 comen el más caliente, el pastel 2, luego se hornea y se saca del horno el pastel 4, se hornea y se saca del horno el pastel 5, y los niños entran y comen el más caliente, es decir, el último que salió del horno, el pastel 5, mientras se hornea el pastel 6 entran nuevamente y entre el pastel 1 y el pastel 4 comen el más caliente, el pastel 4, luego se saca del horno el pastel 6 y entre el pastel 1 y el pastel 6 comen el más caliente, el pastel 6, por último los niños entran nuevamente y comen el único pastel que queda, el pastel 1.

- $4, 5, 6, 2, 3, 1$. Esta combinación no es posible. Se hornea y se saca del horno el pastel 1, se hornea y se saca del horno el pastel 2, se hornea y se saca del horno el pastel 3, se hornea y se saca del horno el pastel 4 y los niños entran y comen el más caliente, es decir, el último que salió del horno, el pastel 4, se hornea y se saca del horno el pastel 5 y los niños entran y lo comen, se hornea y se saca del horno el pastel 6 y los niños entran y lo comen, luego los niños entran y comen el pastel más caliente, entre el pastel 1 el pastel 2 y el pastel 3, es decir, el último de estos tres que salió del horno, el pastel 3, no el pastel 2 como dice la secuencia.

- $6, 5, 4, 3, 2, 1$. Esta combinación es posible. Se hornea y se saca del horno el pastel 1, se hornea y se saca del horno el pastel 2, se hornea y se saca del horno el pastel 3, se hornea y se saca del horno el pastel

4, , se hornea y se saca del horno el pastel 5, se hornea y se saca del horno el pastel 6, los niños entran y comen el más caliente, es decir, el último que salió del horno, el pastel 6, los niños entran nuevamente y comen el más caliente de los 5 que queda, el pastel 5, luego el pastel 4, y el pastel 3, y el 2 y el 1.

Problema 33. Ricardo tiene piezas plásticas idénticas con la forma de un pentágono regular. Las pega juntas lado a lado para completar un círculo, como se ve en la figura. ¿Cuántas piezas tiene este círculo?

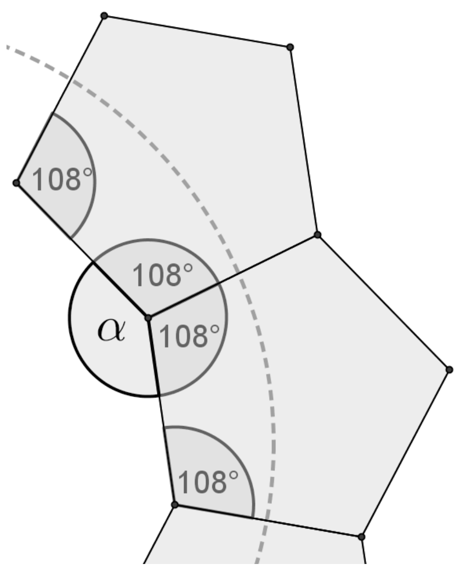


Solución

Notemos que los ángulos interiores de un pentágono regular suman:

$$180 \cdot (5-2)^\circ = 540^\circ$$

Por lo que cada ángulo interior del pentágono regular mide $\dfrac{540^\circ}{5} = 108^\circ$.

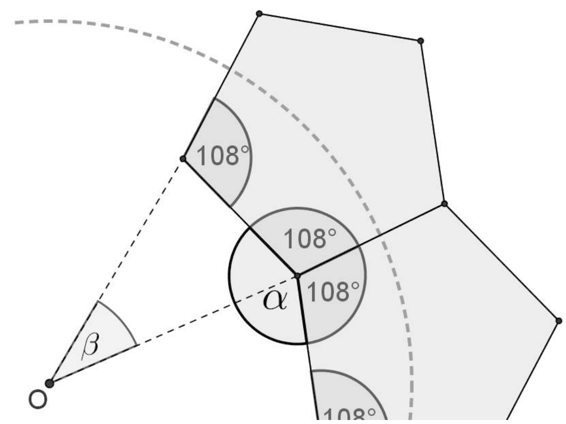


Observemos que la figura formada por Ricardo genera un polígono regular en el interior con la medida del lado igual a la medida del lado de las piezas. Como el ángulo α tiene medida $\alpha = 360^\circ - 108^\circ - 108^\circ = 144^\circ$, se tiene que en el polígono generado cada ángulo interior mide 144°. Por lo tanto:

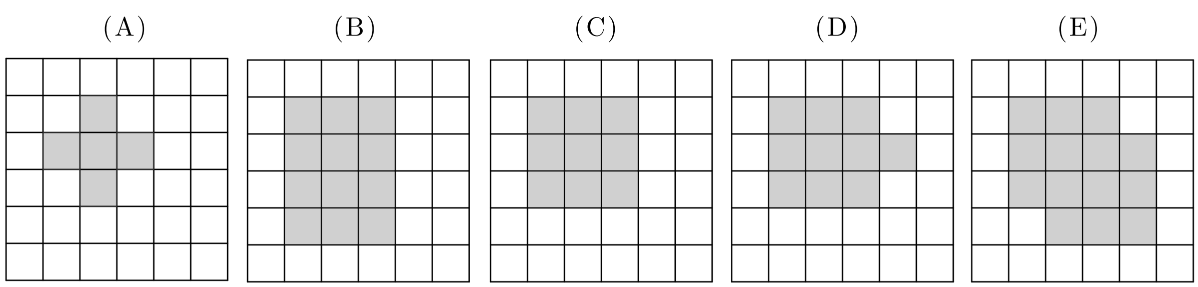
$$\begin{aligned} 144 &= \frac{180 \cdot (n-2)}{n} \\ 144n &= 180n - 360 \\ 360 &= 36n \\ n &= 10 \end{aligned}$$

Finalmente el círculo tiene 10 piezas.

De otro modo, notemos que si trazamos los segmentos desde el centro O de la circunferencia tendremos un triángulo isósceles cuyos ángulos basales medirán 72°, por lo que el ángulo central $\beta = 180 - 72 - 72 = 36°$. Como $360 = 36 \cdot 10$ habrá 10 ángulos centrales, por lo que Ricardo unirá 10 piezas.



Problema 34. Una alfombra circular se pone sobre un piso con baldosas cuadradas. Todas las baldosas que tienen más de un punto en común con la alfombra se pintan gris. ¿Cuál de las siguientes imágenes representa un resultado no posible?

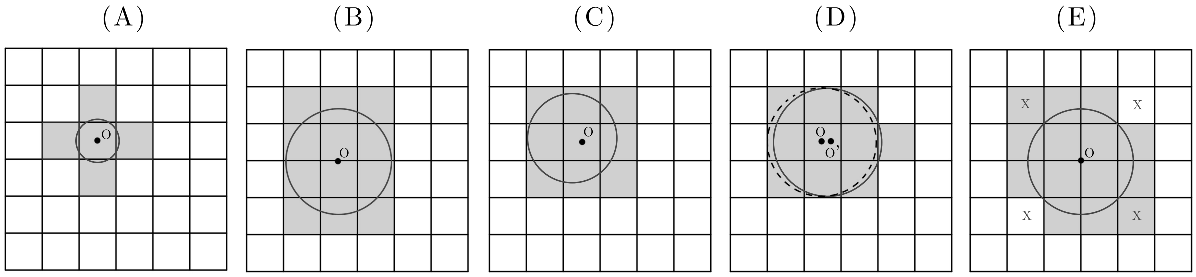


Solución

Sin pérdida de generalidad supongamos que los cuadraditos tienen lado 1, por lo que la diagonal de un cuadradito mide $\sqrt{2}$.

- La configuración (A) sí es posible utilizando una alfombra centrada en O con radio $\dfrac{1}{2} < r \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- La configuración (B) sí es posible utilizando una alfombra centrada en O con radio $\dfrac{\sqrt{5}}{2} < r \leq \dfrac{3}{2}$
- La configuración (C) sí es posible utilizando una alfombra punteada centrada en O con radio $\dfrac{\sqrt{2}}{2} < r \leq \dfrac{3}{2}$
- La configuración (D) sí es posible utilizando una alfombra centrada en O con radio $\dfrac{\sqrt{2}}{2} < r \leq \dfrac{13}{2}$ y desplazada hasta O'.

- La configuración (E) no es posible, pues si intentamos pintar dos cuadraditos marcados con X debemos pintarlos todos.



Problema 35. El número 200013 - 2013 no es divisible por:

(A) 2 (B) 3 (C) 5 (D) 7 (E) 11

Solución

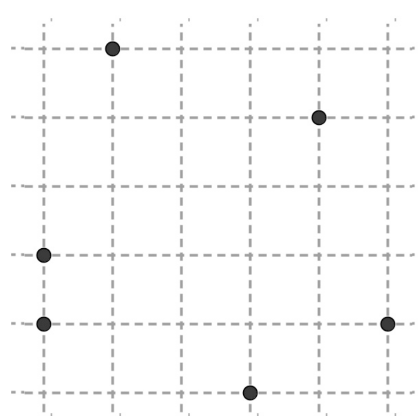
Como $200013 - 2013 = 198000$ y 198000 termina en cero entonces es divisible por 2 y por 5. Además, la suma de sus dígitos es 18, luego 198000 es también múltiplo de 3. Por último, si dividimos $198000 \div 7$ obtenemos un resultado decimal por lo que no es divisible por 7. Por otra parte, $198000 \div 11 = 18000$. Por lo tanto 200013 - 2013 no es divisible por 7.

De otro modo:

$$\begin{aligned} 200013 - 2013 &= 198000 \\ &= 200000 - 2000 \\ &= 2000 \cdot (100 - 1) \\ &= 2 \cdot 1000 \cdot 99 \qquad = 2 \cdot 5 \cdot 200 \cdot 9 \cdot 11 \end{aligned}$$

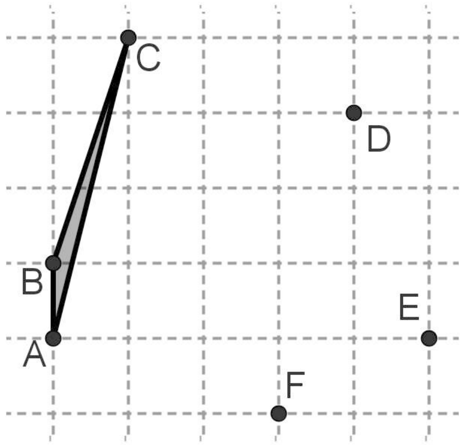
Claramente es divisible por 2, por 5, por 9 y por 11.

Problema 36. Seis puntos están marcados en un geoplano con celdas de lado 1. ¿Cuál es el área más pequeña de un triángulo con vértices en los lugares marcados?



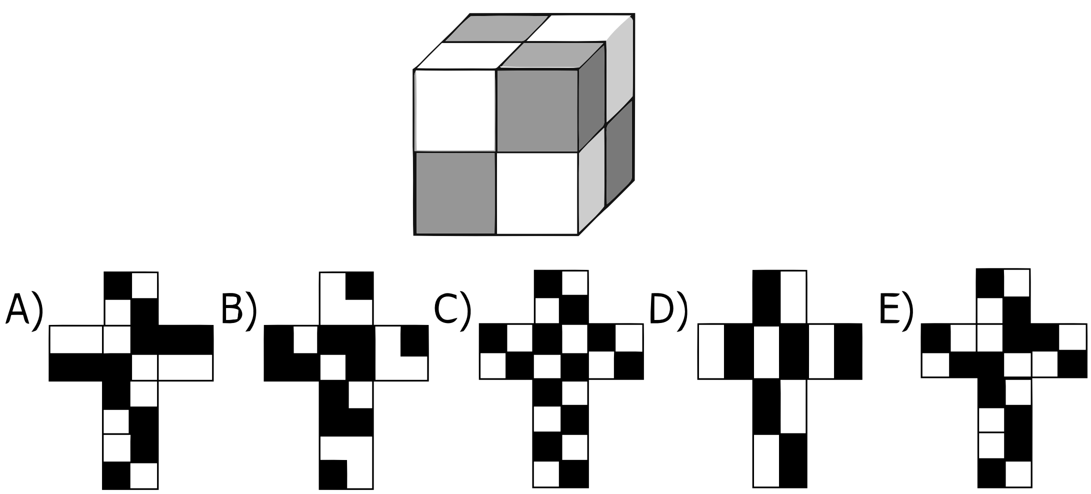
Solución

El área de un triángulo depende de su altura y su base, por lo que debemos escoger bases pequeñas y alturas pequeñas



Notemos que el triágulo ABC es el que tiene menor base (1 unidad) y menor altura (1 unidad), cualquier otro tiene mayor altura o mayor base, luego el triangulo menor tiene $\frac{1}{2}u^2$ área.

Problema 37. Las caras de un cubo están pintadas con cuadrados blancos y negros como si estuviese hecho con cuatro cubos blancos y negros más pequeños. ¿Cuál de los siguientes esquemas sería el correcto para construirlo a partir de una hoja de papel?



Solución

Observemos que en cada una de las caras la pareja de cuadrados blancos comparten solo un vértice entre ellos (no un lado), del mismo modo los cuadrados negros comparten solo un vértice, por lo cual descartamos las alternativas A, B y D, pues en estas redes existen parejas de cuadrados del mismo color que comparten un lado dentro de la cara.

Además, los cuadrados blancos siempre comparten dos de sus lados con un cuadradito blanco de la cara contigua, al igual que los negros, por lo que descartamos la alternativa C, pues no hay cuadrados contiguos de un mismo color. Luego la red E forma el cubo de la figura.

Problema 38. Una pelota de caucho cae verticalmente desde una altura de 15 metros del techo de un edificio. Después de cada impacto con el piso rebota hasta una altura de 4/5 de la altura anterior. ¿Cuántas veces aparecerá la pelota enfrente de una ventana regular cuyo borde inferior tiene una altura de $5,5$ metros y cuyo borde superior tiene una de $6,5$ metros?

Solución

Notemos que como el borde superior de la ventana se encuentra a una altura de $6,5$ metros y el borde inferior se encuentra a una altura de $5,5$ metros del suelo, entonces debemos encontrar la cantidad de veces que la pelota se encuentre justo en frente de la ventana. Vale decir a que altura el rebote de la pelota de caucho será mayor a $5,5$ metros y menor que $6,5$ metros.

Veamos que sucede con cada uno de los rebotes viendo un rebote como la trayectoria de la pelota al bajar, tocar el suelo y subir:

- 1^{er} Rebote: $15 \cdot \frac{4}{5} = 12$, luego del 1^{er} rebote la pelota alcanza 12 metros de altura, por lo que se ve la pelota 1 vez bajando y 1 vez subiendo
- 2^{do} Rebote : $12 \cdot \frac{4}{5} = 9.6$, luego del 2^{do} rebote la pelota alcanza 9.6 metros de altura, por lo que se ve la pelota 1 vez bajando y 1 vez subiendo.
- 3^{er} Rebote: $9.6 \cdot \frac{4}{5} = 7.68$, luego del 3^{er} rebote la pelota alcanza 7.68 metros de altura, por lo que la pelota se ve sólo una vez.
- 4^{to} Rebote: $7.68 \cdot \frac{4}{5} = 6.144$, luego del 4^{to} rebote la pelota alcanza 6.144 metros de altura, por lo que la pelota se ve sólo una vez.

- 5^{to} Rebote: $7.68 \cdot \dfrac{4}{5} = 4.9$, luego del 5^{to} rebote la pelota alcanza 4.9 metros de altura, por lo que la pelota ya no se ve.

Finalmente la pelota de caucho aparece frente a la ventana 7 veces.

Problema 39. El baile del tango se baila en parejas, cada una de un hombre y una mujer. Una noche en un baile no hay más de 50 personas presentes. En algún momento $\frac{3}{4}$ de los hombres está bailando con $\frac{4}{5}$ de las mujeres. ¿Cuántas personas están bailando en ese momento?

Solución

Sea H la cantidad de hombres y M la cantidad de mujeres, notemos que la suma entre la cantidad de hombres y mujeres no debe superar las 50 personas. Notemos que por el enunciado se sabe que una pareja está formada por un hombre y una mujer, como $\frac{3}{4}$ de los hombres está bailando con $\frac{4}{5}$ de las mujeres, entonces el número de hombres y de mujeres que baila tienen que ser iguales, por lo tanto se infiere la siguiente igualdad:

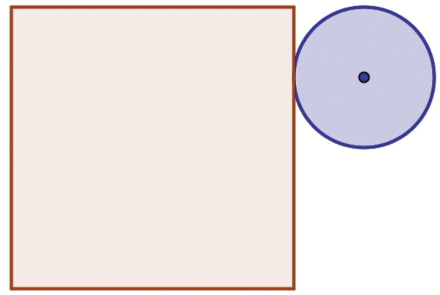
$$\begin{aligned}\frac{3}{4}H &= \frac{4}{5}M \\ \frac{H}{M} &= \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{3} \\ \frac{H}{M} &= \frac{16}{15}\end{aligned}$$

Esto nos dice que $H : M = 16 : 15$, vale decir que cada 16 hombres hay 15 mujeres o bien se puede concluir que los hombres son: $H = \dfrac{16 \cdot M}{15}$

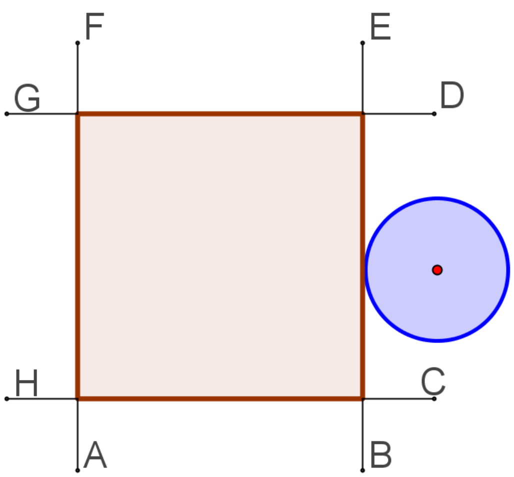
Entonces como la cantidad de hombres y la cantidad de mujeres deben ser cantidades enteras (no decimales) se tiene que para el caso de las mujeres solo se pueden múltiplos de 15 pues si consideramos otros valores, al realizar el calculo para ver cuántos hombres hay obtendremos una cantidad decimal. Luego el primer posible valor para M es $M = 15$, de lo cual se infiere que $H = 16$, en total habría 31 personas, de las cuales 24 estarían bailando en ese momento.

Veamos si existe una segunda posible solución, consideremos el siguiente múltiplo de 15, el cual es $M = 30$, por lo que se obtiene que el número de hombres sería $H = 32$, pero como la cantidad de hombres y mujeres no debe superar a 50 y en este caso habría 62 personas, se concluye que hay una única solución, es decir, 31 personas de las cuales 24 están bailando.

Problema 40. Dado el cuadrado de lado 4 de la figura, se tiene que sobre él se desliza una rueda de radio 1 sobre sus lados. Calcular la longitud del camino que recorre el centro de la rueda.



Solución



Tracemos en los vértices algunos segmentos perpendiculares a los lados tal como se muestra en la figura, es fácil ver que el recorrido que hace el centro de la rueda en los segmentos

$$\overline{AB} + \overline{CD} + \overline{EF} + \overline{GH} = 16$$

Ahora nos faltaría calcular el recorrido del centro desde B hasta C, desde D hasta E, desde F hasta G. y desde H hasta A.

Este recorrido corresponde al perímetro de la rueda pues los ángulos formados en dichos espacios suman 360°, por tanto el recorrido faltante es 2π. Finalmente el recorrido total es $16 + 2\pi$.

Problema 41 (El Número Inverso)**.** En la reunión anual de caracoles, el caracol Jacinto propone el siguiente desafío a sus amigos ¿Cuántos números de 4 dígitos en que el dígito de la decena y la centena son iguales poseen la propiedad siguiente: después de restar 2997 de dicho número, se obtiene un número de 4 dígitos que consiste en los mismos dígitos en orden inverso?. Resuelve tú el problema antes de que lo resuelvan los amigos caracoles.

Solución

Supongamos que el número de 4 dígitos es el *abbc*, entonces se debe cumplir que:

$$\begin{array}{ccccc} & a & b & b & c \\ - & 2 & 9 & 9 & 7 \\ \hline & c & b & b & a \end{array}$$

Vemos primeramente que c debe ser menor que 7, para cuando $c = 1$ se tiene que $a = 4$ y b puede tomar valores entre 0 y 9 es decir, cuando $c = 1$ tenemos 10 números que cumplen dicha condición. Cuando $c = 2$ se tiene que $a = 5$ y b puede tomar valores entre 0 y 9 es decir, cuando $c = 2$ tenemos 10 números que cumplen dicha condición. Podemos realizar este análisis hasta cuando $c = 6$, pues con $c = 7$, $a = 0$. Luego tenemos 60 números que cumplen esta condición.

Problema 42. Al sumarle 4^{15} a 8^{10}, Mónica ha obtenido un número que también es potencia de 2. Encuentra este número.

Solución

$$\begin{aligned} 4^{15} + 8^{10} &= \left(2^2\right)^{15} + \left(2^3\right)^{10} \\ &= 2^{30} + 2^{30} \\ &= 2 \cdot 2^{30} \\ &= 2^{31} \end{aligned}$$

Problema 43. El abuelo Anacleto, matemático jubilado y aventurero, a construido una ventana con forma de trapecio cuyo perímetro es de 5 metros y la longitud de sus lados (medidos en metros) son números enteros. ¿Cuál es la medida de los dos ángulos más pequeños de la ventana que construyó el abuelo?

Solución

Notemos que el único conjunto de 4 enteros positivos donde la suma de dichos números es 5 es el $\{1, 1, 1, 2\}$, luego la ventana construida por el abuelo tiene la forma de la figura 1 en la cual es claro que los ángulos menores son los basales.

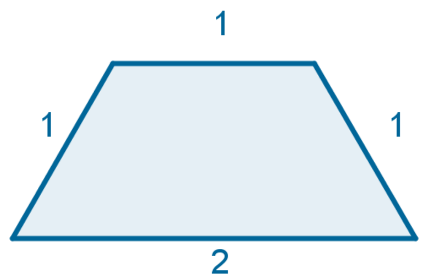


Figura 1

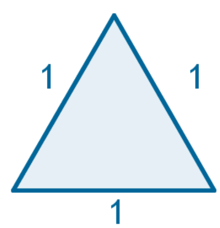
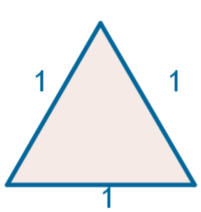


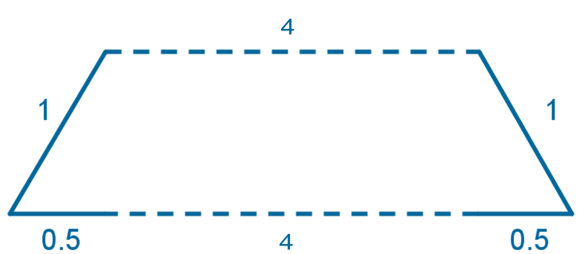
Figura 2

Veamos que dichos ángulos son iguales a los de la figura 2 (la cual resulta al comprimir la figura 1). Como la figura 2 es un triángulo equilátero entonces los ángulos buscados miden 60°.

Problema 44. El abuelo Anacleto matemático jubilado y aventurero, sabe construir ventanas con forma de trapecio isósceles, él quiere construir algunas ventanas de perímetro 11 metros, tal que la longitud de sus lados (medidos en metros) sean números enteros. Encuentre todas las posibles ventanas con forma de trapecio que cumplen con estas condiciones.

Solución





Tal como se muestra en la figura podemos imaginar un trapecio como un triángulo que se estira, al triángulo de la imagen que tiene lados 1, 1, 1 lo estiramos 4 unidades o sea agregamos 4 arriba y 4 abajo y obtenemos un trapecio de lados 1,4,1,5, el cual tiene perímetro 11.

Analicemos ahora todos los casos en que a partir de un triángulo isósceles ocurre esto, para ello siempre denotaremos el par de lados iguales en las dos primeras posiciones:

1,1,1 agregamos 4 arriba y 4 abajo obteniendo $1+4+1+5=11$.

2,2,1 agregamos 3 arriba y 3 abajo obteniendo $2+3+2+4=11$.

2,2,2 agregamos $2,5$ arriba y $2,5$ abajo, pero $2,5$ no es entero (se descarta)

2,2,3 agregamos 2 arriba y 2 abajo obteniendo $2+2+2+5=11$.

3,3,1 agregamos 2 arriba y 2 abajo obteniendo $3+2+3+3=11$.

3,3,2 agregamos $1,5$ arriba y $1,5$ abajo, pero $1,5$ no es entero (se descarta)

3,3,3 agregamos 1 arriba y 1 abajo obteniendo $3+1+3+4=11$.

3,3,4 agregamos $0,5$ arriba y $0,5$ abajo, pero $0,5$ no es entero (se descarta)

4,4,1 agregamos 1 arriba y 1 abajo obteniendo $4+1+4+2=11$.

4,4,2 agregamos $0,5$ arriba y $0,5$ abajo, pero $0,5$ no es entero (se descarta)

Luego tenemos que el abuelo Anacleto puede construir 6 ventanas con la condición dada.

Problema 45. El número de la casa de Ariel tiene tres dígitos. Si se remueve el primer dígito (el de la centena) de este número se obtiene el número de la casa de Benjamín. Si se remueve el primer dígito (el de la decena) del número de la casa de Benjamín, se obtiene el número de la casa de Clara. Si se suman los números de las casas de Ariel, Benjamín y Clara se obtiene 912. ¿Cuál es el segundo dígito del número de la casa de Ariel?

Solución

Consideremos el número de la casa de Ariel como abc, al remover el número de las centenas (a) se obtiene el número de la casa de Benjamín, vale decir que bc es el número de la casa de Benjamín. Nuevamente al remover el primer dígito, en este caso (b), se obtiene el número de la casa de Clara, por lo tanto el número de la casa de Clara es c.

Si sumamos los tres números de casa se obtiene 912:

$$\begin{array}{cccc} & a & b & c \\ & & b & c \\ + & & & c \\ \hline & 9 & 1 & 2 \end{array}$$

Luego para que $c + c + c$ sea un número que forme el último dígito de 912, vale decir el 2, tenemos dos opciones, que $c+c+c = 2$ o bien $c+c+c$ sea un número que termine en 2 como 12. Se puede inferir que la primera opción es imposible que se cumpla pues no existe un número entero que sumado tres veces sea igual a 2, para la segunda opción se puede inferir que si $c = 4$ entonces $c + c + c = 4 + 4 + 4 = 12$. Luego para $c = 4$, se tiene que $c + c + c$ es un número que termina en 2. Notemos que al sumar un número mayor a 9, reservamos la cifra de las decenas para la siguiente suma, en este caso reservamos 1.

Ahora debemos realizar una suma tal que $b + b$, más la reserva (1) debe ser un número que termine en 1. Luego las posibles opciones son que $b+b+1$ sea 1 o bien que $b + b + 1$ sea igual a 11, la primera opción no se cumple pues no existe ningún dígito que al sumarlo consigo mismo y sumarle 1 sea igual a 1. Luego para la segunda opción se hace notar que si $b = 5$, entonces $b + b + 1 = 5 + 5 + 1 = 11$. Por lo tanto para $b = 5$, se tiene que $b + b + 1$ es un número que termina en 1. Nuevamente estamos sumando un número mayor que 9, asique debemos reservar la cifra de las decenas para la siguiente suma, en este caso reservamos nuevamente 1.

Solo resta terminar con la última suma a más la reserva (1) debe ser igual a 9. Mediante una simple deducción, existe solo una solución tal que $a + 1$ sea 9. Por lo tanto $a = 8$.

Finalmente los números buscados son $a = 8$, $b = 5$ y $c = 4$. Siendo el número de la casa de Ariel 854, por lo tanto el segundo dígito del número de su casa es 5.

Problema 46. El número de la casa de Ariel tiene cuatro dígitos. Si se remueve el primer dígito de este número se obtiene el número de la casa de Benjamín. Si se remueve el primer dígito del número de la casa de Benjamín, se obtiene el número de la casa de Clara. Si se suman los números de las casas de Ariel, Benjamín y Clara se obtiene 5992. ¿Cuál es el número de la casa de Ariel si la suma de los dígitos de dicho número es 19?

Solución

Consideremos el número de la casa de Ariel como *abcd*, al remover el número de la unidad de mil (a) se obtiene el número de la casa de Benjamín, vale decir que *bcd* es el número de la casa de Benjamín. Nuevamente al remover el primer dígito, en este caso b, se obtiene el número de la casa de Clara, por lo tanto el número de la casa de Clara es *cd*.
Si sumamos los tres números de casa se obtiene 5992:

$$\begin{array}{rcccc} & a & b & c & d \\ & & b & c & d \\ + & & & c & d \\ \hline & 5 & 9 & 9 & 2 \end{array}$$

Luego para que $d + d + d$ sea un número que forme el último dígito de 5992, vale decir el 2, tenemos dos opciones, que $d+d+d = 2$ o bien $d+d+d$ sea un número que termine en 2 como 12. Se puede inferir que la primera opción es imposible que se cumpla pues no existe un número entero que sumado tres veces sea igual a 2, para la segunda opción se puede inferir que si $d = 4$ entonces $d + d + d = 4 + 4 + 4 = 12$. Luego para $d = 4$, se tiene que $d + d + d$ es un número que termina en 2. Notemos que al sumar un número mayor a 9, reservamos la cifra de las decenas para la siguiente suma, en este caso reservamos 1.

Ahora debemos realizar una suma tal que $c + c + c$ más la reserva (1) debe ser un número que termine en 9. Luego las posibles opciones son que

$c+c+c+1$ sea 9 o bien que $c+c+c+1$ sea igual a 19, la primera opción no se cumple pues no existe ningún dígito que al sumarlo consigo mismo tres veces y sumarle 1 sea igual a 9. Luego para la segunda opción se hace notar que si $c = 6$, entonces $c + c + c + 1 = 6 + 6 + 6 + 1 = 19$. Por lo tanto para $c = 6$, se tiene que $c+c+c+1$ es un número que termina en 9. Nuevamente estamos sumando un número mayor que 9, asique debemos reservar la cifra de las decenas para la siguiente suma, en este caso reservamos nuevamente 1.

Ahora bien, debemos determinar un valor de b que cumpla con que $b+b$ más la reserva (1) sea un número que termine en 9, nuestra primera opción es que la suma sea igual a 9 o bien que sea igual a 19. Para ello se puede comprobar que existen dos soluciones, pues para $b = 4$ se cumple que $b+b+1 = 4+4+1 = 9$ y para $b = 9$ se tiene que $b+b+1 = 9+9+1 = 19$. Luego se tienen dos posibles soluciones, $b = 4$ y $b = 9$. Pero notemos que existe una condición, la suma de los dígitos de la casa de Ariel es 19. Por lo tanto debemos encontrar los valores para el último dígito (a) y de acuerdo a ello, ver cual de las dos soluciones cumple con que al sumar $a + b + c + d$ sea igual a 19.

Para el caso de $b = 4$, notemos que no existe reserva pues la suma de $b + b + 1$ es 9, por lo tanto se infiere que a debe ser igual a 5.

Para el caso de $b = 9$, notemos que existe reserva (1), pues $b + b + 1$ es 19, luego se tiene que a más la reserva (1) debe ser igual a 5, por lo tanto $a = 4$.

Solo resta verificar cual de los dos casos cumple con la condición de que los números al sumarlos deben ser igual a 19.

Para el caso de $b = 4$ y $a = 5$, se tiene que $a+b+c+d = 5+4+6+4 = 19$. Cumple con la condición.

Para el caso de $b = 9$ y $a = 4$, se tiene que $a+b+c+d = 4+9+6+4 = 23$. No cumple con la condición.

Finalmente los números buscados son $a = 5$, $b = 4$, $c = 6$ y $d = 4$. Siendo 5464 el número de la casa de Ariel.

Problema 47. Encuentre el último dígito (la cifra de las unidades) del número $4^{2013} - 3^{2013}$.

$\boxed{\text{Solución}}$

Separaremos el problema en dos casos: El primer caso corresponde a encontrar la cifra de las unidades de 4^{2013} y el segundo caso corresponde a encontrar la cifra de las unidades de 3^{2013}.

Para el primer caso notemos las siguientes regularidades:

- $4^1 = 4$, la cifra de las unidades es 4.
- $4^2 = 16$, la cifra de las unidades es 6.
- $4^3 = 64$, la cifra de las unidades es 4.
- $4^4 = 256$, la cifra de las unidades es 6.
- $4^5 = 1024$, la cifra de las unidades es 4.

En general, notemos que en toda potencia de 4, la cifra de sus unidades será 4 o 6. Si el exponente de la potencia de 4 es impar, entonces la cifra de las unidades será 4 y en el caso cuando el exponente de la potencia de 4 es par, la cifra de las unidades será 6. Luego como 4^{2013} es una potencia de 4 con exponente impar, entonces la cifra de las unidades de 4^{2013} es 4.

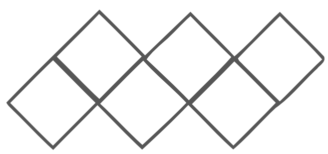
Para el segundo caso, al igual que en el primer caso, notemos las siguientes regularidades:

- $3^1 = 3$, la cifra de las unidades es 3.
- $3^2 = 9$, la cifra de las unidades es 9.
- $3^3 = 27$, la cifra de las unidades es 7.
- $3^4 = 81$, la cifra de las unidades es 1.
- $3^5 = 243$, la cifra de las unidades es 3.

En general en toda potencia de 3, ocurre que la cifra de las unidades será en 1, 3, 7 o 9. Notemos que a cada cuatro unidades en el exponente volvemos a tener como ultima cifra el dígito 3 apartir del exponente 1. Por lo tanto como 2012 es divisible por 4 sabemos que 3^{2012} termina en 1, luego 3^{2013} termina en 3

Finalmente se nos pide calcular la última cifra de $4^{2013} - 3^{2013}$, por lo cual debemos solo restar la última cifra de 4^{2013} con la de 3^{2013}, de donde se obtiene que $4 - 3 = 1$. Por lo tanto la última cifra de la diferencia $4^{2013} - 3^{2013}$ es 1.

Problema 48. La siguiente figura muestra 6 cuadrados en zigzag de lados 1cm $\times$ 1cm. Su perímetro es 14cm, ¿Cuál es el perímetro de un zigzag hecho de la misma manera pero con 2013 cuadrados?



Solución

Estudiemos el problema con bloques de 2 cuadrados de perímetro 6 cm cada uno. Cuando pegamos 2 de estos bloques tenemos un bloque de perímetro $6 + 6 - 2 = 10$ cm pues al pegar 2 bloques perdemos 2 lados del perímetro.

Cada vez que peguemos un nuevo bloque perderemos 2 lados, es decir, se agregan solo 4 unidades por cada bloque de 2 cuadraditos, de este modo tenemos que:

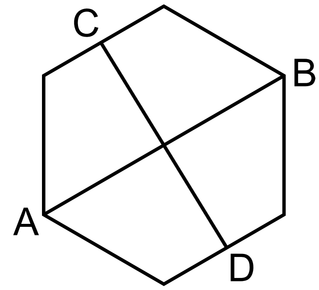
- 1 bloque $\rightarrow$ 2 cuadraditos $\rightarrow$ perímetro 6 cm.
- 2 bloques $\rightarrow$ 4 cuadraditos $\rightarrow$ perímetro $6 + 4 = 10$ cm.
- 3 bloques $\rightarrow$ 6 cuadraditos $\rightarrow$ perímetro $6 + 4 + 4 = 14$ cm.

  $\vdots$
- 1006 bloques $\rightarrow$ 2012 cuadraditos $\rightarrow$ perímetro $6 + \underbrace{4 + 4 + \ldots + 4}_{1005\text{veces}}$

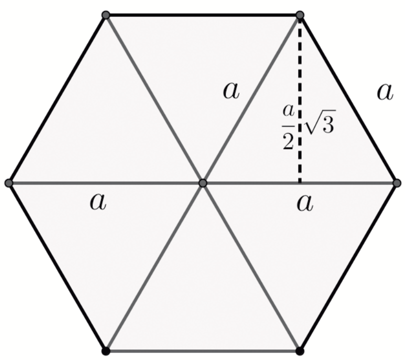
  $= 6 + 1005 \cdot 4 = 6 + 4020 = 4026$ cm.

Finalmente agregamos un cuadradito más para completar los 2013, y dicho cuadradito aporta con 2 cm. Por lo tanto el perímetro de la figura es de 4028 cm.

Problema 49. El segmento AB une dos vértices opuestos de un hexágono regular. El segmento CD une dos puntos medios de lados opuestos. Encuentra el producto entre los segmentos AB y CD si el área del hexágono es $60u^2$.



Solución



Un hexágono regular esta formado por 6 triángulos equiláteros congruentes de lado a y de área $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Como el hexágono tiene área $60u^2$ entonces cada triángulo equilátero tiene área $10u^2$. De este modo se cumple que.

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 10$$

Por otra parte notamos que $AB = 2a$ y que $CD = 2 \cdot \dfrac{a}{2}\sqrt{3} = a\sqrt{3}$. Luego:

$$AB \cdot CD = 2a \cdot a\sqrt{3} = 2a^2\sqrt{3} = 80$$

Problema 50. Un grupo de estudiantes tuvo una prueba. Si cada niño hubiese tenido 3 puntos más en su prueba, entonces el promedio del curso hubiese sido 1,2 puntos más alto de lo que fue. ¿Cuál es el porcentaje de niñas en el curso?

Solución

Sea h el número de hombres y $H_1, H_2, \ldots H_h$ sus notas. Sea m el número de mujeres y $M_1, M_2, \ldots M_m$ sus notas. Por lo tanto:

$$\overline{x} = \frac{H_1 + H_2 + \ldots + H_h + M_1 + M_2 + \ldots + M_m}{h + m}$$

Y si cada niño hubiese obtenido 3 punto más se tendríamos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\overline{x}+1,2 &= \frac{H_1+3+H_2+3+\ldots+H_h+3+M_1+M_2+\ldots+M_m}{h+m}\\
\overline{x}+1,2 &= \frac{H_1+H_2+\ldots+H_h+M_1+M_2+\ldots+M_m+3h}{h+m}\\
\overline{x}+1,2 &= \frac{H_1+H_2+\ldots+H_h+M_1+M_2+\ldots+M_m}{h+m}+\frac{3h}{h+m}\\
\overline{x}+1,2 &= \overline{x}+\frac{3h}{h+m}\\
1,2 &= \frac{3h}{h+m}\\
1,2(h+m) &= 3h\\
1,2h+1,2m &= 3h\\
1,2m &= 1,8h\\
\frac{m}{h} &= \frac{1,2}{1,8}=\frac{12}{18}=\frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Luego se tiene que de 5 estudiantes en el curso, 2 son niñas, por lo tanto el porcentaje de niñas en el curso es de $\frac{2}{5}=0,4$, es decir, un 40 %.

Problema 51. Hoy, Juan y su hijo están celebrando su cumpleaños. Juan multiplicó correctamente su edad con la de su hijo y obtuvo 2013 como resultado. ¿Qué edad tiene Juan?

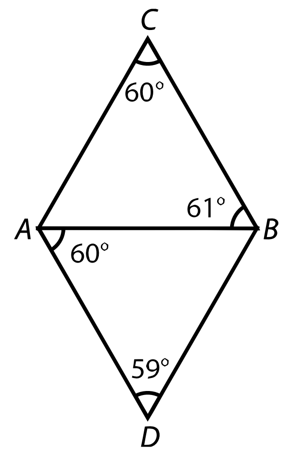
Solución

Notemos que 2013$= 3\cdot 11\cdot 61$ (descomposición prima de 2013), luego las edades de Juan y su hijo pueden ser:

- 3 y $11\cdot 61$, pero Juan no puede tener 671 años.
- 11 y $3\cdot 61$, pero Juan no puede tener 183 años.
- 61 y $3\cdot 11$.

Finalmente Juan tiene 61 años y su hijo tiene 33 años.

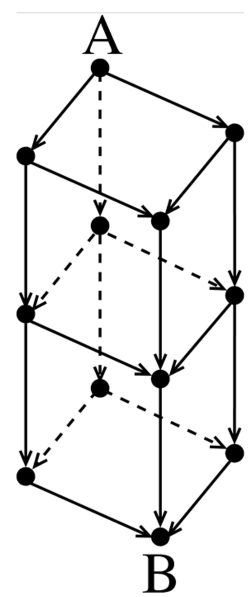
Problema 52. Joaquín quería dibujar dos triángulos equiláteros pegados para formar un rombo. Pero no midió bien todas las distancias y, una vez que terminó, Alejandra midió los cuatro ángulos y vio que no eran iguales. ¿Cuál de los cuatro segmentos es el más largo?



Solución

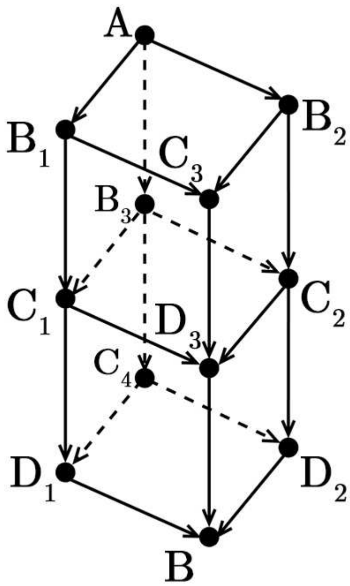
Observemos que en el triángulo ABD, AB es el lado más pequeño pues se opone al ángulo menor ($\angle ADB = 59°$), pero AB no es el lado más pequeño del triángulo ABC, pues el lado BC se opone al ángulo menor. De esto podemos deducir que el triángulo ABD es más grande que el triángulo ABC, por lo tanto el lado más grande del cuadrilátero $ADBC$ será el lado más grande del triángulo ABD, es decir, el lado BD pues se opone al ángulo mayor.

Problema 53. ¿Cuál es la máxima cantidad de caminos diferentes para llegar desde el punto A hasta el B en el gráfico siguiente?



Solución

Comenzamos desde A y tenemos 3 llegadas posibles B_1, B_2 y B_3, desde B_1 tenemos 2 llegadas C_1 y C_3, desde B_2 tenemos 2 llegadas C_2 y C_3 y desde B_3 tenemos 3 llegadas C_1, C_2 y C_4. Hasta ahora llevamos 7 caminos.



- Si seguimos el camino A, B_1, C_1 tenemos 2 posibles llegadas D_1, D_3.
- Si seguimos el camino A, B_1, C_3 tenemos 1 posible llegada D_3.
- Si seguimos el camino A, B_2, C_2 tenemos 2 posibles llegadas D_2, D_3.
- Si seguimos el camino A, B_2, C_3 tenemos 1 posible llegada D_3.
- Si seguimos el camino A, B_3, C_1 tenemos 2 posibles llegadas D_1, D_3.
- Si seguimos el camino A, B_3, C_2 tenemos 2 posibles llegadas D_2, D_3.
- Si seguimos el camino A, B_3, C_4 tenemos 2 posibles llegadas D_1, D_2.

Como desde cada punto $D_i, i = 1, 2, 3$ tenemos solo una manera de llegar hasta B entonces tenemos 12 caminos posibles.

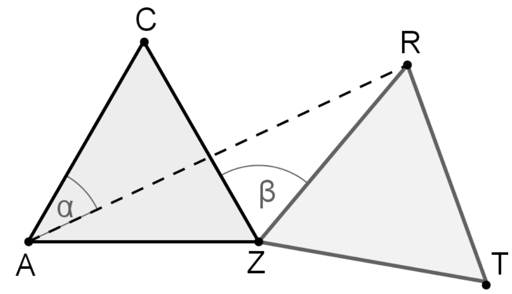
Problema 54. Se da un número de seis dígitos. La suma de sus dígitos es par, el producto de sus dígitos es impar. ¿Cuál es la afirmación correcta sobre el número?

(A) Ya sea 2 o 4 dígitos del número son par
(B) Un número así no existe
(C) La cantidad de dígitos impares del número es impar
(D) El número puede estar formado por dígitos diferentes entre ellos
(E) Ninguna de las Anteriores

Solución

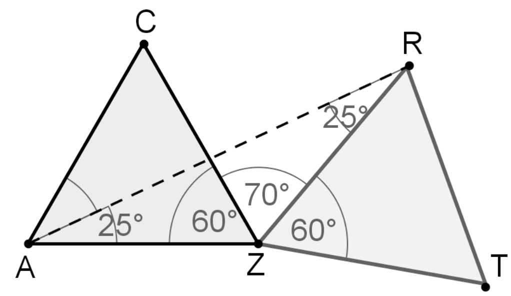
Claramente entre los seis dígitos del número no puede haber un dígito par, pues de ser así el producto de los dígitos sería par. Por lo tanto deben ser todos los dígitos impares, y si sumamos 2 dígitos impares la suma de ellos es par, por lo que la suma de lo 6 dígitos impares también es par, es decir, tal número no existe.

Problema 55. El triángulo RZT es el resultado del triángulo equilátero AZC al girarlo alrededor del punto Z, donde $\beta = \angle CZR = 70°$. Determine el valor del ángulo $\alpha = \angle CAR$.



Solución

Como el triángulo RZT es equilátero y el triángulo AZC es el resultado de una rotación, se tiene que $AZ \cong RZ$ por lo que el triángulo $\triangle AZR$ es isósceles. Además $\angle AZR = 60° + 70° = 130°$. De este modo $\angle ZAR \cong \angle ZRA = 25°$ y como $\angle CAZ = 60°$ se tiene que :

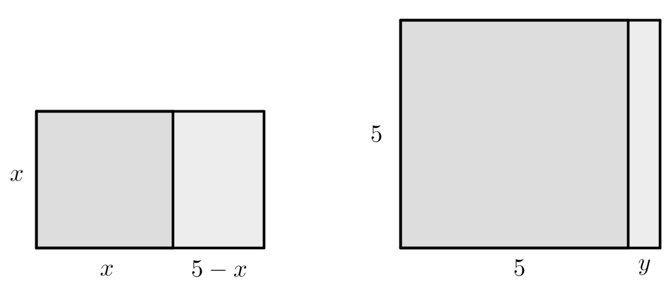


$$\alpha + 25° = 60 \Longrightarrow \alpha = 35$$

Problema 56. Considere un rectángulo, en el que uno de sus lados mide 5 unidades. El rectángulo puede ser cortado en un cuadrado y un rectángulo de lados enteros, uno de los cuales tiene área 4. ¿Cuántos rectángulos existen que cumplan con esto?

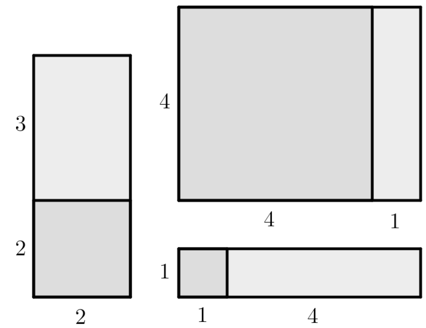
Solución

Notemos que un posible corte es cuando el lado de longitud 5 se divide en dos partes (x y $5-x$) así formamos un cuadrado de lado x y un rectángulo de lados x y $5-x$. Otro posible corte es cuando con el lado de longitud 5 formamos un cuadrado y trazamos un rectángulo de lados 5 e y.



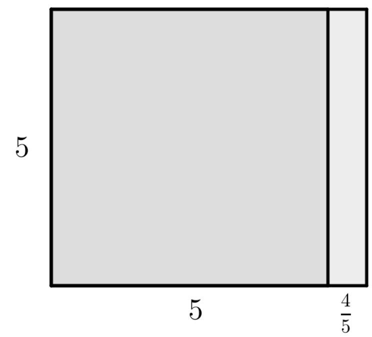
En el primer caso tenemos 2 posibilidades:

- $x^2 = 4 \Longrightarrow x = 2$
- $$\begin{aligned} x \cdot (5-x) &= 4 \\ x^2 - 5x + 4 &= 0 \\ (x-4)(x-1) &= 0 \\ x = 4 \vee x &= 1 \end{aligned}$$



En el segundo caso tenemos solo una posibilidad:

- $5 \cdot y = 4 \Longrightarrow y = \dfrac{4}{5}$



Problema 57. El número n es el entero positivo más grande para el cuál $4n$ es un número de tres dígitos, y m es el entero positivo más pequeño para el cuál $4m$ es un número de tres dígitos. ¿Cuál es el valor de $4n - 4m$?

Solución

Como $4n$ es un número de tres dígitos y n es el entero positivo más grande, $4n$ es a lo más 900, es decir:

$$4n \leq 999 \Longrightarrow n \leq \frac{999}{4} = 249,8$$

Luego $n = 249 \Longrightarrow 4n = 996$

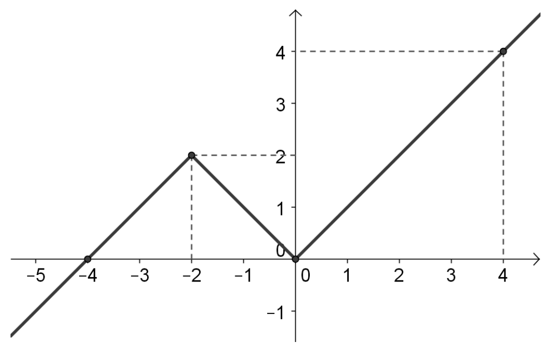
Como $4m$ es un número de tres dígitos y m es el entero positivo más pequeño, $4m$ es por lo menos 100, es decir:

$$4m \geq 100 \Longrightarrow n \geq \frac{100}{4} = 25$$

Luego $m = 25 \Longrightarrow 4m = 100$

Finalmente $4n - 4m = 996 - 100 = 896$

Problema 58. Victor ha dibujado el gráfico de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, compuesto por dos rectas y un segmento de línea (ver figura). ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $f(f(f(x))) = 0$?



Solución

Claramente $f(-4) = 0$ y $f(0) = 0$, observemos que en el intervalo $(-\infty, -2)$, $f(x) = x + 4$, luego:

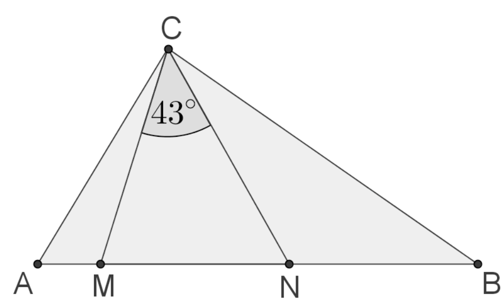
$$f(f(f(x))) = 0 \Longrightarrow f(\overbrace{f(f(x))}^{-4 \text{ o } 0}) = 0$$

1. $f(f(x)) = -4 \Longrightarrow f(\overbrace{f(x)}^{-8}) = -4$
   - $f(x) = -8 \Longrightarrow x_1 = -12$
2. $f(f(x)) = 0 \Longrightarrow f(\overbrace{f(x)}^{-4 \text{ o } 0}) = 0$
   - $f(x) = -4 \Longrightarrow x_2 = -8$
   - $f(x) = 0 \Longrightarrow x_3 = -4$ o $x_4 = 0$

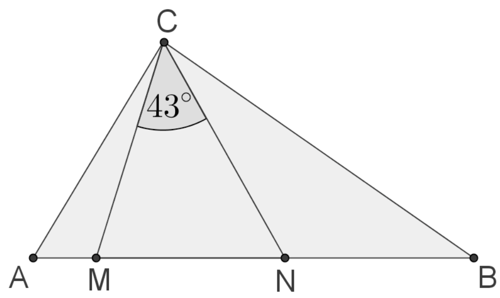
Por lo tanto la ecuación tiene 4 soluciones

$$x_1 = -12, x_2 = -8, x_3 = -4, x_4 = 0$$

Problema 59. En el triángulo ABC los puntos M y N en el lado AB están ubicados de manera tal que $AN = AC$ y $BM = BC$. Encuentre el valor del ángulo $\angle ACB$ si $\angle MCN = 43°$



Solución



Como $AN = AC$ y $BM = BC$ entonces: $\angle ANC \cong \angle NCA = \alpha$ y $\angle CMB \cong \angle BCM = \beta$

Notemos que en el triánagulo MCN se tiene que $\angle NCM = 180 - \alpha - \beta = 43$, luego $\alpha + \beta = 137$, por lo que $\angle ACB = \alpha + \beta - 43 = 137 - 43 = 94$.

Finalmente el $\angle ACB = 94°$.

Problema 60. ¿Cuántos pares (x, y) de números enteros satisfacen la ecuación $x^2 \cdot y^3 = 6^{12}$?

Solución

Como $6^{12} = 2^{12} \cdot 3^{12}$ se tiene que x tiene la forma $x = 2^p \cdot 3^q$ e y tiene la forma $y = 2^r \cdot 3^s$, luego:

$$\begin{aligned} 6^{12} &= x^2 \cdot y^3 \\ &= \left(2^p \cdot 3^q\right)^2 \cdot \left(2^r \cdot 3^s\right)^3 \\ &= 2^{2p+3r} \cdot 3^{2q+3s} \end{aligned}$$

Por lo tanto $2^{12} \cdot 3^{12} = 2^{2p+3r} \cdot 3^{2q+3s} \Longrightarrow 2p + 3r = 12$ y $2q + 3s = 12$, luego:

p	r
3	2
0	4
6	0

q	s
3	2
0	4
6	0

De este modo se tienen 9 soluciones:

- $x = 2^3 \cdot 3^2$, $y = 2^3 \cdot 3^2$
- $x = 2^3 \cdot 3^2$, $y = 2^0 \cdot 3^4$
- $x = 2^3 \cdot 3^2$, $y = 2^6 \cdot 3^0$
- $x = 2^0 \cdot 3^4$, $y = 2^3 \cdot 3^2$
- $x = 2^0 \cdot 3^4$, $y = 2^0 \cdot 3^4$
- $x = 2^0 \cdot 3^4$, $y = 2^6 \cdot 3^0$

- $x = 2^6 \cdot 3^0$, $y = 2^3 \cdot 3^2$
- $x = 2^6 \cdot 3^0$, $y = 2^0 \cdot 3^4$
- $x = 2^6 \cdot 3^0$, $y = 2^6 \cdot 3^0$

Problema 61. Una caja contiene 900 cartas numeradas del 100 al 999. Dos cartas cualesquiera tienen números diferentes. Francisco toma algunas cartas y saca la suma de los dígitos de cada una. ¿Cuántas cartas debe tomar para asegurarse de tener tres cartas cuya suma sea igual?

Solución

Las posibles sumas de los dígitos de números entre 100 y 999, pueden ir desde el 1 al 27, pues entre 100 y 999 el número que contiene las cifras más pequeñas es 100, donde $1+0+0=1$, y el número que contiene las cifras más grandes es el 999, donde $9+9+9=27$, además el único número en el cual la suma de sus dígitos es 1 es el 100, y el único número en el cual la suma de sus dígitos es 27 es el 999.

De este modo, si tomamos 27 cartas de la caja y en el peor de los casos podríamos tener 27 sumas distintas, pero entre esas cartas estaría el 100 y el 999 que eran las únicas cuyas sumas de sus dígitos eran 1 y 27 respectivamente, luego tomamos solo 25 cartas de la caja (pues ya sacamos el 100 y el 999) y nos aseguramos de tener por lo menos dos sumas iguales.

Ahora resta sacar una carta más y la suma de sus dígitos coincidirá con alguna de las dos sumas anteriores. Hemos tomado 27 cartas la primera vez, 25 cartas la segunda vez y por último 1 carta, en total serán 53 cartas las que nos aseguran tener 3 cartas cuya suma de sus cifras sean iguales.

Problema 62. Sea $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ la función definida por $f(n) = \frac{n}{2}$ si n es par, y por $f(n) = \frac{n-1}{2}$ si n es impar, para todos los números naturales n. Para el entero positivo k, $f^k(n)$ denota la expresión $f(f(\ldots f(n)\ldots))$, donde el símbolo f aparece k veces. Entonces el número de soluciones de la ecuación $f^{2013}(n) = 1$ es:

Solución

$$\begin{aligned} f^{2013}(n) &= 1 \\ f\left(f^{2012}(n)\right) &= 1 \\ f^{2012}(n) = 2 &\vee f^{2012}(n) = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{2012}(n) &= 2 \\ f\left(f^{2011}(n)\right) &= 2 \\ f^{2011}(n) = 4 &\vee f^{2011}(n) = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{2012}(n) &= 3 \\ f\left(f^{2011}(n)\right) &= 3 \\ f^{2011}(n) = 6 &\vee f^{2011}(n) = 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{2011}(n) &= 4 \\ f\left(f^{2010}(n)\right) &= 4 \\ f^{2010}(n) &= 8 \\ &\vee \\ f^{2010}(n) &= 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{2011}(n) &= 5 \\ f\left(f^{2010}(n)\right) &= 5 \\ f^{2010}(n) &= 10 \\ &\vee \\ f^{2010}(n) &= 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{2011}(n) &= 6 \\ f\left(f^{2010}(n)\right) &= 6 \\ f^{2010}(n) &= 12 \\ &\vee \\ f^{2010}(n) &= 13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{2011}(n) &= 7 \\ f\left(f^{2010}(n)\right) &= 7 \\ f^{2010}(n) &= 14 \\ &\vee \\ f^{2010}(n) &= 15 \end{aligned}$$

Notemos que como la ecuación $f(f(n)) = a$ con a entero tiene siempre dos soluciones, consecuentemente $f^{2013}(n) = 1$ tiene 2^{2013} soluciones.

Problema 63. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por las siguientes propiedades: f es periódica de periodo 5 y la restricción de f al intervalo $[-2, 3[$ es $x \to f(x) = x^2$. ¿Cuánto vale $f(2013)$?

Solución

Como f es periódica de periodo 5, entonces $f(x+5k) = f(x)$, para todo x real y k natural. por lo tanto basta con lo siguiente:

$$f(2013) = f(-2 + 2015) = f(-2 + 5 \cdot 403) = f(-2) = (-2)^2 = 4$$

Problema 64. ¿Cuántas soluciones (x, y), donde x e y son números reales, tiene la ecuación $x^2 + y^2 = |x| + |y|$?

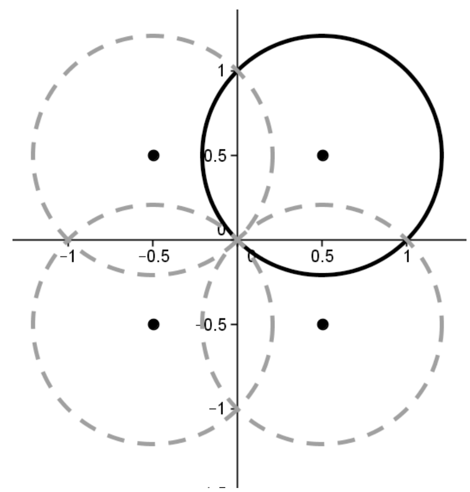
Solución

Supongamos $x > 0$ e $y > 0$ entonces $x^2 + y^2 = x + y$, completando cuadrados tenemos la ecuación de una circunferencia.

$$x^2 - x + y^2 - y = 0$$
$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0$$
$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

Dicha circunferencia tiene centro en el punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y radio $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Análogamente suponiendo que $x > 0$ e $y < 0$, $x < 0$ e $y > 0$, $x < 0$ e $y < 0$ tenemos tres circunferencias más, pero dada que la primera circunferencia nos entrega infinitas soluciones no es necesario determinas las otras tres.



Problema 65. Hay algunas rectas dibujadas en el plano. La recta a intercecta exactamente a tres rectas y la recta b intercecta exactamente a 4 rectas. La recta c intercecta exactamente n rectas, con $n \neq 3, 4$. Determine el número de rectas dibujadas en el plano.

Solución

Si la recta a corta 3 rectas entonces la recta a no es paralela a ninguna de estas rectas, para que la recta b corte las 4 rectas anteriores , la recta

b no es paralela a ninguna de estas rectas. Luego basta que la recta c no sea paralela a la recta a ni a la recta b, así nos aseguramos que no corta 3 rectas (como a) y no corta 4 rectas (como b), de este modo tenemos 6 rectas

Problema 66. ¿Cuántos pares (x, y) de enteros con $x \leq y$ existen de manera que su producto sea 5 veces la suma de ambos?

Solución

Para (x, y) tenemos la siguiente condición:

$$\begin{aligned} xy &= 5(x+y) \\ xy &= 5x + 5y \\ xy - 5x - 5y &= 0 \\ x(y-5) - 5(y-5) - 25 &= 0 \\ (y-5)(x-5) &= 25 \end{aligned}$$

Luego

- $y - 5 = 5$ y $x - 5 = 5$ entonces $y = 10$ y $x = 10$.
- $y - 5 = -5$ y $x - 5 = -5$ entonces $y = 0$ y $x = 0$.
- $y - 5 = 1$ y $x - 5 = 25$ entonces $y = 6$ y $x = 30$, no es solución pues $x > y$.
- $y - 5 = -1$ y $x - 5 = -25$ entonces $y = 4$ y $x = -20$.
- $y - 5 = 25$ y $x - 5 = 1$ entonces $y = 30$ y $x = 6$.
- $y - 5 = -25$ y $x - 5 = -1$ entonces $y = -20$ y $x = 4$, no es solución pues $x > y$.

Por lo tanto 4 pares cumplen la condición.

Problema 67. Una secuencia comienza como $1, -1, -1, 1, -1$. Después del quinto término, cada término es igual al producto de los dos términos anteriores. Por ejemplo, el sexto término es igual al producto del cuarto término y el quinto término. ¿Cuál es la suma de los primeros 2013 términos?

Solución

Puesto que la sucesión es:

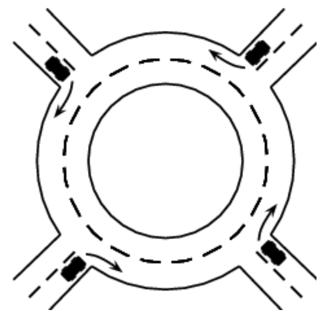
$$1, -1, -1, 1, -1, -1, 1, -1, -1, 1, -1, -1, \ldots$$

Dividamos esta sucesión en bloques de tres elementos, y observemos que los elementos de cada bloque suman -1.

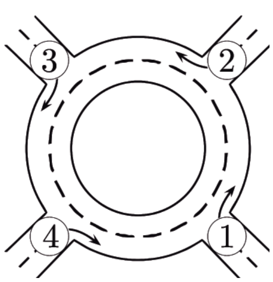
$$\underbrace{1, -1, -1}_{-1}, \underbrace{1, -1, -1}_{-1}, \underbrace{1, -1, -1}_{-1}, \underbrace{1, -1, -1}_{-1}, \ldots$$

Luego como la sucesión tiene 2013 términos y $2013 \div 3 = 671$, tiene 671 bloques de los anteriormente mencionados. De este modo la suma de los primeros 2013 términos es $671 \cdot (-1) = -671$.

Problema 68. Cuatro vehículos entran a una rotonda al mismo tiempo, cada uno de ellos desde una dirección diferente. Cada uno de los vehículos maneja por menos de una vuelta por la rotonda, y no hay ninguna pareja de carros que salgan por la misma dirección. ¿Cuántas maneras diferentes hay para que los vehículos salgan de la rotonda?



Solución

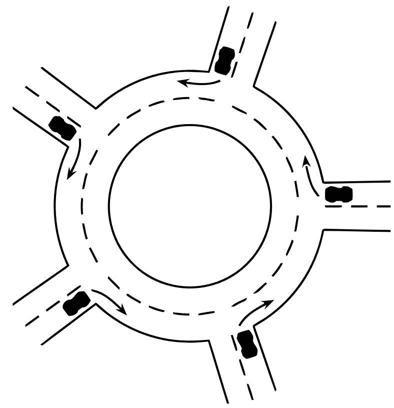


Sean A_1, A_2, A_3, A_4 los cuatro autos, donde cada uno entra por la puerta $1, 2, 3, 4$ respectivamente. La siguiente tabla muestra las posibles puertas de salida de los autos A_2, A_3, A_4 cuando el auto A_1 sale por la puerta 2:

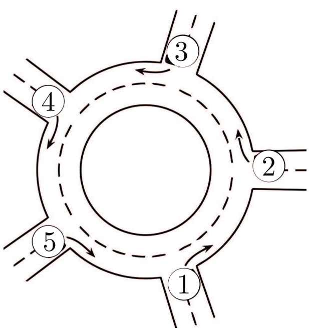
A_1	A_2	A_3	A_4
2	1	4	3
2	4	1	3
2	3	4	1

Luego cuando el auto A_1 sale por la puerta 2 los autos A_2, A_3, A_4 tienen 3 maneras de salir, análogamente cuando el auto A_1 salga por la puerta 3 los autos A_2, A_3, A_4 tendrán 3 maneras de salir, y cuando el auto A_1 salga por la puerta 4 los autos A_2, A_3, A_4 tendrán 3 maneras de salir. Por lo tanto los cuatro autos tienen $3 \cdot 3 = 9$ maneras de salir de la rotonda.

Problema 69. A la rotonda de la figura, entran cinco autos al mismo tiempo, cada uno por una pista diferente. Cada auto maneja menos de una vuelta por ella y ningún auto sale de la rotonda por la misma dirección que otro. ¿Cuántas diferentes combinaciones hay para que los autos salgan de la rotonda?



Solución



Sean A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 los cinco autos, donde cada uno entra por la puerta $1, 2, 3, 4, 5$ respectivamente. La siguiente tabla muestra las posibles puertas de salida de los autos A_2, A_3, A_4, A_5 cuando el auto A_1 sale por la puerta 2:

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
2	5	1	3	4
2	5	4	3	1
2	5	4	1	3
2	4	1	5	3
2	4	5	3	1
2	4	5	1	3
2	3	5	1	4
2	3	1	5	4
2	3	4	5	1
2	1	4	5	3
2	1	5	3	4

Notemos que cuando A_1 sale por la puerta 2 y A_2 sale por la puerta 1, solamente hay dos alternativas más, pues el auto A_3 no puede salir por la puerta 3, así que por esa puerta solo puede salir A_4 o A_5. Si por la puerta 3 sale A_4, por la puerta 4 sale A_5 ya que A_5 no puede salir por la puerta 5, y si por la puerta 3 sale A_5, por la puerta 4 sale A_3 ya que A_4 no puede salir por la puerta 4.

Luego cuando el auto A_1 sale por la puerta 2 los autos A_2, A_3, A_4, A_5 tienen 11 maneras de salir, análogamente cuando el auto A_1 salga por la puerta 3 los autos A_2, A_3, A_4, A_5 tendrán 11 maneras de salir, cuando el auto A_1 salga por la puerta 4 los autos A_2, A_3, A_4, A_5 tendrán 11 maneras de salir, y cuando el auto A_1 salga por la puerta 5 los autos A_2, A_3, A_4, A_5 tendrán 11 maneras de salir. Por lo tanto los cinco autos tienen $11 \cdot 4 = 44$ maneras de salir de la rotonda.

Problema 70. Un tipo de entero positivo N es más pequeño que la suma de sus tres divisores más grandes (evidentemente, se excluye el mismo número N). ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

(A) Ese tipo de números son divisibles por 4.

(B) Ese tipo de números son divisibles por 5.

(C) Ese tipo de números son divisibles por 6.

(D) Ese tipo de números son divisibles por 7.

(E) No existe ese tipo de números.

Solución

Sean a, b y c los divisores más pequeños de N sin contar a 1, donde $a < b < c$, de este modo $\frac{N}{a}$, $\frac{N}{b}$ y $\frac{N}{c}$, luego:

$$\frac{N}{a} + \frac{N}{b} + \frac{N}{c} > N$$
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > 1$$

Observemos que como $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}>1$ entonces:

$$\begin{aligned}\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}&>1\\ \frac{3}{a}&>1\\ 3&>a\end{aligned}$$

Luego $a=2$, si $a=2\Longrightarrow \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}>1$, luego siempre:

$$\begin{aligned}\frac{1}{b}+\frac{1}{b}&>\frac{1}{2}\\ \frac{2}{b}&>\frac{1}{2}\\ 4&>b\end{aligned}$$

Luego $b=3$

Por lo tanto sabemos que $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{c}>1$, luego:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{c}&>N\\ \frac{1}{1}&>N-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\\ \frac{1}{c}&>\frac{6-3-2}{6}\\ \frac{1}{c}&>\frac{1}{6}\\ c&<6\end{aligned}$$

Luego $c=4$ o $c=5$. De este modo tenemos que los divisores de N son:

- $\dfrac{N}{2}, \dfrac{N}{3}$ y $\dfrac{N}{4}\Longrightarrow N=\dfrac{13N}{12}$, por lo tanto N debe ser divisible por 12.
- $\dfrac{N}{2}, \dfrac{N}{3}$ y $\dfrac{N}{5}\Longrightarrow N=\dfrac{31N}{30}$, por lo tanto N debe ser divisible por 30.

Finalmente si N es divisible por 12 y por 30, N es divisible por 6.

Problema 71. A partir de una lista de tres números, el procedimiento "cambiasuma" crea una nueva lista mediante la sustitución de cada número por la suma de los otros dos. Por ejemplo, de la lista 3, 4, 6 el "cambiasuma" da 10, 9, 7 y de esta nueva lista el "cambiasuma" da como resultado la lista 16, 17, 19. Si empezamos con la lista 1, 2, 3, ¿Cuántos "cambiasuma" consecutivos son requeridos para obtener el número 2013 en una lista?

Solución

Observemos algunas regularidades que ocurren al realizar el "cambiasuma" para una lista tres números consecutivos $\{n,\ n+1,\ n+2\}$.

$$\begin{aligned}\{n,\ n+1,\ n+2\} &\overset{\text{cambia suma}}{\Longrightarrow} \{2n+3,\ 2n+2,\ 2n+1\}\\ &\overset{\text{cambia suma}}{\Longrightarrow} \{4n+3,\ 4n+4,\ 4n+5\}\end{aligned}$$

- Al aplicar el procedimiento de cambia suma para una lista de tres números consecutivos se obtiene una nueva lista de tres números consecutivos.

- Si sumamos los dos números mayores de la primera lista, se obtiene el número mayor de la segunda lista. En el caso de la primera fila los dos números mayores son $n+1$ y $n+2$, que al sumarlos resulta $2n+3$ (el mayor de la segunda fila). Y si sumamos los dos números menores de la primera lista , se obtiene el número menor de la segunda lista. En el caso de la primera fila los dos números menores son n y $n+1$, que al sumarlos resulta $2n+1$ (el menor de la segunda fila).

  Luego la primera lista es creciente, la segunda lista es decreciente, la tercera lista es creciente, y así sucesivamente.

- El término central de cualquier lista es de la forma $2^k(n+1)$, donde k es el número de cambiasumas realizados. Lo anterior lo podemos notar en la siguiente lista de términos centrales:

$$n+1,\ 2(n+1),\ 4(n+1),\ldots = 2^0(n+1),\ 2^1(n+1),\ 2^2(n+1),\ldots$$

Observemos estas regularidades comenzando con la lista pedida en el problema:

número de cambiasumas	lista		
0	1	2	3
1	5	4	3
2	7	8	9
3	17	16	15
4	31	32	33
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
5	1025	1024	1023
6	2047	2048	2049

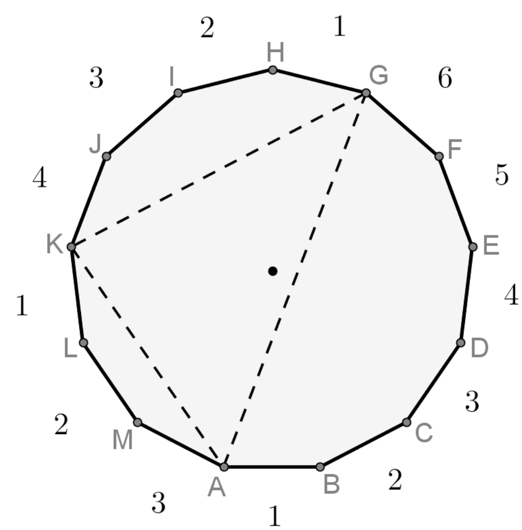
Observemos que será imposible obtener el número 2013 en alguna lista pues el valor central de la lista es una potencia de 2, y las potencias de 2 más cercanas a 2013 son $2^{10} = 1024$ y $2^{11} = 2048$, y como las listas contienen números consecutivos el 2013 no es antecesor ni sucesor de estas potencias de 2.

Finalmente no es posible obtener 2013 mediante el cambiasuma.

Problema 72. ¿Cuántos triángulos hay, cuyos vértices son escogidos de un polígono regular de trece lados y el centro de la circunferencia circunscrita al polígono quede dentro del triángulo?

Solución

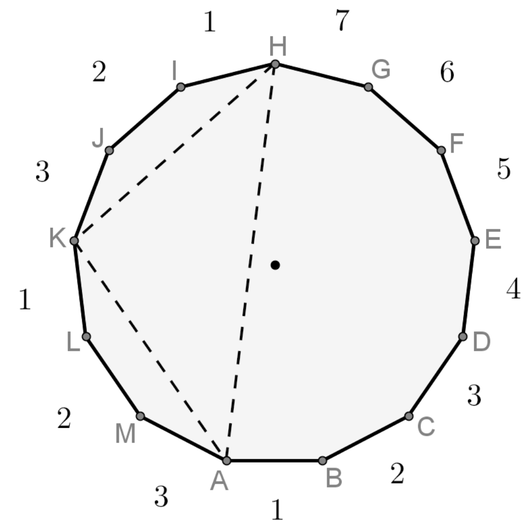
Dibujemos el polígono regular de 13 lados y uno de los triángulos posibles dentro de él.



Para reconocer este triángulo lo denotaremos por $\triangle(6,4,3)$ pues partiendo desde el vértice A en sentido antihorario y recorriendo 6 lados del polígono llegamos al vértice G del triángulo, luego recorriendo 4 lados del polígono y en el mismo sentido llegamos al vértice K, y por último recorriendo los 3 lados restantes del polígono llegamos nuevamente al vértice A.

De este modo podemos construir trece de estos triángulos (13 rotaciones del $\triangle(6,4,3)$). Notemos que el polígono tiene un número impar de lados, por lo que ninguna diagonal trazada pasa por el centro.

Siguiendo nuestra lógica de construcción de triángulos, no podremos tener un lado del triangulo mayor a 6 (6 lados del polígono recorridos desde un vértice a otro). En la figura se muestra el $\triangle(7,3,3)$ el cuál no cumple la condición de encerrar al centro.



Contemos todos los triángulos cuyos vértices son escogidos del polígono regular de trece lados tal que el centro quede dentro del triángulo. Notemos que $\triangle(6,1,6)$ al rotar genera 13 triángulos entre ellos el $\triangle(6,6,1)$ y el $\triangle(1,6,6)$. El $\triangle(4,5,4)$ al rotar genera 13 triángulos entre ellos el $\triangle(5,5,4)$ y el $\triangle(4,5,5)$. Y el $\triangle(5,3,5)$ al rotar genera 13 triángulos entre ellos el $\triangle(5,5,3)$ y el $\triangle(3,5,5)$.

- Triángulos de la forma $\triangle(6,1,6)$ tenemos 13 $(\triangle_{AGH}, \triangle_{BHI}, \ldots, \triangle_{MFG})$.
- Triángulos de la forma $\triangle(4,5,4)$ tenemos 13 $(\triangle_{AEJ}, \triangle_{BFK}, \ldots, \triangle_{MDI})$.
- Triángulos de la forma $\triangle(5,3,5)$ tenemos 13 $(\triangle_{ADI}, \triangle_{BEJ}, \ldots, \triangle_{MCH})$.

Además el $\triangle(6,4,3)$ al rotar genera 13 triángulos entre ellos el $\triangle(3,6,4)$ y el $\triangle(4,3,6)$. El $\triangle(6,3,4)$ al rotar genera 13 triángulos entre ellos el $\triangle(4,6,3)$ y el $\triangle(3,4,6)$. El $\triangle(6,2,5)$ al rotar genera 13 triángulos entre ellos el $\triangle(5,6,2)$ y el $\triangle(2,5,6)$. Y el $\triangle(6,5,2)$ al rotar genera 13 triángulos entre ellos el $\triangle(2,6,5)$ y el $\triangle(5,2,6)$

- Triángulos de la forma $\triangle(6,4,3)$ tenemos 13 $(\triangle_{AGK}, \triangle_{BHL}, \ldots, \triangle_{MFJ})$.
- Triángulos de la forma $\triangle(6,3,4)$ tenemos 13 $(\triangle_{AGJ}, \triangle_{BHK}, \ldots, \triangle_{MFI})$.
- Triángulos de la forma $\triangle(6,2,5)$ tenemos 13 $(\triangle_{AGI}, \triangle_{BHJ}, \ldots, \triangle_{MFH})$.
- Triángulos de la forma $\triangle(6,5,2)$ tenemos 13 $(\triangle_{AGL}, \triangle_{BHM}, \ldots, \triangle_{MFK})$.

Finalmente existen $13 \cdot 7 = 91$ triángulos con la condición dada.

Problema 73. Un vehículo partió del punto A y anduvo por un camino recto a una velocidad de 50km/h. Luego, a cada hora siguiente un nuevo vehículo parte del punto A a una velocidad 1km/h más rápida que el anterior. El último vehículo (a una velocidad de 100km/h) partió 50 horas después del primero. ¿Cuál es la velocidad del vehículo que va primero en la caravana 100 horas después de que partió el primero?

Solución

El primer vehículo recorre en 100 horas a 50 km/hr recorre 5000 km. El segundo vehículo como sale 1 hora más tarde que el primero y va a 51 km/h recorre recorre $51 \cdot 99$ km. El segundo vehículo como sale 1 hora más tarde que el segundo y va a 52 km/h recorre recorre $52 \cdot 98$ km, y así sucesivamente.

Luego el problema consiste en conocer que producto es mayor:

$$50 \cdot 100, \quad 51 \cdot 99, \quad 52 \cdot 98, \quad 53 \cdot 97, \quad \ldots, \quad 98 \cdot 52, \quad 99 \cdot 51, \quad 100 \cdot 50$$

Después de algunos cálculos uno observa que el producto crece hasta ser $75 \cdot 75 = 5625$. Por lo tanto el vehículo que va primero en la caravana 100 horas después de que partió el primero lleva una velocidad de 75 km/h.

Esto también se puede calcular maximizando el producto $(50+x)\cdot(100-x) = 5000+50x-x^2$, sabiendo que la función $f(x) = 5000+50x-x^2$ describe una parábola que se abre hacia abajo, que tienen como valor máximo su vértice con coordenadas $\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right) = (25, 75 \cdot 75)$. Luego $x = 25$ km maximiza la expresión.

Problema 74. Un jardinero quiere plantar veinte árboles (alerces y robles) en una avenida del parque. Sabiendo que entre dos alerces no pueden haber tres árboles. ¿Cuál es el mayor número de alerces que puede plantar el jardinero?

Solución

Como queremos plantar el mayor número de alerces en la avenida, comencemos plantando alerces teniendo en cuenta que no podemos tener 5 alerces consecutivos $A_1\ A_2\ A_3\ A_4\ A_5$ donde para el árbol A_i, i indica la posición, pues entre los alerces extremos tenemos 3 árboles. Entonces plantamos 4 alerces y comenzamos a plantar robles.

$$A_1\ A_2\ A_3\ A_4\ R_5\ R_6\ R_7\ \ldots$$

Pero deseamos tener más alerces por lo que debemos encontrar el momento en que comenzamos a plantar nuevamente alerces. Notemos que en la posición 6 no puede haber un alerce pues entre A_2 y A_6 quedarían 3 árboles, en la posición 7 no puede haber un alerce pues entre A_3 y A_7 quedarían 3 árboles, en la posición 8 no puede haber un alerce pues entre A_4 y A_8 quedarían 3 árboles, luego agregamos robles en las posiciones 6, 7 y 8, y alerces a partir de la posición 9.

$$A_1\ A_2\ A_3\ A_4\ R_5\ R_6\ R_7\ R_8\ A_9\ A_{10}\ A_{11}\ A_{13}\ \ldots$$

De este modo plantamos 4 alerces, 4 robles, 4 alerces, 4 robles, 4 alerces, así nunca hay tres árboles cualquiera entre dos alerces, por lo tanto podemos plantar hasta 12 alerces.

Problema 75. Iván caminaba por la calle cuando vio un tractor que tiraba de una tubería. Decidiendo medir su longitud Iván caminó al lado de la tubería contra el movimiento del tractor y contó 20 pasos. Luego caminó en la misma dirección que el tractor y contó 140 pasos. Sabiendo que sus pasos miden un metro, Iván fue capaz de conocer la medida de la tubería. ¿Cuánto mide?

Solución

Sea l la longitud del tubo, supongamos además que cuando Iván avanza 1 metro el tractor avanza k metros, así tenemos que:

- Cuando Iván caminó 20 metros al lado de la tubería contra el movimiento del tractor, el tractor avanza $20k$ metros, luego

$$l = 20 + 20k$$

- Cuando Iván caminó 140 metros en la misma dirección que el tractor, el tractor avanza $140k$ metros. Notemos que el niño es más rápido que el tractor, pues el niño caminando desde el final de la tubería alcanza al tractor, luego
$$l = 140 - 140k$$

De este modo:

$$l = 20 + 20k$$
$$l = 140 - 140k$$

Restando ambas ecuaciones obtenemos que $120 - 160k = 0 \Rightarrow 120 = 160k \Rightarrow k = \dfrac{3}{4}$.

Luego $l = 20 + 20 \cdot \dfrac{3}{4} = 35$. Por lo que la longitud del tubo es de 35 metros.

Problema 76. ¿Cuál de los siguientes números es el más grande?

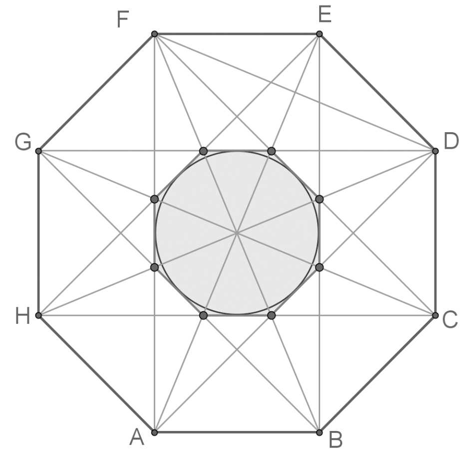
(A) 2013 (B) 2^{0+13} (C) 20^{13} (D) 201^3 (E) $20 \cdot 13$

Solución

- 2013 tiene 4 dígitos.
- $2^{0+13} = 2^{13} = 2^{10} \cdot 2^3 = 1024 \cdot 8$ tiene 4 dígitos.
- $20^{13} = 2^{13} \cdot 10^{13}$, 2^{13} tiene 4 dígitos, por lo que $2^{13} \cdot 10^{13}$ tiene $4 + 13 = 17$ dígitos.
- $201^3 = (200 + 1)^3 = 200^3 + 3 \cdot 200^2 + 3 \cdot 200 + 1$ tiene 7 dígitos.
- $20 \cdot 13 = 260$ tiene 3 dígitos.

Luego el número más grande es 20^{13} (sin ser necesario calcular exactamente cada valor).

Problema 77. Los lados del octágono regular de la figura miden 10. ¿Cuál es el radio de la circunferencia inscrita en el octágono regular que muestra la figura?



Solución

Las diagonales CH, DG, AF, BE claramente forman un cuadrado de lado 10 al centro de la figura, y como la circunferencia esta inscrita, esta tiene diámetro 10 y en consecuencia radio 5.

Problema 78. Un prisma tiene 2013 caras. ¿Cuántas aristas tiene el prisma?

Solución

Observemos que si un prisma tiene 2013 caras, 2011 de ellas son laterales y las otras 2 caras son basales. Por lo tanto las caras laterales generan 2011 aristas, y cada cara basal necesariamente tiene una arista por cada cara lateral, luego cada cara basal tiene 2011 aristas, entonces las 2 caras basales generan $2 \cdot 2011$ aristas.

Finalmente el prisma tiene $3 \cdot 2011 = 6033$ aristas.

Problema 79. La raíz cúbica de 3^{3^3} es igual a:

Solución

Notemos que:

$$3^{3^3} = 3^{27} = 3^{9 \cdot 3} = \left(3^9\right)^3$$

Esto implica que $\sqrt[3]{(3^9)^3} = 3^9 = 3^{3^2}$

Problema 80. El año 2013 tiene la propiedad de ser un número formado por los dígitos consecutivos 0, 1, 2 y 3. ¿Cuántos años han pasado desde la última vez que un año ha sido formado por 4 dígitos consecutivos?

Solución

Como estamos hablando de dígito,s las posibles parejas de números consecutivos son:

$\{0,1,2,3\},\{1,2,3,4\},\{2,3,4,5\},\{3,4,5,6\},\{4,5,6,7\},\{5,6,7,8\},\{6,7,8,9\}$

Como queremos encontrar una combinación que sea menor a 2013, descartamos las parejas:

$$\{2,3,4,5\},\{3,4,5,6\},\{4,5,6,7\},\{5,6,7,8\} \text{ y } \{6,7,8,9\}$$

Pues con ellas nunca podremos formar un número menor que 2013, así analizamos sólo las dos que nos restan, estas son:

$$\{0,1,2,3\},\{1,2,3,4\}$$

Ahora con estas combinaciones queremos encontrar el número más grande pero menor a 2013. Veamos la combinación $\{0,1,2,3\}$, el número más grande y menor que 2013 que podemos formar con esta combinación es 1320 y con la combinación $\{1,2,3,4\}$ el número más grande y menor que 2013 que podemos formar con esta combinación es 1432. Así el número buscado es 1432, respondiendo a la pregunta esto sucedió hace 581 años

Problema 81. Sea f una función lineal para la cual $f(2013) - f(2001) = 100$. ¿Cuánto es $f(2031) - f(2013)$?

Solución

Sea $f(x) = mx + n$ la función lineal pedida, de este modo:

$$\begin{aligned}
f(2013) - f(2001) &= 100 \\
(2013m + n) - (2001m + n) &= 100 \\
2013m + n - 2001m - n &= 100 \\
12m &= 100 \\
m &= \frac{100}{12} = \frac{25}{3}
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} f(2031) - f(2013) &= (2031m + n) - (2013m + n) \\ &= 2031m + n - 2013m - n \\ &= 18m = 18 \cdot \frac{25}{3} = 150 \end{aligned}$$

Observemos que m puede también puede ser calculada usando los puntos $(2013, f(2013))$ y $(2001, f(2001))$, es decir.

$$m = \frac{f(2013) - f(2001)}{2013 - 2001} = \frac{100}{12} = \frac{25}{3}$$

Problema 82. Seis súper héroes capturan a veinte villanos. El primer súper héroe captura un villano, el segundo captura dos villanos y el tercero captura tres. El cuarto súper héroe captura más villanos que cualquiera de los otros cinco héroes. ¿Cuál es el mínimo de villanos que pudo haber capturado el cuarto héroe?

Solución

Como los primeros tres super héroes ya capturaron $1+2+3 = 6$ villanos, quedan 14 villanos por capturar. Supongamos que el cuarto super héroe (S_4) captura x villanos, el quinto super héroe (S_5) captura a villanos, el sexto super héroe (S_6) captura b villanos. Es decir:

$$x + a + b = 14, \text{ con la condición que } x > a, x > b$$

Necesariamente $x = 6$. Para probar esto digamos que $a = x - p$ y $b = x - q$, luego:

$$\begin{aligned} x + a + b = x + (x - p) + (x - q) = 143x - p - q \qquad &= 14 \\ 3x = 14 + p + q \end{aligned}$$

De este modo tenemos que $14 + p + q$ es múltiplo de 3, por lo tanto:

- $14+p+q = 15 \Rightarrow p+q = 1$, es decir, $p = 0 \wedge q = 1$, o bien $p = 1 \wedge q = 0$. No se puede pues implicaría que $x = a$ o que $x = b$ y necesariamente $x > a$, $x > b$.

- $14+p+q=18 \Rightarrow p+q=4$, es decir, $p=1 \wedge q=3$, o $p=2 \wedge q=2$, o $p=3 \wedge q=1$, o $p=4 \wedge q=0$, o $p=0 \wedge q=4$ pero q y p no pueden ser 0.

Luego $6+5+3=14$, $6+4+4=14$, $6+3+5=14$.

También podemos observar que $x=6$, teniendo en cuenta que como x debe ser pequeño, los valores x, a y b deben ser cercanos a $14 \div 3 = 4.\overline{6}$, podemos elegir entonces $x=6$, $a=4$, $b=4$, o bien, $x=6$, $a=5$, $b=3$.

Problema 83. Cuando cierta sustancia se derrite, su volumen se incrementa en $\frac{1}{12}$. ¿En cuánto decrece su volumen cuando vuelve a solidificarse?

Solución

Notemos que cuando la sustancia S se derrite aumenta su masa en $\dfrac{S}{12}$, por lo tanto la nueva masa M es $S + \dfrac{S}{12} = \dfrac{13S}{12} = M$. Como queremos que esta masa vuelva a solidificarse tendrá que ser nuevamente S, luego la pregunta es en cuanto disminuye M para volver a ser S, se tiene que:

$$\begin{aligned}
M - \frac{M}{x} &= S \\
\frac{13S}{12} - \frac{13S}{12x} &= S \\
\frac{13Sx - 13S}{12x} &= S \\
13Sx - 13S &= 12Sx \\
Sx &= 13S \\
x &= 13
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el volumen disminuye en $\dfrac{1}{13}$

Problema 84. ¿Cuántos enteros positivos existen de manera tal que $\dfrac{n}{3}$ y $3n$ sean enteros positivos de tres dígitos?

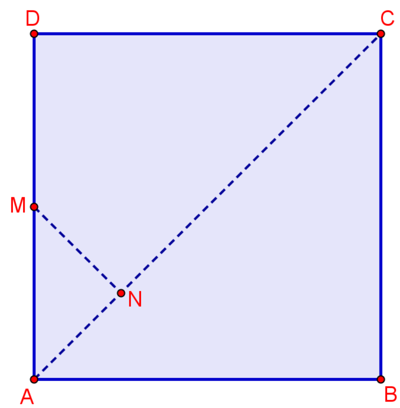
Solución

Como $\dfrac{n}{3}$ y $3n$ deben ser enteros positivos de tres dígitos, se tiene que:

$$\frac{n}{3} \geq 100 \qquad\qquad 3n \leq 999$$
$$n \geq 300 \qquad\qquad n \leq 333$$

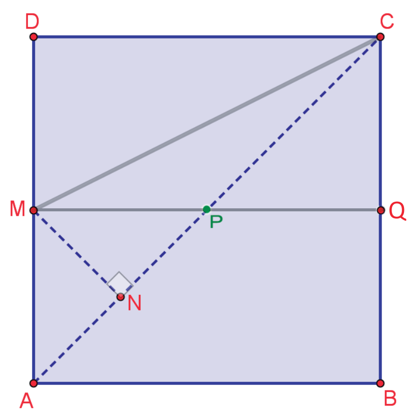
Luego $300 \leq n \leq 333$, por lo que existen 34 enteros para los que $\frac{n}{3}$ y $3n$ son enteros positivos de tres dígitos.

Problema 85. En la figura $ABCD$ es un cuadrado, M es el punto medio de AD y MN es perpendicular a AC. ¿Cuál es la razón entre el área del triángulo MNC y el área del cuadrado original?.



Solución

Tal como muestra la figura tracemos la perpendicular al lado AD que pasa por el punto M. Claramente esta recta divide al cuadrado en dos parte iguales.



Notemos que para el triángulo MPC es $\frac{1}{8}$ del área total, pues como P es el punto medio del segmento trazado (dado que es el punto medio de la diagonal), el triángulo MPC y el triángulo PQC tienen la misma base y la misma altura, siendo la suma de estas áreas igual a $\frac{1}{4}$ del área total.

Por otra parte el triángulo MNP es $\frac{1}{16}$ del área total. Luego el área del triángulo MNC es $\frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$ del área del cuadrado original.

Problema 86. El abuelo Anacleto ha escrito los números del 1 al 120 en 15 filas, como se muestra en el diagrama. ¿Cuál de las columnas (de izquierda a derecha) tiene la mayor suma?

$$\begin{array}{lllll}
1 & & & & \\
2 & 3 & & & \\
4 & 5 & 6 & & \\
\vdots & & & & \\
106 & 107 & 108 & \dots & 120
\end{array}$$

Solución

Sea S_1 la suma de los 15 números ubicados en la primera columna, observemos que las siguientes columnas se generan a partir de la primera:

$$\begin{array}{llllll}
1 & & & & & \\
2 & 2+1 & & & & \\
4 & 4+1 & 4+2 & & & \\
7 & 7+1 & 7+2 & 7+3 & & \\
\vdots & & & & & \\
106 & 106+1 & 106+2 & 106+3 & \dots & 106+14
\end{array}$$

De este modo tenemos que:

- $S_2 = S_1 + 1 \cdot 14 - 1 = S_1 + 13$
- $S_3 = S_1 + 2 \cdot 13 - 1 - 2 = S_1 + 23$
- $S_4 = S_1 + 3 \cdot 12 - 1 - 2 - 4 = S_1 + 29$
- $S_5 = S_1 + 4 \cdot 11 - 1 - 2 - 4 - 7 = S_1 + 30$
- $S_6 = S_1 + 5 \cdot 10 - 1 - 2 - 4 - 7 - 11 = S_1 + 25$

Así observamos que los valores de $S_6, S_7, \dots, S_{15}$ comienzan a decrecer, luego la máxima suma está en la quinta columna.

Problema 87. En veintidós cartas han sido escritos números enteros positivos desde el uno al veintidós. Con estas cartas se han hecho once fracciones. ¿Cuál es la máxima cantidad de dichas fracciones que pueden dar resultados enteros?

Solución

Analicemos los primos del 1 al 22 estos son: $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$, inmediatamente nos damos cuenta que los primos 13, 17 y 19 estando como numerador o como denominador de cualquiera de las once fracciones nos generarán fracciones que no pueden dar resultados enteros, pues el 13, el 17 y el 19 no dividen a ninguno de los veintidós números y no son divididos por ninguno de los veintidós números excepto del uno. Luego sería conveniente elegir dos de estas cartas y hacer una fracción, y la carta que quede, emparejarla con la carta que contiene el uno.

Así entre el $\{1, 13, 17, 19\}$ sólo podremos formar una fracción que de un entero positivo y otra fracción que no de un entero positivo, por ejemplo $\dfrac{13}{1}$ será la que nos sirve y $\dfrac{17}{19}$ será la que descartaremos.

De las 11 fracciones que podíamos crear con los números del 1 al 22, ya hemos descartado una de ellas, pues es imposible que nos dé un entero positivo, así también dejemos de lado la fracción 13/1 pues sabemos que es la única combinación con la cual tomando en cuenta el 13 nos dé fracción igual a un entero positivo.

Ahora intentemos formar las 9 fracciones que resulten ser igual a un entero positivo. Los números que nos quedan por analizar son:

$$\{2, \underline{3}, 4, \underline{5}, 6, \underline{7}, 8, \underline{9}, 10, \underline{11}, 12, \underline{14}, \underline{15}, 16, \underline{18}, 20, \underline{21}, \underline{22}\}$$

No hay ningún número de ellos que divida al 11, pero el 11 divide al 22, así que formamos esa pareja, de la misma manera no existe ningún número de la lista que divida a 7, pero el 7 divide al 14, así que formamos esa pareja. Al número 21 sólo lo divide el 3 y el 7, pero como ya utilizamos el 7 afirmamos que el 3 divide al 21 así que formamos esa pareja, de igual forma al 15 sólo lo divide el 3 y el 5, pero como ya utilizamos el 3, decimos que el 5 divide al 15 así que formamos esa pareja. Como ya tomamos el 3, entonces el 9 no puede ser dividido, luego el 9 divide al 18 así que formamos esa pareja.

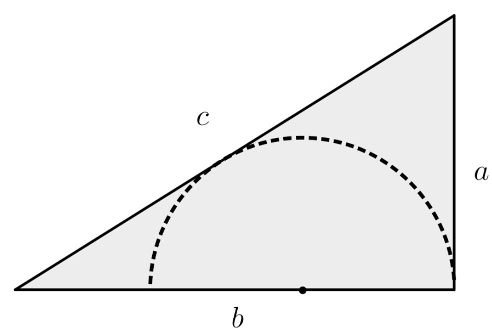
Ahora sólo nos quedan los números:

$$\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 16, 20\}$$

Al 20 lo divide el $\{2, 4, 10\}$. Al 16 lo divide el $\{2, 4, 8\}$. Al 12 lo divide el $\{2, 4, 6\}$. Al 10 lo divide el $\{2, 5\}$. Así que podemos emparejar el 10 con 5, el 12 con el 6, el 16 con el 4 y el 20 con el 2.

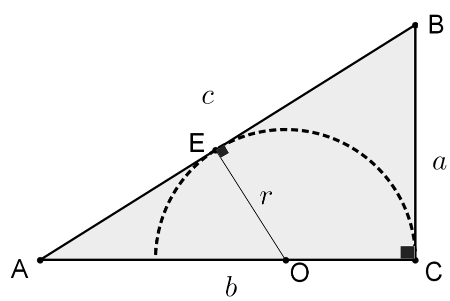
Finalmente de las 11 fracciones a lo más 10 pueden dar resultados enteros.

Problema 88. La figura siguiente muestra un triángulo rectángulo de lados a, b y c. ¿Cuál es el radio del semicírculo inscrito?



Solución

Dado el triángulo rectángulo en C de lados a, b, c. Se tiene que $c^2 = a^2+b^2$, trazamos el radio r de la semi-circunferencia desde el punto O hasta el punto E, que es perpendicular al lado c.



Por el teorema de la tangente se tiene que el lado c queda dividido por E en dos partes, $AE = c - a$ y $EB = a$. Del mismo modo el lado b queda dividido en dos partes, $AO = (b - r)$ y $OC = r$. Luego se forma un triángulo rectángulo de catetos $(c - a)$ y r e hipotenusa $(b - r)$.

Por pitágoras se tiene que:

$$\begin{aligned}
(c-a)^2 + r^2 &= (b-r)^2 \\
c^2 - 2ac + a^2 + r^2 &= b^2 - 2br + r^2 \\
2br &= b^2 - c^2 - a^2 + 2ac \\
2br &= \left(b^2 - c^2\right) - a^2 + 2ac \\
2br &= -a^2 - a^2 + 2ac \quad / \cdot \frac{1}{2} \\
br &= -a^2 + ac \\
r &= \frac{a\,(c-a)}{b}
\end{aligned}$$

Luego el radio del semi-círculo inscrito es $r = \dfrac{a\,(c-a)}{b}$

De otro modo observemos que el triángulo ABC es semejante al triángulo OAE, pues $\angle OEA \cong \angle BCA$, $\angle OEA \cong \angle BCA = 90°$ y $\angle OAE \cong \angle BAC$ ya que lo comparten, de este modo podemos establecer las siguientes proporciones:

$$\frac{r}{a} = \frac{c-a}{b}$$

Por lo tanto, $r = \dfrac{a\,(c-a)}{b}$

Problema 89. Andrés y Daniel recientemente tomaron parte en una maratón. Después de terminar, se dieron cuenta que Andrés terminó antes que el doble de personas que terminaron antes que Daniel, y que Daniel terminó antes que 1,5 de los corredores que terminaron antes que Andrés. Si Andrés finalizó en el vigésimo primer lugar. ¿Cuántos corredores compitieron en la maratón?

Solución

Si Andrés finalizó en el lugar número 21, entonces antes de él hay 20 personas más, contando a Andrés hay 21 corredores.

Si Daniel terminó antes que $1,5$ de los corredores que terminaron antes de Andrés, entonces hay 30 corredores después de Daniel, contando a Daniel hay 31 corredores.

Y si Andrés terminó antes que el doble de personas que Daniel, obtenemos la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} 2x + 1 &= x + 31 \\ 2x &= 20 \\ x &= 10 \end{aligned}$$

Por lo tanto, después de Andrés hay 20 corredores, más los 20 corredores que hay antes de él tenemos 40 corredores, incluyendo a Andrés hay 41 corredores que compitieron en la maratón.

Problema 90. Julian ha escrito un algoritmo con el fin de crear una secuencia de números como

$$a_1 = 1, \quad a_{m+n} = a_n + a_m + n \cdot m$$

donde m y n son números naturales. Encuentre el valor de a_{2013}.

$\boxed{\text{Solución}}$

Comenzemos por encontrar los primeros términos e intentar conseguir una regularidad para ellos:

- $a_1 = 1$
- $a_2 = a_{1+1} = a_1 + a_1 + 1 \cdot 1 = 1 + 1 + 1 = 3$
- $a_3 = a_{2+1} = a_2 + a_1 + 1 \cdot 2 = 3 + 1 + 2 = 6$
- $a_4 = a_{2+2} = a_2 + a_2 + 2 \cdot 2 = 3 + 3 + 4 = 10$
- $a_5 = a_{4+1} = a_4 + a_1 + 4 \cdot 1 = 10 + 1 + 4 = 15$

De los primeros cinco términos de la secuencia, se puede inferir que la diferencia entre el primer término y el segundo es 2. Entre el segundo y el tercer término es 3. Entre el tercer y cuarto término es 4. Entre el cuarto y el quinto término es 5 y así sucesivamente. Ahora bien podemos notar que la diferencia entre el primer término y el cuarto término es la suma de las diferencias de los terminos anteriores desde a_1 hasta a_4, vale decir que:

$$a_4 - a_1 = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) = 2 + 3 + 4$$

Luego

$$a_4 = a_1 + 2 + 3 + 4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

Realizando la misma operación con el primer y quinto término se puede notar que:

$$a_5 - a_1 = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + (a_5 - a_4) = 2 + 3 + 4 + 5$$

Luego

$$a_5 = a_1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$$

Notemos que $a_n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... + n = \dfrac{n\,(n+1)}{2}$. Por lo que:

$$a_{2013} = \frac{2013 \cdot (2013+1)}{2} = \frac{2013 \cdot 2014}{2} = 2027091$$

Luego el valor del número buscado a_{2013} es 2027091.

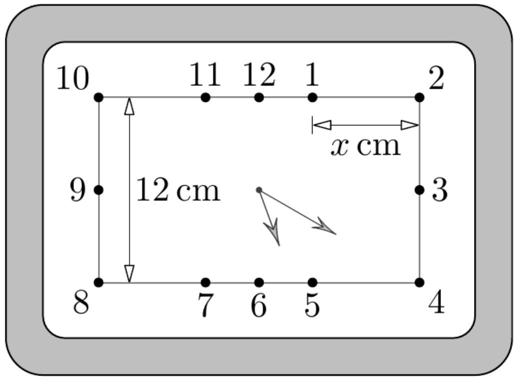
Otro camino es buscar una recurrencia alternativa al algoritmo $a_{m+n} = a_n + a_m + n \cdot m$, observemos el caso particular con $n = 1$

$$\begin{aligned} a_{m+1} &= a_m + a_1 + 1 \cdot m \\ a_{m+1} &= a_m + 1 + m \\ a_{m+1} &= a_m + (m+1) \qquad \forall m \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

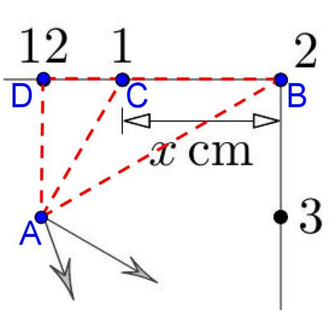
Por lo tanto:

$$\begin{aligned} a_{2013} &= a_{2012} + 2013 \\ &= a_{2011} + 2012 + 2013 \\ &= a_{2010} + +2011 + 2012 + 2013 \\ &\vdots \\ &= 1 + 2 + 3 + \ldots + 2013 \\ &= \frac{2013 \cdot (2013+1)}{2} \\ &= \frac{2013 \cdot 2014}{2} = 2027091 \end{aligned}$$

Problema 91. El reloj del dibujo es rectangular, cada manecilla se mueve a una velocidad constante, como un reloj normal (circular). Si la distancia entre los números 8 y 10 es de 12 cm. Calcular la distancia entre 1 y 2.



Solución



Notemos que si cada manecilla se mueve a una velocidad constante entonces la manecilla menor avanza 30° por cada hora, por lo que $\angle BAC = \angle CAD = 30°$.

Además el triángulo ACD por construcción es rectángulo en D con lado $AD = 6$cm, por ser un triángulo con ángulos de 30°, 60° y 90° se tiene que $DC = 2\sqrt{3}$ y $AC = 4\sqrt{3}$.

Por otra parte el triángulo ABC es isósceles pues $\angle ABC = \angle CAB = 30°$. Luego:

$$x = AC = 4\sqrt{3}$$

Problema 92. Todos los boletos para la primera fila de una función de cine están vendidos. Las sillas están numeradas consecutivamente comenzando desde el 1. Pero al cine llegaron dos personas más con entradas falsificadas para sillas numeradas consecutivamente. La suma de los números de los boletos recaudadas es igual a 857. ¿Cuáles son los posibles números de los boletos falsificados?

Solución

Supongamos que se han vendido n boletos donde los boletos k y $k+1$ son falsos, es decir:

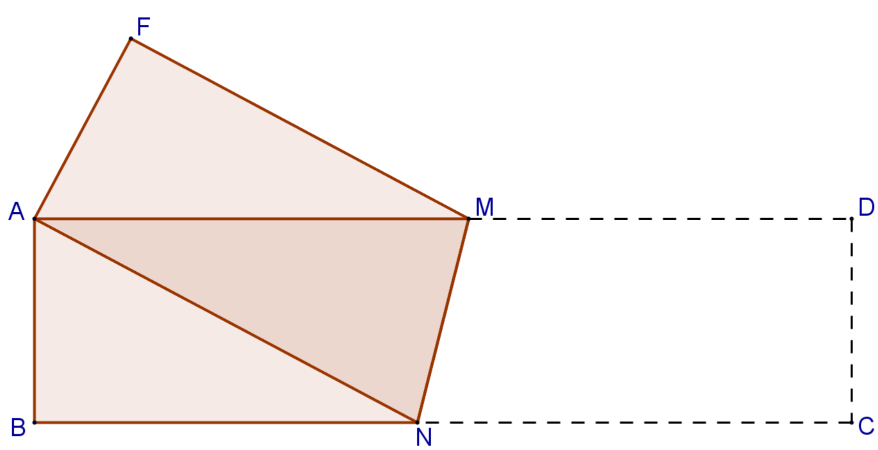
$$1+2+3+\ldots+n+k+(k+1)=857$$
$$\frac{n(n+1)}{2}+k+(k+1)=857$$

De modo que $\dfrac{n(n+1)}{2}<857$:

- $n=41 \Longrightarrow \dfrac{n(n+1)}{2}=\dfrac{41\cdot 42}{2}=861>857 \qquad$ (no sirve)
- $n=40 \Longrightarrow \dfrac{n(n+1)}{2}=\dfrac{40\cdot 41}{2}=820<857$ Sirve, pues $857-780=77=38+39$.
- $n=39 \Longrightarrow \dfrac{n(n+1)}{2}=\dfrac{39\cdot 40}{2}=780<857$ Sirve, pues $857-820=37=18+19$.
- $n=38 \Longrightarrow \dfrac{n(n+1)}{2}=\dfrac{38\cdot 39}{2}=741<857$ No sirve, pues $857-741=116$, y 116 es par, luego, no puede ser suma de dos consecutivos

Finalmente, las entradas falsificadas son de las sillas 18 y 19, o bien, de las sillas 38 y 39.

Problema 93. Un pedazo de papel rectangular $ABCD$ que mide 4cm $\times$ 16cm se dobla sobre la recta MN de tal forma que el vértice C coincida con el vértice A, como se muestra en la figura. ¿Cuál es el área del pentágono $ABNMF$?



Solución

En la figura, $AF = 4$, pues AF corresponde al lado DC antes de hacer el doblez, $AB = 4$, por ser un lado del papel rectangular. Se sabe también que $AD = BC = 16$. Como el vértice C coincide con el vértice A y N está ubicado en el lado BC, se tiene que $BN + AN = 16$. Del mismo modo $AM + FM = 16$ pues F debe coincidir con D al igual como lo hace A con C. Finalmente se puede notar que el área del pentágono $ABNMF$ corresponde a la suma de las áreas del triángulo rectángulo AFM recto en F y el trapecio rectángulo $ABNM$.

Como en el triángulo AFM recto en F, $AF = 4$ y $AM + FM = 16$, entonces $AM = 16 - FM$, por teorema de pitágoras se tiene:

$$\begin{aligned}
AF^2 + FM^2 =& AM^2 \\
4^2 + FM^2 =& (16 - FM)^2 \\
16 + FM^2 =& 256 - 32FM + FM^2 \\
32FM =& 240 \\
FM =& \frac{15}{2}
\end{aligned}$$

Luego como $FM = \frac{15}{2}$, entonces $AM = 16 - \frac{15}{2} = \frac{17}{2}$. Por lo tanto:

$$A_{\triangle AFM} = \frac{AF \cdot FM}{2} = \frac{4 \cdot \frac{15}{2}}{2} = 15\text{cm}^2$$

Para el triángulo ABN recto en B, con $AB = 4$ y sabiendo que $BN + AN = 16$, se obtiene (por teorema de pitágoras) lo siguiente:

$$\begin{aligned}
AB^2 + BN^2 =& AN^2 \\
4^2 + BN^2 =& (16 - BN)^2 \\
16 + BN^2 =& 256 - 32BN + BN^2 \\
32BN =& 240 \\
BN =& \frac{15}{2}
\end{aligned}$$

Luego, como $BN = \dfrac{15}{2}$, se tiene que $AN = \dfrac{17}{2}$. Por lo que el área del trapecio isósceles $ABNM$ de bases AM y BN, con lado perpendicular AB es:

$$\begin{aligned}
\text{Área trapecio} &= \frac{Base_1 + Base_2}{2} \cdot Altura \\
&= \frac{(AM + BN) \cdot AB}{2} \\
&= \frac{\left(\frac{17}{2} + \frac{15}{2}\right) \cdot 4}{2} \\
&= 32\text{cm}^2
\end{aligned}$$

Finalmente el Área del pentágono $ABNMF = 32 + 15 = 47\text{cm}^2$

Problema 94. Después de una lección de Álgebra, lo siguiente quedó en la pizarra: el gráfico de la función $y = x^2$ y 2013 rectas paralelas a la recta $y = x$ que cortan al eje y en $1, 2, \ldots, 2013$, cada una de las cuales intersecta al gráfico en dos puntos generando 4026 puntos. Calcular la suma de las ordenadas de estos puntos de intersección de las rectas y la parábola.

Solución

Notemos que toda recta paralela a la recta $y = x$ es de la forma L_n : $y = x + n$, y como L_n corta la parábola $y = x^2$, $n = 1, 2, \ldots 2013$.

Encontremos ahora las ordenadas de los puntos de intersección de las rectas con la parábola despejando la variable y de dichas ecuaciones:

- $y = x^2 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{y}$
- $y = x + n \Longrightarrow x = y - n$

Igualando estas ecuaciones se tiene:

$$\begin{aligned}
\pm\sqrt{y} &= y - n \qquad /()^2 \\
y &= y^2 - 2ny + n^2 \\
y^2 - (2n+1)y + n^2 &= 0
\end{aligned}$$

Luego:

$$y_1 = \frac{2n+1+\sqrt{(2n+1)^2-4n^2}}{2}, \quad y_2 = \frac{2n+1-\sqrt{(2n+1)^2-4n^2}}{2}$$

De este modo se tiene que $y_1 + y_2 = 2 \cdot \dfrac{2n+1}{2} = 2n+1$

Sumando las ordenadas para $n = 1, 2, \ldots, 2013$, se tiene:

$$\begin{aligned} S =& (2 \cdot 1 + 1) + (2 \cdot 2 + 1) + \ldots + (2 \cdot 2012 + 1) + (2 \cdot 2013 + 1) \\ S =& 3 + 5 + \ldots + 4025 + 4027 = 4056195 \end{aligned}$$

Una forma de hacer esta última suma es sumar dos veces este valor que obtuvimos pero considerando uno de ellos de forma inversa como se indica:

$$\begin{aligned} S =& 3 + 5 + 7 + \ldots + 4023 + 4025 + 4027 \\ +\ S =& 4027 + 4025 + 4023 + \ldots + 7 + 5 + 3 \end{aligned}$$

Sumando término a término se obtiene que:

$$2 \cdot S = (\underbrace{4030 + 4030 + 4030 + \ldots + 4030 + 4030 + 4030}_{2013 \quad veces})$$

Luego $2 \cdot S = 4030 \cdot 2013$, lo cual nos conduce a que:

$$S = \frac{4030 \cdot 2013}{2} = 4056195$$

Problema 95. El abuelo Anacleto matemático jubilado y aventurero suma los primeros n enteros positivos (consecutivos) hasta obtener un número de 3 dígitos donde todos los dígitos son iguales. ¿Cuántos números sumó el abuelo?.

Solución

Sea aaa el número de tres dígitos con todas sus cifras iguales, sabiendo que la suma de los n primeros términos es $\frac{n(n+1)}{2}$, entonces:

$$\begin{aligned} \frac{n(n+1)}{2} &= aaa \\ \frac{n(n+1)}{2} &= 100a + 10a + a \\ \frac{n(n+1)}{2} &= 111a \\ n(n+1) &= 222a \end{aligned}$$

Como $n\,(n+1)$ representa la multiplicación de dos números consecutivos, entonces cabe descomponer $222a$ en factores primos y elegir un cierto a que cumpla con que $222a$ sea la multiplicación de dos números consecutivos. En efecto sucede que $222a = 37 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a$, como a es un dígito, este puede tomar valores desde 0 hasta 9. Luego consideremos a 37 como uno de los dos términos consecutivos, por lo cual $2 \cdot 3 \cdot a$ debe ser 38 o 36.

Para el caso de $2 \cdot 3 \cdot a = 38$, se tiene que $a = \frac{19}{3}$, por lo que $\frac{19}{3}$ no es solución, puesto que no es un dígito.

Para el caso de $2 \cdot 3 \cdot a = 36$, se tiene que $a = 6$, por lo que 6 si es solución.

Luego se tiene que $n\,(n+1) = 37 \cdot 36$, lo cual implica que $n = 36$ y $n+1 = 37$. Por lo tanto el abuelo Anacleto sumó una cantidad de 36 números.

También podemos resolver el problema de otro modo, pues sabemos que:

$$
\begin{aligned}
\frac{n(n+1)}{2} &= 100a + 10a + a \\
\frac{n(n+1)}{2} &= 111a \\
n(n+1) &= 222a \\
n^2 + n - 222a &= 0 \\
n &= \frac{-1 \pm \sqrt{1+888a}}{2}
\end{aligned}
$$

De esta manera, para que n sea entero, $\sqrt{1+888a}$ debe ser entero con $a = 1, 2, \ldots, 9$. Comencemos descartando algunos casos de a sabiendo que el ultimo dígito de un cuadrado perfecto termina en $1, 4, 5, 6$ o 9, en nuestro caso el ultimo dígito de $1 + 888a$ es también el último dígito de $8a + 1$, de este modo tenemos que:

- Si $a = 1$, el último dígito de $8a + 1$ es 9
- Si $a = 2$, el último dígito de $8a + 1$ es 7
- Si $a = 3$, el último dígito de $8a + 1$ es 5
- Si $a = 4$, el último dígito de $8a + 1$ es 3

- Si $a = 5$, el último dígito de $8a + 1$ es 1
- Si $a = 6$, el último dígito de $8a + 1$ es 9
- Si $a = 7$, el último dígito de $8a + 1$ es 7
- Si $a = 8$, el último dígito de $8a + 1$ es 5
- Si $a = 9$, el último dígito de $8a + 1$ es 3

Por lo que descartamos $a = 2$, $a = 4$, $a = 7$, $a = 9$ y probamos con $a = 1$, $a = 3$, $a = 5$, $a = 6$, $a = 8$, obteniendo que $\sqrt{1 + 888a}$ es entero solo cuando $a = 6$. Finalmente, con $a = 6$ se tiene que $n = 36$.

Problema 96. Los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, y 10 están escritos alrededor de un círculo en orden arbitrario. Sumamos todos los números con sus vecinos, obteniendo diez sumas. ¿Cuál es el máximo valor posible para la más pequeña de estas sumas?

Solución

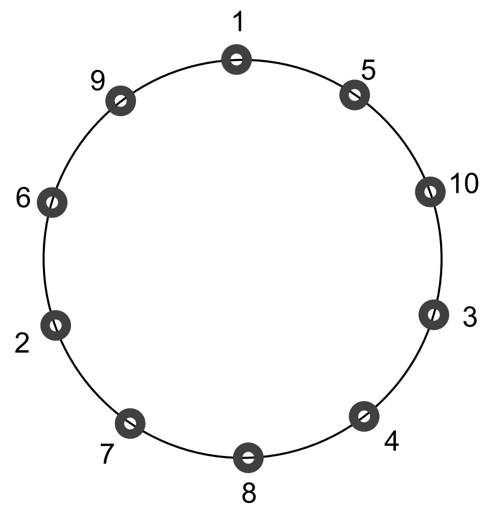
Notemos que cada uno de estos números se encontrará en 3 de cada una de estas 10 sumas, por ejemplo si tenemos la secuencia $\ldots, 7, 2, 5, 9, 6, \ldots$ el 5 está en la suma $7 + 2 + 5$, $2 + 5 + 9$ y $5 + 9 + 6$, o sea en tres sumas. Luego, si sumamos los resultados de cada una de las 10 sumas obtendremos $3 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10) = 3 \cdot 55 = 165$. Esto quiere decir que los tríos en promedio suman $16,5$. Por lo tanto el máximo valor posible para la más pequeña de estas sumas es menor que 17.

Primeramente, podemos analizar si el máximo valor posible para la más pequeña de estas sumas puede ser 16, para esto deberíamos tener 5 tríos que sumen 16 cada uno y 5 tríos que sumen 17 cada uno pues el promedio es $16, 5$, además como los números no se pueden repetir no pueden haber sumas consecutivas iguales, es decir, si la primera suma de $a_1 + a_2 + a_3$ es 16, $a_2 + a_3 + a_4$ debe ser igual a 17, de lo contrario a_1 sería igual a a_4.

De este modo podemos intentar probar algunos casos (5 en total) donde se cumpla lo anterior, dándonos cuenta que es imposible. Probemos ahora si el máximo valor posible para la más pequeña de estas sumas es 15, de este modo son muchos los casos pues las sumas pueden ser $15, 16, 17, 18, 19$ ya que por ejemplo:

$$\begin{aligned} 16.5 =& \frac{15+16+16+16+16+17+17+17+17+18}{10} \\ =& \frac{15+15+15+16+16+17+17+17+18+19}{10} \\ =& \ldots \end{aligned}$$

Por lo que podríamos probar varios casos e intentar lograr que el máximo valor posible para la más pequeña de las sumas sea 15. Así por ejemplo se puede encontrar la secuencia mostrada en la figura mostrando que el 15 si es el máximo valor posible.



Problema 97. ¿Cuántos enteros positivos son múltiplos de 2013 y tienen exactamente 2013 divisores (incluyendo a 1 y al mismo número)?

Solución

Analicemos a modo de ejemplo la cantidad de divisores de 600 incluyendo a 1 y al mismo número.

$600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$, vemos que cualquier combinación de productos entre estos factores será un divisor de 600, por ejemplo 2 divide a 600, $1 \cdot 3$ divide a 600, $2 \cdot 3$ divide a 600, $3 \cdot 5$ divide a 600, $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$ divide a 600, etc. Entonces debemos encontrar cuántas combinaciones son formadas con dichos factores.

- 2^3 aporta 4 factores, 2^0, 2^1, 2^2 y 2^3 ($3 + 1$ factores, donde 3 es el exponente de 2).
- 3 aporta 2 factores, 3^0 y 3^1 ($1 + 1$ factores, donde 1 es el exponente de 3) .

- 5^2 aporta 3 factores, 5^0, 5^1 y 5^2 ($2+1$ factores, donde 2 es el exponente de 5) .

Por lo tanto todas las combinaciones posibles entre estos factores son $(3+1)\cdot(1+1)\cdot(2+1)=4\cdot 2\cdot 3=24$ combinaciones, es decir, 200 tiene 24 divisores.

Realizamos la explicación anterior con el propósito de ayudar a entender el teorema de la descomposición prima de un número compuesto y relacionarla con su número de divisores, el cual no demostraremos, pues no es el propósito de este apunte.

De este modo tenemos que si n es un número compuesto se puede escribir de la siguiente manera:

$$n = p_1^{a_1}\cdot p_2^{a_2}\cdot p_3^{a_3}\cdot\ldots\cdot p_k^{a_k}$$

Donde $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k$ son primos, y $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ son naturales. Luego la cantidad de divisores de n está dada por:

$$(a_1+1)\cdot(a_2+1)\cdot(a_3+1)\cdot\ldots\cdot(a_k+1)$$

Como $2013 = 3\cdot 11\cdot 61$, los enteros positivos que tienen exactamente 2013 divisores son de la forma:

$$p_1^2\cdot p_2^{10}\cdot p_3^{60}$$

Por otra parte, no interesa conocer todos los enteros de la forma $p_1^2\cdot p_2^{10}\cdot p_3^{60}$ que sean múltiplos de 2013, para que esto se cumpla $p_1^2\cdot p_2^{10}\cdot p_3^{60}$ debe contener a 2013 y por lo tanto a su descomposición prima, de este modo los enteros que cumplen con ser múltiplos de 2013 y tener exactamente 2013 divisores son :

- $3^2\cdot 11^{10}\cdot 61^{60} = 3\cdot 11\cdot 61\cdot\left(3\cdot 11^9\cdot 61^{59}\right) = 2013\cdot\left(3\cdot 11^9\cdot 61^{59}\right)$
- $3^2\cdot 61^{10}\cdot 11^{60} = 3\cdot 11\cdot 61\cdot\left(3\cdot 61^9\cdot 11^{59}\right) = 2013\cdot\left(3\cdot 61^9\cdot 11^{59}\right)$
- $11^2\cdot 3^{10}\cdot 61^{60} = 3\cdot 11\cdot 61\cdot\left(11\cdot 3^9\cdot 61^{59}\right) = 2013\cdot\left(11\cdot 3^9\cdot 61^{59}\right)$
- $11^2\cdot 61^{10}\cdot 3^{60} = 3\cdot 11\cdot 61\cdot\left(11\cdot 61^9\cdot 3^{59}\right) = 2013\cdot\left(11\cdot 61^9\cdot 3^{59}\right)$
- $61^2\cdot 11^{10}\cdot 3^{60} = 3\cdot 11\cdot 61\cdot\left(61\cdot 11^9\cdot 3^{59}\right) = 2013\cdot\left(61\cdot 11^9\cdot 3^{59}\right)$
- $61^2\cdot 3^{10}\cdot 11^{60} = 3\cdot 11\cdot 61\cdot\left(61\cdot 3^9\cdot 11^{59}\right) = 2013\cdot\left(61\cdot 3^9\cdot 11^{59}\right)$

Luego existen 6 números enteros que cumplen con ser múltiplos de 2013 y tener exactamente 2013 divisores.

Problema 98. Juan elige un entero positivo de 5 cifras y borra uno de sus dígitos para convertirlo en un número de 4 cifras. La suma de este número de 4 cifras con el número de 5 cifras es 52713. ¿Cuál es la suma de los dígitos del número original de 5 cifras?

Solución

Escribamos el número de cinco cifras como $abcde$, donde cada una de las letras representa un número del 0 al 9. Si analizamos el enunciado, nos encontramos con cinco casos según sea la letra que se elimine.

Si eliminamos el dígito a, de acuerdo a la condición se tiene que $abcde + bcde = 52713$, lo cual es una contradicción pues al sumar las cifras de las unidades (e) esta suma es par ($2e$), y como e es entero $2e \neq 3$. Lo mismo ocurre si eliminamos el dígito b, c o d. Luego el único caso posible es eliminar el dígito e. Por lo tanto, $abcde + abcd = 52713$.

Reescribiendo la suma de los números en potencias de 10, se obtiene lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
abcde + abcd &= 52713\\
(10000a + 1000b + 100c + 10d + e) + (1000a + 100b + 10c + d) &= 52713\\
11000a + 1100b + 110c + 11d + e &= 52713
\end{aligned}
$$

Analizamos el valor más próximo a 52713. Por simple intuición $a = 4$, pues para $a \geq 5$ tendremos un valor mayor o igual a 55000. Luego $52713 - 4 \cdot 11000 = 52713 - 44000 = 8713$. Por lo tanto:

$$1100b + 110c + 11d + e = 8713$$

Ahora $b = 7$, pues para $b = 8$ excedemos el valor 8713. Luego $8713 - 7700 = 1013$. Por lo tanto:

$$110c + 11d + e = 1013$$

Ahora $c = 9$, pues es el valor más próximo a 1013. Luego $1013 - 990 = 23$.

Ahora bien,

$$11d + e = 23$$

Luego, $d = 2$, pues para $d = 3$ excedemos el valor 23. En consecuencia, $e = 1$. Por lo tanto, el número buscado es 47931. Finalmente, la suma de sus dígitos es $4 + 7 + 9 + 3 + 1 = 24$.

Problema 99. En una isla solo habían dos tipos de personas, los caballeros (que siempre dicen la verdad) y los bribones (que siempre mienten). Conocí dos hombres que vivían allí y le pregunté al más alto si ambos eran caballeros. El respondió, pero no pude darme cuenta de que era cada uno, así que le pregunté al hombre más bajo si el más alto era caballero. Me respondió, y después de eso supe que tipo era cada uno. ¿Eran caballeros o bribones?

(A) Ambos eran caballeros.
(B) Ambos eran mentirosos.
(C) El más alto era caballero y el más bajo era mentiroso.
(D) El más alto era mentiroso y el más bajo era caballero.
(E) No se da suficiente información.

Solución

Analicemos primero la respuesta del hombre más alto. Si su respuesta hubiera sido NO, entonces necesariamente se trataba de un caballero, pues si él era un bribón, la respuesta verdadera es que no eran ambos caballeros. Por lo tanto, necesariamente el hombre más alto respondió SÍ a la pregunta ¿son ambos caballeros?

Así, no es posible determinar qué tipo es cada hombre. Si el hombre más alto era caballero, entonces el más bajo también. Por el contrario, si el hombre más alto era bribón, no podemos saber qué tipo era el más bajo.

Analicemos ahora la respuesta del hombre más bajo. Supongamos que respondió SÍ. Si se trataba de un caballero, entonces dijo la verdad, y ambos eran caballeros. Si por el contrario, el hombre era un bribón, mintió, luego el hombre más alto también era bribón. Así, si la respuesta del hombre más bajo fue SÍ, no podemos saber qué tipo es cada uno.

En cambio, si el hombre más bajo respondió NO, y era un bribón, entonces, como miente, el hombre alto es un caballero, lo que contradice la respuesta SÍ del hombre más alto. Ahora, si respondió NO y es un caballero, entonces el hombre más alto es un bribón.

Luego, necesariamente las respuestas fueron SÍ a la primera pregunta y NO a la segunda, con lo cual, el hombre más alto era un bribón y el más bajo, un caballero.

Problema 100. Un cubo esta ubicado en el espacio de manera tal que tres de sus vértices (no todos sobre la misma cara) son $P(3,4,1)$, $Q(5,2,9)$ y $R(1,6,5)$. Encuentra el centro del cubo.

Solución

Consideremos lo siguiente, en un cubo se pueden encontrar tres diferentes distancias, la distancia de dos vértices consecutivos (el lado de una cara), la distancia de dos vértices opuestos en una misma cara (la diagonal de una cara) y finalmente la distancia de dos vértices opuestos que no están en una misma cara (la diagonal del cubo), donde se cumple la siguiente condición.

$$\text{Lado de una cara} < \text{Diagonal de una cara} < \text{Diagonal del cubo}$$

Además, el centro de un cubo se encuentra en el punto medio de la diagonal del cubo. Ahora bien, como los puntos P, Q y R no están todos sobre la misma cara, deberíamos hallar al menos dos de las distancias mencionadas anteriormente. Para ello procederemos a calcular la distancia entre los puntos P y Q, Q y R, P y R.

$$
\begin{aligned}
D_{PQ} =& \sqrt{(3-5)^2 + (4-2)^2 + (1-9)^2} \\
=& \sqrt{4+4+64} \\
=& \sqrt{72} \\
D_{QR} =& \sqrt{(5-1)^2 + (2-6)^2 + (9-5)^2} \\
=& \sqrt{16+16+16} \\
=& \sqrt{48} \\
D_{PR} =& \sqrt{(3-1)^2 + (4-6)^2 + (1-5)^2} \\
=& \sqrt{4+4+16} \\
=& \sqrt{24}
\end{aligned}
$$

Luego, $D_{PR} = \sqrt{24} < D_{QR} = \sqrt{48} < D_{PQ} = \sqrt{72}$

Por lo tanto, $\overline{PR}$ = lado de una cara, $\overline{QR}$ = diagonal de una cara y $\overline{PQ}$ = diagonal del cubo. Calculando el punto medio de la diagonal del cubo, obtenemos su centro:

$$
Centro = \left(\frac{3+5}{2}, \frac{4+2}{2}, \frac{1+9}{2} \right)
$$