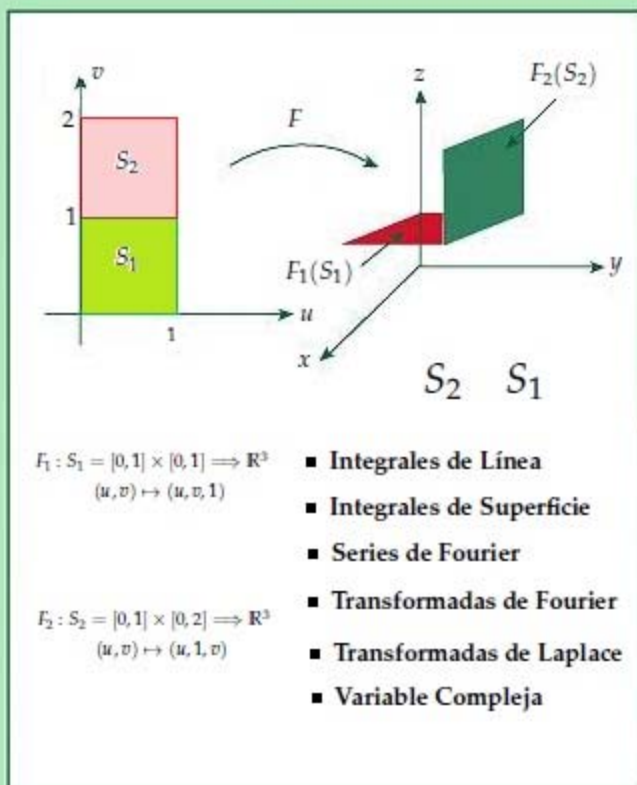


MATEMATICA

VOLUMEN 4



PEDRO H. VALENZUELA



2010
UFRO al Bicentenario

MATEMÁTICA

VOLUMEN 4

PEDRO H. VALENZUELA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y
ESTADÍSTICA

2008

INTRODUCCION

Ir quemando etapas parece ser el común denominador del crecimiento humano. Nacemos y somos guaguas, en seguida pasamos a ser niños, luego jóvenes y más tarde adultos y terminamos como integrantes de la tercera edad. En cada una de estas etapas teníamos y aún tenemos reglas que respetar. Te encuentras en la clase de equivalencia de los jóvenes, y estás empezando a poner punto final a tus estudios de Cálculo, sí, ése que empezaste a vivir hace cuatro semestres y el tiempo se te ha ido volando. Lejos está tu primer día de universidad, te pintaron, pediste plata para recuperar tu ropa, y con tu plata te invitaron a una fiesta. Hoy lo tomas como un aprendizaje más, pagaste tu noviciado, le repetiste la dosis a los mechones del año siguiente y la deuda está saldada. Vamos a recordar el camino recorrido en la asignatura colocando a la matemática y a la música como compañeras inseparables de nuestro estudio. Un estudio sin música es como un churrasco sin carne, como la tierra sin la Luna y un montón de otras analogías. Sin tratar de filosofar, me parece que ambas, la matemática y la música, tienen en común: orden, disciplina, encanto y método. Para algunos, la música pone el *sentimiento* y la matemática la *pasión*.

Este viaje medio real y medio imaginario tiene cuatro estaciones, la primera, el punto de partida, nuestro primer curso de cálculo. El primer día, recién acomodándonos en nuestro asiento, se nos vienen en avalancha los números reales con toda su artillería, y todo pasa tan rápido que los límites, la continuidad y las derivadas no nos dan respiro y tenemos que poner nuestro máximo empeño para salir victoriosos. Esta estación la podemos asociar con esa canción, un poco vieja quizás, pero renovada por Luis Miguel, de que “en la vida hay amores que nunca pueden olvidarse ...”

La segunda estación, parece recibirnos con el tema de Roberto Carlos “quiero tener un millón de amigos ...”, integrales por doquier, los métodos para resolverlas nos asombran y parecen un invento maravilloso. Desde el baúl de los recuerdos y por arte de magia aparece el genial Pappus, que nos hace dar vueltas y giros alrededor de rectas arbitrarias. Las integrales impropias con la Beta, la Gamma y sus criterios de convergencia nos ayudan a retomar la vertical. Con las series de potencias vamos dejando atrás esta etapa, escuchando en lejanía los aires reggaetoneros de “a ella le gusta la gasolina, dále más gasolina ...”

En la tercera estación suben como pasajeros los vectores, que resultan ser eximios malabaristas de rectas y planos en el espacio y expertos en sacar curvatura, torsión y planos osculadores. Más adelante nos presentan a los campos escalares con los cuales de inmediato llevamos la conversación al límite, y nos preocupamos de mantener la continuidad para poder tratar problemas de optimización bajo la atenta mirada de Lagrange que con sus multiplicadores nos da fuerzas para cantar ese tema

de Bosé que dice " voy a ganar, voy a ganar, voy a matarme por llegar". Hacia el final del trayecto entablamos conversación con un simpático alemán, Riemann, quien nos encanta con sus historias sobre integrales múltiples y de como calcular, áreas, volúmenes y centros de masa.

Y llegamos, estamos en la última estación. Suben al carro tres "mosqueteros", Green, Gauss y Stokes. Ellos son expertos en el arte de la hipnósis, y transforman serias integrales de línea en simpáticas integrales dobles, complicadas integrales de superficie en simples integrales de volumen. Un sueño reparador nos acerca al fin del viaje. Al despertar nos visitan dos señores de capa y espada, Fourier y Laplace, el primero nos conversa de una serie de funciones trigonométricas que le permitió resolver un problema de conducción de calor y de como pudo inventar una transformada para mejorar el aspecto de las imágenes. Laplace no se queda atrás y, con modestia, nos cuenta que también creó una transformada que sirve para resolver ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales. Hacia el final del viaje nos encontramos con monsieur Cauchy, un francés de tomo y lomo que nos habla sobre límites, continuidad, derivadas e integrales en el campo de los números complejos. Por fin, el viaje ha terminado y dan ganas de gritar un "ceacheí" y sentirnos ganador por todo lo aprendido y que deberemos poner en práctica en los cursos de especialidad. Al bajar se escucha el tema de Violeta Parra "gracias a la vida, que me ha dado tanto".

Al finalizar este viaje, agradezco a todos los que han ido enriqueciendo estas notas; a todos mis alumnos de ingeniería con los cuales he compartido experiencias y enseñanzas siempre novedosas, y de quienes guardo gratos recuerdos. A quienes se dieron el tiempo de leer los originales, hacer algunos ajustes y sugerencias (Armin Luer, Rodrigo Tranamil y Abdel Hidd). A mis alumnos de Pedagogía en Matemática que también tienen que lidiar con estos cuatro cálculos y me entregan su apoyo por seguir aportando en su aprendizaje. Por último, se agradece al Departamento de Matemática que se pone con la logística y el billete para la publicación, y a los profesores del Departamento que toman este texto como parte de su bibliografía, en especial Abdón Catalán, Herme Soto, Ricardo Leal y Eduardo Milman los cuales permiten su divulgación y mejoramiento.

Es mi deseo que la presente publicación se constituya en un valioso instrumento facilitador del aprendizaje de los contenidos aquí tratados para quienes deban cursar la asignatura. El autor deslinda todo tipo de responsabilidad en los errores que se puedan detectar en quien digita los originales y en quienes hicieron correcciones.

Pedro H. Valenzuela Tapia

PROFESOR

Temuco, Agosto de 2008

INDICE DE CONTENIDOS

CAPÍTULO I: CAMPOS VECTORIALES

1.1.	Introducción	1
1.2.	Campo vectorial	1
1.3.	Descripción de un campo vectorial	1
1.4.	Límite	4
1.5.	Continuidad	5
1.6.	Diferenciabilidad	5
1.7.	Regla de la cadena	6
1.8.	Integrales de línea	7
1.8.1.	Trayectorias	8
1.8.2.	Reparametrizaciones	9
1.8.3.	Conjuntos conexos, convexos y otros	11
1.8.4.	Integral de línea de campo escalar	13
1.8.5.	Propiedades de la integral de línea	15
1.9.	Aplicaciones de la integral de campo escalar	16
1.9.1.	Masa de un alambre	16
1.9.2.	Centro de masa	16
1.9.3.	Momento de inercia	16
1.10.	Integral de campo vectorial	18
1.10.1.	Propiedades de la integral de campo vectorial	20
1.10.2.	Circulación de un campo vectorial	22
1.10.3.	Flujo en el plano	24
1.10.4.	Otras Notaciones para la integral de campo vectorial	25
1.11.	Campos vectoriales conservativos	26
1.11.1.	Teoremas fundamentales	26
1.11.2.	Divergencia de un campo vectorial	33
1.11.3.	Rotacional de un campo vectorial	34
1.11.4.	El laplaciano	39
1.11.5.	Potencial escalar y vectorial	40
1.11.6.	Teorema de Helmholtz	41
1.11.7.	Teorema de Green	42
1.11.8.	Generalización del Teorema de Green	44
1.11.9.	Formas alternativas del teorema de Green	48
1.12.	Integrales de superficie	52

1.12.1. Parametrizaciones regulares - Plano tangente	56
1.13. Área de una superficie	58
1.13.1. Otras expresiones para el área	61
1.14. Integral de superficie de campo escalar	63
1.15. Aplicaciones	64
1.15.1. Area de Superficie	64
1.15.2. Masa - centro de masa	64
1.16. Integral de superficie de campo vectorial	66
1.17. Orientación de superficies	69
1.17.1. El Rotacional y el teorema de Stokes	71
1.17.2. La divergencia y el teorema de Gauss	81
1.17.3. Ley de Gauss	84
1.18. Problemas resueltos	87
1.19. Problemas propuestos	129
1.20. Problemas adicionales	140

CAPÍTULO II: SERIES DE FOURIER

2.1. El nacimiento de una gran idea	147
2.2. La importancia de las series de Fourier	148
2.2.1. Problema de aproximación	148
2.2.2. Funciones periódicas	148
2.3. Coeficientes de Fourier	150
2.3.1. Convergencia puntual de las series de Fourier	151
2.4. Serie de Fourier de funciones pares e impares	155
2.4.1. Serie de función impar	156
2.4.2. Serie de función par	157
2.5. Desarrollos de medio intervalo	159
2.6. Intervalo arbitrario	161
2.7. Componentes armónicas	162
2.8. Conceptos básicos sobre análisis de señales	164
2.8.1. Espectro en series de Fourier	167
2.9. Serie de Fourier en exponencial compleja	171
2.9.1. Espectro bilateral de una señal periódica	174
2.9.2. Potencia y teorema de Parseval	176
2.10. Fenómeno de Gibbs	179
2.11. Problemas Resueltos	182
2.12. Problemas Propuestos	206
2.13. Problemas adicionales	216

CAPÍTULO II: TRANSFORMADA DE FOURIER

3.1. Introducción	219
3.2. De la Serie a la Transformada de Fourier	220
3.3. Integral en senos y cosenos	224
3.3.1. Integral de Fourier Compleja	225
3.4. Transformada de Fourier	228
3.5. Función de Heaviside	230
3.5.1. Transformada del escalón unitario	232
3.6. Función impulso unitario	232
3.6.1. Transformada del impulso unitario	234
3.6.2. Transformada de una constante	235
3.7. Propiedades de la Transformada	235
3.8. Convolución	239
3.8.1. Ecuaciones diferenciales con Fourier	244
3.8.2. Transformada de una función periódica	245
3.9. Transformada seno y coseno	247
3.10. Transformada Finita de Fourier	249
3.11. Teorema de Parseval	251
3.12. Transformada de Laplace	254
3.13. Propiedades de la Transformada	255
3.14. Cálculo de Transformadas	257
3.14.1. Transformadas Inversas	260
3.15. Problemas resueltos	263
3.16. Problemas propuestos	289
3.17. Problemas adicionales	293

CAPÍTULO II: VARIABLE COMPLEJA

4.1. Elementos previos	297
4.2. Igualdad de números complejos	298
4.3. Propiedades algebraicas de $\mathbb{C}$	298
4.4. $\mathbb{C}$ como estructura vectorial	299
4.5. $\mathbb{C}$ como estructura de espacio métrico	299
4.5.1. Propiedades de la función distancia	300
4.5.2. Notación para la función distancia	300
4.5.3. Módulo de z	300
4.6. Representación geométrica y forma polar de un complejo	301
4.6.1. Fórmula de DeMoivre	302

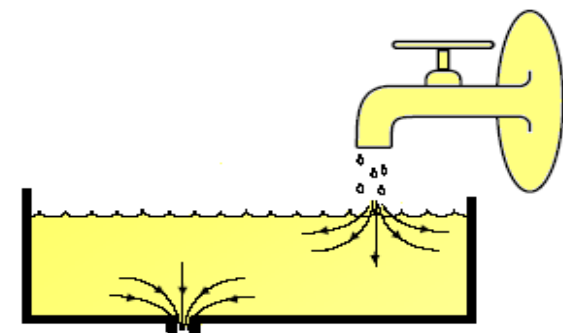
4.6.2.	Raíces de un número complejo	303
4.6.3.	Forma exponencial de un número complejo	303
4.6.4.	La función e^z	304
4.6.5.	Producto, cociente y potencia de complejos en forma exponencial	306
4.7.	Topología en el campo complejo	306
4.8.	Funciones complejas	308
4.8.1.	Representación gráfica	309
4.8.2.	Funciones trigonométricas e hiperbólicas	311
4.8.3.	Función Logaritmo	313
4.8.4.	Potencias complejas	315
4.9.	Límite	316
4.9.1.	Continuidad	316
4.9.2.	Propiedades de las funciones continuas	318
4.10.	Diferenciación	319
4.10.1.	Ecuaciones de Cauchy - Riemann	321
4.10.2.	Interpretación geométrica de la derivada	325
4.10.3.	Interpretación física de la derivada	327
5.1.	Integración compleja	331
5.1.1.	Funciones complejas de variable real	332
5.1.2.	Curvas y contornos en $\mathbb{C}$	334
5.2.	Integrales de contorno en $\mathbb{C}$	335
5.2.1.	Interpretación de $\int_C f(z) dz$	335
5.2.2.	Cálculo de $\int_C w dz$	339
5.3.	Integral Indefinida	340
5.3.1.	Teorema integral de Cauchy-Goursat	343
5.3.2.	El teorema de Cauchy-Goursat y dominios múltiplemente conexos	345
5.4.	Algunas consecuencias del teorema integral de Cauchy	347
5.4.1.	La fórmula integral de Cauchy	347
5.4.2.	El teorema del valor medio de Gauss y el principio del módulo máximo	351
5.4.3.	Integrales de la forma $\int_\alpha \frac{f'}{f}$	354
5.5.	Series de potencia	357
5.5.1.	Serie de Taylor	359
5.5.2.	Serie de Laurent	362
5.5.3.	Propiedades adicionales de las series	366
5.6.	Polos, singularidades y residuos	367
5.7.	Residuo	370

5.7.1.	Cálculo del residuo	371
5.7.2.	Teorema de los residuos	373
5.8.	Cálculo de integrales	373
5.8.1.	Integrales del tipo $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$	373
5.8.2.	Integrales del tipo $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx$	374
5.8.3.	Integral del tipo $\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$	376
5.8.4.	Integrales $\int_{-\infty}^{\infty} R(x) \sin mx dx$ y $\int_{-\infty}^{\infty} R(x) \cos mx dx$	378
5.8.5.	Integral del tipo $\int_{-\infty}^{\infty} e^{imx} f(x) dx$	379
5.8.6.	Integrales $\int_0^{\infty} x^{-k} R(x) dx$	381
5.8.7.	Valor principal de Cauchy	383
5.8.8.	Integrales del tipo $\int_0^{\infty} f(x) \log x dx$	386
5.8.9.	Transformada de Laplace inversa por residuos	387
5.9.	Problemas resueltos	390
5.10.	Ejercicios propuestos	414
5.11.	Problemas adicionales	419

El principio de la sabiduría
es el temor a Jehová.
Los insensatos desprecian
la sabiduría y la enseñanza
Proverbios 1:7

CAPÍTULO

CAMPOS 1 VECTORIALES



1.1. Introducción

Se dice que en una región del espacio existe un **campo** cuando a cada punto de esa región se le puede asignar un valor único de determinada magnitud. En el caso de que la magnitud sea un escalar se dirá que el campo es **escalar**. Por el contrario, si la magnitud es de carácter vectorial diremos que se trata de un campo **vectorial**.

Recordemos que, analíticamente, un campo escalar es una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que asigna a cada valor de $\vec{x}$ un único valor $f(\vec{x})$. Geométricamente un campo escalar se representa mediante las superficies **isoescalares** (superficies en las que el valor $f(\vec{x})$ se mantiene constante). Dependiendo de la magnitud de la que se trate, las superficies isoescalares tomarán un nombre u otro (isotermas, isobaras, etc.). Debido a la definición de campo escalar dos superficies isoescalares nunca pueden cortarse.

1.2. Campo vectorial

Los campos vectoriales son uno de los conceptos fundamentales de la física. Sin ellos es imposible entender ni el electromagnetismo, ni la óptica, ni desde luego ramas más avanzadas de la física como la gravitación o la mecánica cuántica.

Un campo vectorial es una función $\vec{F}$ que asocia a cada punto del espacio un vector. Un ejemplo de campo vectorial es la velocidad del viento en cada punto de la Tierra. Dicha velocidad se expresa no solo con su valor, sino con la dirección en la que sopla el viento.

Analíticamente un campo vectorial es una función $\vec{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ que asigna a cada valor de $\vec{x}$ un único valor $\vec{F}(\vec{x})$. Trataremos en especial los casos $n = 2$ y $n = 3$. Para denotar un campo vectorial usaremos $\vec{f}$, $\vec{F}$ o simplemente F , si el contexto de trabajo es claro. Puede parecer que un campo vectorial resulte ser algo muy abstracto, pero en verdad estamos rodeados de campos vectoriales, la velocidad del café cuando lo movemos con una cuchara, o las ondas de radio y de televisión son ejemplos de ello.

1.3. Descripción de un campo vectorial

La representación geométrica de los campos vectoriales es algo más compleja que la de un campo escalar, ya que en este caso, además del módulo se debe indicar la dirección y el sentido propios de la magnitud vectorial. Las curvas que representan el campo vectorial se denominan líneas vectoriales, de flujo, o simplemente de campo y se dibujan de tal forma que sean tangentes en todos sus puntos a los vectores del campo. Las líneas de campo determinan la dirección de $\vec{F}$ pero no informan sobre su módulo. Para tener una idea sobre el valor del módulo, se debe elegir una porción de superficie y construir las líneas de campo de los puntos que se encuentran en la superficie. De esta manera, en las regiones del campo en que $\vec{F}$ tenga un módulo grande habrá muchas líneas de campo por unidad

1.3 Descripción de un campo vectorial

de superficie normal a ellas. Lo contrario ocurrirá en las zonas en que el módulo de $\vec{F}$ sea pequeño.

Definición 1.3.1. Una curva α contenida en el dominio del campo $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una línea de campo si tiene la propiedad de que $\vec{F}(\alpha(t)) = \alpha'(t)$.

Esto significa que una línea de campo vectorial es una trayectoria cuya derivada es igual al campo vectorial. En consecuencia, hallar las líneas de campo vectorial supone la resolución de un sistema de ecuaciones diferenciales

$$x'(t) = F_1(\alpha(t)) \quad y'(t) = F_2(\alpha(t))$$

Ejemplo 1.3.2. Dibujemos algunas líneas de flujo del campo vectorial $F(x, y) = (y, -x)$.

Usando la definición tenemos que debe cumplirse

$$x'(t) = y(t), \quad y'(t) = -x(t)$$

Teniendo claro que las derivadas son respecto de t , al derivar la primera ecuación y reemplazando en ella el valor que tiene $y'(t)$ en la segunda ecuación, se reduce el sistema a la ecuación

$$x''(t) + x(t) = 0 \iff (D^2 + 1)x(t) = 0$$

cuya solución es $x(t) = a \cos t$. Se sigue de esto que $y(t) = -a \sin t$. En consecuencia, las líneas de flujo son de la forma

$$\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t)$$

que en coordenadas cartesianas representa circunferencias de radio a centradas en el origen. La figura 1.1 muestra el campo vectorial y algunas líneas de flujo.

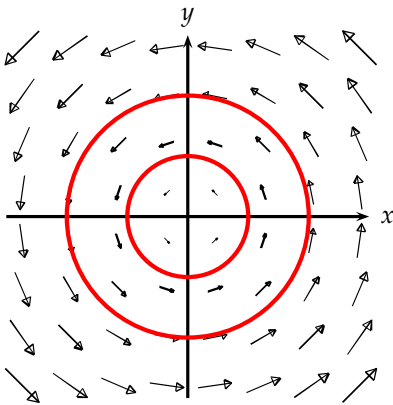


figura 1.1

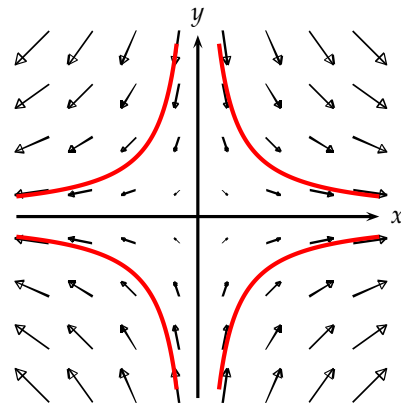


figura 1.2

Ejemplo 1.3.3. Dibujemos algunas líneas de flujo del campo vectorial $\vec{F}(x, y) = (x, -y)$.

De acuerdo con la definición debemos tener

$$x'(t) = x(t), \quad y'(t) = -y(t)$$

Resolviendo ambas ecuaciones por separación de variables:

$$x(t) = a e^t, \quad y(t) = b e^{-t}$$

De esta manera, las líneas de flujo son de la forma

$$\alpha(t) = (a e^t, b e^{-t})$$

Al resolver

$$x = a e^t, \quad y = b e^{-t}$$

se llega a que $xy = ab$. Tenemos así que las líneas de flujo son una familia de hipérbolas $xy = k$, donde k puede ser positivo o negativo (figura 1.2).

Dos líneas de campo nunca se pueden cruzar porque en el punto de corte habría dos tangentes y entonces el campo tendría dos valores distintos. No obstante, pueden existir puntos de donde divergen las líneas de campo (**fuentes**) o en los que convergen (**sumideros**). En dichos puntos el campo no está definido; existe en ellos una singularidad.

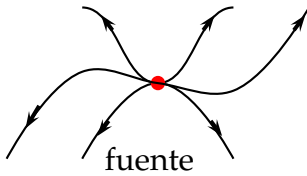


figura 1.3

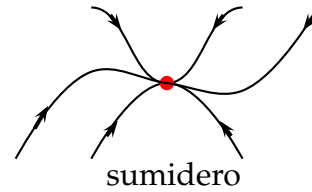


figura 1.4

Un ejemplo interesante de campo vectorial lo constituye un líquido que fluye dentro de un tubo. En un momento dado, cada partícula del líquido se está moviendo a determinada velocidad (que es una magnitud vectorial) en la dirección del flujo. Así pues, podemos establecer la función

$$\vec{F} : \text{puntos del interior del tubo} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

que a cada partícula del fluido le asocia la velocidad que ésta tiene. Éste es un campo en $\mathbb{R}^3$, llamado **campo de velocidades** (figura 1.5). La figura 1.6 muestra las líneas del campo eléctrico correspondientes a una moneda con carga eléctrica positiva.

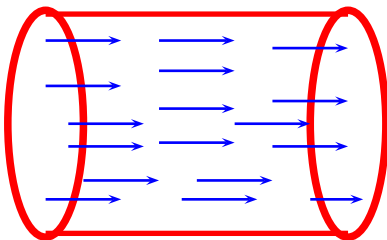


figura 1.5

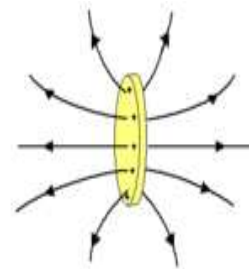


figura 1.6

1.4. Límite de campo vectorial

El estudio de los conceptos de límite, continuidad y diferenciabilidad no difiere, mayormente, del realizado en campos escalares. Una vez más es fundamental considerar las funciones componentes

Definición 1.4.1. El campo vectorial $\vec{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tiene por límite el **vector** $\vec{L}$ cuando $\vec{x} \rightarrow \vec{a}$, que se anota $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{F}(\vec{x}) = \vec{L}$, si y sólo si

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(0 < \|\vec{x} - \vec{a}\| < \delta \implies \|\vec{F}(\vec{x}) - \vec{L}\| < \epsilon)$$

La definición de límite en términos de las funciones componentes es el siguiente:

Definición 1.4.2. El límite de $\vec{F} = (F_1, \dots, F_m)$ cuando $\vec{x}$ tiende a $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$ es $\vec{L} = (L_1, \dots, L_m)$ si $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} F_i(\vec{x}) = L_i$ para cada $i = 1, \dots, m$. Lo denotamos

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{F}(\vec{x}) = \vec{L}$$

Ejemplo 1.4.3. Probemos que $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} (x - y, x + y, x^2) = (0, 2, 1)$.

Es claro que estamos tratando con un campo vectorial de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$. Para probar que $(0, 2, 1)$ es el límite hay que probar que se satisface la definición en cada componente.

Primera componente

$$|x - y| = |(x - 1) - (y - 1)| \leq |x - 1| + |y - 1|$$

Se sabe que $|x - 1| < \delta$, $|y - 1| < \delta$. Luego,

$$|x - y| < 2\delta = \epsilon \implies \delta = \frac{\epsilon}{2}$$

con lo cual, $\delta = \frac{\epsilon}{2}$

Segunda componente

$$|x + y - 2| = |x - 1 + y - 1| \leq |x - 1| + |y - 1| < 2\delta = \epsilon$$

se sigue que $\delta = \frac{\epsilon}{2}$

Tercera componente

$$|x^2 - 1| = |x - 1| |x + 1| < |x + 1| \delta$$

Para acotar $|x + 1|$ se parte de $|x - 1| < \delta = 1$. Se tiene que

$$-1 < x - 1 < 1 \implies 1 < x + 1 < 3 \implies |x + 1| < 3$$

Luego, $\delta = \min\{1, \frac{\epsilon}{3}\}$.

Del trabajo realizado en cada componente se sigue que el δ adecuado es $\delta = \min\{1, \frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{3}\}$. Se concluye que $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} (x - y, x + y, x^2) = (0, 2, 1)$.

1.5. Continuidad

Definición 1.5.1. El campo vectorial $\vec{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es continuo en el punto $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ si y sólo si $\forall \epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$||\vec{x} - \vec{a}|| < \delta \implies ||\vec{F}(\vec{x}) - \vec{F}(\vec{a})|| < \epsilon$$

El concepto de continuidad en términos de las funciones componentes es:

$$\vec{F} \text{ es continua en } \vec{a} \text{ si } \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{F}(\vec{x}) = \vec{F}(\vec{a})$$

Por ejemplo, para ver que el campo $\vec{F}(x, y) = (x + y, 2 - y)$ es continuo en todo punto de $\mathbb{R}^2$ basta observar que sus componentes $F_1 = x + y$ y $F_2 = 2 - y$ son continuas en cualquier punto del plano.

1.6. Diferenciabilidad

Vamos ahora a extender el concepto de diferenciabilidad a campos vectoriales, en la misma forma como lo hicimos para campos escalares. Recordemos que:

Definición 1.6.1. Una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es **diferenciable** en el punto $a \in \mathbb{R}$ si existe una transformación lineal $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a) - \lambda(h)}{h} = 0$$

Este hecho lo podemos generalizar a campos vectoriales como sigue

Definición 1.6.2. El campo vectorial $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es **diferenciable** en $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ si existe una transformación lineal $\lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que

$$\lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \frac{||F(\vec{a} + \vec{h}) - F(\vec{a}) - \lambda(\vec{h})||}{||\vec{h}||} = 0$$

El vector $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$, $(F(\vec{a} + \vec{h}) - F(\vec{a}) - \lambda(\vec{h})) \in \mathbb{R}^m$. La aplicación lineal λ se llama **diferencial** de $\vec{F}$ en $\vec{a}$ y se anota $\lambda = D\vec{F}(\vec{a})$

Si el campo vectorial $\vec{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es diferenciable en el punto $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, entonces todas las derivadas parciales existen y se tiene

$$D\vec{F}(\vec{a}) = \begin{pmatrix} D_1 F_1 & \cdots & D_n F_1 \\ & \vdots & \\ D_1 F_m & \cdots & D_n F_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

en donde se considera $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $\vec{F} = (F_1, \dots, F_m)^T \in \mathbb{R}^m$, siendo $()^T$ la matriz traspuesta.

1.7 Regla de la cadena

Definición 1.6.3. Se llama matriz **jacobiana** o **derivada** del campo vectorial $\vec{F}$ en el punto $\vec{a}$ a la expresión

$$J(\vec{F}) = \begin{pmatrix} D_1 F_1 & \cdots & D_n F_1 \\ \vdots & & \vdots \\ D_1 F_m & \cdots & D_n F_m \end{pmatrix}(\vec{a})$$

Ejemplo 1.6.4. Consideremos el campo $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $F(x, y, z) = (x^2 + e^y, x + y \sin z)$.

El tamaño de la matriz jacobiana es 2×3 . Luego

$$J(\vec{F}) = \begin{pmatrix} 2x & e^y & 0 \\ 1 & \sin z & y \cos z \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.6.5. Consideremos el campo $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\vec{F}(x, y) = (x^2 + 2xy + y^2, xy^2 + x^2y)$.

El tamaño de la matriz jacobiana es 2×2 . Tenemos

$$J(\vec{F}) = \begin{pmatrix} 2x + 2y & 2x + 2y \\ y^2 + 2xy & 2xy + x^2 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.6.6. Si $\vec{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(t) = (t^3, t^2, t)$, entonces el tamaño de la matriz jacobiana es 3×1 . La derivada es

$$J(\vec{F}) = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 2t \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.6.7. Si $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = xyz$, entonces el tamaño de la matriz jacobiana es 1×3 . Luego,

$$J(\vec{F}) = (yz, xz, xy)$$

1.7. Regla de la cadena

Esta debe ser la más famosa de todas las reglas de cálculo diferencial. En una variable, se tiene

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

La generalización a campos vectoriales es como sigue

Definición 1.7.1. Sean $\vec{F} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ campo vectorial diferenciable en x_0 , $\vec{G} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ campo vectorial diferenciable en $\vec{F}(x_0)$, entonces el campo vectorial $(\vec{G} \circ \vec{F})$ es diferenciable en x_0 y se tiene

$$(\vec{G} \circ \vec{F})'(x_0) = \vec{G}'(\vec{F}(x_0)) \cdot \vec{F}'(x_0)$$

Ejemplo 1.7.2. Sean $\vec{F}(x, y) = (x^2 + y^2, x^2 - y^2)$, $\vec{G}(u, v) = (uv, u + v)$. Hallemos $(\vec{G} \circ \vec{F})'(2, 1)$.

Primero vemos dominio y codominio de cada campo:

$$\vec{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{y} \quad \vec{G} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

a partir de lo cual tenemos la composición

$$(\vec{G} \circ \vec{F}) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

El tamaño de la matriz compuesta es 2×2 . Empecemos a armar la matriz Jacobiana.

$$\vec{G}'(u, v) = \begin{pmatrix} v & u \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \vec{F}'(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -2y \end{pmatrix}$$

Ahora evaluemos

$$\vec{F}(2, 1) = (5, 3) \implies \vec{G}'(\vec{F}(2, 1)) = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Evaluemos

$$\vec{F}'(2, 1) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Finalmente,

$$(\vec{G} \circ \vec{F})'(2, 1) = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & -4 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$$

1.8. Integrales de línea

La integral de línea surge, fundamentalmente, por:

- Extensión de la noción de integral de Riemann estudiada en funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. El intervalo $[a, b]$ se reemplaza por una curva C en el espacio n -dimensional, y el integrando por un campo escalar f o un campo vectorial $\vec{F}$ definido y acotado en esa curva.
- Al estudiar diversos conceptos físicos tales como, por ejemplo el trabajo realizado por un campo de fuerzas (gravitatorio, magnético, eléctrico) al mover una partícula (masa unitaria, polo, carga unitaria) a lo largo de una curva durante un cierto intervalo de tiempo.

Previamente necesitamos dar a conocer algunos hechos importantes sobre curvas y conjuntos que aplicaremos en el transcurso del tema.

1.8.1. Trayectorias

Definición 1.8.1. Una función continua $\alpha : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, se denomina **camino**, **curva** o **trayectoria**. El punto inicial del camino es $\alpha(a)$ y el punto final $\alpha(b)$.

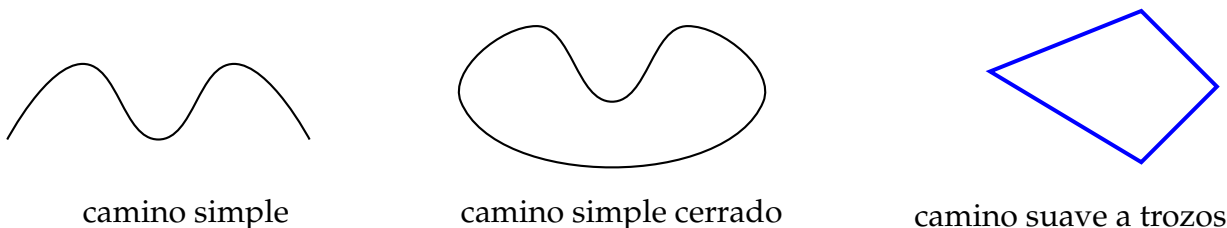


figura 1.7

Definición 1.8.2. Si en un camino $\alpha : I = [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ la restricción de α al intervalo $[a, b)$ es inyectiva, decimos que tal camino es **simple**. Si además, de ser α inyectiva verifica que $\alpha(a) = \alpha(b)$, entonces decimos que α es un camino **cerrado simple**.

Geométricamente, el que un camino o curva en $\mathbb{R}^n$ (con $n = 2$ o 3) sea simple, significa que la curva no tiene autointersecciones, es decir, que no se cruza a sí misma.

Ejemplo 1.8.3. La curva $\alpha : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (\sin t, \sin 2t)$ es cerrada, pero no es simple, ya que la restricción de α al intervalo $[-\pi, \pi)$ no es inyectiva ($\alpha(-\pi) = \alpha(0) = (0, 0)$).

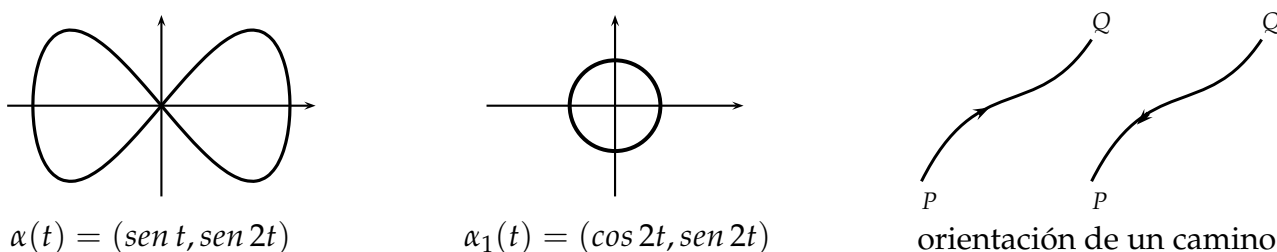


figura 1.8

Ejemplo 1.8.4. La trayectoria $\alpha_1(t) = (\cos 2t, \sin 2t)$, $0 \leq t \leq \pi$ representa una circunferencia de centro el origen de coordenadas y radio a , cuyo punto inicial y final es $(1, 0)$. Se trata entonces de una curva cerrada simple.

Toda curva tiene dos orientaciones, corresponden a las dos direcciones posibles del movimiento a lo largo de la curva. Así por ejemplo, se puede considerar una curva dirigida del punto P al Q o bien del punto Q al P . En una curva cerrada y simple del plano se considera sentido positivo el contrario al giro de las agujas de un reloj, y se considera negativo al mismo giro de las agujas de un reloj. Dicho de otra forma (ya no quedan relojes con aguja), un camino está orientado positivamente, si al viajar por ella un objeto, la región que encierra queda siempre a su izquierda. Esto último vale tanto para caminos cerrados del plano como del espacio.

Definición 1.8.5. Un camino $\alpha : I = [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ se dice que es **suave** si su vector velocidad $\alpha'(t)$ tiene componentes continuas y no simultáneamente nulas, para todo $t \in [a, b]$. Diremos que es **suave a trozos**, si el intervalo $[a, b]$ puede dividirse en un número finito de subintervalos, en cada uno de los cuales α es suave.

A un camino suave (respectivamente, suave a trozos) se le llama también camino de clase ζ^1 (respectivamente, de clase ζ^1 a trozos). La representación paramétrica de una curva suave se conoce como **parametrización regular**.

Ejemplo 1.8.6. La trayectoria $\alpha_2(t) = (\cos t, \sin t)$, para $0 \leq t \leq 2\pi$, representa la misma circunferencia del ejemplo 1.6.3.

Se observa que los dominios de ambas trayectorias son distintos, de manera que, si se piensa que t es el tiempo, entonces α_1 necesita la mitad del tiempo del que requiere α_2 para recorrer la circunferencia. De esto se deduce que la velocidad de recorrido de α_1 es el doble de la de α_2 . Por ejemplo, $\alpha_1'(0) = (0, 2)$ y $\alpha_2'(0) = (0, 1)$. Así, la velocidad de arranque es el doble. Por otra parte, α_2 representa una trayectoria de clase ζ^1 (suave), pues las derivadas de sus funciones componentes son continuas y no se anulan simultáneamente.

Ejemplo 1.8.7. La trayectoria $\alpha_3(t) = (\cos 4\pi t, \sin 4\pi t)$, $0 \leq t \leq 1$, representa la circunferencia unitaria recorrida dos veces. La trayectoria $\alpha_4(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$, $0 \leq t \leq 2$, representa la misma circunferencia unitaria recorrida dos veces.

Este ejemplo da a entender que una curva se puede parametrizar de diversas formas. Dependiendo de la trayectoria, algunas parametrizaciones se consideran más útiles que otras, por ejemplo, para las trayectorias cerradas se utilizan funciones seno y coseno, y para otra clase de curvas basta igualar una de las variables al parámetro y despejar la o las otras.

1.8.2. Reparametrizaciones

En algunos problemas se requiere que la parametrización sea en un sentido indicado. Dado que siempre se sabe parametrizar en uno de los dos sentidos, interesa conocer, como a partir de una parametrización conocida, se puede obtener la otra.

Definición 1.8.8. Sea h una función real, biyectiva y de clase ζ^1 , de $[a, b]$ en $[a_1, b_1]$. Sea α trayectoria de $[a_1, b_1] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase ζ^1 a trozos. La función

$$\rho = (\alpha \circ h) : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

se llama **reparametrización** de α . Esta nueva función ρ tiene las mismas propiedades que α .

1.8 Integrales de línea

El que la aplicación h sea biyectiva, significa que debe transportar puntos extremos en puntos extremos. Es decir, debe cumplir una de las siguientes condiciones:

- $h(a) = a_1$ y $h(b) = b_1$, ó bien
- $h(a) = b_1$ y $h(b) = a_1$

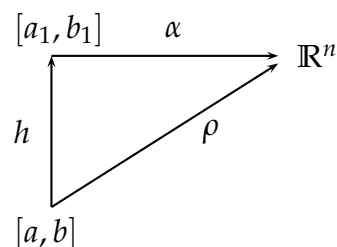


figura 1.9

A partir de lo cual se desprende que tenemos dos tipos de parametrizaciones:

☞ Una que **preserva** la orientación, dada por

$$\rho(a) = (\alpha \circ h)(a) = \alpha(a_1) \quad y \quad \rho(b) = (\alpha \circ h)(b) = \alpha(b_1)$$

Esto significa que una partícula que describe la trayectoria $(\alpha \circ h)$ se mueve en la **misma dirección** que una partícula que describe α .

☞ Otra, que es la que interesa, que **invierte** la orientación, dada por

$$\rho(a) = (\alpha \circ h)(a) = \alpha(b_1) \quad y \quad \rho(b) = (\alpha \circ h)(b) = \alpha(a_1)$$

Esto significa que una partícula que describe la trayectoria $(\alpha \circ h)$ se mueve en **dirección opuesta** a la que una partícula describe α .

Interesa la reparametrización siguiente:

☞ Sea $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ trayectoria de clase ζ^1 . Entonces la trayectoria

$$\rho : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto \alpha(a + b - t) = \rho(t)$$

es una reparametrización de α que corresponde a la función

$$h : [a, b] \rightarrow [a, b], \quad t \mapsto a + b - t$$

Esta reparametrización **invierte** la orientación ya que $\rho(a) = \alpha(b)$, $\rho(b) = \alpha(a)$.

Ejemplo 1.8.9. Parametricemos en ambos sentidos la curva parabólica $y = x^2$ que une $(0,0)$ con $(2,4)$.

La figura 1.10 muestra el segmento de parábola $y=x^2$ que une $(0,0)$ con $(2,4)$, tenemos $x = t$, $y = t^2$, $0 \leq t \leq 2$. Luego $\alpha(t) = (t, t^2)$, $0 \leq t \leq 2$ parametriza la trayectoria de la parábola desde $(0,0)$ al $(2,4)$. La parametrización opuesta, es decir, la que parametriza la trayectoria desde el $(2,4)$ al $(0,0)$ es

$$\rho(t) = \alpha(2 - t) = (2 - t, (2 - t)^2), \quad 0 \leq t \leq 2$$

Ejemplo 1.8.10. Hallemos una parametrización regular a trozos de la curva C compuesta por los segmentos de recta que unen, en este orden, los puntos $(0,0,0)$, $(0,2,0)$, $(1,2,0)$ y $(1,2,1)$.

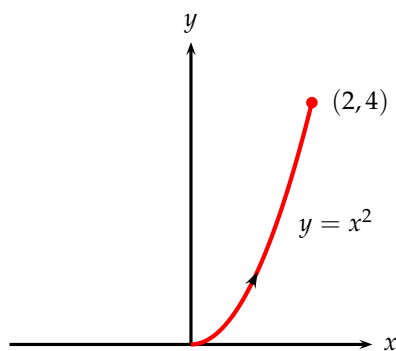


figura 1.10

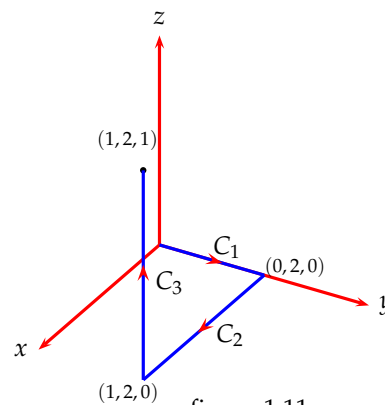


figura 1.11

La figura 1.11 muestra el camino a parametrizar. Puesto que C está formada por tres segmentos suaves C_1 , C_2 y C_3 , construimos una parametrización para cada uno de ellos y los unimos haciendo que el último valor de t en C_i corresponda con el primer valor de t en C_{i+1} (precisamente, para que la curva C sea suave a trozos, sus funciones componentes tienen que ser continuas, si no lo fueran, no serían derivables). Las parametrizaciones son:

$$C_1 : \alpha_1(t) = (0, 2t, 0), \quad 0 \leq t \leq 2$$

$$C_2 : \alpha_2(t) = (t - 1, 2, 0), \quad 1 \leq t \leq 2$$

$$C_3 : \alpha_3(t) = (1, 2, t - 2), \quad 2 \leq t \leq 3$$

Recordemos que la parametrización de una curva induce una orientación sobre ella. En este caso la curva está orientada de manera tal que su dirección positiva va de $(0,0,0)$ a $(1,2,1)$.

Para recordar:

- ☞ La parametrización predeterminada para la elipse de semiejes a y b , viene dada por $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por

$$\alpha(t) = (a \cos t, b \sin t)$$

- ☞ La gráfica de cualquier función real de variable real continua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ se parametriza en la forma $\alpha(t) = (t, f(t))$.
- ☞ La circunferencia de centro (a, b) y radio r viene parametrizada por $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $\alpha(t) = (a + r \cos t, b + r \sin t)$.

1.8.3. Conjuntos conexos, convexos y otros

Vamos a tratar de precisar matemáticamente cierta clase de conjuntos con los que trabajaremos más adelante, todos ellos relacionados con una propiedad de los conjuntos de puntos en $\mathbb{R}^n$ llamada **conexidad**. Algunos de estos conceptos los daremos de forma intuitiva.

De manera intuitiva, la propiedad de conexidad de un conjunto tiene que ver con el hecho de que tal conjunto está constituido por una o varias piezas. Así, decimos que un conjunto X es conexo

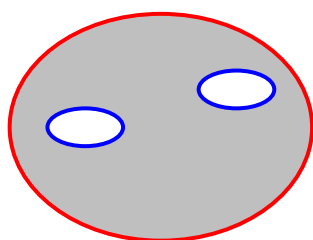
cuando éste consta de una sola pieza, y no es conexo cuando está conformado por varias piezas. Por ejemplo, un intervalo de la forma $I = (0, 1)$ en $\mathbb{R}$ es conexo, mientras que un conjunto de la forma $I = (0, 1) \cup \{3\}$ no lo es.

Definición 1.8.11. Un conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ es conexo por caminos (arco-conexo), si dos puntos arbitrarios de él pueden unirse mediante una curva suave a trozos, toda ella situada en el interior de X .

Se verifica que si un conjunto es arco-conexo entonces es conexo. Para que un conjunto conexo sea arco-conexo, necesitamos que éste sea abierto. Así, si un conjunto abierto es conexo, entonces es conexo por arcos. Especial importancia tienen los conjuntos simplemente conexos.

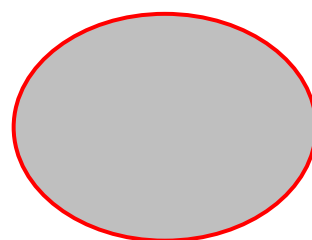
Definición 1.8.12. Un conjunto arco-conexo $X \subset \mathbb{R}^n$ es **simplemente conexo**, si todas las curvas simples cerradas que se encuentren en él pueden reducirse de forma continua hasta un punto del dominio, sin que ninguna parte de la curva pase por las regiones fuera de X .

La región del plano que se indica en la figura 1.12 no es simplemente conexa, porque ninguna curva cerrada que rodee a uno de los “agujeros” puede reducirse hasta convertirse en un punto, permaneciendo pese a ello en el conjunto.



conjunto no simplemente conexo

figura 1.12



conjunto simplemente conexo

Podemos dar otra caracterización de un conjunto simplemente conexo en el plano.

Definición 1.8.13. Una región del plano es simplemente conexa si su contorno consta de una única curva cerrada simple. En caso contrario se dice que es **múltiplemente conexa**.

Los conjuntos simplemente conexos en el espacio son, en términos generales, aquellos que no han sido perforados por agujero alguno.

Definición 1.8.14. Un conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ **convexo**, si dados dos puntos $\vec{p}$ y $\vec{q}$ en X , el segmento de recta que los une queda contenido en X .

Una elipse, un cuadrado, un círculo son ejemplos de conjuntos convexos. Se tienen las siguientes implicaciones para estos conjuntos:

$$\text{convexo} \implies \text{simplemente conexo} \implies \text{conexo por arcos} \implies \text{conexo}$$

Las implicaciones recíprocas son falsas en general, sólo la última es válida si además de ser conexo, el conjunto es abierto.

1.8.4. Integral de línea de campo escalar

Sea $\alpha : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ una trayectoria de clase ζ^1 . El vector velocidad $\alpha'(t_0)$, con $t_0 \in [a, b]$, indica en qué dirección se está moviendo el punto $\alpha(t)$ sobre la curva cuando éste pasa por el punto $\alpha(t_0)$. La magnitud de esta velocidad, $\|\alpha'(t_0)\|$, nos da una estimación numérica de la rapidez con que el punto se mueve. Ahora bien, si queremos calcular la longitud total del camino recorrido, entonces recurrimos al siguiente hecho.

Definición 1.8.15. Sea $\alpha : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ trayectoria de clase ζ^1 . La **longitud** L de α está dada por

$$L = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$$

A partir de esto se establece la diferencial de L . En efecto, si consideramos que el límite superior es variable, entonces usando el primer teorema fundamental del cálculo, tenemos los que sigue:

$$L = \int_a^t \|\alpha'(z)\| dz \implies \frac{dL}{dt} = \|\alpha'(t)\| \implies dL = \|\alpha'(t)\| dt$$

Interpretación física : La masa total de un alambre.

Pensemos en un alambre $A \subset \mathbb{R}^3$, del cual conocemos que su densidad lineal viene dada, en cada punto, por la función continua $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Supongamos que el alambre A es la imagen de una curva simple $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, de clase ζ^1 . Se quiere calcular la masa total del alambre M_A . Es obvio que si la densidad del alambre fuera constantemente d_0 , el problema se resuelve inmediatamente multiplicando d_0 por la longitud del alambre. Así tendríamos

$$M_A = d_0 L(\alpha) = d_0 \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$$

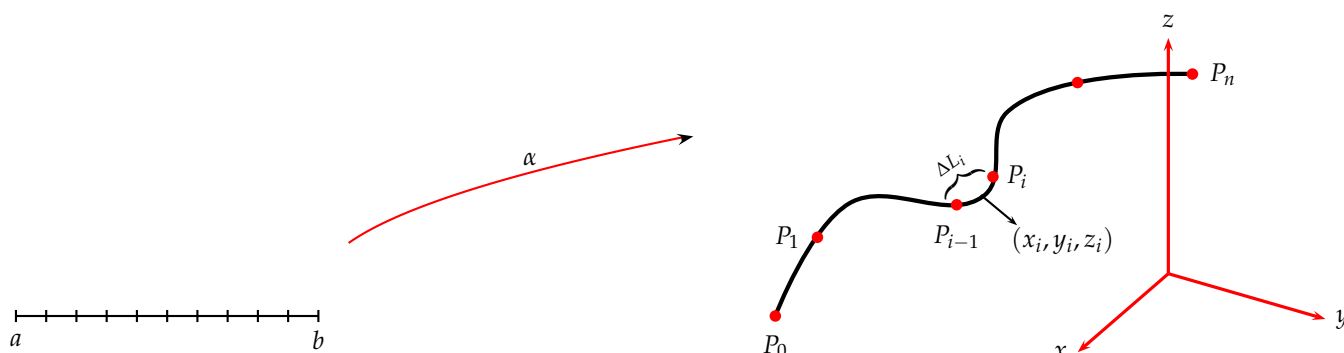


figura 1.13

Pero, ¿qué ocurre si la densidad del alambre es variable? Sigamos el siguiente argumento.

Es claro que, para cada partición $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ del intervalo $[a, b]$, su imagen es el arco de curva comprendido entre $\alpha(t_0) = P_0$ y $\alpha(t_n) = P_n$ (figura 1.13). Sea ΔL_i la longitud del i -ésimo

1.8 Integrales de línea

subarco. Escojamos ahora en cada subarco un punto (x_i, y_i, z_i) . Si los subarcos tienen longitudes muy pequeñas, la masa total del alambre se puede aproximar por la suma

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta L_i$$

Ahora, si $\|\Delta\|$ denota la longitud del subarco más grande de la partición efectuada y hacemos que $\|\Delta\|$ tienda a cero, parece razonable esperar que el límite de esta suma aproxime cada vez más la masa del alambre. Esto sugiere la siguiente definición.

Definición 1.8.16. Sean $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ trayectoria de clase ζ^1 , $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ campo escalar continuo definido y acotado sobre C (gráfica de α). La integral de línea f sobre α a lo largo de C se representa con el símbolo $\int_C f dL$ y se define por

$$\int_{\alpha} f dL = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta L_i = \int_a^b f(\alpha(t)) \|\alpha'(t)\| dt$$

siempre que exista la integral definida, bien como integral definida o bien como integral impropia.

Si consideramos que el campo escalar $f = 1$ en la definición de integral de línea, recuperamos la definición de longitud de arco. En efecto,

$$\int_{\alpha} f dL = \int_a^b f(\alpha(t)) dt \implies dL = \int_{\alpha} 1 dL = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt = L$$

Una interpretación geométrica : El área o el volumen de un recinto

Si aplicamos la definición de integral de línea en el caso $n = 1$ y $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $\alpha(t) = t$, entonces se tiene que

$$\int_{\alpha} f dL = \int_a^b f(t) dt$$

que, geométricamente, representa el área del recinto comprendido entre la gráfica de f y el eje x .

Análogamente, para $n = 2$, la integral de campo escalar $\int_{\alpha} f dL$ representa el volumen del recinto comprendido entre la gráfica de $z = f(x, y)$ y el plano xy .

No profundizamos estas ideas por tener mejores instrumentos para su cálculo, integrales dobles para el área e integrales dobles y triples para el volumen.

Valor promedio : Otra aplicación de esta clase de integrales tiene que ver con el valor promedio de la función f definida a lo largo de la curva C

$$V_P = \frac{1}{L(C)} \int f \cdot dL$$

donde $L(C)$ es la longitud de la curva C .

1.8.5. Propiedades de la integral de línea

Proposición 1.8.17. Sean $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva suave a trozos, A un abierto de $\mathbb{R}^n$ que contenga a $\alpha([a, b])$ y $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ dos campos escalares continuos. Se tiene:

Linealidad respecto del campo escalar : Si k_1 y k_2 son constantes, entonces

$$\int_{\alpha} (k_1 f + k_2 g) dL = k_1 \int_{\alpha} f dL + k_2 \int_{\alpha} g dL$$

Invarianza de la parametrización : Si ρ es una reparametrización de α , entonces

$$\int_{\alpha} f dL = \int_{\rho} f dL$$

Aditividad respecto del camino : Si $\rho : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es otra curva suave a trozos tal que $\alpha(b) = \rho(c)$,

$$\int_{\alpha+\rho} f dL = \int_{\alpha} f dL + \int_{\rho} f dL$$

Esta última propiedad, es obviamente, generalizable a n trayectorias que compongan una curva C .

Ejemplo 1.8.18. Calculemos el valor de la integral de línea del campo bidimensional $f(x, y) = 1 + x$, sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, recorrida en sentido antihorario.

Una parametrización conveniente de la circunferencia es

$$\alpha(t) = (\cos t, \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

De esto $\alpha'(t) = (-\sin t, \cos t) \implies \|\alpha'(t)\| = 1$. Ahora, el campo sobre la trayectoria tiene el valor $f(\alpha(t)) = 1 + \cos t$. Luego

$$\int_{\alpha} f dL = \int_0^{2\pi} (1 + \cos t) dt = 2\pi$$

Ejemplo 1.8.19. Calculemos $\int_{\alpha} f dL$ si α es el contorno del cuadrado definido por los ejes coordenados y las rectas $x = 1, y = 1$ recorrido en sentido positivo. El campo escalar es $f(x, y) = x^2 y$.

La figura 1.14 muestra el cuadrado y el sentido en que debe ser recorrido. Este cuadrado está compuesto de cuatro curvas suaves, por tanto, necesitamos una parametrización por cada una de sus caras.

- $\alpha_1(t) = (t, 0), \quad 0 \leq t \leq 1.$
- $\alpha_2(t) = (1, t), \quad 0 \leq t \leq 1.$
- $\alpha_3(t) = (1 - t, 1), \quad 0 \leq t \leq 1.$
- $\alpha_4(t) = (0, 1 - t), \quad 0 \leq t \leq 1.$

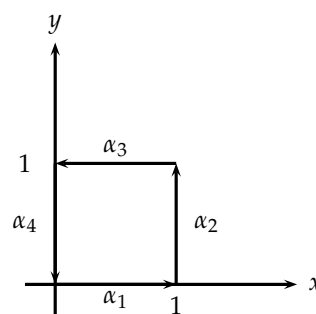


figura 1.14

El campo sobre cada trayectoria toma los siguientes valores:

1.9 Aplicaciones de la integral de campo escalar

$$f(\alpha_1(t)) = 0, \quad f(\alpha_2(t)) = t, \quad f(\alpha_3(t)) = (1-t)^2, \quad f(\alpha_4(t)) = 0$$

La norma de cada $\alpha'_i(t) = 1$, $i = 1, 2, 3, 4$. Luego

$$\int_{\alpha} f \, dL = \int_0^1 0 \, dt + \int_0^1 t \, dt + \int_0^1 (1-t)^2 \, dt + \int_0^1 0 \, dt = \frac{5}{6}$$

1.9. Aplicaciones de la integral de campo escalar

1.9.1. Masa de un alambre

Ya sabemos que, si α representa un alambre **recto**, y el campo escalar f es la densidad ρ de ese alambre, entonces la masa M de este alambre es el producto de la densidad por la longitud del alambre. Esto es

$$M = (\alpha(b) - \alpha(a)) \cdot \rho$$

Si el alambre es **poligonal** y ρ_i es la densidad de cada segmento recto de longitud L_i , entonces la masa total M del alambre es

$$M = \sum_{i=1}^n \rho_i \cdot L_i$$

Si α representa un alambre de densidad variable ρ , entonces la masa del alambre M viene dada por

$$M = \int_{\alpha} \rho \, dL$$

1.9.2. Centro de masa

El centro de masa de una curva α que representa un alambre de densidad ρ en el espacio, corresponde al punto $\bar{x}_i$, $i = 1, 2, 3$, solución de la ecuación

$$M \bar{x}_i = \int_{\alpha} x_i \rho \, dL$$

Si la función de densidad ρ es constante, entonces el centro de masa de la curva α se llama **centroide**.

1.9.3. Momento de inercia

Si la curva α representa un alambre, d es la distancia de un punto x_0 de la curva a una recta L , entonces el **momento de inercia**, I_L , del alambre de densidad variable ρ , respecto de la recta L , es

$$I_L = \int_{\alpha} d^2 \rho \, dL$$

Ejemplo 1.9.1. Determinemos la coordenada $\bar{z}$ del centro de masa del alambre que tiene forma de hélice, cuya ecuación es $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, si la densidad es $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

La figura 1.15 muestra la forma de la hélice. Para llegar a determinar la masa, es necesario tener los siguientes datos:

- El campo en la trayectoria: $\rho(\alpha(t)) = 1 + t^2$
- El vector velocidad: $\alpha'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$
- La norma del vector velocidad: $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{2}$

Luego

$$M = \int_{\alpha} \rho(\alpha(t)) \|\alpha'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} (1 + t^2) \sqrt{2} dt = \frac{2\pi\sqrt{2}}{3} (3 + 4\pi^2)$$

La coordenada $\bar{z}$ del centro de masa satisface $M\bar{z} = \int_{\alpha} z \rho dL$. Como $z = t$, entonces

$$M\bar{z} = \int_0^{2\pi} t(1 + t^2) \sqrt{2} dt = 2\pi^2 \sqrt{2} (1 + 2\pi^2)$$

En consecuencia, $\bar{z} = \frac{3\pi(1 + 2\pi^2)}{3 + 4\pi^2}$

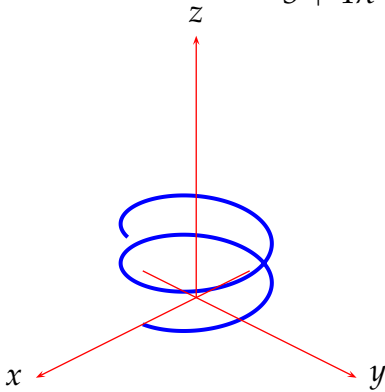


figura 1.15

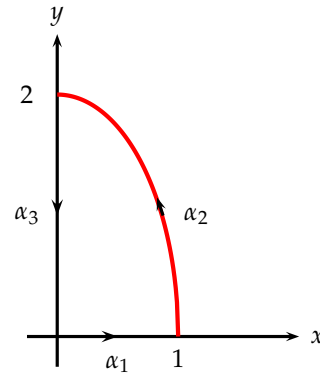


figura 1.16

Ejemplo 1.9.2. Hallemos el valor de la integral $\int_{\alpha} xy dL$, siendo α la curva cuya frontera es la parte de la elipse $4x^2 + y^2 = 4$ que se encuentra en el primer cuadrante y los ejes coordenados.

La figura 1.16 ilustra la curva a parametrizar. Ella está compuesta de tres curvas suaves que parametrizamos en sentido positivo.

- $\alpha_1(t) = (t, 0), \quad 0 \leq t \leq 1$
- $\alpha_2(t) = (\cos t, 2 \sin t), \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

1.10 Integral de campo vectorial

$$\blacksquare \alpha_3(t) = (0, 2 - t), \quad 0 \leq t \leq 2$$

Por la aditividad del camino de integración

$$\int_{\alpha} f dL = \int_{\alpha_1} f dL + \int_{\alpha_2} f dL + \int_{\alpha_3} f dL$$

Los valores del campo $f(x, y) = xy$ sobre cada curva son:

$$f(\alpha_1(t)) = 0, \quad f(\alpha_2(t)) = 2 \sin t \cos t, \quad f(\alpha_3(t)) = 0$$

Con ello tenemos una sola integral no nula.

$$\int_{\alpha_2} f dL = \int_0^{\pi/2} 2 \sin t \cos t \|\alpha_2'\| dt$$

El vector velocidad en α_2 es:

$$\alpha_2(t) = (\cos t, 2 \sin t) \implies \alpha_2'(t) = (-\sin t, 2 \cos t) \implies \|\alpha_2'\| = \sqrt{\sin^2 t + 4 \cos^2 t}$$

que es equivalente a $\sqrt{1 + 3 \cos^2 t}$. En consecuencia,

$$\int_{\alpha_2} f dL = \int_0^{\pi/2} 2 \sin t \cos t \sqrt{1 + 3 \cos^2 t} dt = \frac{14}{9}$$

1.10. Integral de campo vectorial

Una de las aplicaciones físicas más importantes de las integrales de línea consiste en hallar el trabajo realizado sobre un objeto que se mueve en un campo de fuerzas. Si la fuerza $\vec{F}$ es constante y empuja la partícula en línea recta desde una posición $\vec{A}$ a una posición $\vec{B}$, entonces el **trabajo** que realiza el campo para mover la partícula es

$$T = (\text{fuerza})(\text{distancia}) = \vec{F} \cdot (\vec{B} - \vec{A}) = \|\vec{B} - \vec{A}\| \cdot \text{comp}_{(\vec{B}-\vec{A})} \vec{F}$$

Así, el trabajo es el producto de la componente escalar del campo $\vec{F}$ en la dirección y sentido del vector desplazamiento $(\vec{B} - \vec{A})$, por la distancia recorrida por la partícula.

Si la fuerza es variable, para calcular el trabajo, se recurre a una integral de línea.

Sea $\alpha : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ curva de clase ζ^1 , $P = \{t_i / 0 \leq i \leq n, n \in \mathbb{N}\}$ partición de $[a, b]$, entonces la trayectoria α se descompone en subtrayectorias α_i , cada una de las cuales tiene longitud $\Delta \alpha_i$ (figura 1.17). Se elige ahora un punto P_i en la subtrayectoria i -ésima y se evalúa la fuerza en ese punto. Se calcula el vector tangente unitario $\vec{T}(P_i)$. Ello en razón de que la componente de la fuerza en cualquier punto $\alpha(t)$ en la dirección del movimiento es

$$\text{comp}_{\vec{T}} \vec{F} = \vec{F}(P_i) \cdot \vec{T}(P_i) = \vec{F}(\alpha(t)) \cdot \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$$

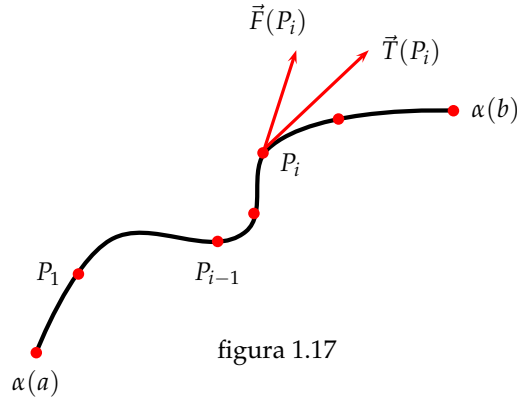


figura 1.17

Luego, el trabajo en la i -ésima trayectoria es

$$T_i = (\vec{F}(P_i) \cdot \vec{T}(P_i)) \Delta\alpha_i$$

De esta forma, el trabajo total, aproximado, es

$$T \approx \sum_{i=1}^n \vec{F}(P_i) \cdot \vec{T}(P_i) \Delta\alpha_i$$

Cuando la norma de la partición P tiende a cero, el trabajo total lo representa una integral de línea

$$T = \int_{\alpha} \vec{F} \cdot \vec{T} dL = \int_a^b \vec{F}(\alpha(t)) \cdot \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} \|\alpha'(t)\| dt = \int_a^b \vec{F}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt$$

Se concluye que; “El trabajo T realizado por una fuerza $\vec{F}$ es igual a la integral de la componente tangencial de $\vec{F}$ respecto a la longitud de arco sobre la trayectoria”.

Así, tenemos la siguiente definición:

Definición 1.10.1. Sean $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ curva de clase ζ^1 , $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ campo vectorial continuo sobre α . La integral de línea del campo $\vec{F}$ sobre α es

$$\int_{\alpha} \vec{F} \cdot d\vec{L} = \int_{\alpha} \vec{F} \cdot \vec{T} dL = \int_a^b \vec{F}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt$$

Cabe observar que

$$\vec{F} \cdot \vec{T} dL = \vec{F} \cdot \frac{\vec{r}'}{\|\vec{r}'\|} \|\vec{r}'\| dt = \vec{F} \cdot \vec{r}' dt = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Otra forma muy utilizada de las integrales de línea se deduce de la notación de campos vectoriales en términos de sus funciones componentes. Si $\vec{F}$ es un campo vectorial del tipo $\vec{F}(x, y) = F_1 \vec{i} + F_2 \vec{j}$, y C viene dada por $\vec{r}(t) = x(t) \vec{i} + y(t) \vec{j}$, entonces $\vec{F} \cdot d\vec{r}$ se escribe como

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{L} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C (F_1, F_2) \cdot (dx, dy) = \int_C F_1 dx + F_2 dy$$

1.10 Integral de campo vectorial

expresión que se extiende en forma natural a tres o más dimensiones.

Existe un símbolo especial para las integrales de línea cuando la trayectoria sobre la curva sobre la que se integra es una curva cerrada.

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{L}$$

Ejemplo 1.10.2. Hallemos el trabajo que realiza el campo vectorial $\vec{F}(x, y) = (x^2, y^2)$ para mover un objeto a través de la trayectoria parabólica $y = x^2$ desde el punto $(0, 0)$ al $(2, 4)$.

La figura 1.18 muestra el camino de integración. Sabemos que el cálculo del trabajo se hace vía la integral de línea del campo vectorial $\vec{F}$ sobre la trayectoria α . La parametrización de la trayectoria es

$$\alpha(t) = (t, t^2), \quad 0 \leq t \leq 2$$

de manera que $\alpha'(t) = (1, 2t)$. Además, el valor del campo sobre la trayectoria es $\vec{F}(\alpha(t)) = (t^2, t^4)$. Luego

$$\int_{\alpha} \vec{F} \cdot d\vec{L} = \int_0^2 \vec{F}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt = \int_0^2 (t^2 + 2t^5) dt = 24$$

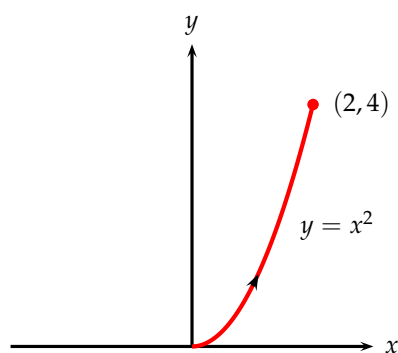


figura 1.18

1.10.1. Propiedades de la integral de campo vectorial

Proposición 1.10.3. Sean $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva suave a trozos, A un abierto de $\mathbb{R}^n$ que contenga a $\alpha([a, b])$ y $\vec{F}, \vec{G} : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ dos campos vectoriales continuos. Se tiene:

Linealidad : Si k_1 y k_2 son constantes, entonces

$$\int_{\alpha} (k_1 \vec{F} + k_2 \vec{G}) \cdot d\vec{L} = k_1 \int_{\alpha} \vec{F} \cdot d\vec{L} + k_2 \int_{\alpha} \vec{G} \cdot d\vec{L}$$

Invarianza :

Teorema 1.10.4. Sea $\alpha : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ trayectoria de clase ζ^1 y $\vec{F}$ campo vectorial continuo sobre α . Si $\rho : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una reparametrización, entonces

$$\text{si } \rho \text{ preserva la orientación} \quad \int_{\rho} \vec{F} = \int_{\alpha} \vec{F}$$

$$\text{si } \rho \text{ invierte la orientación} \quad \int_{\rho} \vec{F} = - \int_{\alpha} \vec{F}$$

Demostración.

Como ρ es reparametrización, entonces $\rho = \alpha \circ h$. Luego $\rho'(t) = \alpha'(h(t)) \cdot h'(t)$. Se tiene así

$$\int_{\rho} \vec{F} = \int_a^b \vec{F}(\alpha(h(t))) \cdot \alpha'(h(t)) h'(t) dt$$

Usando el cambio de variable $s = h(t)$, tenemos

$$\int_{h(a)}^{h(b)} \vec{F}(\alpha(s)) \cdot \alpha'(s) ds = \int_{a_1}^{b_1} \vec{F}(\alpha(s)) \cdot \alpha'(s) ds = \int_{\alpha} \vec{F} \cdot d\vec{L}$$

siempre que ρ preserve la orientación. O bien

$$\int_{h(a)}^{h(b)} \vec{F}(\alpha(s)) \cdot \alpha'(s) ds = - \int_{a_1}^{b_1} \vec{F}(\alpha(s)) \cdot \alpha'(s) ds = - \int_{\alpha} \vec{F} \cdot d\vec{L}$$

siempre que ρ invierta la orientación.

Aditividad respecto del camino : Si $\rho : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es otra curva suave a trozos tal que $\alpha(b) = \rho(c)$,

$$\int_{\alpha+\rho} \vec{F} \cdot d\vec{L} = \int_{\alpha} \vec{F} \cdot d\vec{L} + \int_{\rho} \vec{F} \cdot d\vec{L}$$

Esta última propiedad, es obviamente, generalizable a n trayectorias que compongan una curva C .

Ejemplo 1.10.5. Hallemos el trabajo que efectúa el campo vectorial $\vec{F}(x, y) = (x^2 + y^2, 2xy)$ para mover una partícula desde el origen del sistema de coordenadas sobre la curva $y = \sqrt{x}$, trayéndola de vuelta por la recta que une el punto $(4, 2)$ con el origen de coordenadas.

La figura 1.19 muestra el camino de integración. El cálculo del trabajo conlleva hallar la integral de línea del campo vectorial $\vec{F}$ sobre la trayectoria α . La trayectoria está compuesta por dos curvas suaves, cada una de ellas con parametrización:

$$\blacksquare \alpha_1(t) = (t, \sqrt{t}), 0 \leq t \leq 4$$

$$\blacksquare \alpha_2(t) = (t, \frac{t}{2}), 0 \leq t \leq 4$$

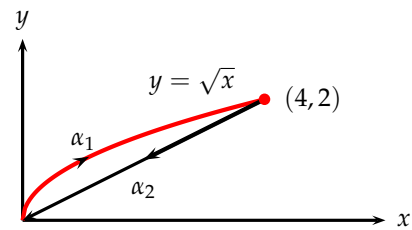


figura 1.19

Se observa que la parametrización de α_2 va en sentido opuesto al requerido, luego, debemos cambiarle el sentido o anteponer el signo $-$ en la integral. En este último caso tenemos que calcular

$$\int_{\alpha} \vec{F} \cdot d\vec{L} = \int_{\alpha_1} \vec{F} \cdot d\vec{L} - \int_{\alpha_2} \vec{F} \cdot d\vec{L}$$

De esta forma tenemos:

$$\vec{F}(\alpha_1)(t) = (t^2 + t, 2t\sqrt{t}), \quad \vec{F}(\alpha_2)(t) = \left(t^2 + \frac{t^2}{4}, t^2\right), \quad \alpha_1'(t) = \left(1, \frac{1}{2\sqrt{t}}\right), \quad \alpha_2'(t) = \left(1, \frac{1}{2}\right)$$

1.10 Integral de campo vectorial

Los integrandos tienen entonces la siguiente forma:

$$\vec{F}(\alpha_1)(t) \cdot \alpha'_1 = t^2 + 2t, \quad \vec{F}(\alpha_2)(t) \cdot \alpha'_2 = \frac{7}{4}t^2$$

Luego,

$$\begin{aligned} \int_{\alpha_1} \vec{F} \cdot d\vec{L} &= \int_0^4 (t^2 + 2t) dt = \left(\frac{t^3}{3} + t^2 \right)_0^4 = \frac{112}{3} \\ \int_{\alpha_2} \vec{F} \cdot d\vec{L} &= \int_0^4 \frac{7}{4}t^2 dt = \left(\frac{7t^3}{12} \right)_0^4 = \frac{112}{3} \end{aligned}$$

De esta manera, el trabajo es

$$\int_{\alpha} \vec{F} \cdot d\vec{L} = \frac{112}{3} - \frac{112}{3} = 0$$

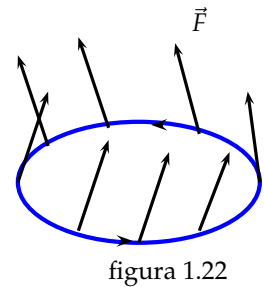
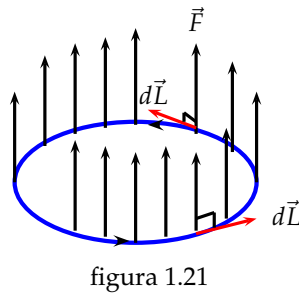
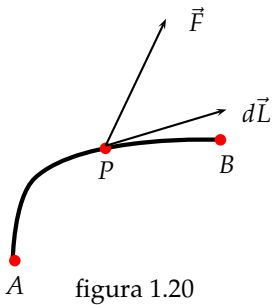
1.10.2. Circulación de un campo vectorial

De forma general la circulación es una operación matemática que se define para a un campo vectorial, y se realiza sobre una curva entre dos puntos, inicial y final de cálculo. Por tanto, la información necesaria será: conocer el campo vectorial, la ecuación de la curva y las coordenadas del punto de inicio y final de la circulación.

Definimos primero la circulación elemental: situemos un punto sobre la curva de coordenadas $P(x, y, z)$, y determinamos el valor del campo en el punto $\vec{F}(P)$. Luego hacemos un desplazamiento elemental, $d\vec{L}$, sobre la curva en el sentido de A a B , puntos de inicio y final de la circulación (figura 1.20).

Definición 1.10.6. Se define como **circulación elemental** al producto escalar del campo vectorial en el punto P por el vector desplazamiento elemental sobre la curva en el sentido de la circulación:

$$dC = \vec{F}(P) \cdot d\vec{L}$$



Si vamos desde A hasta B realizando desplazamientos elementales sobre la curva y calculando la circulación elemental de cada desplazamiento, la suma nos dará la circulación del campo vectorial a lo largo de la curva entre los puntos inicial y final.

Definición 1.10.7. Se define como **circulación** de un campo vectorial a la integral de la circulación elemental calculada a lo largo de la curva y con límites el punto inicial y el punto final de la curva

$$C_A^B = \int_A^B dC = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{L}$$

Matemáticamente la circulación es una integral curvilínea en la que, además de los límites de integración, los puntos que se han de recorrer han de estar sobre una curva determinada.

Para darle un sentido práctico a las ideas anteriores, consideremos que $\vec{F}$ es el campo de velocidades de un fluido, esto es, a cada punto P del campo $\vec{F}$ le asociamos el vector velocidad del fluido en P . Sea C una curva cerrada y $d\vec{L}$ una pequeña parte de cuerda dirigida de C (figura 1.21). Entonces $\vec{F} \cdot d\vec{L}$ es aproximadamente igual a la componente tangencial de $\vec{F}$ multiplicada por $||d\vec{L}||$. La integral $\int_C \vec{F}$ es entonces la componente tangencial neta alrededor de C . Esto significa que unas pequeñas aspas colocadas en el fluido dentro de C girarían si la circulación del fluido fuera diferente de cero (figura 1.22). Esto es, si $\int_C \vec{F} \neq 0$. La **circulación** de $\vec{F}$ alrededor de una curva cerrada C se anota

$$\text{Circulación} = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{L}$$

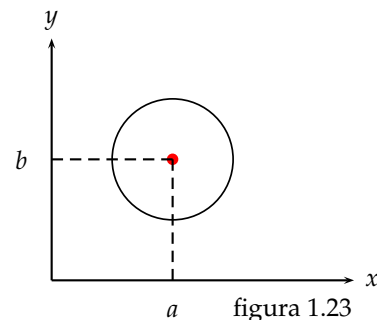
En resumen:

- Si $\vec{F}$ es el campo de velocidades de un fluido y $\vec{F}$ apunta en dirección tangente a la curva orientada C , entonces $\int_C \vec{F} > 0$, y las partículas en C tienden a girar en sentido antihorario. (figura 1.22)
- Si $\vec{F}$ apunta en dirección opuesta, entonces $\int_C \vec{F} < 0$
- Si $\vec{F}$ es ortogonal a C , entonces las partículas no giran en el interior de C y $\int_C \vec{F} = 0$. (figura 1.21)

Ejemplo 1.10.8. Consideremos el campo vectorial $\vec{F}(x, y) = (1, kx)$, en donde k es una constante. Sea α la trayectoria que corresponde a la curva $(x - a)^2 + (y - b)^2 = 1$. Entonces:

1. La parametrización de la trayectoria $\alpha(t) = (a + \cos t, b + \sin t)$
2. La gráfica de la trayectoria es una circunferencia centrada en (a, b) y radio 1.
3. El cálculo de la circulación del campo $\vec{F}$ alrededor de α es como sigue:

$$\begin{aligned} \text{Circulación} &= \oint_0^{2\pi} (1, k(a + \cos t)) \cdot (-\sin t, \cos t) dt \\ &= \oint_0^{2\pi} (-\sin t + k a \cos t + k \cos^2 t) dt \\ &= \cos t + k a \sin t + \frac{k}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right)_0^{2\pi} \\ &= k \pi \end{aligned}$$



1.10 Integral de campo vectorial

4. A la luz de este resultado, es claro que la integral depende de k .
5. ¿Cuál es el efecto del signo de k sobre un “corcho” que ponemos sobre el fluido al interior de la trayectoria?
 - Si $k = 0$, la integral vale 0 y el corcho **no gira**.
 - Si $k > 0$, la integral es mayor que cero y el corcho **gira** en sentido antihorario sobre su eje.
 - Si $k < 0$, la integral es menor que cero y el corcho **gira** en sentido horario sobre su eje.

1.10.3. Flujo en el plano

Se define el flujo de un campo vectorial como la cantidad de campo que atraviesa cierta área. Si el campo $\vec{F}$ es un campo de velocidad de fluido, entonces la integral

$$\int_{\alpha} \vec{F} \cdot \vec{n} dL$$

se llama **integral de flujo** sobre α . Esta integral entrega la tasa neta en que el fluido cruza α , hacia el lado de la normal $\vec{n}$, en unidades de área por unidad de tiempo.

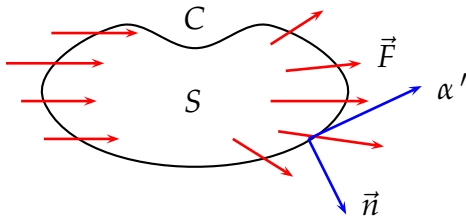


figura 1.24

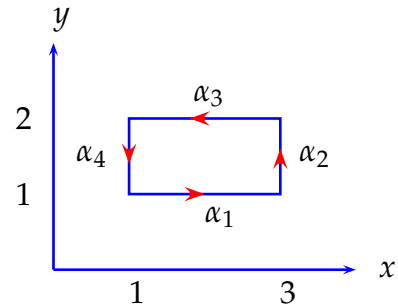


figura 1.25

Ejemplo 1.10.9. Se consideran el rectángulo $[1,3] \times [1,2]$ y el campo vectorial $\vec{F}(x,y) = (0,y^3)$. Hallemos el flujo del campo a través de los lados del rectángulo.

La trayectoria α se descompone en cuatro subtrayectorias α_i , para las cuales se tienen las parametrizaciones:

$$\alpha_2 = (3,t), 1 \leq t \leq 2, \quad \alpha_3 = (t,2), 1 \leq t \leq 3, \quad \alpha_4 = (1,t), 1 \leq t \leq 2, \quad \alpha_1 = (t,1), 1 \leq t \leq 3$$

El valor del campo sobre cada parametrización es

$$\vec{F}(\alpha_1) = (0,t^3), \quad \vec{F}(\alpha_2) = (0,8), \quad \vec{F}(\alpha_3) = (0,t^3), \quad \vec{F}(\alpha_4) = (0,1)$$

De acuerdo a la definición de flujo, necesitamos considerar la integral de línea con componente normal. Los vectores normales exteriores a cada cara del rectángulo, en el mismo orden considerado para la parametrización, son:

$$\vec{n}_1 = (1,0), \quad \vec{n}_2 = (0,1), \quad \vec{n}_3 = (-1,0), \quad \vec{n}_4 = (0,-1)$$

Para determinar dL se observa que cada α'_i tiene norma 1, con lo que la integral que entrega el flujo queda como sigue

$$\begin{aligned}\int_{\alpha} (\vec{F} \cdot \vec{n}) dL &= \int_1^2 (0, t^3) \cdot (-1, 0) dt + \int_1^3 (0, 8) \cdot (0, 1) dt + \int_1^2 (0, t^3) \cdot (-1, 0) dt + \int_1^3 (0, 1) \cdot (0, -1) \\ &= 0 + 16 + 0 - 2 = 14\end{aligned}$$

1.10.4. Otras Notaciones para la integral de campo vectorial

Son notaciones usuales de la integral de línea de campo vectorial, la forma **vectorial** que es aquella que considera el vector de posición, $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, y la forma **diferencial** que considera las componentes del campo vectorial. Se tiene:

Forma Vectorial

Sea $\vec{r}(t)$ el vector de posición de la curva C , entonces $d\vec{L} = \vec{r}'(t) dt$. Luego

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{L} = \int_C \vec{F} \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Forma Diferencial

Si el campo vectorial $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ de $\mathbb{R}^3$ se encuentra expresado en términos de sus funciones componentes, entonces, considerando la forma vectorial, se tiene

$$\begin{aligned}\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_C \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \int_a^b (F_1, F_2, F_3) \cdot (x'(t), y'(t), z'(t)) dt \\ &= \int_a^b \left(F_1 \frac{dx}{dt} + F_2 \frac{dy}{dt} + F_3 \frac{dz}{dt} \right) dt = \int_a^b F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz\end{aligned}$$

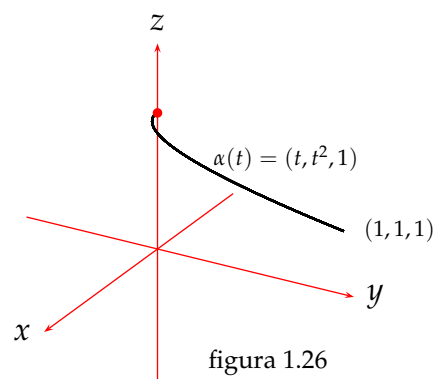
Ejemplo 1.10.10. Calculemos $\int_{\alpha} x^2 dx + xy dy + dz$, si $\alpha(t) = (t, t^2, 1)$, $0 \leq t \leq 1$.

De la parametrización $\alpha(t) = (t, t^2, 1)$ se tiene:

$$\frac{dx}{dt} = 1, \quad \frac{dy}{dt} = 2t, \quad \frac{dz}{dt} = 0$$

De este modo,

$$\begin{aligned}\int_{\alpha} x^2 dx + xy dy + dz &= \int_0^1 (t^2 \cdot 1 + t^3 \cdot 2t + 1 \cdot 0) dt \\ &= \int_0^1 (t^2 + 2t^4) dt \\ &= \frac{11}{15}\end{aligned}$$



1.11. Campos vectoriales conservativos

Hemos visto que el gradiente de un campo escalar de dos o tres variables reales es un campo vectorial. Podríamos preguntarnos entonces si un campo vectorial $\vec{F}$ es el gradiente de algún campo escalar diferenciable f . Como no todo campo vectorial es gradiente de un campo escalar diferenciable, aquellos que sí lo sean reciben el nombre de campos vectoriales **conservativos**.

Definición 1.11.1. Un campo vectorial $\vec{F} : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (A un conjunto abierto) se dice que es conservativo si existe algún campo escalar diferenciable $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\vec{F}(\vec{x}) = \nabla f(\vec{x}), \quad \vec{x} \in A$$

El campo escalar f se llama **potencial** de $\vec{F}$ y se dice que el campo vectorial $\vec{F}$ deriva de un potencial, puesto que el vector gradiente reúne la información sobre las derivadas de f . Se comprende, que es más fácil estudiar un campo escalar que uno vectorial, por tanto, si un campo vectorial $\vec{F}$ deriva de un potencial f , se estudiará el campo escalar f , sabiendo que para conocer un valor concreto de $\vec{F}$ basta obtener el gradiente de f .

Muchos campos vectoriales importantes, como los campos gravitacionales, los campos magnéticos y los campos de fuerzas eléctricas son conservativos. El término “conservativo” se deriva de la ley física clásica sobre la conservación de la energía. Esta ley establece que la suma de la energía cinética y de la energía potencial de una partícula que se mueve en un campo de fuerzas conservativo es constante. Esto es equivalente a decir que en un campo conservativo, la suma de las energías cinéticas y potenciales de un objeto se mantiene constante de punto a punto.

Nota!!

- La energía cinética de una partícula es la energía debida su movimiento, y la energía potencial es la energía debida a su posición en el campo de fuerzas.
- Si el campo $\vec{F}$ es gradiente, pero $\vec{F} = -\nabla f$, entonces la función escalar f se llama **energía potencial**.

Si se dispone de un campo vectorial $\vec{F}$ que deriva de un potencial f y se quiere conocer la circulación de $\vec{F}$ a lo largo de una curva C , desde un punto A a otro B , entonces

$$\text{circulación} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{L} = \int \nabla f \cdot d\vec{L}$$

veamos qué ventajas conlleva el que un campo sea gradiente o conservativo.

1.11.1. Teoremas fundamentales

El segundo teorema fundamental del cálculo para funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ integrables, asegura que

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

en donde F es la primitiva de f .

Este resultado es posible de generalizarlo a la integral de línea de campo vectorial tomada sobre campos gradiente. Además, proporciona una forma de calcular la integral de línea de un campo gradiente.

Segundo teorema fundamental

Teorema 1.11.2. :

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ campo escalar de clase ζ^1 sobre el conjunto abierto conexo A . Sea $\vec{F} = \nabla f$, y sea $\alpha : [a, b] \rightarrow A \subset \mathbb{R}^n$ cualquier curva de clase ζ^1 a trozos que une $\vec{x}$ con $\vec{y}$ en A . Es decir, $\alpha(a) = \vec{x}$, $\alpha(b) = \vec{y}$, entonces

$$\int_{\alpha} \vec{F} = \int_{\alpha} \nabla f = f(\vec{y}) - f(\vec{x})$$

En el caso particular de ser $n = 1$ y el camino α definido por $\alpha(t) = t$, este teorema da lugar a la regla de Barrow o segundo teorema fundamental del calculo.

Demostración.

Sea $H : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ función tal que $t \mapsto H(t) = f(\alpha(t))$, entonces su derivada es

$$H'(t) = f'(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) = \nabla f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)$$

de aquí que

$$\begin{aligned} \int_{\alpha} \vec{F} &= \int_a^b \nabla f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt = \int_a^b H'(t) dt \\ &= H(b) - H(a) = f(\alpha(b)) - f(\alpha(a)) \\ &= f(\vec{y}) - f(\vec{x}) \end{aligned}$$

Este resultado establece que la integral de línea entre dos puntos $\vec{x}$ e $\vec{y}$, del dominio de un campo vectorial $\vec{F}$ es **independiente** de la trayectoria α que une esos puntos, **siempre** que $\vec{F}$ sea un **campo gradiente**. Formalicemos esto.

Definición 1.11.3. Dado un campo vectorial $\vec{F}$ definido sobre un conjunto conexo $A \subset \mathbb{R}^n$ y dos puntos $\vec{a}, \vec{b} \in A$, decimos que la integral de línea de $\vec{F}$ entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es independiente del camino si el valor de $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{L}$ es el mismo para cualquier camino C entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

En las condiciones del segundo teorema, se tienen tres consecuencias interesantes:

Corolario 1.11.4. Si $\nabla f = 0$ sobre el conjunto abierto y conexo A , entonces el campo f es constante sobre A .

Demostración.

Sea $\vec{a}$ un punto fijo en A y sea α una curva que une $\vec{a}$ con $\vec{x}$ en A , entonces, de acuerdo con el teorema, se tiene

$$f(\vec{x}) - f(\vec{a}) = \int_{\alpha} \nabla f$$

Como $\nabla f = 0$, entonces $f(\vec{x}) = f(\vec{a})$, $\forall \vec{x} \in A$. Esto significa que f es constante sobre A .

Corolario 1.11.5. Si α es una curva **cerrada**, entonces

$$\int_{\alpha} \nabla f = \int_{\alpha} \vec{F} = 0$$

Demostración.

Como α es cerrada entonces $\alpha(a) = \alpha(b)$. De acuerdo con el teorema, se tiene

$$\int_{\alpha} \vec{F} = \int_{\alpha} \nabla f = f(\alpha(b)) - f(\alpha(a)) = 0$$

Corolario 1.11.6. Si $\int_{\alpha} \vec{F} = 0$ para toda curva cerrada α en A , entonces $\vec{F}$ es un campo gradiente.

Demostración.

Sea α la curva que es la unión de las trayectorias α_1 y α_2 que unen el punto $\vec{a}$ con el punto $\vec{x}$ en A . Es suficiente con probar que las integrales tomadas sobre α_1 y α_2 son iguales. En efecto, como

$$\int_{\alpha} \vec{F} = \int_{\alpha_1} \vec{F} + \int_{\alpha_2} \vec{F} = 0$$

y dado que α_1 y α_2 tienen direcciones opuestas, entonces

$$\int_{\alpha} \vec{F} = \int_{\alpha_1} \vec{F} - \int_{\alpha_2} \vec{F} = 0$$

De esto se deduce que

$$\int_{\alpha_1} \vec{F} = \int_{\alpha_2} \vec{F}$$

Como α_1 y α_2 son arbitrarias, entonces la integral de línea es independiente de la trayectoria. Es decir, $\vec{F}$ es un campo gradiente.

Resumimos los resultados anteriores en el siguiente:

Teorema 1.11.7. Sea $\vec{F} : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial continuo sobre A conjunto abierto y conexo. Son equivalentes:

1. $\vec{F}$ es conservativo.
2. La integral de línea de $\vec{F}$ es independiente del camino, es decir, sólo depende del punto inicial y del punto final, pero no del camino que los une.

3. La integral de línea de $\vec{F}$ a lo largo de cualquier camino cerrado regular a trozos contenido en A vale cero.

Ejemplo 1.11.8. Hallemos la circulación del campo $\vec{F}(x, y) = (-y, x)$ sobre la elipse $\alpha(t) = (a \cos t, b \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Como ya tenemos la curva parametrizada, el vector velocidad es $\alpha'(t) = (-a \sin t, b \cos t)$. El valor del campo en la parametrización es

$$\vec{F}(\alpha(t)) = (-b \sin t, a \cos t)$$

La circulación está definida por la integral del campo sobre la curva, esto es

$$\text{Circulación} = \int_{\alpha} \vec{F} \cdot d\vec{L} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt$$

Como $\vec{F}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) = ab \sin^2 t + ab \cos^2 t = ab$, entonces

$$\text{Circulación} = \int_0^{2\pi} ab dt = 2\pi ab \neq 0$$

De esta manera, el campo $\vec{F}$ no es un campo gradiente. Recuerde que si lo fuera la integral sobre **toda** curva cerrada debe ser cero.

Caracterización de campos gradientes

Teorema 1.11.9. Sean A un abierto convexo de $\mathbb{R}^n$ y $\vec{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ campo de clase ζ^1 . Entonces $\vec{F}$ es conservativo si, y sólo si,

$$\frac{\partial F_i(x)}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j(x)}{\partial x_i}$$

Este teorema sigue siendo cierto para una clase más amplia de conjuntos, los llamados “simplemente conexos”, esto es, conjuntos del plano que no tienen “agujeros”. Este resultado supone el cumplimiento de tres cosas:

1. Que estemos trabajando, a lo menos en un conjunto convexo.
2. Que el campo que nos den sea de clase ζ^1 (derivadas de primer orden continuas).
3. Que se cumpla la igualdad de las derivadas mixtas (lema de Schwarz), que a su vez equivale a decir que la matriz Jacobiana sea simétrica.

Ejemplo 1.11.10. El campo $\vec{F}(x, y) = (2y^2 + 1, 4xy)$ satisface que la matriz Jacobiana,

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 4y \\ 4y & 4x \end{pmatrix}$$

1.11 Campos vectoriales conservativos

es simétrica. Como, además, $\vec{F}$ está definido en todo el plano, que es un conjunto simplemente conexo (más que convexo), entonces este campo vectorial es gradiente y tiene asociado un potencial. Es sencillo verificar que el campo escalar $f(x, y) = x + 2xy^2$ satisface $\nabla f = \vec{F}$. Veamos como, a partir de la definición podemos calcular este potencial.

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = (1 + 2y^2, 4xy)$$

Equivale a tener

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 + 2y^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4xy$$

Al integrar, la primera expresión, respecto de x se tiene que

$$f(x, y) = x + 2xy^2 + c(y)$$

en donde $c(y)$ es una constante, que puede depender de la variable y , que ha sido considerada constante en la integración respecto de x . Ahora se deriva, respecto de y la última expresión, con el fin de utilizar la segunda hipótesis (la derivada parcial respecto de y). Se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4xy + c'(y) \implies 4xy = 4xy + c'(y)$$

Al simplificar se encuentra que $c(y)$ debe ser una “verdadera” **constante**, es decir, un escalar. En consecuencia, el potencial f más general del campo vectorial $\vec{F}$ es

$$f(x, y) = x + 2xy^2 + c$$

Ejemplo 1.11.11. El campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (2xyz + z^2 - 2y^2 + 1, x^2z - 4xy, x^2y + 2xz - 2)$ es continuo y diferenciable con continuidad en todo $\mathbb{R}^3$, que es abierto y convexo. Las condiciones necesarias y suficientes para que $\vec{F}$ sea un gradiente (teorema 1.11.9) son:

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}, \quad \frac{\partial F_3}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial z}, \quad \frac{\partial F_3}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial z}$$

es decir,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_2}{\partial x} &= 2xz - 4y = \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} &= 2xy + 2z = \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_3}{\partial y} &= x^2 = \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{aligned}$$

Vamos a encontrar el potencial f imponiendo las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 2xyz + z^2 - 2y^2 + 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= x^2z - 4xy \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= x^2y + 2xz - 2\end{aligned}$$

Si integramos la primera de las condiciones respecto de x resulta

$$\begin{aligned}f(x, y, z) &= \int F_1 dx + A(y, z) = \int (2xyz + z^2 - 2y^2 + 1) dx + A(y, z) \\ &= x^2yz + xz^2 - 2xy^2 + x + A(y, z)\end{aligned}$$

Para imponer la segunda condición derivamos la expresión obtenida respecto de y .

$$\begin{aligned}f(x, y, z) = x^2yz + xz^2 - 2xy^2 + x + A(y, z) &\implies \frac{\partial f}{\partial y} = x^2z - 4xy + \frac{\partial}{\partial y}A(y, z) \\ &= F_2 = x^2z - 4xy\end{aligned}$$

de lo cual se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial y}A(y, z) = 0 \implies A(y, z) = B(z)$$

Sustituyendo la función $A(y, z)$ en la expresión del potencial, nos queda:

$$f(x, y, z) = x^2yz + xz^2 - 2xy^2 + x + B(z)$$

Por último, derivamos esta ecuación respecto de z para satisfacer la tercera condición. Tenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial z} = x^2y + 2xz + B'(z) = F_3 = x^2y + 2xz - 2 \implies B'(z) = -2 \implies B(z) = -2z + k$$

Así, sustituyendo la función $B(z)$, queda el potencial

$$f(x, y, z) = x^2yz + xz^2 - 2xy^2 + x - 2z + k$$

k es una constante. Obsérvese todo lo que trabajamos para hallar el potencial. Afortunadamente existen métodos más sencillos de recordar y poner en práctica, que veremos más adelante.

Primer teorema fundamental

Para funciones reales de variable real. Esto es, para funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, el primer teorema fundamental del cálculo asegura que

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \implies F'(x) = f(x)$$

Extendemos este resultado a integrales de línea.

1.11 Campos vectoriales conservativos

Teorema 1.11.12.

Sean $\vec{F}$ campo vectorial diferenciable definido en un conjunto A abierto y convexo de $\mathbb{R}^n$, $\vec{a}$ un punto fijo de A . Supongamos que $\forall \vec{x} \in A$ la integral de línea del campo $\vec{F}$ que une $\vec{a}$ con $\vec{x}$ es independiente de la trayectoria α que los une ($\vec{F}$ gradiente). Si definimos el campo escalar f en A como

$$f(\vec{x}) = \int_{\vec{a}}^{\vec{x}} \vec{F} \cdot d\vec{L} = \int_{\vec{a}}^{\vec{x}} \nabla f \cdot d\vec{L}$$

entonces f es diferenciable sobre A , y se tiene que

$$f'(\vec{x}) = \nabla f(\vec{x}) = \vec{F}(\vec{x}), \quad \forall \vec{x} \in A$$

Si $n = 1$ y el camino viene definido por $\alpha(t) = t$, se obtiene el primer teorema fundamental del cálculo para funciones reales de variable real. Además, este teorema proporciona una forma de calcular el potencial f del campo vectorial $\vec{F}$. En el teorema 1.9.12 elegimos $\vec{a} = (0, 0)$ y $\vec{x} = (x, y)$. El segmento de recta que une estos puntos tiene parametrización

$$\alpha(t) = \vec{a} + (\vec{x} - \vec{a})t = t\vec{x}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

Luego, una función potencial f está dada por

$$f(\vec{x}) = \int_{\alpha} \vec{F}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt = \int_0^1 \vec{F}(t\vec{x}) \cdot \vec{x} dt$$

Ejemplo 1.11.13. La función potencial del campo $\vec{F}(x, y) = (2y^2 + 1, 4xy)$ existe, pues la matriz jacobiana es simétrica y $\vec{F}$ está definido en todo $\mathbb{R}^2$ que es un conjunto simplemente conexo.

Observemos que $(0, 0)$ pertenece al conjunto simplemente conexo. Se tiene

$$\vec{F}(t\vec{x}) = \vec{F}(tx, ty) = (2t^2 y^2 + 1, 4t^2 xy)$$

de donde

$$\vec{F}(t\vec{x}) \cdot \vec{x} = x + 6xt^2 y^2$$

En consecuencia

$$f(\vec{x}) = \int_0^1 (x + 6xt^2 y^2) dt = x + 2xy^2 + k$$

es una función potencial para $\vec{F}$.

El siguiente ejemplo muestra que la simetría de la matriz jacobiana, por si sola, no es suficiente para garantizar que $\vec{F}$ sea campo gradiente.

Ejemplo 1.11.14. Sea $\vec{F}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$, $(x, y) \neq (0, 0)$, entonces la matriz jacobiana es simétrica.

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} & \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} & -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}$$

Halleemos la integral de línea de $\vec{F}$ sobre la circunferencia unitaria parametrizada por $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Se tiene

$$\int_{\alpha} \vec{F} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt = \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0$$

Luego, no puede existir un campo escalar f definido $\forall \vec{x} \neq 0$ que satisfaga $\nabla f = \vec{F}$ en **todo** el plano. Sin embargo, $\vec{F}$ es gradiente si nos restringimos a cualquier conjunto simplemente conexo que no contenga el origen de coordenadas. Por ejemplo, $f(x, y) = \arctg(\frac{y}{x})$ es función potencial para $\vec{F}$ sobre la circunferencia de centro $(2, 2)$ de radio 1.

Este ejemplo está mostrando que

1. Para demostrar que un campo vectorial $\vec{F}$ no es campo gradiente, sólo es necesario exhibir una curva cerrada α en A tal que $\int_{\alpha} \vec{F} \neq 0$
2. Para demostrar que $\vec{F}$ es un campo gradiente se debe comprobar que $\int_{\alpha} \vec{F} = 0$ **para toda** trayectoria cerrada α en A . Lo cual es ¡misión imposible!

1.11.2. Divergencia de un campo vectorial

Una importante magnitud definida sobre un campo vectorial es la **divergencia**, que es una función escalar. Esta función puede verse como una especie de derivada de $\vec{F}$ por cuanto, para campos vectoriales que representan velocidades de partículas en movimiento, la divergencia mide el ritmo de flujo de partículas por unidad de volumen en un punto.

Definición 1.11.15. La divergencia del campo $\vec{F}(x_1, x_2, \dots, x_n) = (F_1, F_2, \dots, F_n)$ está dada por

$$\text{div} \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}$$

Ejemplo 1.11.16. Halleemos la divergencia en $(1, 1, 1)$ del campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (x^3y^2, x^2z, x^2y)$.

Sólo debemos hallar las derivadas parciales de cada componente como sigue:

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 3x^2y^2 + 0 + 0 = 3x^2y^2$$

Al evaluar en $(1, 1, 1)$ tenemos

$$\nabla \cdot \vec{F} = 3$$

Nota!!:

- Si $\text{div} \vec{F} = 0$, se dice que $\vec{F}$ es un campo vectorial **solenoidal**, o **incompresible**.
- Si $\text{div} \vec{F} > 0$ en un punto $\vec{x}_0$, este punto se llama **fuelle**.

- Si $\text{div} \vec{F} < 0$ en un punto $\vec{x}_1$, este punto se llama **sumidero**.

Por ejemplo, si $\vec{F}$ fuese un campo de velocidades de un gas o de un fluido, entonces la $\text{div} \vec{F}$ representa la tasa de expansión por unidad de volumen del gas o del fluido. Como $\text{div} \vec{F} = 3$ en el ejemplo anterior, entonces el gas se está expandiendo a la tasa de 3 unidades cúbicas por unidad de volumen por unidad de tiempo. Si fuese $\text{div} \vec{F} < 0$, entonces el gas se estaría comprimiendo.

1.11.3. Rotacional de un campo vectorial

Definición 1.11.17. El rotacional de $\vec{F}(x, y, z) = (F_1, F_2, F_3)$ viene definido como

$$\text{rot} \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

Debe quedar claro que el rotacional es válido sólo para campos vectoriales tridimensionales. Si se quiere usar en uno bidimensional hay que agregar tercera componente nula.

El significado físico del rotacional está asociado con rotación. Si un campo vectorial $\vec{F}$ representa el flujo de un fluido, entonces $\text{rot} \vec{F} = \vec{0}$ en un punto P significa físicamente que el fluido no tiene rotaciones en P , esto es, no tiene remolinos. Esto significa que si colocamos en el fluido una pequeña rueda con aspas, se moverá con el fluido, pero no girará alrededor de su eje. Si $\text{rot} \vec{F} = \vec{0}$ se dice que $\vec{F}$ es un campo **irrotacional**.

La principal aplicación del rotacional de una campo vectorial es el próximo criterio para averiguar si un campo vectorial en el espacio es conservativo.

Teorema 1.11.18. Sea $\vec{F} : A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{F}(x, y, z) = (F_1, F_2, F_3)$ un campo de clase ζ^1 definido en el abierto simplemente conexo A . El campo vectorial $\vec{F}$ es conservativo si y sólo si $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$.

Si $\vec{F}$ es gradiente, entonces $\vec{F} = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$. Se tiene

$$\text{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix}$$

Al resolver este determinante se obtiene

$$\nabla \times \vec{F} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) = \vec{0}$$

La utilidad del teorema radica en que permite determinar cuando un campo es o no gradiente.

Ejemplo 1.11.19. El campo $\vec{F}(x, y, z) = (y, -x, 0)$ no es gradiente pues

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, -2) \neq 0$$

Ejemplo 1.11.20. Si $\vec{F}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$ para $(x, y) \neq (0, 0)$,

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{y}{x^2 + y^2} & \frac{-x}{x^2 + y^2} & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 0)$$

Habiéndose obtenido que $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$, se debe establecer ahora el conjunto simplemente conexo para el cual existe el potencial, este conjunto no debe contener el $(0, 0)$, pues allí el campo se indefiniría y no es de clase ζ^1 . Se puede verificar que $f(x, y) = \arctg\left(\frac{y}{x}\right)$ es potencial de $\vec{F}$. Consideremos las situaciones que describe la figura 1.27.

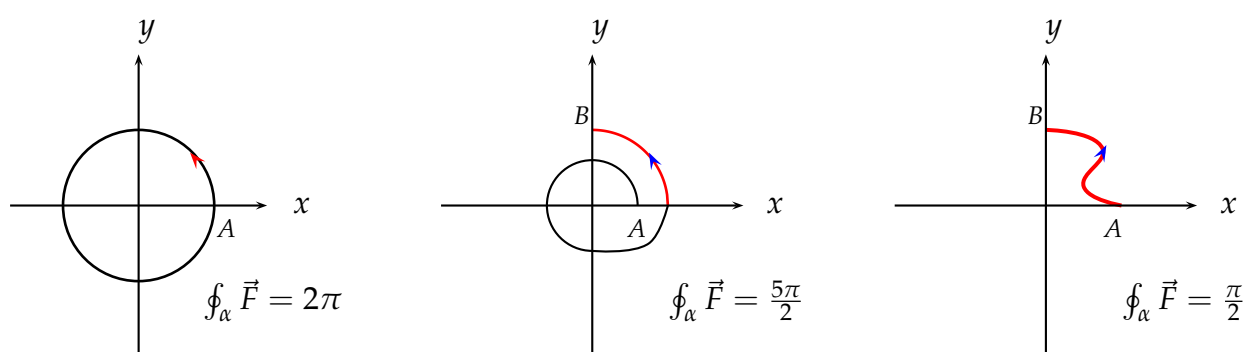


figura 1.27

Se observa que para cualquier trayectoria que no pase por el origen la integral del campo es la diferencia de potencial. Pero ¡atención!, el valor de la integral **para todos** los caminos que unen los puntos $(1, 0)$ y $(0, 1)$ depende de la trayectoria y su valor es $\frac{\pi}{2} + 2n\pi$. En donde n es la cantidad de veces que la curva da vueltas al origen de coordenadas.

A continuación, como resumen final de campos gradientes, tenemos:

1.11 Campos vectoriales conservativos

Teorema 1.11.21.

Sea $\vec{F}$ campo vectorial de clase ζ^1 definido sobre un conjunto simplemente conexo, excepto quizás en un número finito de puntos. Las siguientes condiciones para $\vec{F}$ son equivalentes:

- ☞ Para toda curva cerrada α simple y orientada $\int_{\alpha} \vec{F} = 0$
- ☞ $\vec{F} = \nabla f$. Es decir, $\vec{F}$ es gradiente de algún potencial f .
- ☞ $\nabla \times \vec{F} = 0$.
- ☞ $\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$, $1 \leq i < j \leq n$
- ☞ Para dos curvas simples orientadas α_1 y α_2 con los mismos extremos

$$\int_{\alpha_1} \vec{F} = \int_{\alpha_2} \vec{F}$$

Esta última condición proporciona un método mucho más simple, que los anteriores, para calcular la función potencial de un campo vectorial tridimensional. En efecto, si α es la parametrización de la trayectoria que une el punto $\vec{0}$ con el punto arbitrario $\vec{x}$, en la forma que indica la figura 1.28 (en el plano) y figura 1.29 (en el espacio), entonces

- En el plano: $f(x, y) = \int_0^x F_1(t, 0) dt + \int_0^y F_2(x, t) dt$
- En el espacio: $f(x, y, z) = \int_0^x F_1(t, 0, 0) dt + \int_0^y F_2(x, t, 0) dt + \int_0^z F_3(x, y, t) dt$

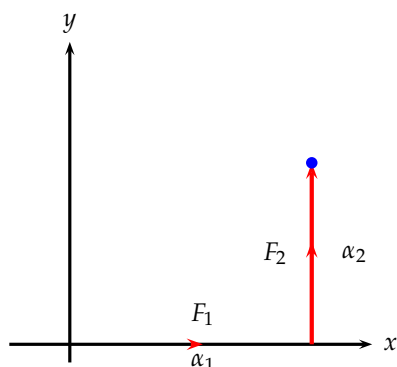


figura 1.28

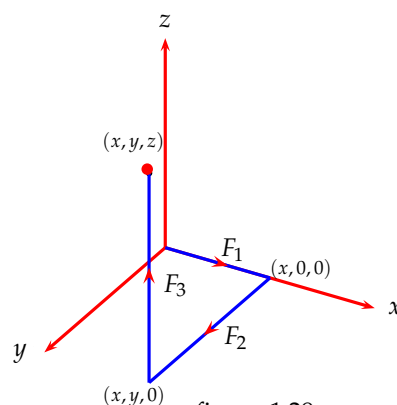


figura 1.29

Ejemplo 1.11.22. Hallemos la función potencial para $\vec{F}(x, y) = (2xy, x^2 - y)$.

Lo primero que debemos hacer es asegurarnos de que el campo es conservativo, ya que de esa forma existe la potencial. Como $F_1 = 2xy$ y $F_2 = x^2 - y$, entonces

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 2x = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$

Ahora que el campo vectorial es conservativo procedemos al cálculo de la potencial usando el método recién formulado.

$$f(x, y) = \int_0^x F_1(t, 0) dt + \int_0^y F_2(x, t) dt = \int_0^x 0 dt + \int_0^y (x^2 - t) dt = x^2 y - \frac{y^2}{2} + k$$

Ejemplo 1.11.23. El campo $\vec{F}(x, y, z) = (y, z \cos yz + x, y \cos yz)$, es un campo gradiente en todo $\mathbb{R}^3$ ya que $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$ en este conjunto simplemente conexo. Vamos a encontrar el potencial de $\vec{F}$ en tres formas diferentes:

Método 1

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \int_0^x F_1(t, 0, 0) dt + \int_0^y F_2(x, t, 0) dt + \int_0^z F_3(x, y, t) dt \\ &= \int_0^x 0 dt + \int_0^y x dt + \int_0^z y \cos yt dt = xy + \operatorname{sen} yz + k \end{aligned}$$

Método 2

$$\begin{aligned} \nabla f = \vec{F} &\implies \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = (y, x + z \cos yz, y \cos yz) \\ &\implies \frac{\partial f}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x + z \cos yz, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = y \cos yz \end{aligned}$$

Estas expresiones son equivalentes con las siguientes

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= xy + g_1(y, z) \\ f(x, y, z) &= z \operatorname{sen} yz + xy + g_2(x, z) \\ f(x, y, z) &= \operatorname{sen} yz + g_3(x, y) \end{aligned}$$

Las constantes de integración g_1, g_2, g_3 dependen sólo del argumento indicado. Ahora, derivando la primera de éstas se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial g_1(y, z)}{\partial z} = y \cos yz$$

de lo cual

$$g_1(y, z) = \int y \cos yz dz + k(y) = \operatorname{sen} yz + k(y)$$

1.11 Campos vectoriales conservativos

Así, $f(x, y, z) = xy + \operatorname{sen} yz + k(y)$.

Usando la ecuación $f(x, y, z) = \operatorname{sen} yz + xy + g_2(x, z)$ debe tenerse $k(y) = g_2(x, z)$. Como el primer miembro es función sólo de y , y el segundo función sólo de x y z concluimos que deben ser iguales a alguna constante k . Luego, el potencial buscado es

$$f(x, y, z) = xy + \operatorname{sen} yz + k$$

Método 3

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) &= \int_0^1 \vec{F}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt, \text{ siendo } \alpha(t) = t\vec{x} = (tx, ty, tz) \\ &= \int_0^1 (2txy + 2tyz \cos yzt^2) dt = xy + \operatorname{sen} yz + C \end{aligned}$$

Ejemplo 1.11.24. El campo vectorial $\vec{F} = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$ debe transportar una partícula desde el punto $(1, -1)$ al $(1, 1)$, sabiendo que el paso desde el $(0, 0)$ a lo largo del semieje positivo de las x se encuentra inhabilitado.

La figura 1.30 ilustra el problema. Vamos a resolverlo de dos maneras. La primera de ellas consiste en elegir una trayectoria, tal como la circunferencia

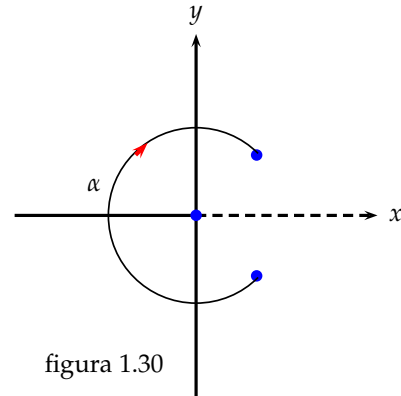
$$\alpha(t) = (\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\operatorname{sen} t)$$

con $\pi/4 \leq t \leq 7\pi/4$, que une los puntos final e inicial de la trayectoria y que respeta la hipótesis de no transitar “cortando” el semieje positivo.

La integral del campo vectorial $\vec{F}$ sobre esta trayectoria es

$$\begin{aligned} \int_{\alpha} \vec{F} \cdot d\vec{L} &= - \int_{\alpha} \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \cdot (dx, dy) \\ &= - \int_{\pi/4}^{7\pi/4} \frac{-\sqrt{2}\operatorname{sen} t(-\sqrt{2}\operatorname{sen} t) + \sqrt{2}\cos t(\sqrt{2}\cos t)}{2} dt \\ &= - \int_{\pi/4}^{7\pi/4} dt = -\frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

El signo menos delante de la integral se debe a que la parametrización va en sentido opuesto al requerido.



La segunda forma de resolver el problema, consiste en averiguar si el campo en cuestión es conservativo. Si lo es, se determina el potencial y luego se evalúa en los puntos extremos. Para este efecto, tenemos que $\vec{F}$ es de clase ζ^1 en todo $\mathbb{R}^3$ con excepción del origen de coordenadas. Su rotor nos dirá si existe la función potencial.

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & 0 \end{vmatrix} = (0,0,0)$$

En consecuencia, el campo es gradiente sobre todo conjunto simplemente conexo que no contenga el origen de coordenadas. La función potencial la determinamos a partir de la definición, como sigue

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-y}{x^2+y^2} &\implies f(x,y) = -\arctg \frac{x}{y} + c(y) \\ &\implies \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\arctg \frac{x}{y} + c(y) \right) \\ &\implies \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} + c'(y) \\ &\implies c'(y) = 0 \implies c(y) = \text{constante} \end{aligned}$$

Por tanto, $f(x,y) = -\arctg \frac{x}{y}$ es el potencial del campo vectorial. Esto significa que la integral de línea del campo vectorial **no depende** de la trayectoria de integración, y cualquier camino conduce al mismo valor. Tenemos:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha} \vec{F} \cdot d\vec{L} &= \int_{\alpha} \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right) \cdot (dx, dy) = -[f(\alpha(1)) - f(\alpha(0))] \\ &= -[f(1,-1) - f(1,1)] = -[\arctg \frac{1}{-1} - \arctg \frac{1}{1}] \\ &= -[\frac{7\pi}{4} - \frac{\pi}{4}] = -\frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

1.11.4. El Laplaciano

Es un operador escalar definido sobre un campo escalar. Viene dado por la divergencia del gradiente. Es decir, se obtiene aplicando dos veces el operador nabla. Por ello, es frecuente representarlo como $\nabla \cdot \nabla$, aunque también se representa como ∇^2 . En términos físicos da una idea de la curvatura del campo. También existe el Laplaciano de un campo vectorial.

Definición 1.11.25. Sea f campo escalar de $\mathbb{R}^3$. Se llama **Laplaciano** de f a la expresión

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Si $\nabla^2 f = 0$, se dice que el campo f es **armónico**.

Definición 1.11.26. Se llama **Laplaciano** de un campo vectorial $\vec{F}$, al nuevo campo vectorial definido por el gradiente de su divergencia menos el rotor de su rotor. Esto es

$$\nabla^2 \vec{F} = \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla \times (\nabla \times \vec{F}) = \text{grad}(\text{div } \vec{F}) - \text{rot}(\text{rot } \vec{F})$$

Ejemplo 1.11.27. Si $f(x, y, z) = 2x^2y + xz^3 - 2xy$, entonces su laplaciano es

$$\nabla^2 f = \frac{\partial}{\partial x}(4xy + z^3 - 2y) + \frac{\partial}{\partial y}(2x^2 - 2x) + \frac{\partial}{\partial z}(3xz^2) = 4y + 6xz$$

Proposición 1.11.28. Si f es armónico, entonces ∇f es **solenoidal** e **irrotacional**.

$$\text{div}(\nabla f) = \text{div} \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \stackrel{\text{armónico}}{=} 0$$

Esto prueba que es solenoidal. Veamos que es irrotacional (el rotor debe ser cero).

$$\text{rot}(\nabla f) = \text{rot} \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) = \vec{0}$$

1.11.5. Potencial escalar y vectorial

Como ya hemos visto, si el rotacional de un campo vectorial es cero entonces el campo vectorial puede escribirse como el gradiente de un campo escalar

$$\nabla \times \vec{F} = \vec{0} \implies \vec{F} = \nabla f$$

Al campo escalar f se le conoce como potencial escalar y se dice que $\vec{F}$ es un campo gradiente o conservativo. Si por otro lado, la divergencia de un campo vectorial es cero, entonces, de la ecuación

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0$$

vemos que este campo debe ser el rotacional de algún otro campo

$$\nabla \cdot \vec{F} = 0 \implies \vec{F} = \nabla \times \vec{G}$$

El campo vectorial $\vec{G}$ recibe el nombre de **potencial** vectorial del campo $\vec{F}$. Formalicemos esto.

Proposición 1.11.29. Sea $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ un campo vectorial de clase ζ^1 definido en un abierto simplemente conexo de $\mathbb{R}^3$. Entonces $\vec{F}$ es el rotacional de un campo vectorial $\vec{G}$ si y sólo si, $\vec{F}$ es solenoidal.

Al igual que sucede con los potenciales escalares, la búsqueda de potenciales vectoriales en el caso de que el abierto A sea conexo se reduce al cálculo de primitivas. La demostración de este resultado requiere del conocimiento de integrales de línea, algo que veremos más adelante, y que nos hará volver a este tema. Sin embargo, entregamos la forma en que el campo $\vec{G}$ puede ser encontrado. Sean $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ y $\vec{G} = (G_1, G_2, G_3)$, entonces

$$\nabla \times \vec{G} = \vec{F} \implies \begin{cases} \frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z} = F_1 \\ \frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x} = F_2 \\ \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} = F_3 \end{cases}$$

Podemos suponer, por ejemplo, que $G_3 = 0$, entonces, es posible dar unas primeras expresiones para G_1 y G_2 a partir de las dos primeras ecuaciones

$$F_1 = -\frac{\partial G_2}{\partial z} \implies G_2 = -\int F_1 dz + C_1(x, y)$$

$$F_2 = \frac{\partial G_1}{\partial z} \implies G_1 = \int F_2 dz + C_2(x, y)$$

Aquí podemos suponer que $C_1 = 0$, con lo cual tendríamos calculados G_3 y G_2 . Para concluir, basta determinar C_2 a partir de la tercera ecuación. Una solución es considerar que:

$$\begin{aligned} G_1 &= \int_0^z F_2(x, y, t) dt - \int_0^y F_3(x, t, 0) dt \\ G_2 &= -\int_0^z F_1(x, y, z) dt \\ G_3 &= 0 \end{aligned}$$

1.11.6. Teorema de Helmholtz

Como hemos visto, un campo vectorial puede ser:

- **Campo irrotacional.** Su rotacional es cero y por lo tanto puede ser expresado como el gradiente de un campo escalar

$$\nabla \times \vec{F} = \vec{0} \implies \vec{F} = \nabla f$$

1.11 Campos vectoriales conservativos

- **Campo solenoidal.** Su divergencia es cero y por lo tanto puede expresarse como el rotacional de un campo vectorial

$$\nabla \cdot \vec{F} = 0 \implies \vec{F} = \nabla \times \vec{G}$$

El teorema de Helmholtz establece que cualquier campo vectorial puede escribirse como la superposición de un campo solenoidal y otro irrotacional de la forma

$$\vec{F} = \nabla f + \nabla \times \vec{G}$$

Ejemplo 1.11.30. Dados los campos $\vec{F} = (x, y, z)$ y $\vec{H} = (x^2 + 1, z - 2xy, y)$, veamos si alguno de ellos es el rotacional de algún campo vectorial $\vec{G}$

Lo primero es obtener divergencia nula, que es una de las condiciones básicas:

$$\nabla \cdot \vec{F} = 3 \quad \text{y} \quad \nabla \cdot \vec{H} = 2x - 2x + 0 = 0$$

Está claro que $\vec{F}$ no tiene potencial vectorial y que $\vec{H}$ por tener divergencia nula y ser de clase ζ^1 si lo tiene. Ahora se calculan las integrales antes indicadas.

$$G_1 = \int_0^z F_2(x, y, t) dt - \int_0^y F_3(x, t, 0) dt = \int_0^z (t - 2xy) dt - \int_0^y t dt = \frac{z^2}{2} - 2xyz - \frac{y^2}{2}$$

$$G_2 = - \int_0^z F_1(x, y, z) dt = - \int_0^z (x^2 + 1) dt = -x^2z - z$$

$$G_3 = 0$$

En consecuencia, el campo $\vec{G}$, cuyo rotor es el campo $\vec{H}$ es

$$\vec{G} = \left(\frac{1}{2}z^2 - 2xyz - \frac{1}{2}y^2, -x^2z - z, 0 \right)$$

Así, $\vec{G}$ es potencial vectorial de $\vec{H}$. Si es de tu interés puedes verificar este resultado sacando el rotor de $\vec{G}$ para obtener $\vec{H}$.

1.11.7. Teorema de Green

El teorema de Green¹ relaciona una integral de línea a lo largo de una curva cerrada C en el plano $\mathbb{R}^2$ con una integral doble extendida a la región cuya frontera es C . Para denotar la orientación positiva de la curva C usamos C^+ . El teorema de Green es válido para regiones elementales del tipo R_x o bien R_y , y también para regiones más generales (simplemente conexas y múltiplemente conexas). Veamos primero el teorema para regiones elementales.

¹George Green, matemático inglés, 1793-1841

Teorema 1.11.31. (Green)

Sea R región elemental de $\mathbb{R}^2$ y sea C^+ su frontera. Si los campos escalares $P, Q : R \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ son de clase ζ^1 sobre R y su frontera, entonces

$$\int_{C^+} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \quad (1.1)$$

Demostración.

La integral de línea del primer miembro se toma dirección positiva, tal como se muestra en la figura 1.31. La curva C que se compone de dos partes:

$$C_1 : y = f_1(x) \text{ desde } a \text{ hasta } b, \quad C_2 : y = f_2(x) \text{ desde } b \text{ hasta } a$$

con lo cual, es claro que la región $R = \{(x, y) / a \leq x \leq b, f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$.

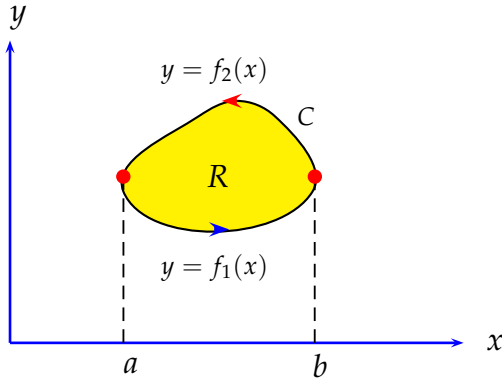


figura 1.31

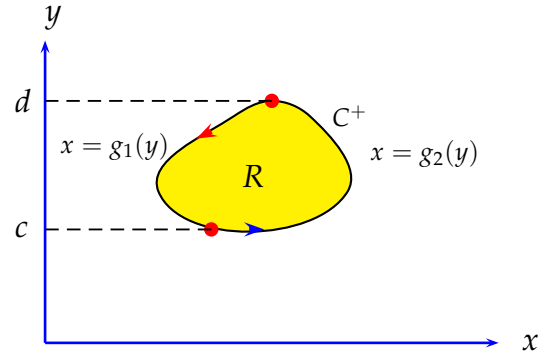


figura 1.32

Consideremos la integral doble de $\frac{\partial P}{\partial y}$ sobre R . Para cualquier x entre a y b , integramos primero respecto de y , desde $y = f_1(x)$ hasta $y = f_2(x)$, para obtener

$$\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = P(x, y) \Big|_{f_1(x)}^{f_2(x)} = P(x, f_2(x)) - P(x, f_1(x)) \quad (1.2)$$

Ahora integramos respecto de x la ecuación 1.2

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy dx &= \int_a^b [P(x, f_2(x)) - P(x, f_1(x))] dx \\ &= - \int_b^a P(x, f_2(x)) dx - \int_a^b P(x, f_1(x)) dx \\ &= - \int_{C_2} P dx - \int_{C_1} P dx = - \int_C P dx \end{aligned}$$

1.11 Campos vectoriales conservativos

Por tanto,

$$\int_{C^+} P(x, y) dx = - \iint_R \frac{\partial P}{\partial y} dx dy \quad (1.3)$$

Esta última ecuación es la mitad del resultado que necesitamos. Para deducir la otra mitad, integremos ahora $\frac{\partial N}{\partial x}$ primero respecto de x y después respecto de y , como se indica en la figura 1.32, que muestra a la curva C de la figura 1.31, pero ahora descompuesta en dos partes orientadas de la siguiente manera:

$$C_1 : x = g_1(y) \text{ desde } d \text{ hasta } c, \quad C_2 : x = g_2(y) \text{ desde } c \text{ hasta } d$$

con lo cual el recinto $R = \{(x, y) / c \leq y \leq d, g_1(y) \leq x \leq g_2(y)\}$. Luego,

$$\begin{aligned} \int_c^d \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy &= \int_c^d [Q(g_2(y), y) - Q(g_1(y), y)] dy \\ &= \int_c^d Q(g_2(y), y) dy - \int_c^d Q(g_1(y), y) dy \\ &= \int_{C_2} Q dy + \int_{C_1} Q dy = \int_C Q dy \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\int_{C^+} Q(x, y) dy = \iint_R \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy \quad (1.4)$$

Combinando las ecuaciones 1.3 y 1.4 obtenemos la ecuación 1.1, con la que concluye la demostración.

1.11.8. Generalización del Teorema de Green

El Teorema de Green se puede generalizar a regiones múltiplemente conexas, figura 3.33. La frontera de R está formada por las curvas C_1 y C_2 , ambas recorridas positivamente (cualquier persona que recorra en ese sentido debe tener la región a su izquierda).

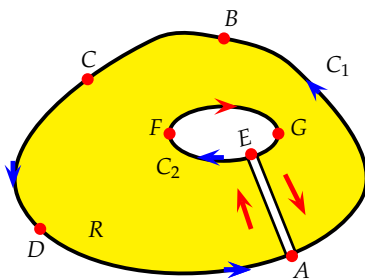


figura 1.31

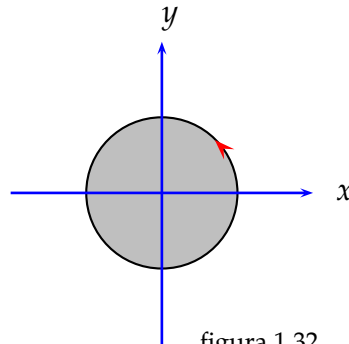


figura 1.32

El “corte” AE transforma la región múltiplemente conexa en simplemente conexa, siendo así aplicable el teorema de Green. Es decir, se satisface que

$$\int_{ABCD AEFGEA} P dx + Q dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \quad (1.5)$$

La integral de línea de esta ecuación se descompone como sigue:

$$\int_{ABCD AEFGEA} P dx + Q dy = \int_{ABCD A} P dx + Q dy + \int_{AE} P dx + Q dy + \int_{EFGE} P dx + Q dy + \int_{EA} P dx + Q dy$$

Como

$$\int_{EA} P dx = - \int_{AE} P dx$$

entonces

$$\int_{ABCD AEFGEA} P dx + Q dy = \int_{ABCD A} P dx + Q dy + \int_{EFGE} P dx + Q dy$$

Esta última suma de integrales equivale a tener

$$\int_{C_2^+} P dx + Q dy + \int_{C_1^-} P dx + Q dy = \int_{Fr(R)} P dx + Q dy$$

Se concluye que la ecuación 1.5 (teorema de Green) se satisface para este tipo de regiones.

$$\int_{Fr(R)} P dx + Q dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

Ejemplo 1.11.32. Calculemos $\int_{\alpha} x dx + xy dy$ siendo α la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, recorrida en sentido positivo.

Se observa que los campos $P = x$ y $Q = xy$ son de clase ζ^1 en la región que encierra α y también sobre su frontera (figura 1.32). El cálculo de la integral doble es el siguiente.

$$\begin{aligned} \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy &= \iint_R (y - 0) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \sin \theta dr d\theta \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta = 0 \end{aligned}$$

El cálculo directo de la integral de línea (que en este caso no es difícil) es

$$\begin{aligned} \int_{C^+} P dx + Q dy &= \int_0^{2\pi} (\cos t (-\sin t) + \cos^2 t \sin t) dt \\ &= \left(\frac{1}{2} \cos^2 t - \frac{1}{3} \cos^3 t \right)_0^{2\pi} = 0 \end{aligned}$$

Además de haber calculado la integral hemos verificado el teorema de Green. El siguiente ejemplo es de carácter más global ya que encierra el concepto de campo gradiente.

1.11 Campos vectoriales conservativos

Ejemplo 1.11.33. Hallemos $\int_{(1,0)}^{(-1,0)} \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}$ en los siguientes casos:

1. El segmento rectilíneo que une los puntos $(1,0), (1,1), (-1,1), (-1,0)$.
2. El segmento rectilíneo que une los puntos $(1,0), (1,-1), (-1,-1), (-1,0)$.
3. El rectángulo de vértices $(1,-1), (1,1), (-1,1), (-1,-1)$.
4. La circunferencia de centro el origen y radio 1.
5. La circunferencia de centro $(2,0)$ y radio 1.
6. La elipse $x^2 + 4y^2 = 1$

Claramente, el campo vectorial es $\vec{F} = (-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$. Se observa también que el $(0,0)$ es un punto en el que el campo vectorial no está definido. Aunque el integrando no se ve difícil, veamos si se trata de un campo gradiente.

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & 0 \end{vmatrix} = (0,0,0)$$

Ahora, para curvas cerradas sobre dominios simplemente conexos, cualquier integral de línea de un campo gradiente es cero. La función potencial es

$$f(x,y) = \arctg \frac{y}{x}$$

1. Para hallar esta integral de línea tenemos dos opciones, cálculo directo o en base a la función potencial. La primera forma significa que hay que parametrizar y evaluar la integral sobre tres trayectorias. Preferimos la segunda alternativa.

$$\int_{(1,0)}^{(-1,0)} \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2} = \phi(-1,0) - \phi(1,0) = \arctg \frac{0}{-1} - \arctg \frac{0}{1} = \pi$$

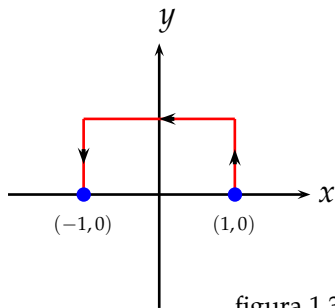


figura 1.33

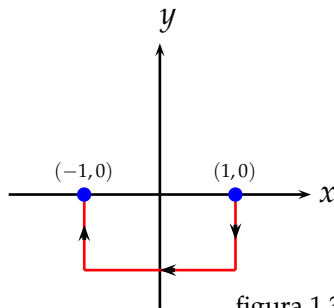


figura 1.34

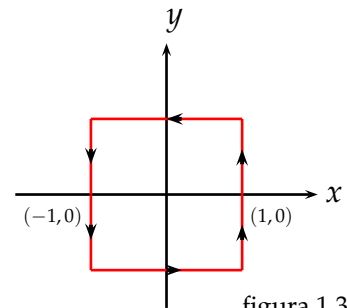


figura 1.35

- 2 La misma alternativa anterior, pero poniendo atención en la trayectoria es recorrida en dirección no positiva.

$$\int_{(1,0)}^{(-1,0)} \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2} = -[\phi(-1,0) - \phi(1,0)] = -\pi$$

- 3 No se puede usar el método de la función potencial por que el $(0,0)$ se encuentra encerrado por la trayectoria. Por lo que no se cumple la condición de estar en un conjunto simplemente conexo. Tenemos dos alternativas, la primera, el cálculo directo que involucra cinco trayectorias, o la aplicación del teorema de Green para conjuntos múltiplemente conexos.

La ley del “mínimo esfuerzo” nos lleva a Green, que también es la forma más inteligente de abordar esta clase de problemas. Para este efecto, construimos alrededor del punto conflictivo, $(0,0)$ en este caso, una circunferencia de radio ϵ positivo y pequeño. Esta circunferencia se parametriza $\alpha(t) = (\epsilon \cos t, \epsilon \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$. se tiene.

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{L} = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

La otra forma, el cálculo directo, se reduce a observar que en la primera parte se integró desde $(1,0)$ a $(-1,0)$ y su valor es π . En la segunda parte se integró desde $(1,0)$ a $(-1,0)$ en sentido negativo y se halló que su valor es $-\pi$, de manera que en el sentido contrario es π . Con estos datos, la integral sobre todo el contorno del cuadrado, en sentido positivo es 2π , obviamente el mismo resultado que hallamos por Green.

- 4 En este caso, la integración es sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. De nuevo nos encontramos con un problema similar al planteado en la tercera parte. La misma circunferencia de radio ϵ y el teorema de Green para conjuntos múltiplemente conexos nos lleva, de nuevo, a decir que

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{L} = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

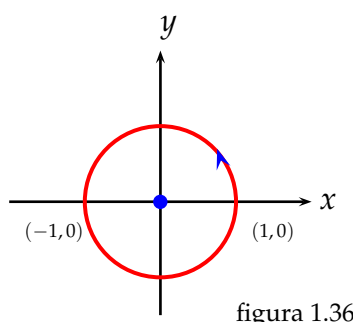


figura 1.36

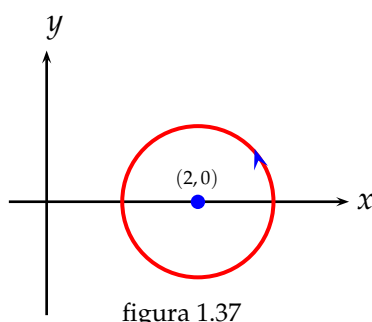


figura 1.37

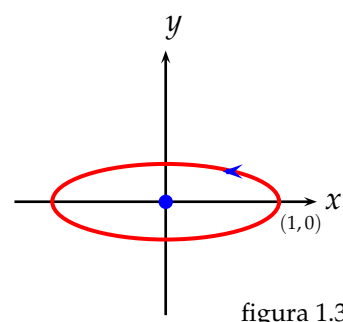


figura 1.38

- 5 Ahora la situación es diferente a la anterior, el punto conflictivo, a saber el $(0,0)$, se encuentra fuera de un conjunto simplemente conexo en el que está contenida nuestra curva. Por ejemplo,

1.11 Campos vectoriales conservativos

el mismo que encierra la trayectoria $(x-2)^2 + y^2 = 1$. Como el campo es gradiente, la integral sobre esta curva cerrada es cero. Esto es

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{L} = 0$$

6 La situación en este caso es análoga a la de las partes 3 y 4. En consecuencia

$$\int_{\text{elipse}} \vec{F} \cdot d\vec{L} = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

El teorema de Green sirve como herramienta de cálculo del área de una región. Si $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$, entonces entre las muchas elecciones posibles para satisfacer esta diferencia se encuentran $M = -\frac{y}{2}$ y $N = \frac{x}{2}$. Esto nos lleva a establecer lo siguiente.

Proposición 1.11.34. Sea C^+ curva cerrada simple que es frontera de una región a la cual le es aplicable el teorema de Green, entonces el área de la región D acotada por C^+ es

$$A(D) = \frac{1}{2} \oint_{C^+} x dy - y dx$$

Demostración.

$$P = -y \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = -1, \quad Q = x \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{2} \oint_{C^+} (x dy - y dx) = \frac{1}{2} \int_R 2 dx dy = \int_R dx dy = A(R)$$

1.11.9. Formas alternativas del teorema de Green

Concluimos esta sección enunciando dos formas vectoriales del teorema de Green para regiones del plano. La extensión de estas formas vectoriales a tres dimensiones es materia de un tema posterior.

Teorema 1.11.35. (Stokes en el plano)

Sea $\vec{F}$ un campo vectorial de clase ζ^1 R definido sobre una región R del plano, tal que

$$\vec{F}(x, y) = P\vec{i} + Q\vec{j} + 0\vec{k}$$

entonces

$$\oint_{C^+} P dx + Q dy = \iint_R (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{k} dA$$

Demostración.

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = \left(-\frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

Luego

$$(\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{k} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

En consecuencia

$$\oint_{C^+} P dx + Q dy = \iint_R (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{k} dA = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

Teorema 1.11.36. (Gauss en el plano)

Sea R región del plano y C^+ su frontera recorrida positivamente. Sea $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$ la parametrización de C^+ . El vector **normal** unitario a α' es

$$\vec{n} = \frac{(y'(t), -x'(t))}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}} = \frac{(y'(t), -x'(t))}{\|\alpha'\|}$$

Si el campo $\vec{F} = (P, Q)$ es de clase ζ^1 sobre R y su frontera, se verifica entonces

$$\oint_{C^+} (\vec{F} \cdot \vec{n}) dL = \iint_R \nabla \cdot \vec{F} dA$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \oint_{C^+} (\vec{F} \cdot \vec{n}) dL &= \int_a^b \vec{F}(\alpha(t)) \cdot \vec{n} \|\alpha'(t)\| dt \\ &= \int_a^b [P(x(t), y(t)), Q(x(t), y(t))] \cdot \frac{(y'(t), -x'(t))}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt \\ &= \int_a^b [P y'(t) - Q x'(t)] dt \\ &= \int_a^b \left(P \frac{dy}{dt} - Q \frac{dx}{dt} \right) dt = \int_a^b P dy - Q dx \end{aligned}$$

A esta última integral la convertimos en una integral doble mediante el teorema de Green

$$\oint_{C^+} (\vec{F} \cdot \vec{n}) dL = \iint_R \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dA = \iint_R \nabla \cdot \vec{F} dA$$

Nota!!

- La integral $\oint_C \vec{F} \cdot \vec{n} dL$ se llama **flujo** a través de C .
- Esta integral entrega la tasa neta en que el fluido cruza C , hacia el lado de la normal $\vec{n}$, en unidades de área por unidad de tiempo.

Ejemplo 1.11.37. Consideremos el campo vectorial $\vec{F}(x,y) = (-x, -y)$. Sea α la trayectoria triangular conformada por $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$

La figura 1.39 muestra la gráfica de la trayectoria y algunos vectores del campo. La parametrización de la trayectoria y sus vectores tangentes son:

$$\alpha_1(t) = (t, 0), 0 \leq t \leq 1 \implies \alpha'_1(t) = (1, 0)$$

$$\alpha_2(t) = (1 - t, t), 0 \leq t \leq 1 \implies \alpha'_2(t) = (-1, 1)$$

$$\alpha_3(t) = (0, 1 - t), 0 \leq t \leq 1 \implies \alpha'_3(t) = (0, -1)$$

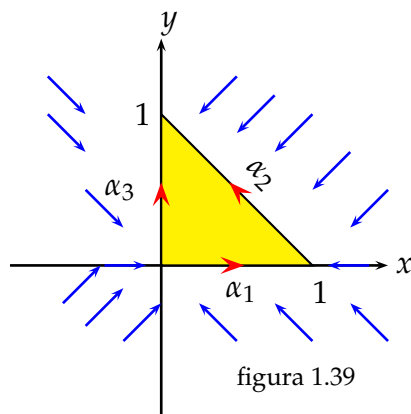


figura 1.39

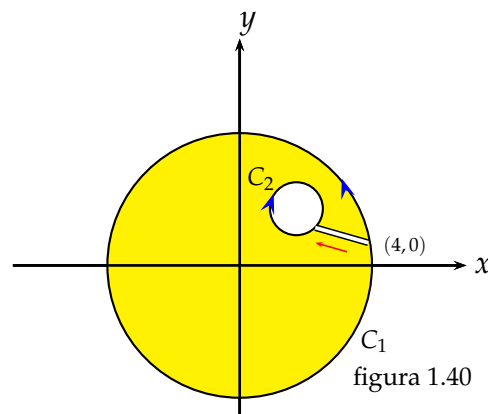


figura 1.40

Se necesitan vectores normales a cada curva frontera. Ellos son:

$$\vec{n}_1 = (0, 1), \text{ en frontera } \alpha_1(t)$$

$$\vec{n}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 1), \text{ en la frontera } \alpha_2$$

$$\vec{n}_3 = (-1, 0), \text{ en la frontera } \alpha_3$$

De esta manera, las integrales de línea y su respectivo valor son:

$$\int_{\alpha_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_1 \|\alpha_1'(t)\| dt = \int_0^1 (-t, 0) \cdot (0, -1) \|(1, 0)\| dt = 0$$

$$\int_{\alpha_2} \vec{F} \cdot \vec{n}_2 \|\alpha_2'(t)\| dt = \int_0^1 (t-1, -t) \cdot \frac{(1, 1)}{\sqrt{2}} \|(-1, 1)\| dt = -1$$

$$\int_{\alpha_3} \vec{F} \cdot \vec{n}_3 \|\alpha_3'(t)\| dt = \int_0^1 (0, t-1) \cdot (-1, 0) \|(0, -1)\| dt = 0$$

Al hacer la suma se obtiene que

$$\text{Flujo} = \int_{\alpha} \vec{F} \cdot \vec{n} dL = \int_{\alpha_1} \vec{F} \cdot \vec{n} dL + \int_{\alpha_2} \vec{F} \cdot \vec{n} dL + \int_{\alpha_3} \vec{F} \cdot \vec{n} dL = -1$$

Debe quedar claro que hemos calculado el flujo en cada cara, y que el **flujo total** a través de las caras es -1 .

Ejemplo 1.11.38. Consideremos el campo $\vec{F}(x, y) = (y, 2x)$ y la región R que es el interior de la región R_1 y el exterior de la región R_2 tales que

$$R_1 = \{(x, y) / x^2 + y^2 \leq 16\}, \quad R_2 = \{(x, y) / (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1\}$$

La figura 1.40 muestra la región R y la frontera recorrida positivamente. Vamos a verificar el teorema de Green para regiones múltiplemente conexas. Para ello empezamos por parametrizar ambas curvas.

$$\alpha_1(t) = (4\cos t, 4\sin t), \quad \alpha_2(t) = (1 + \cos t, 1 + \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

El cálculo de la integral de línea sobre $C^+ = C_1 \cup C_2$, ambas fronteras recorridas positivamente, es

$$\begin{aligned} \oint_{C^+} \vec{F} \cdot d\vec{L} &= \int_0^{2\pi} (4\sin t, 8\cos t)(-4\sin t, 4\cos t) dt + \int_0^{2\pi} (1 + \sin t, 2 + 2\cos t)(-\sin t, \cos t) dt \\ &= 16\pi - \pi = 15\pi \end{aligned}$$

Por otra parte, Green afirma que

$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \text{área } \odot_4 - \text{área } \odot_1 = 15\pi$$

Ejemplo 1.11.39. Hallemos el flujo del campo vectorial $\vec{F}(x, y) = (0, y^3)$ a través de los lados de los rectángulos: $R_1 = [1, 3] \times [1, 2]$ y $R_2 = [-1, 1] \times [-1, 1]$

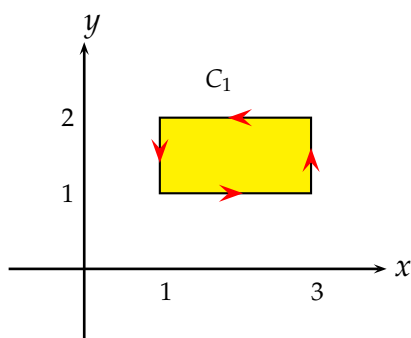


figura 1.41

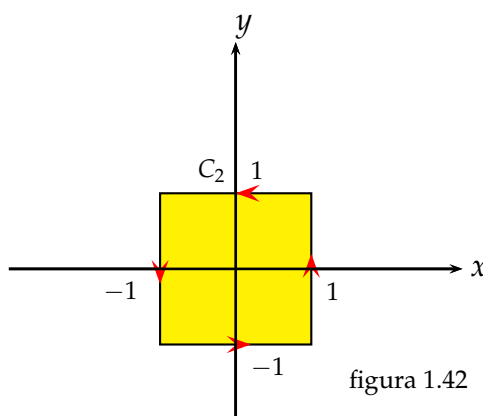


figura 1.42

Las figuras 1.41 y 1.42 muestran ambos recintos. El campo es de clase ζ^1 sobre ambos rectángulos y sobre sus fronteras C_1 y C_2 , respectivamente. Por tanto, el teorema de Gauss en el plano es aplicable. Tenemos:

Flujo a través de R_1

$$\text{Flujo} = \oint_{C_1} (\vec{F} \cdot \vec{n}) dL = \iint_{R_1} (\nabla \cdot \vec{F}) dA = \int_1^3 \int_1^2 3y^2 dy dx = 14$$

Flujo a través de R_2

$$\text{Flujo} = \oint_{C_2} (\vec{F} \cdot \vec{n}) dL = \iint_{R_2} (\nabla \cdot \vec{F}) dA = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 3y^2 dy dx = 4$$

1.12. Integrales de superficie

Las integrales de superficie a estudiar son de la forma

$$\int_S f dS, \quad \int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

en donde f es un campo escalar, $\vec{F}$ un campo vectorial, dS la diferencial de superficie, $d\vec{S} = \vec{n}dS$ con $\vec{n}$ vector normal exterior unitario a la superficie S .

En primer lugar, algunas consideraciones geométricas sobre las superficies restringidas a $\mathbb{R}^3$. Analíticamente, una superficie puede expresarse en forma:

- **implícita**, lo cual significa que se considera una superficie como un conjunto de puntos (x, y, z) que satisfacen una ecuación de la forma $F(x, y, z) = 0$.
- **explícita**, que se obtiene a partir de la implícita cuando se puede despejar una de las variables en función de las dos restantes. Por ejemplo, z en función de x y y , obteniendo $z = f(x, y)$.

- **paramétrica**, forma que permite trabajar adecuadamente los casos de una esfera, un cubo, un toro y otras.

Definición 1.12.1. Una **superficie parametrizada** S es una función $\varphi : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ tal que

$$\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

Si la función φ que define la superficie es de clase ζ^1 , o diferenciable, entonces la superficie se dice de clase ζ^1 o diferenciable. La definición de superficie mediante una parametrización está motivada por el hecho de que no toda superficie es la gráfica de alguna función de $\mathbb{R}^2$, así por ejemplo, la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, no es la gráfica de ninguna función $z = f(x, y)$, pues ello significa que para cada $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ debe haber sólo un z_0 tal que $(x_0, y_0, z_0) \in S$, siendo claro que esta condición no se cumple, por ejemplo, para $(1, 1)$, ya que sus imágenes $(1, 1, 1) \in S$ y $(1, 1, -1) \in S$.

¿Cómo se parametriza una superficie?

Si se observa con atención la definición, se está considerando una superficie como un objeto “bidiimensional”, pues tiene por dominio un subconjunto D de $\mathbb{R}^2$, y las funciones coordenadas de φ tienen la misión de “meter” $f(D)$ en el espacio y dejar trazada, con sus imágenes, la superficie $\varphi(D) = S$.

Ejemplo 1.12.2. Estudiemos el efecto que tiene sobre el recinto $D = \{(u, v) / 1 \leq u \leq 2, 2 \leq v \leq 4\}$ aplicar la función

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \varphi(u, v) = (u, v, u + v + 1)$$

¡Sí!, este asunto se parece al de las transformaciones que sirvieron para el cambio de variables en la integral doble y triple.

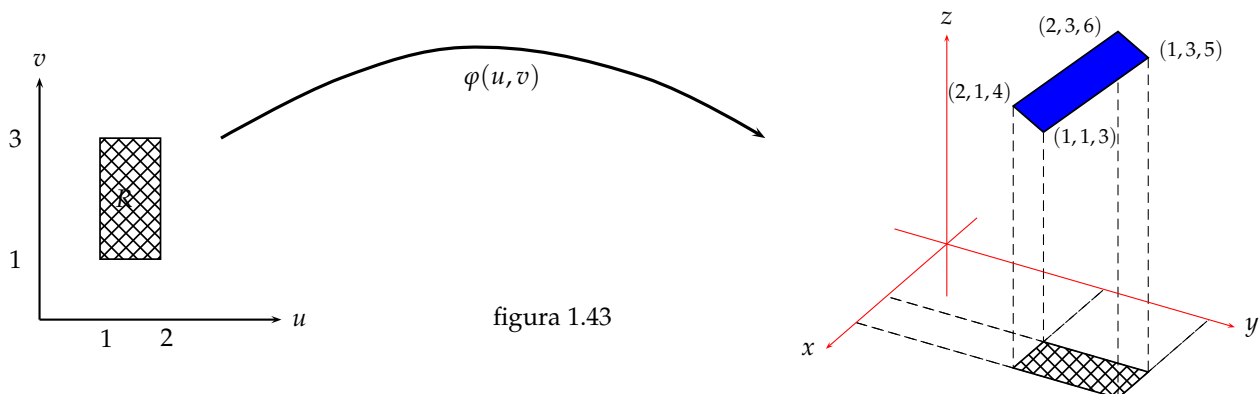


figura 1.43

Primero llevemos los vértices del rectángulo:

$$\varphi(1, 2) = (1, 2, 3), \quad \varphi(2, 2) = (2, 2, 4), \quad \varphi(2, 4) = (2, 6), \quad \varphi(1, 4) = (1, 5)$$

Como la transformación es lineal debe llevar rectas en rectas. Así que sacando las imágenes de los vértices del recinto y luego uniéndolos por rectas sabemos que la superficie que tenemos en $\mathbb{R}^3$ es un plano. La figura 1.43 muestra el recinto del plano y su imagen por la transformación.

Vamos a ver ahora como parametrizar superficies, ello es importante para el cálculo de integrales de superficie. En lo primero que hay que poner atención es en el plano desde el que se va a parametrizar. La definición de función es fundamental, no siempre es posible hacer parametrizaciones desde cualquier plano coordenado. Algunos ejemplos nos pondrán en la senda correcta. El primero de ellos muestra el procedimiento clásico para parametrizar funciones.

Ejemplo 1.12.3. Sea S el gráfico de una función continua $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Hallemos una parametrización de S .

Sabemos que

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y) \in D, z = f(x, y)\} = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 / (x, y) \in D\}$$

Luego, la función

$$\phi : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \phi(x, y) = (x, y, f(x, y))$$

es continua y satisface $\phi(D) = S$. Por tanto, es una parametrización de S .

Ejemplo 1.12.4. Para parametrizar la porción de superficie del plano $4x + 3y + 2z = 12$ que queda en el primer octante (figura 1.44) podemos elegir cualesquiera de los tres planos coordenados para hacer la parametrización, ello es posible en razón de que desde cualquiera de ellos se puede establecer una función que permite construir esa porción de plano.

Las parametrizaciones, desde cada uno de los planos coordenados son:

■ **Plano xy :**

$$\phi(x, y) = (x, y, \frac{1}{2}(12 - 4x - 3y))$$

En el plano xy el recinto corresponde a un triángulo acotado del modo siguiente:

$$0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq \frac{1}{3}(12 - 4x)$$

■ **Plano xz :**

$$\phi(x, z) = (x, \frac{1}{3}(12 - 4x - 2z), z)$$

El recinto, desde el cual se hace la parametrización, en el plano xz es un triángulo.

$$0 \leq x \leq 3, 0 \leq z \leq 6 - 2x$$

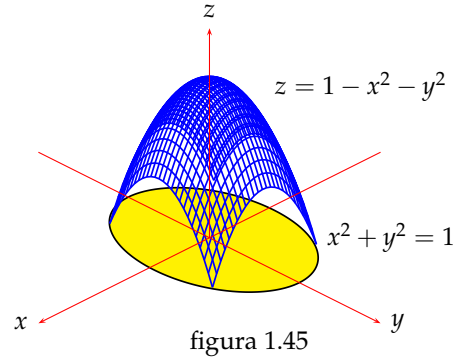
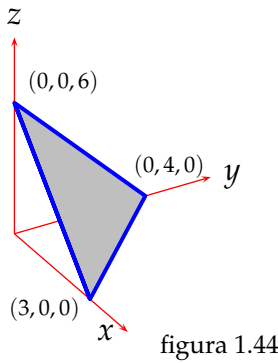
■ **Plano yz :**

$$\phi(y, z) = (\frac{1}{4}(12 - 3y - 2z), y, z)$$

El recinto en el plano yz es el triángulo acotado por

$$0 \leq y \leq 4, 0 \leq z \leq \frac{1}{2}(12 - 3y)$$

Observar que, en cada caso, se eligieron las variables del plano coordenado en lugar de u y v .



Ejemplo 1.12.5. La ecuación $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ es la representación explícita de un paraboloides (figura 1.45). Su ecuación implícita es $F(x, y, z) = z + x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Para parametrizar el paraboloides debemos elegir el plano desde el cual es posible tener una función. Se observa que esto sólo es posible desde el plano xy . Ya que estamos en este plano, por simplicidad se escogen las variables x e y en lugar de u y v como parámetros, entonces se obtiene la parametrización

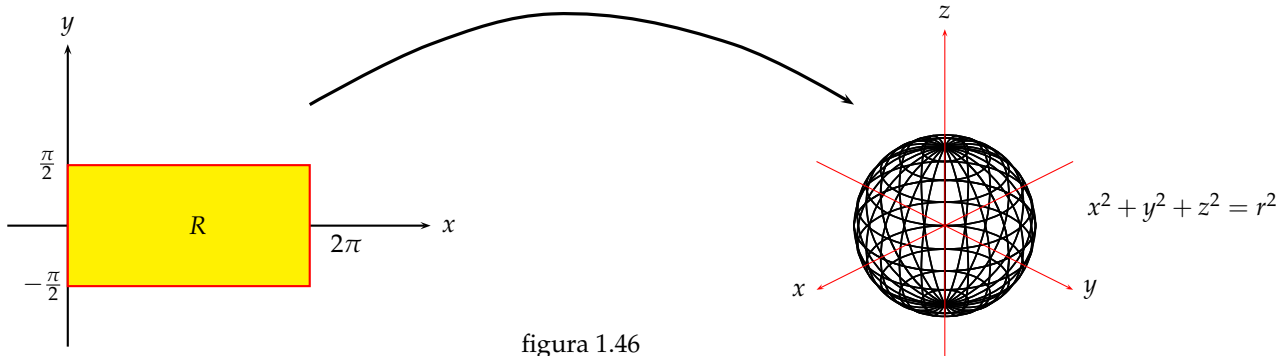
$$\phi(x, y) = (x, y, 1 - x^2 - y^2), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Ejemplo 1.12.6. La función $\phi(u, v) = (r \cos u \cos v, r \sin u \cos v, r \sin v)$ lleva el rectángulo

$$R = \{0 \leq u \leq 2\pi, -\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}\}$$

en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. En efecto,

$$\begin{cases} x = r \cos u \cos v \\ y = r \sin u \cos v \\ z = r \sin v \end{cases} \implies x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$



1.12.1. Parametrizaciones regulares - Plano tangente

Consideremos una superficie parametrizada $S = \varphi(D)$ con

$$\varphi : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

Si fijamos la segunda variable $v = v_0$, queda definida una curva cuya traza está contenida en S

$$\alpha_1(u) = \varphi(u, v_0) = ((x(u, v_0), y(u, v_0), z(u, v_0)))$$

Si fijamos la primera variable $u = u_0$, queda definida otra curva cuya traza está contenida en S

$$\alpha_2(v) = \varphi(u_0, v) = (x(u_0, v), y(u_0, v), z(u_0, v))$$

Esto se ilustra en la figura 1.47

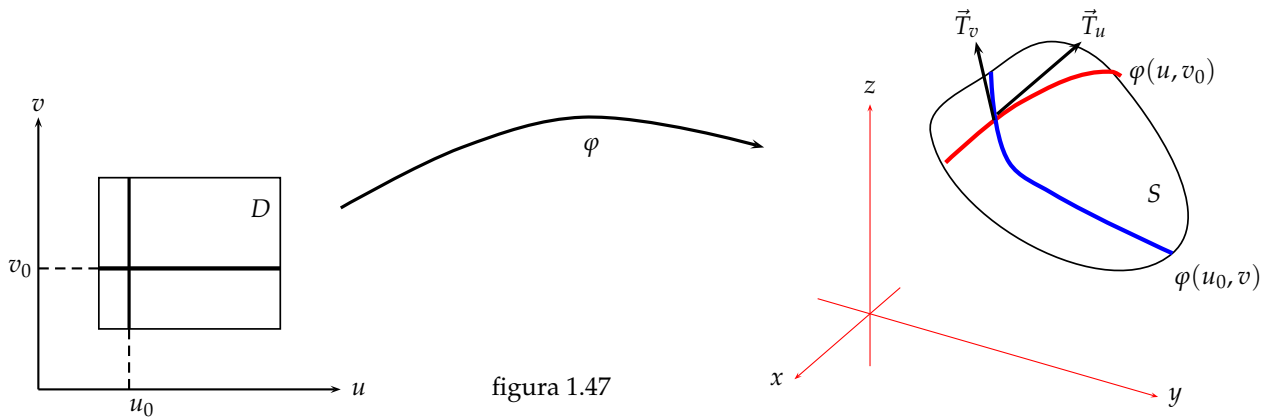


figura 1.47

Supongamos ahora que φ es de clase ζ^1 . En tal caso, las curvas α_1 y α_2 son derivables y sus vectores tangentes son:

$$\alpha'_1(u) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u, v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(u, v_0), \frac{\partial z}{\partial u}(u, v_0) \right) = \varphi_u(u, v_0)$$

$$\alpha'_2(v) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v), \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v), \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v) \right) = \varphi_v(u_0, v)$$

Hacemos la siguiente notación:

$$\vec{T}_u = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0), \quad \vec{T}_v = \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0)$$

Definición 1.12.7. Decimos que φ es **regular** en el punto (u_0, v_0) si es de clase ζ^1 y verifica que el llamado "vector fundamental" $\vec{T}_u \times \vec{T}_v \neq \vec{0}$.

Ejemplo 1.12.8. La superficie $\varphi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u)$ con $u \in [0, \infty]$, $v \in [0, 2\pi]$ es la hoja superior de un cono, pues la suma de los cuadrados de sus primeras componentes es igual al cuadrado de la tercera ($z^2 = x^2 + y^2$).

Las derivadas de cada una de las componentes de φ son de clase ζ^∞ . Veamos que pasa con el vector fundamental

$$\vec{T}_u = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) = (\cos v, \sin v, 1), \quad \vec{T}_v = \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) = (-u \sin v, u \cos v, 0)$$

Luego,

$$\vec{T}_u \times \vec{T}_v = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos v & \sin v & 1 \\ -u \sin v & u \cos v & 0 \end{pmatrix} = (-u \cos v, -u \sin v, u)$$

que se anula sólo para $u = 0$, esto es, en el vértice del cono. De modo que φ es regular en todo punto salvo en $(0, v)$.

Ejemplo 1.12.9. Veamos en qué puntos es regular la superficie $\varphi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u^2)$ con $u \in [0, \infty]$, $v \in [0, 2\pi]$.

Las derivadas de las componentes de φ son de clase ζ^∞ . Los vectores fundamentales son:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = (\cos v, \sin v, 2u), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = (-u \sin v, u \cos v, 0)$$

de donde

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} = (-2u^2 \cos v, -2u^2 \sin v, u)$$

Este producto se anula solamente en $(0, 0)$. Por tanto, en ese punto, φ no es regular.

Esta superficie es un paraboloide de ecuación $z = x^2 + y^2$. Dado que esta función es diferenciable sabemos que admite plano tangente en todo punto. La parametrización que hicimos, por no ser regular en $(0, v)$, no nos permite hallar la ecuación del plano tangente en $(0, 0, 0)$. Lo que ocurre es que φ tiene la propiedad que al acercarnos a los puntos de la forma $(0, v)$ la longitud del vector fundamental $\vec{T}_u \times \vec{T}_v$ se va achicando hasta anularse. Esto no sucede si, en lugar de parametrizar el paraboloide usando φ usamos la parametrización clásica $\varphi(x, y) = (x, y, f(x, y))$.

Ejemplo 1.12.10. Para la superficie S de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, una parametrización está dada por

$$\varphi : D = [0, 2\pi] \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \varphi(\theta, \phi) = (2 \cos \theta \sin \phi, 2 \sin \theta \sin \phi, 2 \cos \phi)$$

Claramente φ es de clase ζ^1 . Veamos dónde es regular. Para ello calculamos los vectores tangentes

$$\vec{T}_\theta = \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = (-2 \sin \theta \sin \phi, 2 \cos \theta \sin \phi, 0)$$

$$\vec{T}_\phi = \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} = (2 \cos \theta \cos \phi, 2 \sin \theta \cos \phi, -2 \sin \phi)$$

1.13 Área de una superficie

de donde

$$\vec{T}_\theta \times \vec{T}_\phi = (-4 \cos \theta \sin^2 \phi, -4 \sin \theta \sin^2 \phi, -4 \sin \phi \cos \phi)$$

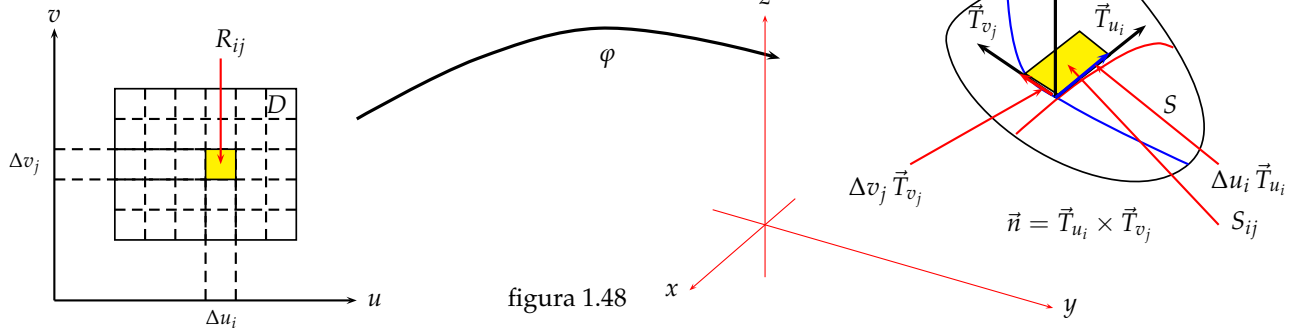
Concluimos que esta parametrización de la esfera de radio 2 es regular en todo punto salvo en los polos.

Sea $S = \varphi(D)$ una superficie parametrizada. Para cada $(u, v) \in D$, los vectores $\vec{T}_u$ y $\vec{T}_v$ son, por definición, los vectores tangentes a sendas curvas contenidas en S , resultan, en consecuencia tangentes a S en el punto correspondiente. En particular, si en ese punto la función φ es regular se tiene que $\vec{T}_u \times \vec{T}_v \neq \vec{0}$. Lo cual significa que $\vec{T}_u$ y $\vec{T}_v$ son linealmente independientes y por lo tanto generan un plano: el plano tangente a S en $\varphi(u, v)$, cuya ecuación podemos escribir en la forma,

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (\vec{T}_u \times \vec{T}_v) = 0$$

1.13. Área de una superficie

Sea $S = \varphi(D)$ una superficie parametrizada donde: D es una región elemental del plano, φ es de clase ζ^1 , φ es inyectiva, salvo quizás en la frontera de D , φ es regular, salvo quizás en la frontera de D o en un número finito de puntos del interior.



Para simplificar consideremos que la región elemental D es un rectángulo. Tomemos una partición de cada uno de sus lados y obtenemos los R_{ij} , cuya unión nos da D . Por otro lado, llamamos

$$S_{ij} = \varphi(R_{ij})$$

La unión de estas porciones de S proporciona toda la superficie S . Luego, es natural decir que

$$A(S) = \sum_{i,j} A(S_{ij})$$

Se trata entonces de calcular las áreas (o una aproximación) de los S_{ij} . Para i, j fijos, consideremos el paralelogramo P_{ij} (contenido en el plano tangente a S en $\varphi(u_i, v_j)$) y determinado por los vectores

$$\Delta u_i \vec{T}_{u_i} \quad \text{y} \quad \Delta v_j \vec{T}_{v_j}$$

Se tiene,

$$A(S_{ij}) \sim A(P_{ij}) = \left\| \Delta u_i \vec{T}_{u_i} \times \Delta v_j \vec{T}_{v_j} \right\| = \Delta u_i \Delta v_j \left\| \vec{T}_{u_i} \times \vec{T}_{v_j} \right\|$$

Luego, la suma

$$\sum_{i,j} \left\| \vec{T}_{u_i} \times \vec{T}_{v_j} \right\| \Delta u_i \Delta v_j$$

nos da una aproximación al valor de $A(S)$. Pero esta suma puede pensarse como la suma de Riemann de una función

$$g(u, v) = \left\| \vec{T}_{u_i} \times \vec{T}_{v_j} \right\|$$

definida en la región elemental D . Por consiguiente, cuando la norma de la partición tiende a cero, estas sumas convergen a

$$\iint_D \left\| \vec{T}_{u_i} \times \vec{T}_{v_j} \right\| du dv$$

Definición 1.13.1. El área de una superficie $\varphi(D) = S$, que se anota $A(S)$, se define como

$$A(S) = \iint_D \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| du dv$$

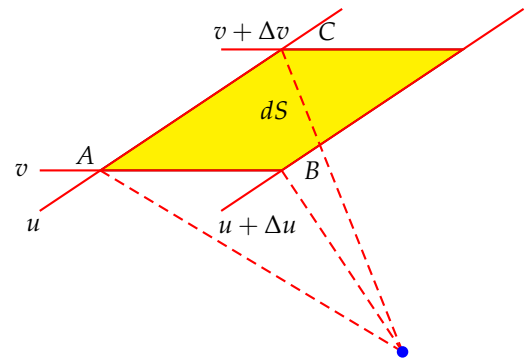
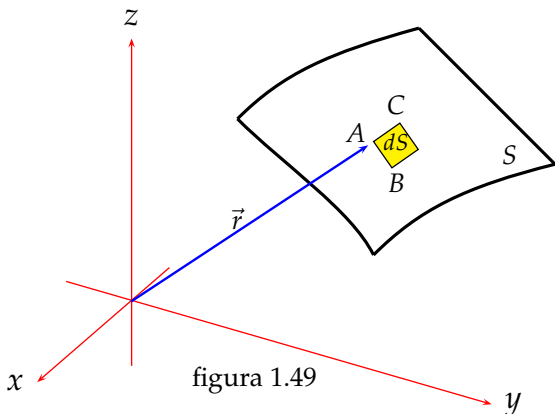
Superficie elemental infinitesimal

Obtenida la forma paramétrica de una superficie, podemos definir el vector posición que determina cualquier punto de la superficie. Este vector posición está dado por

$$\vec{r}(u, v) = x(u, v) \vec{i} + y(u, v) \vec{j} + z(u, v) \vec{k} = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

Mediante este vector posición podemos determinar el valor del área de una superficie elemental infinitesimal. En efecto, supongamos que tenemos un elemento de superficie dS , como lo indica la figura 1.49. Si ampliamos este elemento de superficie elemental, obtendremos lo que indica la figura 1.50. Tenemos que el área de la superficie infinitesimal (que es esencialmente coplanar) vale

$$dS = \left\| \vec{AB} \times \vec{AC} \right\|$$



1.13 Área de una superficie

Vamos a determinar los puntos A, B y C en función del vector posición $\vec{r}$. Es claro que el punto A está determinado por el vector posición $\vec{r}(u, v)$. El punto B está determinado por el vector posición $\vec{r}(u + du, v)$, y el punto C está determinado por el vector $\vec{r}(u, v + dv)$. Entonces tenemos que

$$\vec{AB} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} du, \quad \vec{AC} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} dv$$

De esta forma, reemplazando dS , nos queda que

$$dS = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| du dv$$

Así, obtenemos la expresión del área infinitesimal dS . Esto justifica escribir

$$A(S) = \iint_S dS$$

Ejemplo 1.13.2. Hallemos el área de la semiesfera $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ mediante dos parametrizaciones.

a) La superficie la parametrizamos desde el plano xy como

$$\varphi(x, y) = (x, y, \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}), \quad D = \{(x, y) / x^2 + y^2 \leq a^2\}$$

Se tiene

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = (1, 0, -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = (0, 1, -\frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}})$$

de donde

$$\vec{T}_x \times \vec{T}_y = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} = (\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, 1)$$

de lo cual, el vector fundamental tiene longitud

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\| = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

La integral que proporciona el área de la superficie es

$$A(S) = \iint_D \frac{a dx dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

En coordenadas polares el recinto D tiene la forma $D = \{(r, \theta) / 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq a\}$. Luego, la integral se transforma en

$$A(S) = \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{a r dr d\theta}{\sqrt{a^2 - r^2}} = 2\pi a^2$$

b) Veamos ahora el cálculo del área usando la representación

$$\varphi(u, v) = (a \cos u \cos v, a \sin u \cos v, a \sin v)$$

con el recinto D en el plano uv tal que, $D = [0, 2\pi] \times [0, \frac{\pi}{2}]$, entonces

$$\vec{T}_u \times \vec{T}_v = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| = a^2 |\cos v| = a^2 \cos v$$

De esta forma, la integral que proporciona el área de la superficie es

$$A(S) = a^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos v \, dv \, du = 2\pi a^2$$

1.13.1. Otras expresiones para el área

Las siguientes son expresiones para el área de una superficie en sus versiones explícita e implícita.

- Si S es dada en forma explícita por una ecuación de la forma $z = f(x, y)$, entonces usamos x e y como parámetros para tener

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \, dx \, dy$$

Esto es así ya que se tiene

$$\phi(x, y) = (x, y, f(x, y)) \implies \frac{\partial \phi}{\partial x} = (1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}), \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = (0, 1, \frac{\partial f}{\partial y})$$

de donde el producto fundamental es

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \times \frac{\partial \phi}{\partial y} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right)$$

cuya norma es la cantidad radical que aparece en el integrando que define el área. Observar que D es la proyección de S en el plano xy . Si se considera D en uno de los otros dos planos se deben hacer los cambios correspondientes en la integral que define el área.

- Si la superficie S viene dada implícitamente por $F(x, y, z) = 0$, y si S puede proyectarse en forma uno a uno sobre el plano xy , entonces la ecuación $F(x, y, z) = 0$ define z como función de x e y . Sea ésta $z = f(x, y)$, entonces de acuerdo con el teorema de la función implícita se tiene

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$$

Esto es válido en todo punto en el que $F_z \neq 0$. La expresión F_z indica derivada de F respecto de z , de manera análoga se interpretan las otras derivadas. Luego

$$A(S) = \iint_D \frac{1}{|F_z|} \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \, dx \, dy$$

1.13 Área de una superficie

Ejemplo 1.13.3. Hallemos el área de la superficie S , porción del cono $x^2 + y^2 = z^2$ que está sobre el plano $z = 0$ y bajo el plano $z = 1$.

La aplicación

$$\varphi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u), \quad 0 \leq u \leq 1, \quad 0 \leq v \leq 2\pi$$

parametriza el cono. Su vector fundamental es

$$\vec{T}_u \times \vec{T}_v = (-u \cos v, u \sin v, u)$$

cuya norma o longitud es

$$\|\vec{T}_u \times \vec{T}_v\| = u\sqrt{2}$$

En consecuencia

$$A(S) = \iint_D u \sqrt{2} du dv = \int_0^{2\pi} \int_0^1 u \sqrt{2} du dv = \pi\sqrt{2}$$

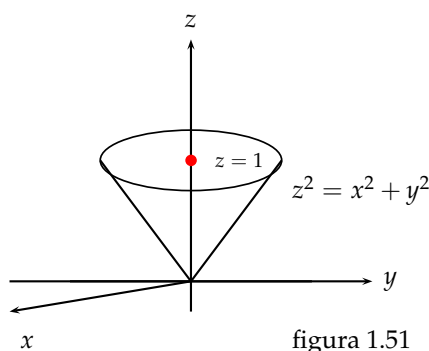


figura 1.51

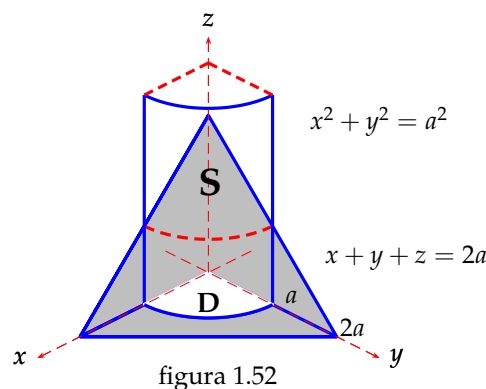


figura 1.52

Ejemplo 1.13.4. Hallemos el área del plano $x + y + z = 2a$ en el primer octante y que es interior al cilindro $x^2 + y^2 = a^2$.

Haremos el cálculo en tres maneras: explícita, implícita y paramétrica:

Representación explícita : $z = 2a - x - y$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -1 = \frac{\partial z}{\partial y} \implies \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{3}$$

El cilindro aporta los límites de integración en el plano xy , toda vez que allí vamos a considerar la proyección del plano. Dicho de otra forma, en el recinto que limita el cilindro en el primer octante se define la función $z = f(x, y)$ inyectiva que permite describir la porción del plano a la que estamos calculando el área (figura 1.52). De esta forma se tiene

$$A(S) = \int_0^a \int_0^{\pi/2} r\sqrt{3} d\theta dr = \frac{1}{4} a^2 \pi \sqrt{3}$$

Representación implícita : $x + y + z - 2a = 0$

Se escribe $F(x, y, z) = x + y + z - 2a = 0$, para tener, $F_x = 1$, $F_y = 1$, $F_z = 1$, de lo cual

$$\frac{1}{|F_z|} \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = \sqrt{3}$$

obteniéndose el mismo integrando que en la integral de la forma explícita sobre el mismo recinto.

Representación paramétrica : $\varphi(x, y) = (x, y, 2a - x - y)$

La parametrización la hacemos desde el plano xy , donde el cilindro aporta los límites de integración. Se tiene

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = (1, 0, -1), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = (0, 1, -1)$$

A partir de lo cual

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} = (1, 1, 1) \implies \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\| = \sqrt{3}$$

El integrando, como se esperaba, corresponde al mismo obtenido en las dos formas anteriores.

En la práctica es más conveniente el uso de la norma del producto fundamental, en razón de que permite identificar claramente la superficie a la cual se está tratando de calcular el área y desde luego permite ver cual es la superficie que aporta los límites de integración.

1.14. Integral de superficie de campo escalar

Nos proponemos ahora definir la integral de un campo escalar $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definido y acotado sobre una superficie S . Esto significa que queremos darle sentido a la expresión

$$\iint_S f(x, y, z) dS$$

y que extienda el concepto de área de la superficie S .

Definición 1.14.1. Sea $S = \varphi(D)$ una superficie parametrizada, f un campo escalar definido y acotado sobre S . La integral del campo f sobre la superficie S , que se representa por $\int_S f dS$, se define como

$$\int_S f dS = \iint_D f(\varphi(u, v)) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| du dv$$

Ejemplo 1.14.2. Hallemos $\int_S z^2 dS$, siendo S la superficie de la esfera unitaria $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, con densidad constante e igual a uno en cualquier punto.

1.15 Aplicaciones

Usemos la parametrización

$$\varphi(u, v) = (\cos u \operatorname{sen} v, \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \cos v), \quad D = \{(u, v) / 0 \leq v \leq \pi, 0 \leq u \leq 2\pi\}$$

La norma del vector fundamental es

$$\|\vec{n}\| = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| = |\operatorname{sen} v|$$

De esta forma

$$\int_S z^2 dS = \iint_D \cos^2 v |\operatorname{sen} v| dv du = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cos^2 v \operatorname{sen} v dv du = \frac{4\pi}{3}$$

1.15. Aplicaciones

Entre las aplicaciones de la integral de campo escalar mencionamos las siguientes:

1.15.1. Área de Superficie

Si el campo escalar $f = 1$, entonces para la expresión que define la integral de superficie tenemos

$$\int_S f dS = \iint_D \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| du dv = A(S)$$

lo que corresponde al área de S . Esta es la razón por la cual a dS se le denomina “elemento de área de superficie”.

1.15.2. Masa - centro de masa

Si el campo escalar f se interpreta como **densidad** (masa por unidad de área) de una lámina delgada adherida a la superficie S , entonces la **masa total** M de S viene dada por

$$M = \int_S f dS$$

Al conocer la masa de la superficie S se obtiene que su centro de masa es el punto $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ solución de la ecuación

$$M \cdot \bar{x}_i = \int_S x_i f dS, \quad i = 1, 2, 3$$

Ejemplo 1.15.1. Hallemos $\int_S x dS$ en donde S es la superficie $z = x^2 + y$, $x \in [0, 1]$, $y \in [0, 1]$.

La superficie S se parametriza $\varphi(x, y) = (x, y, x^2 + y)$, entonces para el vector fundamental y su longitud se tiene

$$\vec{n} = (1, 0, 2x) \times (0, 1, 1) = (-2x, -1, 1), \quad |\vec{n}| = \sqrt{2 + 4x^2}$$

Luego,

$$\int_S x \, dS = \int_0^1 \int_0^1 x \sqrt{2 + 4x^2} \, dx \, dy = \frac{\sqrt{2}}{6} (\sqrt{3} - 1)$$

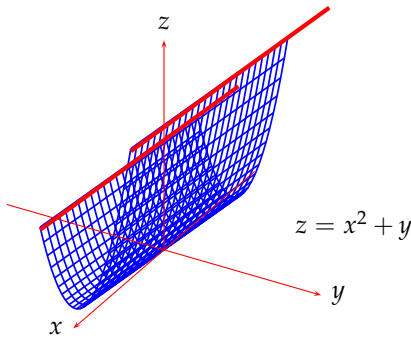


figura 1.53

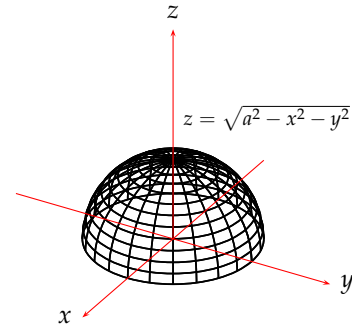


figura 1.54

Ejemplo 1.15.2. Hallemos el centro de gravedad de la superficie de la semiesfera de radio a .

Se pueden elegir las parametrizaciones:

1. $\varphi(x, y) = (x, y, \sqrt{a^2 - x^2 - y^2})$, $D = \{(x, y) / x^2 + y^2 \leq a^2\}$
2. $\varphi(u, v) = (a \cos u \cos v, a \sin u \cos v, a \sin v)$, $D = \{(u, v) / u \in [0, 2\pi], v \in [0, \frac{\pi}{2}]\}$

Para la segunda de estas parametrizaciones, la norma del vector fundamental es

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| = a^2 |\cos v|$$

de modo que la masa, que en este caso coincide con el área de la superficie, es

$$M = \int_S dS = \iint_D a^2 \cos v \, dv \, du = a^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos v \, dv \, du = 2\pi a^2$$

Por otra parte, las coordenadas $\bar{x}$, $\bar{y}$ son cero en virtud de que el eje z es eje de simetría y la densidad es uno. Para la coordenada z tenemos:

$$M\bar{z} = \int_S z \, dS = \iint_D a \sin v \, a^2 |\cos v| \, du \, dv = a^3 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sin v \cos v \, dv \, du = \pi a^3$$

De esta forma, $\bar{z} = \frac{\pi a^3}{2\pi a^2} = \frac{a}{2}$, concluyéndose que el centro de gravedad es el punto $(0, 0, \frac{a}{2})$

1.16. Integral de superficie de campo vectorial

Sea S una superficie y $\vec{n}$ el vector unitario perpendicular a ella en uno de sus puntos. El sentido de $\vec{n}$ indica la cara de S que consideramos positiva. Si la superficie es cerrada se toma como positivo el sentido hacia fuera. Un elemento infinitesimal de superficie, dS , se puede representar vectorialmente ya que, además de extensión, tiene una determinada orientación.

Así pues, definimos el vector $d\vec{S}$ de forma que su módulo sea igual al área del elemento de superficie y que tenga la dirección y sentido de $\vec{n}$:

$$\|d\vec{S}\| = dS, \quad d\vec{S} = \vec{n} dS$$

El flujo de un campo vectorial $\vec{F}$ a través del elemento de superficie es el producto escalar:

$$d\phi = \vec{F} \cdot d\vec{S} = \vec{F} \cdot \vec{n} dS$$

Para calcular el flujo a través de toda la superficie se suman los $d\phi$ correspondientes a todos los elementos en que se divide S :

$$\phi = \int_S d\phi = \int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$$

Esta integral de superficie mide el flujo (cantidad) de líneas del campo $\vec{F}$ que pasan a través de la superficie de integración. Además,

- Si $\vec{F} \parallel d\vec{S}$, hay flujo a través de S .
- Si $\vec{F} \perp d\vec{S}$, **no** hay flujo a través de S .

A partir de lo hemos visto respecto del flujo, tenemos lo siguiente:

Definición 1.16.1. Sea $\vec{F}$ un campo vectorial definido sobre la superficie $\varphi(D) = S$. La integral de superficie de $\vec{F}$ sobre S que se denota $\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$ corresponde a

$$\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_D \vec{F}(\varphi(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) du dv$$

Si se interpreta el campo vectorial $\vec{F}$ como el campo de velocidades de un fluido, y si

$$\vec{n} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\|}$$

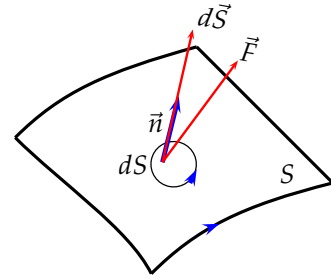


figura 1.55

representa un vector unitario normal a la superficie dada por el vector fundamental, entonces podemos escribir

$$\vec{F} \cdot \vec{n} = \text{comp}_{\vec{n}} \vec{F}$$

Esto significa que $\vec{F} \cdot \vec{n}$ es la componente del campo de velocidades de $\vec{F}$ en la dirección de la normal unitaria $\vec{n}$ a la superficie en el punto $\varphi(u, v)$. De esta forma, $\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$ mide la cantidad total de flujo a través de la superficie. Por tanto, podemos escribir

$$\text{Flujo} = \int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$$

Ejemplo 1.16.2. Hallemos el flujo del campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, 0)$ sobre la superficie de la semiesfera unitaria superior.

Mostramos el cálculo del flujo de dos maneras:

- $\varphi(u, v) = (\text{sen } u \cos v, \text{sen } u \text{sen } v, \cos u)$, $u \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $v \in [0, 2\pi]$
- $\varphi(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$, $x^2 + y^2 \leq 1$

Si usamos la primera de las parametrizaciones mencionadas se tiene que el vector normal es

$$\vec{n} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} = (\text{sen}^2 u \cos v, \text{sen}^2 u \text{sen } v, \text{sen } u \cos u)$$

Además, el valor de campo en la superficie lo entrega

$$\vec{F}(\varphi(u, v)) = (\text{sen } u \cos v, \text{sen } u \text{sen } v, 0)$$

entonces

$$\int_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \text{sen}^3 u du dv = \frac{4\pi}{3}$$

Al usar la segunda de estas parametrizaciones se tiene:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = (1, 0, -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = (0, 1, -\frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}})$$

con lo cual el vector fundamental es

$$\vec{n} = \left(\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, 1 \right)$$

El campo en la superficie $\vec{F}(\varphi(x, y)) = (x, y, 0)$. Luego,

$$\vec{F}(\varphi(x, y)) \cdot \vec{n} = \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

1.16 Integral de superficie de campo vectorial

De aquí que

$$\int_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = 4 \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \frac{r^3}{\sqrt{1-r^2}} d\theta dr = \frac{4\pi}{3}$$

[Nota!!] Si se observa con atención, aunque se tome el vector normal como unitario $\frac{\vec{n}}{||\vec{n}||}$, al hacer el producto punto entre el campo evaluado en la superficie, el vector normal y la diferencial de superficie dS , la norma $||\vec{n}||$ se cancela. Esto significa que nos podemos ahorrar el cálculo de la norma cuando se tenga integrando $\vec{F} \cdot d\vec{S}$.

Ejemplo 1.16.3. Sea S la superficie de la esfera unitaria $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ orientada con normal exterior. Sea $T(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ la temperatura sobre S . Vamos a encontrar el flujo de calor a través de la superficie.

En esta clase de problemas, cuando no aparece en forma explícita el campo vectorial, se debe considerar el campo gradiente de la temperatura. Tenemos:

$$\nabla T = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right)$$

ya que entonces, el campo vectorial asociado a la temperatura es

$$\vec{F} = -k \nabla T$$

en donde, por simplicidad consideramos la constante de proporcionalidad $k = 1$. De esta forma, el campo vectorial en nuestro ejemplo es

$$\vec{F}(x, y, z) = (-2x, -2y, -2z)$$

Consideramos la esfera compuesta de su parte superior y de la inferior. Siendo así, tenemos que calcular dos integrales de flujo: una para la parte superior y la otra para la parte inferior.

Semiesfera superior

La parametrización es

$$\varphi(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}), \quad x^2 + y^2 \leq 1$$

cuyo vector fundamental es

$$\vec{n} = \left(\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, 1 \right)$$

El producto punto del campo en la superficie con el normal unitario es

$$\vec{F}(\varphi(x, y)) \cdot \vec{n} = -\frac{2x^2}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} - \frac{2y^2}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} - 2\sqrt{1 - x^2 - y^2} = -\frac{2}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

De aquí que

$$\text{Flujo} = \int_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = -2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{r dr d\theta}{\sqrt{1-r^2}} = -4\pi$$

Semiesfera inferior

La parametrización es

$$\varphi(x, y) = (x, y, -\sqrt{1-x^2-y^2}), \quad x^2 + y^2 \leq 1$$

cuyo vector fundamental es

$$\vec{n} = \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, -1 \right)$$

El producto punto del campo en la superficie y el normal unitario es

$$\vec{F}(\varphi(x, y)) \cdot \vec{n} = -\frac{2x^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}} - \frac{2y^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}} - 2\sqrt{1-x^2-y^2} = -\frac{2}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

De aquí que

$$\text{Flujo} = \int_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = -2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{r dr d\theta}{\sqrt{1-r^2}} = -4\pi$$

De esta manera, el flujo total sobre la esfera es -8π . El signo menos indica que el calor se dirige hacia el centro de la esfera.

Queda como ejercicio, para los interesados, calcular el flujo anterior usando la parametrización de la esfera completa

$$\varphi(u, v) = (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v), \quad D = [0, 2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

1.17. Orientación de superficies

En integrales de línea de campo vectorial, una reparametrización de la curva sobre la que se efectúa la integración, sólo puede alterar el signo de la integración, dependiendo esto de que la reparametrización preserve o invierta la orientación. Algo similar ocurre en las integrales de superficie de campos vectoriales. Esto es, la integral de superficie de un campo vectorial es independiente de la parametrización, excepto quizás por el signo.

Definición 1.17.1. Una **superficie orientada** es una superficie con dos lados, uno de ellos es llamado **lado exterior o positivo**, y el otro, **lado interior o negativo**.

1.17 Orientación de superficies

Geoméricamente, una superficie orientada posee en cada punto dos vectores normales unitarios $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$ tales que $\vec{n}_1 = -\vec{n}_2$. La figura 1.56 muestra una superficie orientable y la 1.57 una no orientable.

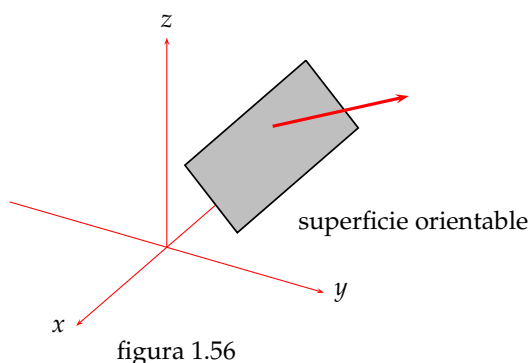
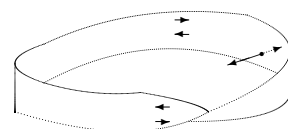


figura 1.56



Superficie **no** orientable
Banda de Möbius

figura 1.57

Teorema 1.17.2. Sean φ_1 y φ_2 parametrizaciones suaves de una superficie orientada S , y sea $\vec{F}$ un campo vectorial definido y continuo sobre S , entonces:

1. $\int_{\varphi_1} \vec{F} = \int_{\varphi_2} \vec{F}$, si φ_1 y φ_2 preservan orientación.
2. $\int_{\varphi_1} \vec{F} = - \int_{\varphi_2} \vec{F}$, si φ_1 preserva y φ_2 invierte la orientación, o viceversa.

Ejemplo 1.17.3. Hallar el flujo del campo $\vec{F} = (y, 2x, -z)$ sobre la superficie del plano $2x + y = 6$ que queda en el primer octante y acotada por el plano $z = 4$.

La figura 1.58 muestra la porción de plano. Esta superficie se parametriza desde el plano xz

$$\varphi(x, z) = (x, 6 - 2x, z), \quad D = \{(x, z) / 0 \leq x \leq 3, 0 \leq z \leq 4\}$$

Cabe señalar que la parametrización también puede hacerse desde el plano yz , pero no del plano xy (no tenemos función). De la parametrización se obtiene

$$\varphi_x = (1, -2, 0), \quad \varphi_z = (0, 0, 1) \implies \vec{n} = (-2, -1, 0)$$

Por otra parte, el campo tomado en la superficie parametrizada es

$$\vec{F}(\varphi(x, z)) = (6 - 2x, 2x, -z)$$

de manera que

$$\int_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \int_0^3 \int_0^4 (2x - 12) dz dx = -108$$

El signo en el resultado se debe a que el vector normal al plano $\vec{n} = (-2, -1, 0)$, apunta hacia el eje z . Por tanto en esa cara es válido el signo. En la cara del frente, el vector normal exterior es $\vec{n} = (2, 1, 0)$. De modo que en esta cara el flujo es

$$\int_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = 108$$

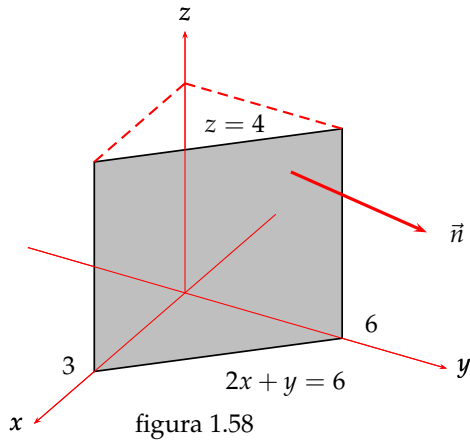


figura 1.58

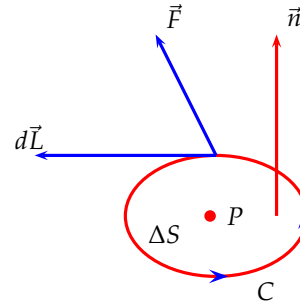


figura 1.59

1.17.1. El Rotacional y el teorema de Stokes

Una forma de generar el campo de velocidades en un estanque con agua puede ser el giro de un mecanismo con paletas que al rotar provoquen una rotación de la masa de agua. Este tipo de generador de campo recibe el nombre de fuente de tipo **rotacional** o de **vórtice**. La circulación del campo es la que mide la rotación de las líneas de campo.

El significado físico del rotacional es sencillo, y está indicado por su nombre. Si imaginamos que $\vec{F}(x, y, z)$ es la velocidad de un fluido, entonces al situar una hélice (figura 1.60) con su eje en la dirección indicada por rotacional, $\nabla \times \vec{F}$, la hélice rotará a la mayor velocidad posible en ese punto del campo vectorial (con una velocidad proporcional al módulo del rotacional).

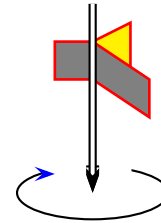


figura 1.60

Hemos visto que la integral de línea $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{L}$ es siempre cero cuando el campo vectorial $\vec{F}$ es el gradiente de un campo escalar, $\vec{F} = \nabla f$, y la trayectoria es cerrada. Cuando la circulación de un campo vectorial es diferente de cero, el campo vectorial no es conservativo y los campos no-conservativos siempre poseen circulación alrededor de trayectorias cerradas. Consideremos una trayectoria cerrada muy pequeña y tomemos el cociente entre la circulación de un campo vectorial $\vec{F}$ alrededor de dicha trayectoria y el área encerrada por dicha trayectoria, como se ilustra en la figura 1.59, entonces siempre es posible tener un vector definido como sigue:

$$\nabla \times \vec{F} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \left(\frac{\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{L}}{\Delta S} \right) \vec{n} \quad (1.6)$$

donde $\vec{n}$ es un vector unitario perpendicular al área ΔS encerrada por el contorno C el cual se ha orientado de manera que la circulación sea máxima. Este límite se define como **rotacional** del campo

1.17 Orientación de superficies

$\vec{F}$ y se escribe como $\text{rot}(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F}$. La ecuación 1.6 la podemos escribirse también

$$(\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \left(\frac{\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{L}}{\Delta S} \right) \quad (1.7)$$

Nota!!

- Cuando $\Delta S \rightarrow 0$ la curva C define un punto, razón por la cual el rotacional de un campo es un campo vectorial, **puntual**, que mide la intensidad de la circulación de las líneas de campo alrededor de la fuente de vórtice.
- La ecuación 1.7 nos indica que se trata de la proyección de $\text{rot}(\vec{F})$ en el punto en la dirección del vector unitario $\vec{n}$.
- Si la superficie ΔS no es cerrada, el sentido de $\vec{n}$ no está bien definido.
- Si $\text{rot}(\vec{F}) = 0$ en un punto significa que el fluido no tiene rotaciones en ese punto, es decir no tiene remolinos. Una rueda con aspas rígidas en el fluido se moverá con el fluido pero no girará alrededor de su eje.
- Si $\text{rot}(\vec{F}) = 0$ **para todo** punto del dominio, el campo se llama **irrotacional**.

La herramienta matemática para el cálculo del rotacional es

Definición 1.17.4. Sea $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ campo vectorial del espacio tridimensional, entonces

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

Ejemplo 1.17.5. Calculemos el rotacional del campo $\vec{F}(x, y, z) = (x^2y^2, 2xyz, z^2)$ en el punto $(1, -2, 1)$.

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2y^2 & 2xyz & z^2 \end{vmatrix} = (-2xy, 0, 2yz - 2x^2y) \implies \nabla \times \vec{F}(1, -2, 1) = (4, 0, 0)$$

Teorema 1.17.6. (Stokes)

Sea S superficie orientada definida por una función de clase ζ^2 , $z = f(x, y)$ con $(x, y) \in D$. Sea $\vec{F}$ un campo vectorial de clase ζ^1 definido sobre S . Si ∂S es la frontera orientada de S , se tiene

$$\int_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{L}$$

En primer lugar, debemos decir que para una superficie en $\mathbb{R}^3$ se considera la dirección positiva como aquella en la cual un observador recorriendo la frontera de la superficie, encuentra siempre esta superficie a su izquierda. El teorema de Stokes (George Stokes, matemático inglés, 1819-1903) relaciona la integral de línea de un campo vectorial a lo largo de una curva cerrada simple C recorrida en dirección positiva en $\mathbb{R}^3$ con una integral sobre una superficie cuya frontera es C .

Se observa que el teorema de Stokes establece tácitamente que “la integral de superficie de la componente **normal** del rotacional de un campo vectorial $\vec{F}$ sobre la superficie S , es igual a la integral de línea de la componente **tangencial** de $\vec{F}$ a lo largo de la frontera de S ”.

Demostración.

Escribiendo el campo vectorial en la forma $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$, entonces

$$\nabla \times \vec{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

El vector normal se obtiene de $\varphi(x, y) = (x, y, f(x, y))$.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & \frac{\partial z}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix} = \left(-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1 \right) = \vec{n}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} &= \int_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} dS \\ &= \int_D \left\{ \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \left(-\frac{\partial z}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \left(-\frac{\partial z}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \right\} dA \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{L} = \int_{\alpha} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$$

en donde $\alpha : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, tal que $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ es la parametrización de la frontera de S orientada. De esta forma se tiene

$$\int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{L} = \int_a^b \left(F_1 \frac{dx}{dt} + F_2 \frac{dy}{dt} + F_3 \frac{dz}{dt} \right) dt$$

1.17 Orientación de superficies

De la regla de la cadena, $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$, entonces

$$\begin{aligned}\int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{L} &= \int_a^b \left[\left(F_1 + F_3 \frac{\partial z}{\partial x} \right) \frac{dx}{dt} + \left(F_2 + F_3 \frac{\partial z}{\partial y} \right) \frac{dy}{dt} \right] dt \\ &= \int_\alpha \left(F_1 + F_3 \frac{\partial z}{\partial x} \right) dx + \left(F_2 + F_3 \frac{\partial z}{\partial y} \right) dy\end{aligned}$$

Al aplicar a esta última expresión el teorema de Green tenemos

$$\int_D \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(F_2 + F_3 \frac{\partial z}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(F_1 + F_3 \frac{\partial z}{\partial x} \right) \right) dA$$

Derivando, el integrando, con ayuda de la regla de la cadena resulta

$$\begin{aligned}& \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial F_3}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + F_3 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right) \\ & - \left(\frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} + F_3 \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \right)\end{aligned}$$

Luego de cancelar los dos términos finales en cada paréntesis la integral se reduce a

$$\int_D \left[\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \left(-\frac{\partial z}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \left(-\frac{\partial z}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \right] dA$$

Como esta expresión es igual a la encontrada para $\int_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}$, entonces

$$\int_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{L}$$

Ejemplo 1.17.7. Verificar el Teorema de Stokes para $\vec{F}(x, y, z) = (x, x^2y, xy^2)$ sobre el cuadrado $[0, 2] \times [0, 2]$ del plano xy .

Cálculo de la integral de línea

La trayectoria consta de 4 curvas regulares que parametrizar:

$$\blacksquare \alpha_1(t) = (t, 0, 0), \quad 0 \leq t \leq 2$$

El vector tangente es $\alpha_1' = (1, 0, 0)$, $\vec{F}(\alpha_1) = (t, 0, 0)$. Así,

$$\vec{F}(\alpha_1) \cdot \alpha_1' = t$$

En consecuencia,

$$\int_{\alpha_1} \vec{F}(\alpha_1) \cdot \alpha_1' dt = \int_0^2 t dt = 2$$

■ $\alpha_2(t) = (2, t, 0), 0 \leq t \leq 2$

El vector tangente es $\alpha'_2 = (0, 1, 0)$, $\vec{F}(\alpha_2) = (2, 4t, 2t^2)$. Así,

$$\vec{F}(\alpha_2) \cdot \alpha'_2 = 4t$$

En consecuencia,

$$\int_{\alpha_2} \vec{F}(\alpha_2) \cdot \alpha'_2 dt = \int_0^2 4t dt = 8$$

■ $\alpha_3(t) = (t, 2, 0), 0 \leq t \leq 2$

El vector tangente es $\alpha'_3 = (1, 0, 0)$, $\vec{F}(\alpha_3) = (t, 2t^2, 4t)$. Así,

$$\vec{F}(\alpha_3) \cdot \alpha'_3 = t$$

En consecuencia,

$$\int_{\alpha_3} \vec{F}(\alpha_3) \cdot \alpha'_3 = - \int_0^2 t dt = -2$$

Observar que la parametrización que hicimos fue en sentido opuesto, por eso le cambiamos el signo a la integral.

■ $\alpha_4(t) = (0, t, 0), 0 \leq t \leq 2$

El vector tangente es $\alpha'_4 = (0, 1, 0)$, $\vec{F}(\alpha_4) = (0, 0, 0)$. Así,

$$\vec{F}(\alpha_4) \cdot \alpha'_4 = 0$$

En consecuencia,

$$\int_{\alpha_4} \vec{F}(\alpha_4) \cdot \alpha'_4 = - \int_0^2 0 dt = 0$$

El cambio de signo se debe a que la parametrización la hicimos en sentido opuesto.

Se concluye que

$$\int_{\alpha} \vec{F} \cdot d\vec{L} = \int_{\alpha_1} + \int_{\alpha_2} + \int_{\alpha_3} + \int_{\alpha_4} = 2 + 8 - 2 + 0 = 8$$

La figura 1.61 muestra el cuadrado.

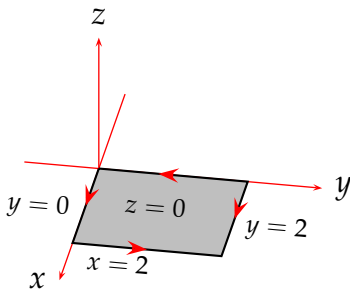


figura 1.61

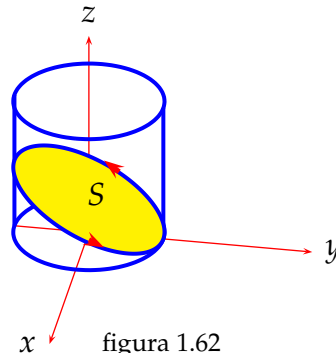


figura 1.62

Cálculo de la integral de superficie

La superficie en cuestión es la del cuadrado $[0, 2] \times [0, 2]$. Su parametrización, desde el plano xy , es

$$\varphi(x, y) = (x, y, 0), \quad 0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 2$$

El vector fundamental es, claramente, $\vec{n} = (0, 0, 1)$. El rotacional es

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & x^2y & xy^2 \end{vmatrix} = (2xy, -y^2, 2xy)$$

Ahora debemos poner el rotacional a trabajar sobre la parametrización

$$(\nabla \times \vec{F})(\varphi(x, y)) = (2xy, -y^2, 2xy)$$

Además,

$$(\nabla \times \vec{F})(\varphi(x, y)) \cdot \vec{n} = (2xy, -y^2, 2xy) \cdot (0, 0, 1) = 2xy$$

En consecuencia,

$$\int_S \nabla \times \vec{F} \cdot dS = \int_0^2 \int_0^2 2xy \, dx \, dy = 8$$

Por tanto, hemos verificado que el teorema de Stokes se cumple.

Ejemplo 1.17.8. Verifiquemos el teorema de Stokes para el campo vectorial $\vec{F} = (-y^3, x^3, -z^3)$, siendo C la curva de intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ con el plano $x + y + z = 1$.

Como siempre, verificar un teorema que involucra una igualdad, significa calcular cada lado de ella en forma separada y al final comprobar que los resultados son los mismos. Otro aspecto a considerar se deduce de la lectura del problema, que en este caso, indica que la superficie a considerar es la del plano que se encuentra dentro del cilindro. Esto corresponde a un disco cuya frontera es la curva sobre la que se hace la integral de línea (figura 1.62).

La parametrización desde el plano xy es

$$\varphi(x, y) = (x, y, 1 - x - y), \quad D = \{(x, y) / x^2 + y^2 \leq 1\}$$

El vector fundamental está dado por

$$\vec{n} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} = (1, 1, 1)$$

Además, del campo $\vec{F} = (-y^3, x^3, -z^3)$ se obtiene que el rotor es

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y^3 & x^3 & -z^3 \end{vmatrix} = (0, 0, 3x^2 + 3y^2)$$

Por lo tanto, el campo en la parametrización es

$$\nabla \times \vec{F}(\varphi(x, y)) = \nabla \times \vec{F}(x, y, 1 - x - y) = (0, 0, 3x^2 + 3y^2)$$

de aquí que

$$\begin{aligned} \int_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} &= \int \int_D (0, 0, 3(x^2 + y^2)) \cdot (1, 1, 1) dA = 3 \int \int_D (x^2 + y^2) dA \\ &= 3 \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^3 d\theta dr = \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

Para el cálculo de la integral de línea parametrizamos la curva de intersección como sigue

$$\alpha(t) = (\cos t, \sin t, 1 - \cos t - \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Luego, $\alpha'(t) = (-\sin t, \cos t, \sin t - \cos t)$. Luego, el $\vec{F} \cdot d\vec{L}$ toma la forma

$$[\sin^4 t + \cos^4 t - (1 - \cos t - \sin t)^3(\sin t - \cos t)] dt$$

Se observa que al descomponer en suma de integrales, la del segundo sumando es inmediata, en consecuencia,

$$\begin{aligned} \int_{\alpha} \vec{F} \cdot d\vec{L} &= \int_0^{2\pi} (\sin^4 t + \cos^4 t) dt - \frac{1}{4} (1 - \sin t - \cos t)^4 \Big|_0^{2\pi} \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t (1 - \cos^2 t) + \cos^2 t (1 - \sin^2 t)) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (1 - 2\sin^2 t \cos^2 t) dt \\ &= 2\pi - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin^2 2t dt \\ &= 2\pi - \frac{1}{4} \left(t - \frac{\sin 4t}{4} \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

Ejemplo 1.17.9. Verifiquemos el teorema de Stokes sobre la superficie, en el primer octante, formada por la semiesfera $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ y los planos $x = 0$ e $y = 0$. El campo es $\vec{F}(x, y, z) = (-y, x, -z)$.

1.17 Orientación de superficies

En la figura 1.63 muestra la superficie que es abierta en su parte inferior y que constituye la frontera de la superficie.

La integral de línea

Tenemos una curva regular por partes, conformada de tres subtrayectorias. En cada una de las cuales se tiene:

- $\alpha_1(t) = (t, 0, 0)$, $0 \leq t \leq 1 \implies \alpha'_1(t) = (1, 0, 0)$. Luego,

$$\vec{F}(\alpha_1(t)) = (0, t, 0) \implies \vec{F}(\alpha_1(t)) \cdot \alpha'_1(t) = 0$$

de donde,

$$\int_{\alpha_1} \vec{F} \cdot d\vec{L} = 0$$

- $\alpha_2(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \implies \alpha'_2(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$. Luego,

$$\vec{F}(\alpha_2(t)) = (-\sin t, \cos t, 0) \implies \vec{F}(\alpha_2(t)) \cdot \alpha'_2(t) = \sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

Luego,

$$\int_{\alpha_2} \vec{F} \cdot d\vec{L} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}$$

- $\alpha_3(t) = (0, 1 - t, 0)$, $0 \leq t \leq 1 \implies \alpha'_3(t) = (0, -1, 0)$. Luego,

$$\vec{F}(\alpha_3(t)) = (t - 1, 0, 0) \implies \vec{F}(\alpha_3(t)) \cdot \alpha'_3(t) = 0$$

Así,

$$\int_{\alpha_3} \vec{F} \cdot d\vec{L} = 0$$

En consecuencia,

$$\int_{\alpha} \vec{F} \cdot d\vec{L} = \frac{\pi}{2}$$

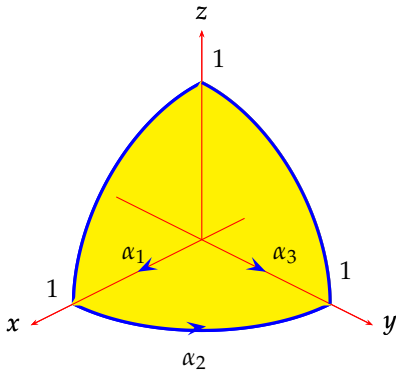


figura 1.63

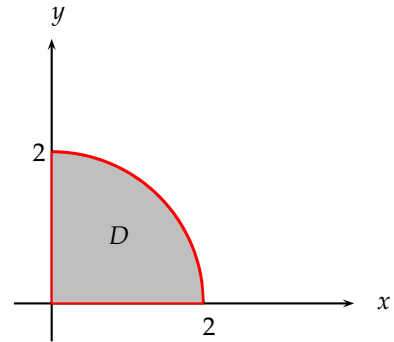


figura 1.64

La integral del rotor

Hay que señalar que podemos elegir la superficie sobre la que trabaja el rotor, considerando, como única condición, que ella tenga como frontera la curva sobre la que se hace la integral de línea. En este caso, es posible elegir el plano $z = 0$ que tapa inferiormente a la superficie en el primer octante, o bien la porción de esfera del primer octante que tiene también a la curva como frontera. Haremos ambos cálculos para dejar tranquilos a los más incrédulos.

Primera superficie

- Para el plano $z = 0$, con dominio D el semi-círculo de centro el origen y radio 1 en el primer octante, su parametrización es

$$\varphi(x, y) = (x, y, 0), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}$$

El vector normal que apunta hacia el exterior es $\vec{n} = (0, 0, 1)$. Además, el rotacional del campo es

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & -z \end{vmatrix} = (0, 0, 2)$$

El rotor trabajando sobre la superficie tiene el valor

$$(\nabla \times \vec{F})(\varphi(x, y)) = (\nabla \times \vec{F})(x, y, 0) = (0, 0, 2)$$

En consecuencia,

$$\int_S \nabla \times \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (0, 0, 2) \cdot (0, 0, 1) r d\theta dr = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2r d\theta dr = \frac{\pi}{2}$$

Segunda superficie

- Para la porción de esfera, en el primer octante, una parametrización es

$$\varphi(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}), \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}$$

El vector normal que apunta hacia el exterior, es como sabemos

$$\vec{n} = \left(\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, 1 \right)$$

Como el rotacional del campo en la superficie es $(\nabla \times \vec{F})(\varphi(x, y)) = (0, 0, 2)$, entonces

$$\int_S \nabla \times \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \int_D (0, 0, 2) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, 1 \right) dA = \int_S 2 dA$$

1.17 Orientación de superficies

En coordenadas polares

$$\int_S \nabla \times \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2r d\theta dr = \frac{\pi}{2}$$

Ejemplo 1.17.10. Calculemos la integral doble $\int_D (x^2 + y^2) dx dy$, directamente y mediante la aplicación del teorema de Stokes. El dominio D corresponde a la parte del disco, en el primer cuadrante, de radio 2 y centro en el origen.

El cálculo directo es muy sencillo. La figura 1.64 muestra el recinto D de integración. En coordenadas polares:

$$\int_D (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 d\theta dr = 2\pi$$

Para calcular mediante el teorema de Stokes, recordemos que éste afirma que

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{L} = \int_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} dS = \int_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}$$

Tendremos que encontrar un campo vectorial $\vec{F} = (F_1, F_2)$ tal que $\nabla \times \vec{F} = x^2 + y^2$. Es decir,

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & 0 \end{vmatrix} = \left(0, 0, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) = (0, 0, x^2 + y^2)$$

De la igualdad

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = x^2 + y^2$$

se deduce que tenemos infinitas soluciones, una de las cuales es

$$F_1(x, y) = -\frac{y^3}{3}, \quad F_2(x, y) = \frac{x^3}{3}$$

Por el teorema de Stokes, la integral de circulación de $\vec{F}$ es a lo largo del borde de la superficie compuesta de:

- El segmento $\alpha_1(t) = (t, 0)$, $0 \leq t \leq 2$
- El arco de circunferencia $\alpha_2(t) = (2 \cos t, 2 \sin t)$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$
- El segmento $\alpha_3(t) = (2 - t, 0)$, $0 \leq t \leq 2$

Los vectores velocidad y el valor del campo $\vec{F}(x, y) = (-\frac{y^3}{3}, \frac{x^3}{3})$ en cada curva son:

- $\alpha_1'(t) = (1, 0), \vec{F}(\alpha_1(t)) = (0, \frac{t^3}{3})$
- $\alpha_2'(t) = (-2 \operatorname{sen} t, 2 \cos t), \vec{F}(\alpha_2(t)) = (-\frac{8 \operatorname{sen}^3 t}{3}, \frac{8 \cos^3 t}{3})$
- $\alpha_3'(t) = (-1, 0), \vec{F}(\alpha_3(t)) = (0, \frac{2-t}{3})$

Luego, las integrales a calcular son:

- $\int_{\alpha_1} \vec{F} \cdot d\vec{L} = \int_0^2 0 dt = 0$
- $\int_{\alpha_2} \vec{F} \cdot d\vec{L} = \int_0^2 0 dt = 0$
- $\int_{\alpha_3} \vec{F} \cdot d\vec{L} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{16}{3} (\operatorname{sen}^4 t + \cos^4 t) dt$

El cálculo de esta última integral es como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{16}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen}^4 t + \cos^4 t) dt &= \frac{16}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2 \operatorname{sen}^2 t \cos^2 t) dt = \frac{16}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 2t) dt \\ &= \frac{16}{3} \left(t - \frac{1}{4} (t - \frac{\operatorname{sen} 4t}{4}) \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{16}{3} \cdot \frac{3\pi}{8} = 2\pi \end{aligned}$$

En consecuencia, hemos resuelto satisfactoriamente este “capsioso” ejemplo.

1.17.2. La divergencia y el teorema de Gauss

Dado un campo vectorial $\vec{F}$ resulta necesario averiguar la existencia y naturaleza de sus fuentes en determinadas regiones del espacio. Al respecto, el teorema de **Helmholtz** nos garantiza que para especificar de modo unívoco un campo vectorial basta con conocer su divergencia y su rotacional en todos los puntos de una región finita. Dado que el campo vectorial puede encontrarse a partir de ellas, la divergencia y el rotacional reciben el nombre de **fuentes** del campo. El punto en el que se calcula el valor del campo vectorial recibe el nombre de punto campo.

Respecto de la divergencia, supongamos un estanque lleno de agua en reposo y provoquemos el movimiento del agua para crear así nuestro campo de velocidades (figura 1.65). Abriendo un agujero en la base del estanque el agua saldrá por dicho agujero creándose el campo de velocidades.

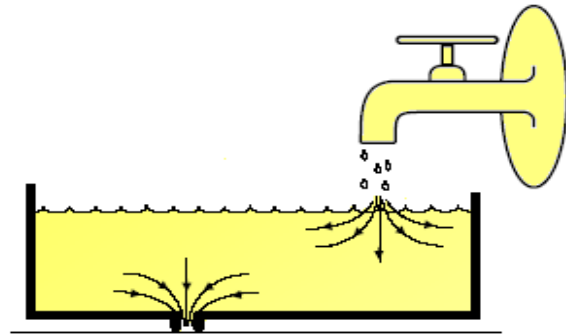


figura 1.65

Las líneas de campo evidentemente convergen hacia el agujero que constituye un sumidero para dichas líneas. El efecto opuesto se produce si a través del agujero introducimos agua en el estanque: ahora las líneas de campo divergen de la fuente que hemos creado. Este tipo de agentes productores de campo reciben por razones obvias el nombre de fuentes de tipo **divergencia**. Para averiguar si en una región existen fuentes o sumideros del campo habrá que rodear dicha región por una superficie y medir si a través de dicha superficie entra más agua de la que sale o viceversa. En el primer caso habrá un sumidero mientras que en el segundo habrá una fuente. La medida del agua que entra o sale a través de la superficie se realiza por medio del caudal o flujo de agua sobre la superficie. Al respecto, ya sabemos que el flujo de un campo vectorial a través de una superficie se define como

$$\text{Flujo} = \int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$$

siendo $d\vec{S}$ un vector de módulo dS y dirección normal a la superficie. Si la superficie es cerrada, el flujo se puede representar como

$$\text{Flujo} = \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \oint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$$

El flujo de un campo vectorial a través de una superficie cerrada mide si las líneas de campo tienen su origen o su fin en el volumen encerrado.

Para investigar si en un punto tenemos o no una fuente rodeamos dicho punto por una superficie S , calculamos el flujo sobre S y calculamos el límite de dicho flujo cuando hacemos la superficie cada vez más pequeña tendiendo al punto. Es decir calculamos

$$\lim_{S \rightarrow 0} \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

Desafortunadamente este límite siempre es nulo si $\vec{F}$ se mantiene finito. Para poder seguir obteniendo información acerca de la existencia o no de fuentes calculamos una nueva magnitud, relacionada con el flujo y que llamamos **divergencia** del campo, y que es la siguiente:

$$\text{div}(\vec{F}) = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

siendo V el volumen encerrado por la superficie S . Como V es esencialmente positivo el signo de la divergencia será el mismo que el del flujo y obtendremos información de la existencia de fuentes o sumideros en el punto en cuestión.

La herramienta matemática de cálculo de la divergencia en coordenadas cartesianas es la siguiente:

Definición 1.17.11. Sean A un abierto de $\mathbb{R}^n$, $\vec{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo diferenciable y $p \in A$. Se llama **divergencia** de $\vec{F}$ en p a la expresión

$$\nabla \cdot \vec{F} = \text{div} \vec{F}(p) = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}$$

donde ∇ es el operador diferencial vectorial “nabla”, definido en $\mathbb{R}^3$, como

$$\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

Nota!!

- Si la divergencia de un campo vectorial es 0, entonces el campo se llama **incompresible** o **solenoidal**.
- Un campo solenoidal no tiene fuentes ni sumideros.
- Un campo de velocidad de fluido se puede generar en una taza de café al ser removido por una cuchara.
- En una taza de café no hay ni fuentes (es decir, no entra nuevo café por ningún sitio) ni sumideros (no tiene agujeros).
- Una divergencia negativa indica que hay sumideros, mientras que una positiva indica la presencia de fuentes.

Ejemplo 1.17.12. Para el campo $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ tenemos que $\nabla \cdot \vec{F} = \text{div } \vec{F} = 3$

El teorema de Gauss² relaciona integrales de superficie con integrales de volumen, y afirma que el flujo de un campo vectorial fuera de una superficie cerrada es igual a la integral de la divergencia de ese campo vectorial sobre el volumen acotado por la superficie.

Teorema 1.17.13. (Gauss)

Sean V región del espacio cerrada y orientada con frontera S , $\vec{F}$ campo vectorial de clase ζ^1 definido sobre S , entonces

$$\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \int_V (\nabla \cdot \vec{F}) dV$$

Este teorema nos permite calcular el flujo de un campo a través de una superficie, sin conocer una parametrización de la superficie, ya que, según el enunciado, calculando la integral triple, el resultado será siempre el flujo que atraviesa la superficie hacia el exterior.

Nota!!

- El flujo a través de una superficie puede interpretarse como una medida del número de líneas de campo que atraviesan dicha superficie.
- En el caso de una superficie cerrada, las líneas de campo que salen a través de superficie dan una contribución positiva al flujo, mientras que las líneas que entran dan una contribución negativa. Por tanto, el flujo a través de una superficie cerrada es una medida del número neto de líneas que pasan a través de dicha superficie, es decir, del número de líneas que salen menos el número de líneas entran.

²Karl Friedrich Gauss (1777 - 1855)

1.17 Orientación de superficies

Ejemplo 1.17.14. Consideremos la superficie **cerrada** que acotan el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y los planos $z = 1$, $z = 0$. Sea $\vec{F}(x, y, z) = (xy^2, x^2y, y)$ campo vectorial definido sobre esta superficie. Vamos a encontrar el flujo total a través de S .

La superficie consta de tres caras

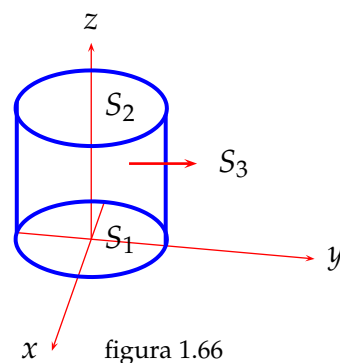
- $S_1 = \{(x, y, z) / x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\}$
- $S_2 = \{(x, y, z) / x^2 + y^2 \leq 1, z = 1\}$
- $S_3 = \{(x, y, z) / x^2 + y^2 = 1, 0 < z < 1\}$

El cálculo directo de la integral de superficie involucraría tres integrales de superficie, una sobre cada cara. El teorema de Gauss simplifica el problema.

Dado que $\nabla \cdot \vec{F} = x^2 + y^2$, entonces

$$\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int \int \int_{V(S)} (x^2 + y^2) dV = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 dr d\theta dz = \frac{\pi}{2}$$

Hemos usado coordenadas cilíndricas para simplificar los cálculos.



1.17.3. Ley de Gauss

La ley de Gauss desempeña un papel importante dentro de la electrostática y el electromagnetismo por dos razones básicas:

1. En primer lugar, porque permite calcular de forma simple el campo eléctrico debido a una distribución de cargas cuando ésta presenta buenas propiedades de simetría. En estos casos, suele resultar mucho más simple usar la ley de Gauss que obtener el campo eléctrico $\vec{E}$ por integración directa sobre la distribución de cargas.
2. En segundo lugar, porque la ley de Gauss constituye una ley básica, no sólo de la electrostática, sino del electromagnetismo en general. De hecho, constituye una de las ecuaciones de Maxwell (que son las ecuaciones que permiten describir todos los fenómenos electromagnéticos).

La ley de Gauss es esencialmente una ecuación matemática que relaciona el campo eléctrico sobre una superficie cerrada con la carga eléctrica encerrada en su interior.

La ley de Gauss puede interpretarse cualitativamente de forma simple usando el concepto de líneas de campo. En efecto, el número de líneas de campo que parten de una carga q es proporcional a dicha carga. De este modo, si una superficie cerrada imaginaria encierra una carga en su interior, el número total de líneas que pasan a través de ella debe ser proporcional a la carga neta en su interior, independiente de la forma de la superficie que encierra a la carga, de la posición de las cargas dentro de ella, o del número y posición de las cargas fuera de S , siempre y cuando mantengamos la misma carga neta dentro de S .

Teorema 1.17.15. (Ley de Gauss)

Sea $\vec{F}(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3}$ campo vectorial definido sobre una región cerrada R de $\mathbb{R}^3$ con frontera S , tal que $(0,0,0) \notin S$. En estas condiciones se tiene que

$$\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_S \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{\|\vec{r}\|^3} dS = \begin{cases} 4\pi, & \text{si } (0,0,0) \in R \\ 0, & \text{si } (0,0,0) \notin R \end{cases}$$

Demostración.

1. Si $(0,0,0) \notin R$, entonces $\vec{F} = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3}$ es un campo vectorial de clase ζ^1 en R y en S . Luego, el teorema de la divergencia se aplica para tener

$$\int_S \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{\|\vec{r}\|^3} dS = \int \int \int_R \operatorname{div}\left(\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3}\right) dV$$

Dado que la divergencia del campo es cero, es decir, $\operatorname{div}\left(\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3}\right) = 0$, para $r \neq 0$, entonces

$$\int_{\partial R} \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{\|\vec{r}\|^3} dS = 0$$

2. Si ahora consideramos que $(0,0,0) \in R$, entonces construimos una esfera B de centro en $(0,0,0)$ y radio ϵ de modo que quede completamente contenida dentro de R . Sea R_1 la región entre R y B , entonces la frontera de R_1 es

$$F_r R_1 = F_r B \cup F_r R$$

Como $\operatorname{div}\left(\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3}\right) = 0$ en R_1 , el teorema de la divergencia se aplica con $\vec{n}$ normal exterior para tener

$$\int_{F_r R_1} \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{\|\vec{r}\|^3} dS = \int_S \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{\|\vec{r}\|^3} dS + \int_{F_r B} \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{\|\vec{r}\|^3} dS = 0$$

De aquí que

$$\int_S \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{\|\vec{r}\|^3} dS = - \int_{F_r B} \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{\|\vec{r}\|^3} dS$$

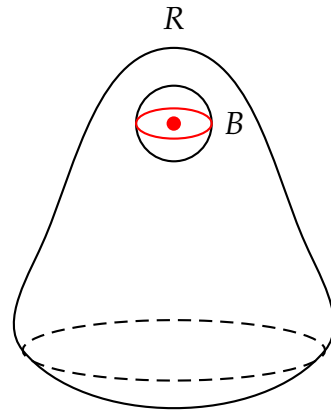


figura 1.67

1.17 Orientación de superficies

Ahora bien, el vector normal exterior de S tiene orientación opuesta a la del vector normal exterior en $F_r B$ (este último apunta hacia dentro de la esfera). Sobre $F_r B$ el vector normal, en función del vector de posición es $\vec{n} = -\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}$. Como el radio de B es $r = \epsilon$, entonces

$$-\int_{F_r B} \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3} \cdot \vec{n} dS = -\int_{F_r B} \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3} \cdot -\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|} dS = \int_{F_r B} \frac{\|\vec{r}\|^2}{\|\vec{r}\|^4} dS$$

Al simplificar

$$-\int_{F_r B} \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3} \cdot \vec{n} dS = \int_{F_r B} \frac{1}{\|\vec{r}\|^2} dS = \frac{1}{\epsilon^2} \int_{F_r B} dS = \frac{1}{\epsilon^2} \cdot 4\pi \cdot \epsilon^2 = 4\pi$$

La última integral es el área de la superficie de la esfera, a saber $4\pi\epsilon^2$.

Ejemplo 1.17.16. Dado el campo vectorial $\vec{F}(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{r^3}$. Hallemos:

1. el flujo del campo a través de la superficie $S_1 = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, usando normal exterior
2. el flujo del campo a través de la superficie $S_2 = \{x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 1\}$, usando normal exterior

Lo primero que vemos es que está dado el campo vectorial eléctrico. Hacemos uso de la ley de Gauss. El campo, como sabemos, presenta problemas en el $(0,0,0)$. Sin embargo, en el primer caso el $(0,0,0)$ se encuentra en el interior de la superficie (figura 1.68) y en el segundo queda fuera (figura 1.69).

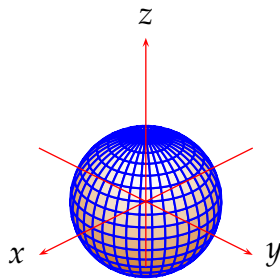


figura 1.68

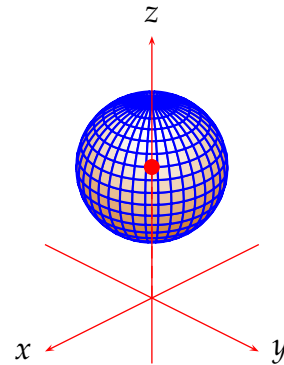


figura 1.69

Es claro entonces que:

$$1. \text{ Flujo} = \int \int_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = 4\pi$$

$$2. \text{ Flujo} = \int \int_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = 0$$

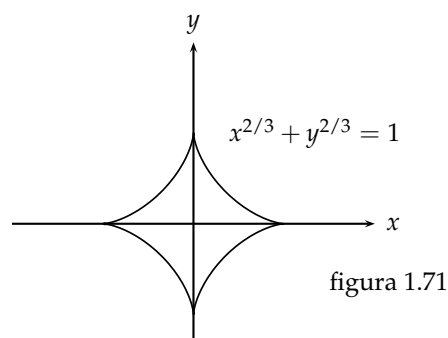
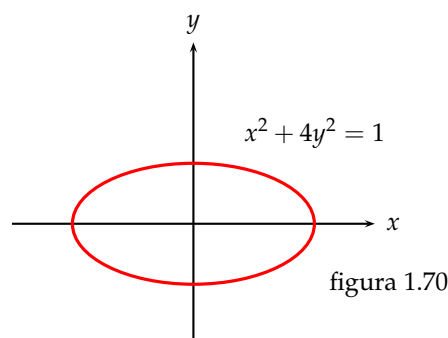
1.18. Problemas resueltos

Ejemplo 1.18.1. Parametricemos las siguientes curvas:

1. $\{(x, y) / x^2 + 4y^2 = 1\}$
2. $\{(x, y) / x^{2/3} + y^{2/3} = 1\}$
3. $\{(x, y, z) / 2x + y - z = 1, 3x + 2y + z = 4\}$
4. $\{(x, y, z) / x^2 + 4y^2 + 2z^2 = 10, z = 1\}$

1. Esta curva representa una elipse. Como se trata de una curva cerrada, para parametrizarla se usan funciones seno y coseno. En este caso, $x = \cos t$, $y = \frac{1}{2}\sin t$. Es claro que al reemplazar en la ecuación de la elipse, esta sustitución la satisface. Por tanto, la función que parametriza es

$$\alpha(t) = (\cos t, \frac{1}{2}\sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$



- 2) La curva es una hipocicloide y se parametriza usando funciones seno y coseno como

$$\alpha(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

- 3) La curva de intersección de los dos planos, se obtiene al resolver el sistema

$$\begin{cases} 2x + y - 1 = z \\ 3x + 2y - 4 = z \end{cases} \implies 5x + 3y = 5$$

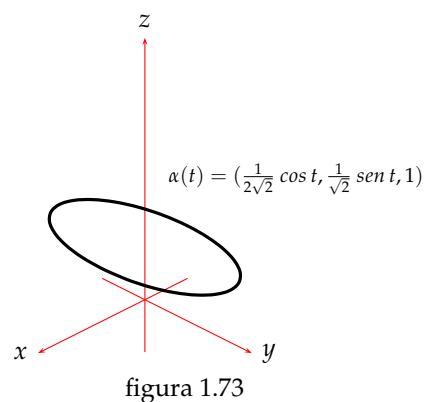
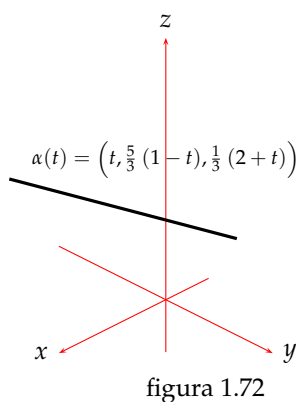
Luego, la parametrización es

$$\alpha(t) = \left(t, \frac{5}{3}(1-t), \frac{1}{3}(2+t) \right)$$

La figura 1.72 muestra la recta de intersección. Cabe hacer notar que eliminando otra variable del sistema se obtienen otras parametrizaciones equivalentes para la curva.

- 4) En este caso, de la intersección de estas dos superficies, el elipsoide y el plano, resulta una elipse (figura 1.73), la cual se parametriza, para $0 \leq t \leq 2\pi$ como

$$\alpha(t) = (2\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\sin t, 1)$$



Ejemplo 1.18.2. Hallemos $\int_{\alpha} f dL$ para el campo escalar $f(x, y) = x$. La trayectoria $\alpha(t) = (t, t^2)$, $t \in [0, 1]$. El problema es sencillo pues la trayectoria ya viene parametrizada. La definición de esta clase de integrales es

$$\int_{\alpha} f dL = \int_a^b f(\alpha(t)) \|\alpha'(t)\| dt$$

Se tienen los siguientes datos:

1. $f(\alpha(t)) = f(t, t^2) = t$ ¡sólo primera componente!
2. $\alpha'(t) = (1, 2t) \implies \|\alpha'(t)\| = \sqrt{1 + 4t^2}$

Por tanto,

$$\int_{\alpha} f dL = \int_0^1 t \sqrt{1 + 4t^2} dt = \frac{1}{12} (5\sqrt{5} - 1)$$

Ejemplo 1.18.3. Hallemos la integral de línea del campo escalar $f(x, y) = xy$ sobre la curva α que consiste en la frontera del triángulo formado por los ejes coordenados y la recta $x + 2y = 1$, en sentido horario.

En este caso, la curva α es una trayectoria regular por partes, de modo que se deben parametrizar sus tres lados.

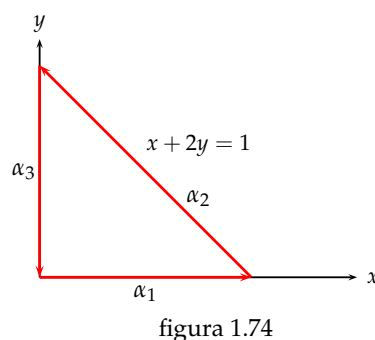
$$\alpha_1(t) = (t, 0), 0 \leq t \leq 1$$

$$\alpha_2(t) = (1 - 2t, t), 0 \leq t \leq \frac{1}{2}$$

$$\alpha_3(t) = (0, \frac{1}{2} - t), 0 \leq t \leq \frac{1}{2}$$

La integral de línea es entonces

$$\begin{aligned} \int_{\alpha} f dL &= \int_{\alpha_1} f dL + \int_{\alpha_2} f dL + \int_{\alpha_3} f dL \\ &= \int_0^1 0 \cdot 1 dt + \int_0^{1/2} t(1 - 2t) \sqrt{5} dt + \int_0^{1/2} 0 \cdot 1 dt = \frac{1}{24} \sqrt{5} \end{aligned}$$



Ejemplo 1.18.4. Hallemos la integral de línea del campo escalar $f(x, y, z) = x^2yz$ sobre la curva α que consiste en la frontera del triángulo formado por los ejes coordenados y el plano $2x + y + z = 1$, en sentido horario.

La recta que une los puntos $(\frac{1}{2}, 0, 0)$ con $(0, 1, 0)$ se parametriza

$$\alpha_1(t) = (\tfrac{1}{2}, 0, 0) + [(0, 1, 0) - (\tfrac{1}{2}, 0, 0)]t \\ = (\tfrac{1-t}{2}, t, 0), \quad 0 \leq t \leq 1$$

La recta que une los puntos $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$, se parametriza

$$\alpha_2(t) = (0, 1-t, t), \quad 0 \leq t \leq 1$$

La recta que une los puntos $(0, 0, 1)$ y $(\frac{1}{2}, 0, 0)$ se parametriza

$$\alpha_3(t) = (\tfrac{1}{2}t, 0, 1-t), \quad 0 \leq t \leq 1$$

Luego la integral de línea es

$$\begin{aligned} \int_{\alpha} f \, dL &= \int_{\alpha_1} f \, dL + \int_{\alpha_2} f \, dL + \int_{\alpha_3} f \, dL \\ &= \int_0^1 0 \, dt + \int_0^1 0 \, dt + \int_0^1 0 \, dt = 0 \end{aligned}$$

Ejemplo 1.18.5. Hallemos la integral de línea del campo escalar $f(x, y, z) = xy + z$ sobre la curva α que consiste en la intersección de los planos de ecuaciones $2x + y - z = 1$, $x + y + z = 2$, entre los puntos $(-1, 3, 0)$ y $(1, 0, 1)$.

Lo primero es resolver el sistema para hallar la recta de intersección

$$z = 2x + y - 1, \quad z = 2 - x - y \implies 3x + 2y = 3$$

Con $x = t$ obtenemos la parametrización

$$\alpha(t) = \left(t, \frac{3}{2}(1-t), \frac{1}{2}(1+t) \right), \quad -1 \leq t \leq 1$$

Se tiene

$$\int_{\alpha} f \, dL = \int_{-1}^1 \left(\frac{3}{2}t(1-t) + \frac{1}{2}(1+t) \right) \frac{1}{2} \sqrt{14} \, dt = \frac{1}{2} \sqrt{14} \int_{-1}^1 (4t - 3t^2 + 1) \, dt = 0$$

Ejemplo 1.18.6. Hallemos $\int_C (xy^2, x) \cdot d\vec{L}$, si C es la curva $x = \cos t$, $y = 3 \sin t$, $t \in [0, \pi]$.

En primer lugar, se observa que esta integral es de campo vectorial, $\vec{F}(x, y) = (xy^2, x)$. La trayectoria sobre la cual se integra es una elipse, uniendo el punto $(1, 0)$ con el $(-1, 0)$. La parametrización de esta elipse viene dada y se deduce que

$$\alpha(t) = (\cos t, 3 \sin t) \implies \alpha'(t) = (-\sin t, 3 \cos t)$$

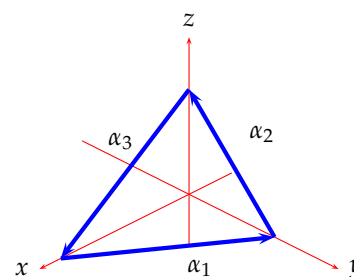


figura 1.75

Luego,

$$\begin{aligned}\int_C (xy^2, x) \cdot d\vec{L} &= \int_0^\pi (9\cos t \sin^2 t, \cos t) \cdot (-\sin t, 3\cos t) dt \\ &= \int_0^\pi (-9\cos t \sin^3 t + 3\cos^2 t) dt \\ &= \left(-\frac{9}{4}\sin^4 t + \frac{3}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) \right)_0^\pi = \frac{3}{2}\pi\end{aligned}$$

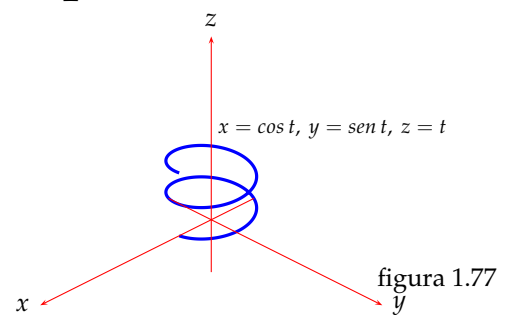
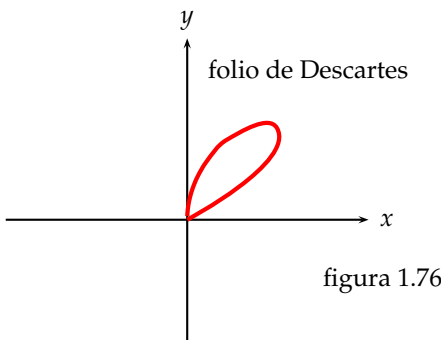
Ejemplo 1.18.7. Hallemos $\int_C x dy - y dx$, C es el folio de Descartes $x = \frac{3at}{1+t^3}$, $y = \frac{3at^2}{1+t^3}$, $0 \leq t \leq 1$.

Se trata de integrar el campo vectorial $\vec{F}(x, y) = (-y, x)$ sobre una curva cerrada (figura 1.76). Haremos los reemplazos directamente en la integral, en lugar de hallar el valor del campo en la parametrización y luego hacer producto punto con la velocidad de la trayectoria. Tenemos:

$$\begin{aligned}1. \quad x = \frac{3at}{1+t^3} &\Rightarrow dx = \frac{3a(1+t^3) - 3t^2 \cdot 3at}{(1+t^3)^2} = \frac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2} \\ 2. \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3} &\Rightarrow dy = \frac{6at(1+t^3) - 3t^2 \cdot 3at^2}{(1+t^3)^2} = \frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2}\end{aligned}$$

Después de simplificar reemplazamos para tener

$$\begin{aligned}\int_C x dy - y dx &= \int_0^1 \left(\frac{9a^2 t^2 (2-t^3)}{(1+t^3)^3} - \frac{9a^2 t^2 (1-2t^3)}{(1+t^3)^3} \right) dt \\ &= 9a^2 \int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^3)^2} = \frac{3}{2}a^2\end{aligned}$$



Ejemplo 1.18.8. Hallemos $\int_C (xy, z^2, y) \cdot d\vec{L}$, C es la hélice $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$, $t \in [0, 2\pi]$

La figura 1.77 muestra la trayectoria. Es una integral de campo vectorial sobre una curva. Se tiene

$$\begin{aligned}\int_C (xy, z^2, y) \cdot d\vec{L} &= \int_0^{2\pi} (\sin t \cos t, t^2, \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t, 1) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sin^2 t \cos t, t + t^2 \cos t + \sin t) dt = 4\pi\end{aligned}$$

Ejemplo 1.18.9. Hallemos $\int_{(1,0)}^{(0,1)} \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$ sobre la curva $\alpha(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$

Es posible que alguien, sin pensar en las consecuencias, intente un camino directo de cálculo de la integral. Cabe hacer aquí una recomendación. Cada vez que te encuentres con un integrando complicado o una trayectoria complicada, recuerda los teoremas. Sin que se te nuble la razón, observa y mira con detención y paciencia el problema. De seguro visualizas que se trata de la integral de un campo vectorial y que te dieron una trayectoria nada de fácil. Ya que esto es así, piensa de inmediato en **campos gradientes**. Para ello el rotor es lo más adecuado

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{y}{x^2+y^2} & -\frac{x}{x^2+y^2} & 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

En consecuencia, este campo es gradiente en todo conjunto simplemente conexo que no contenga el origen de coordenadas. Esto significa, además, que la integral de línea no depende de la trayectoria (como se sospechó), si depende de los puntos final e inicial que conectan la trayectoria mediante el **potencial** del campo vectorial.

Si calculamos este potencial el resto será tarea de niños. Te recuerdo que la función potencial ϕ es aquella tal que

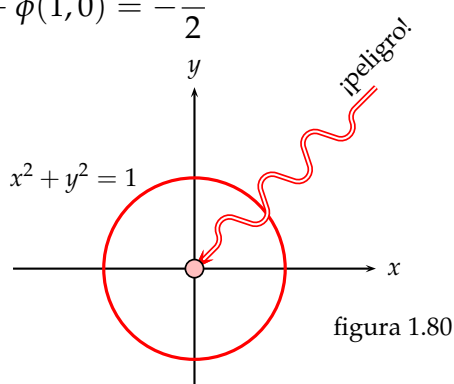
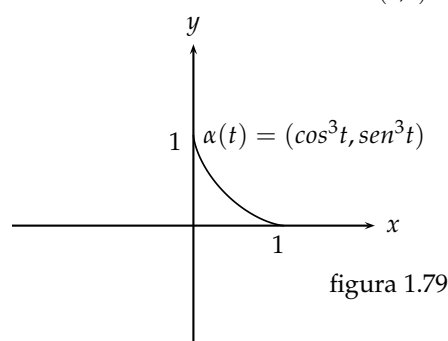
$$\nabla \phi = \vec{F}$$

y que podemos usar, para su cálculo, variadas alternativas. Puedes verificar que esta potencial es

$$\phi(x, y) = -\arctg \frac{y}{x}$$

Ahora se evalúa la integral

$$\int_{(1,0)}^{(0,1)} \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = \phi(0, 1) - \phi(1, 0) = -\frac{\pi}{2}$$



Ejemplo 1.18.10. Hallemos $\int_{\alpha} \frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2}$ sobre la curva $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Como lo tienes asumido, primero observas el problema. Te das cuenta que el integrando es el mismo del problema anterior, **pero** que te han cambiado la curva sobre la que se pide la integración. La curva en este caso es la circunferencia de centro el origen y radio 1. Ahora sí que estamos en dificultades, pues el campo vectorial dado presenta un “problema” de continuidad en el $(0,0)$. Cualquier trayectoria que encierre un “punto conflictivo” debe analizarse con sumo cuidado, toda vez que si no se encuentra un dominio simplemente conexo para esa trayectoria, la integral **no puede** ser calculada por el método del potencial. Consecuencia de esto es que el cálculo de la integral se hace directamente. Se tiene

$$\int_{\alpha} \frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} dt = -2\pi$$

La figura 1.80 ilustra la situación.

Ejemplo 1.18.11. Hallemos el trabajo necesario para mover una partícula del punto $(1, 2, 1)$ al punto $(3, 4, 9)$ sobre la trayectoria $C = \{(x, y, z) / y = x + 1, z = x^2\}$, con ayuda del campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (5x^2, yz, x^2 - z^2)$.

Ya sabemos que el trabajo lo entrega la integral $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{L}$. De acuerdo con ello, tenemos:

1. **Parametrización de C :** $\alpha(t) = (t, t + 1, t^2)$, $1 \leq t \leq 3$
2. **El campo en C :** $\vec{F}(\alpha(t)) = (5t^2, t^3 + t^2, t^2 - t^4)$
3. **La diferencial de línea:** $d\vec{L} = \alpha'(t)dt = (1, 1, 2t)dt$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{L} &= \int_1^3 (5t^2, t^3 + t^2, t^2 - t^4) \cdot (1, 1, 2t) dt \\ &= \int_1^3 (6t^2 + 3t^3 - t^5) dt = -\frac{392}{3} \end{aligned}$$

El signo negativo indica que el campo se opone a la acción del movimiento. Para ver si el valor del trabajo depende de la trayectoria, determinemos el rotacional del campo.

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 5x^2 & yz & x^2 - z^2 \end{vmatrix} = (-y, -2x, 0)$$

Para valores $x, y \neq 0$ el rotor del campo no es nulo. En consecuencia, el trabajo depende de la elección de la curva de integración. Quien no este del todo convencido puede considerar la trayectoria recta que une los puntos $(1, 2, 1)$ y $(3, 4, 9)$. Ella tiene parametrización

$$\alpha(t) = (1, 2, 1) + (2, 2, 8)t = (1 + 2t, 2 + 2t, 1 + 8t), \quad 0 \leq t \leq 1$$

El vector tangente a la curva en cada punto es $\alpha'(t) = (2, 2, 8)$. El campo en la trayectoria es

$$\vec{F}(\alpha(t)) = \left((1+2t)^2, (2+2t)(1+8t), (1+2t)^2 - (1+8t)^2 \right)$$

De esta forma,

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{L} = \int_0^1 (6 - 52t - 440t^2) dt = -\frac{500}{3}$$

El resultado, diferente al anterior, muestra que el trabajo depende de la trayectoria.

Ejemplo 1.18.12. Demostremos que $\int_{(1,0)}^{x,y} \left(\frac{1+y^2}{x^3} dx - \frac{(1+x^2)y}{x^2} dy \right)$ es independiente de la trayectoria $\forall x \neq 0$. Hallemos su valor.

La independencia de la trayectoria se prueba con $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$. El campo vectorial es

$$\vec{F}(x, y) = \left(\frac{1+y^2}{x^3}, \frac{(1+x^2)y}{x^2} \right)$$

Como el campo está en el plano, el cálculo del rotor se reduce a la tercera componente, a saber,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{2xy}{x^4} - \frac{2y}{x^3} = 0$$

Esto prueba que el campo en cuestión es gradiente sobre cualquier conjunto simplemente conexo que no contenga la abscisa x .

Veamos ahora el valor de la integral. Como sabemos que es gradiente, calculamos la función potencial mediante la definición. Es una pérdida de tiempo que alguien intente el cálculo directo de la integral.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1+y^2}{x^3} &\implies \phi(x, y) = \int \frac{1+y^2}{x^3} dx \\ &\implies \phi(x, y) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1+y^2}{x^2} + C(y) \\ &\implies \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2y}{x^2} + C'(y) \\ &\implies -\frac{y(1+x^2)}{x^2} = -\frac{y}{x^2} + C'(y) \\ &\implies C'(y) = -y \implies C(y) = -\frac{y^2}{2} \end{aligned}$$

Al reemplazar el valor de $C(y)$ se tiene

$$\phi(x, y) = -\frac{1+y^2}{2x^2} - \frac{y^2}{2}$$

Con esta potencial tenemos listo el valor de la integral

$$\int_{(1,0)}^{x,y} \left(\frac{1+y^2}{x^3} dx - \frac{(1+x^2)y}{x^2} dy \right) = \phi(x, y) - \phi(1, 0) = -\frac{y^2}{2} - \frac{1+y^2}{2x^2} + \frac{1}{2}$$

Ejemplo 1.18.13. La expresión $\phi(\vec{r}) = \frac{k e}{r}$, $r = ||\vec{r}||$ entrega el potencial electrostático “in vacuo” en el punto (x, y, z) debido a la carga puntual e situada en el origen, k es una constante física. Hallar el campo eléctrico $\vec{E}$ y probar que es solenoidal.

El campo eléctrico satisface que $\vec{E} = -\nabla\phi$. Luego,

$$\vec{E} = \left(\frac{-x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{-y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{-z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) ke$$

el que se puede escribir en forma compacta como

$$\vec{E} = -\frac{ke\vec{r}}{r^3}$$

Por construcción, el campo $\vec{E}$ es gradiente, de modo que existe ϕ tal que

$$\nabla\phi = -\vec{E}$$

en todo conjunto simplemente conexo que no contenga el $(0,0,0)$. Además, $\nabla \times \vec{E} = \vec{0}$ y como la divergencia de cualquier rotor es cero, es decir,

$$\text{div}(\text{rot}) = \nabla \cdot \nabla \times \vec{E} = 0$$

entonces el campo $\vec{E}$ es solenoidal.

Otra forma de probar que $\vec{E}$ es solenoidal es obtener, de $\vec{E} = (E_1, E_2, E_3)$ las derivadas parciales.

$$D_1 E_1 = \frac{-ke}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} (x^2 + y^2 + z^2 - 3x^2) = \frac{-ke}{r^5} (x^2 + y^2 + z^2 - 3x^2)$$

$$D_2 E_2 = \frac{-ke}{r^5} (x^2 + y^2 + z^2 - 3y^2)$$

$$D_3 E_3 = \frac{-ke}{r^5} (x^2 + y^2 + z^2 - 3z^2)$$

En consecuencia

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{-ke}{r^5} [3 \cdot (x^2 + y^2 + z^2) - 3(x^2 + y^2 + z^2)] = 0$$

Ejemplo 1.18.14. Hallemos $\int_C \frac{dx}{xy}$, C es la curva $x^4 - 4x^2y^2 + y^3 = 0$ que une $(\frac{8}{15}, \frac{16}{15})$ con $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Estoy seguro que te tomaste un segundo para reflexionar sobre este problema. ¿Miraste la curva? A primera vista parametrizar la curva ya es tarea difícil. Como te he aconsejado, la alternativa está en averiguar si el campo es gradiente. Veamos esto

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{xy^2} \neq 0$$

¡Qué horror!, esto significa que no tenemos más alternativa que parametrizar la curva. Pero, apelando a esa famosa frase ¡aún tenemos patria ciudadanos!, se observa que

$$\left(\frac{8}{15}, \frac{16}{15}\right) = \frac{8}{5} \cdot \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

Esto es, la relación funcional entre ambos puntos tiene la forma $y = tx$. Veamos que sucede si consideramos $y = tx$.

$$\begin{aligned} y = tx &\implies x^4 - 4x^4t^2 + t^3x^3 = 0 \implies x - 4t^2x + t^3 = 0 \\ &\implies x = \frac{t^3}{4t^2 - 1} \\ &\implies y = \frac{t^4}{4t^2 - 1} \end{aligned}$$

El parámetro t satisface, $1 \leq t \leq 2$.

Ahora se puede esbozar una sonrisa de alivio o de satisfacción. La diferencial

$$dx = \left(\frac{3t^2(4t^2 - 1) - 8t^4}{(4t^2 - 1)^2} \right) dt \implies dx = \frac{(4t^4 - 3t^2) dt}{(4t^2 - 1)^2}$$

Con estos datos volvemos a nuestra integral original.

$$\begin{aligned} \int_C \frac{dx}{xy} &= - \int_1^2 \frac{t^2(4t^2 - 3)}{(4t^2 - 1)^2} \cdot \frac{(4t^2 - 1)^2}{t^7} dt \\ &= - \int_1^2 \frac{4t^2 - 3}{t^5} dt = -\frac{51}{64} \end{aligned}$$

Ejemplo 1.18.15. Probemos que $\oint_C \vec{r} \cdot d\vec{r} = 0$ si C es una curva cerrada.

Escribimos el vector de posición $\vec{r} = (x, y, z)$ para tener que $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$. Con ello,

$$\oint_C \vec{r} \cdot d\vec{r} = \oint_C (x, y, z) \cdot (dx, dy, dz)$$

Como estamos trabajando sobre una curva cerrada, ponemos atención al rotor de $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$.

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \vec{0}$$

Dado que el campo tiene rotor cero, se concluye que la integral de línea es cero.

Ejemplo 1.18.16. Consideremos $\int_{\alpha} f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz$, en donde:

- $f_1 = 2x(y + z) + ay^n + z^2$
- $f_2 = 2y(x + z) + az^n + x^2$
- $f_3 = 2z(x + y) + ax^n + y^2$

Vamos a determinar el valor de las constantes a y n para que la integral sea independiente de la trayectoria que une los puntos $(0,0,3)$ y $(1,2,0)$. Además, calculamos la integral.

Para probar la independencia de la trayectoria se debe verificar que el rotor del campo es cero. Esto es,

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = (2z - anz^{n-1}, 2x - anx^{n-1}, 2y - any^{n-1}) = \vec{0}$$

Igualando componentes se tiene

$$2z - anz^{n-1} = 0, \quad 2x - anx^{n-1} = 0, \quad 2y - any^{n-1} = 0$$

de donde, $2(x + y + z) = na(x^{n-1} + y^{n-1} + z^{n-1})$. Se obtiene $n = 2$, $a = 1$.

La independencia de la trayectoria nos lleva al cálculo del potencial.

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 2xz + 2xy + y^2 + z^2 \implies \phi = x^2z + x^2y + xy^2 + xz^2 + C_1$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 2xy + 2yz + x^2 + z^2 \implies \phi = xy^2 + zy^2 + x^2y + yz^2 + C_2$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 2xz + 2yz + x^2 + y^2 \implies \phi = xz^2 + yz^2 + x^2z + y^2z + C_3$$

Se concluye que

$$\phi(x, y, z) = x^2z + x^2y + xy^2 + xz^2 + zy^2 + yz^2$$

En consecuencia, para la integral se tiene

$$\int_{\alpha} f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz = \phi(1,2,0) - \phi(0,0,3) = 6$$

Ejemplo 1.18.17. Consideremos la trayectoria $C = \{(x,y) / x^2 + y^2 \leq 1\}$ y $\vec{n}$ un vector normal a C . Sea $\vec{F}(x,y) = (x+2,0)$ campo de fluido. Vamos a averiguar si el fluido tiende a entrar o a salir por C . En otras palabras, a determinar si $\int_C \vec{F} \cdot \vec{n} dL \neq 0$.

La trayectoria de integración se parametriza $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$, con $0 \leq t \leq 2\pi$. El vector tangente a la curva en cualquier punto es $\alpha'(t) = (-\sin t, \cos t)$. Luego, el vector normal es $\vec{n} = (\cos t, \sin t)$. Con esto tenemos que

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{n} dL = \int_0^{2\pi} (2 + \cos t, 0) \cdot (\cos t, \sin t) dt = \int_0^{2\pi} (2 \cos t + \cos^2 t) dt = \pi > 0$$

Como el resultado es positivo, sale fluído.

Ejemplo 1.18.18. Hallemos el trabajo necesario para empujar una partícula desde el punto $(1, 0)$ al $(-1, 0)$ a lo largo de la elipse $b^2 x^2 + y^2 = b^2$ venciendo la fuerza $\vec{F}(x, y) = (2 + 3y^2, 16x)$.

El trabajo lo entrega la integral de línea de campo vectorial. Al parametrizar la trayectoria

$$\alpha(t) = (\cos t, b \sin t), \quad 0 \leq t \leq \pi$$

se encuentra que el vector tangente es $\alpha'(t) = (-\sin t, b \cos t)$. El campo en la trayectoria es

$$\vec{F}(\alpha(t)) = (2 + 3b^2 \sin^2 t, 16 \cos t)$$

Luego

$$\begin{aligned} T &= \int_0^\pi (2 + 3b^2 \sin^2 t, 16 \cos t) \cdot (-\sin t, b \cos t) dt \\ &= \int_0^\pi (-3b^2 \sin^3 t - 2 \sin t + 16b \cos^2 t) dt \\ &= 8\pi b - 4b^2 - 4 \end{aligned}$$

Ejemplo 1.18.19. Hallemos el área de la superficie $S = \{(x, y, z) / x^2 + z^2 = 2ax, 0 < y < h, z > 0, a > 0\}$.

La superficie S , que corresponde a la mitad superior de un cilindro, la muestra la figura 1.81, y se parametriza

$$\phi(x, y) = \left(x, y, \sqrt{a^2 - (x - a)^2} \right)$$

La parametrización la hemos hecho desde el plano xy . Los parámetros u y v se han reemplazado por x e y , respectivamente.

El dominio de la parametrización se encuentra como sigue.

$$z = 0 \implies x^2 = 2ax \implies x(x - 2a) = 0$$

Luego, $R_{xy} = \{0 \leq x \leq 2a, 0 \leq y \leq h\}$. De esta forma,

$$\phi_x \times \phi_y = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & \frac{-(x-a)}{\sqrt{a^2 - (x-a)^2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{(x-a)}{\sqrt{a^2 - (x-a)^2}}, 0, 1 \right)$$

$$A(S) = \int_0^{2a} \int_0^h \left\| \left(\frac{(x-a)}{\sqrt{a^2 - (x-a)^2}}, 0, 1 \right) \right\| dy dx$$

Esto es,

$$\begin{aligned} A(S) &= \int_0^{2a} \int_0^h \sqrt{\frac{(x-a)^2}{a^2 - (x-a)^2} + 1} dy dx = \int_0^{2a} \int_0^h \frac{a}{\sqrt{a^2 - (x-a)^2}} dy dx \\ &= \int_0^{2a} \frac{ah}{\sqrt{a^2 - (x-a)^2}} dx = ah \left(\arcsen \frac{x-a}{a} \right)_0^{2a} = \pi ah \end{aligned}$$

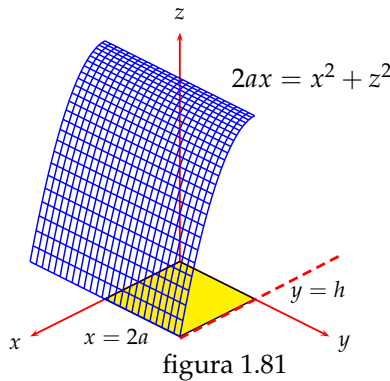


figura 1.81

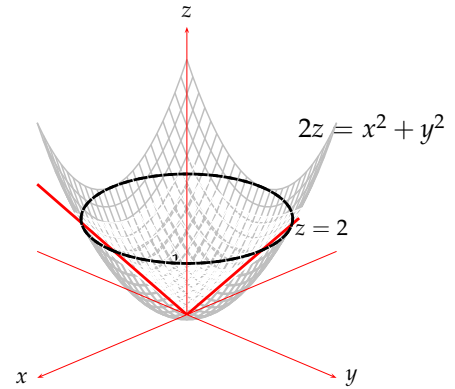


figura 1.82

Ejemplo 1.18.20. Hallemos el área de la superficie del paraboloide $2z = x^2 + y^2$ que queda fuera del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

De la lectura se desprende que es al paraboloide al que se le calcula el área. El cono sirve para el acotamiento o parte del paraboloide al que se calcula el área. La figura 1.82 muestra un bosquejo de la situación. La parametrización del paraboloide la hacemos desde el plano xy , es

$$\psi(x, y) = \left(x, y, \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \right)$$

Se necesita conocer el dominio de esta parametrización. Para hallarlo se busca la intersección de ambas superficies

$$2z = x^2 + y^2, z = \sqrt{x^2 + y^2} \implies z^2 - 2z = 0 \implies z = 0 \vee z = 2$$

Si $z = 0$ se está en el origen de coordenadas. Si $z = 2$, entonces la curva de intersección es

$$\{(x, y, z) / x^2 + y^2 \leq 4, z = 2\}$$

Como es costumbre, una forma de visualizar el recinto de integración, que en este caso coincide con el dominio de la parametrización, es proyectar sobre el plano $z = 0$. Así, el dominio de la parametrización es

$$D = \{(x, y) / x^2 + y^2 \leq 4\}$$

Los vectores fundamentales son

$$\psi_x = (1, 0, x), \quad \psi_y = (0, 1, y)$$

De aquí que, el vector normal $\vec{n}$ a la superficie del paraboloide, en cualquier punto es

$$\vec{n} = \psi_x \times \psi_y = (-x, -y, 1)$$

En consecuencia

$$A(S) = \int_{R_{xy}} \sqrt{1 + x^2 + y^2} \, dx \, dy = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \sqrt{1 + r^2} \, r \, dr \, d\theta$$

al calcular la integral se obtiene

$$A(S) = \frac{2}{3} \pi (5\sqrt{5} - 1)$$

Ejemplo 1.18.21. Hallemos el área de la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 2ay = 0$ interior a una de las hojas del cono $x^2 + z^2 = y^2$.

Para efecto de tener una representación gráfica, la figura 1.83 muestra la porción de esfera a la que se va a determinar el área. La esfera tiene ecuación $x^2 + (y - a)^2 + z^2 = a^2$, la cual nos indica que su centro se encuentra en $(0, a, 0)$, y que tiene radio a . Al intersectar las superficies se encuentra la curva de intersección y con ello su dominio. Al reemplazar $x^2 + z^2 = y^2$ en la ecuación de la esfera se obtiene $y = 0 \vee y = a$. Allí donde $y = a$, es, $x^2 + z^2 = a^2$, ¡¡proyección!! Esto es,

$$D = R_{xz} = \{(x, z) / x^2 + z^2 = a^2\}$$

El área pedida es de la esfera. Una parametrización para ella, desde el plano xz , es

$$\phi(x, z) = (x, a + \sqrt{a^2 - x^2 - z^2}, z), \quad D = R_{xz}$$

Luego, para hallar el vector normal se tiene

$$\begin{aligned} \phi_x &= \left(1, -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - z^2}}, 0\right) \\ \phi_z &= \left(0, -\frac{z}{\sqrt{a^2 - x^2 - z^2}}, 1\right) \\ \phi_x \times \phi_z &= \left(-\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - z^2}}, -1, -\frac{z}{\sqrt{a^2 - x^2 - z^2}}\right) \end{aligned}$$

La norma del vector fundamental es $\frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - z^2}}$, de manera que tenemos

$$A(S) = \int_{R_{xz}} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - z^2}} \, dx \, dz = \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{ar \, dr \, d\theta}{\sqrt{a^2 - r^2}} = 2\pi a^2$$

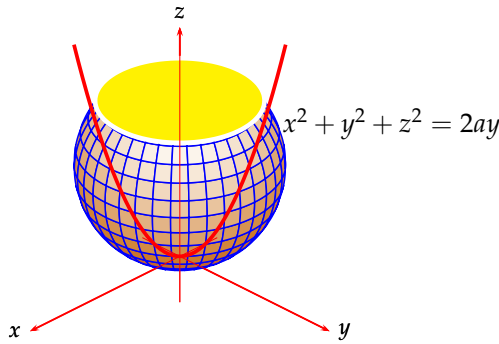


figura 1.83

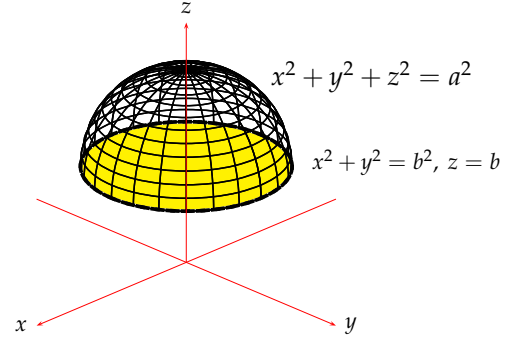


figura 1.84

Ejemplo 1.18.22. Una esfera de radio a y centro en el origen de coordenadas se corta por el plano $z = b$, $b > 0$. Hallemos el área de la superficie del casquete esférico que queda sobre el plano.

El casquete lo parametrizamos desde el plano xy

$$\psi(x, y) = (x, y, \sqrt{a^2 - x^2 - y^2})$$

El dominio de la parametrización es el disco $x^2 + y^2 \leq b^2$. El vector normal se obtiene del producto cruz de

$$\psi_x = (1, 0, -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}), \quad \psi_y = (0, 1, -\frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}})$$

Se tiene que

$$\vec{n} = (\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, 1)$$

Su norma es

$$||\vec{n}|| = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

En consecuencia, Luego,

$$A = \int_0^b \int_0^{2\pi} \frac{ar \, d\theta \, dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} = 2\pi(a^2 - a\sqrt{a^2 - b^2})$$

Ejemplo 1.18.23. Hallemos el área de la superficie del plano $x + y + z = a$, en el primer octante.

La superficie se parametriza desde el plano xy como

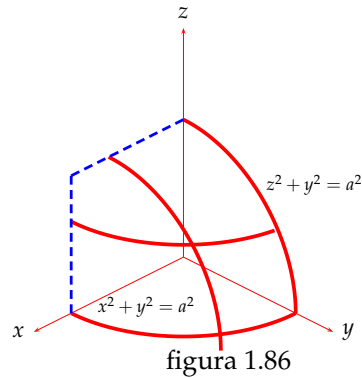
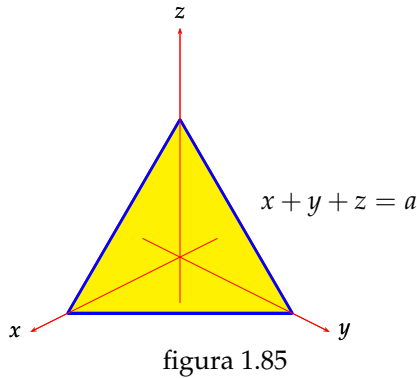
$$\phi(x, y) = (x, y, a - x - y)$$

y el dominio de esta parametrización es

$$D = \{0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a - x\}$$

Luego, el área viene dada por

$$A(S) = \int_{R_{xy}} \sqrt{3} \, dA = \int_0^a \int_0^{a-x} \sqrt{3} \, dy \, dx = \sqrt{3} \int_0^a (a - x) \, dx = \frac{1}{2} a^2 \sqrt{3}$$



Ejemplo 1.18.24. Hallemos el área de la superficie formada por la intersección de los cilindros $x^2 + y^2 = a^2$, $y^2 + z^2 = a^2$, en el primer octante.

Existen dos porciones de superficie, cada una de ellas corresponde a cada uno de los cilindros de intersección. La figura 1.86 muestra esto. El cilindro $y^2 + z^2 = a^2$, se parametriza mediante la función

$$\phi(x, y) = (x, y, \sqrt{a^2 - y^2})$$

El dominio de la parametrización es el disco $x^2 + y^2 \leq a^2$. Luego

$$\phi_x = (1, 0, 0), \quad \phi_y = (0, 1, -\frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}) \Rightarrow \vec{n} = (0, \frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}, 1)$$

de donde,

$$||\vec{n}|| = \frac{a}{\sqrt{a^2 - y^2}}$$

Se tiene:

$$\begin{aligned} A &= a \int_0^{\pi/2} \int_0^a \frac{r \, dr \, d\theta}{\sqrt{a^2 - r^2} \sin^2 \theta} = -a \int_0^{\pi/2} (a \cos \theta - a) \csc^2 \theta \, d\theta \\ &= -a^2 \left(\frac{-1 + \cos \theta}{\sin \theta} \right)_0^{\pi/2} = a^2 + \lim_{\theta \rightarrow 0} \left(\frac{-1 + \cos \theta}{\sin \theta} \right) \cdot a^2 \\ &= a^2 \end{aligned}$$

La superficie del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$, en el primer octante, se parametriza

$$\phi(y, z) = (\sqrt{a^2 - y^2}, y, z)$$

El dominio de la parametrización es el disco $y^2 + z^2 \leq a^2$. Por condiciones de simetría el área de superficie es la misma del otro cilindro. En consecuencia, $A(S) = 2a^2$

Ejemplo 1.18.25. Hallemos el área de la superficie del cilindro $x^2 + y^2 = 9$ en el primer octante al cortarlo por el plano $x = z$.

El cilindro se parametriza

$$\phi(x, z) = (x, \sqrt{9 - x^2}, z)$$

El dominio de la parametrización es

$$D = \{(x, y) / 0 \leq x \leq 3, 0 \leq z \leq x\}$$

Luego

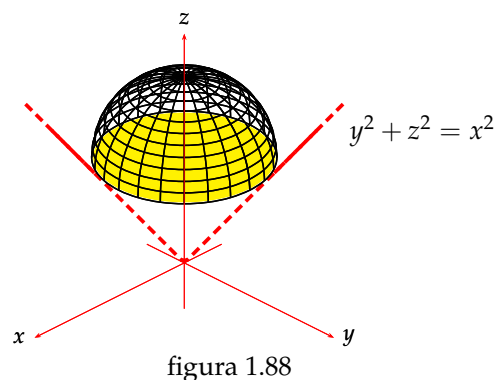
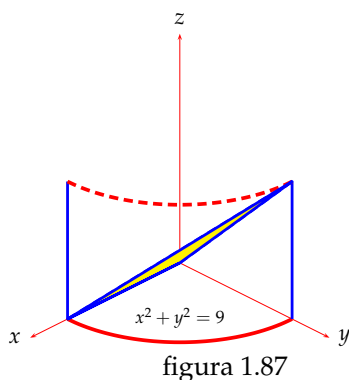
$$\phi_x = (1, -\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}, 0), \phi_z = (0, 0, 1) \implies \vec{n} = (-\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}, 1, 0)$$

de donde, su norma es

$$||\vec{n}|| = \frac{3}{\sqrt{9-x^2}}$$

En consecuencia

$$A = \int_0^3 \int_0^x \frac{3}{\sqrt{9-x^2}} dz dx = 9$$



Ejemplo 1.18.26. Hallemos el área del casquete esférico que se forma al cortar la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4x$ por la hoja superior del cono $y^2 + z^2 = x^2$.

La superficie esférica se parametriza

$$\phi(y, z) = (2 + \sqrt{4 - y^2 - z^2}, y, z)$$

con dominio de parametrización

$$D = \{(r, \theta) / 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

Luego,

$$\phi_y = (-\frac{y}{\sqrt{4-y^2-z^2}}, 1, 0), \phi_z = (-\frac{z}{\sqrt{4-y^2-z^2}}, 0, 1) \implies \vec{n} = (1, \frac{y}{\sqrt{4-y^2-z^2}}, \frac{z}{\sqrt{4-y^2-z^2}})$$

de donde,

$$||\vec{n}|| = \frac{2}{\sqrt{4-y^2-z^2}}$$

En consecuencia

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \frac{2r \, dr \, d\theta}{\sqrt{4-r^2}} = 8\pi$$

Ejemplo 1.18.27. Hallemos área de la porción del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ que queda en el primer octante y cortada por el plano $x + y = 4$.

La hoja superior del cono se parametriza $\phi(x, y) = (x, y, \sqrt{x^2 + y^2})$, con dominio de la parametrización

$$D = \{(x, y) / 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4 - x\}$$

Luego,

$$\phi_x = (1, 0, \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}), \quad \phi_y = (0, 1, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}) \implies \vec{n} = (-\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1)$$

de lo cual,

$$||\vec{n}|| = \sqrt{2}$$

En consecuencia

$$A = \int_0^4 \int_0^{4-x} \sqrt{2} \, dy \, dx = 16\sqrt{2}$$

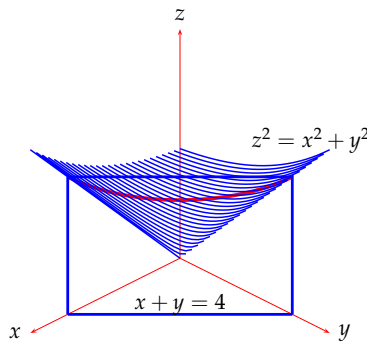


figura 1.89

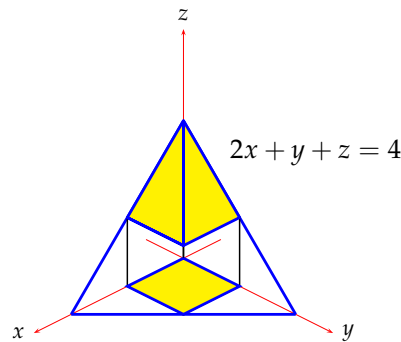


figura 1.90

Ejemplo 1.18.28. Hallemos área del plano $2x + y + z = 4$ acotado por $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$.

El plano se parametriza $\phi(x, y) = (x, y, 4 - 2x - y)$, con dominio

$$D = \{(x, y) / 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

Así,

$$\phi_x = (1, 0, -2), \quad \phi_y = (0, 1, -1) \implies \vec{n} = (2, 1, 1)$$

de lo cual

$$||\vec{n}|| = \sqrt{6}$$

Por tanto,

$$A = \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{6} \, dy \, dx = \sqrt{6}$$

Ejemplo 1.18.29. Hallemos área del casquete esférico $x^2 + y^2 + z^2 = 36$, que se encuentra dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 9$.

La parte superior del casquete esférico (figura 1.91) se parametriza

$$\phi(x, y) = (x, y, \sqrt{36 - x^2 - y^2})$$

El dominio de la parametrización es

$$D = \{(x, y) / x^2 + y^2 \leq 9\}$$

Luego,

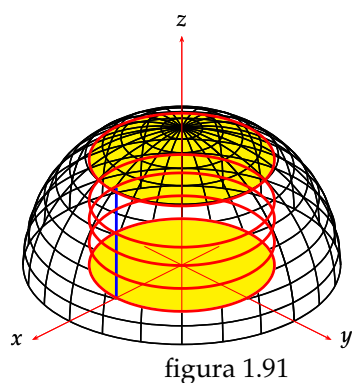
$$\phi_x = (1, 0, -\frac{x}{\sqrt{36 - x^2 - y^2}}), \phi_y = (0, 1, -\frac{y}{\sqrt{36 - x^2 - y^2}}) \Rightarrow \vec{n} = (\frac{x}{\sqrt{36 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{36 - x^2 - y^2}}, 1)$$

de lo cual

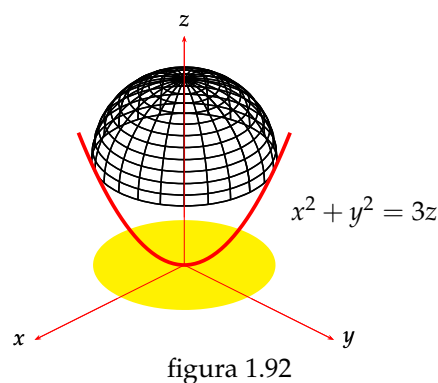
$$||\vec{n}|| = \frac{6}{\sqrt{36 - x^2 - y^2}}$$

En consecuencia

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^3 \frac{6r \, dr \, d\theta}{\sqrt{36 - r^2}} = 288\pi(2 - \sqrt{3})$$



$$x^2 + y^2 + z^2 = 36$$



$$x^2 + y^2 = 3z$$

Ejemplo 1.18.30. Hallemos área de la superficie de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ que está dentro del paraboloide $x^2 + y^2 = 3z$.

La superficie del casquete de esfera (figura 1.92) tiene ecuación $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 4$. Su parametrización es

$$\phi(x, y) = (x, y, 2 + \sqrt{4 - x^2 - y^2})$$

Para determinar el dominio de la parametrización se intersectan ambas superficies, se encuentra los valores $z = 0$, $z = 1$. Con $z = 1$ se obtiene el recinto

$$D = \{(x, y) / x^2 + y^2 \leq 3\}$$

Luego,

$$\phi_x = (1, 0, -\frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}), \phi_y = (0, 1, -\frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}) \Rightarrow \vec{n} = (\frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}, 1)$$

de lo cual, su norma es

$$||\vec{n}|| = \frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$$

En consecuencia

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2r dr d\theta}{\sqrt{4-r^2}} = 4\pi$$

Ejemplo 1.18.31. Hallemos área de la superficie del paraboloide $x^2 + y^2 = 3z$ que está dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$.

El problema tiene datos similares al anterior, pero ahora es la superficie del paraboloide dentro de la esfera (figura 1.93). El paraboloide se parametriza

$$\phi(x, y) = (x, y, \frac{1}{3}(x^2 + y^2))$$

El dominio de la parametrización es el recinto

$$D = \{(x, y) / x^2 + y^2 \leq 3\}$$

Luego

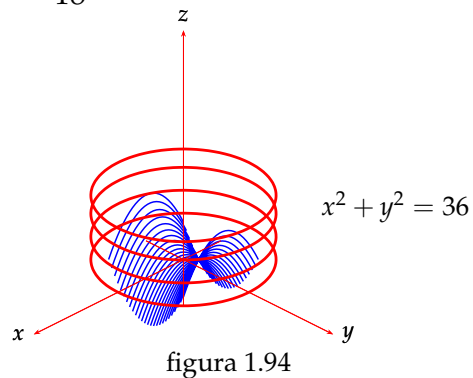
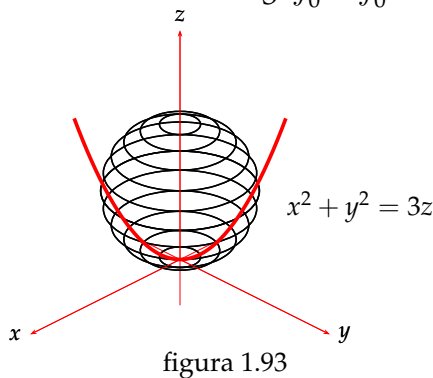
$$\phi_x = (1, 0, \frac{2}{3}x), \phi_y = (0, 1, \frac{2}{3}y) \Rightarrow \vec{n} = (-\frac{2}{3}x, -\frac{2}{3}y, 1)$$

de donde,

$$||\vec{n}|| = \frac{1}{3}\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 9}$$

En consecuencia,

$$A = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} r (9 + 4r^2)^{1/2} dr d\theta = \frac{\pi}{18} (21\sqrt{21} - 27)$$



Ejemplo 1.18.32. Hallemos área de la silla $y^2 - x^2 = 6z$ dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 36$.

La figura 1.94 muestra sólo una regular idea de la situación. La silla se parametriza

$$\phi(x, y) = (x, y, \frac{1}{6}(y^2 - x^2))$$

con dominio

$$D = \{(x, y) / x^2 + y^2 \leq 36\}$$

Luego

$$\phi_x = (1, 0, -\frac{x}{3}), \phi_y = (0, 1, \frac{y}{3}) \Rightarrow \vec{n} = (\frac{x}{3}, -\frac{y}{3}, 1)$$

La norma es

$$\|\vec{n}\| = \frac{1}{3}\sqrt{x^2 + y^2 + 9}$$

En consecuencia

$$A = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^6 r (9 + r^2)^{1/2} dr d\theta = 6\pi(5\sqrt{5} - 1)$$

Ejemplo 1.18.33. Hallemos área del cono $x^2 + y^2 = z^2$ cortada por el cilindro $x^2 + y^2 = 2ax$, $z \geq 0$.

El cono se parametriza, $\phi(x, y) = (x, y, \sqrt{x^2 + y^2})$, y su dominio de parametrización es el recinto

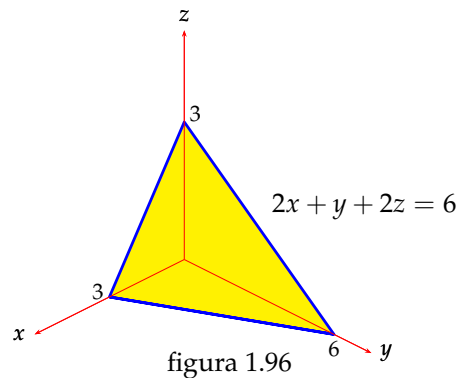
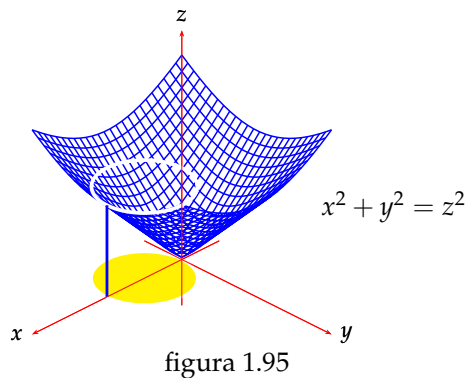
$$D = \{(x, y) / x^2 + y^2 \leq 2ax\}$$

Luego,

$$\phi_x = (1, 0, \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}), \phi_y = (0, 1, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}) \Rightarrow \vec{n} = (-\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1)$$

de donde, $\|\vec{n}\| = \sqrt{2}$. En consecuencia

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2a\cos\theta} r dr d\theta = 2a^2\sqrt{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\theta d\theta \\ &= 2a^2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \left(\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta \right)_{-\pi/2}^{\pi/2} = \pi a^2\sqrt{2} \end{aligned}$$



Ejemplo 1.18.34. Hallemos $\int_S f(x, y, z) dS$, si S es la superficie $2x + y + 2z = 6$ en el primer octante y $f(x, y, z) = 4x + 3y - 2z$.

Es claro que se trata de hallar una integral de superficie de campo escalar. Como siempre, lo primero es parametrizar la superficie sobre la cual haremos integración. En este caso, la parametrización del plano es

$$\phi(x, y) = (x, y, \frac{1}{2}(6 - 2x - y))$$

Ahora determinamos el valor de campo en la parametrización, que resulta ser

$$f(\phi(x, y)) = 6x + 4y - 6$$

El vector normal exterior a la superficie del plano es

$$\vec{n} = \phi_x \times \phi_y = (1, \frac{1}{2}, 1)$$

Luego

$$\int_S f(x, y, z) dS = \frac{3}{2} \int_0^3 \int_0^{6-2x} (6x + 4y - 6) dy dx = 108$$

Ejemplo 1.18.35. Hallemos área del plano $x = z$ en el primer octante, entre los planos $y = 0$, $y = 6$, y dentro del hiperboloide $9x^2 - 4y^2 + 16z^2 = 144$.

El paraboloide, que es como una carretilla de hilo, se prolonga a través del eje y . La figura 1.97 trata de simular esto. El área que se pide es la del plano, que se parametriza $\phi(x, y) = (x, y, x)$. Para hallar el dominio de la parametrización, de $x = z$ tenemos que $25x^2 - 4y^2 = 144$. Esto es una hipérbola en el plano xy con vértice en $(\frac{12}{5}, 0)$. Luego, el dominio es

$$D = \{(x, y) / 0 \leq y \leq 6, 0 \leq x \leq A = \frac{2}{5}\sqrt{36 + y^2}\}$$

Ahora vamos por el vector normal

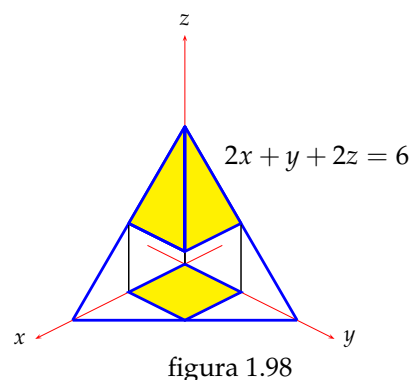
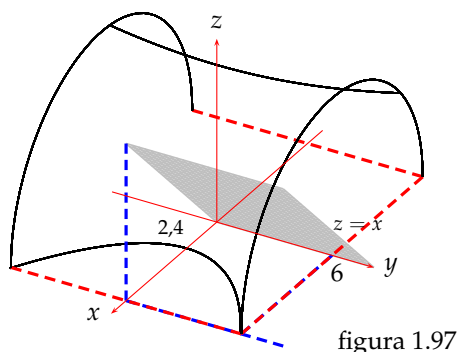
$$\phi_x = (1, 0, 1), \phi_y = (0, 1, 0) \implies \vec{n} = (-1, 0, 1)$$

cuya norma es $\|\vec{n}\| = \sqrt{2}$. Con todos estos datos:

$$A = \int_D \sqrt{2} dA = \sqrt{2} \int_0^6 \int_0^A dx dy = \frac{2}{5} \sqrt{2} \int_0^6 \sqrt{36 + y^2} dy$$

Recordando sustituciones trigonométricas, $y = 6 \tan(t)$, se tiene que

$$A = \frac{72}{5} \sqrt{2} \int \sec^3 t dt = \frac{72}{5} \sqrt{2} \left(\frac{1}{2} \ln(1 + \sqrt{2}) + \frac{1}{4} \ln 2 \right)$$



Ejemplo 1.18.36. Calculemos $\int_S f(x, y, z) dS$, si S es la superficie del plano $2x + y + 2z = 6$ ubicado en el primer octante y acotado por los planos $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 2$. El campo $f(x, y, z) = 4x + 3y - 2z$.

La figura 1.98 sirve para ilustrar la situación. El plano se parametriza, en función de x e y , en la forma

$$\phi(x, y) = (x, y, \frac{1}{2}(6 - 2x - y)), \quad D = \{(x, y) / 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$$

El campo evaluado en la parametrización es $f(\phi(x, y)) = 6x + 4y - 6$. El vector normal

$$\vec{n} = \phi_x \times \phi_y = (1, \frac{1}{2}, 1)$$

Luego

$$\int_S f(x, y, z) dS = \frac{3}{2} \int_0^2 \int_0^1 (6x + 4y - 6) dx dy = 3$$

Ejemplo 1.18.37. Calculemos $\int_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} dS$, si S es la superficie del plano $2x + y + 2z = 6$ en el primer octante y acotada por los planos $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 2$. El campo $\vec{F}(x, y, z) = (x + 2y, -3z, x)$.

La figura 1.98 es útil para visualizar este problema. La diferencia con el anterior es que ahora tenemos trabajando un campo vectorial. Se tiene la parametrización

$$\phi(x, y) = (x, y, \frac{1}{2}(6 - 2x - y)), \quad D = \{(x, y) / 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$$

El rotor del campo y su correspondiente valor en la parametrización es

$$\nabla \times \vec{F} = (3, -1, -2) \implies (\nabla \times \vec{F})(\phi(x, y)) = (3, -1, -2)$$

El vector normal es ya conocido, $\vec{n} = (1, \frac{1}{2}, 1)$. En consecuencia

$$\int_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} dS = \int_0^1 \int_0^2 (3, -1, -2) \cdot (1, \frac{1}{2}, 1) dy dx = 1$$

Ejemplo 1.18.38. Hallemos $\int_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} dS$, S es la superficie $2x + y + 2z = 6$ en el primer octante, $\vec{F}(x, y, z) = (x + 2y, -3z, x)$.

De nuevo, la figura 1.98 la lleva. Tenemos:

$$\nabla \times \vec{F} = (3, -1, -2), \quad \phi(x, y) = (x, y, \frac{1}{2}(6 - 2x - y))$$

El vector normal y exterior al plano es $(1, \frac{1}{2}, 1)$. El campo en la parametrización es

$$(\nabla \times \vec{F})(\phi(x, y)) = (3, -1, -2)$$

En consecuencia

$$\int_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} \, dS = \int_0^3 \int_0^{6-2x} (3, -1, -2) \cdot (1, \frac{1}{2}, 1) \, dy \, dx = \frac{9}{2}$$

Ejemplo 1.18.39. Hallemos $\int_S z \, dx \, dy$, siendo S la superficie exterior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

No es necesario graficar la esfera. La integral es de campo vectorial, ya que podemos escribir

$$\int_S z \, dx \, dy = \int_S (0, 0, z) \cdot (dy \, dz, dx \, dz, dx \, dy)$$

En donde, $\vec{F} = (0, 0, z)$ y $(dy \, dz, dx \, dz, dx \, dy) = \vec{n} \, dS$. La parametrización de la parte superior de la esfera es

$$\phi(x, y) = (x, y, \sqrt{R^2 - x^2 - y^2})$$

El valor de la integral que se busca será dos veces el valor de la integral en la parametrización superior. El vector normal, y el valor del campo en la parametrización son

$$\vec{n} = \left(\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, 1 \right), \quad \vec{F}(\phi) = (0, 0, \sqrt{R^2 - x^2 - y^2})$$

De esta forma, la integral es

$$\int_S z \, dx \, dy = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^R r \sqrt{R^2 - r^2} \, dr \, d\theta = \frac{4\pi}{3} R^3$$

Ejemplo 1.18.40. Hallemos $\int_S \sqrt{x^2 + y^2} \, dS$, si S es la superficie lateral del cono $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = \frac{z^2}{b^2}$, $0 \leq z \leq b$.

Una parametrización para el cono (figura 1.99) es

$$\phi(x, y) = (x, y, \frac{b}{a} \sqrt{x^2 + y^2}), \quad D = \{x^2 + y^2 \leq a^2\}$$

A partir de la cual

$$\phi_x = (1, 0, \frac{bx}{a\sqrt{x^2 + y^2}}), \quad \phi_y = (0, 1, \frac{by}{a\sqrt{x^2 + y^2}}) \implies \vec{n} = \phi_x \times \phi_y = \left(-\frac{bx}{a\sqrt{x^2 + y^2}}, -\frac{by}{a\sqrt{x^2 + y^2}}, 1 \right)$$

1.18 Problemas resueltos

Su norma, $||\vec{n}|| = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 + b^2}$. Luego

$$\begin{aligned}\int_S \sqrt{x^2 + y^2} dS &= \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \frac{1}{a} \sqrt{a^2 + b^2} dA \\ &= \frac{1}{a} \sqrt{a^2 + b^2} \int_0^a \int_0^{2\pi} r^2 dr d\theta \\ &= \frac{2\pi}{3} a^2 \sqrt{a^2 + b^2}\end{aligned}$$

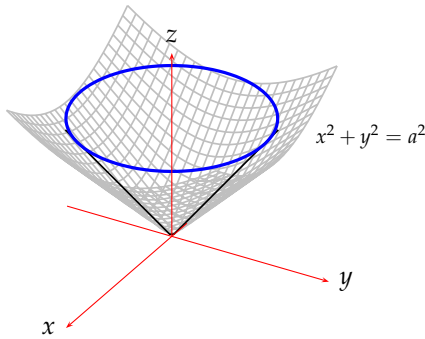


figura 1.99

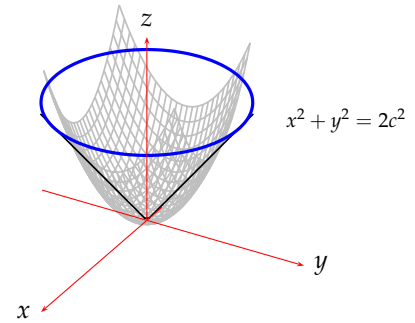


figura 1.100

Ejemplo 1.18.41. Hallemos el momento de inercia I_L respecto del eje Oz , de la porción de la superficie del paraboloide $x^2 + y^2 = 2cz$, obtenida al cortarla por el plano $z = c$. Considerar $\rho = 1$.

La parametrización de esta superficie (figura 1.100) es

$$\phi(x, y) = \left(x, y, \frac{1}{2c}(x^2 + y^2) \right), \quad D = \{x^2 + y^2 \leq 2c^2\}$$

A partir de esto,

$$\phi_x = \left(1, 0, \frac{x}{c} \right), \quad \phi_y = \left(0, 1, \frac{y}{c} \right) \implies ||\phi_x \times \phi_y|| = \sqrt{1 + \frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{c^2}}$$

De esta manera, el momento de inercia viene dado por

$$I_Z = \int_S d^2(x, y, z) \rho(x, y, z) dS = \iint_{R_{xy}} (x^2 + y^2) \sqrt{1 + \frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{c^2}} dx dy$$

Esta integral se calcula en coordenadas polares:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq \sqrt{2}$$

Se tiene

$$\begin{aligned}
 I_Z &= \int_0^{2\pi} \int_0^{c\sqrt{2}} \frac{1}{c} r^3 \sqrt{c^2 + r^2} dr d\theta = \frac{2\pi}{c} \int_0^{c\sqrt{2}} r^3 \sqrt{c^2 + r^2} dr \\
 &= \frac{2\pi}{3c} \left(r^2 (c^2 + r^2)^{3/2} \right)_0^{c\sqrt{2}} - \frac{1}{3} \int_0^{c\sqrt{2}} 2r (c^2 + r^2)^{3/2} dr \\
 &= \frac{2\pi}{3c} (c^2 + r^2)^{3/2} \left(r^2 - \frac{2}{5} (c^2 + r^2) \right)_0^{c\sqrt{2}} = \frac{4}{15} \pi c^2 (1 + 6\sqrt{6})
 \end{aligned}$$

Ejemplo 1.18.42. Hallemos el centro de masa y el momento de inercia I_z del casquete de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ cortada por el plano $z = H > 0$. La densidad es igual a uno en cada punto de la superficie.

La figura 1.101 muestra el casquete, que se parametriza

$$\phi(x, y) = (x, y, \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}), \quad D = \{x^2 + y^2 \leq R^2 - H^2\}$$

El vector normal es

$$\vec{n} = \left(\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, 1 \right), \quad \|\mathbf{n}\| = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$$

Como la densidad $\rho = 1$, entonces Masa=área, con lo cual

$$M = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{R^2 - H^2}} \frac{rR dr d\theta}{\sqrt{R^2 - r^2}} = 2\pi R(R - H)$$

Ahora, para cada coordenada del centroide tenemos

$$\bar{x}M = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{R^2 - H^2}} r^2 \cos \theta \cdot \frac{R dr d\theta}{\sqrt{R^2 - r^2}} = 0$$

$$\bar{y}M = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{R^2 - H^2}} r^2 \sin \theta \cdot \frac{R dr d\theta}{\sqrt{R^2 - r^2}} = 0$$

$$\begin{aligned}
 \bar{z}M &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{R^2 - H^2}} \sqrt{R^2 - r^2} \cdot \frac{rR dr d\theta}{\sqrt{R^2 - r^2}} \\
 &= \pi R(R^2 - H^2)
 \end{aligned}$$

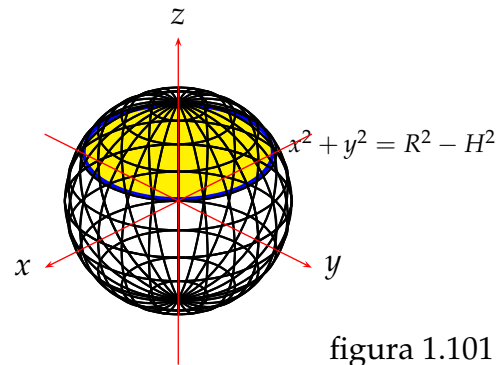


figura 1.101

La determinación de las dos primeras coordenadas del centroide son evidentes. Al despejar de la última ecuación se obtiene $\bar{z} = \frac{1}{2}(R + H)$. En consecuencia, el centroide es el punto de coordenadas $(0, 0, \frac{1}{2}(R + H))$.

1.18 Problemas resueltos

Para hallar el momento de Inercia I_z del casquete esférico, se requiere de la distancia al cuadrado de cualquier punto (x,y,z) en la superficie al eje z . Ella viene dada por $d^2 = x^2 + y^2$. Luego

$$\begin{aligned} I_z &= \int_S d^2(x,y,z) \rho dS = \iint_D (x^2 + y^2) \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy \\ &= 4R \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{R^2 - r^2}} \frac{r^3 dr d\theta}{\sqrt{R^2 - r^2}} = \frac{2}{3} \pi R (2R^3 - 3R^2 H + H^3) \end{aligned}$$

Ejemplo 1.18.43. Hallemos el centro de masa de la porción del cono $x^2 + y^2 = \frac{R^2 z^2}{H^2}$ cortada por el plano $z = H$.

Es claro que $\bar{x} = \bar{y} = 0$. El cono se parametriza

$$\phi(x,y) = (x, y, \frac{H}{R} \sqrt{x^2 + y^2}), \quad D = \{x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

de donde

$$\phi_x = (1, 0, \frac{H}{R} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}), \quad \phi_y = (0, 1, \frac{H}{R} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}})$$

El vector fundamental es entonces

$$\vec{n} = \phi_x \times \phi_y = \left(-\frac{H}{R} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -\frac{H}{R} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1 \right)$$

de lo cual se deduce que su norma $||\vec{n}|| = \frac{1}{R} \sqrt{R^2 + H^2}$. Luego

$$M = \frac{4}{R} \int_0^R \int_0^{\pi/2} r \sqrt{R^2 + H^2} d\theta dr = \pi R \sqrt{R^2 + H^2}$$

Ahora, para la coordenada $\bar{z}$ del centroide tenemos

$$\bar{z}M = \int_S z \rho dS = 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^R \frac{H}{R^2} \sqrt{R^2 + H^2} r^2 dr d\theta = \frac{2}{3} H$$

Se concluye que $(0, 0, \frac{2}{3}h)$ es el centroide.

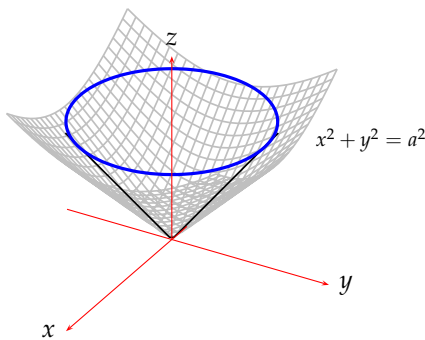


figura 1.102

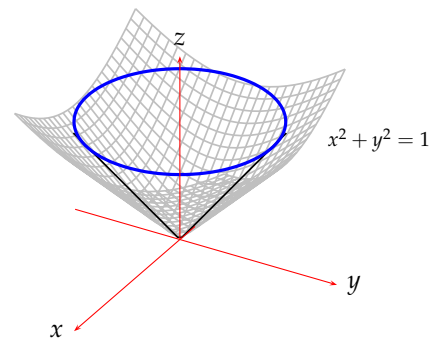


figura 1.103

Ejemplo 1.18.44. Hallemos $\int_S (x^2 dy dz + y^2 dx dz + z^2 dx dy)$, si S es la superficie cerrada que forman la hoja superior del cono $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{b^2}$ con el plano $z = b$.

La figura 1.103 muestra el cono y su intersección con el plano. Se tiene

$$\begin{aligned} \int_S (x^2 dy dz + y^2 dx dz + z^2 dx dy) &= \int_S (x^2, y^2, z^2) \cdot \vec{n} dS = \iiint_V \nabla \cdot \vec{F} dV \\ &= 2 \iiint_V (x + y + z) dV \end{aligned}$$

El cálculo de esta integral se simplifica si usamos las coordenadas cilíndricas

$$x = \text{arcos } \theta, \quad y = b \text{sen } \theta, \quad z = z, \quad J(x, y, z) = abr$$

De este modo, se tiene

$$\begin{aligned} \int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} &= 2ab \int_0^1 \int_{br}^b \int_0^{2\pi} r(\text{arcos } \theta + b \text{sen } \theta + z) d\theta dz dr \\ &= 4\pi ab \int_0^1 \int_{br}^b rz dz dr = \frac{\pi}{2} ab^3 \end{aligned}$$

Ejemplo 1.18.45. Hallemos $\int_S (x^2 + y^2 + z^2)(dy dz + dx dz + dx dy)$, si S es cualquier superficie cerrada.

Como la superficie S es cerrada, se puede usar el teorema de la divergencia, pero previamente se escribe la integral de superficie en la forma

$$\int_S (x^2 + y^2 + z^2)(dy dz + dx dz + dx dy) = \int_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$$

en donde $\mathbf{n} = (dy dz, dx dz, dx dy)$, $\vec{F} = (x^2 + y^2 + z^2, x^2 + y^2 + z^2, x^2 + y^2 + z^2)$. Ahora, por teorema de la divergencia

$$\int_S (x^2 + y^2 + z^2)(dy dz + dx dz + dx dy) = \int_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \int_V \nabla \cdot \vec{F} dV = 2 \int_V (x + y + z) dV$$

Ejemplo 1.18.46. Hallemos $\int_S (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS$, si S es cualquier superficie cerrada.

Como la superficie S es cerrada, el teorema de la divergencia asegura que

$$\int_S (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS = \int_S (x, y, z) \cdot (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) dS$$

Como $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ son los cosenos directores tales que $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$, entonces el vector normal exterior unitario a la superficie S , es $\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$. Luego

$$\int_S (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS = \iiint_V \nabla \cdot (x, y, z) dV = \iiint_V 3 dV = 3V$$

Ejemplo 1.18.47. Hallemos $\int_S (xy dx dy + yz dy dz + xz dx dz)$, si S es cualquier superficie cerrada.

La integral de superficie se escribe en la forma

$$\int_S (xy dx dy + yz dy dz + xz dx dz) = \int_S (yz, xz, xy) \cdot \vec{n} dS$$

Es claro que $\vec{F} = (yz, xz, xy)$. Ahora, por teorema de la divergencia

$$\int_S (xy dx dy + yz dy dz + xz dx dz) = \int_S (yz, xz, xy) \cdot \vec{n} dS = \iiint_V \nabla \cdot \vec{F} dV = \iiint_V 0 dV = 0$$

Ejemplo 1.18.48. Hallemos $\int_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} dy dz + \frac{\partial u}{\partial y} dx dz + \frac{\partial u}{\partial z} dx dy \right)$, S es una superficie cerrada.

La integral de superficie se escribe en la forma

$$\int_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} dy dz + \frac{\partial u}{\partial y} dx dz + \frac{\partial u}{\partial z} dx dy \right) = \int_S \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) \cdot \vec{n} dS$$

En este caso, $\vec{F} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right)$. Ahora, por teorema de la divergencia

$$\int_S \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) \cdot \vec{n} dS = \iiint_V \nabla \cdot \vec{F} dV = \iiint_V \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) dV = \iiint_V \nabla^2 u dV$$

Ejemplo 1.18.49. Hallemos $\int_S (x^3 \cos \alpha + y^3 \cos \beta + z^3 \cos \gamma) dS$, si S es la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Es claro que la superficie es cerrada, y por tanto, el teorema de la divergencia debemos tenerlo presente

$$\begin{aligned} \int_S (x^3 \cos \alpha + y^3 \cos \beta + z^3 \cos \gamma) dS &= \int_S (x^3, y^3, z^3) \cdot d\vec{S} = 3 \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dV \\ &= 3 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^a r^4 \sin \varphi d\theta = \frac{12}{5} \pi a^5 \end{aligned}$$

Ejemplo 1.18.50. Hallemos $\int_S (x dy dz + y dx dz + z dx dy)$, si S es la superficie cerrada que forman el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ y los planos $z = H$, $z = -H$.

En la figura 1.104 se muestra la superficie. El campo $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$. Se tiene

$$\begin{aligned} \int_S (x dy dz + y dx dz + z dx dy) &= \int_S (x, y, z) \cdot \vec{n} dS = 3 \iiint_V dV \\ &= 3 (\text{volumen del cilindro}) = 6\pi a^2 H \end{aligned}$$

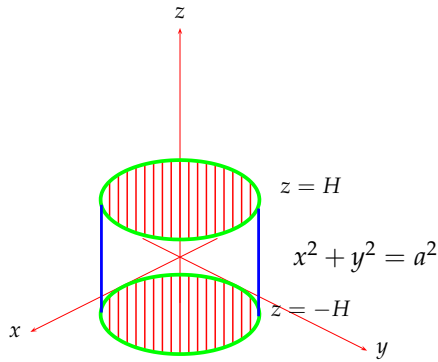


figura 1.104

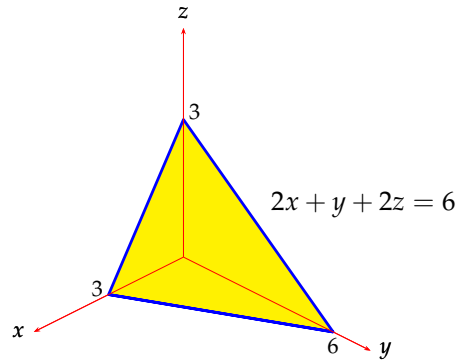


figura 1.105

Ejemplo 1.18.51. Hallemos $\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, si $\vec{F} = (x + y^2, -2x, 2yz)$, S es la superficie del plano $2x + y + 2z = 6$ situada en el primer octante.

Una parametrización para el plano (figura 1.105) es

$$\phi(x, y) = (x, y, 3 - x - \frac{y}{2}), \quad D = \{0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 6 - 2x\}$$

De la parametrización de la superficie tenemos

$$\phi_x = (1, 0, -1), \quad \phi_y = (0, 1, -\frac{1}{2}) \implies \vec{n} = (1, \frac{1}{2}, 1)$$

El campo en la parametrización es

$$\vec{F}(\phi(x, y)) = (x + y^2, -2x, 2y(3 - x - \frac{y}{2}))$$

En consecuencia

$$\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_0^3 \int_0^{6-2x} (x + y^2, -2x, 2y(3 - x - \frac{y}{2})) \cdot (1, \frac{1}{2}, 1) dy dx = 81$$

Ejemplo 1.18.52. Hallemos el flujo del campo $\vec{F} = (y, -z, x^2)$ sobre la superficie $y^2 = 8x$, en el primer octante y acotada por los planos $y = 4$, $z = 6$.

La superficie se puede parametrizar desde los planos xz o yz . Para evitar radicales preferimos el plano yz .

$$\phi(y, z) = (\frac{y^2}{8}, y, z), \quad D = \{(y, z) / 0 \leq y \leq 4, 0 \leq z \leq 6\}$$

De esta parametrización se obtiene

$$\phi_y = (\frac{y}{4}, 1, 0), \quad \phi_z = (0, 0, 1) \implies \vec{n} = (1, -\frac{y}{4}, 0)$$

En la cara cóncava de la superficie, que es la cara externa mirada desde el plano que se parametrizó, este vector es normal exterior allí. Por tanto, si convenimos que se trabaja en esa cara, entonces el

vector normal es el adecuado. En caso contrario se le cambia la orientación y problema resuelto (no olvidar que en superficies orientadas con dos caras, la diferencia en el valor de la integral de superficie de campo vectorial está sólo en el signo). Ahora, el campo en la parametrización es

$$\vec{F}(\phi(x, y)) = (y, -z, \frac{y^4}{64})$$

En consecuencia

$$\text{Flujo} = \int_S (\vec{F} \cdot \vec{n}) dS = \int_0^4 \int_0^6 (y, -z, \frac{y^4}{64}) \cdot (1, -\frac{y}{4}, 0) dz dy = 84$$

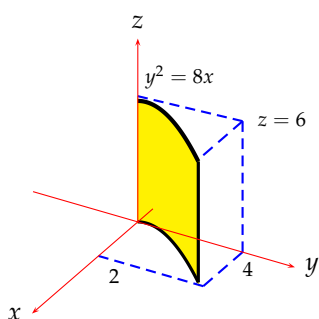


figura 1.106

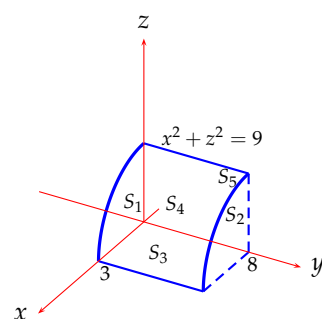


figura 1.107

Ejemplo 1.18.53. Verifiquemos el resultado del problema anterior mediante el teorema de Stokes.

Recordemos que Stokes relaciona la integral del rotacional del campo $\vec{F}$ con la integral de línea del campo $\vec{F}$. Esto es,

$$\int_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{L}$$

En el problema anterior se encontró el flujo de un campo vectorial $\vec{F}$ y no del rotor de $\vec{F}$. Por consiguiente debemos hallar otro campo vectorial, digamos $\vec{G}$ de tal manera que $\nabla \times \vec{G} = \vec{F}$, ya que entonces, en lo que a Stokes respecta, se tiene.

$$\int_{\partial S} \vec{G} \cdot d\vec{L} = \int_S (\nabla \times \vec{G}) \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

La condición para que exista el campo $\vec{G}$ es que $\nabla \cdot \vec{G} = 0$, esto es, que la divergencia del campo sea nula ($\vec{G}$ solenoidal). Es fácil verificar que así ocurre. Ahora, para hallar este campo recurrimos a un resultado constructivo, que es el siguiente.

$$\begin{aligned} G_1 &= \int_0^z F_2(x, y, t) dt - \int_0^y F_3(x, t, 0) dt \\ G_2 &= - \int_0^z F_1(x, y, z) dt \\ G_3 &= 0 \end{aligned}$$

En consecuencia, el campo $\vec{G}$, cuyo rotor es el campo $\vec{F}$ es

$$\vec{G} = \left(-\frac{1}{2}z^2 - x^2y, -yz, 0\right)$$

Ahora que estamos listos con el campo $\vec{G}$ nos preocupamos de determinar la frontera de la superficie, ¡recorrida positivamente! No olvidar que la superficie debe quedar a la izquierda de cualquier caminante que recorra esa frontera. Esta frontera se compone de cuatro (4) trayectorias

$$1. \quad \alpha_1(t) = \left(\frac{t^2}{8}, t, 0\right), \quad 0 \leq t \leq 4$$

Estamos en la cara cóncava de la superficie, luego la parametrización va en sentido positivo.

$$2. \quad \alpha_2(t) = (0, 0, t), \quad 0 \leq t \leq 6$$

Esta parametrización va en sentido positivo

$$3. \quad \alpha_3(t) = \left(\frac{t^2}{8}, t, 6\right), \quad 0 \leq t \leq 4$$

Esta parametrización va en sentido positivo opuesto a como se debe recorrer la curva. Por lo que cambiamos el signo en la integral.

$$4. \quad \alpha_4(t) = (2, 4, t), \quad 0 \leq t \leq 6$$

Esta parametrización va en sentido positivo opuesto a como se debe recorrer la curva. Por lo que cambiamos el signo en la integral.

Los cálculos de los vectores tangentes y de los valores del campo sobre cada trayectoria son:

- $\alpha_1'(t) = \left(\frac{t}{4}, 1, 0\right), \quad \vec{G}(\alpha_1(t)) = \left(-\frac{t^5}{64}, 0, 0\right)$
- $\alpha_2'(t) = (0, 0, 1), \quad \vec{G}(\alpha_2(t)) = \left(-\frac{t^2}{2}, 0, 0\right)$
- $\alpha_3'(t) = \left(\frac{t}{4}, 1, 0\right), \quad \vec{G}(\alpha_3(t)) = \left(-\frac{36}{2} - \frac{t^5}{64}, -6t, 0\right)$
- $\alpha_4'(t) = (0, 0, 1), \quad \vec{G}(\alpha_4(t)) = \left(-\frac{t^2}{2} - 16, -4t, 0\right)$

Con estos datos tenemos.

$$\begin{aligned} \text{Flujo} &= \int_{\alpha_1} \frac{-t^6}{256} dt + \int_{\alpha_2} 0 dt - \int_{\alpha_3} \left(-\frac{t^6}{256} - \frac{21t}{2}\right) dt - \int_{\alpha_4} 0 dt \\ &= \int_0^4 \left(-\frac{t^6}{256} + \frac{21t}{2} + \frac{t^6}{256}\right) dt \\ &= \int_0^4 \frac{21t}{2} dt = 84 \end{aligned}$$

En consecuencia, ¡¡ Grande Stokes !!

Ejemplo 1.18.54. Hallemos el flujo del campo $\vec{F} = (6z, 2x + y, -x)$ a través de la superficie cerrada S acotada por el cilindro $x^2 + y^2 = 9$ y los planos $x = 0, y = 0, z = 0$

En la figura 1.108 se muestra una idea del cilindro. Mostramos dos métodos para determinar el flujo:

■ **Teorema de la divergencia**

Como el volumen del cilindro es $\pi r^2 h$, y en este caso, $h = 8, r = 3$, entonces $V = 72\pi$, de aquí que el volumen en el primer octante sea $V = 18\pi$. En consecuencia

$$\text{Flujo} = \int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = 18\pi$$

■ **Método directo**

La superficie consta de cinco caras, que denotamos por $S_i, 1 \leq i \leq 5$. Para cada una de ellas tenemos

- **Cara S_1 :** El vector normal exterior unitario es $\vec{n} = (0, -1, 0)$. La parametrización de S_1 es

$$\phi(x, z) = (x, 0, z), \quad D = \{0 \leq x \leq 3, 0 \leq z \leq \sqrt{9 - x^2}\}$$

De esta manera

$$\int_{S_1} (\vec{F} \cdot \vec{n}) dS = \int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} (6z, 2x, -x) \cdot (0, -1, 0) dz dx = -18$$

- **Cara S_2 :** El vector normal exterior unitario es $\vec{n} = (0, 1, 0)$. La parametrización de S_2 es

$$\phi(x, z) = (x, 8, z), \quad D = \{0 \leq x \leq 3, 0 \leq z \leq \sqrt{9 - x^2}\}$$

De esta manera

$$\text{Flujo} = \int_{S_2} (\vec{F} \cdot \vec{n}) dS = \int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} (6z, 2x + 8, -x) \cdot (0, 1, 0) dz dx = 18 + 18\pi$$

- **Cara S_3 :** El vector normal exterior unitario es $\vec{n} = (0, 0, -1)$. La parametrización de S_3 es

$$\phi(x, y) = (x, y, 0), \quad D = \{0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 8\}$$

De esta forma

$$\vec{F}(\phi_3(x, y)) = (0, 2x + y, -x)$$

En consecuencia

$$\text{Flujo} = \int_{S_3} (\vec{F} \cdot \vec{n}) dS = \int_0^3 \int_0^8 (0, 2x + y, -x) \cdot (0, 0, -1) dy dx = 36$$

- **Cara S_4 :** El vector normal exterior unitario es $(-1, 0, 0)$. La parametrización de S_4 es

$$\phi(y, z) = (0, y, z), \quad D = \{0 \leq y \leq 8, 0 \leq z \leq 3\}$$

De esta manera $\vec{F}(\phi_4(x, y)) = (6z, y, 0)$. En consecuencia

$$\text{Flujo} = \int_{S_4} (\vec{F} \cdot \vec{n}) dS = \int_0^3 \int_0^8 (6z, y, 0) \cdot (-1, 0, 0) dy dz = -216$$

- **Cara S_5 :** La parametrización de S_5 es

$$\phi(x, y) = (x, y, \sqrt{9 - x^2}), \quad D = \{0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 8\}$$

De esta manera

$$\vec{F}(\phi_5(x, y)) = (6\sqrt{9 - x^2}, 2x + y, -x)$$

y el vector normal exterior se obtiene como sigue

$$\phi_x = (1, 0, -\frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}), \quad \phi_y = (0, 1, 0) \implies \vec{n} = (\frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}, 0, 1)$$

En consecuencia

$$\text{Flujo} = \int_{S_5} (\vec{F} \cdot \vec{n}) dS = \int_0^3 \int_0^8 (6\sqrt{9 - x^2}, 2x + y, -x) \cdot (\frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}, 0, 1) dy dx = 180$$

Sumando los cinco resultados se obtiene el flujo del campo sobre toda la superficie.

$$\text{Flujo} = \int_S (\vec{F} \cdot \vec{n}) dS = -18 + 18 + 18\pi + 36 - 216 + 180 = 18\pi$$

Ejemplo 1.18.55. Hallemos el flujo del campo $\vec{F} = (4xz, xyz^2, 3z)$ sobre la superficie cerrada S que acotan la hoja superior del cono $x^2 + y^2 = z^2$ y el plano $z = 4$.

La superficie es cerrada, de modo que es posible usar el teorema de la divergencia. Además, practiquemos parametrizaciones con el cálculo directo de la integral de superficie.

- **Método 1 Divergencia.**

La divergencia del campo vectorial es $\nabla \cdot \vec{F} = 4z + xz^2 + 3$. Se tiene

$$\int_S (\vec{F} \cdot \vec{n}) dS = \int \int \int_V (4z + xz^2 + 3) dV$$

Usando coordenadas cilíndricas, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $z = z$, la integral se transforma en

$$\iiint_V (4z + xz^2 + 3) dV = \int_r^4 \int_0^{2\pi} \int_0^4 (4z + rz^2 \cos \theta + 3) r dr d\theta dz$$

Como $\int_0^{2\pi} \cos \theta \, d\theta = 0$, entonces

$$\int_S (\vec{F} \cdot \vec{n}) \, dS = 2\pi \int_r^4 \int_0^4 (4z + 3) \, r \, dr \, dz = 320\pi$$

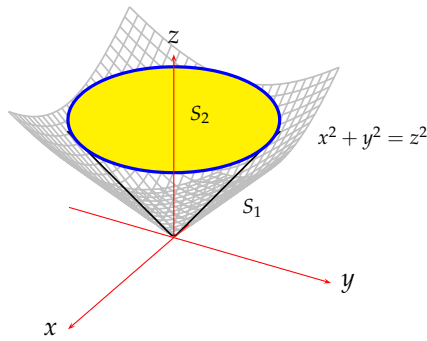


figura 1.108

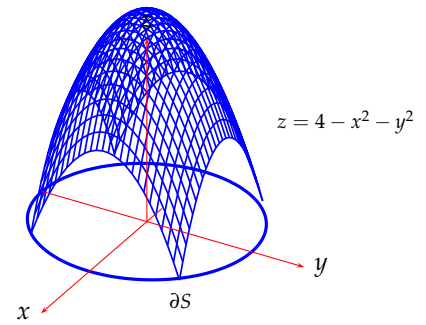


figura 1.109

■ Método 2 Directo

La superficie consta de dos caras, que denotamos por S_1 y S_2 , y que muestra la figura 1.108. Para cada una de ellas tenemos:

■ Cara S_1 : La parametrización de S_1 es

$$\phi(x, y) = (x, y, \sqrt{x^2 + y^2}), \quad D = \{-4 \leq x \leq 4, -\sqrt{16 - x^2} \leq y \leq \sqrt{16 - x^2}\}$$

De esto

$$\phi_x = (1, 0, \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}), \quad \phi_y = (0, 1, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}})$$

lo que hace que un vector normal sea

$$\vec{n} = \phi_x \times \phi_y = (-\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1)$$

Como esta normal apunta hacia adentro, la normal que se necesita es

$$\vec{n} = (\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -1)$$

Ahora bien

$$\vec{F}(\phi(x, y)) = (4x\sqrt{x^2 + y^2}, xy(x^2 + y^2), 3\sqrt{x^2 + y^2})$$

de manera que

$$\vec{F}(\phi(x, y)) \cdot \vec{n} = 4x^2 + xy^2\sqrt{x^2 + y^2} - 3\sqrt{x^2 + y^2}$$

En consecuencia

$$\int_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_D \left(4x^2 + xy^2\sqrt{x^2 + y^2} - 3\sqrt{x^2 + y^2} \right) dy dx = 128\pi$$

■ **Cara S_2 :** La parametrización de S_2 es

$$\phi(x, y) = (x, y, 4), \quad D = \{0 \leq r \leq 4, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

El vector normal exterior y unitario es $\vec{n} = (0, 0, 1)$. El valor del campo en la parametrización es, $\vec{F}(\phi(x, y)) = (16x, 16xy, 12)$, de manera que

$$\int_{S_2} (\vec{F} \cdot \vec{n}) dS = \int_0^{2\pi} \int_0^4 (16x, 16xy, 12) \cdot (0, 0, 1) dr d\theta = 192\pi$$

Finalmente,

$$\int_S (\vec{F} \cdot \vec{n}) dS = \int_{S_1} (\vec{F} \cdot \vec{n}_1) dS_1 + \int_{S_2} (\vec{F} \cdot \vec{n}_2) dS_2 = 320\pi$$

Ejemplo 1.18.56. Hallemos el flujo del rotacional del campo $\vec{F} = (x^2 + y - 4, 3xy, 2xz + z^2)$ sobre la superficie $z = 4 - x^2 - y^2, z > 0$.

La superficie es abierta, tal como muestra la figura 1.109. Mostramos tres formas de cálculo de flujo.

■ **Método I :** Directo

Sea $\vec{G} = \nabla \times \vec{F} = (0, -2z, 3y - 1)$. La superficie S se parametriza

$$\phi(x, y) = (x, y, 4 - x^2 - y^2), \quad D = \{(x, y) / x^2 + y^2 \leq 4\}$$

De aquí se tiene

$$\phi_x = (1, 0, -2x), \quad \phi_y = (0, 1, -2y) \implies \vec{n} = \phi_x \times \phi_y = (2x, 2y, 1)$$

Como $\vec{G}(\phi(x, y)) = (0, -8 + 2x^2 + 2y^2, 3y - 1)$, entonces

$$\begin{aligned} \int_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} &= \int_D \vec{G} \cdot d\vec{S} = \int_D (0, -8 + 2x^2 + 2y^2, 3y - 1) \cdot (2x, 2y, 1) dx dy \\ &= \iint_D (4x^2y + 4y^3 + 3y - 1 - 16y) dx dy \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} (4r^3 \cos^2 \theta \sin \theta + 4r^3 \sin^3 \theta + 3r \sin \theta - 1 - 16r \sin \theta) r d\theta dr \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} (-13r^2 \sin \theta - r + 4r^4 \sin \theta) d\theta dr \\ &= -2\pi \int_0^2 r dr = -4\pi \end{aligned}$$

■ **Método II : Stokes**

La frontera de la superficie $S = \{(x, y, z) / z = 4 - x^2 - y^2\}$ es $\partial S = \{(x, y, z) / x^2 + y^2 = 4, z = 0\}$, cuya parametrización es $x = 2 \cos t$, $y = 2 \sin t$, $z = 0$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Luego

$$\begin{aligned}\int_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} &= \int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{L} = \int_{\partial S} (x^2 + y - 4, 3xy, 2xz + z^2) \cdot (-2\sin t, 2\cos t, 0) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos^2 t \sin t - 4\sin^2 t + 8\sin t) dt = -4 \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt \\ &= -4\pi\end{aligned}$$

■ **Método III : Gauss**

Para hacer uso del teorema de la divergencia debemos “cerrar” la superficie S del paraboloide con la superficie S_1 del disco $\{x^2 + y^2 \leq 4, z = 0\}$. Una vez hecho esto, se debe restar, al flujo total de S , el flujo sobre el disco. Esto es,

$$\int_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div} (\nabla \times \vec{F}) dV - \int_{S_1} (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}$$

Para la integral de volumen tenemos

$$\iiint_V \operatorname{div} (\nabla \times \vec{F}) dV = \iiint_V 0 dV = 0$$

Para calcular la integral sobre S_1 , utilizamos la parametrización

$$\phi(x, y) = (x, y, 0), \quad D = \{(x, y) / x^2 + y^2 \leq 4\}$$

El campo sobre la superficie es $\vec{F}(\phi(x, y)) = (0, 0, 3y - 1)$, y el vector normal unitario exterior $\vec{n} = (0, 0, -1)$. Luego,

$$\begin{aligned}\int_{S_1} (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} &= \iint_D (0, -2z, 3y - 1) \cdot (0, 0, -1) dx dy \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} (1 - 3y) d\theta dr dt \\ &= -4 \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt = -4\pi\end{aligned}$$

En consecuencia

$$\int_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = 0 - 4\pi = -4\pi$$

Ejemplo 1.18.57. Transformemos $\int_{\partial S} y dx + z dy + x dz$ mediante el teorema de Stokes, siendo ∂S la frontera de una superficie abierta S .

Escribimos la integral de línea en la forma

$$\int_{\partial S} y dx + z dy + x dz = \int_{\partial S} (y, z, x) \cdot (dx, dy, dz)$$

Esto permite identificar el campo vectorial asociado a la integral de línea. Para el rotor de este campo se tiene

$$J(\vec{F}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \nabla \times \vec{F} = -(1, 1, 1)$$

Luego,

$$\int_{\partial S} y dx + z dy + x dz = - \int_S (1, 1, 1) d\vec{S}$$

Ejemplo 1.18.58. Calculemos $\int_{\partial S} (y+z)dx + (x+z)dy + (x+y)dz$, si ∂S es la curva intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ con el plano $x + y + z = 0$.

Escribimos la integral de línea en la forma

$$\int_{\partial S} (y+z)dx + (x+z)dy + (x+y)dz = \int_{\partial S} (y+z, x+z, x+y) \cdot (dx, dy, dz)$$

Teniendo identificado al campo vectorial, su rotor es

$$J(\vec{F}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \implies \nabla \times \vec{F} = (0, 0, 0)$$

Luego,

$$\int_{\partial S} (y+z)dx + (x+z)dy + (x+y)dz = \int_S \vec{0} \cdot d\vec{S} = 0$$

Estamos en presencia de un campo gradiente, esto significa que la integral de línea tomada sobre cualquier curva cerrada es cero, en este caso, sobre la curva de intersección de la esfera y el cilindro, cuya parametrización es

$$x = \cos \theta, y = \sin \theta, z = -(\sin \theta + \cos \theta), 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Ejemplo 1.18.59. Hallemos $\int_{\partial S} y dx - x dy$, si ∂S es la frontera del cuadrado $[-1, 1] \times [-1, 1]$ orientada positivamente.

El cálculo se puede hacer en forma directa, parametrizando las cuatro curvas que conforman la frontera del recinto, o bien empleando la alternativa del teorema de Green ("ojo", no era Stokes). Las

condiciones que impone Green son satisfechas, ya que, las funciones $P(x, y) = y$, $Q(x, y) = -x$, son de clase ζ^1 sobre S y su frontera. Se tiene

$$\begin{aligned}\int_{\partial S} y dx - x dy &= \int_{\partial S} P dx + Q dy = \int \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA \\ &= -2 \int \int_D dA = -2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 dx dy = -8\end{aligned}$$

Ejemplo 1.18.60. Calculemos $\int_{\partial S} x^2 y^3 dx + dy + z dz$, si ∂S es la curva de intersección del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ y el plano $z = 0$.

Observar que la integral viene dada en el espacio tridimensional, por lo que Green está “offside”. Escribimos la integral de línea en la forma

$$\int_{\partial S} x^2 y^3 dx + dy + z dz = \int_{\partial S} (x^2 y^3, 1, z) \cdot (dx, dy, dz)$$

Para el rotor del campo vectorial $\vec{F} = (x^2 y^3, 1, z)$ se tiene

$$J(\vec{F}) = \begin{pmatrix} 2xy^3 & 3x^2y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \nabla \times \vec{F} = (0, 0, -3x^2y^2)$$

Luego,

$$\int_{\partial S} x^2 y^3 dx + dy + z dz = \int \int_S (0, 0, -3x^2y^2) \cdot \vec{n} dS$$

Como S es el disco $x^2 + y^2 \leq a^2$, $z = 0$, se considera $\vec{n} = (0, 0, 1)$ vector exterior unitario. Así

$$\begin{aligned}\int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{L} &= -3 \int \int_D x^2 y^2 dA \\ &= -3 \int_0^{2\pi} \int_0^a r^5 \sin^2 \theta \cos^2 \theta dr d\theta \\ &= -\frac{1}{8} \pi a^6\end{aligned}$$

Si el problema hubiera sido puesto en la forma “verificar Stokes”, entonces la integral de línea debe ser calculada, y su valor coincidir con el que hemos obtenido. Veamos esta integral. La curva de intersección se parametriza, $x = a \cos \theta$, $y = a \sin \theta$, $z = 0$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Se tiene

$$\begin{aligned}\int_{\partial S} x^2 y^3 dx + dy + z dz &= \int_{\partial S} [(a^5 \sin^3 \theta \cos^2 \theta)(-a \sin \theta) + a \cos \theta] d\theta \\ &= -a^6 \int_{\partial S} \sin^4 \theta \cos^2 \theta d\theta \\ &= -\frac{1}{8} \pi a^6\end{aligned}$$

Ejemplo 1.18.61. Sea S la superficie del cubo acotado por los planos $x = 0, y = 0, z = 0, x = 1, y = 1, z = 1$. Calculemos $\int_S \vec{F} \times d\vec{S}$ para $\vec{F}(x, y, z) = (y + z, z + x, x + y)$.

El teorema de la divergencia no es aplicable para este tipo de integrales, por lo que hay que efectuar los cálculos “cara a cara”. La cara $y = 0$ se parametriza

$$\phi_1(x, z) = (x, 0, z), \quad \text{con } x \in [0, 1], z \in [0, 1]$$

Además,

$$\vec{F}(\phi_1) = (z, x + z, x) \implies \vec{F}(\phi_1) \times \vec{n}_1 = (x, 0, -z)$$

En resumen, se tiene:

$$\begin{aligned} \vec{n}_1 &= (0, -1, 0), \quad y = 0 \implies \vec{F}(\phi_1) \times \vec{n}_1 = (x, 0, -z) \\ \vec{n}_2 &= (0, 1, 0), \quad y = 1 \implies \vec{F}(\phi_2) \times \vec{n}_2 = (-x - 1, 0, 1 + z) \\ \vec{n}_3 &= (1, 0, 0), \quad x = 1 \implies \vec{F}(\phi_3) \times \vec{n}_3 = (0, 1 + y, -1 - z) \\ \vec{n}_4 &= (-1, 0, 0), \quad x = 0 \implies \vec{F}(\phi_4) \times \vec{n}_4 = (0, -y, z) \\ \vec{n}_5 &= (0, 0, 1), \quad z = 1 \implies \vec{F}(\phi_5) \times \vec{n}_5 = (x + 1, -y - 1, 0) \\ \vec{n}_6 &= (0, 0, -1), \quad z = 0 \implies \vec{F}(\phi_6) \times \vec{n}_6 = (-x, y, 0) \end{aligned}$$

Con estos datos, el valor de cada integral $\int_S (\vec{F} \times \vec{n}_i) \cdot d\vec{S}$ es

- $\int_{S_1} (\vec{F} \times \vec{n}_1) dS = \int_{S_1} (x, 0, -z) dx dz = \int_0^1 \int_0^1 (x, 0, -z) dx dz = (\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2})$
- $\int_{S_2} (\vec{F} \times \vec{n}_2) dS = \int_{S_2} (-x - 1, 0, 1 + z) dx dz = \int_0^1 \int_0^1 (-x - 1, 0, 1 + z) dx dz = (-\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2})$
- $\int_{S_3} (\vec{F} \times \vec{n}_3) dS = \int_{S_3} (0, 1 + y, -1 - z) dy dz = \int_0^1 \int_0^1 (0, 1 + y, -1 - z) dy dz = (0, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$
- $\int_{S_4} (\vec{F} \times \vec{n}_4) dS = \int_{S_4} (0, -y, z) dy dz = \int_0^1 \int_0^1 (0, -y, -z) dy dz = (0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
- $\int_{S_5} (\vec{F} \times \vec{n}_5) dS = \int_{S_5} (x + 1, -y - 1, 0) dx dy = \int_0^1 \int_0^1 (x + 1, -y - 1, 0) dx dy = (\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 0)$
- $\int_{S_6} (\vec{F} \times \vec{n}_6) dS = \int_{S_6} (-x, y, 0) dx dy = \int_0^1 \int_0^1 (-x, y, 0) dx dy = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$

Se concluye que

$$\int_S \vec{F} \times d\vec{S} = \sum_{i=1}^6 \int_{S_i} (\vec{F} \times \vec{n}) \cdot d\vec{S} = \vec{0}$$

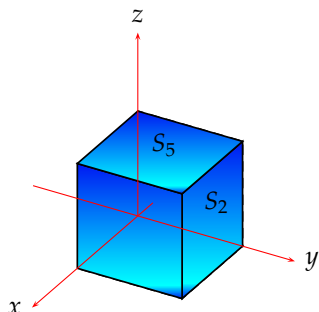


figura 1.110

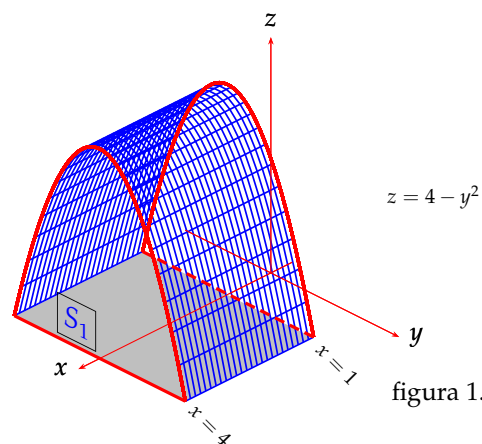


figura 1.111

Ejemplo 1.18.62. Hallemos el flujo del campo $\vec{F}(x, y, z) = (z^2 - x, -xy, 3z)$ sobre la superficie cerrada que acotan $z = 4 - y^2$, $x = 1$, $x = 4$, $z = 0$.

Esta superficie consta de cuatro caras (figura 1.111). Veamos el cálculo directo, es decir, lo que ocurre en cada cara. Posteriormente comprobamos el resultado mediante el teorema de Gauss.

■ **Método I : Directo**

Superficie S_1

La superficie es la del plano $x = 4$ acotada por la parábola $z = 4 - y^2$, la que se parametriza

$$\phi_1(y, z) = (4, y, z), \quad D = \{(y, z) / -2 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 4 - y^2\}$$

El vector normal exterior unitario es $\vec{n} = (1, 0, 0)$. Luego

$$\int_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S}_1 = \int_D \vec{F}(\phi_1) \cdot \vec{n} dy dz = \int_{-2}^2 \int_0^{4-y^2} (z^2 - 4) dz dy = -\frac{128}{35}$$

■ **Superficie S_2**

La superficie es la del plano $z = 0$ acotada por las rectas $x = 1$, $x = 4$, $y = -2$, $y = 2$. Su parametrización es $\phi_2(x, y) = (x, y, 0)$, y el vector normal exterior unitario $\vec{n} = (0, 0, -1)$. Luego

$$\int_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{S}_2 = \iint_D 0 dx dy = 0$$

■ **Superficie S_3**

La superficie es la del plano $x = 1$ acotada por la parábola $z = 4 - y^2$, la que se parametriza como

$$\phi_3(y, z) = (1, y, z), \quad D = \{(y, z) / -2 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 4 - y^2\}$$

El vector normal exterior unitario es $\vec{n} = (-1, 0, 0)$. Luego

$$\int_{S_3} \vec{F} \cdot d\vec{S}_3 = \iint_D \vec{F}(\phi_3) \cdot \vec{n} dy dz = \int_{-2}^2 \int_0^{4-y^2} (x - z^2) dz dy = -\frac{992}{35}$$

■ **Superficie S_4**

La superficie es la del paraboloide $z = 4 - y^2$, la que se parametriza

$$\phi_4(x, y) = (x, y, 4 - y^2), \quad D = \{(x, y) / -2 \leq y \leq 2, 1 \leq x \leq 4\}$$

El vector normal exterior unitario es $\vec{n} = (1, 0, 0) \times (0, 1, -2y) = (0, 2y, 1)$. Luego

$$\int_{S_4} \vec{F} \cdot d\vec{S}_4 = \int_D \vec{F}(\phi_4) \cdot \vec{n} \, dx \, dy = \int_{-2}^2 \int_1^4 (12 - 3y^2 - 2xy^2) \, dx \, dy = 16$$

En consecuencia,

$$\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \sum_1^4 \int_{S_i} \vec{F} \cdot d\vec{S}_i = -\frac{128}{35} - \frac{992}{35} + 16 = -16$$

Método II : Teorema de Gauss

La divergencia del campo vectorial es $\text{div} \vec{F} = 2 - x$. Luego,

$$\begin{aligned} \int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \iiint_{V(S)} \text{div} \vec{F} \, dV = \iiint_{V(S)} (2 - x) \, dV \\ &= \int_{-2}^2 \int_1^4 \int_0^{4-y^2} (2 - x) \, dz \, dx \, dy \\ &= \int_{-2}^2 \int_1^4 (2 - x)(4 - y^2) \, dx \, dy \\ &= -\frac{3}{2} \int_{-2}^2 (4 - y^2) \, dy = -16 \end{aligned}$$

Ejemplo 1.18.63. Hallemos $\int_S z \, dS$, para $S = \{z = 2 - x^2 - y^2, z \geq 0\}$

Mostramos dos formas de cálculo. la primera es reconocer que la superficie viene explicitada $z = f(x, y)$, de donde,

$$dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} \, dx \, dy$$

Teniendo presente que

$$z_x = -2x \implies z_x^2 = 4x^2, \quad z_y = -2y \implies z_y^2 = 4y^2$$

se obtiene

$$dS = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} \, dx \, dy$$

El dominio sobre el cual se efectúa la integración es $D = \{x^2 + y^2 \leq 2\}$. En consecuencia

$$\int_S z \, dS = \iint_D (2 - x^2 - y^2) \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} \, dx \, dy$$

Pasando a coordenadas polares

$$\int_S z dS = \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} (2 - r^2) \sqrt{1 + 4r^2} r d\theta dr = \frac{93\pi}{15}$$

La segunda forma consiste en identificar la superficie y parametrizarla. Se tiene

$$\phi(x, y) = (x, y, 2 - x^2 - y^2), \quad D = \{x^2 + y^2 \leq 2\}$$

Ahora se pasa a polares y se obtiene la misma expresión integral anterior.

Ejemplo 1.18.64. Hallemos $\int_S (y^2 + z^2) dS$, si S es la semiesfera $x = \sqrt{4 - y^2 - z^2}$, $z \geq 0$.

La superficie está explicitada en la forma $x = f(y, z)$. La figura 1.112 muestra la parte de la superficie que corresponde al primer octante y el dominio de la parametrización. Se tiene

$$\phi(y, z) = (\sqrt{4 - y^2 - z^2}, y, z), \quad D = \{(y, z) / y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0\}$$

de esta forma

$$\begin{aligned} \phi_y &= \left(-\frac{y}{\sqrt{4 - y^2 - z^2}}, 1, 0\right) \\ \phi_z &= \left(-\frac{z}{\sqrt{4 - y^2 - z^2}}, 0, 1\right) \end{aligned} \implies \phi_y \times \phi_z = \left(1, \frac{y}{\sqrt{4 - y^2 - z^2}}, \frac{z}{\sqrt{4 - y^2 - z^2}}\right)$$

de aquí que

$$\|\vec{n}\| = \|\phi_y \times \phi_z\| = \frac{2}{\sqrt{4 - y^2 - z^2}}$$

Luego,

$$\int_S (y^2 + z^2) dS = \iint_D (y^2 + z^2) \cdot \frac{2}{\sqrt{4 - y^2 - z^2}} dy dz$$

Pasando a coordenadas polares

$$\int_S (y^2 + z^2) dS = \int_0^2 \int_0^\pi \frac{2r^3}{\sqrt{4 - r^2}} d\theta dr = \frac{32\pi}{3}$$

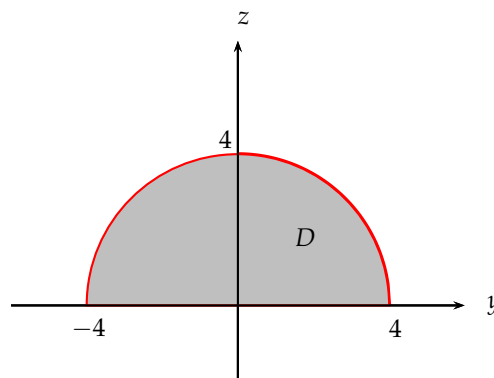
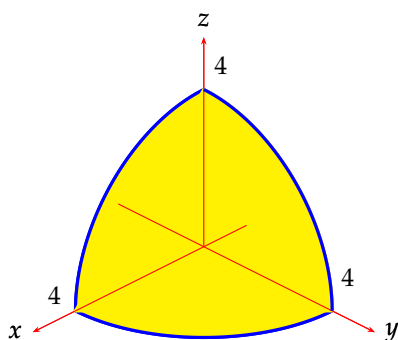


figura 1.112

1.19. Problemas propuestos

- Sea $\vec{F}(x, y) = \left(\frac{xy^3}{x^2+y^6}, \frac{x^2}{x^2+y^2} \right)$. Hallar $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \vec{F}$.
- Demostrar que $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} (xy, x+y, x^2-y) = (2, 3, -1)$
- Sean $f(x, y) = (x^2 + xy + 1, y^2 + 2)$, $g(u, v) = (u + v, 2u, v^2)$. Calcular $(g \circ f)'$
- Hallar la derivada de las funciones:
 - $f(x, y, z) = (xz, y + z)$
 - $f(x, y, z) = (xz, y^2, x^2z)$
 - $f(x, y, z) = \left(\frac{x}{y}, 2y + 1, xz^2 \right)$
 - $f(x, y, z) = (x^2y, ze^x, x + z)$
- Si $f(x, y) = (x^2 + xy + 1, 2 + y^2)$, $g(u, v) = (u + v, 2u, v^2)$. Hallar la derivada de la función $g \circ f$ en el punto $(1, 1)$.
- Si $f(t) = (t, t + 1, t^2) = (x, y, z)$, $g(x, y, z) = (x^2 + 2y + z^2, x^2 - y) = (u, v)$. Hallar la derivada de la función $g \circ f$ en $t = 1$.
- Si $f(u, v) = (u + v, u - v, u^2 - v^2) = (x, y, z)$, $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = w$. Hallar la derivada de la función $F \circ f$ en el punto $(1, 1)$.
- Hallar el gradiente de los siguientes campos escalares:
 - $f(x, y) = 3x^2 + xy^3 + 1$ Resp. $(6x + y^3, 3xy^2)$
 - $f(x, y) = (x^y + e^{xy})$ en $(1, 0)$. Resp. $(0, 1)$
 - $f(x, y, z) = \frac{x+y}{x+z}$ en $(2, 1, 3)$ Resp. $\frac{1}{25}(2, 5, -3)$
- Sean $\vec{r} = (x, y, z)$, $r = ||\vec{r}||$, probar que
 - $\nabla(r^n) = n r^{n-2} \mathbf{r}$
 - $\nabla \cdot (r^n \mathbf{r}) = (n + 3)r^n$
 - $\nabla \times (r^n \mathbf{r}) = \mathbf{0}$
 - $\nabla r = \frac{\mathbf{r}}{r}$
 - $\nabla r^2 = 2 \mathbf{r}$
 - $\nabla \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}$
- Sea $\vec{r} = (x, y, z)$
 - Hallar $\phi(\vec{r})$ que satisfaga $\nabla \phi = \frac{\vec{r}}{r^3}$, $\phi(1) = 0$.
 - Hallar $\nabla \cdot \vec{F}$, si $\vec{F} = \frac{\vec{r}}{r^3}$
- Hallar $\nabla^2 \left(\nabla \left(\frac{\vec{r}}{r^2} \right) \right)$, si $\vec{r} = (x, y, z)$, $r = ||\vec{r}||$.

1.19 Problemas propuestos

12. Sea $\vec{F}(x, y, z) = (ze^x - 2xy, 1 - x^2, z + e^x)$. Hallar ϕ tal que $\nabla\phi = \vec{F}$
13. Sean $f(u, v) = (u + v, u - v, u^2 - v^2) = (x, y, z)$, $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = w$. Hallar $(F \circ f)'$
14. Demostrar que $\nabla(c\psi) = c \nabla\psi$, c es una constante.
15. Demostrar que $\nabla(c_1\psi + c_2\phi) = c_1 \nabla\psi + c_2 \nabla\phi$, con c_1, c_2 constantes.
16. Demostrar que $\nabla(\psi\phi) = \psi \nabla\phi + \phi \nabla\psi$
17. Hallar $\nabla \cdot (r\vec{c})$, $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$, $r = ||\vec{r}||$
18. Demostrar que $\text{div}(\vec{a} + \vec{b}) = \text{div} \vec{a} + \text{div} \vec{b}$
19. Calcular $\text{div}(\vec{a}\psi)$, si $\psi \in \mathbb{R}$, $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$.
20. Probar que el campo $\vec{F} = \left(\frac{y}{x^2+y^2}, -\frac{x}{x^2+y^2}\right)$ es **incompresible** (divergencia 0)
21. Probar que el campo $f(x, y, z) = x^2y^2 + y^2z^2$ verifica $\nabla \times \nabla f = 0$.
22. Verificar que el campo $\vec{F}(x, y, z) = (y \cos x, x \sin y, 0)$ no es conservativo.
23. Sea f campo escalar diferenciable, $\vec{r} = (x, y, z)$, $r = ||\vec{r}||$. Calcular el rotor del campo $\vec{r}f(r)$
24. Sean $\vec{a}$ vector constante, $r = (x, y, z)$. Probar $\text{rot}(\vec{a} \times \vec{r}) = 2\vec{a}$, y que $\nabla \cdot (\vec{a} \times \vec{r}) = 0$.
25. Si $\vec{r} = (x, y, z)$, hallar todos los valores de n para los cuales $\text{div}(r^n \vec{r}) = 0$. Resp. $n = -3$
26. Si $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, verifica que $\nabla r^3 = 3r\vec{r}$
27. Hallar el campo escalar $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\nabla f = 2r^4\vec{r}$
28. Hallar los valores de m y n para que el rotor del campo $\vec{F}(x, y, z) = (xyz)^m(x^n, y^n, z^n)$ sea cero.
Resp $m = 0 \vee n = 1$
29. Hallar $(\vec{F} \times \nabla)\phi$ en $(1, -1, 1)$ si $\vec{F}(x, y, z) = (2z, x^2, x)$, $\phi(x, y, z) = 2x^2y^2z^2$
30. Sean ϕ y φ funciones armónicas. Probar que $\phi + \varphi$ es armónica
31. Si las segundas derivadas de ϕ y φ existen. Probar que:
 - a) $\nabla^2(\psi\varphi) = \psi\nabla^2(\varphi) + 2\nabla\psi \cdot \nabla\varphi + \varphi\nabla^2(\psi)$
 - b) $\nabla\left(\frac{\psi}{\varphi}\right) = \frac{\varphi\nabla(\psi) - \psi\nabla(\varphi)}{\varphi^2}$
32. Probar que, si $\vec{f}$ y $\vec{g}$ son campos irrotacionales, entonces $\vec{f} \times \vec{g}$ es solenoidal.
33. Sean ψ y φ campos escalares de clase ζ^2 . probar que $\nabla\psi \times \nabla\varphi$ es solenoidal

34. La expresión $\phi(\vec{r}) = \frac{ke}{r}$, $r = ||\vec{r}||$ es el **potencial** “in vacuo” en el punto (x, y, z) debido a la carga puntual e situada en el origen, k es una constante física. Hallar el campo eléctrico $\vec{E}$ y probar que éste es **solenoidal**. (Indicación: $\vec{E} = -\nabla\phi$)
35. Hallar divergencia y rotor de los siguientes campos vectoriales:
- a) $\vec{F}(x, y, z) = (xz, -y^2, 2x^2y)$ Resp. $z - 2y, (2x^2, x - 4xy, 0)$
- b) $\vec{F}(x, y, z) = (3x^2y^2z^4, 2x^3yz^4, 4x^3y^2z^3)$ Resp. $6xy^2z^4 + 2x^3z^4 + 12x^3y^2z^2, (0, 0, 0)$
36. Calcular $\int_{(0,1)}^{(1,2)} (x^2 - y) dx + (y^2 + x) dy$ a lo largo de los siguientes caminos:
- a) Segmento que une $(0, 1)$ y $(1, 2)$. Resp. $\frac{5}{3}$
- b) Segmentos que van de $(0, 1)$ a $(1, 1)$ y de $(1, 1)$ a $(1, 2)$. Resp. $\frac{8}{3}$
- c) Parábola de ecuación $x = t - 1$, $y = t^2 - 2t + 2$ Resp. 2
37. Sea $\vec{F}(x, y, z) = (3x - 2y, y + 2z, -x^2)$. Calcular la integral de línea de $\vec{F}$ desde $(0, 0, 0)$ a $(1, 1, 1)$ a lo largo de los siguientes caminos:
- a) Curva de ecuación $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$
- b) Segmentos de $(0, 0, 0)$ a $(0, 1, 0)$, de $(0, 1, 0)$ a $(0, 1, 1)$ y de $(0, 1, 1)$ a $(1, 1, 1)$.
- c) Curva de ecuación $x = z^2$, $z = y^2$ Resp. a) $\frac{23}{15}$, b) 0, c) $\frac{13}{15}$.
38. Se considera el campo de vectores:

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{Axyz}{(x^2 + z)^2}, \frac{3x^2}{x^2 + z}, \frac{3Bx^2y}{(x^2 + z)^2} \right)$$

siendo A y B constantes no nulas. Se pide:

- a) Hallar A y B para que $\vec{F}$ derive de un campo escalar.
- b) Obtener dicho campo escalar.
- c) Calcular $\int_{\alpha} \vec{F}$, si $\alpha(t) = (1, t, 0)$ con $t \in [0, 2]$.

Resp. a) $A = 6$, $B = -1$, b) $\frac{3x^2y}{x^2+z}$, c) 6.

39. Se considera el campo de vectores:

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{x^2 - 2x + z^2}{(x^2 + z^2)^2} e^{x+y}, \frac{1}{x^2 + z^2} e^{x+y}, \frac{-2z}{(x^2 + z^2)^2} e^{x+y} \right)$$

siendo A y B constantes no nulas. Se pide:

- a) Estudiar si deriva de un potencial escalar, calculándolo en caso afirmativo.

1.19 Problemas propuestos

b) Calcular $\int_{\alpha} \vec{F}$, si $\alpha(t) = (1 + \sqrt{t}, 1 - \sqrt{t}, e^t)$ con $t \in [0, 1]$.

Resp. a) $\frac{e^{x+y}}{x^2+z^2}$, b) $\frac{-2e^2-e^4}{2e^2+8}$.

40. Si f es un campo escalar y $\vec{F}$ es un campo vectorial, demostrar que

$$\nabla \circ (f\vec{F}) = (f)(\nabla \circ \vec{F}) + (\nabla f) \circ \vec{F}$$

41. Demostrar que si $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ un el campo vectorial que es igual a ∇f para algún campo escalar, entonces

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

42. Demostrar que los campos vectoriales siguientes no son gradientes.

a) $\vec{F} = e^x \cos y \vec{i} + e^x \sin y \vec{j}$

b) $\vec{F} = \ln y \vec{i} + \frac{y}{x} \vec{j}$

43. Verificar que los siguientes campos son gradiente. Hallar el potencial.

a) $\vec{F} = e^{-x} \cos y \vec{i} + e^{-x} \sin y \vec{j}$

b) $\vec{F} = \ln y \vec{i} + \frac{x}{y} \vec{j}$

44. Hallar un campo escalar f tal que

$$\nabla f = (x + 3y) \vec{i} + (3x + 4y) \vec{j}$$

45. Considerando el campo de fuerzas $\vec{F} = -mk(x, y, z)$, $k > 0$. Hallar los puntos de equilibrio estable (los puntos donde el potencial del campo tiene un mínimo) para una partícula que se mueve sobre la superficie $x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 12$.

46. Demostrar que el campo vectorial $\vec{F} = (3x^2y, 7xy^2)$ no es gradiente.

47. Considerar la curva C parametrizada $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 1$ para $0 \leq t \leq 2\pi$. Graficar la curva y calcular $\int_C z d\vec{L}$. Interpretar el resultado. (diga que podría estar calculando)

48. Considerar la curva C parametrizada $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 1$ para $0 \leq t \leq 3\pi$. Graficar la curva y calcular $\int_C z d\vec{L}$. Diga si la curva es cerrada o no.

49. Calcular $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{L}$ para $\vec{F}(x, y) = (x, y)$ sobre la curva C que corresponde a un círculo entre los puntos $(1, 0)$ al $(0, 1)$ y de la recta que une los puntos $(0, 1)$ con $(2, 1)$. Interpretar el resultado.

50. Calcular $\int_C f d\vec{L}$ para $f(x, y) = xy$ sobre la curva C que está parametrizada $x = 4\cos t$, $y = 4\sin t$, $z = -3$ entre los puntos $(4, 0, -3)$ y $(0, 4, -3)$.

51. Hallar la masa y el centro de masa de un alambre en forma triangular con vértices en $(0,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(1,1,1)$ si la densidad en uno de los lados es 1 y 2 en el otro.
52. Considerar el campo $\vec{F}(x,y) = (x + y^2, 2xy)$
- Probar que este campo es gradiente.
 - Si $\vec{F}$ es campo de fuerzas, hallar el trabajo total que realiza el campo para mover una partícula desde el punto $(0,0)$ al $(1,1)$, sobre la trayectoria $\alpha(t) = (t, t^2)$ y luego desde el punto $(1,1)$ al $(0,0)$, sobre la trayectoria $\alpha(t) = (t, t^3)$
53. Probar que el campo $\vec{F}(x,y) = (x + y, y)$ no es gradiente utilizando dos trayectorias que unan el $(0,0)$ con el $(1,1)$ y que muestren la dependencia del camino de integración. (puede usar las del problema anterior)
54. Hallar el valor de la constante a para que el campo $\vec{F}(x,y) = (x + 4y, ax + y)$ sea gradiente.
Resp. $a = 4$
55. Probar que el campo $\vec{F}(x,y,z) = (3y^2z + ye^x, 6xyz + e^x, 3xy^2)$ es gradiente y hallar su función potencial.
56. Hallar el valor de $\int_{\alpha} xy \, dL$, si α es la trayectoria cerrada que queda en el primer cuadrante, que conforman $x^2 + y^2 = 4$, $x = 0$, $y = 0$.
Resp. $\frac{14}{9}$
57. Probar que el campo $\vec{F}(x,y) = (yz, xz, xy)$ es gradiente. Si $\vec{F}$ se considera campo de fuerzas, hallar el trabajo total que realiza el campo para mover una partícula desde el punto $(1,0,0)$ al $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, \pi/4)$, sobre la trayectoria $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$
58. Sea $F(x,y) = (2xy, x^2)$. Probar que es conservativo, hallar una función potencial y calcular la integral de $\vec{F}$ sobre la curva $\alpha(t) = (2t, t + 1)$, $t \in [1, 3]$.
Resp. 136
59. Sea $F(x,y) = (x^2 + 2y, 2x + y)$. Calcular la integral de línea de este campo sobre la curva $\alpha(t) = (1 - t, t^2)$, $t \in [0, 1]$.
Resp. $\frac{1}{6}$
60. Sea $F(x,y) = (3 + 2xy, x^2 - 3y^2)$. Calcular la integral de línea de este campo sobre la curva $\alpha(t) = (2t - 3, t + 5)$, $t \in [1, 2]$.
Resp. -120
61. Hallar la masa total de un alambre que tiene la forma de la curva $y = \ln x$ entre los puntos de abscisa $x = 1$ y $x = e$, si se sabe que la densidad en cada punto es igual al cuadrado de la abscisa del punto.
Resp. $\frac{1}{3}(1 + e^2)^{3/2} - 2^{3/2}$
62. Hallar las coordenadas del centro de masa del alambre homogéneo que tiene la forma de la curva $|x| + |y| = 1$.
Resp. $(0,0)$
63. Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x,y,z) = x^3yz$. Hallar un campo vectorial $\vec{F}$ tal que $\nabla f = \vec{F}$ y calcular la integral de línea de $\vec{F}$ entre el origen y el punto $(1,1,1)$.
Resp. $\vec{F} = (3x^2yz, x^3z, x^3y)$, $\int \vec{F} = 1$.

1.19 Problemas propuestos

64. Determinar si es gradiente el campo vectorial (si lo es, hallar la potencial):

$$\vec{F}(x, y, z) = (2xyz + z^2 - 2y^2 + 1, x^2z - 4xy, x^2y + 2xz - 2)$$

$$\text{Resp. } f(x, y, z) = x^2yz + xz^2 - 2xy^2 + x - 2z + \text{cte.}$$

65. Hallar las coordenadas del centro de masa del alambre homogéneo que tiene la forma triangular uniendo los puntos $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(1, -1)$

$$\text{Resp. } (1, -\frac{\sqrt{2}}{2(1+\sqrt{2})})$$

66. Considerar el campo de fuerzas $\vec{F}(x, y) = (x + y, x - y)$. Hallar el trabajo que se necesita para transportar una partícula a través del campo desde el punto $(0, 0)$ hasta el $(2, 0)$, en cada caso siguiente:

a) Sobre el eje x .

b) Sobre la trayectoria $(x - 1)^2 + y^2 = 1$, $y \geq 0$

c) Sobre la trayectoria $(x - 1)^2 + y^2 = 1$, $y \leq 0$

67. Verificar el teorema de Green para el campo $\vec{F}(x, y) = (y - x^2e^x, \cos(2y^2) - x)$, si C es el rectángulo con vértices $(1, 1)$, $(0, 1)$, $(1, 3)$, $(0, 3)$, orientada en sentido contrario al reloj.

$$\text{Resp } -4$$

68. Verificar el teorema de Green para el campo $\vec{F}(x, y) = (3x^2y, -x^3)$ sobre la región que acotan $y = x^2$, $y = 1$

69. Sea C la curva cerrada formada por las curvas $y = x^2$, $x = y^2$, probar que

$$\int_C (y + e^{\sqrt{x}}) + (2x + \cos y^2) dy = \frac{1}{3}$$

70. Sea C la curva cerrada formada por las curvas $y = x^2$, $x = y^2$, probar que

$$\int_C (xy + y^2) dx + x^2 dy = -\frac{1}{20}$$

71. Verificar, sobre la región $R = R_1 - (\text{int } R_2 \cup \text{int } R_3)$, el teorema de Green para el campo $\vec{F}(x, y) = (-y, -x)$, en donde:

$$R_1 = \{(x, y) / x^2 + y^2 \leq 16\}$$

$$R_2 = \{(x, y) / (x - 2)^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$R_3 = \{(x, y) / (x + 2)^2 + y^2 \leq 1\}$$

72. Calcular la integral de línea del campo $\vec{F}(x, y) = (10x^4 - y^3, x^3 - 3y^5)$ sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ recorrida positivamente.

73. Calcular la integral de línea del campo $\vec{F}(x, y) = (5x^3 + 4y, 2x - 4y^4)$ sobre la circunferencia $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ recorrida positivamente.
74. $\int_C y \, dx + x^2 \, dy$ donde C es el arco parabólico $y = 4x - x^2$ desde $(4, 0)$ hasta $(1, 3)$. Resp. $\frac{69}{2}$
75. Calcular $\int_\alpha (x^2 + y) \, dx + y^2 \, dy + z^2 \, dz$, si $\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$ para $0 \leq t \leq 1$ Resp. $\frac{4}{3}$
76. Calcular la integral de línea del campo vectorial $F(x, y, z) = (x^2, y^2 + 2, xz + y - 1)$ sobre la trayectoria $\alpha(t) = (t, t^2, t)$ para $0 \leq t \leq 1$. Resp. $\frac{7}{3}$
77. Sea $\alpha(t) = (t, -t, t^2, -t^2)$ para $0 \leq t \leq 1$. Probar que

$$\int_\alpha (x - y) \, dx + (y - z) \, dy + (z - w) \, dz + (w - x) \, dw = 4$$

78. Calcular la integral curvilínea del campo $\vec{F}(x, y, z) = (3x^2 + 6y, -14yz, 20xz^2)$ a lo largo de:
- a) la recta que une $(0, 0, 0)$ con $(1, 0, 0)$ Resp. 1
 - b) la recta que une $(1, 0, 0)$ con $(1, 1, 0)$ Resp. 0
 - c) la recta que une $(1, 1, 0)$ con $(1, 1, 1)$ Resp. $\frac{20}{3}$
 - d) la recta que une los puntos $(0, 0, 0)$ y $(1, 1, 1)$ Resp. $\frac{13}{3}$
79. Calcular la circulación del campo $\vec{F}(x, y, z) = (x^2y, z, 3y)$ a lo largo del segmento de recta comprendida entre los puntos $A(2, 1, 3)$ y $B(4, 1, 5)$. Resp. $\frac{74}{3}$
80. Calcular la circulación del campo $\vec{F}(x, y, z) = (3xy, -y^2, 0)$ a lo largo de la curva C del plano xy cuya ecuación es $y = 2x^2$, entre los puntos $A(0, 0)$ y $B(1, 2)$. Resp. $-\frac{7}{6}$
81. Calcular la integral curvilínea del campo $\vec{F}(x, y, z) = (3x^2 + 6y, -14yz, 20xz^2)$ desde el punto $(0, 0, 0)$ hasta $(1, 1, 1)$ a lo largo de la trayectoria $\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$. Resp. 5
82. Una partícula sometida a la fuerza $\vec{F} = (x + z, y + z, x + y)$ recorre en sentido antihorario el circuito cuya parte superior es una media elipse de semiejes $a = 2, b = 1$. Determinar el trabajo realizado sobre la partícula. Resp. 0
83. Calcular el trabajo realizado al desplazar una partícula en el campo de fuerzas dado por $\vec{F} = (3x^2, 2xz - y, z)$ a lo largo de la curva definida por $\{x^2 = 4y, 3x^3 = 8z\}$ desde $x = 0$ hasta $x = 2$. Resp. 16
84. Calcular el trabajo realizado por $\vec{F}(x, y, z) = (yz, xz, xy)$ a lo largo de $\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$ $1 \leq t \leq 2$ Resp. 63
85. Dada la curva $\alpha(t) = (\ln(3t^2 + 1), \cos^5(\pi t))$, $t \in [0, 1]$. Probar que

$$\int_\alpha y \, dx + x \, dy = -\ln 4$$

1.19 Problemas propuestos

86. Sean $\alpha_1(t) = (t, t^2)$ y $\alpha_2(t) = (t^2, t)$ trayectorias con $t \in [0, 1]$. Considerar las integrales

$$I_1 = \int_{\alpha_1} (2x + y)^2 dx - (x - 2y)^2 dy, \quad I_2 = \int_{\alpha_2} (2x + y)^2 dx - (x - 2y)^2 dy$$

Usar Green para calcular $I_1 - I_2$

87. Hallar el rotacional y la divergencia de los siguientes campos vectoriales.

- a) $\vec{F}(x, y, z) = (x^2 + yz, y^2 + xz, z^2 + xy)$
- b) $\vec{F}(x, y, z) = (2x - 3y, 3x - z, y - 2x)$
- c) $\vec{F}(x, y, z) = (z + \operatorname{sen} y, -z + \cos y, 0)$
- d) $\vec{F}(x, y, z) = (e^{xy}, \cos xy, \cos xz^2)$
- e) $\vec{F}(x, y, z) = (x^2 \operatorname{sen} y, y^2 \operatorname{sen} xz, xy \operatorname{sen} \cos z)$

88. Sea $\vec{F}(x, y) = (1, kx)$, con k una constante real y α la trayectoria de la circunferencia $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ recorrida positivamente. Calcular la circulación del campo alrededor de α . Si se coloca un "corcho" flotando en una corriente líquida cuyo campo de velocidades está descrito por el campo $\vec{F}$, describir el comportamiento del "corcho" de acuerdo con el signo de k .

89. Sea $\vec{F}(x, y) = (1, \frac{x^2}{4})$ y α la trayectoria de la circunferencia $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ recorrida positivamente. Calcular la circulación del campo alrededor de α . Si se coloca un "corcho" flotando en una corriente líquida cuyo campo de velocidades está descrito por el campo $\vec{F}$, describir el comportamiento del "corcho" de acuerdo con signo de a .

90. Para un campo vectorial continuo $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ y para una curva cerrada simple α de clase ζ^1 , se llama **rotación** de $\vec{F}$ alrededor de α a la expresión

$$\begin{aligned} (\nabla \times \vec{F})(\alpha) &= \left(\frac{1}{\text{área contenida por } \alpha} \right) \cdot \left(\text{circulación de } \vec{F} \text{ en torno a } \alpha \right) \\ &= \left(\frac{1}{\text{área contenida por } \alpha} \right) \cdot \left(\int_{\alpha} \vec{F} \cdot d\vec{L} \right) \end{aligned}$$

En los ejercicios siguientes, calcular la rotación del campo $\vec{F}$ sobre la curva indicada:

- a) $\vec{F}(x, y) = (-y, x)$, alrededor del círculo $x^2 + y^2 = 1$ recorrido en sentido antihorario
- b) $\vec{F}(x, y) = (x^2, xy)$, alrededor del triángulo de vértices $(0, 0)$, $(3, 0)$ y $(2, 2)$ recorrido en sentido antihorario

91. Considerar el campo $\vec{F}(x, y) = (-x, -y)$ y la región S del plano que acotan $x + y \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. Hallar el flujo a través de S . Interpretar el signo del resultado Resp. -1

92. Verificar el teorema de la divergencia en el plano para:

- a) $\vec{F}(x, y) = (3x + y, 2y)$, $\alpha(t) = (3\cos t, 3\sin t)$
 b) $\vec{F}(x, y) = (x^2, y^2)$, α es el cuadrado $|x| + |y| = 1$ recorrido positivamente.
93. Calcular el flujo del campo $\vec{F}$ a través de la frontera de la región que se indica.
- a) $\vec{F}(x, y) = (3x - y^2, 5x^3 + 2y)$, $R = \{(x, y) / 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x\}$
 b) $\vec{F}(x, y) = (x^3 + y^3, 2x^3 + y^3)$, $R = \{(x, y) / 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$
94. Parametrizar la superficie del plano $x + y + z = 4$ que se encuentra por encima del rectángulo $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1$. Graficar la superficie.
95. Parametrizar la superficie del paraboloide $z = x^2 + y^2$ que se encuentra en el primer octante y tal que $4 \leq x^2 + y^2 \leq 9$. Graficar la superficie.
96. Parametrizar las superficies siguientes
- a) $S = \{x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\}$
 b) $S = \{x^2 + y^2 - z^2 = 0, 1 \leq z \leq 4, x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\}$
 c) $S = \{y - z = 0, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 1, y + z = 0, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$
 d) $S = \{(x, y, z) / \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, a, b, c > 0\}$
 e) $S = \{(x, y, z) / x^2 + 4y^2 = 1\}$
 f) $S = \{(x, y, z) / 2x + y + 4z = 5\}$
 g) $S = \{(x, y, z) / x^2 + y^2 = 2x\}$
97. Bosquejar las siguientes superficies parametrizadas
- a) $\phi(u, v) = (1, u, v), 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1$
 b) $\phi(u, v) = (v\cos u, v\sin u, v), 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq h, h \geq 0$
 c) $\phi(u, v) = (v\cos u, v\sin u, \frac{1}{v^2})$
98. Hallar el área de la porción del paraboloide $z = x^2 + y^2$ que se encuentra bajo el plano $z = 9$.
 Resp. $\frac{\pi}{6}(37\sqrt{37} - 1)$
99. Hallar el área de la porción del paraboloide (superficie) $z = x^2 + y^2$ que se encuentra entre los planos $z = 0$ y $z = 1$.
 Resp. $\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5} - 1)$
100. Hallar el área de la porción de la superficie $z = x^2 + (y - 1)^2$ comprendida entre los planos $z = 1$ y $z = 4$.
 Resp. $\frac{\pi}{6}(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5})$
101. Calcular el área de las siguientes superficies

1.19 Problemas propuestos

a) $\phi(u, v) = (u, v, 1 - u - v)$, $u \geq 0$, $v \geq 0$, $u + v \leq 1$

b) $\phi(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$, $u^2 + v^2 \leq 4$

c) $\phi(u, v) = (u, v, \frac{1}{2}u^2)$, $0 \leq v \leq u$, $u \leq 2$.

d) $\phi(u, v) = (\cos u, v, \sin u)$, $u^2 + v^2 \leq 1$.

102. Calcular la integral del campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ a través de la superficie lateral del paraboloide $x^2 + y^2 = 2az$, con $0 \leq z \leq 2a$. Resp. $-4\pi a^3$

103. Calcular $\int_S f(x, y, z) dS$ para los campos escalares y superficie S que se indica.

a) $f(x, y, z) = x$, $\psi(u, v) = (u, v, u^2 + v)$, $0 \leq u \leq 1$, $u^2 \leq v \leq 1$.

b) $f(x, y, z) = xy$, $\psi(u, v) = (u - v, u + v, 2u + v + 1)$, $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq u$.

c) $f(x, y, z) = x^2 + y^2$, $\psi(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$, $u^2 + v^2 \leq 1$

d) $f(x, y, z) = y$, $\psi(u, v) = (u, v, 1 - u^2)$, $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq \sqrt{u}$

e) $f(x, y, z) = x^2 + y^2$, S es la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 1$

f) $f(x, y, z) = xy$, S es la intersección del paraboloide $z = x^2 + y^2$ con el cilindro $x^2 + y^2 \leq 2x$, $y \geq 0$.

g) $f(x, y, z) = x$, S es la superficie $z^2 = x^2 + y^2$ entre los planos $z = 1$ y $z = 3$.

h) $f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2}$, S es la parte de la superficie cilíndrica $z^2 + x^2 = 1$ que se encuentra dentro del cono $z \leq \sqrt{x^2 + y^2}$.

104. Calcular el centro de masa de las superficies que se indican

a) $\phi(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$, $u^2 + v^2 \leq 1$, $\rho = 1$

b) S es la parte de la superficie $z^2 = x^2 + y^2$ entre los planos $z = 1$ y $z = 2$.

105. Calcular la masa de las superficie S siguientes

a) S es la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$, $\rho(x, y, z) = z$.

b) S es la superficie $z^2 = x^2 + y^2$, $1 \leq z \leq 2$, $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

c) $S = \phi(u, v) = (u, v, 1 - u^2)$, $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 1$, $\rho(x, y, z) = 2$.

106. Calcular $\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$ para los campos y superficies que se indican:

a) $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$, S es la superficie $\phi(u, v) = (u - v, u + v, uv)$, $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 2$

b) $\vec{F}(x, y, z) = (x^2, 0, 0)$, $\psi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v)$, $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 2\pi$

107. Sea $T(x, y, z) = x^2 + y^2$ para $x^2 + y^2 \leq 4$ la función temperatura en el punto (x, y, z) de una región de $\mathbb{R}^3$. Hallar el flujo total de calor a través de la superficie cilíndrica $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leq z \leq 1$.

108. Hallar el flujo del campo $\vec{F} = (x, y, z)$ a través de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ entre los planos $z = 1$ y $z = 2$. Resp. 8π
109. Hallar el centro de masa de la superficie de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ que se encuentra sobre el plano $z = 1$.
110. Hallar el centro de gravedad del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \leq x^2 + y^2 \leq 9$.
111. Sea S la frontera de V . Verificar el Teorema de la divergencia si:
- $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq z \leq 1 - x - y\}$, $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$.
 - $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 \leq 1, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$, $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$.
 - $V = \{x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$, $\vec{F}(x, y, z) = (xy, -1, z^2)$.
112. Hallar el flujo del campo $\vec{F}$ sobre la superficie cerrada que se indica:
- La esfera de radio 4 y centro $(1, 1, 1)$, $\vec{F} = (x, y, -z)$
 - El cilindro $x^2 + y^2 = 4$, $0 \leq z \leq 2$, $\vec{F} = (4x, -6y, 1)$
 - La superficie que acota el hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$, junto con la tapa inferior $x^2 + y^2 \leq 1$ en el plano xy , $\vec{F} = (4x, -z, x)$
113. Verificar el Teorema de Stokes para el campo y superficie indicada
- $\vec{F}(x, y, z) = (z - y, x - z, x - y)$, $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$
 - $\vec{F}(x, y, z) = (z - y, x - z, x - y)$, $z = 4 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$
 - $\vec{F}(x, y, z) = (xyz, y, z)$, $3x + 4y + 2z = 12$, $x, y, z \geq 0$
 - $\vec{F}(x, y, z) = (-y, x, -xyz)$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \leq z < 3$
114. Hallar la circulación de $\vec{F} = (x - y, x^2y, axz)$ alrededor del círculo $x^2 + y^2 = 1$
115. Un flujo de fluido tiene como vector densidad de flujo $\vec{F}(x, y, z) = (x, 2x + y, z)$. Sea S el hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$, con $\vec{n}$ normal unitaria orientada hacia el exterior de la esfera. Calcular la masa de fluido que atraviesa S por unidad de tiempo en el sentido de la normal $\vec{n}$. Resp. $\frac{2\pi}{3}$
116. Calcular el flujo del campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, 2z)$, a través de la superficie cerrada S que limita el sólido $\{0 \leq z \leq 4 - 2x^2 - 2y^2\}$. Resp. 16π
117. Calcular la integral $\int_C y^2 dx + xy dy + xz dz$, siendo C la curva intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 2y$ con el plano $y = z$. Resp. 0 por Stokes.
118. Probar, aplicando el teorema de Stokes, que

$$\int_C (y - 1)dx + z^2 dy + y dz, \quad C \{x^2 + 4y^2 = 1, z = x^2 + y^2\} = -\pi$$

1.20 Problemas adicionales

119. Probar, aplicando el teorema de Stokes, que

$$\int_C (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz, \quad C \{x^2 + y^2 = \frac{z^2}{2}, z = y+1\} = -\pi\sqrt{2}$$

120. Calcular la integral $\int_C 2yz^2 dx + xz^2 dy + 3xyz dz$, siendo C la curva intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y el paraboloide $x^2 + y^2 = 3z$.

121. Calcular el trabajo realizado (Stokes) por la fuerza

$$\vec{F}(x, y, z) = (y-z, z-x, x-y)$$

para trasladar un punto material sobre la curva cerrada α dada por la intersección de las superficies $\{x^2 + y^2 = 4, x + 2z = 2\}$. Resp.

-12π

122. Calcular el flujo del campo $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ a través de la superficie del sólido limitado por $x^2 + y^2 = 9, z = 0, yz = 3$. Resp. 81π

123. Sea $\vec{F}(x, y, z) = (xz, yz, -z^2)$. Calcular $\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, siendo S la cara externa del paraboloide $x^2 + y^2 = 3z$, entre $z = 0$ y $z = 1$. Resp. -3π

124. Hallar el flujo del campo $\vec{F}(x, y, z) = (x^3, y^3, z^3)$ a través de la superficie del cono $x^2 + y^2 = z^2$, con $0 \leq z \leq H$. Resp. $\frac{\pi}{10}H^5$

125. Utilizando el teorema de Stokes probar que la integral curvilínea

$$\int_C (2x + y - z)dx + (2x + z)dy + (2x - y - z)dz = \frac{5\pi}{\sqrt{2}}$$

siendo C la curva de intersección de las superficies $\{4x^2 + 4y^2 + z^2 = 4, 2x - z = 0\}$

1.20. Problemas adicionales

1. Probar que la longitud de la curva determinada por las ecuaciones $\{x^3 = 3a^2y, 2xz = a^2\}$, comprendida entre los planos $y = \frac{a}{3}$ e $y = 9a$ es $9a$.

2. Calcular el trabajo realizado por el campo $\vec{F}(x, y, z) = (y, 0, 0)$ a lo largo de la elipse $x^2 + 2y^2 = 7$ desde $x = -\sqrt{7}$ hasta $x = \sqrt{7}$, por los dos caminos posibles. Resp. $\frac{7\pi\sqrt{2}}{4}$ y $-\frac{7\pi\sqrt{2}}{4}$

3. Calcular la integral de superficie de la función $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{4z+1}}$ sobre el trozo del primer octante del paraboloide $z = x^2 + y^2$ que es interior al cilindro $x^2 + y^2 = y$. Resp. $\frac{\pi}{8}$

4. Calcular el área del trozo de paraboloide de ecuaciones paramétricas $\vec{r}(u, v) = (v\cos u, v\sin u, v^2)$ para $0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}$ y $0 \leq v \leq \sqrt{u}$. Resp. $\frac{1}{12}[(2\pi + 1)^{5/2} - 1] - \frac{\pi}{24}$

5. Hallar el área del trozo, en el primer octante, del paraboloide $x = y^2 + z^2$ verificando $x \leq 4y^2$ y $x \leq 1$. Resp. $\frac{\pi}{72}(5\sqrt{5} - 1)$
6. Calcular la integral $\int_S dydz + x^2 dzdx$ siendo S el trozo de plano $z = y$ interior al paraboloide $3y = x^2 + z^2$. Resp. $-\frac{81\pi}{8}$
7. Calcular la integral $\int_S x dydz + y dzdx + z dxdy$ siendo S el trozo de cilindro $x^2 + y^2 = 1$ para $0 \leq z \leq 1$. Resp. 2π
8. Hallar el área de la superficie $z^2 = 2xy$ comprendida entre los planos $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$. Resp. $\frac{2\sqrt{2}}{3}(\sqrt{a^3b} + \sqrt{ab^3})$
9. Calcular el flujo del campo $\vec{F}$ a través de la superficie S :
- $\vec{F}(x, y, z) = (-6x, 0, -6z)$, $S = \{x^2 + z^2 = 2\}$, $0 \leq y \leq 2$
 - $\vec{F}(x, y, z) = (-1, 0, 0)$, $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, $0 \leq y \leq 2$
 - $\vec{F}(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$, $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\} \cup \{x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\}$
- Resp. $-48\pi, 0, 8\pi$
10. Calcular el flujo del campo $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ en la región del paraboloide $x^2 + y^2 = az$ que queda dentro del cilindro de ecuación $x^2 + y^2 = ax$. Resp. $\frac{3\pi a^3}{32}$
11. Calcular el flujo del campo $\vec{F}(x, y, z) = (0, 0, 5x^2)$ a través del paraboloide hiperbólico $x^2 - 3y^2 = z$, $z \leq 0$, $-1 < y < 0$. Resp. $\frac{5}{2}\sqrt{3}$
12. Calcular el flujo del campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (x^2y, z^8, -2xy)$ a través del cubo de vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 1, 1)$. Resp. $\frac{1}{2}$
13. Sea $\vec{F}(x, y, z) = (2yz, 2 - x + 3y, x^2 + z)$. Calcular el flujo del rotacional de $\vec{F}$ a través del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$, $0 \leq z \leq 1$. Resp. $2\pi a^2$
14. Verificar el teorema de Stokes para el campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (3y, 4z, -6x)$ y la parte de la superficie paraboloidal $z = 9 - x^2 - y^2$ ubicada sobre el plano xy y orientada hacia arriba. Resp. -27π
15. Usar teorema de Stokes para evaluar la integral del rotacional del campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (xyz, xy, x^2yz)$ sobre el dominio S consistente en la unión de la parte superior y de las cuatro caras laterales (pero no el fondo) del cubo con vértices $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$, orientado hacia afuera. Resp. 0
16. Calcular la circulación del campo de velocidades del fluido $\vec{F}(x, y, z) = (\arctg(x^2), 3x, e^{3z}tgz)$ a lo largo de la intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ con el cilindro $x^2 + y^2 = 1$, con $z > 0$. Resp. 3π

1.20 Problemas adicionales

17. Calcular el flujo del campo vectorial $\vec{F} = 2z\vec{i} - 2\vec{j} + y\vec{k}$ a través de un trozo del plano de ecuación $y + 2z = 4$ limitado por los planos $x = 0, x = 3, z = 0, y = 0$. Resp. 12
18. Calcular la circulación de $\vec{F} = (x^2, xy, xyz)$ entre los puntos $(0, 0, 0)$ y $(2, 2, 2)$ a lo largo de los siguientes caminos:
- la recta que une ambos puntos. Resp. $\frac{28}{3}$
 - el formado por los segmentos $(0, 0, 0) \rightarrow (2, 0, 0) \rightarrow (2, 2, 0) \rightarrow (2, 2, 2)$. Resp. $\frac{44}{3}$.
19. Calcular el flujo del vector $\vec{F} = (2x^2, 3xy^2z, 5xyz)$ a través de la superficie del paralelepípedo formado por los planos $x = 0, x = 2, y = 0, y = 1, z = 0$ y $z = 3$. Realizar el cálculo del flujo como suma de los flujos a través de cada cara y mediante la aplicación del Teorema de Gauss. Resp. 66
20. Calcular el flujo del vector $\vec{F} = (x^2, yz, y^2)$ a través de la superficie que delimita al cilindro $x^2 + y^2 \leq 4$ para $0 \leq z \leq 3$. Obtener el resultado mediante cálculo directo y mediante el Teorema de Gauss. Resp. 18π .
21. Dado el paralelepípedo delimitado por los planos $x = 0, x = 2, y = 0, y = 3, z = 0$ y $z = 5$, calcular el flujo del rotacional del campo vectorial $\vec{F} = x^2y\vec{i} + xy\vec{j} + xy\vec{k}$ que atraviesa, en sentido saliente, la superficie formada por todas las caras de dicho cuerpo excepto la que yace en el plano $z = 0$. Resp. 1.
22. Calcular la circulación del campo $\vec{F}$ a lo largo de la curva:
- $\vec{F}(x, y) = (-y, x), \alpha(t) = (\cos t, \sin t), 0 < t < 2\pi$
 - $\vec{F}(x, y, z) = (yz, xz, xy), \alpha$ une los segmentos $(1, 0, 0) \rightarrow (0, 1, 0) \rightarrow (0, 0, 1) \rightarrow (1, 0, 0)$
 - $\vec{F}(x, y, z) = (2xyz, x^2z, x^2y), \alpha(t)$ es la recta que une $(1, 1, 1)$ con $(1, 2, 4)$
 - $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z), \alpha(t) = (t, t^2, 0), -1 < t < 2$. Resp. $2\pi, 0, 7, 9$
23. Sean $\vec{F}(x, y, z) = xy\vec{i} + yz\vec{j} + zx\vec{k}$ y C el triángulo que une los puntos $(1, 0, 0), (0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$, orientado anti-horario desde arriba. Calcular la circulación de $\vec{F}$ a lo largo de C . Resp. $-\frac{1}{2}$
24. Calcular la circulación del campo vectorial $\vec{F} = x^2\vec{i} + xy\vec{j} + xyz\vec{k}$ entre los puntos $O(0, 0, 0)$ y $Q(4, 0, 0)$:
- según la recta que une ambos puntos
 - a lo largo del segmento OB , con $B(2, 2\sqrt{3}, 0)$, más el arco de circunferencia BQ centrado en O . Resp. $\frac{32}{3}, 0$
25. Una partícula se encuentra sometida a la fuerza $\vec{F} = (3x^2 + 6x)\vec{i} - 14yz\vec{j} + 20xz^2\vec{k}$. Calcular el trabajo realizado por dicha fuerza cuando la partícula se traslada desde el punto $(0, 0, 0)$ hasta el punto $A(1, 1, 1)$ por los siguientes caminos:

- a) A lo largo de la curva $x = t, y = t^2, z = t^3$
 b) A lo largo de la recta $x = y = z$.
 c) A lo largo del eje OX hasta $(1, 0, 0)$, desde $(1, 0, 0)$ paralelamente al eje OY hasta el punto $(1, 1, 0)$, desde $(1, 1, 0)$ paralelamente al eje OZ hasta $A(1, 1, 1)$. Resp. 6, $\frac{13}{3}$, $\frac{32}{3}$

26. Probar que el flujo hacia afuera de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ es 4π , si

$$\vec{F}(x, y, z) = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

27. Se considera el campo de velocidades de un fluido dado por $\vec{F}(x, y, z) = (-x + 3, x^2, z)$ y la superficie S dada por $S = \{z^2 = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq 2\}$. Calcular el flujo de $\vec{F}$ a través de S , con orientación exterior:

- a) directamente.
 b) usando el Teorema de Gauss.
 c) usando el Teorema de Stokes. -8π

28. Calcular la circulación del campo vectorial $\vec{F} = (Ky, 0, 0)$ a lo largo del cuadrado definido por los vértices $(-a, a, 0)$, $(a, a, 0)$, $(a, -a, 0)$, $(-a, -a, 0)$, en el sentido definido por el orden en que se mencionan. Resp. $4a^2K$

29. Usar el teorema de Stokes para evaluar $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{L}$, donde $\vec{F}(x, y, z) = (2z, 8x - 3y, 3x + 4y)$ y C es la curva triangular de vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 2)$ con orientación horaria cuando es vista desde el origen de coordenadas. Resp. 7

30. Sea $\vec{F} = (2xyz + \operatorname{sen} x, x^2z, x^2y)$.

- a) Probar que $\vec{F}$ es conservativo.
 b) Hallar un potencial de $\vec{F}$. Resp. $f(x, y, z) = x^2yz - \cos x$

31. Demuestre que, en la lista siguiente, la integral de línea es independiente de la trayectoria y evalúe después la integral, escogiendo una trayectoria conveniente, o, si lo prefiere, encontrando una función potencial f .

- a) $\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} (6xy^3 + 2z^2)dx + 9x^2y^2dy + (4xz + 1)dz$ Resp. 6, $f(x, y, z) = 3x^2y^3 + 2xz^2 + z$
 b) $\int_{(0,1,0)}^{(1,1,1)} (yz + 1)dx + (xz + 1)dy + (xy + 1)dz$. Resp. 2, $f(x, y, z) = x + y + z + xyz$
 c) $\int_{(0,0,0)}^{(-1,0,0)} (y + z)dx + (x + z)dy + (x + y)dz$. Resp. $-\pi$, $f(x, y, z) = xy + xz + yz$

32. Sea $\vec{F}(x, y, z) = (P, Q, R)$, en donde:

$$R(x, y, z) = 2yz + xh(z)$$

$$Q(x, y, z) = -yx^2 - y + g(x) + z^2$$

$$P(x, y, z) = y^2g(x) - x^3y^2 - xy^2 + 3x^2y + h(z)$$

- a) Determinar las funciones reales $g(x)$ y $h(z)$ para que el campo sea conservativo.
 b) Usando las funciones g y h calcular una función potencial de $\vec{F}$.

$$\text{Resp. } g(x) = x^3, h(z) = e^z, f(x, y, z) = x^3y - \frac{1}{2}x^2y^2 + xe^z + z^2y - \frac{1}{2}y^2 + c$$

33. Sea $\vec{F} = (ax + by^2, \text{senz} + axy, y\cos z)$.

- a) Obtener todos los pares de números reales a, b tales que $\vec{F}$ sea conservativo
 b) Usando el resultado anterior, hallar un potencial para $\vec{F}$.
 c) Para valores de a, b que hacen $\vec{F}$ conservativo, calcular la integral $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{L}$ donde C es la curva que consta de un segmento de recta que une $(0, 1, 0)$ con $(0, 0, 1)$ y otro segmento que une $(0, 0, 1)$ con $(0, 2, 1)$.

$$\text{Resp. } a = 2b, \quad f(x, y, z) = bx^2 + bxy^2 + y\text{senz} + c, \quad 2\text{sen}1$$

34. Sea $\vec{F}(x, y, z) = (x^2, 2xy + x, z)$. Sea C el círculo $x^2 + y^2 = 1$ y S el disco $x^2 + y^2 \leq 1$ dentro del plano $z = 0$.

- a) Determinar el flujo de $\vec{F}$ hacia afuera de S . Resp. 0
 b) Determinar la circulación de $\vec{F}$ alrededor de C . Resp. π
 c) Hallar el flujo de $\nabla \times \vec{F}$.

35. Probar, de formas distintas, que los siguientes campos no son gradientes.

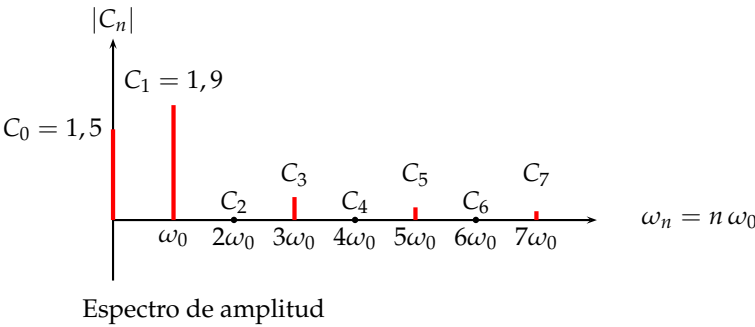
a) $\vec{F}(x, y) = (xy, y^2)$

b) $\vec{F}(x, y) = (x + 4y, x - 5y)$

El que ahorra sus palabras
tiene sabiduría;
De espíritu prudente es el
hombre entendido.
Proverbios 17:27

CAPÍTULO

SERIES DE
2
FOURIER



2.1. El nacimiento de una gran idea

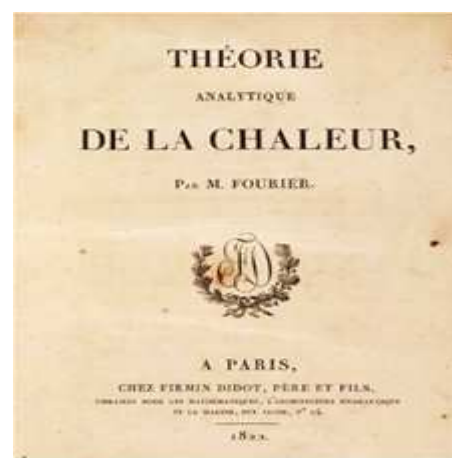
En una memorable sesión de la Academia Francesa de las Ciencias, el día 21 de diciembre de 1807, Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) presentaba su trabajo “Théorie de la propagation de la chaleur dans les solides”, que iba a abrir un nuevo capítulo en la historia de la matemática: la creación del *Análisis Armónico* o de *Fourier* como se le conoce a partir de sus trabajos.



J.B. Fourier

Fourier había deducido una ecuación que describía la conducción del calor a través de los cuerpos sólidos, la ecuación del calor. Pero no sólo la había deducido, sino que había desarrollado un método para resolverla, el “método de separación de variables”, procedimiento que, en cierto modo, había sido ya utilizado por Bernouilli para su solución. La aplicación de la técnica de separación de variables a la ecuación del calor, le condujo a escribir la solución en forma de serie trigonométrica, e incluso llegar a afirmar que cualquier función periódica de periodo 2π podía ser representada de esa forma.

Sin embargo, el trabajo de Fourier no fue aceptado máxime teniendo como parte del auditorio a matemáticos como J.L. Lagrange (1736-1813), P.S. Laplace (1749-1827) y A.M. Legendre (1752-1833), que criticaron abiertamente la falta de rigor del tratamiento de Fourier. No obstante, finalmente sus ideas fueron aceptadas y fueron expuestas, años después, en su obra de 1822 “Théorie analytique de la chaleur”. La conjetura de Fourier tenía, hoy lo sabemos, mucha parte de verdad. Había que desarrollar convenientemente algunos conceptos: qué se entiende por función, cómo se construye la integral de una función y establecer la naturaleza de la convergencia de las series de funciones en general y de las trigonométricas en particular. De esto se encargaron, entre otros, P.G.L. Dirichlet (1805-1859), B. Riemann (1826-1866), G. Cantor (1845-1918) y H. Lebesgue (1875-1941).



Portada original

Finalmente, otro hecho anecdótico, en su obra “Los Miserables”, Victor Hugo, evocando el año 1817, cita a dos Fourier: uno célebre, que pertenecía a la Academia de Ciencias y que sería olvidado por la posteridad (referencia a Jean Baptiste) y otro oscuro, que sería recordado en el futuro (referencia al pensador socialista Charles Fourier). La profecía de Victor Hugo no se cumplió exactamente. La explosión del análisis y tratamiento de la señal, y del análisis armónico computacional en particular, sobre todo a partir del descubrimiento de un algoritmo numérico para el cálculo de la transformada rápida, ha colocado el nombre del matemático Fourier en lo más alto del Olimpo de la Ciencia.

2.2. La importancia de las series de Fourier

El concepto de Series de Fourier no es fácil de asimilar y por lo mismo, trataremos de introducirlo de una forma sencilla, a través de un planteamiento matemático similar al de las Serie de Taylor, es decir, como un problema de representación de funciones como series de ciertas funciones particulares (seno, coseno o exponenciales complejas).

2.2.1. Problema de aproximación

Con la serie de Taylor de una función f obtenemos un polinomio de Taylor que proporciona una buena aproximación para la función f en la vecindad de un punto, pero ello tiene una exigencia: que la función f sea suficientemente suave, o sea, que f tenga derivadas continuas de cierto orden, tanto en el punto como en la vecindad de este punto. Para obtener un proceso de aproximación global, este método falla pues la aproximación de Taylor es local y no global.

Fourier : Las series de Fourier involucran las funciones trigonométricas del seno y coseno, y presentan algunas ventajas sobre las series de potencia en lo referente a representación de funciones. Por ejemplo, la condición de que f sea de diferenciabilidad infinita en el caso de las series de potencia, no es necesaria en una serie trigonométrica. Así mismo, en ocasiones es posible integrar o diferenciar una serie trigonométrica término a término, sin haber satisfecho el requisito de la convergencia uniforme que exige la serie de potencias. Con esto estamos afirmando, que las series de Fourier son más generales que las series de Taylor, en el sentido de que muchas funciones periódicas discontinuas, pueden desarrollarse solamente mediante series de Fourier, y no tienen representación en serie de Taylor. La función $f(x) = |x|$ es una muestra de ello.

Existe una enorme diferencia entre estudiar series de Fourier y series de potencias, pues una serie de Fourier funciona como un proceso *global* en cambio una serie de potencias es *local*. Esto es, la serie de Fourier permite representar la función en **todo** el intervalo, a diferencia de la serie de Taylor, que sólo lo hace en un punto.

A continuación vamos a estudiar la representación en serie para una función conocido como “desarrollo en Serie de Fourier”. Este desarrollo tiene la forma

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sen \frac{n\pi x}{L} \right) \quad (2.1)$$

2.2.2. Funciones periódicas

Vamos a estudiar bajo que condiciones una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ puede ser expresada en la forma de la ecuación (2.1) y como se calcula la serie de Fourier de esa clase de funciones. La ecuación (2.1) se conoce como **serie trigonométrica** y los números a_0, a_n, b_n como sus **coeficientes**. La función f es de periodo $2L$, pues es el periodo de las funciones seno y coseno que aparecen en la serie.

Definición 2.2.1. Una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se dice *periódica* si $f(t + T) = f(t), \forall t \in \mathbb{R}$

A veces existen varios números con esta propiedad, pero el menor número real positivo con esta característica es llamado **periodo fundamental** de f , o simplemente **periodo**. Si $T = 0$, entonces 0 sería periodo de f , y por lo tanto todas las funciones serían periódicas, por tal razón se considera $T \neq 0$. Por otra parte, resulta claro que, si n es un número entero cualquiera, entonces se cumple que

$$f(t + nT) = f(t)$$

de modo que nT también es periodo de la función f . Además si $f(t)$ y $g(t)$ tienen periodo T , entonces la función

$$h(t) = f(t) + g(t)$$

también tiene periodo T .

Para obtener la gráfica de una función periódica es suficiente describir su comportamiento a lo largo de un intervalo que mida un periodo de longitud. La repetición indefinida a izquierda y derecha de la gráfica de ese intervalo constituye la gráfica de la función periódica. Para dar una medida del número de repeticiones por unidad de t se define la **frecuencia**, f , de una función periódica como $f = \frac{1}{T}$, es decir, la frecuencia es el inverso del periodo fundamental.

Ejemplo 2.2.2. Veamos como determinar el periodo de la función $f(t) = \cos\left(\frac{t}{3}\right)$.

Tenemos que encontrar cual es el valor de T tal que $f(t) = f(t + T)$. En este caso,

$$\cos\left(\frac{t}{3}\right) = \cos\left(\frac{t + T}{3}\right)$$

que escrito como

$$\cos\left(\frac{t}{3}\right) = \cos\left(\frac{t}{3} + \frac{T}{3}\right)$$

pone en evidencia que ella se cumple si $\frac{T}{3} = 2\pi$, de lo cual se tiene que la función $\cos\frac{t}{3}$ tiene periodo $T = 6\pi$.

Ejemplo 2.2.3. Hallemos el periodo de $f(x) = \sin x + \sin\left(\frac{x}{3}\right) + \sin\left(\frac{x}{5}\right)$

Sea T el periodo de la función f , entonces

$$\sin(x + T) + \sin\frac{1}{3}(x + T) + \sin\frac{1}{5}(x + T) = \sin x + \sin\frac{x}{3} + \sin\frac{x}{5}$$

Como $\sin(x + 2n\pi) = \sin x$, entonces debemos tener

$$T = 2n\pi, \quad \frac{1}{3}T = 2m\pi, \quad \frac{1}{5}T = 2p\pi$$

Esto es,

$$T = 2n\pi, \quad T = 6m\pi, \quad T = 10p\pi$$

Como el valor de T debe ser el mismo y mínimo, entonces el mínimo común múltiplo entre 2, 6 y 10 es 30, de aquí que f es una función periódica de periodo $T = 30$. Observar que los valores $n = 15$, $m = 5$, $p = 3$ producen ese valor mínimo.

Ejemplo 2.2.4. Hallemos el periodo T de la función $\text{sen} \frac{n\pi x}{L}$

Se debe satisfacer que

$$\text{sen} \frac{n\pi x}{L} = \text{sen} \frac{n\pi(x+T)}{L}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Esto es,

$$\text{sen} \frac{n\pi x}{L} = \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi T}{L} + \cos \frac{n\pi x}{L} \text{sen} \frac{n\pi T}{L}$$

Esto se cumple si $\cos \frac{n\pi T}{L} = 1$, $\text{sen} \frac{n\pi T}{L} = 0$, lo cual ocurre para $\frac{n\pi T}{L} = 2n\pi$, luego $T = 2L$.

2.3. Coeficientes de Fourier

Supongamos que la serie trigonométrica (2.1) converge, entonces su suma es una función periódica f de periodo $2L$, es decir, $f(x) = f(x + 2L)$. Vamos a ver que relación existe entre la función f , y los coeficientes a_n y b_n .

Si la integración término a término es posible (basta pedir convergencia uniforme a la serie), podemos integrar ambos miembros en la igualdad (2.1) y tener

$$\int_{-L}^L f(x) dx = \frac{1}{2} a_0 \int_{-L}^L dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} dx + b_n \int_{-L}^L \text{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \right)$$

de aquí que

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx \quad (2.2)$$

Esto último se obtuvo de considerar que

$$\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \int_{-L}^L \text{sen} \frac{n\pi x}{L} dx = 0 \quad (2.3)$$

Para obtener los demás coeficientes, usemos las relaciones

$$\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cdot \text{sen} \frac{k\pi x}{L} dx = 0, \quad \text{si } n, k \geq 1 \quad (2.4)$$

$$\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cdot \cos \frac{k\pi x}{L} dx = \begin{cases} L, & n = k \geq 1 \\ 0, & n \neq k, n, k \geq 1 \end{cases} \quad (2.5)$$

$$\int_{-L}^L \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \cdot \text{sen} \frac{k\pi x}{L} dx = \begin{cases} L, & n = k \geq 1 \\ 0, & n \neq k, n, k \geq 1 \end{cases} \quad (2.6)$$

Para calcular el coeficiente a_n multiplicamos (2.1) por $\cos \frac{k\pi x}{L}$, para $k \geq 1$ fijo.

$$f(x) \cos \frac{k\pi x}{L} = \frac{1}{2} a_0 \cdot \cos \frac{k\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right) \cos \frac{k\pi x}{L}$$

ahora integramos para tener

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) \cdot \cos \frac{k\pi x}{L} dx &= \frac{1}{2} a_0 \int_{-L}^L \cos \frac{k\pi x}{L} dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cdot \cos \frac{k\pi x}{L} dx \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-L}^L \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \cdot \cos \frac{k\pi x}{L} dx \end{aligned}$$

de donde

$$\int_{-L}^L f(x) \cdot \cos \frac{k\pi x}{L} dx = a_k L \implies a_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cdot \cos \frac{k\pi x}{L} dx$$

Para el cálculo del coeficiente b_n se multiplica por $\operatorname{sen} \frac{k\pi x}{L}$, y luego se integra término a término en $[-L, L]$ para hallar

$$b_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{L} dx$$

La introducción del factor $\frac{1}{2}$ en a_0 permite tener una fórmula única para los a_n . Anotamos esto a continuación, junto a la expresión del b_n .

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \geq 0 \quad (2.7)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \geq 1 \quad (2.8)$$

Definición 2.3.1. Los coeficientes determinados por las fórmulas (2.7) y (2.8) se llaman **coeficientes de Fourier** de la función f , y la serie trigonométrica (2.1) formada por tales coeficientes **Serie de Fourier**.

2.3.1. Convergencia puntual de las series de Fourier

Ahora abordamos el problema de saber si la serie de Fourier de una función f converge y, en ese caso, si su suma es la propia función f .

Definición 2.3.2. Una función $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es suave a trozos si el intervalo I se puede dividir en un número finito de subintervalos, donde f y f' sean funciones continuas en cada uno de estos subintervalos abiertos y las únicas discontinuidades de f y f' en I sean de salto finito. Esto último quiere decir que los límites laterales de f y f' en cada uno de los extremos de estos subintervalos existan y sean finitos.

No es esencial que las funciones f y f' existan en los extremos de los subintervalos.

2.3 Coeficientes de Fourier

Teorema 2.3.3. (Dirichlet)

Sea $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ función suave a trozos y de periodo $2L$ en el intervalo finito $[a, b]$. En estas condiciones la serie de Fourier de f converge (puntualmente):

- a la extensión periódica de f , en los puntos en los que ésta sea continua;
- a $\frac{1}{2}(f(x_0^+) + f(x_0^-))$ en los puntos x_0 donde la extensión periódica de f tenga discontinuidad de salto finito.

Así, en general tenemos

$$\frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-)) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

en donde $f(x^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ y $f(x^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$.

El siguiente resultado complementa el teorema de Dirichlet.

Teorema 2.3.4. (Weierstrass): Si f es una función continua real periódica de período $2L$, entonces f puede ser aproximada por una sucesión de polinomios trigonométricos de la forma

$$S_n(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{L} + b_k \sin \frac{k\pi x}{L} \right)$$

Ejemplo 2.3.5. Hallemos la serie de Fourier de la función

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0 \\ 1, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}, \quad f(x) = f(x + 2\pi)$$

La figura 2.1 muestra la gráfica de la función f de periodo $T = 2L = 2\pi$. Es claro que se cumplen las condiciones de Dirichlet para f . Además, la serie de Fourier que hallaremos converge a la función f en cada punto de continuidad y al valor promedio de los límites laterales en cada punto de discontinuidad. Así por ejemplo, en el punto de discontinuidad $x = 0$ la serie converge a $\frac{1}{2}$.

Los coeficientes tienen los siguientes valores:

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx = \frac{1}{L} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

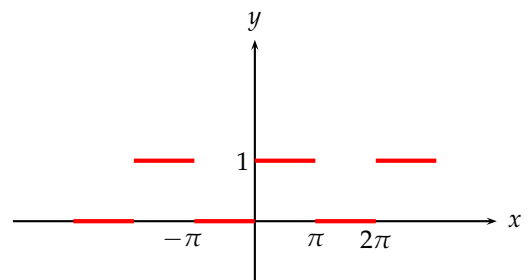


figura 2.1

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 0 \, dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} dx = 1$$

Para el coeficientes a_n tenemos

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos nx \, dx = 0$$

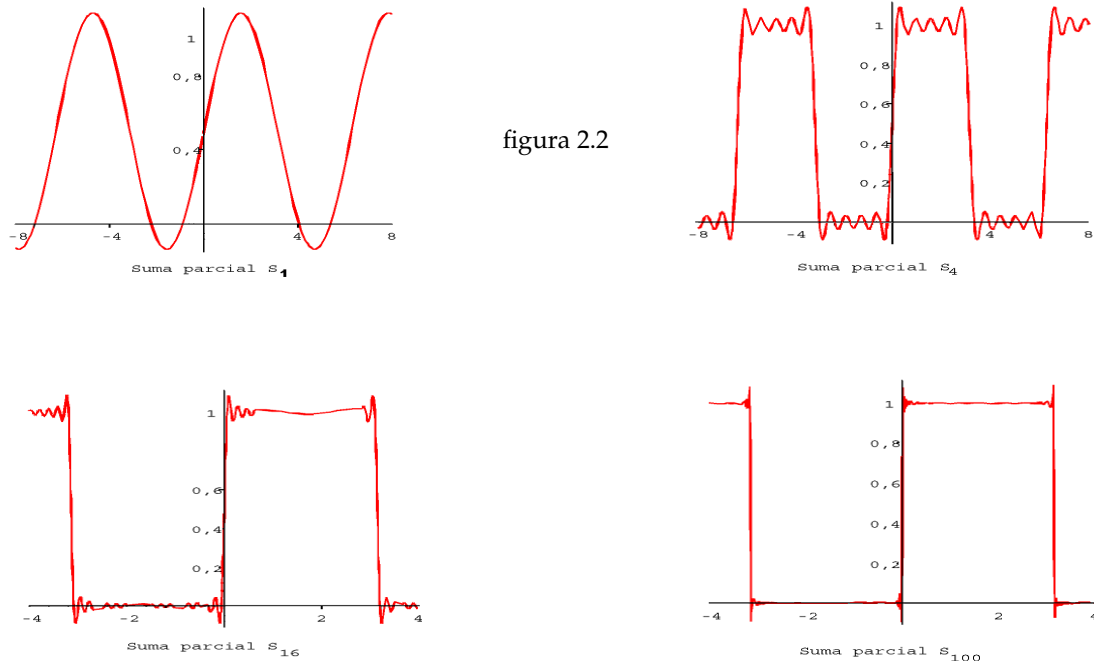
Para el coeficiente b_n

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L \operatorname{sen} nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen} nx \, dx \\ &= \frac{1}{n\pi} (1 - \cos n\pi) = \begin{cases} 0 & , n \text{ par} \\ \frac{2}{(2k-1)\pi} & , n = 2k-1 \text{ impar} \end{cases} \end{aligned}$$

Se concluye que la serie de Fourier de esta función es

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k-1)\pi} \operatorname{sen}(2k-1)x \quad (2.9)$$

El software Maple resulta muy útil para complementar ideas. Las gráficas en la figura (2.2) muestran la aproximación por sumas parciales (teorema de Weierstrass) a la función f .



en donde $S_1 f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \operatorname{sen} x$, y así sucesivamente. Se observa que a medida que se toma una suma parcial mayor, la aproximación a la función mejora. De hecho, la suma S_{100} tiene “casi” la forma de la función original.

2.3 Coeficientes de Fourier

- En el punto de discontinuidad $x = \pi$, la ecuación (2.9) se reduce a $f(x) = \frac{1}{2}$, lo que corresponde a la media aritmética del salto en el punto. Esto es sencillo de verificar pues $\sin(2k-1)\pi = 0$ en la ecuación (2.9). En general, esto se repite en cada punto de discontinuidad en virtud de lo señalado por el teorema 2.3.4.
- En el punto de continuidad $x = \frac{\pi}{2}$, el argumento de la serie en (2.9) es $\sin(2k-1)x = \pm 1$, luego la serie de Fourier para f en este punto es

$$1 = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k-1}}{(2k-1)\pi}$$

de donde encontramos una aproximación al valor $\frac{\pi}{4}$, que es

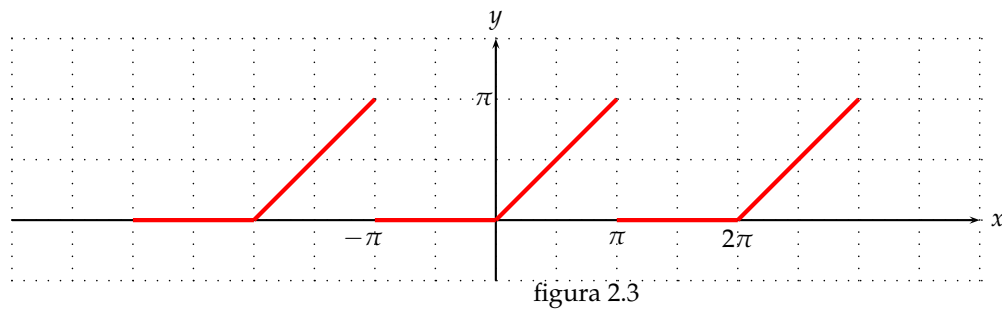
$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$$

Ejemplo 2.3.6. Desarrollemos en serie de Fourier la función periódica

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}, \quad f(x) = f(x + 2\pi)$$

y usemos este resultado para calcular la suma de la serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

La figura 2.3 muestra esta función. Además, la función dada satisface las condiciones del teorema de Dirichlet.



Para sus coeficientes tenemos:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ par} \\ -\frac{2}{n^2\pi}, & \text{si } n \text{ impar} \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Luego, la serie de Fourier es

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{2}{\pi} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} nx \right]$$

En todos los puntos de continuidad la serie hallada representa a la función, mientras que en los extremos del intervalo $[-\pi, \pi]$, esto es, en los puntos de discontinuidad de la función, los valores de la serie vienen dados por

$$\frac{1}{2}(0 + \pi) = \frac{\pi}{2}$$

Para hallar la suma de la serie numérica pedida se busca un valor adecuado de x , de manera de obtener la serie que interesa. En este caso, con $x = 0$, se anula la función seno y la coseno es 1. Se tiene

$$f(0) = 0 = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2}{\pi} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

de lo cual

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

El lector interesado puede hacer $x = \pi$, punto de discontinuidad, y obtener el mismo resultado.

2.4. Serie de Fourier de funciones pares e impares

En ciertos problemas, el conocer que la función f sea par o impar, simplifica el proceso de calcular los coeficientes en la serie de Fourier.

Definición 2.4.1.

1. La función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es **par** si $f(x) = f(-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
2. La función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es **impar** si $f(x) = -f(-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Cabe recordar que, la gráfica de una función par presenta simetría respecto del eje y , en tanto, la impar, respecto del origen.

La integración de funciones pares o impares es también relevante en series de Fourier.

Proposición 2.4.2.

1. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ función par e integrable sobre el intervalo acotado $[-L, L]$, entonces

$$\int_{-L}^L f(x) dx = 2 \int_0^L f(x) dx$$

2.4 Serie de Fourier de funciones pares e impares

2. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es función impar e integrable sobre el intervalo acotado $[-L, L]$, entonces

$$\int_{-L}^L f(x) dx = 0$$

Demostración.

1) En primer lugar, escribimos la integral en la forma

$$\int_{-L}^L f(x) dx = \int_{-L}^0 f(x) dx + \int_0^L f(x) dx$$

El cambio de variables $x = -y$, en la primera integral del segundo miembro, arroja que $dx = -dy$, que $x = -L \Rightarrow y = L$, y $x = 0 \Rightarrow y = 0$. Luego,

$$\int_{-L}^0 f(x) dx = - \int_L^0 f(-y) dy = \int_0^L f(y) dy$$

pues f es una función par. Por lo tanto

$$\int_{-L}^0 f(x) dx = \int_0^L f(x) dx \Rightarrow \int_{-L}^L f(x) dx = 2 \int_0^L f(x) dx$$

2) Análogamente

$$\int_{-L}^0 f(x) dx = - \int_L^0 f(-y) dy = \int_0^L -f(-y) dy$$

pues f es una función impar. Luego

$$\int_{-L}^L f(x) dx = \int_0^L f(x) dx - \int_0^L f(x) dx = 0$$

2.4.1. Serie de función impar

Si f es una función impar, entonces $\begin{cases} f(x) \cos(kx) \text{ es una función impar} \\ f(x) \sin(kx) \text{ es una función par} \end{cases}$, por consiguiente

$$a_n = 0, \quad \forall n \geq 0$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

Conclusión

☞ La serie de Fourier de una función impar contiene solamente senos y tiene la forma

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

 (2.10)

2.4.2. Serie de función par

Si f es una función impar, entonces $\begin{cases} f(x) \cos(kx) \text{ es par} \\ f(x) \sin(kx) \text{ es impar} \end{cases}$, por consiguiente

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, n \geq 0$$

$$b_n = 0$$

Conclusión

☞ La serie de Fourier de una función par contiene solamente cosenos y tiene la forma

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} \quad (2.11)$$

Ejemplo 2.4.3. La función $f(x) = x$ para $-L \leq x \leq L$, $f(x+2L) = f(x)$ es impar y de periodo $2L$. Su gráfica se muestra en la figura 2.4. Esta función se conoce con el nombre de “diente de sierra”. Vamos a encontrar una serie de Fourier para ella.

Como la función es impar, entonces $a_n = 0, \forall n \geq 0$. Para b_n se tiene

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L x \cdot \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

Para calcular esta integral hacemos $y = \frac{n\pi x}{L}$, de lo cual $dx = \frac{L}{n\pi} dy$. Luego

$$b_n = \frac{2L}{n^2\pi^2} \int_0^{n\pi} y \sin y dy$$

Integrando por partes, con $u = y$, $du = dy$, $dv = \sin y dy$, $v = -\cos y$

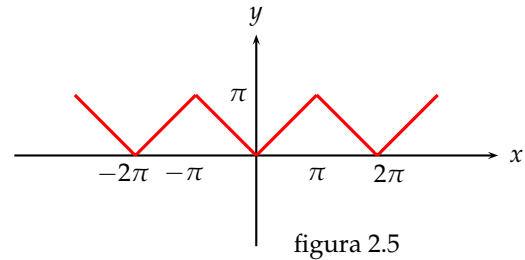
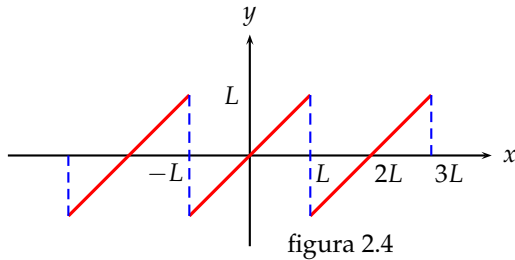
$$b_n = \frac{2L}{n^2\pi^2} \left(-y \cos y + \sin y \right)_0^{n\pi} = \frac{2L}{n^2\pi^2} (-n\pi \cos n\pi) = \frac{2L}{n\pi} (-1)^{n+1}$$

Luego, una serie de Fourier para la función f es

$$f(x) = \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{n\pi x}{L}$$

En $x = L$, punto de discontinuidad, la serie converge a cero. Lo mismo ocurre en todos los puntos de la forma $x = nL$.

2.4 Serie de Fourier de funciones pares e impares



Ejemplo 2.4.4. Hallemos desarrollo de la función $f(x) = |x|$ de periodo 2π definida en el intervalo $[-\pi, \pi]$. Usemos este desarrollo para hallar el valor de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$

Esta función es par como se ve en la figura 2.5. Luego, $b_n = 0, \forall k \in \mathbb{N}$. Para el coeficiente a_n tenemos

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos n\pi dx = \frac{2}{\pi n^2} (\cos n\pi - 1) = \begin{cases} 0 & ,n \text{ par} \\ -\frac{4}{\pi n^2} & ,n \text{ impar} \end{cases}$$

En consecuencia

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \frac{1}{5^2} \cos 5x \dots \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos(2k-1)x$$

Con $x = 0$, punto de continuidad se tiene que

$$f(0) = 0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$$

de lo cual

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

La figura 2.6 muestra un par de aproximaciones de la serie a la función.

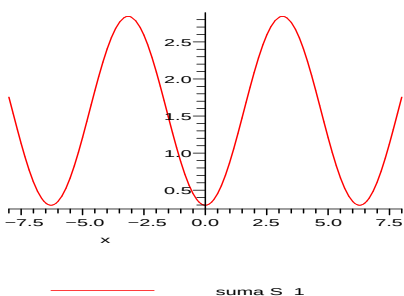
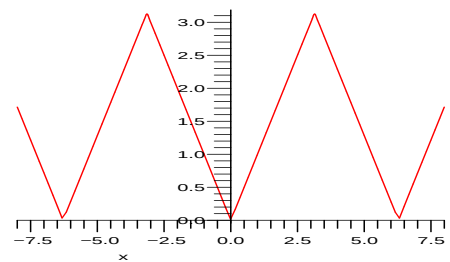


figura 2.6



2.5. Desarrollos de medio intervalo

En las aplicaciones, a menudo se necesita desarrollar una función en serie de Fourier, sabiendo que ella se encuentra definida en un intervalo de la forma $[0, L]$. Una forma de hacerlo es extender la función al intervalo $[-L, L]$ mediante una de las dos extensiones más prácticas; la par o la impar, y a partir de ellas calcular la serie de Fourier que la represente. No obstante, cualquier otro tipo de extensión al intervalo $[-L, L]$ puede ser realizado. Lo importante en este caso, es que cualquiera sea la extensión, la serie de Fourier de cada extensión representa a la función en el intervalo deseado $[0, L]$.

Definición 2.5.1. Sea f la función definida en el intervalo $[0, L]$. Se llama **extensión par** de f , que se denota $Ext_P f(x)$, a la función

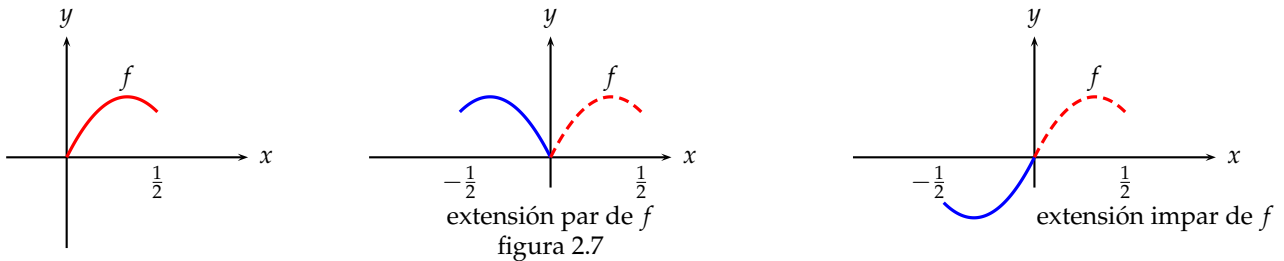
$$Ext_P f(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leq x \leq L \\ f(-x), & -L \leq x < 0 \end{cases}$$

y se llama **extensión impar** de f , que se denota $Ext_I f(x)$, a la función

$$Ext_I f(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leq x \leq L \\ -f(-x), & -L \leq x < 0 \end{cases}$$

Ejemplo 2.5.2. La figura 2.7 muestra la función $f(x) = 1 - (x - 1)^2$ definida en el intervalo $[0, \frac{1}{2}]$ y sus extensiones par e impar al intervalo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

La extensión par es $E_P = f(-x) = 1 - (x + 1)^2$ y la impar $E_I = -f(-x) = (x + 1)^2 - 1$.



Ejemplo 2.5.3. Para la función $f(x) = x^2$ definida en $0 < x < \pi$, sus extensiones par e impar se muestran en la figura 2.8.

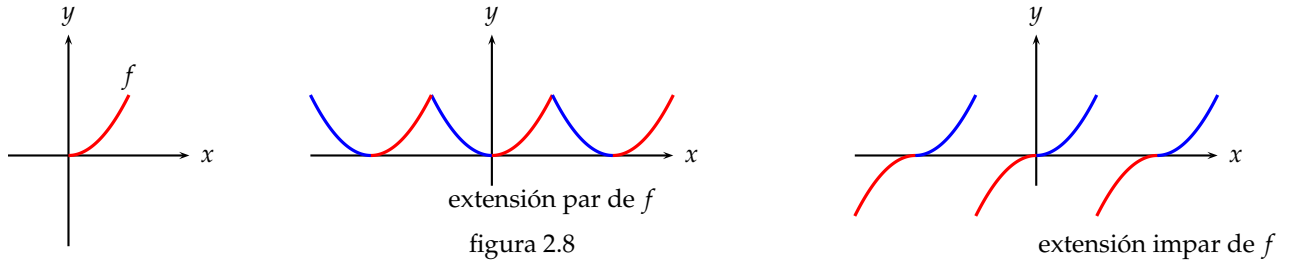
Extensión par : Como $f(-x) = x^2$, entonces la extensión par y periódica de f es

$$Ext_P f(x) = x^2, \quad -\pi < x < \pi, \quad f(x + 2\pi) = f(x)$$

Extensión impar : Dado que $-f(-x) = -x^2$, entonces la extensión impar y periódica es

$$Ext_I f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 < x < \pi \\ -x^2, & -\pi < x < 0 \end{cases}, \quad f(x + 2\pi) = f(x)$$

2.5 Desarrollos de medio intervalo



Ejemplo 2.5.4. Desarrollemos $f(x) = x$, $0 < x < \pi$ en serie de cosenos usando la extensión par de f .

La figura 2.9 muestra la gráfica de f y su extensión periódica. La extensión par es

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & -\pi < x < 0 \\ x, & 0 < x < \pi \end{cases}, \quad f(x) = f(x + 2\pi)$$

Como la extensión es par, entonces $b_n = 0 \forall n$. Para a_0 se tiene

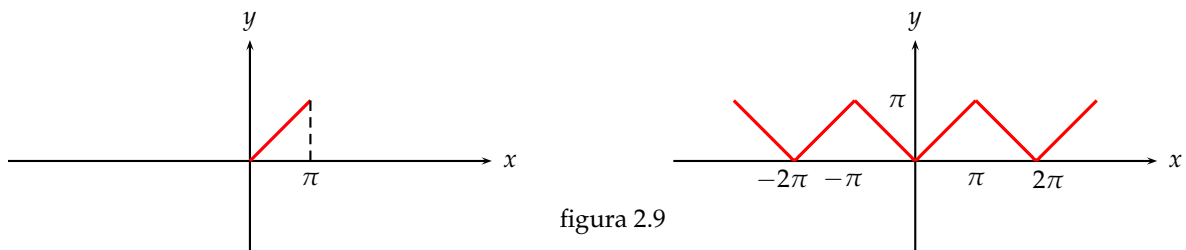
$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \, dx = \pi$$

Para el coeficiente a_n , con $n \neq 0$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi n^2} \left((-1)^n - 1 \right) = \begin{cases} 0 & , n \text{ par} \\ -\frac{4}{\pi(2k-1)^2} & , n \text{ impar} \end{cases}$$

Luego la serie de Fourier de f en cosenos, es

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos(2k-1)x, \quad 0 \leq x \leq \pi$$



Las extensiones par e impar, no son las únicas que se pueden efectuar, son, eso sí, las más útiles y las que prestan la mayor ayuda en el cálculo de los coeficientes. Veamos una extensión diferente a la par o a la impar.

Ejemplo 2.5.5. Desarrollemos $f(x) = x$, $0 \leq x \leq \pi$, en serie de Fourier, extendiendo la función f como

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}, \quad f(x + 2\pi) = f(x)$$

El valor de los coeficientes es el siguiente.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x \, dx = \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x \cos nx \, dx = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x \sen nx \, dx = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

En consecuencia, para $0 \leq x \leq \pi$

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos(2k-1)x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sen kx$$

2.6. Intervalo arbitrario

Si hacemos $2L = b - a$, entonces el intervalo $[a, b]$ se transforma en $[a, a + 2L]$, de manera que podemos hallar desarrollos de series de Fourier de funciones definidas sobre cualquier intervalo $[a, b]$. En este caso, los coeficientes y la serie toman las siguientes formas:

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi x}{b-a} + b_n \sen \frac{2n\pi x}{b-a} \right)$$

$$a_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos \left(\frac{2n\pi x}{b-a} \right) dx, \quad n \geq 0$$

$$b_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \sen \left(\frac{2n\pi x}{b-a} \right) dx, \quad n \geq 1$$

Ejemplo 2.6.1. Hallemos para la $f(x) = x, 0 \leq x \leq 1$ una serie de Fourier.

Hacemos uso de esta fórmula para intervalo arbitrario. Como $b - a = 1$, entonces

$$a_n = 2 \int_0^1 x \cos 2n\pi x \, dx \quad \text{y} \quad b_n = 2 \int_0^1 x \sen 2n\pi x \, dx$$

Integrando por partes encontramos

$$a_0 = 1, \quad a_n = 0, \quad n \neq 0, \quad b_n = -\frac{1}{n\pi}$$

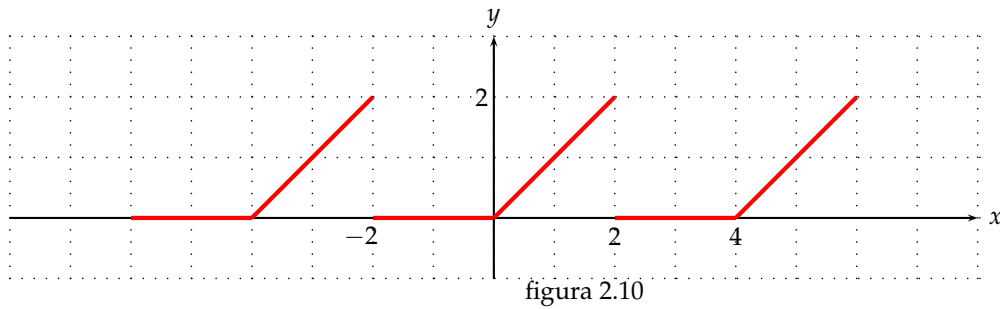
En consecuencia

$$x = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sen 2n\pi x$$

Ejemplo 2.6.2. Hallemos la serie de Fourier de la función

$$f(x) = \frac{1}{2}(x + |x|) = \begin{cases} 0, & -2 < x < 0 \\ x, & 0 < x < 2 \end{cases} \quad f(x+4) = f(x)$$

La función f es de periodo 4 y cumple las condiciones para ser representada por una serie de Fourier. La figura 2.10 muestra esta función.



Para sus coeficientes tenemos:

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_0^2 x \, dx = 1$$

$$a_n = \frac{1}{2} \int_0^2 x \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \, dx = \frac{2}{n^2\pi} ((-1)^n - 1)$$

$$a_n = \frac{1}{2} \int_0^2 x \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \, dx = -\frac{2(-1)^n}{n\pi}$$

Luego, en todo punto de continuidad

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{n^2\pi} ((-1)^n - 1) \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) - \frac{2(-1)^n}{n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \right]$$

En el punto de discontinuidad $x = 2$ se tiene que la serie converge a 1, que es el valor promedio de los límites laterales.

2.7. Componentes armónicas

Consideremos una función de la forma $f(t) = \cos(\omega_0 t)$. Para determinar su periodo, nos preguntamos en cuanto hay que incrementar a la variable independiente t para que el argumento de la función se incremente en 2π . Obtenemos así $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$. En otras palabras, $f(t) = \cos(\omega_0 t)$ es una función periódica de frecuencia ω_0 .

Si analizamos la función $f(t) = \cos(2\omega_0 t)$, concluimos que su frecuencia es $2\omega_0$ y que su periodo es $T = \frac{\pi}{\omega_0}$.

En general, las funciones de la forma $f(t) = \cos(n\omega_0 t)$ tienen frecuencia $n\omega_0$ y periodo $T = \frac{2\pi}{n\omega_0}$. Diremos que ω_0 representa la **frecuencia fundamental** y sus múltiplos, $n\omega_0$, son sus armónicas. (La frecuencia fundamental es también la primera armónica).

Cualquier combinación lineal de funciones periódicas relacionadas armónicamente, dará por resultado una función de periodo $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$, que es el menor múltiplo común de los periodos de las componentes.

La descripción de señales periódicas mediante el análisis de Fourier se basa en las propiedades de las componentes armónicas, componentes de la forma $\cos(n\omega_0 t)$ y $\sen(n\omega_0 t)$.

Las frecuencias armónicas $n\omega_0$ son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental ω_0 , siendo $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, con T el periodo.

La descripción mas general de una señal que se puede encontrar por medio del análisis de Fourier es una **suma** de todas las componentes posibles, senos, cosenos, para todas las frecuencias armónicas. Está representada por:

$$x(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sen(n\omega_0 t)] \quad (2.12)$$

en donde t es la variable tiempo. De esta forma los coeficientes a_n y b_n toman la forma

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt, \quad n = 0, 1, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sen(n\omega_0 t) dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

Esta es la forma general de la serie de Fourier trigonométrica donde los coeficientes a_n y b_n son respectivamente los coeficientes de Fourier de los senos y cosenos que representan las amplitudes de las diversas componentes que se usan en la descripción de una señal dada. Su cálculo permite determinar cuáles son las armónicas que intervienen y cuál es el “peso” de cada componente, es decir, la amplitud de cada una.

El cálculo de los coeficiente se simplifica en los siguientes casos:

1. Si f es función par y de periodo T , entonces

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt, n = 0, 1, \dots, \quad b_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

2. Si f es función impar y de periodo T , entonces

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sen(n\omega_0 t) dt, n = 1, 2, \dots, \quad a_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

Ejemplo 2.7.1. Hallemos una serie de Fourier para la función

$$f(t) = \begin{cases} -1, & -\frac{T}{2} < t < 0 \\ 1, & 0 < t < \frac{T}{2} \end{cases}, \quad f(t) = f(t + T)$$

2.8 Conceptos básicos sobre análisis de señales

Para el cálculo de sus coeficientes, observamos que la función f es impar, de aquí que $a_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Para b_n tenemos.

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} \text{sen}(n \omega_0 t) dt \\ &= -\frac{4}{T n \omega_0} \cos(n \omega_0 t) \Big|_0^{T/2} \\ &= \frac{4}{T n \omega_0} \left(1 - \cos \frac{1}{2} n \omega_0 T \right) \end{aligned}$$

$$\text{Ahora, } T = \frac{2\pi}{\omega_0} \implies \cos\left(\frac{1}{2} n \omega_0 T\right) = \cos(n \pi) \implies b_n = \begin{cases} 0 & , n \text{ par} \\ \frac{4}{n\pi} & , n \text{ impar} \end{cases}$$

En consecuencia, la serie de Fourier que representa a f es

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \text{sen}(2k-1)\omega_0 t$$

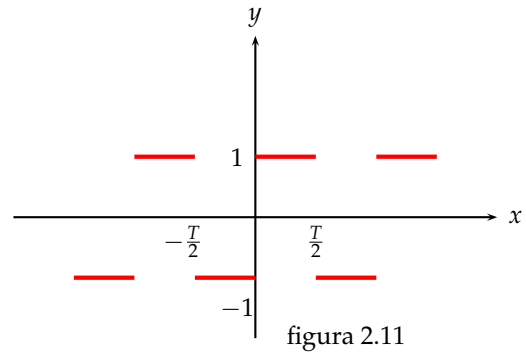


figura 2.11

2.8. Conceptos básicos sobre análisis de señales

Cuando se estudian las comunicaciones electrónicas es necesario analizar la distribución (densidad) de la potencia y la composición de las frecuencias de la señal de información. Para ello se utiliza el análisis de señales. Aunque todas las señales electrónicas no son ondas senoidales o cosenoidales puras, muchas lo son, y las que no lo son pueden descomponerse como una serie de funciones seno o coseno. En esencia las señales eléctricas son variaciones de voltaje (o corriente) con respecto al tiempo. Estas señales pueden representarse por una serie de ondas seno o coseno. Estas ondas pueden estudiarse en el dominio del tiempo o en el dominio de la frecuencia.

Cuando una señal seno (o coseno) se representa en el ámbito temporal, se puede definir mediante dos conceptos:

- **Amplitud:** Valor máximo (en valor absoluto) que alcanza la señal.
- **Periodo:** Tiempo que tarda la señal en completar un ciclo.

Es importante señalar que se puede considerar que cualquier señal es una señal periódica, ya que las señales aperiódicas se pueden considerar como señales periódicas de periodo infinito.

Ejemplo 2.8.1. La señal $x(t) = 2 \text{sen}(8\pi t)$ tiene amplitud 2 y su periodo lo podemos obtener al escribir

$$x(t) = 2 \text{sen}(2\pi 4t)$$

ya que la expresión general del seno es

$$f(t) = A \text{sen} \omega_0 (t - \alpha) + C$$

al comparar con la señal dada se tiene que $\omega_0 = 8\pi$, pero $\omega_0 = 2\pi \cdot \frac{1}{T}$. De esto se obtiene $\frac{1}{T} = 4$, de lo cual $T = \frac{1}{4}$. Es claro que $\alpha = 0$, esto es, no hay desfase.

Cuando una señal se estudia en el ámbito de la frecuencia se deben tener en cuenta los siguientes conceptos:

- Toda señal periódica $x(t)$ puede descomponerse en suma de senoides de distinta frecuencia, según la fórmula de Fourier

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t), \quad \omega_n = n \omega_0 \quad (2.13)$$

y se denomina armónico de orden n al término $a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)$. La frecuencia del armónico de orden n viene dada por el producto entre n y ω_0 , donde ω_0 es la llamada frecuencia fundamental.

- La amplitud o potencia de un armónico cualquiera es

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

- Se define un **fasor** como la representación de un armónico de orden n en forma de vector rotante en sentido contrario a las agujas del reloj, que gira con velocidad angular ω_n , y cuyas coordenadas cartesianas son (a_n, b_n) . La representación de un fasor n en un instante dado equivale al armónico de orden n . La figura 2.12 muestra la representación de un fasor n para un instante dado t . La fase del armónico de orden n es $F(n) = \arctg \frac{b_n}{a_n}$.

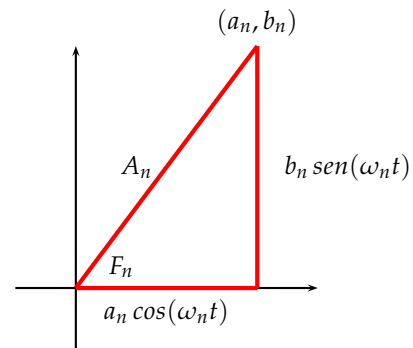


figura 2.12

En esta figura, el fasor es un vector de coordenadas (a_n, b_n) con respecto al origen de coordenadas. El módulo del fasor, será por tanto el módulo del armónico de orden n , es decir, A_n , y el ángulo del fasor con respecto al eje de abscisas (la recta Real) será la fase del armónico de orden n , a saber, F_n .

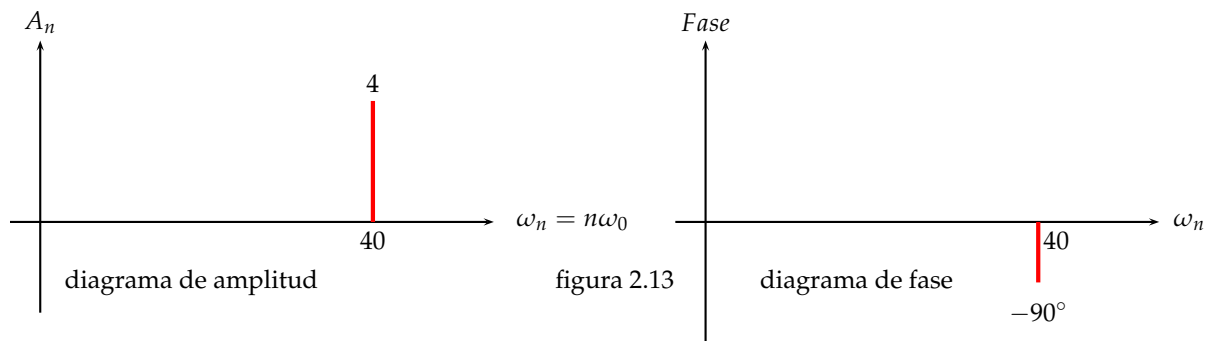
Adicionalmente, se puede representar un fasor o armónico de orden n no con respecto a la posición en el plano imaginario para un instante dado, sino con respecto a la frecuencia. En este caso, la representación de un armónico o fasor consiste en 2 diagramas: diagrama de amplitud y diagrama de fase. El primero consiste en poner en el eje de abscisas la frecuencia del fasor, y en el eje de ordenadas la amplitud del mismo. El dibujo resultante es una recta vertical situada en la frecuencia del fasor y cuya altura es la amplitud del fasor. Por su parte, el diagrama de fase consiste en poner en el eje de ordenadas la fase del armónico. En este caso, el diagrama también resulta en una raya vertical ubicada en el punto del eje de abscisas correspondiente a la frecuencia del fasor, y cuya altura (positiva o negativa) corresponde con el ángulo del fasor.

Ejemplo 2.8.2. Hallemos los diagramas de amplitud y de fase de la señal $x(t) = 4 \operatorname{sen}(80\pi t)$.

Al comparar con

$$f(t) = A \operatorname{sen}\omega_0(t - \alpha) + C$$

se tiene que la amplitud es 4, $\omega_0 = 80\pi$, el periodo $T = \frac{2\pi}{80\pi} = \frac{1}{40}$ y la frecuencia $f_0 = 40$. De esta forma, la figura 2.13 representa los diagramas



Cuando una función f se puede descomponer en series de Fourier con más de un armónico, entonces se define:

- **Espectro de amplitud:** Consiste en la representación en diagrama de amplitudes de todos los fasores que componen la función f . Por supuesto, a cada línea vertical que representa el espectro de amplitud de una señal seno (o coseno) se le denomina armónico
- **Espectro de fase:** Consiste en la representación en diagrama de fase de todos los fasores que componen la función f .

Para representar los fasores en un espectro se siguen las siguientes convenciones:

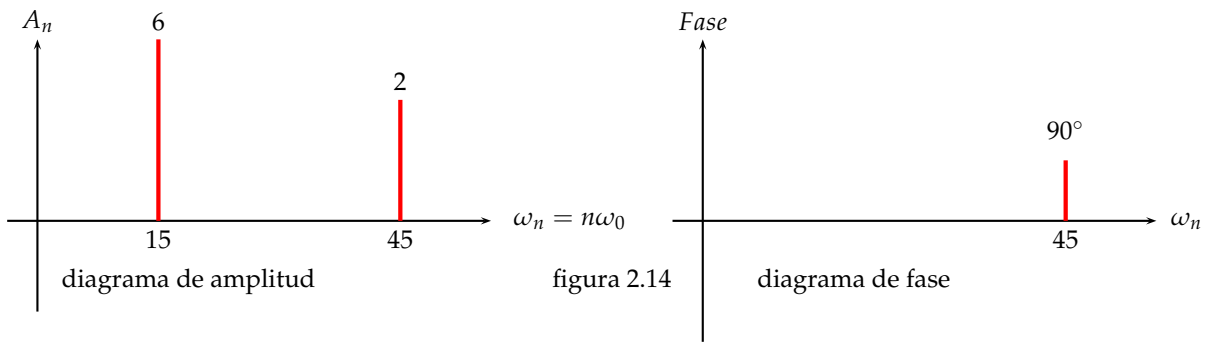
1. La variable independiente representada en el eje de las x será la *frecuencia cíclica* $f = \frac{1}{T}$ en hertzios, en lugar de la frecuencia angular ω en radianes.
2. La fase será medida con respecto a ondas coseno. De esta forma, las ondas seno deberán ser convertidas a ondas coseno mediante la identidad $\operatorname{sen}(\omega t) = \cos(\omega t - 90^\circ)$
3. Las amplitudes siempre son positivas. Si aparecen signos negativos, estos se trasladarán al espectro de fase mediante la ecuación $-A \cos(\omega t) = A \cos(\omega t \pm 180^\circ)$. No importando si se toma $+180^\circ$ o -180° , ya que en el diagrama de fase ambos valores indican el mismo punto.
4. El diagrama o espectro de fase está expresado en grados.

De esta forma, antes de representar el espectro de amplitud y/o fase de una señal, deberemos hacer las transformaciones pertinentes para expresar dicha señal según estas 4 reglas. Veamos un par de ejemplos para aclarar el uso de estas reglas.

Ejemplo 2.8.3. Representar el espectro de amplitud y de fase de la señal

$$x(t) = 6 \cos(2\pi 15t) + 2 \cos(2\pi 45t + 90^\circ)$$

La señal $x(t)$ está ya descompuesta en dos señales expresadas como coseno y con amplitud positiva. Por tanto ya cumple las 4 reglas para representar fasores. Por tanto, la representación gráfica del espectro de amplitud y fase de esta señal es la que aparece en la figura 2.14.



Ejemplo 2.8.4. Representemos el espectro de amplitud y de fase de la señal $x(t) = -3 + 6\sin(30\pi t)$

En este caso sí hay que realizar transformaciones. La primera es expresar la señal como suma o diferencia de senos o cosenos:

$$x(t) = -3\cos(2\pi \cdot 0t) + 6\sin(30\pi t)$$

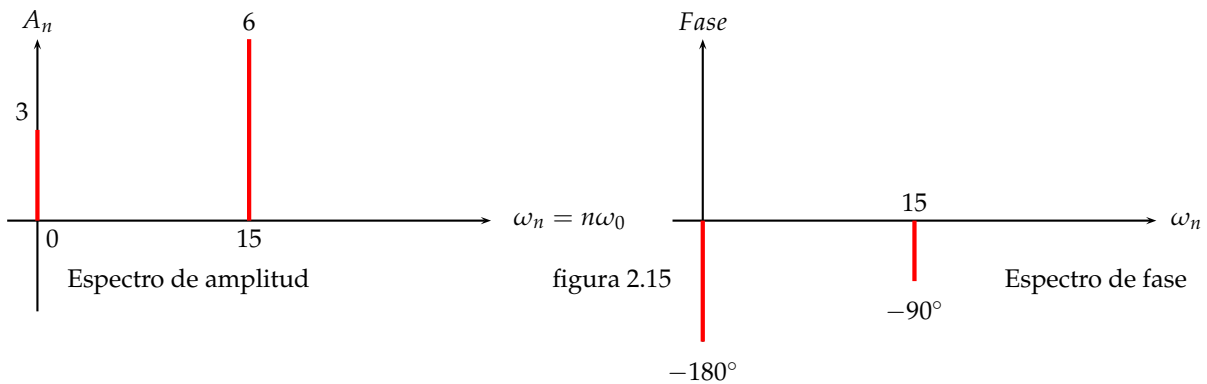
A continuación aplicamos la segunda regla:

$$x(t) = -3\cos(2\pi \cdot 0t) + 6\cos(2\pi \cdot 15t - 90^\circ)$$

Finalmente, aplicamos la tercera regla:

$$x(t) = 3\cos(2\pi \cdot 0t - 180^\circ) + 6\cos(2\pi \cdot 15t - 90^\circ)$$

Con este resultado, el espectro de frecuencias y de fase es el que aparece en la figura 2.15.



2.8.1. Espectro en series de Fourier

El procedimiento gráfico para estudiar la contribución de cada armónico en una serie de Fourier es el mencionado anteriormente, es decir, consiste en un diagrama cartesiano en cuyo eje horizontal

2.8 Conceptos básicos sobre análisis de señales

se representa la frecuencia de cada armónico, y en el vertical la amplitud del mismo. Ello da origen a un diagrama de segmentos verticales que se conoce con el nombre de espectro de **frecuencias** o de **líneas**. Una simple inspección del mismo da una idea rápida de la velocidad de convergencia de la serie y de la contribución de cada armónico a la onda dada por la serie. Los armónicos que más contribuyen tienen mayores amplitudes, y en el espectro de líneas aparecen representados por segmentos de mayor longitud. La idea fundamental es la siguiente: Se tiene una señal arbitraria $x(t)$ y se quiere representar $x(t)$ como

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(\omega_n t + \theta_n)$$

¿Cómo hacerlo? Busquemos la respuesta a partir de la serie de Fourier de f que tiene la forma

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t))$$

Esta se puede escribir sólo en términos de seno o de coseno como sigue:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \left[\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \cos(n\omega_0 t) + \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \sin(n\omega_0 t) \right] \quad (2.14)$$

Al definir

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{a_0}{2} \\ C_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ \cos\theta_n &= \sin\beta_n = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \\ \cos\beta_n &= \sin\theta_n = \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \end{aligned}$$

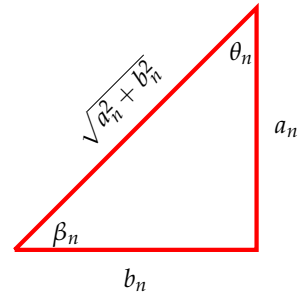


figura 2.16

la ecuación (6.13) se transforma en

$$\begin{aligned} f(t) &= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n [\cos\theta_n \cos(n\omega_0 t) + \sin\theta_n \sin(n\omega_0 t)] \\ &= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t - \theta_n) \end{aligned} \quad (2.15)$$

El lector que tenga interés puede probar que en función del ángulo β_n se tiene:

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\omega_0 t + \beta_n) \quad (2.16)$$

Esta forma de representación de Fourier de una función periódica, expresa la función como la suma de componentes sinusoides que tienen diferentes frecuencias. La componente sinusoidal de frecuencia $\omega_n = n\omega_0$ se denomina la **enésima armónica** de la función periódica. La primera armónica comunmente se conoce como la **componente fundamental** porque tiene el mismo periodo de la función y $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ es la frecuencia angular fundamental. Los coeficientes C_n y los ángulos θ_n se conocen como **amplitudes armónicas** y **ángulos de fase**, respectivamente. Es claro que los ángulos θ_n y β_n se relacionan con a_n y b_n mediante el triángulo mostrado en la figura 2.16, y que $\operatorname{tg}\theta_n = \frac{b_n}{a_n}$ y $\theta_n = \operatorname{arctg}(\frac{b_n}{a_n})$. Hemos hallado la respuesta, la serie de Fourier escrita sólo en cosenos es

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(\omega_n t - \theta_n)$$

La graficación de este desarrollo en serie no sería muy clara si se hace en función del tiempo, por eso se hace en función de la frecuencia lo que da lugar a representaciones denominadas **Espectros en Frecuencia**. Como debemos indicar dos datos para cada componente: amplitud y fase, obtenemos los **espectros de Amplitud** y de **Fase**. En ambos casos tendremos sólo valores para un número entero de veces la frecuencia fundamental, lo que implica un espectro de líneas, discreto, y no una curva continua.

Ejemplo 2.8.5. Hallemos el espectro de frecuencias de la representación en serie de Fourier de la función

$$f(t) = \begin{cases} A, & 0 < t < \pi \\ 0, & \pi < t < 2\pi \end{cases}, \quad f(t) = f(t + T)$$

Para calcular los coeficientes elegimos el intervalo $[0, 2\pi]$ para realizar la integración.

Para a_0 tenemos

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} A dt = A$$

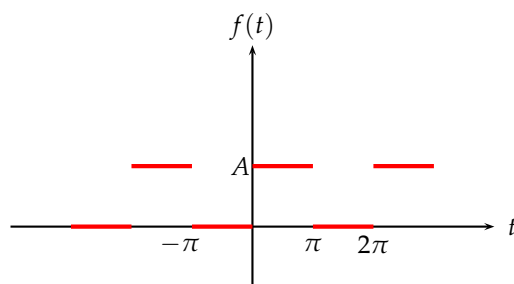


figura 2.17

Para el coeficiente a_n

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} A \cos nt dt = 0, \quad n \neq 0$$

Para el coeficiente b_n

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \operatorname{sen} nt dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} A \operatorname{sen} nt dt$$

$$= \frac{A}{n\pi} (1 - \cos n\pi) = \begin{cases} 0 & , n \text{ par} \\ \frac{2A}{n\pi} & , n \text{ impar} \end{cases}$$

2.8 Conceptos básicos sobre análisis de señales

En consecuencia

$$f(t) = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \operatorname{sen}(2k-1)t$$

Para determinar el espectro de frecuencias del tren de pulsos tenemos:

$$C_0 = \frac{a_0}{2} \implies C_0 = \frac{A}{2}$$

$$C_n^2 = a_n^2 + b_n^2 \implies C_n = b_n, \text{ pues } a_n = 0$$

Así, la amplitud de las armónicas es

- $C_0 = \frac{A}{2} = 0,5A$
- $C_1 = b_1 = \frac{2A}{\pi} = 0,636A$
- $C_2 = b_2 = 0$
- $C_3 = b_3 = \frac{2A}{3\pi} = 0,212A$
- $C_4 = b_4 = 0$
- $C_5 = b_5 = \frac{2A}{5\pi} = 0,127A$

Así sucesivamente. Observar que $C_{2k} = 0, \forall k \in \mathbb{N}$. Con los datos de las armónicas, la representación del pulso se escribe

$$\begin{aligned} f(\theta) &= 0,5A + 0,636A \operatorname{sen}\theta + 0,212A \operatorname{sen}3\theta + 0,127A \operatorname{sen}5\theta + \dots \\ &= A(0,5 + 0,636 \operatorname{sen}\theta + 0,212 \operatorname{sen}3\theta + 0,127 \operatorname{sen}5\theta + \dots) \end{aligned}$$

El espectro de frecuencias del tren de pulsos lo muestra la figura 2.18. Este espectro consiste sólo de líneas correspondientes a valores enteros de n , de tal manera que resulta ser un espectro discreto de frecuencia. Este espectro no entrega información respecto del ángulo de fase de las componentes, pero observamos que a medida que el periodo T de la función crece, las líneas del espectro son más próximas unas a otras. En el límite (cuando $T \rightarrow \infty$), el espectro discreto ($\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$) se aproxima a uno continuo. Este espectro discreto de frecuencia es una característica de las ondas periódicas.

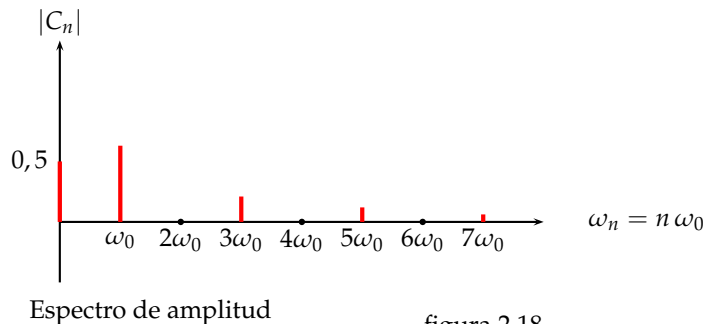


figura 2.18

Ejemplo 2.8.6. Hallemos el espectro de frecuencias de la representación en serie de Fourier de la función

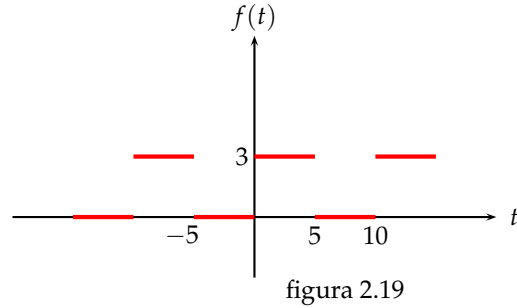
$$f(t) = \begin{cases} 0, & -5 < t < 0 \\ 3, & 0 < t < 5 \end{cases}, \quad f(t) = f(t+10)$$

Para el coeficiente a_0 tenemos

$$a_0 = \frac{1}{5} \int_0^5 f(t) dt = \frac{1}{5} \int_0^5 3 dt = 3$$

El coeficiente a_n es

$$a_n = \frac{1}{5} \int_0^5 3 \cos\left(\frac{n\pi t}{5}\right) dt = \frac{3}{n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{5}\right) \Big|_0^5 = 0$$



El coeficiente b_n es tal que

$$b_n = \frac{1}{5} \int_0^5 3 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{5}\right) dt = -\frac{3}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi t}{5}\right) \Big|_0^5 = -\frac{3}{n\pi} (\cos(n\pi) - 1) = \frac{6}{(2n-1)\pi}$$

Para el espectro tenemos que:

$$C_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{3}{2} \quad \text{y} \quad C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{6}{(2n-1)\pi}$$

La figura 2.20 muestra el espectro

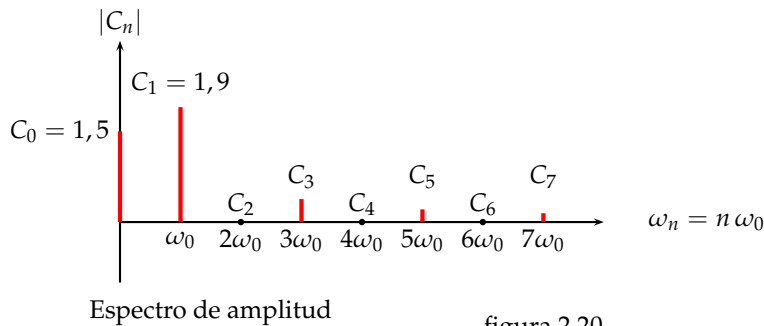


figura 2.20

2.9. Serie de Fourier en exponencial compleja

Ahora vamos a escribir la serie de Fourier de una función f en términos de expresiones complejas, para ello nos valemos de la conocida fórmula de Euler $e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$, de la cual obtenemos $e^{-i\theta} = \cos \theta - i \operatorname{sen} \theta$. Al sumar estas dos expresiones se obtiene

$$\cos \theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$$

y al restarlas

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$$

de esta manera

$$\cos n \omega_0 t = \frac{1}{2} (e^{n \omega_0 t i} + e^{-n \omega_0 t i}) \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} n \omega_0 t = \frac{1}{2i} (e^{n \omega_0 t i} - e^{-n \omega_0 t i})$$

2.9 Serie de Fourier en exponencial compleja

reemplazando en la serie de Fourier

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \frac{1}{2} \left(e^{n \omega_0 t} + e^{-n \omega_0 t} \right) + b_n \cdot \frac{1}{2i} \left(e^{n \omega_0 t} - e^{-n \omega_0 t} \right) \\ &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}(a_n - ib_n)e^{n\omega_0 t} + \frac{1}{2}(a_n + ib_n)e^{-n\omega_0 t} \right) \end{aligned}$$

Haciendo los reemplazos

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0, \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \quad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$$

la serie se reduce a

$$\begin{aligned} f(t) &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{n \omega_0 t} + c_{-n} e^{-n \omega_0 t} \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{n \omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-n \omega_0 t} \end{aligned}$$

reemplazando n por $-n$ en la segunda serie

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{n \omega_0 t} + \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n e^{n \omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{n \omega_0 t}$$

Para los coeficientes se tiene

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt \\ c_n &= \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos n \omega_0 t dt - \frac{2i}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sen n \omega_0 t dt \right) \end{aligned}$$

al simplificar y factorizar

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) (\cos n \omega_0 t - i \sen n \omega_0 t) dt$$

Esta expresión, en forma exponencial se escribe

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-n \omega_0 t} dt$$

Ejemplo 2.9.1. Hallemos la serie de Fourier compleja de la función

$$f(t) = \begin{cases} -1, & -\frac{T}{2} < t < 0 \\ 1, & 0 < t < \frac{T}{2} \end{cases}, \quad f(t) = f(t + T)$$

El cálculo del coeficiente c_n es como sigue

$$\begin{aligned}
 c_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-n \omega_0 t} dt \\
 &= \frac{1}{T} \left(\int_0^{T/2} e^{-n \omega_0 t} dt + \int_{-T/2}^0 -e^{-n \omega_0 t} dt \right) \\
 &= \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{n \omega_0 i} \left(2 - e^{n \omega_0 i T/2} - e^{-n \omega_0 i T/2} \right) \\
 &= \frac{1}{2n\pi i} \cdot \left(2 - e^{n\pi i} - e^{-n\pi i} \right) = \frac{1}{n\pi i} (1 - \cos n\pi) \\
 &= \begin{cases} 0, & n \text{ par} \\ -\frac{2i}{n\pi}, & n \text{ impar} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Hemos usado el hecho que $T\omega_0 = 2\pi$. Por otra parte,

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = 0$$

pues la función f es impar. En consecuencia, la serie de Fourier de f es

$$f(t) = -\frac{2i}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2k-1} e^{(2k-1)\omega_0 t}$$

Vamos a comprobar este resultado pasando de la forma exponencial o compleja a la forma trigonométrica. Sabemos que

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \quad \text{y} \quad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$$

Al sumar se obtiene $a_n = 2\text{Re}(c_n)$ y al restar $b_n = -2\text{Im}(c_n)$.

Ahora bien, observando la serie compleja de nuestro campo, el coeficiente $a_n = 0$. Para el coeficiente b_n tenemos.

$$b_n = -2\text{Im} \left(-\frac{i}{n\pi} (1 - \cos n\pi) \right) = -2\text{Im} \left(\begin{cases} 0, & n \text{ par} \\ -\frac{2i}{n\pi}, & n \text{ impar} \end{cases} \right) = \begin{cases} 0, & n \text{ par} \\ \frac{4}{n\pi}, & n \text{ impar} \end{cases}$$

De esta forma, la serie de Fourier corresponde exactamente, a la obtenida anteriormente. Esto es

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \text{sen}(2k-1)\omega_0 t$$

2.9 Serie de Fourier en exponencial compleja

Ejemplo 2.9.2. Hallemos serie de Fourier, trigonométrica y compleja, de la función de periodo 2π $f(t) = \frac{5t}{\pi}$.

$T\omega_0 = 2\pi$ implica $\omega_0 = 1$, $T = b - a = 2\pi$. Elegimos como intervalo de integración $-\pi \leq x \leq \pi$. La función $f(t) = \frac{5t}{\pi}$ es impar, de modo que coeficiente $a_n = 0$. El cálculo del coeficiente b_n es como sigue

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{5t}{\pi} \operatorname{sen} nt \, dt = \frac{10}{\pi^2} \int_0^{\pi} t \operatorname{sen} nt \, dt \\ &= \frac{10}{\pi^2} \left[-\frac{t}{n} \cos nt \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nt \, dt \right] = -\frac{10}{n\pi} \cos n\pi \end{aligned}$$

El coeficiente a_0 es

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{5t}{\pi} dt = 10$$

En consecuencia, la forma trigonométrica de la serie es

$$f(t) = 5 - \frac{10}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen} nt$$

Para hallar la forma compleja tenemos

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-n\omega_0 ti} dt = \frac{5}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} t e^{n\omega_0 ti} dt$$

si hacemos $u = t$ entonces $du = dt$, $dv = e^{n\omega_0 ti} dt$, $v = -\frac{1}{n\omega_0 i} e^{-n\omega_0 ti}$. Se tiene

$$c_n = \frac{5i}{n\pi}$$

Finalmente, $c_0 = \frac{1}{2}a_0$ implica $c_0 = 5$. Con lo cual

$$f(t) = 5 + \left(\frac{5i}{\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{n} e^{nti}, n \neq 0 \right)$$

Dada una función periódica f , le corresponde una y sólo una serie de Fourier, es decir, le corresponde un conjunto único de coeficientes c_n . Por ello, los coeficientes c_n especifican a $f(t)$ en el dominio de la frecuencia de la misma manera que $f(t)$ especifica la función en el dominio del tiempo.

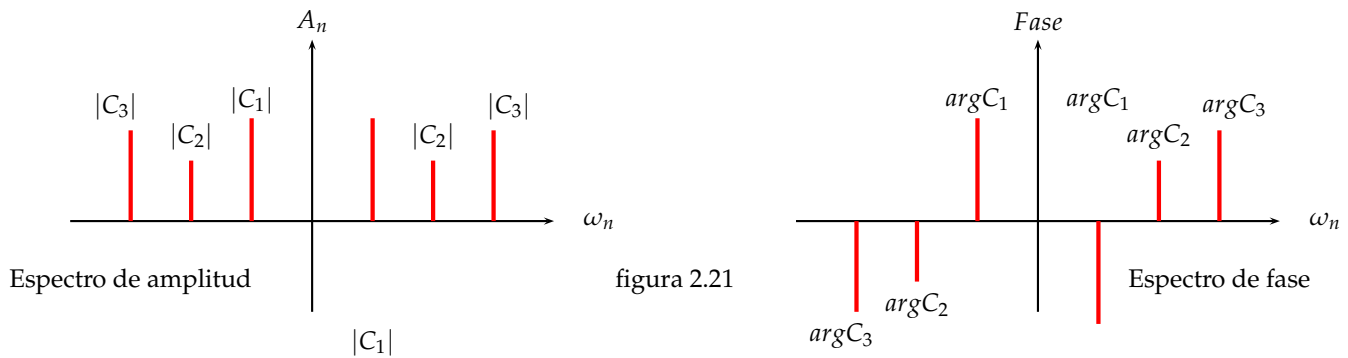
2.9.1. Espectro bilateral de una señal periódica

Al espectro de amplitudes obtenido de la forma trigonométrica de la serie de Fourier se le denomina espectro unilateral de amplitudes, mientras que al espectro de amplitudes obtenido de la forma exponencial compleja se le denomina espectro bilateral de amplitudes. Este último no tiene sentido

físico (aparecen armónicos en frecuencias negativas, que no existen en la realidad). Los armónicos negativos aparecen por la descomposición del coseno (o seno) en la suma de 2 exponenciales complejas. Sólo tienen sentido matemático. La correspondencia entre el espectro bilateral y el unilateral es que el bilateral es completamente simétrico con respecto al eje de ordenadas, y las amplitudes están divididas por 2 con respecto al espectro unilateral. El bilateral puede obtenerse con los coeficientes C_n de la serie exponencial de Fourier ya que si

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n e^{in\omega_0 t}$$

el espectro de esta señal será el siguiente:



La señal periódica con periodo T tiene, en general, componentes de frecuencia en $\frac{1}{T}, \frac{2}{T}, \dots, \frac{n}{T}$, donde $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

Ejemplo 2.9.3. La serie de Fourier compleja de la función

$$f(t) = \begin{cases} -1, & -\frac{T}{2} < t < 0 \\ 1, & 0 < t < \frac{T}{2} \end{cases}, \quad f(t) = f(t + T)$$

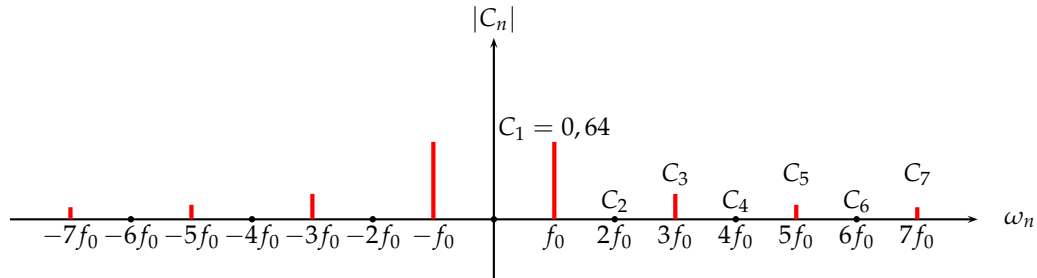
tiene coeficiente

$$C_n = \begin{cases} 0, & n \text{ par} \\ -\frac{2i}{(2n-1)\pi}, & n \text{ impar} \end{cases}$$

De esto,

$$|C_n| = \frac{2}{(2n-1)\pi}$$

2.9 Serie de Fourier en exponencial compleja



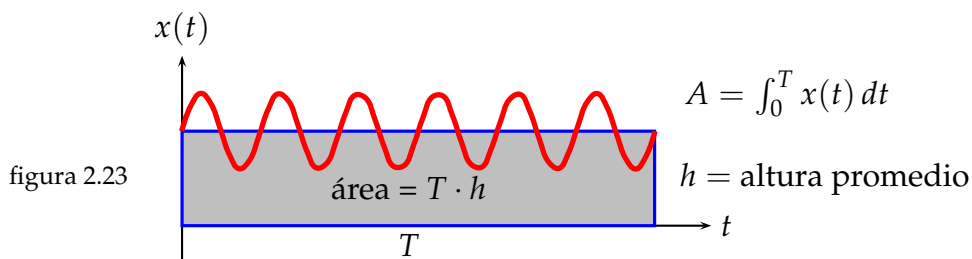
Espectro de amplitud

figura 2.22

Cabe señalar que la forma trigonométrica y la forma compleja de Fourier describen el mismo espectro, la única diferencia es que la forma trigonométrica tiene sentido físico real (frecuencias sólo positivas, maneja el coseno) y la compleja no (maneja las exponenciales complejas en las que se puede dividir un coseno). De esta forma, cuando desarrollamos la forma compleja de las series de Fourier obtendremos un espectro de amplitudes bilateral, en donde tendremos un semieje negativo de abscisas. El espectro de amplitudes bilateral tendrá en el semieje positivo un espectro de idéntica forma al espectro unilateral, pero todas las amplitudes serán la mitad que en el unilateral (el sumatorio en la forma compleja está multiplicado por el término $\frac{1}{T}$, mientras que en la trigonométrica está multiplicado por $\frac{2}{T}$). Además el espectro bilateral tendrá repetido el espectro del semieje positivo en el semieje negativo, resultando ambos en una imagen especular con el eje de simetría en el eje ordenadas. Por ello, al transformar la forma compleja en una forma real las amplitudes de los espectros de ambos semiejes se suman, resultando en el espectro unilateral.

2.9.2. Potencia y teorema de Parseval

El promedio o valor medio de una señal cualquiera $x(t)$ en un periodo dado T se puede calcular como la altura de un rectángulo que tenga la misma área que el área bajo la curva de $x(t)$



De acuerdo a lo anterior, si la función periódica $x(t)$ representa una señal de voltaje o corriente, la **potencia media** o **media cuadrática** entregada a una carga resistiva de 1 ohm en un periodo está dada por

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt$$

Si $x(t)$ es periódica, también lo es $x^2(t)$ y el promedio en un periodo será el promedio en cualquier otro periodo. El teorema de Parseval nos permite calcular la integral de $x^2(t)$ mediante los coefi-

cientes complejos c_n de Fourier de la función periódica $x(t)$.

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [x(t)]^2 dt = \sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

O bien, en términos de los coeficientes a_n y b_n como:

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [x(t)]^2 dt = \frac{1}{4}a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

Teorema 2.9.4. (*Parseval*)

Sea f una función periódica de período T que verifica las condiciones de Dirichlet y sea

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)$$

su serie de Fourier. Entonces

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [x(t)]^2 dt = \frac{1}{4}a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [a_n^2 + b_n^2]$$

La potencia media de cada uno de los armónicos presentes en la señal es

$$P_0 = \frac{1}{T} \int_0^T \left[\frac{a_0}{2} \right]^2 dt = \frac{1}{4}a_0^2$$

$$P_n = \frac{1}{T} \int_0^T [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)]^2 dt = \frac{1}{2}a_n^2 + \frac{1}{2}b_n^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

luego, la igualdad de Parseval nos dice que la potencia media de la señal es la suma de las potencias medias de sus componentes armónicos,

$$P = \sum_{n=0}^{\infty} P_n$$

Demostración.

El desarrollo de Fourier para la función f es

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)]$$

Se multiplica esta expresión por $\frac{f(t)}{T}$ y se integra término a término en $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$.

$$\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \left\{ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)] \right\} dt$$

2.9 Serie de Fourier en exponencial compleja

Del cálculo de los coeficientes de la serie de Fourier para f , a saber:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt, \quad a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega_0 t), \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(n\omega_0 t)$$

se sigue que

$$\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t) dt = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [a_n^2 + b_n^2]$$

Teniendo presente que $T = 2L$, entonces el teorema de Parseval toma la forma

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L f^2(t) dt = \frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n^2 + b_n^2]$$

Ejemplo 2.9.5. En el intervalo $[0, \pi]$ la función $f(x) = x(\pi - x)$ tiene el siguiente desarrollo en serie de cosenos.

$$x(\pi - x) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos 2nx$$

Esto resulta de extender en forma par la función $f(x) = x(\pi - x)$ del intervalo $[0, \pi]$ al intervalo $[-\pi, \pi]$. Es decir, de considerar

$$f(x) = \begin{cases} x(\pi - x), & 0 < x < \pi \\ -x(\pi + x), & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

Si $x = 0$, entonces

$$0(\pi - 0) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Esto es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Vamos a probar, usando el Teorema de Parseval, que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

Evalutando de acuerdo con Parseval

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L f^2(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2(\pi - x)^2 dx = \frac{\pi^4}{15}$$

Para determinar los coeficientes restantes recurrimos a la serie de Fourier que representa a la función. Esto es

$$x(\pi - x) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos 2nx$$

Se observa que $a_0 = \frac{\pi^2}{3}$, $a_n = -\frac{1}{n^2}$, $b_n = 0$. En consecuencia, al reemplazar estos valores en

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L f^2(x) dx = \frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

se obtiene que

$$\frac{\pi^4}{15} = \frac{\pi^4}{18} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

2.10. Fenómeno de Gibbs

Si la serie de Fourier para una función $f(t)$ se trunca para lograr una aproximación en suma finita de senos y cosenos, es natural pensar que a medida que agreguemos más armónicos, el sumatorio se aproximará más a $f(t)$. Esto se cumple excepto en las discontinuidades de $f(t)$, en donde el error de la suma finita no tiende a cero a medida que agregamos armónicos. Por ejemplo, consideremos el tren de pulsos u onda cuadrada:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & , \text{ si } -\pi < x < 0 \\ 1 & , \text{ si } 0 < x < \pi \end{cases}$$

La N -ésima suma parcial correspondiente a su serie de Fourier viene dada por la expresión

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)]$$

donde los coeficientes de Fourier se calculan utilizando las fórmulas ya conocidas. Como f es una función impar, entonces $a_k = 0$, para todo $k = 0, 1, 2, \dots$. Por otra parte, b_k es

$$b_k = \frac{2}{\pi} \left(\frac{1 - (-1)^k}{k} \right), \quad k = 1, 2, \dots$$

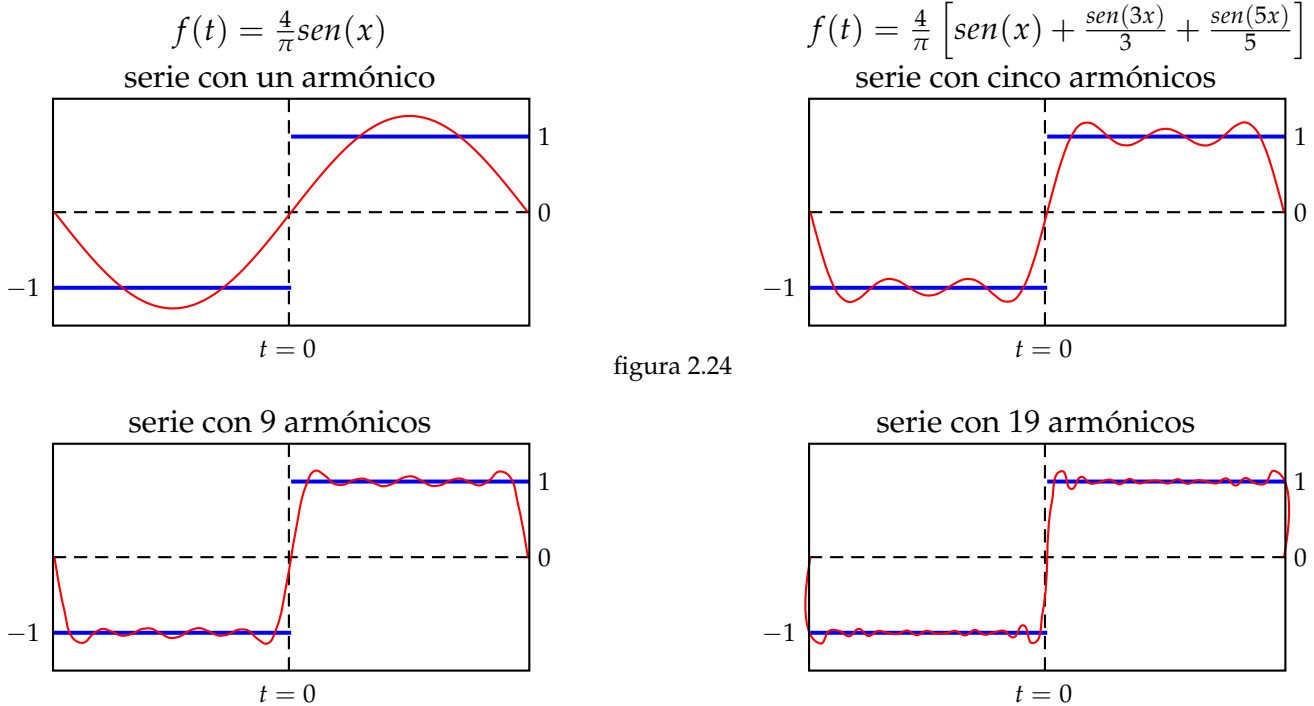
Dado que para k par es $b_k = 0$, tenemos

$$s_{2n-1}(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} \sin(2k-1)x = \frac{4}{\pi} \left(\sin(x) + \frac{\sin(3x)}{3} + \dots + \frac{\sin(2k-1)x}{2(k-1)} \right)$$

Sabemos que, si f y f' son continuas, salvo en un número finito de puntos de discontinuidades de tipo salto, las sumas parciales de Fourier convergen puntualmente a $f(x)$ en los puntos de continuidad de f y a la media de los límites laterales en los puntos de discontinuidad. Este resultado se aplica al caso particular de la función salto que estamos considerando y que presenta una singularidad en $x = 0$ (una discontinuidad de tipo salto). En la figura 2.24 apreciamos la forma en la que, efectivamente, cuando $x \neq 0$, la serie de Fourier aproximan el valor de la función en x , mientras que en $x = 0$

2.10 Fenómeno de Gibbs

convergen a la media de los límites laterales, nula en este caso puesto que $\frac{1}{2}(f(0^+) + f(0^-)) = 0$. En este punto de discontinuidad $x = 0$ se aprecia también con claridad el fenómeno de Gibbs. En efecto, se observa claramente que la gráfica de la suma parcial de Fourier excede a la de la función salto en el punto de discontinuidad. Por ejemplo, a la derecha del punto $x = 0$ se ve cómo la gráfica de la suma parcial de Fourier supera con nitidez a la de la función salto. Las gráficas de la figura 2.24, donde este hecho se pone de manifiesto, se han conseguido con 1, 3, 9 y 19 armónicos, respectivamente.



El fenómeno de Gibbs también se produce en los extremos $x = \pm\pi$ del intervalo $(-\pi, \pi)$. Esto es debido a que la suma parcial de Fourier aproxima a la extensión periódica de periodo 2π de la función salto, que presenta discontinuidades en los puntos de la forma $x = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. Se puede demostrar, para esta función particular que el máximo de $s_{2n-1}(x)$ más cercano a $x = 0$ (por la derecha) es el punto $x = \frac{\pi}{2n}$ y que en este punto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n-1}\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{2}{\pi} \text{Si}(\pi) \sim 1,1790$$

donde

$$\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\text{sen}(t)}{t} dt$$

Este cálculo nos indica que las aproximaciones que nos ofrecen las sumas parciales de Fourier exceden al valor verdadero de la función, a la derecha, es decir, a $f(0^+) = 1$ en 0,18, lo que supone aproximadamente un 9 % de la longitud del salto, que en este caso es 2.

Mejores aproximaciones se obtienen con software especializado, tal como lo muestran las siguientes aproximaciones producidas en Maple.

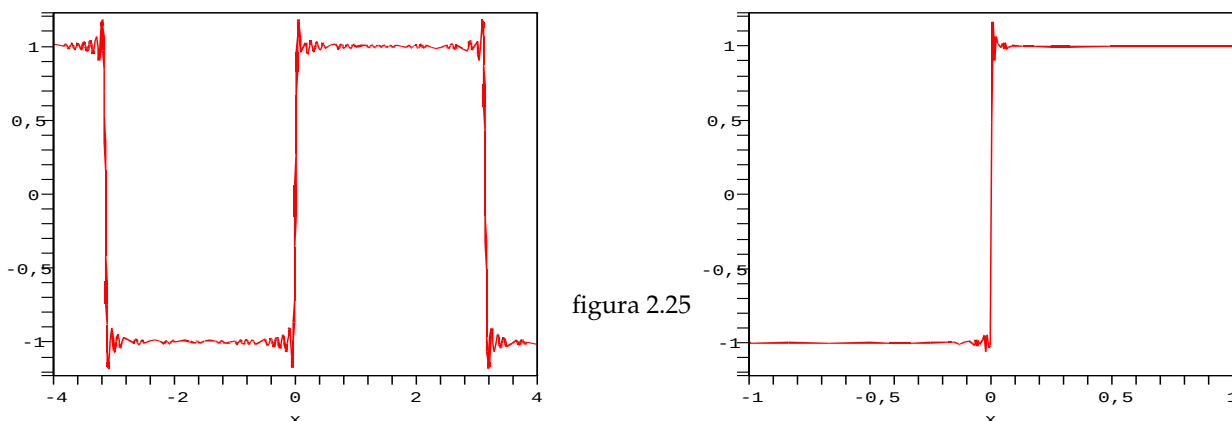


figura 2.25

En general, se puede demostrar el siguiente teorema, debido a M. Bôcher

Teorema 2.10.1. Sea f una función real de variable real, con periodo 2π . Supongamos que f y f' son ambas continuas excepto para un número finito de discontinuidades de tipo salto en el intervalo $[-\pi, \pi]$. Sea $s_N(x)$ la suma parcial de orden N de Fourier. Entonces, en un punto a de discontinuidad, las gráficas de las funciones $s_N(x)$ convergen al segmento vertical (figura 2.25) de longitud

$$L = \frac{2}{\pi} \text{Si}(\pi) |f(a^+) - f(a^-)|$$

centrado en el punto $(a, \frac{1}{2}(f(a^+) + f(a^-)))$.

La razón entre la longitud del segmento L (al que tienden las gráficas de las $s_N(x)$) y la longitud del salto de la discontinuidad, es decir,

$$\mathcal{L} = |f(a^+) - f(a^-)|$$

se denomina **constante de Gibbs** y su valor es

$$\frac{L}{\mathcal{L}} = \frac{2}{\pi} \text{Si}(\pi)$$

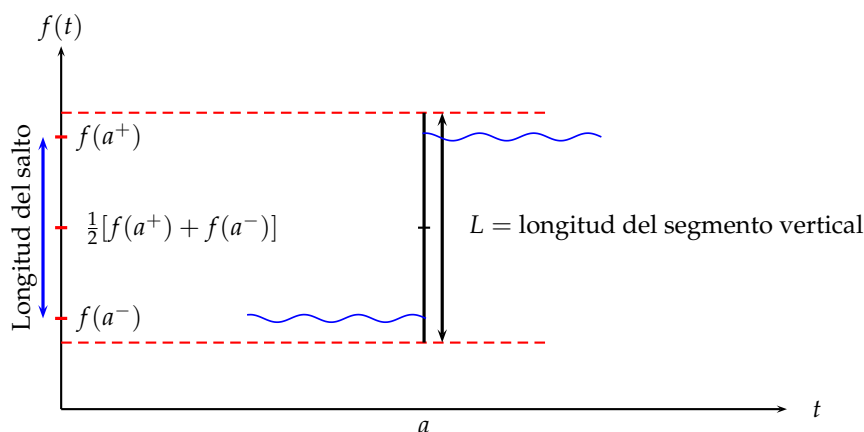


figura 2.26

2.11. Problemas Resueltos

Ejemplo 2.11.1. Demostrar que la función $f(t) = k$, es periódica.

Sea T un número real positivo, entonces $f(T + t) = k = f(t)$, de manera que f es periódica.

Ejemplo 2.11.2. Demostrar que si la función $f(t)$ es periódica de periodo T , entonces la función $f(at)$ es periódica de periodo $\frac{T}{a}$.

Por hipótesis, $f(T + t) = f(t)$, por demostrar que $f(at) = f(at + \frac{T}{a})$. Tenemos

$$\begin{aligned} g(t) = f(at) &\implies g(t) = f(at + T) \\ &\implies g(t) = f\left(a\left(t + \frac{T}{a}\right)\right) \\ &\implies g(t) = g\left(t + \frac{T}{a}\right) \end{aligned}$$

Luego, g es periódica de periodo $\frac{T}{a}$.

Ejemplo 2.11.3. Demostrar que si la función $f(t)$ es periódica de periodo T e integrable, entonces la función

$$f_a(t) = \frac{1}{2a} \int_{t-a}^{t+a} f(y) dy$$

es periódica de periodo T .

Para demostrar que $f_a(t) = f_a(t + T)$, por periodicidad de f tenemos

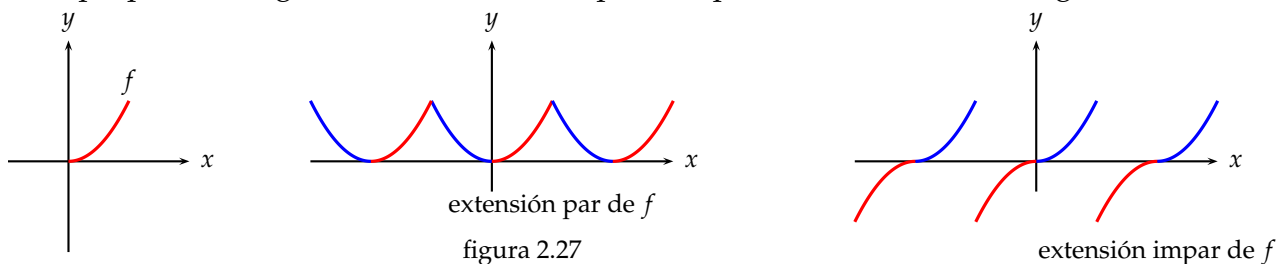
$$f_a(t) = \frac{1}{2a} \int_{t-a}^{t+a} f(y) dy \implies f_a(t) = \frac{1}{2a} \int_{t-a}^{t+a} f(y + T) dy$$

Haciendo el cambio de variables $y + T = u$

$$f_a(t) = \frac{1}{2a} \int_{t+T-a}^{t+T+a} f(u) du = \frac{1}{2a} f_a(t + T)$$

Ejemplo 2.11.4. Desarrollemos en serie de Fourier la función $f(x) = x^2$ definida en el intervalo $[0, \pi]$, de tres formas, mediante una extensión par, mediante una impar, y otra sin apellido.

Es claro que la función cumple con las condiciones de Dirichlet. Esto es; continua por tramos e integral impropia convergente. Las extensiones par e impar se muestran en las figuras (2.27)



Extensión par

De acuerdo con la definición de extensión par tenemos

$$E_P f(x) = x^2, \quad -\pi < x < \pi, \quad f(x + 2\pi) = f(x)$$

Por ser función par, su serie de Fourier contiene solamente cosenos. Luego, $b_n = 0$. Para a_n tenemos

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 \cos n\pi \, dx = \frac{4}{n^2} \cos n\pi = (-1)^n \frac{4}{n^2}, \quad n \neq 0$$

El coeficiente a_0 es tal que

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 \, dx = \frac{2\pi^2}{3}$$

Se concluye que una serie de Fourier para $f(x) = x^2$ en $0 < x < \pi$ es

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos nx$$

Extensión Impar

De acuerdo a la definición, la extensión impar es

$$E_I f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 < x < \pi \\ -x^2, & -\pi < x < 0 \end{cases}, \quad f(x + 2\pi) = f(x)$$

Su serie de Fourier contiene solamente senos, de modo que $a_n = 0, \forall n$. Respecto de b_n se tiene:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 \sen nx \, dx = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{x^2}{n} \cos nx \Big|_0^\pi + \frac{2}{n} \int_0^\pi x \cos nx \, dx \right] \\ &= -\frac{2\pi}{n} \cos n\pi + \frac{4}{\pi n^3} [\cos n\pi - 1] = \begin{cases} \frac{2\pi}{n} - \frac{8}{\pi n^3}, & n \text{ impar} \\ -\frac{2\pi}{n}, & n \text{ par} \end{cases} \end{aligned}$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} x^2 &= 2\pi \sen x - \frac{8}{\pi} \sen x - \pi \sen 2x + \frac{2}{3} \pi \sen 3x + -\frac{8}{27\pi} \sen 3x \\ &\quad - \frac{\pi}{2} \sen 4x + \frac{2}{5} \pi \sen 5x - \frac{8}{125\pi} \sen 5x - \frac{\pi}{3} \sen 6x + \dots \\ &= 2\pi \left(\sen x - \frac{1}{2} \sen 2x + \dots \right) - \frac{8}{\pi} \left(\sen x + \frac{1}{3^3} \sen 3x + \dots \right) \end{aligned}$$

Otra extensión

La extensión que utilizamos ahora, consiste en definir nula la función en el intervalo simétrico $[-\pi, 0]$. Esto es,

$$f(t) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x \leq 0 \\ x^2, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}, \quad f(t+2\pi) = f(t)$$

El cálculo de los coeficientes lo hacemos en términos de la frecuencia angular ω_0 . En este caso $T = 2\pi$, de manera que

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t^2 \cos nt \, dt$$

al integrar por partes, con $u = t^2$, $du = 2t dt$, $dv = \cos nt \, dt$, $v = \frac{1}{n} \sin nt$, se obtiene

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left(\frac{t^2}{n} \sin nt \, dt \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n} \int_0^{\pi} t \sin nt \, dt \right)$$

la primera de las expresiones dentro del paréntesis al evaluarla entre 0 y π es cero. Para la integral restante, usemos de nuevo integración por partes, con $u = t$, $du = dt$, $dv = \sin nt \, dt$, $v = -\frac{1}{n} \cos nt$. Se tiene

$$\begin{aligned} a_n &= -\frac{2}{n\pi} \left(-\frac{t}{n} \cos nt \, dt \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos nt \, dt \right) \\ &= \frac{2}{n^2} \cos n\pi = \frac{2}{n^2} (-1)^n = \begin{cases} \frac{2}{n^2}, & n \text{ par} \\ -\frac{2}{n^2}, & n \text{ impar} \end{cases} \end{aligned}$$

Veamos ahora el valor de a_0

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t^2 \, dt = \frac{\pi^2}{3}$$

Para b_n tenemos

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t^2 \sin nt \, dt$$

al integrar por partes, $u = t^2$, $du = 2t dt$, $dv = \sin nt \, dt$, $v = -\frac{1}{n} \cos nt$, se tiene

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left(-\frac{t^2}{n} \cos nt \Big|_0^{\pi} + \frac{2}{n} \int_0^{\pi} t \cos nt \, dt \right)$$

Para calcular la integral en el paréntesis, $u = t$, $du = dt$, $dv = \cos nt \, dt$, $v = \frac{1}{n} \operatorname{sen} nt$, para tener

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{\pi}{n} \cos n\pi + \frac{2}{n} \cdot t \operatorname{sen} nt \Big|_0^\pi - \frac{1}{n} \int_0^\pi \operatorname{sen} nt \, dt \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{\pi}{n} \cos n\pi + \frac{2}{n^3} (\cos n\pi - 1) \right) \\ &= \begin{cases} -\frac{\pi}{n}, & n \text{ par} \\ \frac{\pi}{n} - \frac{4}{\pi n^3}, & n \text{ impar} \end{cases} \end{aligned}$$

Concluimos que la serie de Fourier para f , en los puntos de continuidad, es

$$f(t) = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2} (-1)^n \cos nt + \left((-1)^n \left(\frac{2}{\pi n^3} - \frac{\pi}{n} \right) - \frac{2}{\pi n^3} \right) \operatorname{sen} nt$$

En todo punto de continuidad la serie converge al valor de la función en ese punto. En el punto de discontinuidad $t = \pi$ la serie converge al valor promedio de los límites laterales, esto es, converge a $\frac{\pi^2}{2}$, de manera que se tiene

$$\frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2} \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Es importante recalcar que para una función definida en un intervalo $[0, L]$ puede existir más de una serie de Fourier que la represente. Ello es así, pues si se define una función sobre el intervalo $[0, L]$ y no se especifica el periodo, entonces se está en libertad de escoger un periodo cualquiera y definir convenientemente la función. Eso es lo que muestra este primer problema.

Ejemplo 2.11.5. Considerar $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n} = \frac{\pi - x}{2}$, $0 < x < 2\pi$. Demostrar las siguientes igualdades:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi}{2}x + \frac{1}{4}x^2$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4} = \frac{7\pi^4}{720}$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} - \frac{\pi^2}{12}x^2 - \frac{\pi}{12}x^3 - \frac{1}{48}x^4$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n^3} = \frac{\pi^2}{6}x - \frac{\pi}{4}x^2 + \frac{1}{12}x^3$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

Soluciones:

El problema entrega como hipótesis la representación en serie de Fourier de la función que se encuentra a la derecha de la igualdad en el intervalo que se indica.

2.11 Problemas Resueltos

1) Un primer camino, para demostrar lo pedido, consiste en integrar, término a término en el intervalo $(0, x)$ ($x < 2\pi$), la expresión

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n} = \frac{\pi - x}{2}, \quad 0 < x < 2\pi$$

para tener

$$\begin{aligned} \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n} \right) dx &= \int_0^x \frac{\pi - x}{2} dx \\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^x \frac{\operatorname{sen} nx}{n} \right) dx &= \frac{\pi}{2}x - \frac{1}{4}x^2 \\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2} \cos nx \right) &= \frac{\pi}{2}x - \frac{1}{4}x^2 \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} &= -\frac{\pi}{2}x + \frac{1}{4}x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

Del problema anterior sabemos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi}{2}x + \frac{1}{4}x^2$$

Esto completa la demostración y sirve para ilustrar el hecho que a partir de un desarrollo conocido se pueden obtener otros desarrollos.

Una forma alternativa para resolver el mismo problema es realizar la integración de la función $\frac{\pi-x}{2}$ en el intervalo dado, para luego encontrar su desarrollo en serie de Fourier. Veamos esto

$$F(x) = \int_0^x \frac{\pi - x}{2} dx = \frac{\pi}{2}x - \frac{1}{4}x^2, \quad 0 < x < 2\pi$$

Ahora se determina la serie de Fourier para $F(x)$, la que tiene la forma

$$F(x) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx + B_n \operatorname{sen} nx$$

En donde

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\pi x}{2} - \frac{x^2}{4} \right) dx = \frac{\pi^2}{3} \\ A_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\pi x}{2} - \frac{x^2}{4} \right) \cos nx \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} x \cos nx \, dx - \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \cos nx \, dx \end{aligned}$$

En la primera integral, $u = x$, $dv = \cos nx \, dx$, $du = dx$, $v = \frac{1}{n} \operatorname{sen} nx$ implican

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} x \cos nx \, dx = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{n} \operatorname{sen} nx \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} nx \, dx \right) = 0$$

En la segunda integral, $u = x^2$, $du = 2x \, dx$, $dv = \cos nx \, dx$, $v = \frac{1}{n} \operatorname{sen} nx$, hacen que

$$A_n = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{x^2}{n} \operatorname{sen} nx \Big|_0^{2\pi} - \frac{2}{n} \int_0^{2\pi} x \operatorname{sen} nx \, dx \right)$$

Después de evaluar

$$A_n = \frac{1}{2n\pi} \int_0^{2\pi} x \operatorname{sen} nx \, dx$$

Ahora, con $u = x$, $du = dx$, $dv = \operatorname{sen} nx \, dx$, $v = -\frac{1}{n} \cos nx$ resulta

$$A_n = \frac{1}{2n\pi} \left(-\frac{x}{n} \cos nx \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} \cos nx \, dx \right)$$

Al evaluar

$$A_n = -\frac{1}{2n\pi} \left(-\frac{2\pi}{n} \right) = \frac{1}{n^2}$$

Para hallar B_n tenemos

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\pi x}{2} - \frac{x^2}{4} \right) \operatorname{sen} nx \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} x \operatorname{sen} nx \, dx - \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \operatorname{sen} nx \, dx \end{aligned}$$

En la primera integral, $u = x$, $du = dx$, $dv = \operatorname{sen} nx \, dx$, $v = -\frac{1}{n} \cos nx$.

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} x \operatorname{sen} nx \, dx = \frac{1}{2} \left(-\frac{x}{n} \cos nx \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} \cos nx \, dx \right) = -\frac{\pi}{n}$$

Las sustituciones, $u = x^2$, $du = 2x \, dx$, $dv = \operatorname{sen} nx \, dx$, $v = -\frac{1}{n} \cos nx$, en la segunda integral conducen a

$$B_n = -\frac{\pi}{n} - \frac{1}{4\pi} \left(-\frac{x^2}{n} \cos nx \Big|_0^{2\pi} + \frac{2}{n} \int_0^{2\pi} x \cos nx \, dx \right)$$

Al evaluar

$$B_n = -\frac{1}{2\pi n} \int_0^{2\pi} x \cos nx \, dx$$

2.11 Problemas Resueltos

Ahora, con $u = x$, $du = dx$, $dv = \cos nx \, dx$, $v = \frac{1}{n} \operatorname{sen} nx$, se tiene

$$B_n = -\frac{1}{2\pi n} \left(\frac{x}{n} \operatorname{sen} nx \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} nx \, dx \right)$$

Al evaluar, $B_n = 0$. Luego, la serie de Fourier de F es

$$F(x) = \frac{\pi}{2} x - \frac{1}{4} x^2 = \frac{1}{6} \pi^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos nx$$

A partir de esto se obtiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos nx = \frac{1}{6} \pi^2 - \frac{\pi}{2} x + \frac{1}{4} x^2$$

2) Probemos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n^3} = \frac{\pi^2}{6} x - \frac{\pi}{4} x^2 + \frac{1}{12} x^3$

Para ello integramos, respecto de x , la expresión

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi}{2} x + \frac{1}{4} x^2$$

Se tiene

$$\begin{aligned} \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} \right) dx &= \int_0^x \left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi}{2} x + \frac{1}{4} x^2 \right) dx \\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^x \frac{\cos nx}{n^2} \right) dx &= \frac{\pi^2}{6} x - \frac{\pi}{4} x^2 + \frac{1}{12} x^3 \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n^3} &= \frac{\pi^2}{6} x - \frac{\pi}{4} x^2 + \frac{1}{12} x^3 \end{aligned}$$

Otra alternativa para resolver este problema es considerar la función

$$G(x) = \frac{\pi^2}{6} x - \frac{\pi}{4} x^2 + \frac{1}{12} x^3$$

El desarrollo de $G(x)$ en serie de Fourier en el intervalo $0 \leq x \leq 2\pi$, tiene la forma

$$G(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx + B_n \operatorname{sen} nx$$

En donde

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\pi^2}{6} x - \frac{\pi}{4} x^2 + \frac{1}{12} x^3 \right) dx = 0$$

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\pi^2}{6} x - \frac{\pi}{4} x^2 + \frac{1}{12} x^3 \right) \cos nx \, dx = 0$$

La integral del A_n es cero, pues se considera integración por partes, con

$$u = \frac{\pi^2}{6} x - \frac{\pi}{4} x^2 + \frac{1}{12} x^3, \quad dv = \cos nx \, dx, \quad v = \frac{1}{n} \operatorname{sen} nx$$

La expresión $u \cdot v$, que involucra la función seno, es claramente cero en ambos límites de la integral. La integral de $v \cdot du$, al resolverla, también es cero.

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\pi^2}{6} x - \frac{\pi}{4} x^2 + \frac{1}{12} x^3 \right) \operatorname{sen} nx \, dx = \frac{1}{n^3}$$

Luego, la serie de Fourier para $G(x)$ es

$$G(x) = \frac{\pi^2}{6} x - \frac{\pi}{4} x^2 + \frac{1}{12} x^3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \operatorname{sen} nx$$

Lo que demuestra la afirmación.

$$3) \quad \text{Para probar que } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} - \frac{\pi^2}{12} x^2 - \frac{\pi}{12} x^3 - \frac{1}{48} x^4$$

se integra en $0 \leq x \leq 2\pi$ la expresión

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n^3} = \frac{\pi^2}{6} x - \frac{\pi}{4} x^2 + \frac{1}{12} x^3$$

Se tiene que

$$\begin{aligned} \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n^3} \right) dx &= \int_0^x \left(\frac{\pi^2}{6} x - \frac{\pi}{4} x^2 + \frac{1}{12} x^3 \right) dx \\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^4} - \frac{1}{n^4} \cos nx \right) &= \frac{\pi^2}{12} x^2 - \frac{\pi}{12} x^3 + \frac{1}{48} x^4 \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^4} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} - \frac{\pi^2}{12} x^2 + \frac{\pi}{12} x^3 - \frac{1}{48} x^4 \end{aligned}$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} - \frac{\pi^2}{12} x^2 + \frac{\pi}{12} x^3 - \frac{1}{48} x^4$$

Como alternativa para resolver este problema está el encontrar la serie de Fourier de la función

$$H(x) = \frac{\pi^2}{12} x^2 - \frac{\pi}{12} x^3 + \frac{1}{48} x^4$$

2.11 Problemas Resueltos

Al integrar término a término en $0 \leq x \leq 2\pi$, se tiene

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\pi^2}{12} x^2 - \frac{\pi}{12} x^3 + \frac{1}{48} x^4 \right) dx = \frac{\pi^4}{45}$$

El coeficiente A_n es tal que

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\pi^2}{12} x^2 - \frac{\pi}{12} x^3 + \frac{1}{48} x^4 \right) \cos nx \, dx$$

El valor de cada integral es el siguiente.

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{\pi^2}{12} x^2 \cos nx &= \frac{\pi^3}{3n^2} \\ - \int_0^{2\pi} \frac{\pi}{12} \cos nx \, dx &= -\frac{\pi^3}{n^2} \\ \int_0^{2\pi} \frac{x^4}{48} \cos nx \, dx &= \frac{2\pi^3}{3n^2} - \frac{\pi}{n^4} \end{aligned}$$

De esta manera

$$A_n = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi^3}{3n^2} - \frac{\pi^3}{n^2} + \frac{2\pi^3}{3n^2} - \frac{\pi}{n^4} \right) = -\frac{1}{n^4}$$

El coeficiente B_n para la función $H(x)$ es cero. Esto es

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\pi^2}{12} x^2 - \frac{\pi}{12} x^3 + \frac{1}{48} x^4 \right) \sen nx \, dx = 0$$

De manera que la serie de Fourier de $H(x)$ es

$$\frac{\pi^2}{12} x^2 - \frac{\pi}{12} x^3 + \frac{1}{48} x^4 = \frac{\pi^4}{90} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^4}$$

De donde se obtiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} - \frac{\pi^2}{12} x^2 + \frac{\pi}{12} x^3 - \frac{1}{48} x^4$$

4) Para probar que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4} = \frac{7\pi^4}{720}$, se considera la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} - \frac{\pi^2}{12} x^2 + \frac{\pi}{12} x^3 - \frac{1}{48} x^4$$

cuyo desarrollo es válido en el intervalo $[0, 2\pi]$. En el punto de continuidad $x = \pi$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} - \frac{\pi^4}{12} + \frac{\pi^4}{12} - \frac{\pi^4}{48}$$

Al simplificar, considerando que $\cos n\pi = (-1)^n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4} = -\frac{7\pi^4}{720}$$

Multiplicando ahora ambos miembros por -1

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4} = \frac{7\pi^4}{720}$$

5) Para probar que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$, se evalúa en el punto de continuidad $x = \frac{\pi}{2}$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n^3} = \frac{\pi^2}{6} x - \frac{\pi}{4} x^2 + \frac{x^3}{12}$$

Se tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{12} - \frac{\pi^3}{16} + \frac{\pi^3}{96} = \frac{\pi^3}{32}$$

6) Para probar que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$, se considera, en la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi}{2} x + \frac{1}{4} x^2$$

el punto de continuidad $x = \pi$, para tener

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{12}$$

Ejemplo 2.11.6. Sea $f(x) = x$, $0 \leq x \leq \pi$, $f(x + \pi) = f(x)$. Trazar la gráfica de f y demostrar que

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen} 2nx$$

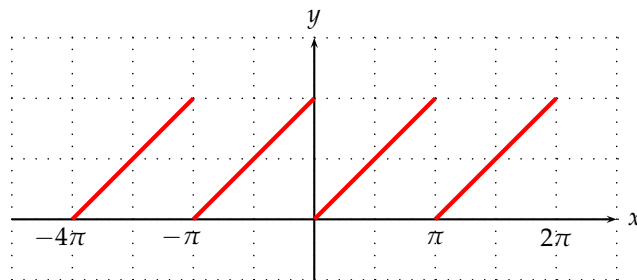


figura 2.28

2.11 Problemas Resueltos

El que $f(x + \pi) = f(x)$ significa que la función f es periódica de periodo π . Para hallar la serie de Fourier de f observemos que $b - a = \pi$. Luego

$$a_0 = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x dx = \pi$$

Para los restantes coeficientes se tiene

$$a_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos \frac{2n\pi x}{b-a} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \cos 2nx dx$$

si $u = x$, $du = dx$, $dv = \cos 2nx dx$, $v = \frac{1}{2n} \sin 2nx$, entonces la integral toma la forma

$$a_n = \frac{2}{\pi} \left(\frac{x}{2n} \sin 2nx \Big|_0^\pi - \frac{1}{2n} \int_0^\pi \sin 2nx dx \right) = -\frac{1}{n\pi} \left(-\frac{1}{2n} \cos 2nx \right)_0^\pi = 0$$

Veamos ahora el coeficiente b_n

$$b_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \sin \frac{2n\pi x}{b-a} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin 2nx dx$$

si $u = x$, $du = dx$, $dv = \sin 2nxdx$, $v = -\frac{1}{2n} \cos 2nx$, entonces

$$b_n = \frac{2}{\pi} \left(-\frac{x}{2n} \cos 2nx \Big|_0^\pi + \frac{1}{2n} \int_0^\pi \cos 2nx dx \right) = \frac{2}{\pi} \left(-\frac{\pi}{2n} \cos 2n\pi \right) = -\frac{1}{n}$$

La serie general de Fourier para una función f que cumpla los requisitos, tiene la forma

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2n\pi x}{b-a} + b_n \sin \frac{2n\pi x}{b-a}$$

de modo que al reemplazar los coeficientes, tenemos

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nx}{n}$$

Ejemplo 2.11.7. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$, $0 < x < \pi$. Probar que:

1. $\sum \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} = \frac{\pi}{8} (\pi - 2x)$, $0 < x < \pi$.
2. $\sum \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3} = \frac{\pi}{8} (\pi x - x^2)$, $0 < x < \pi$.

$$3. \sum \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^4} = \frac{\pi}{96} (\pi^3 - 6\pi x^2 + 4x^3), 0 < x < \pi.$$

Soluciones:

Cada uno de estos problemas lo resolvemos por integración en el intervalo en que es válido el desarrollo dado.

a) Para hallar los límites de integración se observa que

$$\frac{\pi}{8} (\pi - 2x) = \frac{\pi}{4} \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$$

Luego, hay que integrar entre x y $\frac{\pi}{2}$. Tenemos

$$\int_x^{\pi/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2n-1)x}{2n-1} \right) dx = \int_x^{\pi/2} \frac{\pi}{4} dx$$

Al conmutar la integral con la sumatoria en el primer miembro y calcular la integral del segundo miembro, encontramos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_x^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}(2n-1)x}{2n-1} dx = \frac{\pi}{4} \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$$

después de realizar la integración

$$- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} \Big|_x^{\pi/2} = \frac{\pi}{8} (\pi - 2x) \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} = \frac{\pi}{8} (\pi - 2x)$$

b) Se observa que integrando el resultado anterior entre 0 y x , en el lado derecho se obtiene la expresión $\frac{\pi}{8} (\pi x - x^2)$. En consecuencia,

$$\int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} \right) dx = \int_0^x \frac{\pi}{8} (\pi - 2x) dx$$

Se conmuta la integral con la sumatoria y se integra el segundo miembro

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} dx &= \frac{\pi}{8} (\pi x - x^2) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2n-1)x}{(2n-1)^3} &= \frac{\pi}{8} (\pi x - x^2) \end{aligned}$$

c) Integremos $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2n-1)x}{(2n-1)^3} = \frac{\pi}{8} (\pi x - x^2)$, entre x y $\frac{\pi}{2}$.

$$\int_x^{\pi/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2n-1)x}{(2n-1)^3} \right) dx = \int_x^{\pi/2} \frac{\pi}{8} (\pi x - x^2) dx$$

2.11 Problemas Resueltos

Se conmuta la integral con la sumatoria y se integra el segundo miembro

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_x^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}(2n-1)x}{(2n-1)^3} dx = \frac{\pi}{8} \left(\frac{\pi^3}{12} + \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} \pi x^2 \right)$$

Al integrar el primer miembro

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^4} = \frac{\pi}{96} (\pi^3 - 6\pi x^2 + 4x^3)$$

Es probable que alguien se pregunte como se hallaron los límites de integración, se integra entre x_1 y x_2 el resultado del ejemplo anterior (lado derecho), considerando $x_1 = x$, $x_2 = \frac{\pi}{2}$.

Ejemplo 2.11.8. Sea $f(x) = x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $f(x + \frac{\pi}{2}) = f(x)$. Trazar la gráfica de f y probar que $f(x) = \frac{\pi}{4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} \operatorname{sen} 4nx$.

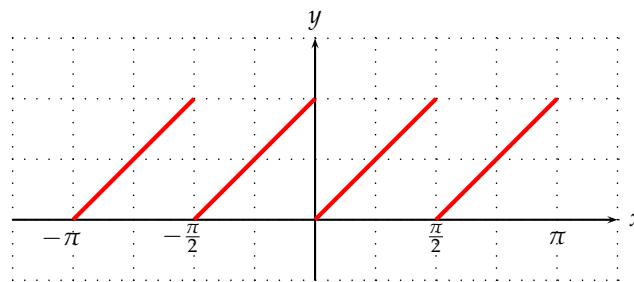


figura 2.29

Para determinar los coeficientes se tiene que $b - a = \frac{\pi}{2}$. Luego

$$a_0 = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} x dx = \frac{\pi}{2}$$

Para los restantes coeficientes se tiene

$$a_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos \frac{2n\pi x}{b-a} dx = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} x \cos 4nx dx$$

si $u = x$, $du = dx$, $dv = \cos 4nx dx$, $v = \frac{1}{4n} \operatorname{sen} 4nx$, entonces

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{4}{\pi} \left(\frac{x}{4n} \operatorname{sen} 4nx \Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{4n} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} 4nx dx \right) \\ &= \frac{4}{\pi} \left(0 + \frac{1}{4n} \cdot \frac{1}{4n} \cos 4nx \right) \Big|_0^{\pi/2} = 0 \end{aligned}$$

Veamos ahora el coeficiente b_n

$$b_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \operatorname{sen} \frac{2n\pi x}{b-a} dx$$

De manera que en este caso

$$b_n = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} x \operatorname{sen} 4nx dx$$

si $u = x, du = dx, dv = \operatorname{sen} 4nx dx, v = -\frac{1}{4n} \cos 4nx$, entonces

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{4}{\pi} \left(-\frac{x}{4n} \cos 4nx \Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{4n} \int_0^{\pi/2} \cos 4nx dx \right) \\ &= \frac{4}{\pi} \left(-\frac{\pi}{8n} + \frac{1}{4n} \cdot \frac{1}{4n} \operatorname{sen} 4nx \right) \Big|_0^{\pi/2} \\ &= \frac{4}{\pi} \left(-\frac{\pi}{8n} \right) = -\frac{1}{2n} \end{aligned}$$

La forma general de la serie Fourier tiene la forma

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2n\pi x}{b-a} + b_n \operatorname{sen} \frac{2n\pi x}{b-a}$$

De modo que al reemplazar los coeficientes

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} 4nx}{2n}$$

Ejemplo 2.11.9. Usar el desarrollo de Fourier de la función $f(x) = x^2$ definida en el intervalo $[0, \pi]$ y su extensión par al intervalo $[-\pi, \pi]$ para probar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^3} \operatorname{sen} nx = \frac{x}{12} (x^2 - \pi^2)$$

El desarrollo de Fourier de $f(x) = x^2$, como extensión par, contiene sólo cosenos y tiene la forma

$$f(x) = \frac{1}{3} \pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} (-1)^n \cos nx$$

Integrando término a término desde 0 hasta x en el intervalo $[0, \pi]$ se tiene

$$\int_0^x x^2 dx = \int_0^x \frac{1}{3} \pi^2 dx + \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} (-1)^n \cos nx \right) dx$$

Al evaluar

$$\frac{1}{3}x^3 = \frac{x}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^3}(-1)^n \operatorname{sen} nx$$

lo que es equivalente a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}(-1)^n \operatorname{sen} nx = \frac{x}{12}(x^2 - \pi^2)$$

Ejemplo 2.11.10. El desarrollo de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$, $0 < x < \pi$, en serie de cosenos de Fourier es

$$f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sum_2^{\infty} \frac{1 + \cos n\pi}{n^2 - 1} \cos 2nx$$

Usar el Teorema de Parseval para demostrar que

$$\frac{\pi^2 - 8}{16} = \frac{1}{1^2 3^2} + \frac{1}{3^2 5^2} + \frac{1}{5^2 7^2} + \cdots$$

El Teorema de Parseval afirma que

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L f^2(x) dx = \frac{1}{2}(a_0)^2 + \sum_1^{\infty} a_n^2 + b_n^2$$

Se observa que existe una extensión par de la función. Esto significa que se trabaja en el intervalo $[-\pi, \pi]$, y que entonces, $T = 2L = b - a = 2\pi \implies L = \pi$. Por otra parte, del desarrollo de la función f se deduce que $f(x) = \operatorname{sen} x$, $a_0 = \frac{4}{\pi}$, $b_n = 0$, y que

$$a_n = \begin{cases} -\frac{4}{\pi(4k^2 - 1)}, & n = 2k, \text{ par} \\ 0, & n \text{ impar} \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que la función $\operatorname{sen}^2 x$ es par, entonces

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 x dx &= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x \right)_0^{\pi} = 1 \\ a_0 &= \frac{4}{\pi} \implies a_0^2 = \left(\frac{4}{\pi} \right)^2 \\ a_n^2 &= \frac{16}{\pi^2(4n^2 - 1)^2} \end{aligned}$$

Luego

$$1 = \frac{8}{\pi^2} + \sum_1^{\infty} \frac{16}{\pi^2(4n^2 - 1)^2}$$

Esto equivale a

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1)^2} = \frac{\pi^2 - 8}{16}$$

Ejemplo 2.11.11. Usando el hecho de que $x(\pi - x) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_1^{\infty} \frac{\cos 2nx}{n^2}$, $0 \leq x \leq \pi$. Demostrar que

$$\frac{\pi^2}{12} = \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

Al evaluar el desarrollo en el punto de continuidad $x = \frac{\pi}{2}$ se tiene

$$\frac{\pi}{2} \left(\pi - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_1^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n^2} \Rightarrow \frac{\pi^2}{12} = \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

Ejemplo 2.11.12. Usando el hecho de que $x(\pi - x) = \frac{8}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}$, $x \in [0, \pi]$, demostrar que

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

Integrando entre 0 y x tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^x x(\pi - x) dx &= \frac{8}{\pi} \int_0^x \left(\sum_1^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3} \right) dx \\ \frac{1}{2} \pi x^2 - \frac{1}{3} x^3 &= -\frac{8}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^4} \Big|_0^x \\ &= -\frac{8}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} \cdot [\cos(2n-1)x - 1] \end{aligned}$$

Con $x = \pi$ se obtiene

$$\frac{1}{6} \pi^3 = \frac{16}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} \Rightarrow \sum_1^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

Ejemplo 2.11.13. Usar $x(\pi - x) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_1^{\infty} \frac{\cos 2nx}{n^2}$ para demostrar que

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$$

2.11 Problemas Resueltos

En primer lugar integramos entre 0 y x para tener

$$\begin{aligned}\int_0^x x(\pi - x) dx &= \int_0^x \frac{\pi^2}{6} dx - \int_0^x \left(\sum_1^\infty \frac{\cos 2nx}{n^2} \right) dx \\ \frac{1}{2} \pi x^2 - \frac{1}{3} x^3 - \frac{\pi^2}{6} x &= - \sum_1^\infty \frac{\sin 2nx}{2n^3}\end{aligned}$$

Tenemos así a la función $f(x) = \frac{\pi}{2} x^2 - \frac{1}{3} x^3 - \frac{\pi^2}{6} x$ escrita en serie de Fourier. Como esta serie contiene sólo senos, entonces estamos en una extensión impar de la función del intervalo $[0, \pi]$ al intervalo $[-\pi, \pi]$. Sus coeficientes son; $a_0 = 0, a_n = 0, b_n = -\frac{1}{2n^3}$. Si ahora aplicamos Parseval, entonces

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} \pi x^2 - \frac{1}{3} x^3 - \frac{\pi^2}{6} x \right)^2 dx = \frac{1}{4} \sum_1^\infty \frac{1}{n^6}$$

de donde

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^6} = \frac{8}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} \pi x^2 - \frac{1}{3} x^3 - \frac{\pi^2}{6} x \right)^2 dx$$

al integrar

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^6} = \frac{8}{\pi} \left(\frac{\pi^2 x^5}{20} + \frac{x^7}{63} + \frac{\pi^4 x^3}{108} - \frac{\pi x^6}{36} - \frac{\pi^3 x^4}{48} + \frac{\pi^2 x^5}{90} \right)_0^\pi$$

Al evaluar

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$$

Ejemplo 2.11.14. Hallar la serie de Fourier de $f(t) = \cos \frac{4\pi t}{c}, t \in [0, 2c]$

Para construir la gráfica tenemos que

$$\frac{4\pi t}{c} = (2n - 1) \frac{\pi}{2} \implies t = (2n - 1) \frac{c}{8}$$

Esto nos proporciona la ubicación de los ceros.

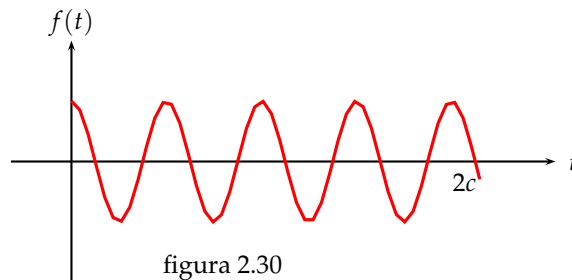


figura 2.30

Calculemos los coeficientes usando la forma general para intervalo $[a, b]$.

$$a_0 = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(t) \cos \frac{2n\pi t}{b-a} dt = \frac{1}{c} \int_0^{2c} \cos \frac{4\pi t}{c} dt = \frac{1}{c} \cdot \frac{c}{4\pi} \sin \frac{4\pi t}{c} \Big|_0^{2c} = 0$$

Para el a_n se tiene que

$$a_n = \frac{1}{c} \int_0^{2c} \cos \frac{4\pi t}{c} \cdot \cos \frac{n\pi t}{c} dt$$

se sabe que $a_n = 0$ para los $n \neq 4$. Veamos el caso $n = 4$.

$$a_4 = \frac{1}{c} \int_0^{2c} \cos^2 \frac{4\pi t}{c} dt = \frac{1}{2c} \int_0^{2c} (1 + \cos \frac{8\pi t}{c}) dt = 1$$

Finalmente, el coeficiente b_n es tal que

$$b_n = \frac{1}{c} \int_0^{2c} \cos \frac{4\pi t}{c} \cdot \sin \frac{n\pi t}{c} dt = 0$$

se concluye que $f(t) = \cos \frac{4\pi t}{c}$. Lo que significa que la serie de Fourier de f es ella misma.

Ejemplo 2.11.15. Hallar una serie de Fourier que converga a $f(t) = \sin^2 \frac{t}{2}$, $\forall t$

Este problema requiere de un “momento de abstracción”, pues no existe la serie ¿Porqué se preguntarán algunos?. Very easy, f tiene que ser periódica, y no lo es. De todas maneras, vamos a arreglar esto, escogiendo el periodo como el mismo de la función. es decir, $T = b - a = 2\pi$. No olvidar que

$$\sin^2 \frac{t}{2} = \frac{1}{2} (1 - \cos t)$$

Tenemos que

$$a_0 = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \frac{t}{2} dt = \frac{1}{2\pi} (t - \sin t) \Big|_0^{2\pi} = 1$$

Para el coeficiente a_n se tiene

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \frac{t}{2} \cdot \cos nt dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) \cdot \cos nt dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{n} \sin nt \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \cos t \cdot \cos nt dt \right] \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos t \cdot \cos nt dt = \begin{cases} 0 & , n \neq 1 \\ -\frac{1}{2} & , n = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

2.11 Problemas Resueltos

se sigue que $a_1 = -\frac{1}{2}$. Para b_n se tiene que

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \frac{t}{2} \cdot \sin nt \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) \cdot \sin nt \, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{1}{n} \cos nt \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \cos nt \cdot \sin nt \, dt \right] = 0 \end{aligned}$$

se concluye que la representación es

$$f(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos t = \frac{1}{2} (1 - \cos t) = \sin^2 \frac{t}{2}$$

¡¡la misma función!!

Ejemplo 2.11.16. Sea $f(t) = t$ para $0 < t < 1$, con $f(t+1) = f(t)$.

La figura 2.31 muestra esta función y su prolongación periódica

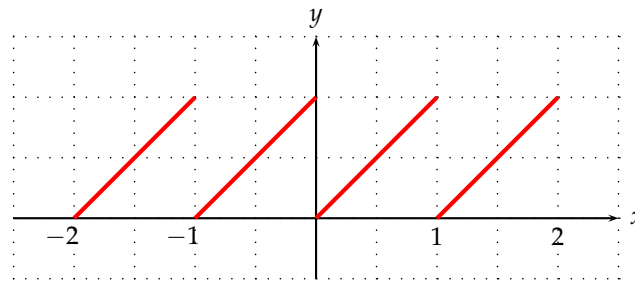


figura 2.31

El periodo es $T = 1$ y la frecuencia fundamental es $\omega_0 = 2\pi$. Calculamos los coeficientes de la serie compleja:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{in\omega_0 t} dt = \int_0^1 t e^{-in2\pi t} dt = \frac{i}{2n\pi}, \quad n = \text{opm} 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

El coeficiente c_0 no puede calcularse a partir de este c_n . Su cálculo es

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}$$

La serie compleja de Fourier para esta función es

$$f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{i}{2n\pi} e^{in2\pi t}, \quad n \neq 0$$

Conociendo los coeficientes c_n , con $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$, resulta sencillo determinar los coeficientes de la serie trigonométrica.

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2} \implies a_0 = 1$$

de $c_n = \frac{i}{2n\pi}$ y $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$ se concluye que $a_n = 0$ para $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$. Así, la serie trigonométrica es

$$f(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n\pi t)}{n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \left(\sin 2\pi t + \frac{\sin 4\pi t}{2} + \frac{\sin 6\pi t}{3} + \dots \right)$$

Al hacer el desarrollo de Fourier de una señal periódica, estamos descomponiéndola en términos de una base de funciones exponenciales complejas relacionadas armónicamente, cuyas frecuencias son los múltiplos enteros de la frecuencia fundamental. (Salvando las diferencias, es como si descompusieramos un color en los colores primarios y diéramos la proporción en que cada uno interviene). En cualquier serie compleja de Fourier, cada c_n es el coeficiente de una exponencial compleja $e^{in\omega_0 t}$, de manera que cada coeficiente tomado en valor absoluto indica cual es el peso relativo de cada armónica dentro de la descomposición espectral de la señal. La representación gráfica de $|c_n|$ en función de la frecuencia $\omega = n\omega_0$ ayuda a interpretar cuáles son las armónicas presentes en la señal y cuál es su importancia relativa. Esta representación se denomina **espectro de amplitud**. Dado que los coeficientes c_n son números complejos, que quedan determinados mediante su módulo y su argumento, la representación se completa mediante el **espectro de fase**, que es el gráfico del argumento de cada coeficiente c_n en función de $\omega = n\omega_0$. Como esta nueva variable ω está definida sólo para los múltiplos enteros de la frecuencia fundamental, los espectros no son gráficas continuas sino discretas, que se representan mediante puntos o mediante líneas verticales levantadas sobre dichos múltiplos de ω_0 . Representemos el espectro discreto de amplitud correspondiente a la función $f(t)$ del ejemplo. Para eso, calculamos el valor absoluto de cada coeficiente:

$$|c_0| = \frac{1}{2}, \quad |c_n| = \left| \frac{i}{2n\pi} \right| = \frac{1}{2|n|\pi} = \frac{1}{|\omega_0|}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Calculemos uno a uno algunos coeficientes, aquellos correspondientes a las primeras armónicas, y los representamos.

$$|c_1| = |c_{-1}| = \frac{1}{2\pi} \sim 0,159, \quad |c_2| = |c_{-2}| = \frac{1}{4\pi} \sim 0,0796, \quad |c_3| = |c_{-3}| = \frac{1}{6\pi} \sim 0,0531$$

La figura 2.32 muestra el gráfico de frecuencias

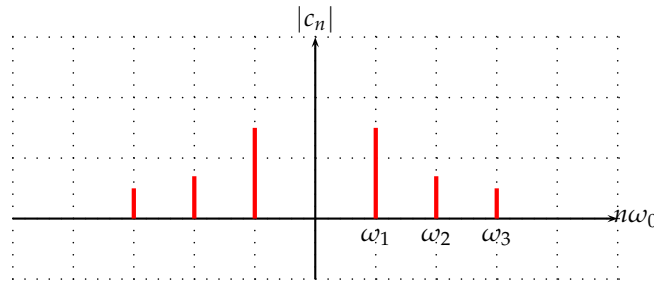


figura 2.32

Finalmente, haremos uso del teorema de Parseval. Sabemos que

$$c_0 = \frac{1}{2}, \quad c_n = \frac{i}{2n\pi}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

2.11 Problemas Resueltos

Al reemplazar en la fórmula de Parseval

$$\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt = |c_0|^2 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2, \quad n \neq 0$$

tenemos:

$$\frac{1}{1} \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{4} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \frac{i}{2n\pi} \right|^2 = \frac{1}{4} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{4\pi^2 n^2}$$

de lo cual, después de evaluar la integral, resulta

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad n \neq 0$$

Se observa que los términos de la suma adoptan los mismos valores para los n positivos y negativos, de modo que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

de modo que

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

para obtener que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Recordemos que, cuando estudiamos las series numéricas, nos conformábamos con saber si una serie dada es convergente o no. En particular, de la serie que aparece aquí, sabíamos que converge pues es de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \quad \text{con } p > 1$$

El resultado que acabamos de encontrar nos dice que la serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge al número $\frac{\pi^2}{6}$. Esto agrega una utilidad adicional a las series de Fourier, junto con el teorema de Parseval, que es la de permitir el cálculo de la suma de ciertas series convergentes.

Ejemplo 2.11.17. Desarrollamos $f(t) = \begin{cases} 1, & -1 < t < 1 \\ 0, & 1 < t < 3 \end{cases}$, con $f(t+3) = f(t)$

Es claro que el periodo es $T = 4$ y que $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$. La figura 2.33 muestra esta función

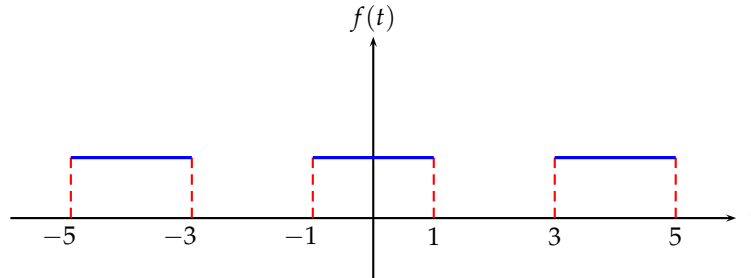


figura 2.33

Los coeficientes complejos son:

$$\blacksquare c_n = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 1 \cdot e^{-int\frac{\pi}{2}} dt + \int_1^3 0 \cdot dt = \frac{1}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}, \quad n \neq 0$$

$$\blacksquare c_0 = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 1 dt + \int_1^3 0 \cdot dt = \frac{1}{2}$$

Los coeficientes son todos reales, como esperábamos, pues la función es par. Calculemos algunos de ellos. Vemos que para cualquier n par, es $c_n = 0$.

$$\blacksquare c_1 = \frac{1}{\pi} \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = \frac{1}{\pi} = c_{-1} \implies |c_1| = |c_{-1}| = \frac{1}{\pi} \sim 0,3183$$

$$\blacksquare c_3 = \frac{1}{3\pi} \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} = -\frac{1}{3\pi} = c_{-3} \implies |c_3| = |c_{-3}| = \frac{1}{3\pi} \sim 0,1061$$

$$\blacksquare c_5 = \frac{1}{5\pi} \operatorname{sen} \frac{5\pi}{2} = \frac{1}{5\pi} = c_{-5} \implies |c_5| = |c_{-5}| = \frac{1}{5\pi} \sim 0,06366$$

Representamos estos coeficientes en función de la frecuencia ω . Los únicos valores permitidos para ω son los múltiplos enteros de la frecuencia fundamental $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$. El espectro de frecuencia lo muestra la figura 2.34

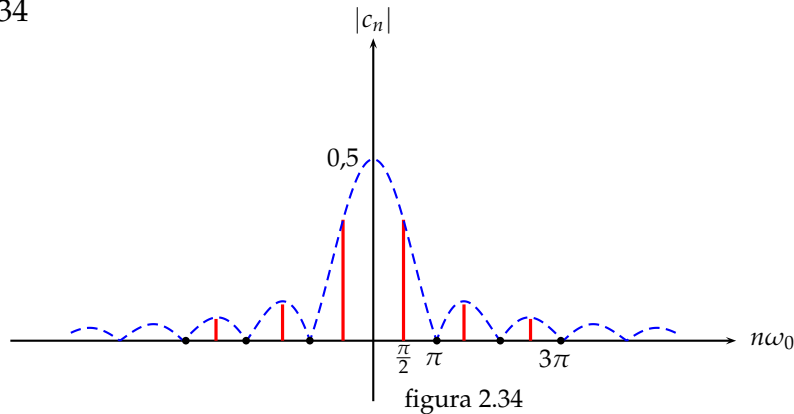
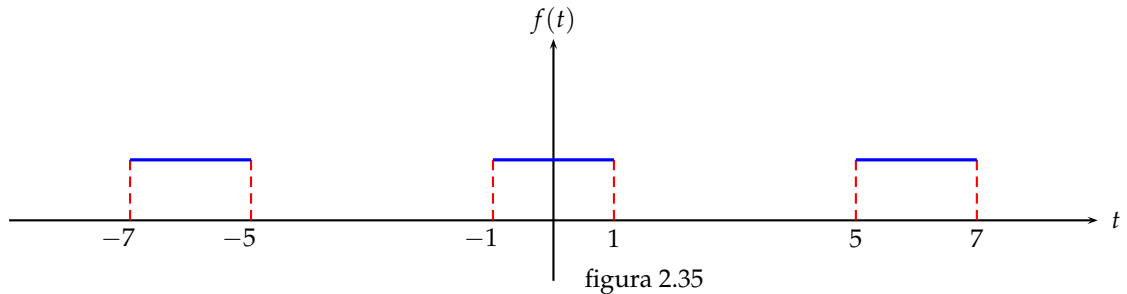


figura 2.34

Ejemplo 2.11.18. Desarrollamos $f(t) = \begin{cases} 1, & -1 < t < 1 \\ 0, & 1 < t < 5 \end{cases}$, con $f(t+6) = f(t)$

2.11 Problemas Resueltos

Es claro que el periodo es $T = 6$ y que $\omega_0 = \frac{\pi}{3}$. La figura 2.35 muestra esta función

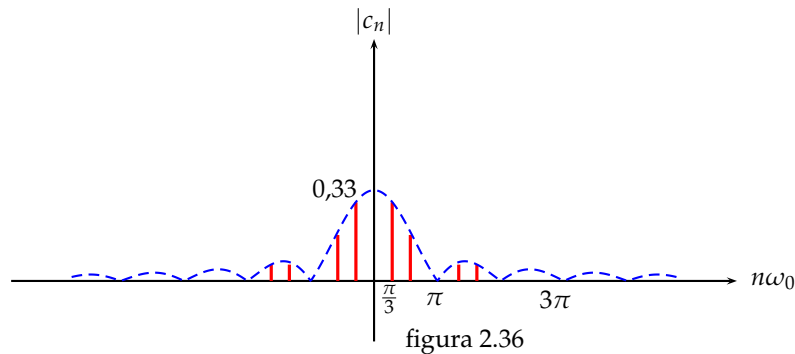


Calculamos los coeficientes y los representamos en valor absoluto. Debe quedar claro que los valores permitidos de la frecuencia son los múltiplos enteros de $\omega_0 = \frac{\pi}{3}$.

$$\blacksquare c_n = \frac{1}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{3}, n \neq 0$$

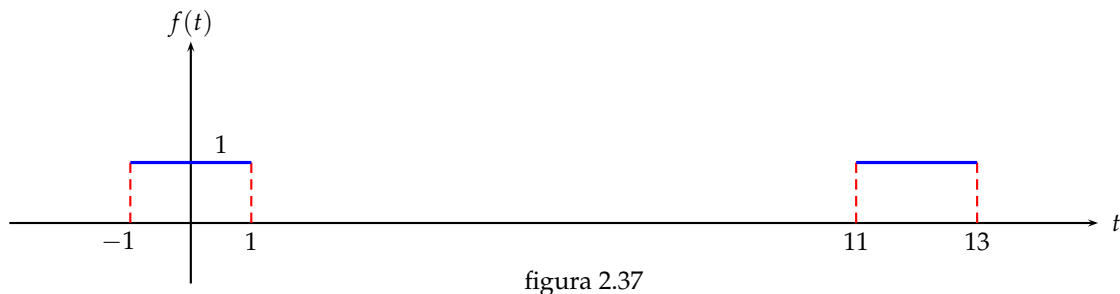
$$\blacksquare c_0 = \frac{1}{6} \int_{-1}^1 dt = \frac{1}{3}$$

El espectro de frecuencia es mostrado en la figura 2.36.



Ejemplo 2.11.19. Desarrollamos $f(t) = \begin{cases} 1, & -1 < t < 1 \\ 0, & 1 < t < 11 \end{cases}$, con $f(t+12) = f(t)$

En la figura 2.37 se muestra esta función.

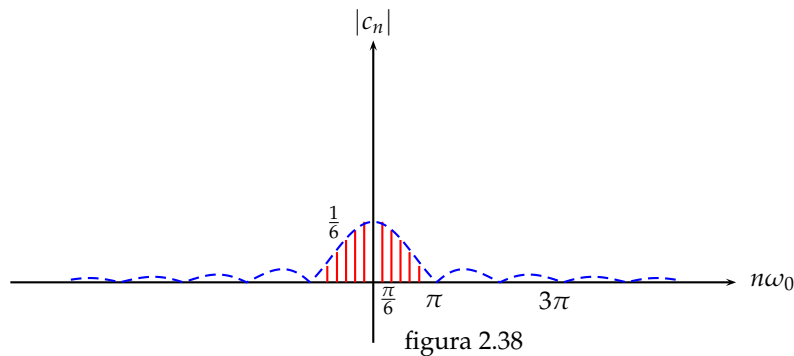


Calculamos los coeficientes y los representamos en valor absoluto. Los valores permitidos de la frecuencia son los múltiplos enteros de $\omega_0 = \frac{\pi}{6}$.

$$\blacksquare c_n = \frac{1}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{6}, n \neq 0$$

$$\blacksquare c_0 = \frac{1}{12} \int_{-1}^1 dt = \frac{1}{6}$$

El espectro de frecuencia es mostrado en la figura 2.38.



Los tres ejemplos finales corresponden a funciones escalón en las que se ha modificado el período, dejando las restantes características iguales. La forma general del espectro es la misma en los tres casos pero el espaciado entre las líneas disminuye en relación inversa al período, a la vez que disminuye la amplitud de todas las armónicas. Podemos inferir que si el período se hiciera infinitamente grande, la distancia entre las líneas del espectro sería infinitesimal, de modo que dejaríamos de tener un espectro discreto para pasar a tener un espectro continuo. En esto precisamente consiste el cálculo de la transformada de Fourier, que veremos en el próximo capítulo.

2.12. Problemas Propuestos

1. Graficar las siguientes funciones y determinar su paridad.

$$a) f(x) = \begin{cases} x, & -\pi < x < 0 \\ -x, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

$$c) f(x) = |\operatorname{sen} x|, \quad 0 < x < 2\pi$$

$$b) f(x) = \begin{cases} e^x, & -\pi < x < 0 \\ e^{-x}, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

$$d) f(x) = \begin{cases} x, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

Resp. a y b son pares, c y d ni lo uno ni lo otro.

2. Demostrar lo siguiente.

a) La suma y el producto de funciones pares es par

b) $p(x) = \frac{g(x) + g(-x)}{2}$ es par, $\forall$ función g

c) $g(x) = \frac{g(x) - g(-x)}{2}$ es impar, $\forall$ función g .

3. Graficar y hallar su representación en serie de Fourier de las funciones:

a) $f(x) = x^2$, $0 \leq x \leq 2\pi$, f de periodo 2π .

b) $f(x) = 2\pi x - x^2$, $0 \leq x \leq 2\pi$, f de periodo 2π .

c) $f(x) = e^x$, $0 \leq x \leq 1$, f de periodo 1.

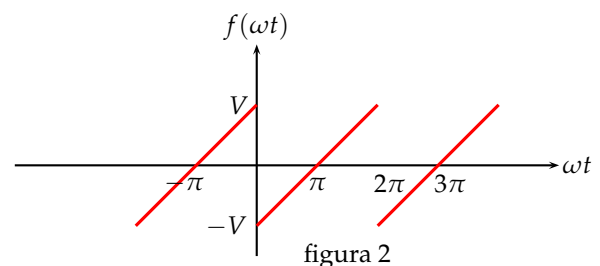
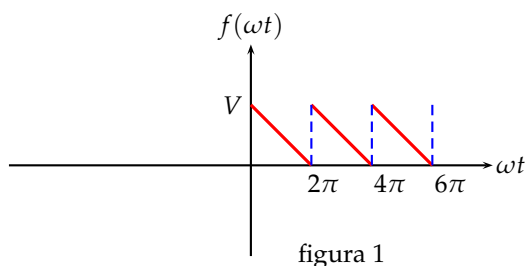
d) $f(x) = \operatorname{sen} \frac{x}{2}$, $0 \leq x \leq 2\pi$, f de periodo 2π .

e) $f(x) = \begin{cases} 0 & , -2 \leq x \leq -1 \\ 1 - x^2 & , -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & , 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ f de periodo 4

4. Hallar la serie de Fourier de la onda cuadrada definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < \pi/2 \\ 1, & -\pi/2 < x < \pi/2 \\ 0, & \pi/2 < x \leq \pi \end{cases}$$

5. Hallar la serie de Fourier de la onda en "diente de sierra" que muestra la figura 1 y dibujar el espectro de líneas.

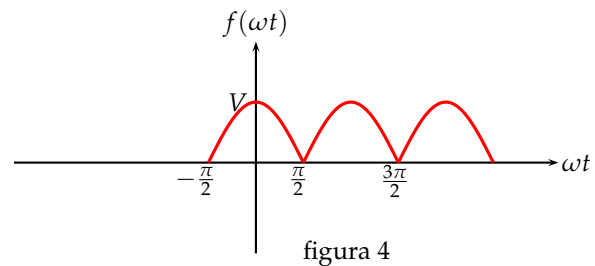
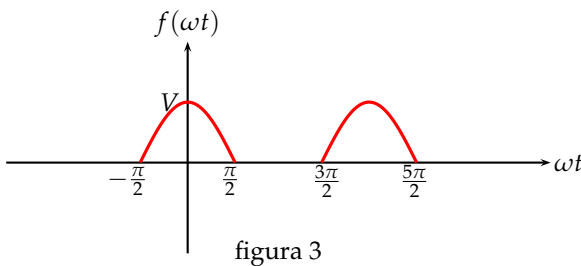


$$\text{Resp. } f(t) = \frac{V}{2} + \frac{V}{\pi} \left\{ \sin \omega t + \frac{1}{2} \sin 2\omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \dots \right\}$$

6. Hallar la serie de Fourier de la onda en “diente de sierra” que muestra la figura 2 y dibujar el espectro de líneas.

$$\text{Resp. } f(t) = -\frac{2V}{\pi} \left\{ \sin \omega t + \frac{1}{2} \sin 2\omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \dots \right\}$$

7. Hallar la serie de Fourier de la onda senoidal que muestra la figura 3 y dibujar el espectro de líneas.



$$\text{Resp. } f(t) = \frac{V}{\pi} \left\{ 1 + \frac{\pi}{2} \cos \omega t + \frac{2}{3} \cos 2\omega t - \frac{2}{15} \cos 4\omega t + \dots \right\}$$

8. Hallar la serie de Fourier de la onda senoidal que muestra la figura 4 y dibujar el espectro de líneas.

$$\text{Resp. } f(t) = \frac{2V}{\pi} \left\{ 1 + \frac{2}{3} \cos 2\omega t - \frac{2}{15} \cos 4\omega t + \frac{2}{35} \cos 6\omega t - \dots \right\}$$

9. Trazar la gráfica y hallar desarrollo en serie de Fourier de:

a) $f(x) = x, -\pi < x < \pi$

e) $f(x) = x^2, -\pi < x < \pi$

b) $f(x) = \begin{cases} 1 & , -\pi < x < 0 \\ \frac{1}{2} & , 0 < x < \pi \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} x + \pi, & -\pi < x < 0 \\ x - \pi, & 0 < x < \pi \end{cases}$

c) $f(x) = e^x, -\pi < x < \pi$

g) $f(x) = e^{|x|}, -\pi \leq x \leq \pi$

d) $f(x) = |\sin x|, 0 < x < 2\pi$

h) $f(x) = \pi^2 - x^2, 0 \leq x \leq \pi$

Respuestas:

a) $f(x) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sin kx$

c) $f(x) = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1+k^2} (\cos kx - k \sin kx) \right]$

f) $f(x) = -2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin kx$

h) $f(x) = \frac{2}{3} \pi^2 + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} \cos kx$

10. Hallar las extensiones par e impar de cada función siguiente definida en $[0, \pi]$. Trazar sus gráficas en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

2.12 Problemas Propuestos

a) $f(x) = 1$

b) $f(x) = x^2$

c) $f(x) = \pi - x$

d) $f(x) = e^x$

Respuestas:

a) $E_f = 1, -\pi \leq x \leq \pi, \quad I_f = \begin{cases} -1, & -\pi \leq x < 0 \\ 1, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$

b) $E_f = x^2, -\pi \leq x \leq \pi, \quad I_f = \begin{cases} -x^2, & -\pi \leq x < 0 \\ x^2, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$

c) $E_f = \begin{cases} \pi + x, & -\pi \leq x \leq 0 \\ \pi - x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}, \quad I_f = \begin{cases} -\pi - x, & -\pi \leq x < 0 \\ \pi - x, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$

d) $E_f = \begin{cases} e^{-x}, & -\pi \leq x \leq 0 \\ e^x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}, \quad I_f = \begin{cases} -e^{-x}, & -\pi \leq x < 0 \\ e^x, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$

11. Desarrollar $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 4 \\ 8 - x, & 4 < x < 8 \end{cases}$ en serie de seno y en serie de coseno de Fourier.

12. Demostrar para $0 \leq x \leq \pi$ que:

a) $x(\pi - x) = \frac{\pi^2}{6} - \left(\frac{\cos 2x}{1^2} + \frac{\cos 4x}{2^2} + \frac{\cos 6x}{3^2} + \dots \right)$

b) $x(\pi - x) = \frac{8}{\pi} \left(\frac{\sin x}{1^3} + \frac{\sin 3x}{3^3} + \frac{\sin 5x}{5^3} + \dots \right)$

13. Usar el problema anterior para probar que:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$

14. Escribir la serie de Fourier de la función $f(x) = \begin{cases} 0, & -5 < x < 0 \\ 3, & 0 < x < 5 \end{cases}$. Definir f en los puntos de discontinuidad para que la serie converja a f en el intervalo $[-5, 5]$.

15. Desarrollar en serie de Fourier la función $f(x) = x^2, 0 < x < 2\pi$ si el periodo es 2π . Determinar la convergencia de la serie en los puntos de discontinuidad.

16. Sobre el intervalo $[0, \pi]$ hallar la serie seno de Fourier de $\cos \frac{x}{2}$. Trazar la gráfica para $|x| < 3\pi$. Determinar su convergencia en los extremos del intervalo $[0, \pi]$.

17. Sobre el intervalo $[0, \pi]$ hallar la serie coseno de Fourier de $\sin \frac{x}{2}$.

18. Hallar las series seno y coseno de Fourier de la función $f(x) = \pi - x$ para $0 \leq x \leq \pi$.

19. Hallar el desarrollo en serie de Fourier de las funciones siguientes, indicando a que valor converge la serie en los puntos de discontinuidad.

$$a) f(x) = \begin{cases} 0, & -2 < x < -1 \\ |x|, & -1 < x < 1 \\ 0, & 1 < x < 2 \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} -x, & -4 \leq x \leq 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

$$c) f(x) = \begin{cases} 1, & 8 < x < 9 \\ 10 - x, & 9 < x < 10 \end{cases}$$

$$d) f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < 3 \\ 0, & -3 < x < 0 \end{cases}$$

Respuesta:

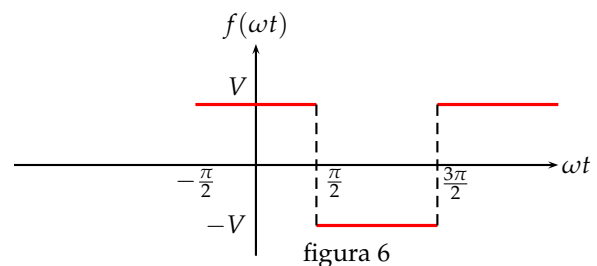
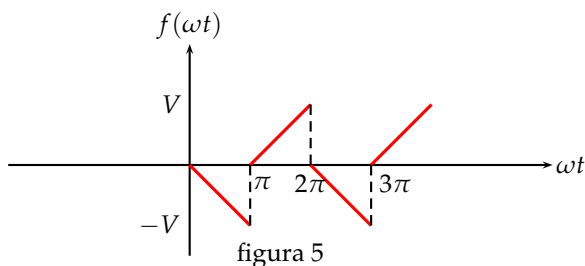
$$a) f(x) = \frac{1}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos \frac{k\pi x}{2}, \quad A_k = \begin{cases} \frac{2}{k\pi} - \frac{4}{k^2\pi^2}, & k = 1, 5, \dots \\ -\frac{8}{k^2\pi^2}, & k = 2, 6, \dots \\ \frac{-2}{k\pi} - \frac{4}{k^2\pi^2}, & k = 3, 7, \dots \\ 0, & k = 4, 8, \dots \end{cases}$$

$$b) f(x) = 2 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \cos x}{k^2} \cos \frac{k\pi x}{4}$$

$$c) f(x) = \frac{3}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^k - 1}{k^2\pi^2} \cos k\pi x + \frac{1}{k\pi} \sin k\pi x \right]$$

$$d) f(x) = \frac{3}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{6(\cos n\pi - 1)}{k^2\pi^2} \cos \frac{k\pi x}{3} - \frac{6 \cos k\pi}{k\pi} \sin \frac{k\pi x}{3} \right]$$

20. Hallar las series exponencial (compleja) de las ondas representadas en las figuras 5 y 6.



Respuestas:

$$a) f(t) = \frac{4V}{\pi^2} \left(\cos \omega t + \frac{1}{9} \cos 3\omega t + \frac{1}{25} \cos 5\omega t + \dots \right) - \frac{2V}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots \right)$$

$$b) f(t) = \frac{4V}{\pi} \left(\cos \omega t - \frac{1}{3} \cos 3\omega t + \frac{1}{5} \cos 5\omega t - \frac{1}{7} \cos 7\omega t + \dots \right)$$

2.12 Problemas Propuestos

21. Hallar la serie compleja y trigonométrica de Fourier de $f(x) = \frac{A}{T} t, 0 < t < T, f(t) = f(t + T)$

Respuesta:

$$a) f(t) = \frac{A}{2} + \frac{A}{2\pi} \sum \frac{1}{n} e^{n\omega_0 t + \pi/2}$$

$$b) f(t) = \frac{A}{2} - \frac{A}{\pi} \left(\text{sen } \omega_0 t + \frac{1}{2} \text{sen } 2\omega_0 t + \frac{1}{3} \text{sen } 3\omega_0 t + \dots \right)$$

22. Hallar la serie compleja y trigonométrica de Fourier de la función

$$f(x) = A \text{ sen } \pi t, 0 < t < 1, f(t) = f(t + T), T = 1$$

Respuesta:

$$T = 1 \implies \omega_0 = 2\pi$$

$$a) f(t) = -\frac{2A}{\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} e^{2\pi n t i}$$

$$b) f(t) = \frac{2A}{\pi} - \frac{4A}{\pi} \left(\frac{1}{3} \cos 2\pi t + \frac{1}{15} \cos 4\pi t + \frac{1}{35} \cos 6\pi t + \dots \right)$$

23. Hallar la serie compleja y trigonométrica de $f(x) = e^t, 0 < t < 2\pi, f(t) = f(t + 2\pi)$.

Respuesta:

$$a) f(t) = -\frac{e^{2\pi-1}}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 - in} e^{int}$$

$$b) f(t) = \frac{e^{2\pi} - 1}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + n^2} (\cos nt - n \text{sen } nt) \right)$$

$$24. \text{ Sea } f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 < x < \pi/2 \\ -1, & \pi/2 < x < \pi \end{cases}, \quad f(x) = f(x + 2\pi)$$

- a) Hallar la serie de Fourier de f .

$$\text{Resp. } \frac{2}{\pi} (\cos x - \frac{1}{3} \cos 3x + \dots) + \text{sen } 2x + \frac{1}{3} \text{sen } 6x + \dots$$

- b) Hallar la suma de la serie en $x = \frac{\pi}{2}$.

$$\text{Resp. } S = 0$$

$$25. \text{ Sea } f(x) = \begin{cases} -k, & -\pi < x < 0 \\ k, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

- a) Hallar los coeficientes de Fourier de f

- b) Hallar las sumas parciales S_1 y S_2

- c) Hallar la suma de la serie en $x = 0$, en $x = \pi$, y en $x = \frac{\pi}{2}$

Respuesta:

$$a) b_n = \frac{2k}{n\pi} (1 - \cos n\pi)$$

$$b) S_1 = \frac{4k}{\pi} \operatorname{sen} x, \quad S_2 = \frac{4k}{\pi} \left(\operatorname{sen} x + \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3x \right)$$

$$c) S = 0 \text{ en } x = 0 \text{ y en } x = \pi, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4k}{\pi} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots\right)$$

26. Hallar los coeficientes de Fourier de $f(x) = x^4$, $-\pi < x < \pi$

$$\text{Respuesta } a_0 = \frac{2\pi^4}{5} \quad a_n = \frac{8\pi^2(-1)^n(n^2-6)}{n^4}, \quad b_n = 0$$

27. Hallar la serie de Fourier de la funciones que se indican:

$$a) f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases} \quad b) f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < -\frac{\pi}{2} \\ 0, & -\frac{\pi}{2} < x < 0 \\ 1, & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 2, & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

Respuesta:

$$a) \frac{1}{4} + \frac{1}{\pi} \left(\cos x - \frac{1}{3} \cos 3x + \frac{1}{5} \cos 5x + \dots \right) + \frac{1}{\pi} \left(\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3x + \frac{1}{5} \operatorname{sen} 5x + \frac{2}{6} \operatorname{sen} 6x + \dots \right)$$

$$b) \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi} \left(\operatorname{sen} x - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3x + \frac{1}{5} \operatorname{sen} 5x - \frac{1}{6} \operatorname{sen} 6x + \dots \right)$$

28. Hallar la serie de Fourier de las funciones:

$$a) f(x) = \frac{x^2}{4}, \quad -\pi < x < \pi \quad \text{Resp. } \frac{\pi^2}{12} - \cos x + \frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{9} \cos 3x + \frac{1}{16} \cos 4x + \dots$$

$$b) f(x) = \begin{cases} x, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \pi - x, & \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases} \quad \text{Resp. } \frac{4}{\pi} \left(\operatorname{sen} x - \frac{1}{9} \operatorname{sen} 3x + \frac{1}{25} \operatorname{sen} 5x + \dots \right)$$

29. Usar la serie de Fourier de $f(x) = \begin{cases} x, & -\pi < x < 0 \\ -x, & 0 < x < \pi \end{cases}$, $f(x+2\pi) = f(x)$, para probar que

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots$$

30. Sea $f(x) = x^2$, $-\pi < x < \pi$, $f(x+2\pi) = f(x)$. Demostrar que

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots = \frac{\pi^2}{12}$$

2.12 Problemas Propuestos

31. Hallar la serie de Fourier de la función f de periodo T .

$$a) f(t) = \begin{cases} 1, & -1 < t < 1 \\ 0, & 1 < t < 3 \end{cases}, \quad T = 4$$

$$\text{Resp. } \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\cos \frac{\pi t}{2} - \frac{1}{3} \cos \frac{3\pi t}{2} + \frac{1}{5} \cos \frac{5\pi t}{2} + \dots \right)$$

$$b) f(t) = t^2, \quad -1 < t < 1, \quad T = 2$$

$$\text{Resp. } \frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2} \left(\cos \pi t - \frac{1}{4} \cos 2\pi t + \frac{1}{9} \cos 3\pi t - \frac{1}{16} \cos 4\pi t + \dots \right)$$

$$c) f(t) = \begin{cases} t + \frac{1}{2}, & -\frac{1}{2} < t < 0 \\ -t + \frac{1}{2}, & 0 < t < \frac{1}{2} \end{cases}, \quad T = 1$$

$$\text{Resp. } \frac{1}{4} + \frac{2}{\pi^2} \left(\cos 2\pi t + \frac{1}{9} \cos 6\pi t + \frac{1}{25} \cos 10\pi t + \dots \right)$$

32. Representar en serie de Fourier senoidal y construir la gráfica de la correspondiente prolongación periódica de f , para las siguientes funciones:

$$a) f(x) = 1, \quad 0 < x < \pi$$

$$\text{Resp. } \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots \right)$$

$$b) f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2}, & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

$$\text{Resp. } 1 + \frac{2}{\pi} \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{9\pi} \right) \sin 3x - \frac{1}{4} \sin 4x + \dots$$

$$c) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{3}{2}, & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

$$\text{Resp. } \frac{4}{\pi} \left(\sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x - \frac{1}{6} \sin 6x + \dots \right)$$

$$d) f(x) = x, \quad 0 < x < 1$$

$$\text{Resp. } \frac{2}{\pi} \left(\sin \pi x - \frac{1}{2} \sin 2\pi x + \frac{1}{3} \sin 3\pi x + \dots \right)$$

33. Representar las siguientes funciones mediante una serie cosenoidal de Fourier y hacer la gráfica de la prolongación periódica de f .

$$a) f(x) = 1, \quad 0 < x < L$$

$$\text{Resp. } f(x) = 1$$

$$b) f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \frac{L}{2} \\ 0, & \frac{L}{2} < x < L \end{cases}$$

$$\text{Resp. } \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\cos \frac{\pi x}{L} - \frac{1}{3} \cos \frac{3\pi x}{L} + \frac{1}{5} \cos \frac{5\pi x}{L} + \dots \right)$$

34. Hallar la serie senoidal de Fourier de $f(x) = x(\pi^2 - x^2)$, $0 < x < \pi$

$$\text{Resp. } f(x) = 12 \left(\sin x - \frac{1}{2^3} \sin 2x + \frac{1}{3^3} \sin 3x + \dots \right)$$

35. Encontrar el desarrollo en serie de Fourier de las funciones:

$$a) f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < -\frac{\pi}{2} \\ 1, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ x, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

36. Probar que las series

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} \quad \text{y} \quad \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin kx$$

son los desarrollos en serie de Fourier de las funciones;

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 < x < \pi \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{x}{\pi}, \quad -\pi < x < \pi$$

37. Hallar la serie de Fourier y determinar su valor cuando $x = k\pi$, y cuando $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, con $k \in \mathbb{Z}$ y siendo f la función.

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < -\frac{\pi}{2} \\ 1, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ -1, & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

38. Hallar el desarrollo en serie de Fourier de la función $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x \leq 0 \\ x, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$. Usar esta serie para demostrar que

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots$$

39. Hallar la serie de Fourier y determinar el valor de esta serie cuando $x = k\pi$ y cuando $x = (k+1)\frac{\pi}{3}$, con k un entero y siendo f la función.

$$f(x) = \begin{cases} x + \pi, & -\pi < x < -\frac{2\pi}{3} \\ x + \frac{2\pi}{3}, & -\frac{\pi}{3} < x < 0 \\ x, & 0 < x < \frac{\pi}{3} \\ x - \frac{\pi}{3}, & \frac{\pi}{3} < x < \pi \end{cases}$$

40. Hallar el desarrollo en serie de Fourier de la función

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ \cos x, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

41. Sea f una función periódica de periodo 2π cuyos coeficientes de Fourier son a_n, b_n . Probar que los coeficientes de Fourier de la función kf , donde k es una constante no nula, son $c a_n$ y $c b_n$.

2.12 Problemas Propuestos

42. Los desarrollos en serie de Fourier de las funciones f y g son:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sen kx)$$

$$g(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos kx + B_k \sen kx)$$

Probar que el desarrollo en serie de Fourier de $af + bg$, $a, b \in \mathbb{R}$, es

$$\frac{a a_0 + b A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a a_k + b A_k) \cos kx + (a b_k + b B_k) \sen kx$$

43. Hallar el desarrollo en serie de Fourier de $2 + 7\cos 3x - 4\sen 2x$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

44. Hallar el desarrollo en serie de Fourier de las siguientes funciones definidas en $[-\pi, \pi]$

$$a) \sen^2 x \quad b) \sen x \cos x \quad c) \sen^3 x \quad d) \cos 3x \cos 2x \quad e) \cos^4 x$$

45. Encontrar el desarrollo en serie de Fourier de cada una de las siguientes funciones periódicas de periodo T :

$$a) f(t) = \begin{cases} -1, & -1 < t < 0 \\ 1, & 0 < t < 1 \\ T = 2 \end{cases}$$

$$d) f(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < 1 \\ 1 - t, & 1 < t < 2, \quad T = 2 \end{cases}$$

$$b) f(t) = \begin{cases} 0, & -2 < t < 0 \\ 1, & 0 < t < 2 \\ T = 4 \end{cases}$$

$$e) f(t) = \begin{cases} -1, & -1 < t < 0 \\ 2t, & 0 < t < 1 \\ T = 2 \end{cases}$$

$$c) f(t) = \begin{cases} -1, & -\pi < t < 0 \\ 1, & 0 < t < \pi, \quad T = 4\pi \\ 0, & \pi < t < 3\pi \end{cases}$$

$$f) f(t) = \begin{cases} \sen \pi t, & 0 < t < 1 \\ T = 1 \end{cases}$$

46. Hallar el desarrollo en serie de Fourier de la función $f(x) = \cos x$, con $0 < x < \pi$. Usar este resultado para probar que

$$\frac{\sqrt{2}\pi}{16} = \frac{1}{2^2 - 1} - \frac{3}{6^2 - 1} + \frac{5}{10^2 - 1} - \frac{7}{14^2 - 1} + \dots$$

47. Encontrar el desarrollo en serie de senos y de cosenos de la función

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < \frac{L}{2} \\ 1, & \frac{L}{2} < t < L \end{cases}$$

48. Sea $f(x) = x$, $-\pi \leq x \leq \pi$. Escribir la serie de Fourier de f en $[-\pi, \pi]$. Se observa que $f'(x) = 1$ para $-\pi \leq x \leq \pi$. Derivar la serie obtenida para f término a término para mostrar que la serie resultante diverge en $-\pi \leq x \leq \pi$. Este problema muestra que la serie de f' no puede obtenerse derivando la de f .
49. Sea $f(x) = |x|$, $-1 \leq x \leq 1$. Escribir la serie de Fourier de f en $[-1, 1]$. Derivar la serie obtenida para f término a término para hallar la serie de f' , en donde

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & -1 < x < 0 \\ 1 & 0 < x < 1 \end{cases}$$

50. Escribir la serie de Fourier en senos y cosenos para la f que se indica.

a) $f(x) = 4, 0 \leq x \leq 3$

d) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 2 \\ 2 - x, & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \pi \\ \cos x, & \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$

e) $f(x) = 1 - \sin \pi x, 0 \leq x \leq 2$

c) $f(x) = 1 - x, 0 \leq x \leq 5$

f) $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$

51. Escribir la serie de Fourier compleja y graficar el espectro de frecuencia de las siguientes funciones:

a) $f(t) = t, 0 < t < 2, \quad f(t+2) = f(t)$

b) $f(x) = \cos \pi t, 0 < t < 1, \quad f(t+1) = f(t)$

c) $f(t) = t^2, 0 \leq t < 2, \quad f(t+2) = f(t)$

d) $f(x) = \cos t, 0 < t < 1, \quad f(t+1) = f(t)$

e) $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1 \\ 0, & 1 \leq t < 2, \end{cases} \quad f(t+2) = f(t)$

f) $f(x) = \begin{cases} 1+t, & 0 < t < 3 \\ 2, & 3 < t < 4, \end{cases} \quad f(t+4) = f(t)$

g) $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1 \\ 1, & 1 < t < 4, \end{cases} \quad f(t+4) = f(t)$

h) $f(x) = \begin{cases} t, & 0 < t < 1 \\ 2-t, & 1 < t < 2, \end{cases} \quad f(t+2) = f(t)$

2.13. Problemas adicionales

1. Hallar la serie trigonométrica de Fourier para la función periódica definida por

$$f(x) = t^2, \quad 0 < t < 2, \quad f(t+2) = f(t)$$

$$\text{Resp. } \frac{4}{3} + \sum_1^{\infty} \left(\frac{4}{n^2 \pi^2} \cos n\pi - \frac{4}{n\pi} \operatorname{sen} n\pi \right)$$

2. Dada la función $f(x) = \begin{cases} -\pi, & -\pi < t < 0 \\ t, & 0 < t < \pi \end{cases}$

- Obtener la serie trigonométrica de Fourier de f .
- Graficar la suma de esa serie en $[-4, 4]$. (use Maple)
- Aprovechar dicha serie para calcular la suma de los recíprocos de los cuadrados de todos los enteros impares positivos.

Resp.

$$a) f(t) = -\frac{\pi}{4} + \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2 \pi} (\cos n\pi - 1) \cos nt + \frac{1}{n} (1 - 2 \cos n\pi) \operatorname{sen} nt$$

$$c) \sum_1^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

3. Dada la función $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < t < \frac{\pi}{2} \\ 2, & \frac{\pi}{2} < t < \pi \end{cases}$

- Desarrollarla en serie cosenoidal de Fourier.

$$b) \text{ Calcular la suma de la serie } \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$$

Resp.

$$a) f(t) = \frac{3}{2} + \sum_1^{\infty} \frac{2 \operatorname{sen} \frac{3n\pi}{2}}{n\pi} \cos nt$$

$$b) \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} = -\frac{\pi}{4}$$

4. Hallar la serie de Fourier para la función $f(t) = t - t^2, 0 \leq t \leq 1$

$$\text{Resp. } \frac{1}{6} - \frac{4}{\pi^2} \left(\frac{\cos 2\pi t}{4} + \frac{\cos 4\pi t}{16} \right) + \dots$$

hijo sabio, alegría del padre
hijo necio, disgusto de su madre.
Proverbios 17:27

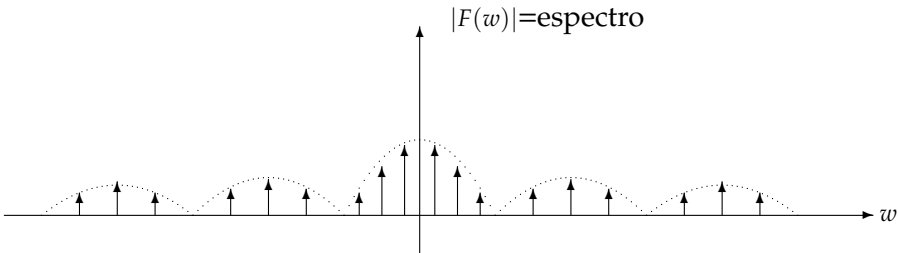
CAPÍTULO

TRANSFORMADA

3

DE

FOURIER



3.1. Introducción

Las series de Fourier constituyen una herramienta poderosa en el tratamiento de diversos problemas en el que participan funciones periódicas. Sin embargo, existe una gran cantidad de problemas que no involucran funciones periódicas, de aquí que es deseable tener un método al “estilo” Fourier que incluya funciones no periódicas. Afortunadamente el método existe y para estudiar la representación de funciones no periódicas se basa en las series de Fourier, haciendo que el periodo fundamental $T \rightarrow \infty$, ya que de esta manera la serie se convierte en una integral.

La importancia de las Transformadas de Fourier radica en sus aplicaciones; teoría de las comunicaciones, propagación de ondas, sistemas de control con retroalimentación, difracción y formación de imágenes, teoría de probabilidades y procesos de azar, mecánica cuántica, etc.

Por ejemplo, si el problema es controlar la temperatura en un edificio mediante un termostato, entonces estamos en presencia de un ejemplo sencillo de control con retroalimentación. El sistema funciona como sigue. Se escoge la temperatura deseada y se compara a cada instante con la temperatura real. Si la temperatura real es inferior a la deseada, el termostato responde conectando la calefacción. La calefacción proporciona calor, y esto, junto con las pérdidas o ganancias de calor exterior, determinan la temperatura real. La retroalimentación consiste en la comparación de la temperatura real con la deseada. Estos sistemas de retroalimentación se usan con frecuencia en pilotos automáticos, en control de procesos químicos, en economía (responden a la inflación, el desempleo, mediante ajustes de impuestos y tasas de interés), en biología (la temperatura del cuerpo, el latido del corazón, el movimiento del ojo, la respuesta muscular, etc. son sistemas de control).

El modelo matemático apropiado para estos sistemas es una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes, que relaciona una entrada $f(t)$ y una salida $x(t)$

$$a_n D^n x(t) + a_{n-1} D^{n-1} x(t) + \cdots + a_0 x(t) = f(t)$$

La transformada de Laplace, caso particular de la transformada de Fourier, proporciona un método sencillo para estudiar estas ecuaciones y en especial la **estabilidad**. La transformada de Fourier muestra los aspectos relacionados con la frecuencia del proceso, esto es, predice el comportamiento bajo condiciones generales, a partir del conocimiento de cómo responde el sistema a un estímulo sinusoidal de frecuencia arbitraria.

El nombre de **transformada** proviene del siguiente hecho.

Definición 3.1.1. Una función F definida por una ecuación de la forma

$$F(y) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x, y) f(x) dx$$

con la variable y real o compleja se denomina **transformada integral** de f . La función $K(x, y)$ es el **núcleo** de la transformada.

Nos proponemos estudiar dos clases de transformadas:

Transformada de Fourier :

$$F(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} f(x) dx, \quad K(x, y) = e^{-ixy}$$

Transformada de Laplace :

$$F(y) = \int_0^{\infty} e^{-xy} f(x) dx, \quad K(x, y) = \begin{cases} e^{-xy}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

3.2. De la Serie a la Transformada de Fourier

Sabemos que la serie de Fourier permite obtener una representación en el dominio de la frecuencia para funciones periódicas $f(t)$. Vamos a estudiar como extender de alguna manera las series de Fourier para obtener una representación en el dominio de la frecuencia de funciones no periódicas.

Ejemplo 3.2.1. Consideremos el tren de pulsos de amplitud 1, ancho d y periodo T

$$f_T(t) = \begin{cases} 0, & -\frac{T}{2} < t < -\frac{d}{2} \\ 1, & -\frac{d}{2} < t < \frac{d}{2} \\ 0, & \frac{d}{2} < t < \frac{T}{2} \end{cases}, \quad f(t+T) = f(t), \quad T > d, \quad T = 2d$$

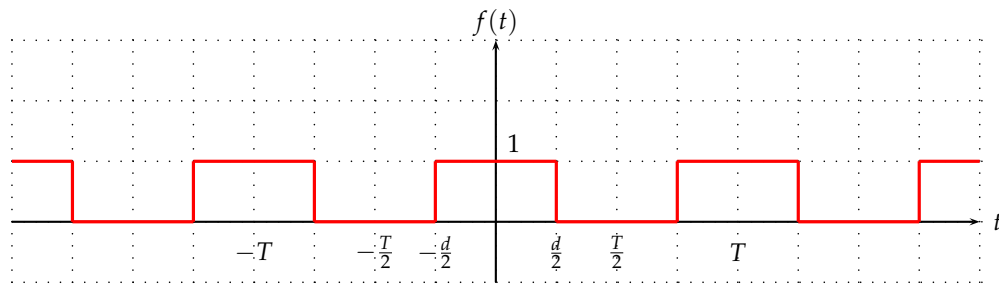


figura 3.1

Si el periodo del tren de pulsos aumenta

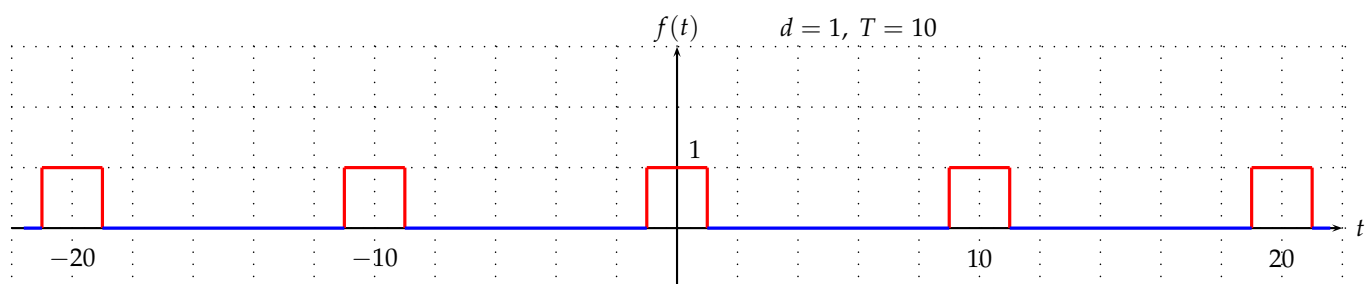


figura 3.2

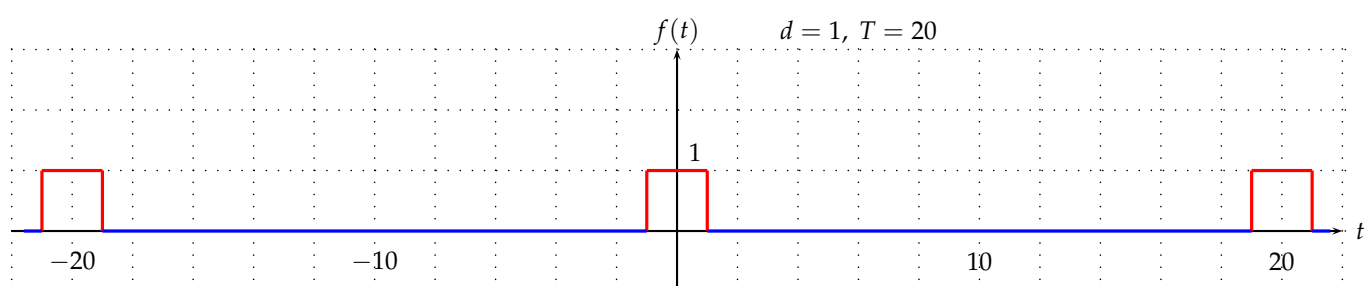


figura 3.3

En el límite cuando $T \rightarrow \infty$, la función deja de ser periódica:

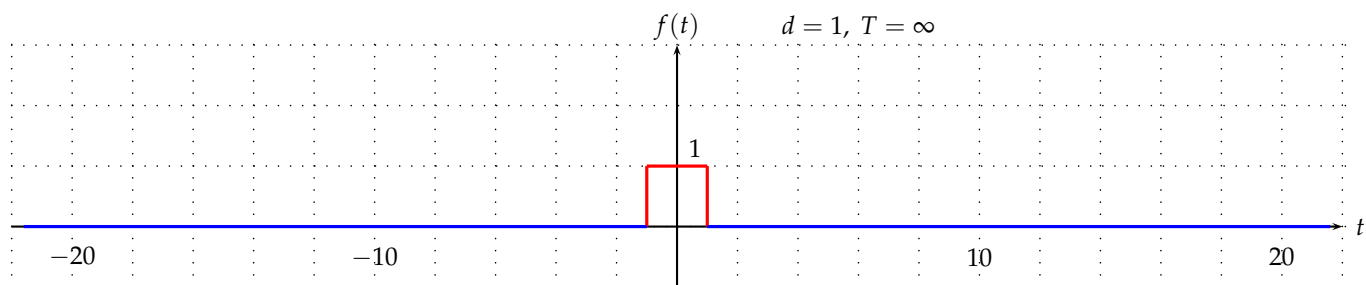


figura 3.4

La función no periódica, figura 3.4, que se obtiene corresponde a

$$f(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} f_T(t) = \begin{cases} 1, & -\frac{d}{2} < t < \frac{d}{2} \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$$

Más adelante (figura 3.6) vemos que cuando $T \rightarrow \infty$, el espectro se vuelve ¡continuo! Esto nos lleva a reconsiderar la expresión de una función $f(t)$ no periódica en el dominio de la frecuencia, no como una suma de armónicos de frecuencia $n\omega_0$, sino como una función continua de la frecuencia ω . De esta forma, si en la serie

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\omega_0 t}$$

3.2 De la Serie a la Transformada de Fourier

se cambia la variable discreta $n\omega_0$ (cuando $T \rightarrow \infty$) por la variable continua ω , ésta se transforma en una integral de la siguiente manera:

Se elige $T > 0$ para obtener una función f_T con periodo T y tal que $\lim_{T \rightarrow \infty} f_T(t) = f(t)$ para todo t .

Ahora, en el intervalo $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ la función f_T se puede representar en serie de Fourier. Haciendo que $T \rightarrow \infty$ se tiene que $f_T \rightarrow f$, de manera que la serie de Fourier se aproxima a una representación de f en términos de senos y cosenos.

Sea f_T función continua por tramos, periódica de periodo T y tal que $f_T \rightarrow f$ para $T \rightarrow \infty$, entonces su representación en serie de Fourier en $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ es

$$f_T(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n \omega_0 t + b_n \sen n \omega_0 t$$

en donde $T \omega_0 = 2\pi$. Los coeficientes (se ha cambiado variable de integración) son:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(z) \cos n \omega_0 z \, dz, \quad n \geq 0$$

$$b_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(z) \sen n \omega_0 z \, dz, \quad n \geq 1$$

Si $\omega_n = n \omega_0 = \frac{2n\pi}{T}$ y $\Delta\omega_n = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{2\pi}{T}$, entonces

$$a_n = \frac{\omega_0}{\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(z) \cos \omega_n z \, dz$$

$$b_n = \frac{\omega_0}{\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(z) \sen \omega_n z \, dz$$

Reemplazando en el desarrollo de f tenemos.

$$f_T(t) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(z) \, dz + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\int_{-T/2}^{T/2} f_T(z) \cos \omega_n z \, dz \right] \cos \omega_n t + \left[\int_{-T/2}^{T/2} f_T(z) \sen \omega_n z \, dz \right] \sen \omega_n t \right\} \Delta\omega_n$$

Si $T \rightarrow \infty$, entonces $\Delta\omega_n \rightarrow 0$ y $a_0 \rightarrow 0$. Además, $f_T \rightarrow f$. Si suponemos que $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \, dt$ converge, entonces todas las integrales que aparecen en la sumatoria son convergentes, y se tiene que f se puede representar en la forma

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(z) \cos \omega z \, dz \right] \cos \omega t + \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(z) \sen \omega z \, dz \right] \sen \omega t \right\} d\omega$$

Se tiene entonces, que para $T \rightarrow \infty$, la serie de Fourier para f_T en $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ se aproxima a una representación integral de f en toda la recta real.

Definición 3.2.2. Sea f función definida para todo $t \in \mathbb{R}$, tal que $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$ converge, entonces la **integral de Fourier** o la **representación en integral de Fourier** de f es

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [A(\omega) \cos \omega t + B(\omega) \sen \omega t] d\omega$$

en donde,

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt, \quad B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sen \omega t dt$$

La convergencia de esta representación, es análoga a la de las series de Fourier, es decir, la convergencia es a la media aritmética de los límites laterales en donde f tiene discontinuidad de salto, y hacia la función f en sus puntos de continuidad.

Ejemplo 3.2.3. Hallemos la representación integral de Fourier de

$$f(t) = \begin{cases} 1, & -1 < t < 1 \\ 0, & |t| \geq 1 \end{cases}$$

La función f satisface las condiciones para ser representada. Esto es, continua por tramos y absolutamente convergente pues

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt = \int_{-1}^1 dt = 2$$

Los coeficientes $A(\omega)$ y $B(\omega)$ son:

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt = \int_{-1}^1 \cos \omega t dt = \left. \frac{\sen \omega t}{\omega} \right|_{-1}^1 = \frac{2 \sen \omega}{\omega}$$

$$B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sen \omega t dt = \int_{-1}^1 \sen \omega t dt = -\left. \frac{\cos \omega t}{\omega} \right|_{-1}^1 = 0$$

De esta forma, la representación integral de f es

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sen \omega}{\omega} \cdot \cos \omega t d\omega$$

La convergencia de esta representación es como sigue:

$$\begin{cases} 1, & -1 < t < 1 \\ 0, & |t| > 1 \\ \frac{1}{2}, & |t| = 1 \end{cases}$$

Por lo tanto, para $t \neq \pm 1$ se tiene

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sen \omega}{\omega} \cdot \cos \omega t d\omega$$

En particular, para $t = 0$ se tiene que

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} \omega}{\omega} d\omega = \frac{\pi}{2}$$

3.3. Integral en senos y cosenos

Para funciones que estén definidas en $(0, \infty)$ podemos obtener desarrollos en integrales de senos y cosenos considerando las extensiones par e impar para una función en serie de Fourier.

Supongamos se satisfacen las condiciones de Dirichlet para una función f definida en el intervalo $[0, L]$. Si extendemos en forma par esta función a toda la recta real, obtenemos una función g tal que

$$g(t) = \begin{cases} f(t), & t \geq 0 \\ f(-t), & t < 0 \end{cases}$$

Desarrollando g en integral de Fourier en $(-\infty, \infty)$, los coeficientes son:

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cos \omega t dt = 2 \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt$$

la razón de esto es que g es par y coincide con f en $[0, \infty)$. Por otra parte,

$$B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \operatorname{sen} \omega t dt = 0$$

ya que el integrando es una función impar de t

Definición 3.3.1. Sea f integrable en $[0, \infty)$. La integral de Fourier de cosenos de f en $[0, \infty)$ es

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty A(\omega) \cos \omega t d\omega$$

donde

$$A(\omega) = 2 \int_0^\infty f(t) \cos \omega t dt$$

La convergencia es, a $f(0^+)$ en cero, y al promedio de los límites laterales en los puntos de discontinuidad.

De manera análoga, extendiendo la función en forma impar, se obtiene la representación integral en senos de Fourier

Definición 3.3.2. Sea f integrable en $[0, \infty)$. La integral de Fourier de senos de f en $[0, \infty)$ es

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty B(\omega) \operatorname{sen} \omega t d\omega$$

donde

$$B(\omega) = 2 \int_0^\infty f(t) \operatorname{sen} \omega t dt$$

Ejemplo 3.3.3. Hallemos la representación integral de Fourier en cosenos de

$$f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \leq t \leq 10 \\ 0, & t > 10 \end{cases}$$

Debemos hallar el coeficiente $A(\omega)$. Se tiene

$$\begin{aligned} A(\omega) &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t \, dt = 2 \int_0^{10} t^2 \cos \omega t \, dt \\ &= 2 \left[\frac{t^2}{\omega} \sin \omega t \Big|_0^{10} - \frac{2}{\omega} \int_0^{10} t \sin \omega t \, dt \right] \\ &= \frac{4}{\omega} \left\{ 50 \sin 10 \omega - \left[-\frac{t}{\omega} \cos \omega t \Big|_0^{10} + \frac{1}{\omega} \int_0^{10} \cos \omega t \, dt \right] \right\} \\ &= \frac{4}{\omega} \left\{ 50 \sin 10 \omega + \frac{10}{\omega} \cos 10 \omega - \frac{1}{\omega^2} \sin 10 \omega \right\} \\ &= \frac{4}{\omega^3} \left[(50\omega^2 - 1) \sin 10 \omega + 10\omega \cos 10 \omega \right] \end{aligned}$$

De esta forma, la representación es

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{4}{\omega^3} \left[(50\omega^2 - 1) \sin 10 \omega + 10\omega \cos 10 \omega \right] \cos \omega t \, d\omega$$

La convergencia para $0 \leq t \leq 10$ es a $f(t) = t^2$, para $t > 10$ es a cero, y para $t = 10$ es a 50.

3.3.1. Integral de Fourier Compleja

Al igual que en series de Fourier, existe una representación compleja. Para ver esto, suponemos que tenemos f representada por una integral de Fourier

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [A(\omega) \cos \omega t + B(\omega) \sin \omega t] \, d\omega$$

Por la fórmula de Euler reemplazamos en esta expresión el seno y el coseno

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left\{ A(\omega) (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) - i B(\omega) (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) \right\} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left\{ [A(\omega) - i B(\omega)] e^{i\omega t} + [A(\omega) + i B(\omega)] e^{-i\omega t} \right\} d\omega \end{aligned}$$

3.3 Integral en senos y cosenos

Con la sustitución $C(\omega) = \frac{1}{2} [A(\omega) - iB(\omega)]$ se tiene que

$$\overline{C(\omega)} = \frac{1}{2} [A(\omega) + iB(\omega)]$$

Luego,

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty [C(\omega) e^{i\omega t} + \overline{C(\omega)} e^{-i\omega t}] d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty C(\omega) e^{i\omega t} d\omega + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \overline{C(\omega)} e^{-i\omega t} d\omega \end{aligned}$$

Ahora escribimos $C(\omega)$ y $\overline{C(\omega)}$ como una integral

$$\begin{aligned} C(\omega) &= \frac{1}{2} [A(\omega) - iB(\omega)] = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty f(t) \cos \omega t dt - \frac{i}{2} \int_{-\infty}^\infty f(t) \sin \omega t dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty f(t) \left\{ \frac{1}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) - i \cdot \frac{1}{2i} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) \right\} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty f(t) e^{-i\omega t} dt \end{aligned}$$

Para escribir $\overline{C(\omega)}$ se tiene $\overline{e^{-i\omega t}} = e^{i\omega t}$. Si t es real, entonces $f(t)$ es real, con lo cual, $\overline{f(t)} = f(t)$. Por lo tanto,

$$\overline{C(\omega)} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \overline{f(t)} \overline{e^{-i\omega t}} dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty f(t) e^{i\omega t} dt = C(-\omega)$$

Reemplazamos $C(\omega)$ y $\overline{C(\omega)}$ en la representación de f .

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty C(\omega) e^{i\omega t} d\omega + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty C(-\omega) e^{-i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty C(\omega) e^{i\omega t} d\omega + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 C(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty C(\omega) e^{i\omega t} d\omega \end{aligned}$$

Formulamos esto como una definición.

Definición 3.3.4. La representación integral compleja de Fourier de una función f definida en $(-\infty, \infty)$ es

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty C(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad \text{con} \quad C(\omega) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty f(t) e^{-i\omega t} dt$$

Ejemplo 3.3.5. Hallemos la representación integral compleja de Fourier de

$$f(t) = \begin{cases} e^t, & t < 0 \\ e^{-t}, & t \geq 0 \end{cases}$$

Las condiciones de Dirichlet se satisfacen. Luego,

$$\begin{aligned} C(\omega) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 e^t e^{-i\omega t} dt + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-t} e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 e^{(1-i\omega)t} dt + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-(1+i\omega)t} dt \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-i\omega} \cdot e^{(1-i\omega)t} \Big|_{-\infty}^0 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+i\omega} \cdot e^{-(1+i\omega)t} \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-i\omega} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+i\omega} = \frac{1}{1+\omega^2} \end{aligned}$$

Luego, la representación integral compleja de Fourier de f es

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{1+\omega^2} d\omega$$

La integral converge a $f(t)$ para todo valor de t .

Como un agregado al problema anterior se tiene que si $t = 0$, entonces

$$e^0 = 1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{1+\omega^2}$$

dado que el integrando es par

$$\int_0^{\infty} \frac{d\omega}{1+\omega^2} = \frac{\pi}{2}$$

Más aún, descomponiendo la exponencial compleja en sus partes real e imaginaria en la representación

$$e^t = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{1+\omega^2} d\omega, \quad t < 0$$

se tiene que

$$e^t = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\cos \omega t}{1+\omega^2} + i \frac{\sen \omega t}{1+\omega^2} \right) d\omega$$

como la integral de la parte imaginaria es cero (integrando impar), y el integrando de la parte real es par, entonces

$$e^t = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \omega t}{1 + \omega^2} d\omega \implies \frac{\pi}{2} e^t = \int_0^{\infty} \frac{\cos \omega t}{1 + \omega^2} d\omega$$

obsérvese que con $t = 0$ se obtiene el resultado anterior

3.4. Transformada de Fourier

Se supone que se satisfacen las condiciones de Dirichlet para la función f en $(-\infty, \infty)$. Esto es,

1. f es continua por tramos en el intervalo $-\infty < t < \infty$
2. f es absolutamente integrable en $-\infty < t < \infty$. Es decir, $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$

Definición 3.4.1.

1. Se llama **Integral o Transformada de Fourier de $f(t)$** , a la expresión

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

2. La función $f(t)$ tal que $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$ se llama **Transformada inversa de Fourier de $F(\omega)$** . Esto es,

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

En cada punto t_0 donde la función f no es continua se cumple

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2} (f(t_0^+) + f(t_0^-))$$

Ejemplo 3.4.2. Hallemos la transformada de Fourier del impulso $f(t)$ dado por

$$f(t) = \begin{cases} 1, & |t| < a \\ 0, & |t| > a \end{cases}$$

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-\omega t i} dt = \int_{-a}^a e^{-\omega t i} dt \\ &= -\frac{1}{\omega i} e^{-\omega t i} \Big|_{-a}^a = -\frac{1}{\omega i} (e^{-\omega a i} - e^{\omega a i}) \\ &= \frac{1}{\omega i} (e^{\omega a i} - e^{-\omega a i}) = \frac{2}{\omega} \cdot \frac{1}{2i} (e^{a\omega i} - e^{-\omega a i}) \\ &= \frac{2}{\omega} \operatorname{sen} \omega a, \quad \omega \neq 0 \end{aligned}$$

Para $\omega = 0$, se tiene

$$F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = \int_{-a}^a 1 dt = 2a$$

En consecuencia

$$F(\omega) = \begin{cases} \frac{2 \operatorname{sen} a\omega}{\omega}, & \omega \neq 0 \\ 2a, & \omega = 0 \end{cases}$$

Para $a = 1$, el impulso es

$$f(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$$

La figura 3.5 muestra el impulso en $a = 1$ y la 3.6 la transformada de éste.

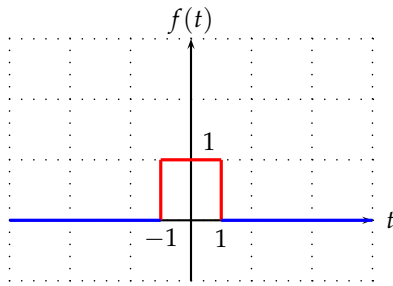


figura 3.5

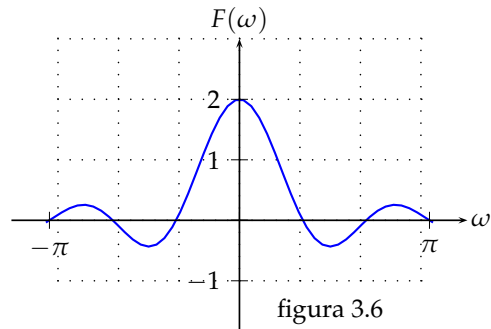


figura 3.6

Esta transformada la vamos a aplicar en el cálculo de una integral impropia y para poner de manifiesto su convergencia.

Ejemplo 3.4.3. Hallemos el valor de la integral impropia

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} ax \cos tx}{x} dx$$

De acuerdo con la definición de transformada inversa

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{\omega ti} d\omega$$

del ejemplo anterior sabemos que

$$f(t) = \begin{cases} 1, & |t| < a \\ 0, & |t| > a \end{cases} \implies F(\omega) = \begin{cases} \frac{2 \operatorname{sen} \omega a}{\omega}, & \omega \neq 0 \\ 2a, & \omega = 0 \end{cases}$$

3.5 Función de Heaviside

Luego, para $\omega \neq 0$,

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{\omega t i} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{\omega} \operatorname{sen} \omega a e^{\omega t i} d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \omega a \cos \omega t}{\omega} d\omega + \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \omega a \operatorname{sen} \omega t}{\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega} \operatorname{sen} \omega a \cos \omega t d\omega \end{aligned}$$

Nótese que la integral de la parte imaginaria tiene integrando impar, por lo que su valor es cero. Ahora,

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega} \operatorname{sen} \omega a \cos \omega t d\omega = \begin{cases} 1, & |t| < a \\ \frac{1}{2}, & |t| = a \\ 0, & |t| > a \end{cases}$$

¡convergencia! en la media. De esta manera

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega} \operatorname{sen} \omega a \cos \omega t d\omega = \begin{cases} \pi, & |t| < a \\ \frac{\pi}{2}, & |t| = a \\ 0, & |t| > a \end{cases}$$

Al cambiar ω por x se obtiene el resultado buscado. Más aún, con $t = 0$ y $a = 1$ se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \omega}{\omega} d\omega = \pi, \text{ caso } |t| < a \text{ pues } |0| < 1$$

Como el integrando es par y las variables mudas, entonces

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

3.5. Función de Heaviside

Como vamos a trabajar con funciones continuas por tramos, es conveniente conocer la llamada **función de Heaviside**, o **función escalón unitario**, definida por la expresión

$$\mu(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Esta función debe su nombre a Oliver Heaviside, ingeniero eléctrico que realizó interesantes aportes a las transformadas de Fourier y Laplace. Obsérvese que esta función es como el “todo o nada”. Su importancia radica en que toda función continua por tramos puede ser escrita como una suma de funciones escalón. La función escalón trasladada es

$$\mu(t-a) = \begin{cases} 1, & t \geq a \\ 0, & t < a \end{cases}$$

Se puede pensar en que esta función representa una señal de magnitud 1 que inicialmente está inactiva y luego es activada en el tiempo $t = a$

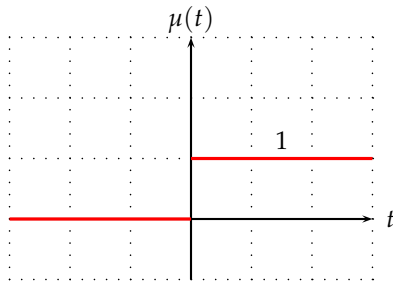


figura 3.7

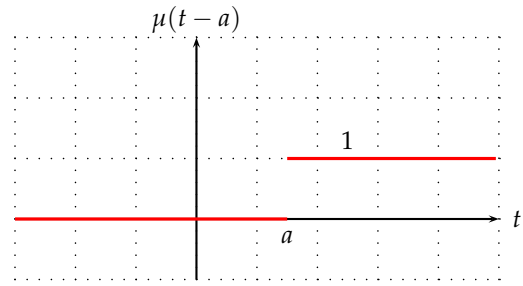


figura 3.8

Ejemplo 3.5.1. La función $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 2 \\ t^2, & t \geq 2 \end{cases}$ en términos del escalón es $f(t) = t^2 \mu(t-2)$

Ejemplo 3.5.2. La función $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 2 \\ t-1, & 2 \leq t < 3 \\ -4, & t \geq 3 \end{cases}$ en términos del escalón unitario es

$$f(t) = (t-1) \mu(t-2) + [-4 - (t-1)] \mu(t-3) = (t-1) \mu(t-2) - (t+3) \mu(t-3)$$

En general, una función continua por tramos del tipo

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t), & 0 < t < a_1 \\ f_2(t), & a_1 < t < a_2 \\ \vdots \\ f_{n-1}(t), & a_{n-2} < t < a_{n-1} \\ f_n(t), & t > a_{n-1} \end{cases}$$

se escribe, en términos del escalón como

$$f(t) = f_1(t) + (f_2(t) - f_1(t)) \mu(t-a_1) + \cdots + (f_n(t) - f_{n-1}(t)) \mu(t-a_{n-1})$$

Se observa que para escribir en términos del escalón, se mantiene la primera función y luego se hace la diferencia entre la siguiente y la anterior multiplicada por el escalón del “corte”.

3.5.1. Transformada del escalón unitario

Afirmamos que,

$$\mathcal{F}[\mu(t)] = \pi \delta(\omega) + \frac{1}{i\omega}$$

La demostración esta propiedad es bastante larga y la dejamos al interés del lector. La figura 3.9 muestra el escalón, su transformada y el espectro.

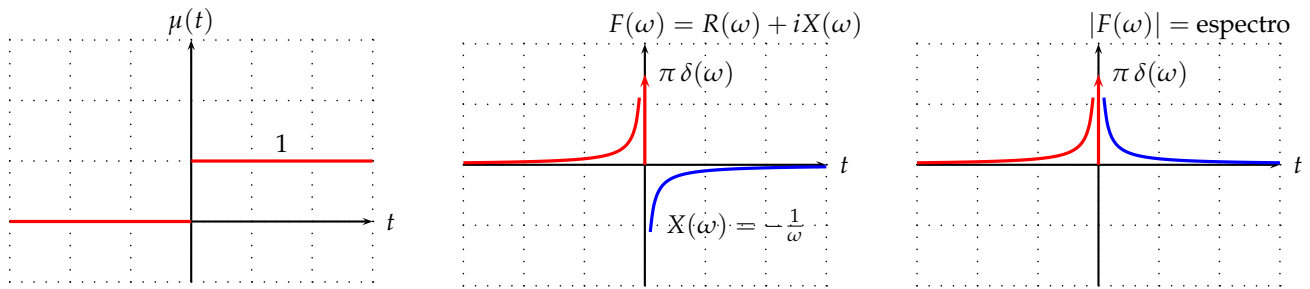


figura 3.9

Ejemplo 3.5.3. Sea $f(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}, \alpha > 0$. Vamos a determinar la transformada de Fourier de f .

En términos del escalón unitario $f(t) = e^{\alpha t} \mu(t)$. Luego,

$$\mathcal{F}[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} \cdot e^{-\omega t i} dt = \int_0^{\infty} e^{-t(\alpha + i\omega)} dt = \frac{-1}{\alpha + i\omega} e^{-t(\alpha + i\omega)} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\alpha + i\omega}$$

3.6. Función impulso unitario

Una de las funciones más interesantes para expresar la transformada de otras funciones es la llamada función “impulso unitario” o función “delta de Dirac”. Esta función aparece en muchos problemas de física e ingeniería. Para llegar a ella se comienza con definir la función (figura 3.10)

$$\delta_{\epsilon}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon}, & 0 \leq t < \epsilon \\ 0, & t < 0 \vee t \geq \epsilon \end{cases}$$

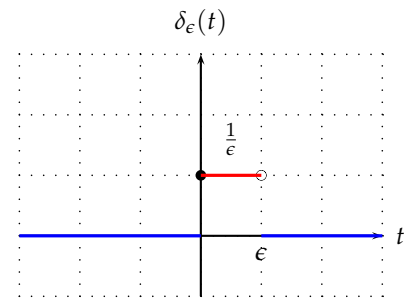


figura 3.10

En términos del escalón la función $\delta_{\epsilon}(t)$ se escribe como

$$\delta_{\epsilon}(t) = \frac{1}{\epsilon} (\mu(t) - \mu(t - \epsilon))$$

Además, al igual que el escalón unitario, esta función puede ser desplazada, tal como lo muestra la figura 3.11 y se expresa como

$$\delta_\epsilon(t-a) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon}, & a \leq t < a+\epsilon \\ 0, & t < a \vee t \geq a+\epsilon \end{cases}$$

O bien, en términos del escalón,

$$\delta_\epsilon(t-a) = \frac{1}{\epsilon} (\mu(t-a) - \mu(t-a-\epsilon))$$

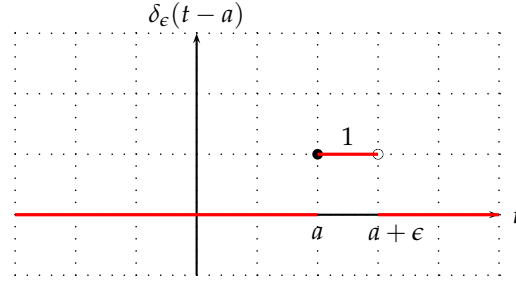


figura 3.11

Cuando $\epsilon \rightarrow 0$ se obtiene la llamada función **delta de Dirac** o función de **impulso unitario**. Se denota por $\delta(t)$. Su gráfica se muestra en la figura 3.12. La función **Delta de Dirac** queda definida como

$$\delta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \delta_\epsilon(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \infty, & t = 0 \end{cases}$$

En estricto rigor, δ no es una función sino un objeto llamado “distribución”. Sin embargo, la tradición hace que se le siga llamando función. Existe una forma alternativa para definir la función $\delta(t)$ recurriendo a la denominada **función de prueba** $\psi(t)$, la que corresponde a una función continua que se anula fuera de algún intervalo finito. En base a esto, la función δ se define en forma simbólica mediante la relación.

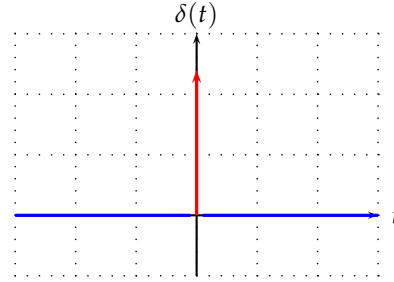


figura 3.12

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \psi(t) dt = \psi(0)$$

Esta expresión no tiene el significado de una integral definida, sino que la integral y la función $\delta(t)$ están definidas por el número $\psi(0)$ asignado a la función $\psi(t)$.

Proposición 3.6.1. (Propiedad de filtración)

Sea $a > 0$, f integrable en $[0, \infty)$ y continua en a . Entonces

$$\int_0^{\infty} f(t) \delta(t-a) dt = f(a)$$

Demostración

En primer lugar,

$$\int_0^{\infty} f(t) \delta_\epsilon(t-a) dt = \frac{1}{\epsilon} \int_a^{a+\epsilon} f(t) dt$$

esto resulta de usar la definición de $\delta_\epsilon(t-a)$. Ahora, el teorema del valor medio para integrales

3.6 Función impulso unitario

afirma que existe un valor c_0 entre a y $a + \epsilon$ tal que

$$\int_0^{\infty} f(t) \delta_{\epsilon}(t - a) dt = f(c_0)$$

Al calcular el límite cuando $\epsilon \rightarrow 0^+$ se tiene que $c_0 \rightarrow a$, y que $\delta_{\epsilon}(t - a) \rightarrow \delta(t - a)$. Luego,

$$\int_0^{\infty} f(t) \delta(t - a) dt = f(a)$$

Ejemplo 3.6.2. Si $f(t) = e^{-st}$, entonces $\int_0^{\infty} e^{-st} \delta(t - a) dt = e^{-as}$. Si hacemos $a = 0$, se tiene

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \delta(t) dt = 1$$

Ejemplo 3.6.3. Al cambiar la notación, en la proposición 3.6.1, se tiene

$$\int_0^{\infty} f(x) \delta(t - x) dx = f(t)$$

lo que corresponde a la convolución de f con δ . Es decir, $f * \delta = f$. De esta forma, la función delta aparece como la “identidad” de la operación convolución, a estudiar más adelante.

3.6.1. Transformada del impulso unitario

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-\omega t} dt = 1$$

La función $\psi(t) = e^{-\omega t}$ representa a la función de prueba, pues cumple los requisitos de continuidad en cualquier intervalo finito y se anula fuera de él (en ∞ es cero). Como $\psi(0) = e^0 = 1$, entonces

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{\omega t} dt = \psi(0) = 1$$

Proposición 3.6.4.

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\omega t} d\omega$$

Demostración.

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = 1 \implies \delta(t) = \mathcal{F}^{-1}[1] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\omega t} d\omega$$

Esta proposición se puede escribir también en la forma

$$\delta(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \omega t d\omega$$

En efecto, se escribe la exponencial del integrando en términos de senos y cosenos

$$e^{\omega t i} = \cos \omega t + i \operatorname{sen} \omega t$$

Se separa la integral en sus partes real e imaginaria

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\omega t i} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega t d\omega + \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen} \omega t d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \omega t d\omega$$

Se aplicó que la función $\cos \omega t$ es par respecto de t y que la función $\operatorname{sen} \omega t$ es impar.

3.6.2. Transformada de una constante

Sea $f(t) = A$, hallemos $\mathcal{F}[f(t)]$ en función del impulso.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[A] &= \int_{-\infty}^{\infty} A e^{-\omega t i} dt = 2\pi A \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega t i} dt, \quad t = -z \\ &= 2\pi A \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\omega z i} dz = 2\pi A \delta(\omega) \end{aligned}$$

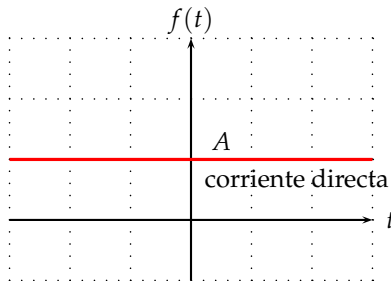


figura 3.13

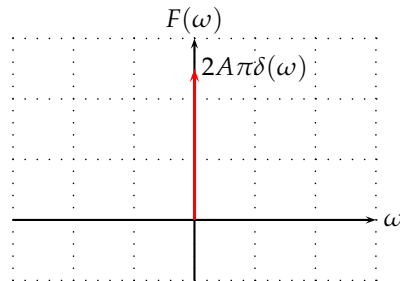


figura 3.14

3.7. Propiedades de la Transformada

Presentamos un conjunto de propiedades que posee la transformada de Fourier que hacen de su cálculo un episodio entretenido, en el cual, básicamente, uno se bate sólo con propiedades.

Linealidad : Si $\mathcal{F}[f(t)]$ y $\mathcal{F}[g(t)]$ existen, entonces

$$\mathcal{F}[k_1 f(t) + k_2 g(t)] = k_1 \mathcal{F}[f(t)] + k_2 \mathcal{F}[g(t)]$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}[k_1 f(t) + k_2 g(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} (k_1 f(t) + k_2 g(t)) e^{-\omega t} dt \\
 &= k_1 \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-\omega t} dt + k_2 \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-\omega t} dt \\
 &= k_1 \mathcal{F}[f(t)] + k_2 \mathcal{F}[g(t)]
 \end{aligned}$$

Escalonamiento : Si $k \in \mathbb{R}$ y $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$ entonces

$$\mathcal{F}[f(kt)] = \frac{1}{|k|} F\left[\frac{\omega}{k}\right]$$

Demostración.

i) Caso $k > 0$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}[f(kt)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(kt) e^{-\omega t} dt = \frac{1}{k} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{-\omega z/k} dz, \quad kt = z \\
 &= \frac{1}{|k|} F\left[\frac{\omega}{k}\right]
 \end{aligned}$$

2i) Caso $k < 0$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}[f(kt)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(kt) e^{-\omega t} dt = \frac{1}{k} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{-\omega z/k} dz, \quad kt = z \\
 &= -\frac{1}{k} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{-\omega z/k} dz = \frac{1}{|k|} F\left[\frac{\omega}{k}\right]
 \end{aligned}$$

Esta propiedad de escalonamiento afirma que la contracción en el dominio del tiempo, $f(kt)$, es equivalente a la expansión en el dominio de la frecuencia y viceversa. $F\left(\frac{\omega}{k}\right)$ es la función $F(\omega)$ expandida en la escala de frecuencia por el mismo factor k .

Paridad : Si $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$ entonces $\mathcal{F}[f(-t)] = F(-\omega)$

Demostración.

$$\begin{aligned}
 F(f(-t)) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(-t) e^{-\omega t} dt, \quad z = -t \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{\omega z} dz = F(-\omega)
 \end{aligned}$$

Desplazamiento en el tiempo :

$$\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega) \implies \mathcal{F}[f(t - t_0)] = F(\omega) e^{-\omega t_0 i}$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(t - t_0)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0) e^{-\omega t i} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{-\omega i(z+t_0)} dz, \quad z = t - t_0 \\ &= e^{-\omega t_0 i} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{-\omega z i} dz = F(\omega) e^{-\omega t_0 i} \end{aligned}$$

Desplazamiento en la frecuencia : Sea $\omega_0 \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega) \implies \mathcal{F}[f(t) e^{\omega_0 t i}] = F(\omega - \omega_0)$$

Demostración.

$$\mathcal{F}[f(t) e^{\omega_0 t i}] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-\omega t i} e^{\omega_0 t i} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-(\omega - \omega_0) t i} dt = F(\omega - \omega_0)$$

Simetría :

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] \implies \mathcal{F}[F(t)] = 2\pi f(-\omega)$$

Demostración.

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{\omega t i} d\omega \\ 2\pi f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{\omega t i} d\omega \\ 2\pi f(-t) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-\omega t i} d\omega, \quad t = -t \\ 2\pi f(-\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-\omega t i} dt = \mathcal{F}[F(t)] \quad (t = \omega) \end{aligned}$$

Ejemplo 3.7.1. Hallemos $\mathcal{F}[e^{\omega_0 t i}]$.

La propiedad de desplazamiento en la frecuencia establece que

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] \implies \mathcal{F}[f(t) e^{\omega_0 t i}] = F(\omega - \omega_0)$$

3.7 Propiedades de la Transformada

Dado que $f(t) = 1$, basta con saber el valor de $\mathcal{F}[1]$ para tener resuelto el problema. En efecto, $\mathcal{F}[1] = 2\pi\delta(\omega)$, de manera que

$$F(\omega - \omega_0) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

En consecuencia

$$\mathcal{F}[e^{\omega_0 ti}] = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

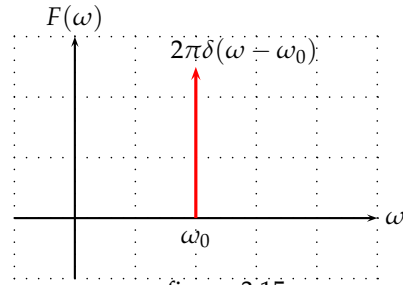


figura 3.15

Ejemplo 3.7.2. Hallemos $\mathcal{F}[\cos \omega_0 t]$ y $\mathcal{F}[\sin \omega_0 t]$.

Escribimos las funciones seno y coseno en términos de exponenciales complejas. Esto es,

$$\cos \omega_0 t = \frac{1}{2} (e^{\omega_0 ti} + e^{-\omega_0 ti}), \quad \sin \omega_0 t = \frac{1}{2i} (e^{\omega_0 ti} - e^{-\omega_0 ti})$$

Se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\cos \omega_0 t] &= \mathcal{F}\left[\frac{1}{2}(e^{\omega_0 ti} + e^{-\omega_0 ti})\right] = \frac{1}{2}\mathcal{F}[e^{\omega_0 ti}] + \frac{1}{2}\mathcal{F}[e^{-\omega_0 ti}] \\ &= \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0) \\ \mathcal{F}[\sin \omega_0 t] &= \mathcal{F}\left[\frac{1}{2i}(e^{\omega_0 ti} - e^{-\omega_0 ti})\right] = \frac{1}{2i}\mathcal{F}[e^{\omega_0 ti}] - \frac{1}{2i}\mathcal{F}[e^{-\omega_0 ti}] \\ &= -i\pi\delta(\omega - \omega_0) + i\pi\delta(\omega + \omega_0) \end{aligned}$$

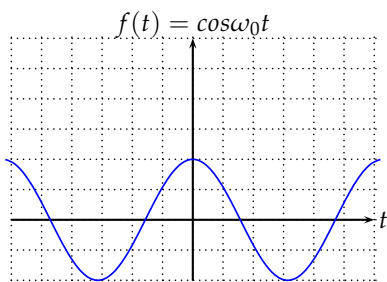
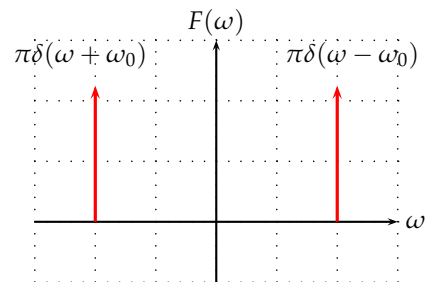


figura 3.16



Derivadas Si $f(t) \rightarrow 0$ para $t \rightarrow \pm\infty$, entonces

$$\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega) \implies \mathcal{F}[f'(t)] = i\omega F(\omega)$$

De acuerdo con la definición de transformada

$$\mathcal{F}[f'(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)e^{-\omega ti} dt$$

Si $u = e^{-\omega ti}$ $du = -i\omega e^{-\omega ti} dt$, $dv = f'(t) dt$, $v = f(t)$, entonces la integral se transforma en

$$\mathcal{F}[f'(t)] = e^{-\omega ti} f(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} + i\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-\omega ti} dt = i\omega F(\omega)$$

Aplicando reiteradamente este hecho.

$$\mathcal{F}[f^{(n)}(t)] = (i\omega)^n F(\omega), \quad n = 1, 2, \dots$$

Potencias

$$\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega) \implies \mathcal{F}[t^n f(t)] = i^n F^{(n)}(\omega)$$

Integrales Sean $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = F(0) = 0$, $\omega \neq 0$, entonces

$$\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega) \implies \mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^t f(x) dx\right] = \frac{1}{i\omega} F(\omega)$$

Ejemplo 3.7.3. Hallemos la transformada de $f(t) = 1 - 3\delta(t) + 2\delta'(t - 2)$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[1 - 3\delta(t) + 2\delta'(t - 2)] &= \mathcal{F}[1] - 3\mathcal{F}[\delta(t)] + 2\mathcal{F}[\delta'(t - 2)] \\ &= 2\pi\delta(\omega) - 3 + 2i\omega F(\omega) \\ &= 2\pi\delta(\omega) - 3 + 2i\omega \mathcal{F}[\delta(t - 2)] \\ &= 2\pi\delta(\omega) - 3 + 2i\omega e^{-2\omega i} \end{aligned}$$

Se hizo uso de la propiedad de desplazamiento en el tiempo

$$\mathcal{F}[\delta(t - 2)] = \mathcal{F}[\delta(t)] \cdot e^{-2\omega i}$$

3.8. Convolución

En general, la transformada no posee la propiedad, de que la transformada de un producto de funciones sea el producto de la transformada de las funciones. No obstante, se puede definir un “producto” especial entre f y g , llamado **convolución** de las funciones f y g , que se anota $f * g$, para el cual si se verifica la propiedad.

Definición 3.8.1. Sean f y g funciones continuas por tramos en el intervalo $(-\infty, \infty)$ con una de las funciones absolutamente integrable y la otra acotada. La convolución de f y g , que se anota $f * g$, se define como

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(t - x) dx$$

3.8 Convolución

Teorema 3.8.2. (*convolución en el tiempo*)

Sean $\mathcal{F}[f(t)] = F_1(\omega)$, $\mathcal{F}[g(t)] = F_2(\omega)$, entonces

$$\mathcal{F}[f(t) * g(t)] = F_1(\omega) \cdot F_2(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] \cdot \mathcal{F}[g(t)]$$

Este es el resultado que asegura que el “producto” así definido corresponde al producto de las transformadas. Para demostrarlo nos basamos en la definición de convolución y de transformada

$$\mathcal{F}[f(t) * g(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(t-x) dx \right] e^{-i\omega t} dt$$

Cambiando el orden de integración, esto se transforma en

$$\mathcal{F}[f(t) * g(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(t-x) e^{-i\omega t} dt \right] dx \quad (3.1)$$

De acuerdo con la propiedad de desplazamiento en el tiempo, el contenido del corchete es

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t-x) e^{-i\omega t} dt = F_2(\omega) e^{-i\omega x}$$

Al reemplazar esto en la ecuación (7.1), se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(t) * g(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) F_2(\omega) e^{-i\omega x} dx \\ &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \right] F_2(\omega), \quad x = t \\ &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right] F_2(\omega) = F_1(\omega) F_2(\omega) \end{aligned}$$

Esta propiedad puede también ser útil desde el lado de la inversa

$$(f * g)(t) = \mathcal{F}^{-1}[F_1(\omega) F_2(\omega)]$$

Teorema 3.8.3. (*convolución en la frecuencia*)

Sean $f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F_1(\omega)]$, $g(t) = \mathcal{F}^{-1}[F_2(\omega)]$, entonces

$$\mathcal{F}^{-1}[F_1(\omega) * F_2(\omega)] = 2\pi f(t) \cdot g(t)$$

De acuerdo con la definición de transformada inversa se tiene

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}^{-1}[F_1(\omega) * F_2(\omega)] &= \mathcal{F}^{-1} \left[\int_{-\infty}^{\infty} F_1(x) F_2(\omega - x) dx \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} F_1(x) F_2(\omega - x) dx \right] e^{i\omega t} d\omega, \quad \text{con } \omega - x = z \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x) \left[\int_{-\infty}^{\infty} F_2(z) e^{i(z+x)t} dz \right] dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x) e^{ixt} \left[\int_{-\infty}^{\infty} F_2(z) e^{izt} dz \right] dx
 \end{aligned}$$

con $z = \omega$, $x = \omega$ en la última integral, podemos escribir

$$2\pi \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega) e^{i\omega t} d\omega \right] \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_2(\omega) e^{i\omega t} d\omega \right] = 2\pi f(t) g(t)$$

concluyéndose que

$$\mathcal{F}^{-1}[F_1(\omega) * F_2(\omega)] = 2\pi f(t) g(t)$$

Este resultado, visto desde la transformada directa se expresa

$$\mathcal{F}[f(t) g(t)] = \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x) F_2(\omega - x) dx$$

Ejemplo 3.8.4. Probemos la propiedad conmutativa de la convolución considerando las funciones

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t} & , t > 0 \\ 0 & , t < 0 \end{cases} \quad g(t) = \begin{cases} e^t & , t < 0 \\ 0 & , t > 0 \end{cases}$$

En primer lugar hay que escribir las funciones dadas en términos del escalón unitario. Se tiene,

3.8 Convolución

$f(t) = e^{-t} \mu(t)$, $g(t) = e^t - e^t \mu(t)$. Luego,

$$\begin{aligned}(f * g)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(t-x) dx \\&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x} \mu(x) \left\{ e^{t-x} - e^{t-x} \mu(t-x) \right\} dx \\&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2x+t} \mu(x) dx - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2x+t} \mu(x) \mu(t-x) dx \\&= \int_0^{\infty} e^{-2x} \cdot e^t dx - \int_0^t e^t \cdot e^{-2x} dx \\&= -\frac{1}{2} e^t \cdot e^{-2x} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{2} e^t \cdot e^{-2x} \Big|_0^t = \frac{1}{2} e^{-t}\end{aligned}$$

Para $g * f$ se tiene que

$$\begin{aligned}(g * f)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(t-x) dx \\&= \int_{-\infty}^{\infty} e^x (1 - \mu(x)) \cdot e^{-(t-x)} \mu(t-x) dx \\&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2x-t} (\mu(t-x) - \mu(x) \mu(t-x)) dx \\&= \int_{-\infty}^0 e^{2x-t} dx - \int_0^t e^{2x-t} dx \\&= \frac{1}{2} e^{-t} \cdot e^{2x} \Big|_{-\infty}^0 - \frac{1}{2} e^{-t} \cdot e^{2x} \Big|_0^t = \frac{1}{2} e^{-t}\end{aligned}$$

Esto verifica la conmutatividad de la convolución

Ejemplo 3.8.5. Hallemos la transformada inversa de $F(\omega) = \frac{1}{(1+i\omega)^2}$

Se trata de determinar la función $f(t)$ cuya transformada de Fourier es $F(\omega)$. Esto es,

$$\mathcal{F}[f(t)] = \frac{1}{(1+i\omega)^2} \implies f(t) = \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{1}{(1+i\omega)^2} \right]$$

Se puede pensar en aplicar la definición de transformada inversa. Con ello se tiene la expresión

$$\mathcal{F}^{-1} \left[\frac{1}{(1 + i\omega)^2} \right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{\omega t i} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1 + i\omega)^2} e^{\omega t i} d\omega$$

Se observa que el cálculo de esta integral no es nada simple. Por esta razón vamos a elegir como camino alternativo el uso de la propiedad de convolución. Para ello es necesario escribir

$$\frac{1}{(1 + i\omega)^2} = \frac{1}{1 + i\omega} \cdot \frac{1}{1 + i\omega} = F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)$$

sabemos que la función

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} = e^{-\alpha t} \mu(t) \implies \mathcal{F}[f(t)] = \frac{1}{\alpha + i\omega}$$

Si $\alpha = 1$, entonces

$$f(t) = e^{-t} \mu(t) \implies \mathcal{F}[f(t)] = \frac{1}{1 + i\omega}$$

El Teorema de convolución asegura que

$$\mathcal{F}(f * g) = F_1(\omega) \cdot F_2(\omega) \implies f * g = \mathcal{F}^{-1} [F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)]$$

Como en este caso $f(t) = g(t) = e^{-t} \mu(t)$ implican que $F_1(\omega) = F_2(\omega)$, entonces, con el cálculo de la convolución de f y g el problema está resuelto.

$$\begin{aligned} (f * g)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(t - x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x} \mu(x) e^{-(t-x)} \mu(t - x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t} \mu(x) \mu(t - x) dx \end{aligned}$$

El producto de los escalones, en el integrando, es

$$\mu(x) \mu(t - x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \cdot \begin{cases} 1, & x < t \\ 0, & x > t \end{cases} = \begin{cases} 1, & 0 < x < t \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$$

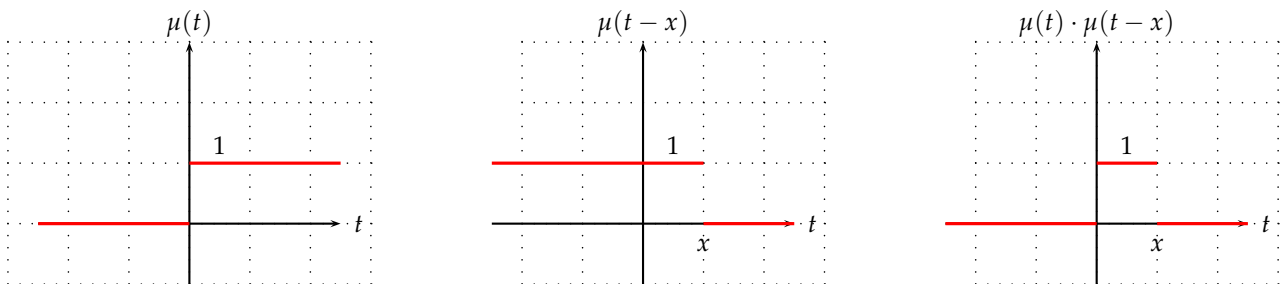


figura 3.17

3.8 Convolución

Con esto la integral se reduce a

$$(f * g)(t) = \int_0^t e^{-t} dx = t e^{-t} \mu(t)$$

En consecuencia

$$\mathcal{F}^{-1} \left[\frac{1}{(1 + i\omega)^2} \right] = f(t) = t e^{-t} \mu(t)$$

3.8.1. Ecuaciones diferenciales con Fourier

Mediante transformadas de Fourier es posible resolver ecuaciones diferenciales lineales de la forma

$$a_n D^n x(t) + a_{n-1} D^{n-1} x(t) + \cdots + a_0 x(t) = f(t)$$

El método consiste en aplicar transformada de Fourier en ambos lados de la ecuación diferencial, utilizar la regla de derivación y despejar $x(t)$.

Ejemplo 3.8.6. *Hallemos la solución particular de la ecuación diferencial*

$$x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) = \mu(t)$$

Aplicamos transformada en ambos lados de la igualdad.

$$\mathcal{F}[x''(t)] + 3\mathcal{F}[x'(t)] + 2\mathcal{F}[x(t)] = \mathcal{F}[\mu(t)]$$

$$(i\omega)^2 \mathcal{F}[x(t)] + 3i\omega \mathcal{F}[x(t)] + 2\mathcal{F}[x(t)] = \mathcal{F}[\mu(t)]$$

Al despejar se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[x(t)] &= \mathcal{F}[\mu(t)] \cdot \frac{1}{(i\omega)^2 + 3i\omega + 2} \\ &= \mathcal{F}[\mu(t)] \cdot \frac{1}{(i\omega + 1)(i\omega + 2)} \end{aligned}$$

Ahora buscamos una función $h(t)$ tal que

$$\mathcal{F}[h(t)] = \frac{1}{(i\omega + 1)(i\omega + 2)}$$

Para ello, las fracciones parciales aseguran que

$$\frac{1}{(i\omega + 1)(i\omega + 2)} = \frac{1}{1 + i\omega} - \frac{1}{2 + i\omega}$$

De aquí que se tenga

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{1}{1+iw} \right) - \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{1}{2+iw} \right]$$

De donde hallamos que

$$h(t) = e^{-t} \mu(t) - e^{-2t} \mu(t)$$

Con esto tenemos expresada la transformada de $x(t)$ como

$$\mathcal{F}[x(t)] = \mathcal{F}[\mu(t)] \cdot \mathcal{F}[h(t)] = F_1(w) \cdot F_2(w)$$

De lo cual

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}[F_1(w) \cdot F_2(w)]$$

Para hallar $x(t)$ usemos convolución

$$\begin{aligned} x(t) &= \mu(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(x) h(t-x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mu(x) \mu(t-x) \left(e^{-(t-x)} - e^{-2(t-x)} \right) dx \\ &= \int_0^t \left(e^{-t} e^x - e^{-2t} e^{2x} \right) dx = e^{-t} e^x \Big|_0^t - e^{-2t} \frac{1}{2} e^{2x} \Big|_0^t \\ &= e^{-t} (e^t - 1) - \frac{1}{2} e^{-2t} (e^{2t} - 1) = \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2} e^{-2t} \\ &= \frac{1}{2} (1 - 2e^{-t} + e^{-2t}) \mu(t) \end{aligned}$$

3.8.2. Transformada de una función periódica

Sea $f(t)$ función periódica, vamos a encontrar su transformada de Fourier, esto es $\mathcal{F}[f(t)]$. Para ello suponemos que f es de periodo T . La forma compleja de la serie de Fourier para f es

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt$$

Al tomar transformada en ambos miembros

$$\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega) = \mathcal{F} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t} \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathcal{F} [e^{in\omega_0 t}]$$

Como $\mathcal{F} [e^{in\omega_0 t}] = 2\pi \delta(\omega - n\omega_0)$, entonces

$$\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(\omega - n\omega_0)$$

3.8 Convolución

Esta ecuación señala que la transformada de una función periódica consta de una sucesión de impulsos equidistantes localizados en las frecuencias armónicas de la función.

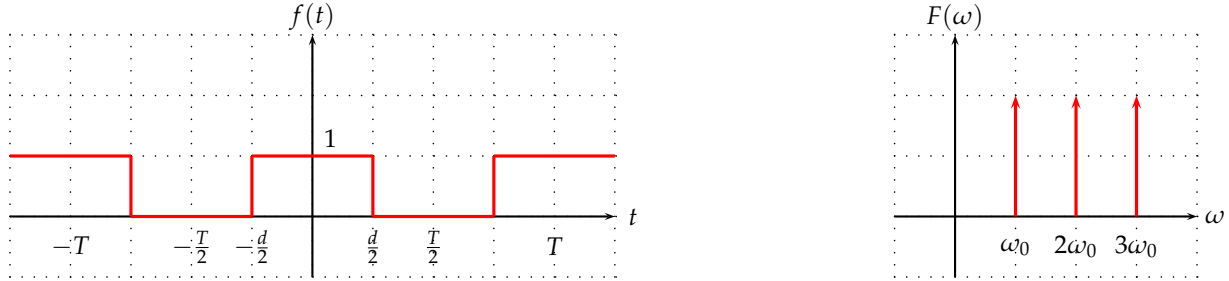


figura 3.18

El coeficiente complejo c_n se puede calcular directamente de la integral que lo define o bien, mediante el siguiente resultado.

Proposición 3.8.7. Los coeficientes complejos c_n de la expansión en serie de Fourier de una función periódica $f(t)$ de periodo T satisfacen que

$$c_n = \frac{1}{T} F_0(n\omega_0)$$

en donde $F_0(\omega)$ es la transformada de Fourier de la función $f_0(t)$, la que está definida por

$$f_0(t) = \begin{cases} f(t), & |t| < \frac{T}{2} \\ 0, & |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

Demostración.

$$F_0(\omega) = \mathcal{F}[f_0(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f_0(t) e^{-\omega t} dt = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-\omega t} dt$$

A partir de esto

$$F_0(n\omega_0) = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-n\omega_0 t} dt = T c_n$$

De donde

$$c_n = \frac{1}{T} F_0(n\omega_0)$$

Ejemplo 3.8.8. Hallemos la transformada de Fourier del tren de pulsos que muestra la figura 3.18.

El coeficiente c_n del tren de pulso de ancho d y periodo T es $c_n = \frac{1}{T} F_0(n\omega_0)$. Calculemos $F_0(\omega)$ para posteriormente tener $F_0(n\omega_0)$.

$$\begin{aligned} F_0(\omega_0) &= \mathcal{F}[f_0(t)] = \mathcal{F} \left[\begin{cases} 1, & |t| < \frac{d}{2} \\ 0, & |t| > \frac{d}{2} \end{cases} \right] = \frac{2}{\omega} \operatorname{sen} \frac{d\omega}{2} \\ F_0(n\omega_0) &= \frac{2}{n\omega_0} \operatorname{sen} \frac{dn\omega_0}{2} \implies c_n = \frac{1}{T} \cdot \frac{2}{n\omega_0} \operatorname{sen} \frac{dn\omega_0}{2} \end{aligned}$$

En consecuencia

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(t)] &= 2\pi \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \frac{2}{n\omega_0} \operatorname{sen} \frac{dn\omega_0}{2} \delta(\omega - n\omega_0) \\ &= 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen} \left(\frac{dn\omega_0}{2} \right) \delta(\omega - n\omega_0), \quad T\omega_0 = 2\pi \\ &= 2 \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen} \left(\frac{dn\omega_0}{2} \right) \delta(\omega - n\omega_0)\end{aligned}$$

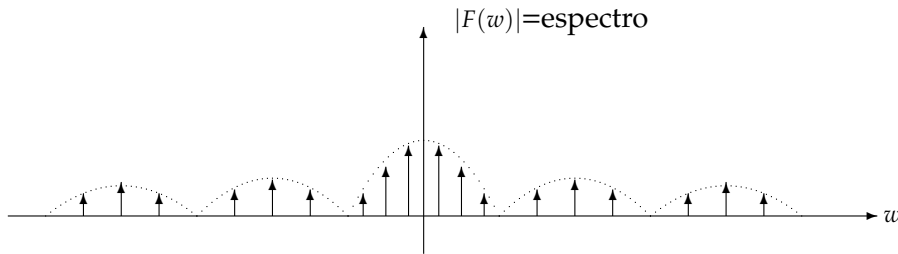


figura 3.19

3.9. Transformada seno y coseno

En algunos problemas se tiene una función definida sólo en el intervalo $[0, \infty)$. Para usar la transformada de Fourier con esta clase de funciones, se descompone la transformada de Fourier para funciones definidas en $(-\infty, \infty)$ en sus partes real e imaginaria, para dar origen a las transformadas **coseno** y **seno** de Fourier de una función definida en el intervalo $[0, \infty)$.

Definición 3.9.1. Sea f una función definida en $0 \leq t < \infty$, entonces

$$\mathcal{F}[f(t)] = F_c(\omega) = \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt$$

se denomina transformada **coseno** de Fourier de $f(t)$. Su transformada inversa es

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F_c(\omega) \cos \omega t d\omega$$

Análogamente,

$$\mathcal{F}[f(t)] = F_s(\omega) = \int_0^{\infty} f(t) \operatorname{sen} \omega t dt$$

es la transformada **seno** de Fourier de $f(t)$, y su inversa corresponde a

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F_s(\omega) \operatorname{sen} \omega t d\omega$$

3.9 Transformada seno y coseno

De la definición de estas transformadas se observa que la transformada coseno es el coeficiente $A(\omega)$ en la representación integral de Fourier en cosenos de f , y que la transformada seno es el coeficiente $B(\omega)$ en la representación integral de Fourier en senos de f .

Ejemplo 3.9.2. Sea $f(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$, $\alpha > 0$. Vamos a determinar la transformada seno y coseno de f .

a) La Transformada coseno es

$$\mathcal{F}_c[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} \cos \omega t dt$$

$u = \cos \omega t$, $du = -\omega \sin \omega t$, $dv = e^{-\alpha t} dt$, $v = -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha t}$, lleva a

$$\mathcal{F}_c[f(t)] = \frac{1}{\alpha} \cos \omega t e^{-\alpha t} \Big|_0^{\infty} - \frac{\omega}{\alpha} \int_0^{\infty} \sin \omega t e^{-\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha} - \frac{\omega}{\alpha} \mathcal{F}_s[f(t)]$$

b) Para la Transformada seno tenemos

$$\mathcal{F}_s[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} \sin \omega t dt$$

$u = \sin \omega t$, $du = \omega \cos \omega t$, $dv = e^{-\alpha t} dt$, $v = -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha t}$, lleva a

$$\mathcal{F}_s[f(t)] = -\frac{1}{\alpha} \sin \omega t e^{-\alpha t} \Big|_0^{\infty} + \frac{\omega}{\alpha} \int_0^{\infty} \cos \omega t e^{-\alpha t} dt = \frac{\omega}{\alpha} \mathcal{F}_c[f(t)]$$

Resolviendo el sistema

$$\begin{cases} \mathcal{F}_c[f(t)] = \frac{1}{\alpha} - \frac{\omega}{\alpha} \mathcal{F}_s[f(t)] \\ \mathcal{F}_s[f(t)] = \frac{\omega}{\alpha} \mathcal{F}_c[f(t)] \end{cases}$$

Se tiene

$$\mathcal{F}_c = \frac{1}{\alpha} - \frac{\omega^2}{\alpha^2} \mathcal{F}_c \implies \mathcal{F}_c = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{F}_s = \frac{\omega}{\alpha} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{\omega}{\alpha} \right) \mathcal{F}_s \implies \mathcal{F}_s = \frac{\omega}{\alpha^2 + \omega^2}$$

Este cálculo de las transformadas seno y coseno de Fourier de la función pudo haberse realizado directamente de la definición.

Las transformadas seno y coseno de Fourier se aplican para resolver problemas con valor en la frontera. Los dos resultados siguientes, cuya demostración es sencilla integrando por partes, se utilizan en esa clase de problemas.

Proposición 3.9.3. Las funciones f y f' son continuas en $[0, \infty)$, $f \rightarrow 0$ y $f' \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. Además, f' es continua por tramos en $[0, k]$ para toda $k > 0$. Entonces

$$\mathcal{F}_s[f''] = -\omega^2 F_s(\omega) + \omega f(0)$$

Proposición 3.9.4. Las funciones f y f' son continuas en $[0, \infty)$, $f' \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. Además, f'' es continua por tramos en $[0, k]$ para toda $k > 0$. Entonces

$$\mathcal{F}_c[f''] = -\omega^2 F_c(\omega) - f'(0)$$

3.10. Transformada Finita de Fourier

La transformada finita de Fourier proviene de considerar la función $f(t)$ definida en el intervalo $(0, L)$ y su representación en serie de Fourier para las extensiones par e impar al intervalo $(-L, L)$. Su utilidad está en que ayuda a resolver problemas con valor en la frontera, especialmente ecuaciones de onda y calor.

En lo que sigue, se supone que f es una función que satisface las condiciones de Dirichlet, y como consecuencia, admite desarrollo en serie de Fourier.

1. Si f se extiende en forma impar, entonces el coeficiente $a_n = 0, \forall n \geq 0$. Su representación en serie de Fourier es

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L}, \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L} dt$$

Si se escribe

$$F_s(n) = \int_0^L f(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L} dt \quad (3.2)$$

entonces $b_n = \frac{2}{L} F_s(n)$. La serie de Fourier para $f(t)$ se escribe ahora

$$f(t) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} F_s(n) \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L} \quad (3.3)$$

La ecuación (3.2) recibe el nombre de **Transformada finita seno** de Fourier de $f(t)$, y la (3.3) es la inversa de la transformada finita seno de Fourier de $F_s(n)$.

2. Si f se extiende en forma par, entonces el coeficiente $b_n = 0, \forall n$. Su representación en serie de Fourier es

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{L}, \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt$$

Si se escribe

$$F_c(n) = \int_0^L f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt \quad (3.4)$$

3.10 Transformada Finita de Fourier

entonces $a_0 = \frac{2}{L} F_c(0)$. La serie de Fourier toma la forma

$$f(t) = \frac{1}{L} F_c(0) + \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} F_c(n) \cos \frac{n\pi t}{L} \quad (3.5)$$

La ecuación (3.4) es la **Transformada finita coseno** de Fourier de $f(t)$, y la ecuación (3.5) es la inversa de la transformada finita seno de Fourier de $F_s(n)$.

Ejemplo 3.10.1. Hallemos las transformadas finita de seno y coseno de Fourier para $f(t) = t$, $0 < t < 2$.

a) Transformada seno

Se considera $T = 4$ para la extensión impar, de donde $L = 2$. Luego,

$$\begin{aligned} F_s(n) &= \int_0^L f(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L} dt = \int_0^2 t \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{2} dt = -\frac{2t}{n\pi} \cos \frac{n\pi t}{2} \Big|_0^2 + \frac{2}{n\pi} \int_0^2 \cos \frac{n\pi t}{2} dt \\ &= -\frac{4}{n\pi} \cos n\pi + \frac{4}{n^2\pi^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{2} \Big|_0^2 = -4 \cdot \frac{(-1)^n}{n\pi} = 4 \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} \end{aligned}$$

b) Transformada coseno

Ahora la extensión es par, y $L = 2$. Luego,

$$\begin{aligned} F_c(n) &= \int_0^L f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt = \int_0^2 t \cos \frac{n\pi t}{2} dt = -\frac{2t}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{2} \Big|_0^2 - \frac{2}{n\pi} \int_0^2 \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{2} dt \\ &= \frac{4}{n^2\pi^2} \cos \frac{n\pi t}{2} \Big|_0^2 = \frac{4}{n^2\pi^2} (\cos n\pi - 1) \\ &= \begin{cases} -\frac{8}{n^2\pi^2}, n \text{ impar} \\ 0, n \text{ par} \end{cases} \end{aligned}$$

El coeficiente $F_c(0)$ es

$$F_c(0) = \int_0^L f(t) dt = \int_0^2 t dt = 2$$

La transformada finita tiene, al igual que la transformada en general, una gran aplicación en problemas con valores en la frontera. Existen dos resultados que interesan allí. Son:

Proposición 3.10.2. Las funciones f y f' son continuas en $[0, L]$, f' es continua por tramos en $[0, L]$. Si $S_n(f(x))$ denota la transformada $F_s(n)$, entonces

$$S_n\{f''\} = -n^2 F_s(n) + n f(0) - n (-1)^n f(\pi), \quad n \in \mathbb{Z}^+$$

Proposición 3.10.3.

Las funciones f y f' son continuas en $[0, L]$, f'' es continua por tramos en $[0, L]$. Si $C_n(f(x))$ denota la transformada $C_s(n)$, entonces

$$C_n\{f''\} = -n^2 F_c(n) - f'(0) + (-1)^n f'(\pi), \quad n \in \mathbb{Z}^+$$

3.11. Teorema de Parseval

Por lo general, la transformada de Fourier de una función $f(t)$ es una función compleja. Esto se observa de la definición

$$\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

De manera que se puede escribir

$$F(\omega) = R(\omega) + i I(\omega)$$

Cuando f es una función real, las partes real e imaginaria de la transformada son

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt$$

$$I(\omega) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sen \omega t dt$$

Es sencillo verificar que la parte real es par y que la imaginaria es impar, como funciones de ω . Es decir, $R(\omega) = R(-\omega)$, $I(\omega) = -I(-\omega)$. A partir de este hecho se deduce que

$$F(-\omega) = R(-\omega) + i I(-\omega) = R(\omega) - i I(\omega) = F^*(\omega)$$

en donde $F^*(\omega)$ denota el conjugado de $F(\omega)$.

Proposición 3.11.1.

$$\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega) \implies \mathcal{F}[f^*(t)] = F^*(-\omega)$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f^*(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} (f(t) e^{i\omega t})^* dt \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-(-i\omega t)} dt \right)^* = F^*(-\omega) \end{aligned}$$

3.11 Teorema de Parseval

Proposición 3.11.2. $\mathcal{F}[f(t)] = F_1(\omega)$, $\mathcal{F}[g(t)] = F_2(\omega)$, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega) F_2(-\omega) d\omega$$

Demostración.

Formemos la expresión en la izquierda de la igualdad usando transformada y luego la propiedad de convolución

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(t) g(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(t) e^{-i\omega t} dt = F_1(\omega) * F_2(\omega) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(y) F_2(\omega - y) dy \end{aligned}$$

Con $\omega = 0$ se tiene

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(t) dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(y) F_2(-y) dy, \quad y = \omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega) F_2(-\omega) d\omega \end{aligned}$$

Cabe hacer presente, que en el caso que las funciones f y g sean reales, en la proposición anterior, se cambia $F_2(-\omega)$ por $F^*(\omega)$

Ahora estamos en condiciones de enunciar y probar el teorema de Parseval.

Teorema 3.11.3. (Parseval) Sea $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

Demostración.

Con $g(t) = f^*(t)$ en la proposición 3.11.2 se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) f^*(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) F^*(\omega) d\omega$$

La conocida propiedad de los números complejos $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ muestra que

$$f(t) f^*(t) = |f(t)|^2, \quad F(\omega) F^*(\omega) = |F(\omega)|^2$$

Luego,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

Ejemplo 3.11.4. Hallemos el valor de $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{a^2 + x^2}$

El valor de esta integral ya había sido encontrado por representación integral. Veamos ahora como hallar su valor a partir de una transformada conocida. Se sabe que

$$\mathcal{F}[e^{-at}\mu(t)] = F(\omega) = \frac{1}{a + i\omega}, \quad a > 0$$

A partir de esto hallamos que

$$\begin{aligned} |F(\omega)|^2 &= F(\omega) \cdot F^*(\omega) = F(\omega) \cdot F(-\omega) \\ &= \frac{1}{a + i\omega} \cdot \frac{1}{a - i\omega} = \frac{1}{a^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

Ahora, el teorema de Parseval asegura que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

de manera que al hacer los reemplazos se tiene

$$\int_0^{\infty} e^{-2at} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2 + \omega^2} d\omega$$

el escalón anula el integrando en $(-\infty, 0)$. Se sigue que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2 + \omega^2} d\omega = 2\pi \int_0^{\infty} e^{-2at} dt = \frac{\pi}{a}$$

En el caso de las transformadas **seno** y **coseno** de Fourier, el teorema de Parseval asegura que

$$\int_0^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} |F_s(\omega)|^2 d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} |F_c(\omega)|^2 d\omega$$

Ejemplo 3.11.5. Sea $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & t \geq 1 \end{cases}$, con la identidad de Parseval y las transformadas seno y coseno de Fourier de esta función vamos a probar que

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{1 - \cos t}{t} \right)^2 dt = \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt = \frac{\pi}{2}$$

Las transformadas seno y coseno de la función $f(t)$ son

$$\mathcal{F}_s[f(t)] = \frac{1 - \cos \omega}{\omega} \quad \text{y} \quad \mathcal{F}_c[f(t)] = \frac{\sin \omega}{\omega}$$

Ahora aplicamos Parseval para tener

$$\int_0^\infty f(t)^2 dt = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left(\frac{1 - \cos \omega}{\omega} \right)^2 d\omega$$

Al despejar la integral que se quiere evaluar, se tiene

$$\int_0^\infty \left(\frac{1 - \cos \omega}{\omega} \right)^2 d\omega = \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^1 1 \cdot dt = \frac{\pi}{2}$$

Para evaluar la segunda integral tenemos

$$\int_0^\infty f(t)^2 dt = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left(\frac{\sin \omega}{\omega} \right)^2 d\omega$$

Al despejar la integral a evaluar

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 \omega}{\omega} d\omega = \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^1 1 \cdot dt = \frac{\pi}{2}$$

3.12. Transformada de Laplace

Si una función f no satisface las condiciones de Dirichlet, entonces no tiene transformada de Fourier. Sin embargo, es posible definir una nueva función

$$f(t) = f_1(t) e^{-xt} \mu(t)$$

que satisfaga las condiciones. En base a esto, la transformada de esta función existe y se tiene

$$\mathcal{F}[f(t)] = \int_0^\infty f_1(t) e^{-xt} e^{-\omega ti} dt = \int_0^\infty f_1(t) e^{-(x+i\omega)t} dt$$

Si $s = x + i\omega$, entonces

$$\mathcal{F}[f(t)] = \int_0^\infty f_1(t) e^{-st} dt = \mathcal{L}[f_1(t)]$$

Esta nueva transformada es conocida con el nombre de **Transformada de Laplace**. Se denota con simbología propia

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt \quad (3.6)$$

Las condiciones de existencia son las de Dirichlet. Sin embargo, se pueden imponer condiciones más restrictivas, como por ejemplo, exigir que $f(t)$ sea continua por tramos y de orden exponencial. Esto último significa que existe una constante real positiva c tal que $|f(t)| \leq c e^{\alpha t}$, para todo $t > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Estas condiciones garantizan la existencia de $\mathcal{L}[f(t)]$. Es decir,

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

existe para todo $s > \alpha$, en donde α es un número real por determinar

La mayoría de las funciones con las que se trabaja son de orden exponencial, sin embargo debe tenerse cuidado con aquellas que no lo son, tal como $f(t) = e^{t^2}$, y que por tanto no tienen transformada de Laplace. Para las funciones de orden exponencial se tiene el siguiente resultado interesante.

Teorema 3.12.1. Si f es una función de orden exponencial entonces

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{L}[f(t)] = \lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0$$

Como f es de orden exponencial, $|f(t)| \leq c e^{\alpha t}$, $c > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $t > 0$. Luego

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |f(t)| e^{-st} dt &\leq \int_0^\infty c e^{\alpha t} e^{-st} dt \leq c \int_0^\infty e^{-t(s-\alpha)} dt \\ &\leq -\frac{c}{s-\alpha} e^{-t(s-\alpha)} \Big|_0^\infty \leq \frac{c}{s-\alpha} \end{aligned}$$

A partir de esto, $\lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{L}(f) = 0$.

La **importancia** de este resultado es que permite saber en forma inmediata que funciones no tienen inversas. Por ejemplo, $F(s) = 1$, s , $\sin s$, $\frac{s}{s+1}$ no poseen inversas pues $\lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{L}(f) \neq 0$.

Otro problema que cabe formularse es ¿Qué sucede si la transformada de Laplace de dos funciones son iguales?. La respuesta se encuentra en el Teorema de Lerch: “Si $\mathcal{L}[f] = \mathcal{L}[g]$, y f y g son continuas, en $[0, \infty)$, entonces $f = g$ para todo $t \geq 0$ ”.

3.13. Propiedades de la Transformada

El uso de las siguientes propiedades facilita el cálculo de la transformada de Laplace. La demostración de ellas no presenta grandes dificultades, por lo que queda al interés del lector.

1. **Linealidad** Si $\mathcal{L}[f(t)]$ y $\mathcal{L}[g(t)]$ existen, entonces

$$\mathcal{L}[k_1 f(t) + k_2 g(t)] = k_1 \mathcal{L}[f(t)] + k_2 \mathcal{L}[g(t)]$$

2. **Derivadas**

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n \mathcal{L}[f(t)] - s^{n-1} f(0^+) - s^{n-2} f'(0^+) \dots - f^{(n-1)}(0^+)$$

en donde $f(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$

3. **Integrales**

$$\mathcal{L}\left[\int_a^t f(t) dt\right] = \frac{1}{s} \mathcal{L}[f(t)] - \frac{1}{s} \int_0^a f(t) dt, \quad a \in \mathbb{R}$$

4. Desplazamiento

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) \implies \mathcal{L}[f(t) e^{at}] = F(s - a)$$

O bien

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] \implies f(t) e^{at} = \mathcal{L}^{-1}[F(s - a)]$$

5. Desplazamiento

$$f(t) = \mu(t - a) g(t - a), a \geq 0 \implies \mathcal{L}[f(t)] = e^{-as} \mathcal{L}[g(t)]$$

O bien

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t) \implies \mathcal{L}^{-1}[e^{-as} F(s)] = f(t - a) \mu(t - a)$$

6. Cambio de escala

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) \implies \mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

7. Multiplicación por t^n

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) \implies \mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} (F(s)) = (-1)^n F^{(n)}(s)$$

O bien

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t) \implies \mathcal{L}^{-1}[F^{(n)}(s)] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{d^n}{ds^n} F(s) \right] = (-1)^n t^n f(t)$$

8. División por t

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) \implies \mathcal{L} \left[\frac{f(t)}{t} \right] = \int_s^\infty F(z) dz$$

siempre que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t}$ exista. O bien

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] \implies \frac{f(t)}{t} = \mathcal{L}^{-1} \left[\int_s^\infty F(z) dz \right]$$

En particular, $\int_0^\infty \frac{f(t)}{t} dt = \int_s^\infty F(z) dz$

9. Periódicas

$$f \text{ de periodo } T \implies \mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \int_0^T f(t) e^{-st} dt$$

10. Convolución

a) Sean $\mathcal{L}[f(t)] = F_1$, $\mathcal{L}[g(t)] = F_2$, entonces

$$\mathcal{L}[f * g] = F_1(s) \cdot F_2(s) \implies f * g = \mathcal{L}^{-1}[F_1(s) F_2(s)]$$

b) Sean $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F_1(s)]$, $g(t) = \mathcal{L}^{-1}[F_2(s)]$, entonces

$$\mathcal{L}^{-1}[F_1(s) * F_2(s)] = f(t) g(t) \implies F_1(s) * F_2(s) = \mathcal{L}[f(t) g(t)]$$

3.14. Cálculo de Transformadas

Mostramos algunos ejemplos de cálculo de transformadas, mediante el empleo de la definición, o bien la aplicación de alguna de las propiedades indicadas anteriormente.

Ejemplo 3.14.1. 1. Para hallar $\mathcal{L}[\mu(t)]$ se usa la definición de transformada

$$\mathcal{L}[\mu(t)] = \int_0^{\infty} \mu(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s}, s > 0$$

$$2. \mathcal{L}[1] = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s}$$

3. Usemos la definición para hallar $\mathcal{L}[e^{at}]$

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \int_0^{\infty} e^{at} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-t(s-a)} dt = \frac{1}{s-a}$$

4. De la transformada anterior se deducen

$$a) \mathcal{L}[e^{-at}] = \frac{1}{s+a}$$

$$b) \mathcal{L}[e^{-ati}] = \frac{1}{s+ai}$$

$$c) \mathcal{L}[e^{ati}] = \frac{1}{s-ai}$$

5. Para determinar $\mathcal{L}[\sin at]$ usemos la exponencial compleja

$$\mathcal{L}[\sin at] = \frac{1}{2i} \mathcal{L}[e^{ati} - e^{-ati}] = \frac{1}{2i} (\mathcal{L}[e^{ati}] - \mathcal{L}[e^{-ati}])$$

$$= \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{s-ai} - \frac{1}{s+ai} \right) = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

$$6. \mathcal{L}[\cos at] = \frac{s}{s^2 + a^2}$$

$$7. \mathcal{L}[e^{-2t} \cos 3t] = F(s+2) = \frac{s+2}{(s+2)^2 + 3^2}$$

Se usó propiedad de desplazamiento, $f(t) = \cos 3t$, $a = -2$.

$$8. \mathcal{L}[\delta(t)] = \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = \phi(0) = e^{-st} \Big|_0 = 1$$

9. La transformada de $\mathcal{L}[t^n]$ se halla como sigue

a) **alternativa 1** De acuerdo con la derivada tenemos

$$f(t) = t^n \implies f^{(n)} = n!$$

Aplicamos la transformada en ambos miembros

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = \mathcal{L}[n!] = n! \mathcal{L}[1] = \frac{n!}{s}$$

Por la propiedad de la derivada, el primer miembro es tal que

$$\mathcal{L}[f^{(n)}] = s^n \mathcal{L}[f] - s^{n-1} f(0^+) - s^{n-2} f'(0^+) - \dots$$

Al evaluar, los límites tienen el valor cero, por lo que $s^n \mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s}$. De esto se obtiene

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

b) **alternativa 2** De la propiedad de la multiplicación.

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s), \quad F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$$

Se considera $f(t) = 1$, con lo que $\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s}$. Ahora

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[t^n] &= (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \left(\frac{1}{s} \right) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} (s^{-1}) \\ &= (-1)^n \cdot (-1)^n \cdot n! \cdot s^{-(n+1)} = \frac{n!}{s^{n+1}} \end{aligned}$$

10. Hallar $\mathcal{L}[t e^t]$ de dos formas

a) Por la propiedad de desplazamiento

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) \implies \mathcal{L}[f(t) e^{at}] = F(s - a)$$

En este caso, $a = 1$, $f(t) = t$, de modo que

$$\mathcal{L}[t e^t] = F(s - 1)$$

Ahora, con la determinación de $F(s)$ el problema está resuelto. Para ello observemos que $f(t) = t$. Luego

$$F(s) = \mathcal{L}[t] = \frac{n!}{s^{n+1}} \Big|_{n=1} = \frac{1}{s^2}$$

En consecuencia

$$\mathcal{L}[t e^t] = F(s-1) = \frac{1}{(s-1)^2}$$

b) Otra manera de resolver este problema es usar la propiedad de integración. Se sabe que

$$\int_0^t x e^x dx = t e^t - e^t + 1$$

Luego

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\int_0^t x e^x dx\right] &= \mathcal{L}[te^t] - \mathcal{L}[e^t] + \mathcal{L}[1] \\ \frac{1}{s} \mathcal{L}[te^t] &= \mathcal{L}[te^t] + \frac{1}{s} - \frac{1}{s-1} \\ \mathcal{L}[te^t] &= \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s-1}\right) \cdot \frac{s}{1-s} = \frac{1}{(s-1)^2}\end{aligned}$$

11. Hallemos $\mathcal{L}[\mu(t-a) \operatorname{sen} t]$. (figura 3.15)

Usemos propiedad de desplazamiento.

$$f(t) = \mu(t-a) g(t-a) \implies \mathcal{L}[f(t)] = e^{-as} \mathcal{L}[g(t)]$$

$g(t-a) = \operatorname{sen} t \implies g(t) = \operatorname{sen}(t+a)$ En consecuencia,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\mu(t-a) \operatorname{sen} t] &= e^{-as} \mathcal{L}[\operatorname{sen}(t+a)] \\ &= e^{-as} \frac{1}{2i} \mathcal{L}\left[e^{(t+a)i} - e^{-(t+a)i}\right] \\ &= e^{-as} \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{s-i} \cdot e^{ai} - \frac{1}{s+i} \cdot e^{-ai}\right) \\ &= \frac{e^{-as}}{2i} \left(\frac{(s+i)e^{ai} - (s-i)e^{-ai}}{s^2+1}\right) \\ &= \frac{e^{-as}}{2i} \left(\frac{s(e^{ai} - e^{-ai}) + i(e^{ai} - e^{-ai})}{s^2+1}\right) \\ &= \frac{e^{-as}}{2i} \left(\frac{2is \operatorname{sen} a + 2i \cos a}{s^2+1}\right) \\ &= e^{-as} \left(\frac{s \operatorname{sen} a + \cos a}{s^2+1}\right)\end{aligned}$$

Se pudo haber usado que $\operatorname{sen}(a+t) = \operatorname{sen} a \cos t + \cos a \operatorname{sen} t$

3.14 Cálculo de Transformadas

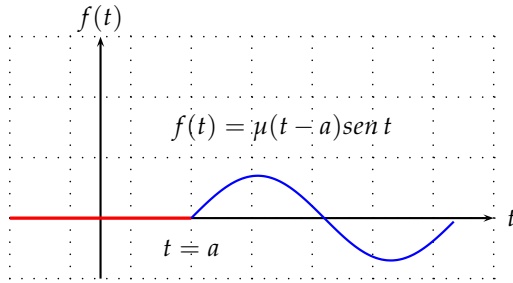


figura 3.20

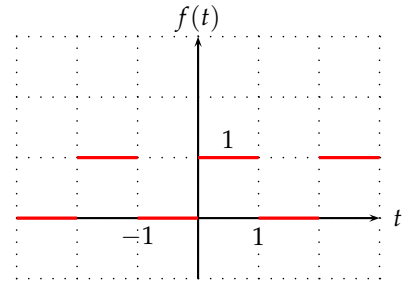


figura 3.21

12. Hallemos $\mathcal{L}[f(t)]$ para la función periódica de la figura 3.21

$$\text{La función es } f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & 1 < t < 2 \end{cases}, \quad f(t+2) = f(t)$$

Por la propiedad de transformada de funciones periódica

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t)] &= \frac{\int_0^2 f(t) e^{-st} dt}{1 - e^{-2s}} = \frac{\int_0^1 e^{-st} dt}{1 - e^{-2s}} \\ &= -\frac{1}{s(1 - e^{-2s})} \cdot e^{-st} \Big|_0^1 = -\frac{1}{s(1 - e^{-2s})} \cdot (e^{-s} - 1) \\ &= \frac{1}{s(1 + e^{-s})} \end{aligned}$$

3.14.1. Transformadas Inversas

Tratamos ahora el cálculo de la transformada inversa de Laplace. Para ello tenemos dos alternativas, fracciones parciales o convolución. Mostramos esto en los problemas siguientes.

Ejemplo 3.14.2. Hallemos la función $f(t)$ tal que $\mathcal{L}[f(t)] = \frac{2s+3}{s^2-4s+20}$

Lo que pide el problema es determinar la transformada inversa. Esto es

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{2s+3}{s^2-4s+20} \right]$$

Escribimos lo siguiente

$$\frac{2s+3}{s^2-4s+20} = \frac{2(s-2)}{(s-2)^2+16} + \frac{7}{(s-2)^2+16}$$

Con ello nos damos cuenta que aparecen las transformadas de las funciones seno y coseno, desplazadas. En consecuencia

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{2s+3}{s^2-4s+20} \right] = 2e^{2t} \cos 4t + \frac{7}{4} e^{2t} \sin 4t = f(t)$$

Ejemplo 3.14.3. Resolvemos la ecuación diferencial $y'' - y = 1$, con las condiciones iniciales $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Se aplica transformada en ambos miembros de la ecuación.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[y''] - \mathcal{L}[y] &= \mathcal{L}[1] \\ s^2 \mathcal{L}[y] - s f(0^+) - f'(0^+) - \mathcal{L}[y] &= \frac{1}{s} \\ s^2 \mathcal{L}[y] - \mathcal{L}[y] &= 1 + \frac{1}{s} = \frac{1+s}{s(s^2-1)}\end{aligned}$$

de donde,

$$\mathcal{L}[y] = \frac{1}{s(s-1)} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}$$

Ahora, aplicando transformada inversa obtenemos

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]$$

Finalmente,

$$y(t) = e^t - 1$$

Ejemplo 3.14.4. Hallemos $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+1)}\right]$

1. Fracciones parciales

$$\begin{aligned}\frac{1}{s(s^2+1)} &= \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1} \\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+1)}\right] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right] \\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+1)}\right] &= 1 - \cos t\end{aligned}$$

2. Convolución

Para usar la convolución escribimos:

$$\frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s^2+1} = F_1(s) \cdot F_2(s)$$

Ahora,

$$\begin{aligned}F_1(s) = \frac{1}{s} &\implies f(t) = 1 \\ F_2(s) = \frac{1}{s^2+1} &\implies g(t) = \sin t\end{aligned}$$

En consecuencia

$$\mathcal{L}[f(t) * g(t)] = \frac{1}{s(s^2 + 1)} \implies f(t) * g(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s(s^2 + 1)} \right]$$

Esto significa que la transformada inversa la podemos hallar por convolución. Tenemos:

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s(s^2 + 1)} \right] = \int_0^t 1 \cdot \sin(t - x) dx = \cos(t - x) \Big|_0^t = 1 - \cos t$$

Ejemplo 3.14.5. Resolvemos la ecuación diferencial $y'' + y' - 6y = h(t)$, con $y(0) = y'(0) = 0$. La función $h(t)$ es de orden exponencial

Se aplica transformada en ambos miembros de la ecuación.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y''] + \mathcal{L}[y'] - 6\mathcal{L}[y] &= \mathcal{L}[h(t)] \\ s^2 \mathcal{L}[y] - s f(0^+) - f'(0^+) + s\mathcal{L}[y] - f(0^+) - 6\mathcal{L}[y] &= \mathcal{L}[h(t)] \\ s^2 \mathcal{L}[y] + s\mathcal{L}[y] - 6\mathcal{L}[y] &= \mathcal{L}[h(t)] \end{aligned}$$

de donde

$$\mathcal{L}[y] = \frac{\mathcal{L}[h(t)]}{s^2 + s - 6}$$

Ahora, sea

$$\mathcal{L}[g(t)] = \frac{1}{s^2 + s - 6} = \frac{1}{(s + 3)(s - 2)} = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{s - 2} - \frac{1}{s + 3} \right)$$

Al aplicar transformada inversa

$$g(t) = \frac{1}{5} e^{2t} - \frac{1}{5} e^{-3t}$$

En consecuencia, se tiene la ecuación en transformadas

$$\mathcal{L}[y(t)] = \mathcal{L}[h(t)] \cdot \mathcal{L}[g(t)]$$

Al aplicar transformada inversa esta ecuación toma la forma

$$\begin{aligned} y(t) &= h(t) * g(t) = \int_0^\infty h(x)g(t - x) dx \\ &= \frac{1}{5} \int_0^t h(x) \left(e^{2(t-x)} - e^{-3(t-x)} \right) dx \end{aligned}$$

Con esto se tiene el problema resuelto, para cualquier $h(t)$ de orden exponencial.

3.15. Problemas resueltos

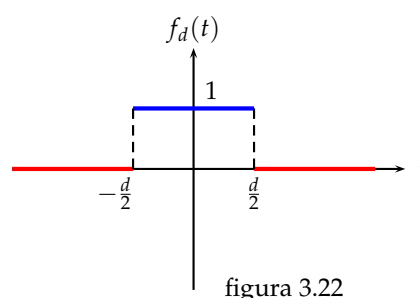
Ejemplo 3.15.1. Hallemos la transformada de Fourier de $f_d(t) = \begin{cases} 1, & |t| < d/2 \\ 0, & |t| > d/2 \end{cases}$.

$$\mathcal{F}[f_d(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f_d(t) e^{-\omega t i} dt = \int_{-d/2}^{d/2} e^{-\omega t i} dt$$

$$= -\frac{1}{\omega i} \cdot e^{-\omega t i} \Big|_{-d/2}^{d/2} = -\frac{1}{\omega i} (e^{-\omega d i / 2} - e^{\omega d i / 2})$$

$$= \frac{2}{\omega} \cdot \left(\frac{e^{\omega d i / 2} - e^{-\omega d i / 2}}{2i} \right)$$

$$= \frac{2}{\omega} \operatorname{sen} \frac{\omega d}{2}$$



Ejemplo 3.15.2. Determinemos la transformada de Fourier de $f(t) = \frac{\operatorname{sen} at}{\pi t}$.

Recordemos que la propiedad de simetría afirma que

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] \implies \mathcal{F}[F(t)] = 2\pi f(-\omega)$$

Haciendo uso del ejemplo precedente, se observa que en este caso tenemos que

$$F(\omega) = \frac{2}{\omega} \operatorname{sen} \frac{\omega d}{2}$$

de manera que $F(t) = \frac{2}{t} \operatorname{sen} \frac{td}{2}$. Luego

$$\mathcal{F}[F(t)] = 2\pi f(-\omega) \iff \mathcal{F}\left[\frac{2}{t} \operatorname{sen} \frac{td}{2}\right] = 2\pi f_d(-\omega)$$

Para estar en las condiciones del ejemplo anterior consideremos $d = 2a$. Con ello la expresión anterior se transforma en

$$2\pi \cdot \mathcal{F}\left[\frac{1}{\pi t} \operatorname{sen} at\right] = 2\pi f_{2a}(-\omega)$$

Al despejar,

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{\pi t} \operatorname{sen} at\right] = f_{2a}(-\omega)$$

Se observa que la función $f_d(t)$ es par, de modo que $f_d(\omega) = f_d(-\omega)$. En consecuencia

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{\pi t} \operatorname{sen} at\right] = \begin{cases} 1, & |\omega| < a \\ 0, & |\omega| > a \end{cases}$$

La figura (3.23) muestra la función y la (3.24) su transformada.

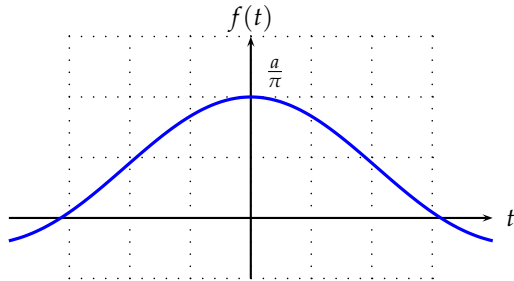


figura 3.23

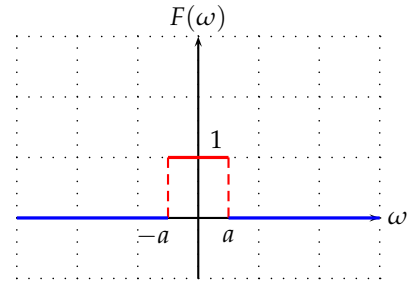


figura 3.24

Ejemplo 3.15.3. Calculemos:

1. la transformada de Fourier de $f(t) = e^{-|t|}$
2. la transformada de Fourier de $g(t) = \frac{1}{t^2 + 4}$
3. la ecuación $y'' - y = e^{-|t|}$

1. Hacemos uso de la definición

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[e^{-|t|}] &= \int_{-\infty}^0 e^t \cdot e^{-i\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^0 e^{t(1-i\omega t)} dt + \int_0^{\infty} e^{-t(1+i\omega t)} dt \\ &= \frac{1}{1-i\omega} e^{t(1-i\omega t)} \Big|_{-\infty}^0 - \frac{1}{1+i\omega} e^{-t(1+i\omega t)} \Big|_0^{\infty} = \frac{2}{1+\omega^2}\end{aligned}$$

2. Usamos el resultado anterior y la propiedad de simetría

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] \implies \mathcal{F}[F(t)] = 2\pi f(-\omega)$$

En este caso,

$$F(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2} \implies \mathcal{F}\left[\frac{2}{1+t^2}\right] = 2\pi e^{-|\omega|}$$

sacando el 2 del numerador y simplificando tenemos

$$F(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2} \implies \mathcal{F}\left[\frac{1}{1+t^2}\right] = \pi e^{-|\omega|}$$

Ahora podemos hacer uso de la propiedad de escalonamiento

$$\mathcal{F}[f(t)] = \mathcal{F}[f(kt)] \implies \mathcal{F}\left[\frac{1}{1+t^2}\right] = \frac{1}{k} \mathcal{F}\left[\frac{1}{1+(\frac{t}{k})^2}\right]$$

de lo cual

$$F(t) = \frac{1}{1+t^2} \implies F\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{1+(\frac{t}{2})^2}$$

entonces, su transformada es

$$\mathcal{F}\left[\frac{t}{2}\right] = \frac{\pi}{\frac{1}{2}} \cdot e^{-2|w|}$$

Lo que equivale a tener

$$\mathcal{F}\left[\frac{4}{4+t^2}\right] = \frac{\pi}{\frac{1}{2}} \cdot e^{-2|w|}$$

Al extraer el 4 del numerador se llega a que

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{4+t^2}\right] = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{\frac{1}{2}} \cdot e^{-2|w|} = \frac{\pi}{2} e^{-2|w|}$$

Otra forma de alcanzar este mismo resultado es sabiendo que

$$\mathcal{F}\left[e^{-a|t|}\right] = \frac{2a}{a^2 + w^2}$$

ya que entonces

$$F(w) = \frac{2a}{a^2 + w^2} \implies F(t) = \frac{2a}{a^2 + t^2}$$

si $a = 2$, se tiene

$$\mathcal{F}\left[\frac{4}{4+t^2}\right] = 2\pi e^{-2|w|} \implies \mathcal{F}\left[\frac{1}{4+t^2}\right] = \frac{\pi}{2} e^{-2|w|}$$

3. Se aplica transformada de Fourier en cada lado de la igualdad

$$y'' - y = e^{-|t|} = 0 \implies (iw)^2 \mathcal{F}[y] - \mathcal{F}[y] = \frac{2}{1+w^2}$$

de lo cual se deduce que

$$\mathcal{F}[y] = -\frac{2}{(1+w^2)^2} = -\frac{2}{1+w^2} \cdot \frac{1}{1+w^2}$$

Al separar de esta forma, se observa que la transformada es conocida, esto es,

$$F_1(w) = -\frac{2}{1+w^2} \implies f_1(t) = -e^{-|t|}\mu(t) \quad \text{y} \quad F_2(w) = \frac{1}{1+w^2} \implies f_2(t) = \frac{1}{2}e^{-|t|}\mu(t)$$

Nos asesoramos de la convolución

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t -e^{-|x|} \cdot \frac{1}{2}e^{-|t-x|} dx$$

Aquí se debe saber que

$$0 < x < t \implies |x| > 0 \quad \text{y} \quad |t-x| > 0$$

3.15 Problemas resueltos

Por tanto,

$$f_1(t) * f_2(t) = -\frac{1}{2} \int_0^t e^{-t} dx = \frac{1}{2} t e^{-t}$$

Pero no podemos olvidar al escalón, que está vivo para $t > 0$. Luego,

$$f_1(t) * f_2(t) = y(t) = -\frac{1}{2} t e^{-t} \mu(t) = -\frac{1}{2} t e^{-|t|}$$

Ejemplo 3.15.4. Si $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$, demostrar que se satisface

$$\mathcal{F}[f(at) e^{i\omega_0 t}] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega - \omega_0}{a}\right)$$

Por la propiedad de desplazamiento en la frecuencia tenemos

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(at)] \implies \mathcal{F}[f(at) e^{i\omega_0 t}] = F(\omega - \omega_0)$$

Se sabe que

$$\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Luego

$$\mathcal{F}[f(at) e^{i\omega_0 t}] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega - \omega_0}{a}\right)$$

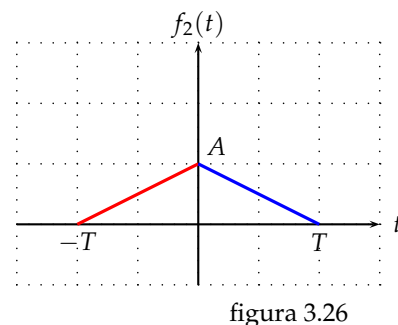
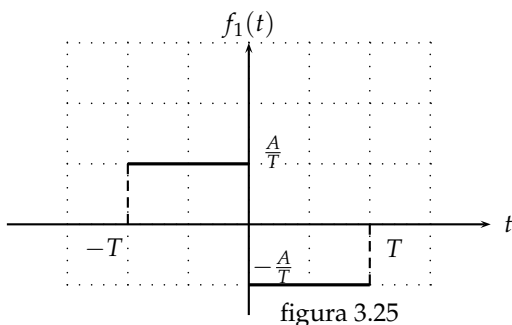
Hay que tener presente que $z(\omega) = F\left(\frac{\omega}{a}\right) \implies z(\omega - \omega_0) = F\left(\frac{\omega - \omega_0}{a}\right)$.

Ejemplo 3.15.5. Si $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$, hallemos $\mathcal{F}[f(t) \text{ sen } \omega_0 t]$

Se sabe que $\text{sen } \omega t = \frac{1}{2i} (e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t})$. Luego,

$$\mathcal{F}[f(t) \text{ sen } \omega_0 t] = \frac{1}{2i} \mathcal{F}[f(t) e^{i\omega_0 t}] - \frac{1}{2i} \mathcal{F}[f(t) e^{-i\omega_0 t}] = \frac{1}{2i} F(\omega - \omega_0) - \frac{1}{2i} F(\omega + \omega_0)$$

Ejemplo 3.15.6. Hallemos la transformada de Fourier del pulso $f_1(t)$ que muestra la figura (3.25) y la transformada del pulso $f_2(t)$ (figura 3.26), que es la integral del pulso $f_1(t)$, utilizando la transformada de $f_1(t)$.



$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f_1(t)] &= \int_{-T}^0 \frac{A}{T} e^{-\omega t i} dt + \int_0^T -\frac{A}{T} e^{-\omega t i} dt \\ &= -\frac{A}{T} \cdot \frac{1}{\omega i} \cdot e^{-\omega t i} \Big|_{-T}^0 + \frac{A}{T} \cdot \frac{1}{\omega i} \cdot e^{-\omega t i} \Big|_0^T\end{aligned}$$

Al evaluar,

$$\mathcal{F}[f_1(t)] = -\frac{A}{T\omega i} (1 - e^{\omega T i}) + \frac{A}{T\omega i} (e^{-\omega T i} - 1) = -\frac{2A}{T\omega i} + \frac{A}{T\omega i} (e^{\omega T i} + e^{-\omega T i})$$

O bien,

$$\mathcal{F}[f_1(t)] = -\frac{2A}{T\omega i} + \frac{2A}{T\omega i} \cos \omega T = -\frac{2A}{T\omega i} (1 - \cos \omega T)$$

$$= -\frac{4A}{T\omega i} \cdot \frac{1}{2} (1 - \cos \omega T) = -\frac{4A}{T\omega i} \frac{\sin^2 \frac{\omega T}{2}}{2} = F(\omega)$$

Ahora determinemos la transformada del pulso $f_2(t)$. La propiedad de integración asegura que si $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$, $\omega \neq 0$, y $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = F(0) = 0$, entonces

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^t f(x) dx\right] = \frac{1}{\omega i} F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$$

En consecuencia

$$\mathcal{F}[f_2(t)] = \frac{1}{\omega i} \cdot -\frac{4A}{T\omega i} \frac{\sin^2 \frac{\omega T}{2}}{2} = \frac{4A}{T\omega^2} \frac{\sin^2 \frac{\omega T}{2}}{2}$$

Ejemplo 3.15.7. Hallemos $\mathcal{F}[t]$.

Hacemos uso de la propiedad de las potencias. Se tiene

$$\mathcal{F}[t] = \mathcal{F}[-it \cdot i] = \mathcal{F}[-it \cdot f(t)] = F'(\omega)$$

en donde $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \mathcal{F}[i]$ Como $\mathcal{F}[i] = i \cdot \mathcal{F}[1] = i \cdot 2\pi\delta(\omega)$, entonces

$$\mathcal{F}[t] = i \cdot (2\pi\delta(\omega))' = 2\pi i \delta'(\omega)$$

Ejemplo 3.15.8. Hallemos la transformada de $g(t) = t^k$.

Usemos propiedad de las potencias. Esto es,

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] \implies \mathcal{F}[(-it)^k f(t)] = F^{(k)}(\omega)$$

En este caso, $f(t) = i^k$, ya que

$$(-i)^k \cdot (i)^k = (-1)^k \cdot (i)^{2k} = (-1)^{2k} = 1$$

Luego,

$$\mathcal{F}[t^k] = \left(\mathcal{F}[i^k]\right)^{(k)} = \left(i^k \mathcal{F}[1]\right)^{(k)} = i^k \cdot (2\pi\delta(\omega))^{(k)} = 2\pi i^k \delta^{(k)}(\omega)$$

Ejemplo 3.15.9. Hallemos la transformada de Fourier de $f(t) = \text{sen}^3 t$.

La forma exponencial de la función seno es

$$\text{sen } t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it}) \implies \text{sen}^3 t = \frac{i}{8}(e^{3it} - 3e^{it} + 3e^{-it} - e^{-3it})$$

Como $\mathcal{F}[e^{\omega_0 t}] = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$, entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\text{sen}^3 t] &= \frac{2\pi i}{8} (\delta(\omega - 3) - 3 \cdot \delta(\omega - 1) + 3 \cdot \delta(\omega + 1) - \delta(\omega + 3)) \\ &= \frac{\pi i}{4} (\delta(\omega - 3) - 3\delta(\omega - 1) + 3\delta(\omega + 1) - \delta(\omega + 3))\end{aligned}$$

Ejemplo 3.15.10. Hallemos la transformada finita de seno de Fourier de la función $f(t)=1, 0 < t < L$.

Usemos la definición.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_s[1] &= \int_0^L 1 \cdot \text{sen } \omega t \, dt = -\frac{1}{\omega} \cdot \cos \omega t \Big|_0^L \\ &= \frac{1}{\omega} (1 - \cos \omega L) = \frac{L}{n\pi} (1 - \cos n\pi) \\ &= \begin{cases} 0, & n \text{ par} \\ \frac{2L}{n\pi}, & n \text{ impar} \end{cases}\end{aligned}$$

Observar que $\omega = n\omega_0$ y $\omega_0 = \frac{\pi}{L} \implies \omega = \frac{n\pi}{L}$.

Ejemplo 3.15.11. Hallemos la función $f(t)$ si se sabe que $\mathcal{F}_s[f(t)] = \frac{1 - \cos \frac{n\pi}{2}}, 0 < t < \pi$

De acuerdo con la transformada finita seno de Fourier para la función $f(t), 0 < t < L$, se tiene

$$\begin{aligned}F_s(n) &= \int_0^L f(t) \text{sen } \frac{n\pi t}{L} \, dt, \quad n \in \mathbb{Z} \\ f(t) &= \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} F_s(n) \text{sen } \frac{n\pi t}{L}\end{aligned}$$

La expresión $F_s(n)$ denota la transformada finita de seno de Fourier de f , mientras que f es la inversa de $F_s(n)$. En consecuencia

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - \cos n\pi}{n^2 \pi^2} \right) \text{sen } nt = \frac{2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - \cos n\pi}{n^2} \right) \text{sen } nt$$

Ejemplo 3.15.12. Sea $f(t) = e^{-t}, t \geq 0$. Hallemos la transformada seno de Fourier de f , y usemos el resultado para demostrar que

$$\int_0^{\infty} \frac{x \text{sen } mx}{x^2 + 1} \, dx = \frac{\pi}{2} e^{-m}, \quad m > 0$$

Veamos la transformada seno de Fourier de f .

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_s(e^{-t}) &= \int_0^{\infty} e^{-t} \operatorname{sen} \omega t \, dt \\ &= -e^{-t} \operatorname{sen} \omega t \Big|_0^{\infty} + \omega \int_0^{\infty} e^{-t} \cos \omega t \, dt \\ &= \omega(e^{-t} \cos \omega t - \omega \int_0^{\infty} e^{-t} \operatorname{sen} \omega t \, dt)\end{aligned}$$

Al sumar términos semejante se obtiene

$$(\omega^2 + 1) \int_0^{\infty} e^{-t} \operatorname{sen} \omega t \, dt = \omega$$

Al despejar se halla el valor de la transformada

$$\int_0^{\infty} e^{-t} \operatorname{sen} \omega t \, dt = \frac{\omega}{\omega^2 + 1}$$

Para demostrar lo pedido, la transformada seno de Fourier establece que

$$F(\omega) = \frac{\omega}{\omega^2 + 1} \implies f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega}{\omega^2 + 1} \operatorname{sen} \omega t \, d\omega$$

Como $f(t) = e^{-t}$, entonces

$$e^{-t} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega}{\omega^2 + 1} \operatorname{sen} \omega t \, d\omega \implies \frac{\pi}{2} e^{-t} = \int_0^{\infty} \frac{\omega \operatorname{sen} \omega t}{\omega^2 + 1} \, d\omega$$

Si $t = m$, $w = x$, entonces se obtiene lo pedido. Esto es,

$$\int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} mx}{x^2 + 1} \, dx = \frac{\pi}{2} e^{-m}, \quad m > 0$$

Ejemplo 3.15.13. Resolvemos la ecuación integral

$$\int_0^{\infty} Y(x) \operatorname{sen} xt \, dx = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 2, & 1 \leq t < 2 \\ 0, & t \geq 2 \end{cases}$$

La transformada seno de Fourier de f afirma que

$$\int_0^{\infty} Y(x) \operatorname{sen} xt \, dx = F(w) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 2, & 1 \leq t < 2 \\ 0, & t \geq 2 \end{cases}$$

La transformada inversa seno de Fourier de f asegura que

$$\begin{aligned}
 Y(t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F(\omega) \operatorname{sen} \omega t d\omega \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 2, & 1 \leq t < 2 \\ 0, & t \geq 2 \end{cases} \right) \operatorname{sen} \omega t d\omega \\
 &= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{1}{t} \cdot \cos \omega t \Big|_0^1 - \frac{2}{t} \cdot \cos \omega t \Big|_1^2 \right) \\
 &= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{1}{t} \cdot (\cos t - 1) - \frac{2}{t} \cdot (\cos 2t - \cos t) \right) \\
 &= -\frac{2}{\pi t} (\cos t - 1 + 2\cos 2t - 2\cos t) \\
 &= \frac{1}{\pi t} (2 + 2\cos t - 4\cos 2t)
 \end{aligned}$$

Ejemplo 3.15.14. Usando la identidad de Parseval y las transformadas seno y coseno de Fourier de $f(t) = e^{-t}$, $t > 0$, vamos a calcular

$$\int_0^{\infty} \frac{dt}{(t^2 + 1)^2}, \quad y \quad \int_0^{\infty} \frac{t^2 dt}{(t^2 + 1)^2}$$

Recordemos que la identidad de Parseval, para la integral seno y coseno de Fourier, asegura que

$$\int_0^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} |F_s[f]|^2 d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} |F_c[f]|^2 d\omega$$

Las transformadas seno y coseno de Fourier de $f(t) = e^{-t}$, $t > 0$, son

$$\mathcal{F}_s[e^{-t}] = \frac{\omega}{1 + \omega^2}, \quad y \quad \mathcal{F}_c[e^{-t}] = \frac{1}{1 + \omega^2}$$

El teorema de Parseval asegura que

$$\int_0^{\infty} f(t)^2 dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F_s(\omega)^2 d\omega$$

Al reemplazar se tiene

$$\int_0^{\infty} e^{-2t} dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega^2}{(1 + \omega^2)^2} d\omega \implies \int_0^{\infty} \frac{\omega^2}{(1 + \omega^2)^2} d\omega = -\frac{\pi}{4} \cdot e^{-2t} \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{4}$$

Para la determinación de la otra integral tenemos,

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{(1 + \omega^2)^2} d\omega = \int_0^{\infty} e^{-2t} dt \implies \int_0^{\infty} \frac{1}{(1 + \omega^2)^2} d\omega = \frac{\pi}{4}$$

Ejemplo 3.15.15. Demostremos que $\int_0^\infty \frac{(t \cos t - \operatorname{sen} t)^2}{t^6} dt = \frac{\pi}{15}$.

Usemos que

$$f(t) = \begin{cases} 1 - t^2, & |t| < 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases} \Rightarrow \mathcal{F}[f(t)] = \frac{4(\omega \cos \omega - \operatorname{sen} \omega)}{\omega^3}$$

Ahora aplicamos Parseval

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (1 - t^2)^2 dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{16}{\omega^6} (\omega \cos \omega - \operatorname{sen} \omega)^2 d\omega \\ &= \frac{16}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\omega^6} (\omega \cos \omega - \operatorname{sen} \omega)^2 d\omega \end{aligned}$$

La integral del primer miembro es tal que

$$\int_{-1}^1 (1 - t^2)^2 dt = 2 \int_0^1 (1 - t^2)^2 dt = 2 \int_0^1 (1 - 2t^2 + t^4) dt = \frac{16}{15}$$

En consecuencia,

$$\frac{16}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\omega^6} (\omega \cos \omega - \operatorname{sen} \omega)^2 d\omega = \frac{16}{15}$$

Se obtiene así,

$$\int_0^\infty \frac{(\omega \cos \omega - \operatorname{sen} \omega)^2}{\omega^6} d\omega = \frac{\pi}{15}$$

Al cambiar w por t se prueba la aseveración.

Ejemplo 3.15.16. Hallemos la función $f(t)$ si su transformada de Fourier es $F(\omega) = \frac{e^{-i\omega t_0}}{a + i\omega}$

La multiplicación por el término $e^{-i\omega t_0}$ es indicativa de un desplazamiento temporal en un intervalo t_0 . Por otro lado, el término $\frac{1}{a + i\omega}$ es la transformada de Fourier de la función e^{-at} . Combinando ambos razonamientos se llega a

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = e^{-a(t-t_0)}$$

Ejemplo 3.15.17. Resolvemos la ecuación $x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) = \delta(t + 1)$

Al aplicar transformada de Fourier en cada lado de la ecuación,

$$\mathcal{F}[x''(t)] + 3\mathcal{F}[x'(t)] + 2\mathcal{F}[x(t)] = \mathcal{F}[\delta(t + 1)]$$

$$(i\omega)^2 F(\omega) + 3(i\omega)F(\omega) + 2F(\omega) = e^{-\omega i} \mathcal{F}[\delta(t)]$$

3.15 Problemas resueltos

Al despejar $F(\omega)$ y como $\mathcal{F}[\delta(t)] = 1$, entonces

$$F(\omega) = \frac{e^{-i\omega}}{(i\omega)^2 + 3i\omega + 2} = e^{-i\omega} \cdot \left(\frac{1}{1+i\omega} - \frac{1}{2+i\omega} \right)$$

Se sabe que

$$\mathcal{F}[e^{-\alpha t} \mu(t)] = \frac{1}{\alpha + i\omega}$$

de modo que

$$\mathcal{F}[e^{-t} \mu(t)] = \frac{1}{1+i\omega}, \quad \mathcal{F}[e^{-2t} \mu(t)] = \frac{1}{2+i\omega}$$

El factor $e^{-i\omega}$ está indicando un desplazamiento en el tiempo, ya que la propiedad asegura que

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] \implies \mathcal{F}[f(t - t_0)] = F(\omega) e^{-\omega t_0 i}$$

En este caso $t_0 = -1$. Luego,

$$x(t) = \left(e^{-(t+1)} - e^{-2(t+1)} \right) \mu(t+1)$$

Ejemplo 3.15.18. Hallemos transformada de Fourier de $f(t) = \mu(t-1)$.

Claramente existe un desplazamiento. Se sabe que $\mathcal{F}[\mu(t)] = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{i\omega}$. Luego,

$$\mathcal{F}[\mu(t-1)] = \left(\pi\delta(\omega) + \frac{1}{i\omega} \right) e^{-i\omega}$$

Se hizo uso del hecho que

$$\mathcal{F}[\mu(t-1)] = \mathcal{F}[\mu(t)] \cdot e^{-i\omega}$$

Ejemplo 3.15.19. Empleando transformada coseno de Fourier probemos que, para $x > 0$, se tiene

$$e^{-bt} = \frac{2b}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos \omega t \, d\omega}{\omega^2 + b^2}$$

Se considera la función $f(t) = e^{-bt}$ y se le aplica transformada coseno.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_c[f(t)] &= \int_0^\infty e^{-bt} \cos \omega t \, dt = -\frac{1}{b} e^{-bt} \cos \omega t \Big|_0^\infty - \frac{1}{b} \int_0^\infty e^{-bt} \sin \omega t \, dt \\ &= \frac{1}{b} - \frac{\omega}{b} \left(-\frac{1}{b} e^{-bt} \sin \omega t \Big|_0^\infty + \frac{\omega}{b} \int_0^\infty e^{-bt} \cos \omega t \, dt \right) \\ &= \frac{1}{b} - \frac{\omega^2}{b^2} \int_0^\infty e^{-bt} \cos \omega t \, dt \end{aligned}$$

Se observa que las integrales en ambos miembros son iguales, por tanto las podemos sumar, para tener:

$$\left(1 + \frac{w^2}{b^2}\right) \int_0^\infty e^{-bt} \cos wt \, dt = \frac{1}{b} \implies \int_0^\infty e^{-bt} \cos wt \, dt = \frac{b}{b^2 + w^2}$$

O equivalentemente,

$$\mathcal{F}_c[f(t)] = \frac{b}{b^2 + w^2} \implies f(t) = \mathcal{F}_c^{-1}\left[\frac{b}{b^2 + w^2}\right] = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{b}{b^2 + w^2} \cos wt \, dw$$

Por lo tanto,

$$f(t) = e^{-bt} = \frac{2b}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos wt \, dw}{w^2 + b^2}$$

Ejemplo 3.15.20. Calculemos transformada de Fourier de $f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & , |x| \leq 1 \\ 0 & , |x| > 1 \end{cases}$

Cuando aparece un valor absoluto lo mejor es deshacerse de él. El hecho de que $|x| \leq 1$ significa que a la derecha del cero, $|x| = x$, y a la izquierda $|x| = -x$. La figura muestra la forma que tiene la función

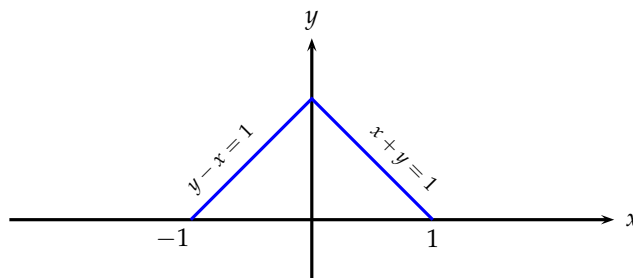


figura 3.27

Veamos el valor de su transformada

$$F[w] = \int_{-1}^0 (1+x) e^{-iwx} \, dx + \int_0^1 (1-x) e^{-iwx} \, dx$$

Haciendo integración por partes se llega a que

$$F[w] = \frac{2}{w^2} (1 - \cos w), \quad w \neq 0$$

Para determinar el valor en $w = 0$ tenemos:

$$F[0] = \int_{-1}^0 (1+x) \, dx + \int_0^1 (1-x) \, dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Ejemplo 3.15.21. Sabiendo que $\mathcal{F}[e^{-a|t|}] = \frac{2a}{a^2 + w^2}$, hallemos $\mathcal{F}\left[\frac{1}{x^2 + x + 1}\right]$

La propiedad de simetría afirma que

$$F(w) = \mathcal{F}[f(t)] \implies \mathcal{F}[F(t)] = 2\pi f(-w)$$

Por ello,

$$\mathcal{F}[e^{-a|t|}] = \frac{2a}{a^2 + w^2} \implies \mathcal{F}\left[\frac{2a}{a^2 + t^2}\right] = 2\pi e^{-a|-w|}$$

Al sacar el factor $2a$ y trasladarlo al segundo miembro se tiene

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{a^2 + t^2}\right] = \frac{\pi}{a} e^{-a|-w|}$$

Pero, para hallar la transformada que queremos, escribimos lo siguiente

$$\frac{1}{x^2 + x + 1} = \frac{1}{(t + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}$$

Vemos ahora que existe un desplazamiento en el tiempo ($t_0 = -\frac{1}{2}$). La propiedad de desplazamiento en el tiempo afirma que

$$\mathcal{F}[f(t)] = F(w) \implies \mathcal{F}[f(t - t_0)] = F(w)e^{-iwt_0}$$

De esta forma,

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{a^2 + t^2}\right] = F(w) \implies \mathcal{F}[f(t + \frac{1}{2})] = \frac{\pi}{a} e^{-a|-w|} \cdot e^{-i w(-\frac{1}{2})}$$

Si hacemos $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$, entonces

$$\mathcal{F}[f(t + \frac{1}{2})] = \mathcal{F}\left[\frac{1}{\frac{3}{4} + (t + \frac{1}{2})^2}\right] = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}|w|} \cdot e^{\frac{i w}{2}}$$

Ejemplo 3.15.22. Hallemos solución particular de la ecuación $f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = 3\delta(x)$

Se aplica transformada de Fourier en ambos lados de la igualdad

$$\mathcal{F}[f''(x)] - 3\mathcal{F}[f'(x)] + 2\mathcal{F}[f(x)] = 3\mathcal{F}[\delta(x)]$$

Que equivale a tener

$$(iw)^2 F[w] - 3(iw)F[w] + 2F[w] = 3$$

Al despejar queda

$$F[w] = \frac{3}{-w^2 - 3iw + 2} = \frac{3}{(iw - 2)(iw - 1)}$$

Con ayuda de fracciones parciales

$$F[w] = \frac{3}{iw - 2} - \frac{3}{iw - 1}$$

de donde,

$$f(x) = (3e^{2t} - 3e^t) \mu(t)$$

Ejemplo 3.15.23. Hallemos $f(t)$ tal que $\mathcal{F}[f(t)] = \frac{4e^{(2w-6)i}}{5 - (3-w)i}$.

Se observa un desplazamiento en la frecuencia

$$F[w - w_0] = \frac{4e^{2(w-3)i}}{5 + (w-3)i} \implies F[w] = \frac{4e^{2wi}}{5 + wi}$$

Ahora, la función cuya transformada es $\frac{4}{5+iw}$ es

$$f_1(t) = 4e^{-5t}\mu(t)$$

pero el factor desplazamiento nos lleva a

$$f_2(t) = 4e^{-5(t+2)}\mu(t+2)$$

Así, la f que andamos buscando es

$$f(t) = 4e^{-5(t+2)}\mu(t+2) \cdot e^{3ti} = 4e^{-10-(5-3i)t}\mu(t+2)$$

Ejemplo 3.15.24. Hallemos la transformada de Laplace de $\sinh at$

Se puede usar la definición o bien la alternativa de las funciones exponenciales. Veamos esto último

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\sinh at] &= \mathcal{L}\left[\frac{e^{at} - e^{-at}}{2}\right] = \frac{1}{2}\mathcal{L}[e^{at}] - \frac{1}{2}\mathcal{L}[e^{-at}] \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right) = \frac{a}{s^2 - a^2}\end{aligned}$$

Ejemplo 3.15.25. Hallemos transformada de Laplace de $f(t) = t^2 e^t$.

Se puede emplear la propiedad de traslación, ya que aparece un producto entre la función exponencial y otra función cualquiera. La transformada de t^2 es

$$\mathcal{L}[t^2] = \frac{2!}{s^3} = \frac{2}{s^3}$$

En consecuencia

$$\mathcal{L}[t^2 e^t] = \frac{2}{(s-1)^3}$$

Como alternativa está el hecho de que la función exponencial está multiplicada por una potencia de t . En este caso se sabe que

$$\mathcal{L}[e^t] = \frac{1}{s-1}$$

Luego,

$$\mathcal{L}[t^2 e^t] = (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2} \left(\frac{1}{s-1} \right) = \frac{d}{ds} \left(-\frac{1}{(s-1)^2} \right) = \frac{2}{(s-1)^3}$$

Ejemplo 3.15.26. Demostremos que $\mathcal{L}[t^n] = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}, n > -1, s > 0$.

Usemos la definición.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[t^n] &= \int_0^\infty t^n e^{-st} dt = \int_0^\infty \left(\frac{z}{s}\right)^n e^{-z} \frac{dz}{s}, \quad z = st \\ &= \frac{1}{s^{n+1}} \int_0^\infty z^n e^{-z} dz = \frac{1}{s^{n+1}} \Gamma(n+1)\end{aligned}$$

En particular, $\mathcal{L}[t^{-1/2}] = \frac{\Gamma(1/2)}{s^{1/2}} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$.

Ejemplo 3.15.27. Hallemos $\mathcal{L}\left[\int_0^t \sin 2u du\right]$.

De acuerdo con la propiedad de la transformada de Laplace para integrales se tiene que

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) \implies \mathcal{L}\left[\int_0^t f(u) du\right] = \frac{F(s)}{s}$$

Como $\mathcal{L}[\sin 2t] = \frac{2}{s^2 + 4}$, tenemos que

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t \sin 2u du\right] = \frac{2}{s(s^2 + 4)}$$

Ejemplo 3.15.28. Hallemos $\mathcal{L}\left[\frac{\sin t}{t}\right]$

Usemos la propiedad de división por t . Esto es,

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) \implies \mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^\infty F(u) du$$

Con la condición de que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t}$ exista. Para este caso tenemos,

$$\mathcal{L}[\sin t] = \frac{1}{s^2 + 1}, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

En consecuencia

$$\mathcal{L}\left[\frac{\sin t}{t}\right] = \int_s^\infty \frac{du}{u^2 + 1} du = \frac{\pi}{2} - \arctg s = \arctg\left(\frac{1}{s}\right)$$

Ejemplo 3.15.29. Hallemos $\mathcal{L}\left[\frac{\text{sen } at}{t}\right]$.

Usemos la propiedad del cambio de escala. Esto es

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) \implies \mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

Además, tenemos que

$$\mathcal{L}\left[\frac{\text{sen } t}{t}\right] = \text{arctg}\left(\frac{1}{s}\right) = F(s), \quad f(t) = \frac{\text{sen } t}{t} \implies f(at) = \frac{\text{sen } at}{at}$$

se sigue que

$$\mathcal{L}\left[\frac{\text{sen } at}{at}\right] = \frac{1}{a} \mathcal{L}\left[\frac{\text{sen } at}{t}\right]$$

Como $\mathcal{L}[\text{sen } at] = \frac{a}{s^2 + a^2}$ entonces

$$\mathcal{L}\left[\frac{\text{sen } at}{t}\right] = \int_s^\infty \frac{a}{u^2 + a^2} du = \text{arctg}\left(\frac{a}{s}\right)$$

Ejemplo 3.15.30. Hallemos $\mathcal{L}[\mu(t-a)]$.

Se puede hacer uso de la definición, o bien de la propiedad de traslación. En este último caso se tiene que

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) \quad \text{y} \quad g(t) = \begin{cases} f(t-a), & t > a \\ 0, & t < a \end{cases} \implies \mathcal{L}[g(t)] = e^{-as} F(s)$$

Como $f(t) = 1$ y $\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}$, entonces

$$\mathcal{L}[\mu(t-a)] = \frac{e^{-as}}{s}$$

Ejemplo 3.15.31. Hallemos $\int_0^\infty t e^{-3t} \text{sen } t \, dt$

Usemos el hecho que

$$\mathcal{L}[t \text{sen } t] = \int_0^\infty t e^{-st} \text{sen } t \, dt$$

Esto es una primera aproximación al problema. Además,

$$\mathcal{L}[t \text{sen } t] = \frac{2s}{(s^2 + 1)^2}$$

Luego

$$\int_0^\infty t e^{-st} \text{sen } t \, dt = \frac{2s}{(s^2 + 1)^2}$$

En consecuencia, con $s = 3$, tenemos

$$\int_0^\infty t e^{-3t} \text{sen } t \, dt = \frac{3}{50}$$

Ejemplo 3.15.32. Hallemos $\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{4s+12}{s^2+8s+16} \right]$.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{4s+12}{s^2+8s+16} \right] &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{4s+12}{(s+4)^2} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{4(s+4)-4}{(s+4)^2} \right] \\ &= 4 \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s+4} \right] - 4 \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s+4)^2} \right] \\ &= 4e^{-4t} - 4te^{-4t} = 4e^{-4t}(1-t) \end{aligned}$$

Ejemplo 3.15.33. Hallemos $\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2(s+1)^2} \right]$.

Vamos a usar convolución

$$\frac{1}{s^2(s+1)^2} = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{(s+1)^2}$$

Para usar el teorema de convolución tenemos

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2} \right] = t = f(t), \quad \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s+1)^2} \right] = t e^{-t} = g(t)$$

Luego

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2(s+1)^2} \right] &= f * g = \int_0^t x e^{-x} (t-x) dx \\ &= \int_0^t (xt - x^2) e^{-x} dx \\ &= \left((xt - x^2)(-e^{-x}) - (t - 2x)e^{-x} + 2e^{-x} \right)_0^t \\ &= te^{-t} + 2e^{-t} + t - 2 \end{aligned}$$

Ejemplo 3.15.34. Hallemos $\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{3s+7}{s^2-2s-3} \right]$.

Esta vez usemos fracciones parciales

$$\frac{3s+7}{s^2-2s-3} = \frac{3s+7}{(s-3)(s+1)} = \frac{4}{s-3} - \frac{1}{s+1}$$

Se aplica inversa en ambos miembros

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{3s+7}{s^2-2s-3} \right] = 4 \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s-3} \right] - \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s+1} \right] = 4e^{3t} - e^{-t}$$

Ejemplo 3.15.35. Resolvemos la ecuación diferencial $y'' + y = t$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$.

Se toma transformada de Laplace en ambos miembros

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[y''] + \mathcal{L}[y] &= \mathcal{L}[t] = s^2 \mathcal{L}[y] - s y(0) - y'(0) + \mathcal{L}[y] = \frac{1}{s^2} \\ s^2 \mathcal{L}[y] - s + 2 + \mathcal{L}[y] &= \frac{1}{s^2} \\ (1 + s^2) \mathcal{L}[y] &= \frac{1}{s^2} + s - 2 \\ \mathcal{L}[y] &= \frac{1 + s^3 - 2s^2}{s^2(1 + s^2)} = \frac{1}{s^2} + \frac{s}{1 + s^2} - \frac{3}{1 + s^2}\end{aligned}$$

de lo cual

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2} + \frac{s}{1 + s^2} - \frac{3}{1 + s^2} \right] = t + \cos t - 3 \sin t$$

Ejemplo 3.15.36. Resolvemos el sistema $\begin{cases} x' = 2x - 3y \\ y' = -2x + y \end{cases}$, $x(0) = 8$, $y(0) = 3$

Se toma transformada de Laplace en ambas ecuaciones

$$\begin{aligned}s \mathcal{L}[x] - 8 &= 2 \mathcal{L}[x] - 3 \mathcal{L}[y] \\ s \mathcal{L}[y] - 3 &= \mathcal{L}[y] - 2 \mathcal{L}[x]\end{aligned}$$

Este sistema de transformadas se escribe en la forma

$$\begin{aligned}(s - 2) \mathcal{L}[x] + 3 \mathcal{L}[y] &= 8 \\ 2 \mathcal{L}[x] + (s - 1) \mathcal{L}[y] &= 3\end{aligned}$$

Al sumar, la multiplicación de la primera ecuación por (-2) y la segunda por $(s - 2)$, se obtiene

$$\mathcal{L}[y] = \frac{3s - 22}{s^2 - 3s - 4}$$

Para hallar $\mathcal{L}[x]$ se multiplica la primera ecuación por $(s - 1)$ y la segunda por (-3) . Al sumarlas

$$\mathcal{L}[x] = \frac{8s - 17}{s^2 - 3s - 4}$$

A estas dos ecuaciones obtenidas se aplica transformada inversa

$$\begin{aligned}x(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{8s - 17}{s^2 - 3s - 4} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{5}{s + 1} \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{3}{s - 4} \right] \\ y(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{3s - 22}{s^2 - 3s - 4} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{5}{s + 1} \right] - \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{2}{s - 4} \right]\end{aligned}$$

Al calcular estas transformadas inversas se encuentra

$$\begin{aligned}x(t) &= 5e^{-t} + 3e^{4t} \\y(t) &= 5e^{-t} - 2e^{4t}\end{aligned}$$

Ejemplo 3.15.37. Hallar transformada de Laplace de $f(t) = e^t \sin^2 t$

De la identidad $\sin^2 t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2t)$, se tiene que

$$\mathcal{L}[\sin^2 t] = \frac{1}{2} \mathcal{L}[1] - \frac{1}{2} \mathcal{L}[\cos 2t] = \frac{1}{2s} - \frac{1}{2} \cdot \frac{s}{s^2 + 4}$$

En consecuencia,

$$\mathcal{L}[e^t \sin^2 t] = \frac{1}{2(s-1)} - \frac{s-1}{2((s-1)^2 + 4)} = \frac{2}{(s-1)(s^2 - 2s + 5)}$$

Ejemplo 3.15.38. Escribimos en términos del escalón unitario y calculamos transformada de

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t} & , 0 < t < 3 \\ 0 & , t > 3 \end{cases}$$

Es claro que f se escribe

$$f(t) = e^{-t} \mu(t) - e^{-t} \mu(t-3)$$

Para su transformada tenemos:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t)] &= \mathcal{L}[e^{-t} \mu(t)] - \mathcal{L}[e^{-t} \mu(t-3)] \\ &= \frac{1}{s+1} - \mathcal{L}[e^{-t} \mu(t-3)]\end{aligned}$$

Para calcular la transformada de $e^{-t} \mu(t-3)$ consideremos que

$$h(t) = e^{-t} \mu(t-3) = e^{-3} e^{-(t-3)} \mu(t-3)$$

Esto con el fin de usar la propiedad de desplazamiento.

$$\mathcal{L}[h(t)] = e^{-3} \mathcal{L}[e^{-(t-3)} \mu(t-3)] = e^{-3} e^{-3s} \mathcal{L}[e^{-t}] = e^{-3(s+1)} \cdot \frac{1}{s+1}$$

En consecuencia,

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+1} e^{-3(s+1)} = \frac{1}{s+1} (1 - e^{-3(s+1)})$$

Ejemplo 3.15.39. Usemos transformada de Laplace para hallar solución de la ecuación $y^{(4)}(t) + 2y''(t) + y(t) = \sin t$, con condiciones iniciales $y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$

Al aplicar transformada de Laplace a ambos miembros de la ecuación se obtiene

$$\mathcal{L}[y] = \frac{1}{(s^2 + 1)(s^4 + 2s^2 + 1)} = \frac{1}{(s + 1)^3}$$

Para llegar a la inversa de esta transformada debemos pasar varias etapas: La primera de ella es observar la forma del denominador y tener presente que

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2 + 1} \right] = \text{sen } t = f(t)$$

Una segunda etapa es prestar atención a la propiedad

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t) \implies \mathcal{L}^{-1}[F^{(n)}(s)] = (-1)^n t^n f(t)$$

Con esto, el denominador alcanza exponente cuadrático. Esto es,

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{-2s}{(s^2 + 1)^2} \right] = (-1)^n t^1 \text{sen } t \implies \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s}{(s^2 + 1)^2} \right] = \frac{t}{2} \text{sen } t$$

Debemos alcanzar $(s + 1)^3$ en el denominador. Apliquemos de nuevo la propiedad.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[F^{(2)}(s)] &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{-2(s^2 + 1) + 8s^2}{(s^2 + 1)^3} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{6s^2 - 2}{(s^2 + 1)^3} \right] \\ &= (-1)^2 t^2 \text{sen } t = t^2 \text{sen } t \end{aligned}$$

Esto significa que

$$\mathcal{L}[t^2 \text{sen } t] = \frac{6s^2 - 2}{(s^2 + 1)^3}$$

A partir de esto se inicia la cuenta regresiva para $f(t)$, ya que al aplicar inversa en esta última ecuación se tiene que

$$6\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s^2}{(s^2 + 1)^3} \right] - 2\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s^2 + 1)^3} \right] = t^2 \text{sen } t$$

Al despejar de aquí la inversa que andamos buscando

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s^2 + 1)^3} \right] = -\frac{1}{2} t^2 \text{sen } t + 3\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{(s^2 + 1) - 1}{(s^2 + 1)^3} \right]$$

Al reunir términos semejantes

$$4\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s^2 + 1)^3} \right] = -\frac{1}{2} t^2 \text{sen } t + 3\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s^2 + 1)^2} \right]$$

3.15 Problemas resueltos

Ahora falta sólo determinar la transformada que está en el segundo miembro. Para ello usemos $\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s}{(s^2 + 1)^2} \right] = \frac{t}{2} \operatorname{sen} t$, en conjunto con la propiedad de división por s que asegura que

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t) \implies \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{F(s)}{s} \right] = \int_0^t f(x) dx$$

En este caso, $F(s) = \frac{s}{(s^2 + 1)^2}$, $f(t) = \frac{t}{2} \operatorname{sen} t$. Luego,

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s^2 + 1)^2} \right] = \int_0^t \frac{x}{2} \operatorname{sen} x dx = \frac{1}{2} (-t \cos t + \operatorname{sen} t)$$

En consecuencia,

$$4 \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s^2 + 1)^3} \right] = -\frac{1}{2} t^2 \operatorname{sen} t + \frac{3}{2} (-t \cos t + \operatorname{sen} t)$$

de donde,

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s^2 + 1)^3} \right] = -\frac{1}{8} t^2 \operatorname{sen} t + \frac{3}{8} (-t \cos t + \operatorname{sen} t)$$

es la solución de la ecuación diferencial.

Ejemplo 3.15.40. Sea $F(s) = \frac{s^2 - 3}{(s+2)(s-3)(s^2 + 2s + 5)}$. Hallemos la función $f(t)$ tal que $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$

Usemos fracciones parciales.

$$\frac{s^2 - 3}{(s+2)(s-3)(s^2 + 2s + 5)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s-3} + \frac{Cs + D}{s^2 + 2s + 5}$$

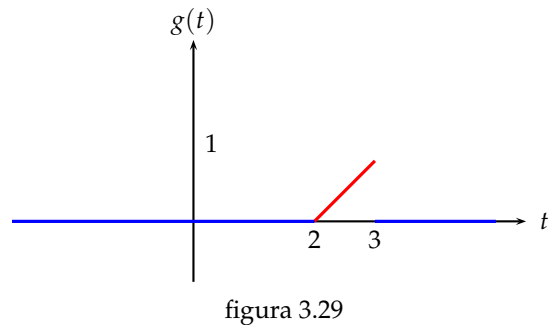
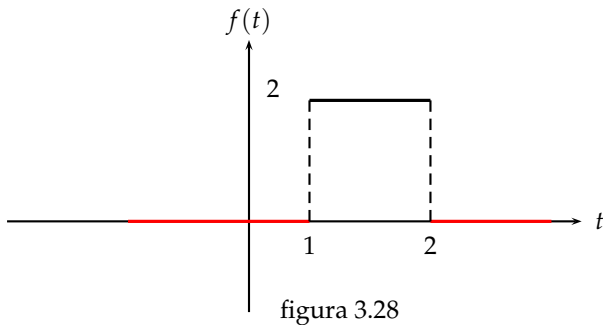
Al resolver se encuentra que $A = -\frac{1}{25}$, $B = \frac{3}{50}$, $C = -\frac{1}{50}$, $D = \frac{7}{10}$. Luego,

$$F(s) = -\frac{1}{25} \cdot \frac{1}{s+2} + \frac{3}{50} \cdot \frac{1}{s-3} + -\frac{1}{50} \cdot \frac{1}{s^2 + 2s + 5} + \frac{7}{10} \cdot \frac{1}{s^2 + 2s + 5}$$

Se aplica transformada inversa en cada sumando para encontrar $f(t)$. Tenemos:

$$\begin{aligned}
 f(t) &= -\frac{1}{25} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s+2} \right] + \frac{3}{50} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s-3} \right] - \frac{1}{50} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2 + 2s + 5} \right] + \frac{7}{10} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2 + 2s + 5} \right] \\
 &= -\frac{1}{25} e^{-2t} + \frac{3}{50} e^{3t} - \frac{1}{50} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s+1}{(s+1)^2 + 2^2} \right] - \frac{1}{50} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s+1)^2 + 2^2} \right] + \\
 &\quad + \frac{7}{10} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s+1)^2 + 2^2} \right] \\
 &= -\frac{1}{25} e^{-2t} + \frac{3}{50} e^{3t} - \frac{1}{50} e^{-t} \cos 2t + \frac{18}{50} e^{-t} \sin 2t \\
 &= \frac{1}{50} \left(3e^{3t} - 2e^{-2t} - e^{-t} \cos 2t + 18 e^{-t} \sin 2t \right)
 \end{aligned}$$

Ejemplo 3.15.41. Escribimos en términos del escalón las funciones que muestran las figuras (3.28) y (3.29). Luego, usando **propiedades**, calculamos su transformada de Laplace.



La figura (3.28) se escribe

$$f(t) = 2\mu(t-1) - 2\mu(t-2)$$

su transformada es

$$\mathcal{L}[f(t)] = 2\mathcal{L}[\mu(t-1)] - 2\mathcal{L}[\mu(t-2)] = \frac{2}{s}e^{-s} - \frac{2}{s}e^{-2s}$$

La función de la figura (3.29) se escribe

$$g(t) = (t-2)\mu(t-2) - (t-2)\mu(t-3)$$

su transformada es

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[g(t)] &= \mathcal{L}[(t-2)\mu(t-2)] - \mathcal{L}[(t-2)\mu(t-3)] \\
 &= e^{-2s} \mathcal{L}[t] - \mathcal{L}[(t-3)\mu(t-3)] - \mathcal{L}[\mu(t-3)] \\
 &= e^{-2s} \frac{1}{s^2} - e^{-3s} \frac{1}{s^2} - e^{-3s} \frac{1}{s} \\
 &= \frac{1}{s^2} \left(e^{-2s} - e^{-3s} - s e^{-3s} \right)
 \end{aligned}$$

Ejemplo 3.15.42. Resolvemos, usando Laplace, la ecuación

$$y^{(4)} - y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1, \quad y'''(0) = 0$$

Se aplica transformada en ambos lados de la ecuación dada

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[y^{(4)} - y] &= \mathcal{L}[0] \implies \mathcal{L}[y^{(4)}] - \mathcal{L}[y] = 0 \\
 &\implies s^4 \mathcal{L}[y] - s^3 y(0^+) - s^2 y'(0^+) - s y''(0^+) - y'''(0^+) - \mathcal{L}[y] = 0 \\
 &\implies s^4 \mathcal{L}[y] - s^3 - s - \mathcal{L}[y] = 0 \\
 &\implies \mathcal{L}[y] = \frac{s}{s^2 - 1}
 \end{aligned}$$

A partir de esto último,

$$y = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s}{s^2 - 1} \right]$$

Ahora, las fracciones parciales salvan pues,

$$\frac{s}{s^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s+1} + \frac{1}{s-1} \right)$$

teniéndose que

$$y = \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s+1} \right] + \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s-1} \right] = \frac{1}{2} e^{-t} + \frac{1}{2} e^t = \cosh(t)$$

Ejemplo 3.15.43. Resolvemos, usando Laplace, $y'' + 4y = \begin{cases} 0 & , 0 \leq t < 3 \\ t & , t \geq 3 \end{cases}$, con $y(0) = y'(0) = 0$.

Se aplica Laplace en ambos lados de la igualdad

$$\mathcal{L}[y''] + 4\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[t\mu(t-3)]$$

Para calcular la transformada que involucra el escalón tenemos:

$$t\mu(t-3) = ((t-3) + 3)\mu(t-3) = (t-3)\mu(t-3) + 3\mu(t-3)$$

Ahora es más sencillo

$$\mathcal{L}[t\mu(t-3)] = \mathcal{L}[(t-3)\mu(t-3)] + 3\mathcal{L}[\mu(t-3)] = \frac{1}{s^2}e^{-3s} + \frac{3}{s}e^{-3s}$$

Por tanto,

$$\mathcal{L}[y''] + 4\mathcal{L}[y] = \frac{1}{s^2}e^{-3s} + \frac{3}{s}e^{-3s}$$

O bien, desarrollado,

$$s^2\mathcal{L}[y] + 4\mathcal{L}[y] = \frac{1}{s^2}e^{-3s} + \frac{3}{s}e^{-3s}$$

de donde,

$$\mathcal{L} = \frac{1+3s}{s^2(4+s^2)} e^{-3s}$$

Por fracciones parciales

$$\frac{1+3s}{s^2(4+s^2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs+D}{4+s^2}$$

Al resolver, $A = \frac{3}{4}$, $B = \frac{1}{4}$, $C = -\frac{3}{4}$, $D = -\frac{1}{4}$. Por tanto,

$$\mathcal{L}[y] = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{s} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s^2} - \frac{3}{4} \cdot \frac{s}{s^2+4} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s^2+4}$$

de lo cual,

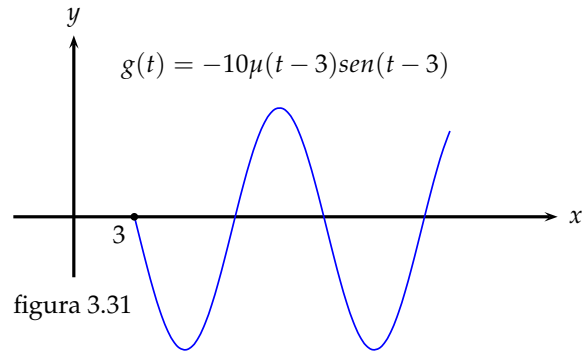
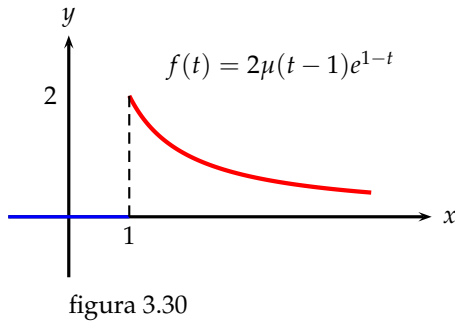
$$y(t) = \frac{3}{4} + \frac{t}{4} - \frac{3}{4} \cos 2t - \frac{1}{8} \sin 2t$$

Pero, había un desplazamiento, así que la respuesta correcta es

$$y(t) = \left(\frac{3}{4} + \frac{t}{4} - \frac{3}{4} \cos 2t - \frac{1}{8} \sin 2t \right) \mu(t-3)$$

Ejemplo 3.15.44. Graficar las funciones $f(t) = 2e^{-(t-1)}\mu(t-1)$ y $g(t) = -10\mu(t-3)\sin 2(t-3)$

Lo primero es observar donde está el punto de “quiebre”. En el caso de la función f es en $t = 1$, por tanto, de ahí en adelante la función escalón que acompaña es igual a 1, de ahí hacia atrás es cero. Se concluye que la gráfica es la que muestra la figura (3.30).



Para la función $g(t)$ el escalón vale uno a partir de $t > 3$ y vale cero antes del 3. Su gráfica en la figura (3.31).

Ejemplo 3.15.45. Hallemos las transformadas siguientes:

$$\blacksquare f(t) = -10\mu(t-3)\text{sen}(t-3) \implies \mathcal{L}[f(t)] = -10e^{-3s} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(\frac{s}{2})^2 + 1} = -20e^{-3s} \frac{1}{s^2 + 4}$$

$$\blacksquare g(t) = t e^{-2t} \mu(t)$$

En este caso hay un desplazamiento. Como $\mathcal{L}[t \mu(t)] = \frac{1}{s^2}$, entonces

$$\mathcal{L}[t \mu(t) e^{-2t}] = \frac{1}{(s+2)^2}$$

$$\blacksquare h(t) = e^{2t} \mu(t-1) \implies \mathcal{L}[h(t)] = \frac{1}{s-2} \cdot e^{-(s-2)}$$

Ejemplo 3.15.46. Hallemos transformada inversas de Laplace de

$$1. F(s) = \frac{s e^{-2s}}{s^2 + 2s + 5}$$

$$2. F(s) = \frac{2}{(s^2 + 1)^2}$$

$$3. F(s) = \frac{1}{(s^2 + 4s + 1)^2}$$

1. Es claro que el factor e^{-2s} nos indica un desplazamiento, por tanto, se analiza el resto de la expresión. Esto es,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2 + 2s + 5}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(s+1) - 1}{(s+1)^2 + 4}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(s+1)}{(s+1)^2 + 4}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2 + 4}\right]$$

Como estas transformadas inversas son conocidas, sólo falta agregar el desplazamiento. Se tiene

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2 + 2s + 5}\right] = e^{-t} \cos 2t - \frac{1}{2} e^{-t} \text{sen } 2t = \begin{cases} e^{-(t-2)} \cos 2(t-2) - \frac{1}{2} e^{-(t-2)} \text{sen } 2t & , t > 2 \\ 0 & , t < 2 \end{cases}$$

2. En este caso haremos uso de la convolución

$$\frac{2}{(s^2 + 1)^2} = \frac{2}{s^2 + 1} \cdot \frac{1}{s^2 + 1}$$

Las transformadas inversas son conocidas:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2 + 1}\right] = 2\operatorname{sen} t \mu(t) \quad \text{y} \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2 + 1}\right] = \operatorname{sen} t \mu(t)$$

Ahora convolucionamos

$$\begin{aligned} f * g &= 2 \int_0^t \operatorname{sen} x \operatorname{sen}(t - x) dx = 2 \int_0^t \operatorname{sen} x (\operatorname{sen} t \cos x - \operatorname{sen} x \cos t) dx \\ &= 2\operatorname{sen} t \int_0^t \operatorname{sen} x \cos x dx - 2\cos t \int_0^t \operatorname{sen}^2 x dx = 2\operatorname{sen} t \cdot \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 t - 2\cos t \cdot \frac{1}{2}\left(t - \frac{\operatorname{sen} 2t}{2}\right) \\ &= \operatorname{sen}^3 t - t \cos t + \frac{1}{2}\cos t \operatorname{sen} 2t = \operatorname{sen} t - t \cos t \end{aligned}$$

3. Una vez más, la convolución será nuestra fiel aliada.

$$\frac{1}{(s^2 + 4s + 1)^2} = \frac{1}{(s + 2)^2 - 3} \cdot \frac{1}{(s + 2)^2 - 3}$$

La transformada inversa de cada factor es conocida

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s + 2)^2 - 3}\right] = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{senh}(t\sqrt{3}) \cdot e^{-2t}$$

Con esto pasamos a convolucionar

$$f * g = 2 \int_0^t \operatorname{senh} x \sqrt{3} \cdot \operatorname{senh}(t - x) \sqrt{3} dx$$

Sabemos que

$$\operatorname{senh}(t) = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) \quad \text{y} \quad \operatorname{cosh}(t) = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$$

Luego,

$$\begin{aligned}
 f * g &= \frac{1}{3}e^{-2t} \int_0^t \frac{1}{2}(e^{x\sqrt{3}} - e^{-x\sqrt{3}}) \cdot \frac{1}{2}(e^{(t-x)\sqrt{3}} - e^{-(t-x)\sqrt{3}}) dx \\
 &= \frac{1}{12}e^{-2t} \int_0^t (e^{t\sqrt{3}} - e^{-t\sqrt{3}}e^{2x\sqrt{3}} - e^{t\sqrt{3}}e^{-2x\sqrt{3}} + e^{-t\sqrt{3}}) dx \\
 &= \frac{1}{12}e^{-2t} \left(xe^{t\sqrt{3}} - e^{-t\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}}e^{2x\sqrt{3}} + e^{t\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}}e^{-2x\sqrt{3}} + xe^{-t\sqrt{3}} \right)_0^t \\
 &= \frac{1}{12}e^{-2t} \left(te^{t\sqrt{3}} - \frac{e^{t\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}} + \frac{e^{-t\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}} + te^{-t\sqrt{3}} \right) \\
 &= \frac{1}{12}e^{-2t} \left(te^{t\sqrt{3}} + te^{-t\sqrt{3}} \right) - \frac{1}{12}e^{-2t} \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(e^{t\sqrt{3}} - e^{-t\sqrt{3}} \right) \\
 &= \frac{t}{6}e^{-2t} \cosh(t\sqrt{3}) - \frac{1}{6\sqrt{3}}e^{-2t} \sinh(t\sqrt{3}) \\
 &= \frac{1}{18}e^{-2t} \left(3t \cosh(t\sqrt{3}) - \sqrt{3} \sinh(t\sqrt{3}) \right)
 \end{aligned}$$

Ejemplo 3.15.47. Resolvemos la ecuación $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$, $y(0) = y'(0) = y'''(0) = 0$, $y''(0) = 1$.

Se aplica Laplace en ambos lados

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[y^{(4)}] + 2\mathcal{L}[y''] + \mathcal{L}[y] &= 0 \implies s^4\mathcal{L}[y] - s + 2s^2 + [y] = 0 \\
 &\implies \mathcal{L}[y](s^4 + 2s^2 + 1) = s \\
 &\implies \mathcal{L}[y] = \frac{s}{s^4 + 2s^2 + 1} = \frac{s}{(s^2 + 1)^2}
 \end{aligned}$$

Ahora empleamos la propiedad de la multiplicación

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) \implies \mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s) = (-1)^n F^{(n)}(s)$$

Se observa que

$$\frac{s}{(s^2 + 1)^2} = -\frac{1}{2} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s^2 + 1} \right) = \frac{1}{2} (-1)^1 \frac{d}{ds}$$

Como $\mathcal{L}[\sin t] = \frac{1}{s^2 + 1}$, entonces

$$\mathcal{L}[y] = \frac{1}{2} t \sin t$$

3.16. Problemas propuestos

1. Hallar las transformadas finita seno y coseno de Fourier de:

$$a) f_1(t) = t$$

$$c) f_3(t) = \operatorname{sen} at$$

$$e) f_5(t) = t^5$$

$$b) f_2(t) = t^3$$

$$d) f_4(t) = \cos t$$

$$f) f_6(t) = e^t$$

2. Hallar la representación integral de Fourier para la función que se indica, y determine convergencia de la representación

$$a) f(t) = \begin{cases} t, & -\pi \leq t \leq \pi \\ 0, & |t| > \pi \end{cases}$$

$$c) f(t) = \begin{cases} |t|, & -\pi \leq t \leq \pi \\ 0, & |t| > \pi \end{cases}$$

$$b) f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} t, & -\pi \leq t \leq \pi \\ 0, & |t| > \pi \end{cases}$$

$$d) f(t) = \begin{cases} t^2 - 1, & 0 < t < 4 \\ 0, & t > 4 \vee t < 0 \end{cases}$$

3. Hallar la representación integral en senos y cosenos de Fourier de las funciones que se indican. Determinar convergencia de la representación

$$a) f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} t, & 0 \leq t \leq 2\pi \\ 0, & t > 2\pi \end{cases}$$

$$c) f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} \pi t, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases}$$

$$b) f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 10 \\ 0, & t > 10 \end{cases}$$

$$d) f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1 \\ 2, & 1 \leq t \leq 4 \\ 0, & t > 4 \end{cases}$$

4. Hallar la transformada de Fourier de las funciones:

$$a) f(t) = 3e^{-4|t|} \cos 2t$$

$$d) f(t) = \mu(t-3) - \mu(t-1)$$

$$b) f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} t, & -a \leq t \leq a \\ 0, & |t| > a \end{cases}$$

$$e) f(t) = \begin{cases} t^2, & -a \leq t \leq a \\ 0, & |t| > a \end{cases}$$

$$c) f(t) = 5e^{-3(t-5)}$$

$$f) f(t) = 3\mu(t-2)e^{-3t}$$

5. Hallar la transformada inversa de Fourier de las funciones:

$$a) F(\omega) = 9e^{-(\omega+4)^2/32}$$

$$d) F(\omega) = \frac{1+i\omega}{6-\omega^2+5\omega i}$$

$$b) F(\omega) = \frac{e^{(20-4\omega)i}}{3-(5-\omega)i}$$

$$e) F(\omega) = \frac{10(4+i\omega)}{9-\omega^2+8i\omega}$$

$$c) F(\omega) = \frac{10 \operatorname{sen} 3\omega}{\pi + \omega}$$

$$f) F(\omega) = \frac{\operatorname{sen} 3\omega}{\omega(2+i\omega)}$$

3.16 Problemas propuestos

$$g) F(\omega) = \frac{6e^{4i\omega} \operatorname{sen} 2\omega}{9 + \omega^2}$$

$$h) F(\omega) = e^{-\omega^2/9} \operatorname{sen} 8\omega$$

$$i) F(\omega) = e^{-3|4+\omega|} \cos(8 + 2\omega)$$

$$j) F(\omega) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1 \\ -1, & -1 \leq t < 0 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$$

6. Hallar la transformada de Fourier de las funciones:

$$a) \frac{t}{9 + t^2}$$

$$b) \frac{d}{dt}(e^{-3t^2})$$

$$c) 3te^{-9t^2}$$

$$d) \frac{5e^{3it}}{t^2 - 4t + 13}$$

7. Hallar la transformada de Fourier en cosenos de las funciones:

$$a) f(t) = \begin{cases} \cos t, & 0 \leq t \leq a \\ 0, & t > a \end{cases}$$

$$d) f(t) = e^t \cos t$$

$$b) f(t) = \begin{cases} 2t, & 0 \leq t \leq 5 \\ 0, & t > 5 \end{cases}$$

$$e) f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \leq t \leq a \\ 0, & t > a \end{cases}$$

$$c) f(t) = te^{-at}, a > 0$$

$$f) f(t) = t^2 e^{-at}, a > 0$$

8. Hallar la transformada de Fourier en senos de las funciones:

$$a) f(t) = \begin{cases} \cos kt, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases}$$

$$d) f(t) = e^{-t} \cos t$$

$$b) f(t) = e^{-t} \operatorname{sen} t$$

$$e) f(t) = t^2 e^{-at^2}, a > 0$$

$$c) f(t) = te^{-at}, a > 0$$

$$f) f(t) = e^{-4t}$$

9. Probar que la convolución es conmutativa.

$$10. \text{ Probar que no existe transformada de Fourier de la función } x(t) = \begin{cases} -3t, & t \leq 0 \\ t+1, & 0 < t \leq 1 \\ 3, & t > 1 \end{cases}$$

Resp. $x(t)$ no es absolutamente integrable

$$11. \text{ Probar que } \mathcal{F} \left[\frac{2\alpha}{x^2 + \alpha^2} \right] = e^{-\alpha|\omega|}, \alpha > 0$$

usar TF inversa en ambos lados

$$12. \text{ Probar que si } f(x) = \begin{cases} 0, & |x| > a \\ 1, & |x| < a \end{cases}, \text{ entonces se cumple que } \mathcal{F}[f(x)] = \frac{\operatorname{sen} a\omega}{\pi\omega}$$

$$13. \text{ Resolver, usando TF, la ecuación } y'' + 6y' + 5y = \delta(t - 3)$$

Transformada de Laplace

1. Hallar las transformadas de Laplace de:

$$a) f_1(t) = \cos^2 t$$

$$c) f_3(t) = t^2 \sin t$$

$$e) f_5(t) = \frac{\sin t}{t}$$

$$b) f_2(t) = t \cos t$$

$$d) f_4(t) = t^2 \sin^2 t$$

$$f) f_6(t) = \frac{\cos t - 1}{t}$$

2. Hallar las transformadas de Laplace de:

$$a) f_1(t) = t e^t$$

$$c) f_3(t) = t^2 e^{-t}$$

$$e) f_5(t) = t \sin t$$

$$b) f_2(t) = t^2 \cos 3t$$

$$d) f_4(t) = t e^t \sin t$$

$$f) f_6(t) = \cos(7t - 8)$$

3. Hallar las transformadas de Laplace de:

$$a) f_1(t) = t \mu(t - 1)$$

$$e) f_5(t) = t^2 \mu(t - 1)$$

$$b) f_2(t) = \sin t \mu(t - \frac{\pi}{2})$$

$$c) f_3(t) = e^t \mu(t - 1)$$

$$f) f_6(t) = \begin{cases} 2t, & 0 < t < \pi \\ 0, & t > \pi \end{cases}$$

$$d) f_4(t) = \cos a(t - b) \mu(t - b)$$

4. Hallar la transformada inversa de Laplace de:

$$a) \frac{3}{s^2}$$

$$c) \frac{s + 2}{s^2 + 4}$$

$$e) \frac{s + 2}{s(s^2 + 4)}$$

$$b) \frac{1}{s^2 + 4s + 5}$$

$$d) \frac{s + 3}{s^2 + 8s + 17}$$

$$f) \frac{s}{s^2 - 3s + 2}$$

5. Usar convolución para hallar transformada inversa de Laplace de las siguientes funciones:

$$a) F(s) = \frac{3}{s^4(s^2 + 1)}$$

$$d) F(s) = \frac{1}{s(s^2 + 1)}$$

$$b) F(s) = \frac{1}{s^2(s^2 + 1)}$$

$$e) F(s) = \frac{1}{s^4 - 16}$$

$$c) F(s) = \frac{1}{(s^2 + 1)^2}$$

$$f) F(s) = \frac{e^{-2s}}{s^2 + 4}$$

6. Usar la transformada de Laplace para resolver los problemas de valor inicial siguientes:

$$a) y' + 4y = 1, y(0) = -3$$

$$e) \begin{cases} y'' + 6y' + 2y = 1 \\ y(0) = 1, y'(0) = -4 \end{cases}$$

$$b) y' - 9y = t, y(0) = 5$$

$$c) y' + 4y = \cos t, y(0) = 0$$

$$f) \begin{cases} y'' + 4y = e^{-t} \sin t \\ y(0) = 1, y'(0) = 4 \end{cases}$$

$$d) y'' - 2y = 1 - t, y(0) = 1$$

3.16 Problemas propuestos

7. Hallar la transformada de Laplace de la función dada.

$$a) f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 1 \\ 1 + 5t, & t \geq 1 \end{cases}$$

$$c) f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 4 \\ -3e^{-2t}, & t \geq 4 \end{cases}$$

$$b) f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 4 \\ t^2, & 4 \leq t < 5 \\ 2t, & t \geq 5 \end{cases}$$

$$d) f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 5 \\ 1 + t^2, & t \geq 5 \end{cases}$$

8. Usar la transformada de Laplace para resolver los siguientes problemas de valor inicial:

$$a) y'' + 4y = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 4 \\ 3, & t \geq 4 \end{cases}, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$$

$$b) y'' - 2y' - 3y = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 4 \\ 12, & t \geq 4 \end{cases}, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$$

$$c) y'' - 4y' + 4y = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 3 \\ t + 2, & t \geq 3 \end{cases}, \quad y(0) = -2, y'(0) = 1$$

$$d) y'' + 5y' + 6y = \begin{cases} t^2, & 0 \leq t < 3 \\ 0, & t \geq 3 \end{cases}, \quad y(0) = 0, y'(0) = -4$$

9. Hallar la función f que se indica, usando transformada de Laplace en ambos lados de la ecuación y el teorema de convolución en donde interviene la integral

$$a) f(t) = -1 + \int_0^t f(t-x) e^{-3x} dx$$

$$b) f(t) = -t + \int_0^t f(t-x) \sin x dx$$

$$c) f(t) = \cos t + \int_0^t f(t-x) e^{-2x} dx$$

$$d) f(t) = e^{-t} + \int_0^t f(t-x) dx$$

$$e) f(t) = 3 + \int_0^t \cos 2(t-x) f(x) dx$$

10. Usar transformada de Laplace para resolver los siguientes sistemas:

$$a) \begin{cases} x' - 2y' = 1 \\ x' + y - x = 0 \\ x(0) = 0, y(0) = 0 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x' + y' - x = \cos 2t \\ x' + 2y' = 0 \\ x(0) = 0, y(0) = 0 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2x' - 3y + y' = 0, \\ x' + y' = t \\ x(0) = 0, y(0) = 0 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x' + 3x - y = 1 \\ x' + y' + 3x = 0 \\ x(0) = 2, y(0) = 0 \end{cases}$$

3.17. Problemas adicionales

1. Calcular transformada de Fourier de las siguientes funciones:

$$a) f(t) = 2\mu(t)e^{-5t} - 10e^{-4|t|}$$

$$\text{Resp. } \frac{3}{5+i\omega} - \frac{80}{16+\omega^2}$$

$$b) f(t) = \mu(t+4) - \mu(t-4) + \sqrt{2}e^{-|t|}$$

$$\text{Resp. } \frac{2\text{sen}4\omega}{\omega} + \frac{2\sqrt{2}}{1+\omega^2}$$

$$c) f(t) = e^{-5|t-2|}$$

$$\text{Resp. } \frac{10e^{-2i\omega}}{25+\omega^2} - \frac{80}{16+\omega^2}$$

$$d) f(t) = \mu(t)e^{(-2+3i)t}$$

$$\text{Resp. } \frac{1}{2+i(\omega-3)}$$

$$e) f(t) = \mu(-t)e^{6t}$$

$$\text{Resp. } \frac{1}{6-i\omega}$$

$$f) f(t) = \frac{1}{a^2+t^2}$$

$$\text{Resp. } \frac{\pi}{a}e^{-a|\omega|}$$

$$g) f(t) = \frac{5}{4+it}$$

$$\text{Resp. } 10\pi\mu(-\omega)e^{4\omega}$$

$$h) f(t) = \frac{4\text{sen}2t}{t}$$

$$\text{Resp. } 4\pi[\mu(2-\omega) - \mu(-2-\omega)]$$

$$i) f(t) = \begin{cases} 6, & 3 \leq t < 7 \\ 0, & t < 3 \text{ y } t \geq 7 \end{cases}$$

$$\text{Resp. } \frac{12\text{sen}(2\omega)}{\omega}e^{-5i\omega}$$

$$j) f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1 \\ -1, & -1 \leq t \leq 0 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$$

$$\text{Resp. } \frac{2i}{\omega}(\cos\omega - 1)$$

$$k) f(t) = \begin{cases} \text{sent}, & -k \leq t \leq k \\ 0, & |t| > k \end{cases}$$

$$\text{Resp. } \frac{i}{1+\omega}\text{sen } k(\omega+1) - \frac{i}{\omega-1}\text{sen } k(\omega-1)$$

$$l) f(t) = 5[\mu(t-3) - \mu(t-11)]$$

$$\text{Resp. } \frac{10}{\omega}e^{-7i\omega}\text{sen}4\omega$$

$$m) f(t) = 5e^{-3(t-5)^2}$$

$$\text{Resp. } 5\sqrt{\frac{\pi}{3}}e^{-\omega^2/12+5i\omega}$$

$$n) f(t) = \mu(t-k)e^{-\frac{1}{4}t}$$

$$\text{Resp. } \frac{4}{1+4i\omega}e^{-(1+4i\omega)k/4}$$

$$\tilde{n}) f(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

$$\text{Resp. } \pi e^{-|\omega|}$$

$$o) f(t) = 3\mu(t-2)e^{-3t}$$

$$\text{Resp. } \frac{3e^{-2(3+i\omega)}}{3+i\omega}$$

$$p) f(t) = 3e^{-4|t+2|}$$

$$\text{Resp. } \frac{24}{16+\omega^2}e^{2i\omega}$$

3.17 Problemas adicionales

q) $f(t) = \mu(t-3)e^{-2t}$	Resp. $\frac{e^{-3(2+i\omega)}}{2+i\omega}$
r) $f(t) = 3e^{-4 t }\cos 2t$	Resp. $\frac{12}{16+(\omega-2)^2} + \frac{12}{16+(\omega+2)^2}$
s) $f(t) = 8e^{-2t^2}\sin 3t$	Resp. $4i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[e^{-(\omega+3)^2/8} - e^{-(\omega-3)^2/8} \right]$
t) $f(t) = \frac{\sin t}{4+t^2}$	Resp. $\frac{\pi i}{4} \left[e^{-2 \omega+1 } - e^{-2 \omega-1 } \right]$
u) $f(t) = \frac{1}{t^2+6t+13}$	Resp. $\frac{\pi}{2} e^{3i\omega-2 \omega }$
v) $f(t) = \mu(t-1)e^{-5(t+2)}$	Resp. $\frac{1}{5+i\omega} e^{-15-i\omega}$
w) $f(t) = 4\mu(t-2)e^{-3t}\cos(t-2)$	Resp. $\frac{4e^{-2(3+i\omega)}(3+i\omega)}{(3+i\omega)^2 \zeta_1}$
x) $f(t) = \frac{5e^{3it}}{t^2-4t+13}$	Resp. $\frac{5\pi}{3} e^{-2i(\omega-3)} e^{-3 \omega-3 }$

2. Hallar la transformada inversa de Fourier de:

a) $F(\omega) = \frac{1}{a^2+\omega^2}$	Resp. $\frac{1}{2a} e^{-a t }$
b) $F(\omega) = \frac{e^{2i\omega}}{5+i\omega}$	Resp. $\mu(t+2)e^{-t-10}$
c) $F(\omega) = \frac{e^{-i\omega}\sin \omega}{3\omega}$	Resp. $\frac{1}{6} [\mu(t) - \mu(t-2)]$
d) $F(\omega) = \frac{6}{5-(3-\omega)i}$	Resp. $6\mu(t)e^{(-5+3i)t}$
e) $F(\omega) = \frac{2}{36+(\omega+7)^2}$	Resp. $\frac{1}{6} e^{-7it} e^{-6 t }$
f) $F(\omega) = \frac{2}{\omega^2+6\omega+12}$	Resp. $\frac{1}{\sqrt{3}} e^{-3it} e^{- t \sqrt{3}}$
g) $F(\omega) = \frac{4e^{(2\omega-6)i}}{5-(3-\omega)i}$	Resp. $4\mu(t+2)e^{-10-(5-3i)t}$
h) $F(\omega) = 9e^{-(\omega+4)^2/32}$	Resp. $18\sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-8t^2} e^{-4it}$
i) $F(\omega) = \frac{e^{(20-4\omega)i}}{3-(5-\omega)i}$	Resp. $e^{12-(3-5i)t} \mu(t-4)$
j) $F(\omega) = \frac{1+i\omega}{6-\omega^2+5i\omega}$	Resp. $\mu(t)[2e^{-3t} - e^{-2t}]$
k) $F(\omega) = \frac{10(4+i\omega)}{6-\omega^2+8i\omega}$	Resp. $10\mu(t) e^{-4t} \cosh(t\sqrt{7})$

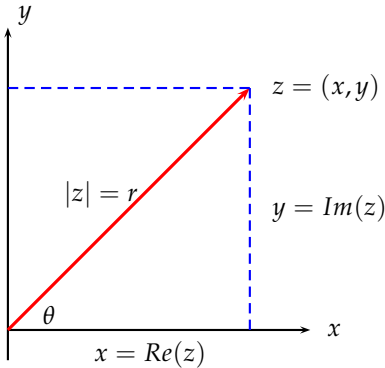
El que ahorra sus palabras tiene
sabiduría;
De espíritu prudente es el
hombre entendido
Proverbios 17:27

CAPÍTULO

DERIVACION

4

COMPLEJA



4.1. Elementos previos

Recordemos las propiedades básicas de los números complejos, vistas en el primer curso de álgebra. El conjunto siguiente

$$\mathbb{C} = \{(a, b) / a, b \in \mathbb{R}\}$$

con las operaciones:

suma $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$

producto $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, bc + ad)$

se denomina **conjunto de los números complejos**. Se puede observar que, como conjunto, $\mathbb{C}$ es en realidad $\mathbb{R}^2$. La novedad está en introducir el producto, pues se comprueba fácilmente que $\mathbb{C}$ con las dos operaciones anteriores es un cuerpo conmutativo, con $(0, 0)$ y $(1, 0)$ como elementos neutros respectivos. Además, el cuerpo $\mathbb{C}$ contiene al cuerpo $\mathbb{R}$. En efecto, la aplicación que lleva

$$a \in \mathbb{R} \rightarrow (a, 0) \in \mathbb{C}$$

es un homomorfismo inyectivo de cuerpo. Esta identificación de $\mathbb{R}$ como subcuerpo de $\mathbb{C}$ permite usar la notación simplificada $a = (a, 0)$, y observando que todo elemento $(a, b) \in \mathbb{C}$ se puede escribir como

$$(a, b) = (a, 0) \cdot (1, 0) + (b, 0)(0, 1)$$

entonces, al hacer $i = (0, 1)$, tenemos que

$$(a, b) = a + ib$$

Esta forma de escribir un número complejo (forma binómica) hace más fácil la multiplicación. En efecto, teniendo en cuenta que

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$$

entonces

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, bc + ad)$$

se traduce en

$$(a + ib) \cdot (c + id) = ac - bd + i(bc + ad)$$

donde para hacer esta operación sólo hace falta recordar las reglas habituales de la multiplicación y las identificaciones anteriores. Cuando se utiliza una sola letra para denotar un número complejo, se suele elegir la z , y si $z = a + ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$, los números a, b se llaman partes real e imaginaria de z , respectivamente. Escribimos; $a = \text{Re}(z)$, $b = \text{Im}(z)$.

4.2. Igualdad de números complejos

La igualdad de los números complejos es una consecuencia de la igualdad definida entre conjuntos, y su aplicación sobre los pares ordenados. En efecto, si $z = (x, y)$ y $w = (u, v)$, resulta entonces:

$$(x, y) = (u, v) \iff x = u \wedge y = v$$

Es decir, dos números complejos son iguales, si y sólo si, simultáneamente, las respectivas partes reales e imaginarias son iguales entre sí. Una igualdad en $\mathbb{C}$ representa entonces dos igualdades en $\mathbb{R}$.

Desde el punto de vista algebraico, la principal ventaja de $\mathbb{C}$ es que soluciona el defecto algebraico de $\mathbb{R}$ de no ser algebraicamente cerrado, es decir, de que existan ecuaciones polinómicas con coeficientes reales que no tienen soluciones reales. El ejemplo clásico es $x^2 + 1 = 0$. Esto ya no va a ocurrir en $\mathbb{C}$.

La introducción del símbolo $\mathbb{C}$ para representar al conjunto de los complejos, en vez de usar directamente $\mathbb{R}^2$, es conveniente para destacar y recordar la diferencia existente entre $\mathbb{R}^2$ y los demás $\mathbb{R}^n$. Todo $\mathbb{R}^n$ conforma estructura de espacio vectorial y también de espacio euclídeo. En el caso particular de $\mathbb{R}^2$, además de las estructuras mencionadas, se agrega la estructuración en cuerpo abeliano. Esta característica no se extiende a ningún $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 3$. La razón de esta diferencia es porque en $\mathbb{C}$, además de definirse la suma como en todo $\mathbb{R}^n$, se establece también la multiplicación, condición que le permite alcanzar la estructura de cuerpo abeliano.

4.3. Propiedades algebraicas de $\mathbb{C}$

- $\mathbb{C}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión 2, de hecho, $\{1, i\}$ es la base canónica.
- $\mathbb{C}$ es un cuerpo conmutativo que contiene un subcuerpo isomorfo a $\mathbb{R}$.
- Existe un elemento de $\mathbb{C}$ solución de $z^2 + 1 = 0$ (i es la solución).
- $\mathbb{C}$ es algebraicamente cerrado, es decir, todo polinomio con coeficientes complejos tiene una solución en $\mathbb{C}$. Además, $\mathbb{C}$ es el menor cuerpo algebraicamente cerrado que contiene a $\mathbb{R}$.
- **Conjugación** La aplicación de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ definida por

$$z = a + ib \mapsto \bar{z} = a - ib$$

tiene las siguientes propiedades:

- | | |
|---|--|
| 1. $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$ | 3. $\overline{\bar{z}} = z$. |
| 2. $\overline{z\bar{w}} = \bar{z}w$. | 4. $\bar{z} = z$ si y sólo si $z \in \mathbb{R}$. |

- En $\mathbb{C}$ no existe un orden total compatible con la estructura algebraica que extienda el orden de $\mathbb{R}$. En efecto, si éste fuera el caso los elementos i y 0 deberían ser comparables. Veamos si es cierto:
 1. Si fuese $i > 0$, por la compatibilidad con el producto, tendríamos $i^2 = -1 > 0$, ¡absurdo!
 2. Si fuese $i < 0$, por la misma razón se tendría $i^2 = -1 > 0$, con lo cual, obviamente, no se extiende el orden de $\mathbb{R}$.

Observación. El hecho de que $\mathbb{C}$ no sea un cuerpo ordenado, deja como único $\mathbb{R}^n$ que cumple tal condición al conjunto de los reales $\mathbb{R}$. Este es el cuerpo ordenado por excelencia.

Observación. Conviene remarcar que en $\mathbb{C}$ carece totalmente de sentido la proposición:

$$z > z'$$

Por lo tanto, en el caso de presentarse esta notación, es sencillamente un grave error.

4.4. $\mathbb{C}$ como estructura vectorial

El conjunto de los números complejos $\mathbb{C}$ conforma una estructura vectorial, sobre un cuerpo K , respecto de las leyes de composición interna $+$ (suma de números complejos) y composición externa P dada por

$$P : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{tal que} \quad \lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$$

Esto es consecuencia inmediata de que $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, es decir un caso particular de $\mathbb{R}^n$. Por lo general, el cuerpo de apoyo de la estructura vectorial o conjunto de los escalares K que se considera es $\mathbb{R}$.

4.5. $\mathbb{C}$ como estructura de espacio métrico

El conjunto $\mathbb{C}$ conforma una estructura de espacio métrico, y en particular una estructura de espacio euclídeo, al definirse la función distancia por la expresión

$$d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad (z, w) \rightarrow d(z, w) = \sqrt{(z_1 - w_1)^2 + (z_2 - w_2)^2}$$

en donde, $z = (z_1, z_2)$, $w = (w_1, w_2)$ y $d(z, w)$ es la distancia de z a w .

Esta característica es una consecuencia inmediata de que $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, es decir un caso particular de $\mathbb{R}^n$. El hecho de poder estructurar $\mathbb{C}$ como espacio métrico tiene enorme importancia. En efecto, se logra con ello la base (función distancia) para construir una estructura topológica. De esta manera el conjunto de los complejos $\mathbb{C}$ conforma simultáneamente una estructura algebraica de cuerpo, y una estructura topológica, siendo ambas las dos condiciones esenciales para poder definir los conceptos que son fundamento del análisis matemático: la *continuidad* (la convergencia) y la *diferencial*.

4.5.1. Propiedades de la función distancia

Las siguientes propiedades son conocidas:

1. $d(z_1, z_2) \geq 0$
2. $d(z_1, z_2) = 0 \iff z_1 = z_2$
3. $d(\lambda z_1, \lambda z_2) = |\lambda| d(z_1, z_2)$
4. $d(z_1, z_2) \leq d(z_1, z_3) + d(z_3, z_2)$ desigualdad triangular.

4.5.2. Notación para la función distancia

La notación de la función distancia sobre $\mathbb{C}$, que por otra parte se emplea normalmente para cualquier $\mathbb{R}^n$ es

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$$

De acuerdo a esto, si $z = (x, y)$, resulta

$$d(z, 0) = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$

La introducción de $|z_1 - z_2|$ para representar la función distancia, es justificada por el hecho de que ayuda a recordar todas las propiedades de la distancia por su similitud con la función valor absoluto en el campo real.

Observación. El valor absoluto en el campo real por su parte estructura al conjunto $\mathbb{R}$ como espacio euclídeo, pues:

$$d(x, y) = \sqrt{(x - y)^2} = |x - y|$$

Se sigue entonces, que la distancia del espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ puede entenderse como una generalización del valor absoluto definido para $\mathbb{R}$.

4.5.3. Módulo de z

El **módulo** o **valor absoluto** de z es una aplicación del conjunto de los complejos sobre los reales.

$$| \cdot | : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{tal que } (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$$

Geométricamente, representa la distancia $d(z, e)$

$$|z| = d(z, e), \quad \text{en donde } e = (0, 0), \text{ es el elemento neutro de la suma}$$

Tiene las siguientes propiedades:

1. $|z| \geq 0$
2. $|z| = 0 \iff z = 0$.
3. $|z + w| \leq |z| + |w|$ (desigualdad triangular).
4. $|zw| = |z||w|$
5. $|z - w| \geq |z| - |w|$ (desigualdad triangular inversa).
6. $|z_1| = |z_2| \iff |z_1|^2 = |z_2|^2$
7. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

4.6. Representación geométrica y forma polar de un complejo

Debido a la identificación entre $\mathbb{C}$ y $\mathbb{R}^2$, todo número complejo $z = x + iy$ lo podemos representar en el plano como el punto de coordenadas (x, y) (figura 4.1).

En el plano complejo puede observarse con ayuda de la representación geométrica, que cualquier par $(x, y) \neq (0, 0)$ puede ser definido por otro par (r, θ) cuyos elementos son:

- r la distancia al origen de coordenadas.
- θ el ángulo formado entre el segmento $\overline{Oz}$ y el eje x .

El par (r, θ) define las llamadas **coordenadas polares** del número complejo.

De la figura (4.1), tenemos las igualdades

$$\operatorname{Re}(z) = |z|\cos\theta, \quad \operatorname{Im}(z) = |z|\sin\theta$$

de donde

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

La primera coordenada polar, r , representa entonces la distancia de (x, y) al $(0, 0)$, es decir el módulo de z . La segunda coordenada polar θ , representa el ángulo entre el segmento $\overline{Oz}$ y el eje x .

Es claro que, dado $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, hay infinitos números reales $t \in \mathbb{R}$ que verifican la igualdad

$$z = |z|(\cos t + i\sin t)$$

cualquiera de ellos recibe el nombre de **argumento** de z . El conjunto de todos los argumentos de un número complejo no nulo, z , se representa por $\operatorname{Arg}(z)$.

$$\operatorname{Arg}(z) = \{t \in \mathbb{R} / z = |z|(\cos t + i\sin t)\}$$

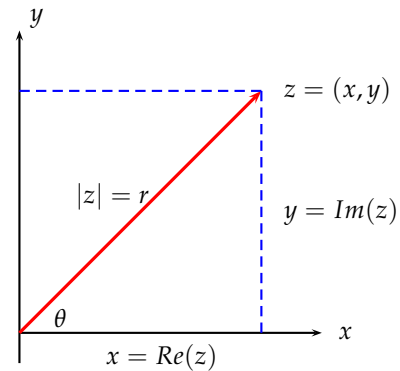


figura 4.1

4.6 Representación geométrica y forma polar de un complejo

Observar que

$$s, t \in \text{Arg}(z) \iff \begin{cases} \cos(t) = \cos(s) \\ \sin(t) = \sin(s) \end{cases} \iff s = t + 2k\pi \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}$$

Por tanto, conocido un argumento $t_0 \in \text{Arg}(z)$ cualquier otro es de la forma $t_0 + 2k\pi$ para algún $k \in \mathbb{Z}$, es decir, $\text{Arg}(z) = t_0 + 2k\mathbb{Z}$.

Es claro que dos números complejos no nulos, z y w , son iguales si, y sólo si, tienen el mismo módulo y $\text{Arg}(z) = \text{Arg}(w)$.

De entre todos los argumentos de un número complejo $z \neq 0$ existe sólo uno que se encuentra en el intervalo $(-\pi, \pi]$, se representa por $\arg(z)$ y viene dado por

$$\begin{cases} \arg(z) = 2\arctg\left(\frac{\text{Im}(z)}{\text{Re}(z) + |z|}\right), & \text{si } z \notin \mathbb{R}^- \\ \arg(z) = \pi, & \text{si } z \in \mathbb{R}^- \end{cases}$$

No es difícil comprobar que el argumento principal de $z = x + iy \neq 0$ viene también dado por:

$$\arg(z) = \begin{cases} \arctg\left(\frac{y}{x}\right) - \pi, & \text{si } y < 0, x < 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{si } y < 0, x = 0 \\ \arctg\left(\frac{y}{x}\right), & \text{si } x > 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \text{si } y > 0, x = 0 \\ \arctg\left(\frac{y}{x}\right) + \pi, & \text{si } y \geq 0, x < 0 \end{cases}$$

Esta última forma es la que se usa con más frecuencia para los cálculos.

4.6.1. Fórmula de DeMoivre

La forma polar permite hacer fácilmente productos de números complejos. Consideremos dos números complejos no nulos

$$z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi)$$

$$w = |w|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Entonces

$$\begin{aligned} zw &= |z||w|(\cos\phi + i\sin\phi)(\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= |zw|[(\cos\phi\cos\theta - \sin\phi\sin\theta) + i(\sin\phi\cos\theta + \cos\phi\sin\theta)] \\ &= |zw|(\cos(\phi + \theta) + i\sin(\phi + \theta)) \end{aligned}$$

Es decir; para multiplicar dos números complejos se multiplican sus módulos y se suman sus argumentos.

Teorema 4.6.1. (Fórmula de DeMoivre) Si z es un complejo no nulo, ϕ es un argumento de z y n es un número entero, se verifica que $n\phi \in \text{Arg}(z^n)$, es decir:

$$z^n = |z|^n [\cos(n\phi) + i \sen(n\phi)], \quad n \in \mathbb{Z}$$

4.6.2. Raíces de un número complejo

Se trata ahora de resolver la ecuación $w^n = z$ donde n es un número natural, $n \geq 2$, y $z \neq 0$ es un número complejo conocido. Escribamos w en forma polar:

$$w = |w|(\cos\phi + i \sen\phi)$$

Si $z = r(\cos\theta + i \sen\theta)$, usando la fórmula de DeMoivre, podemos escribir la ecuación $w^n = z$ en la forma equivalente:

$$w^n = |w|^n [\cos(n\phi) + i \sen(n\phi)] = |z|(\cos\theta + i \sen\theta)$$

de lo cual se deduce que

$$|w|^n = |z| \quad \text{y} \quad n\phi = \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

En consecuencia,

$$w = |z|^{1/n} \left[\cos\left(\frac{\arg(z) + 2k\pi}{n}\right) + i \sen\left(\frac{\arg(z) + 2k\pi}{n}\right) \right], \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

Ejemplo 4.6.2.

$$\begin{aligned} w^3 = i &\iff w = \cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right) + i \sen\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right), \quad k = 0, 1, 2 \\ &\iff w = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i), \quad -\frac{1}{2}(\sqrt{3} - i), \quad -i \end{aligned}$$

4.6.3. Forma exponencial de un número complejo

Una nueva expresión de la forma polar, llamada forma exponencial, tiene gran importancia debido a la simplicidad operativa que entraña su empleo. Ejemplo de ello es que toda la trigonometría puede deducirse en forma inmediata de las propiedades de la forma exponencial. Otra aplicación para destacar es la definición del logaritmo y de la potencia en el campo complejo, que se hace por medio de dicha forma exponencial.

La base de la forma es la fórmula de Euler:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sen\theta$$

la cual permite introducir a la forma exponencial de un número complejo como:

$$r e^{i\theta} = r(\cos\theta + i \sen\theta)$$

de esta manera, $r e^{i\theta}$ se conoce como la **forma exponencial** de un número complejo. La validez de esta expresión se reduce a la discusión de la fórmula de Euler, que hacemos a continuación.

4.6.4. La función e^z

El camino para llegar a la fórmula de Euler se basa en la definición de la función compleja e^z por medio de una serie:

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots \quad (4.1)$$

cuyo estudio se hará en un capítulo posterior. Esta serie es convergente para cualquier complejo z . Se observa que se verifican las propiedades:

- $z = x \implies e^z = e^x$

que muestra como la exponencial compleja se reduce a la real cuando z también lo es.

- $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

que es la propiedad fundamental de la función e^z , llamada ley de los exponentes, que también es cumplida en el campo real por la función e^x .

Ambas propiedades muestran como con esta definición de e^z se obtiene una extensión de la función real e^x al campo complejo, manteniéndose sus principales propiedades.

- Teniendo presente los desarrollos en serie de las funciones reales seno y coseno:

$$\cos t = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!}, \quad \sin t = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

haciendo $z = x + iy$ en la serie (4.1) y empleando los desarrollos de seno y coseno en la variable y , se halla la fórmula de Euler

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y, \quad \forall y$$

Definición 4.6.3. Para todo $z = x + iy \in \mathbb{C}$, con $x, y \in \mathbb{R}$, definimos

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y)$$

Obsérvese que, si $z \in \mathbb{R}$, la exponencial compleja se reduce a la exponencial real.

Ejemplo 4.6.4.

$$e^0 = 1, \quad e^{i\pi/2} = i, \quad e^{-i\pi} = -1, \quad e^{3\pi i/2} = -i, \quad e^{2\pi i} = 1$$

Propiedades: Para todo $z, w \in \mathbb{C}$ se tiene:

1. $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$.

Demostración.

$$\begin{aligned} e^z \cdot e^w &= e^{x_1} (\cos y_1 + i \sin y_1) \cdot e^{x_2} (\cos y_2 + i \sin y_2) \\ &= e^{x_1} e^{x_2} [\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2 + i(\cos y_1 \sin y_2 + \sin y_1 \cos y_2)] \\ &= e^{x_1} e^{x_2} [\cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2)] \\ &= e^{x_1+x_2} \cdot e^{i(y_1+y_2)} = e^{x_1+iy_1} \cdot e^{x_2+iy_2} \\ &= e^{z+w} \end{aligned}$$

2. $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$.

Demostración. Hacer $z = -\omega$ en la propiedad anterior está resuelto.

3. $e^z \neq 0$, para todo $z \in \mathbb{C}$.

Demostración. Suponiendo que existe $z \in \mathbb{C}$ tal que $e^z = 0$, se tiene que

$$e^{x+iy} = 0 \implies e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) = 0$$

de lo cual

$$e^x \cos y = 0 \quad \text{y} \quad e^x \operatorname{sen} y = 0$$

como $e^x \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, que sólo que

$$\cos y = 0 \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} y = 0$$

de lo cual

$$y = \frac{(2n-1)\pi}{2} \quad \text{y} \quad y = n\pi \quad n = 1, 2, \dots$$

Esto debe ocurrir al mismo tiempo, pero

$$\frac{(2n-1)\pi}{2} = n\pi \quad \text{¡imposible!}$$

En consecuencia, $e^z \neq 0$ para todo z complejo.

4. $|e^z| = e^x$

Demostración.

$$z = x + iy \implies |e^z| = |e^{x+iy}| = |e^x| |e^{iy}|$$

como $|e^{iy}| = |\cos y + i \operatorname{sen} y| = \sqrt{\cos^2 y + \operatorname{sen}^2 y} = 1$. Luego

$$|e^z| = |e^x| |e^{iy}| = e^x$$

ya que $e^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

5. $e^z = 1 \iff z = 2k\pi i, k$ entero

Demostración.

$\implies$) De $e^z = 1$ se sigue que $e^x \cos y = 1$ y $e^x \operatorname{sen} y = 0$. Dado que $e^x \neq 0$, entonces para anular $e^x \operatorname{sen} y$ se debe tener $y = n\pi$. Siendo así, la ecuación $e^x \cos y = 1$ con este valor de y toma la forma

$$e^x \cos y = 1 \iff e^x \cos(n\pi) = e^x \cdot (-1)^n = 1$$

se cumple sólo si n es par, esto es, $n = 2k$, lo que a su vez conlleva que $x = 0$. Por tanto,

$$z = 0 + 2k\pi i = 2k\pi i$$

$\Leftarrow$) Si $z = 2k\pi i$, entonces $e^z = e^0(\cos 2k\pi + i \operatorname{sen} 2k\pi) = 1$

4.7 Topología en el campo complejo

$$6. e^{z_1} = e^{z_2} \iff z_1 - z_2 = 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$$

Demostración.

$\Rightarrow$) De $e^{z_1} = e^{z_2}$ se sigue que $e^{z_1 - z_2} = 1$, y de esto que $z_1 - z_2 = 2k\pi i$.

$\Leftarrow$) De $z_1 - z_2 = 2k\pi i$ se tiene que $z_1 = z_2 + 2k\pi i$. Tomando exponencial en ambos lados de esta última igualdad

$$e^{z_1} = e^{z_2 + 2k\pi i} = e^{z_2} \cdot e^{2k\pi i} = e^{z_2}$$

$$7. |e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}, \quad \arg(e^z) = \operatorname{Im}(z) \pmod{2\pi}.$$

Definición 4.6.5. Sea $w = f(z)$ función definida en un dominio D y sea $\lambda \neq 0$ una constante tal que $z \in D$ y $(\lambda + z) \in D$. Decimos que f es una función periódica de periodo λ en D , si y sólo si

$$f(z + \lambda) = f(z)$$

Es sencillo verificar que e^z es una función periódica, cuyos períodos son los números $2k\pi i$ con $k \in \mathbb{Z}$.

4.6.5. Producto, cociente y potencia de complejos en forma exponencial

Empleando la forma exponencial; el producto, el cociente y la potencia entera en el conjunto de los complejos, adquieren su expresión más reducida.

Proposición 4.6.6. Sean $z_1 = r e^{i\theta}$, $z_2 = s e^{i\omega}$, se satisfacen:

$$1. z_1 \cdot z_2 = r e^{i\theta} \cdot s e^{i\omega} = rs e^{i(\theta+\omega)}$$

$$3. z_1^n = (r e^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$$

$$2. \frac{z_1}{z_2} = \frac{r}{s} e^{i(\theta-\omega)}$$

$$4. (z_1)^{\frac{1}{n}} = (r e^{i\theta})^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}}$$

4.7. Topología en el campo complejo

Sabemos que el conjunto de los complejos $\mathbb{C}$ conforma estructura de espacio métrico y en particular de espacio euclídeo; al definirse sobre él una distancia de acuerdo con la expresión pitagórica que caracteriza dichos espacios. De este hecho se deduce entonces que en $\mathbb{C}$ puede construirse una estructura topológica, que junto a la característica de cuerpo, permite llegar al desarrollo de los conceptos de continuidad y diferencial.

Dado que $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ y los elementos topológicos para $\mathbb{R}^n$ fueron estudiados, resulta innecesario volver a repetirlos. Sólo mencionamos algunos de ellos.

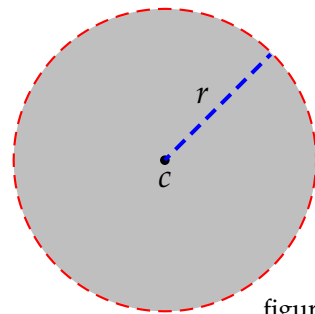


figura 4.2

Definición 4.7.1. En un espacio métrico se define como **bola** de centro c y radio r , cuyo símbolo es $B(c, r)$, al conjunto

$$B(c, r) = \{x / d(x, c) < r, r > 0\}$$

en donde $d(x, c)$ es la distancia del elemento x al elemento c . Figura (4.2).

En particular, en el campo complejo

$$B(c, r) = \{z / |z - c| < r, r > 0\}$$

se llama también **disco**, y desde el punto de vista geométrico representa un círculo de centro en el complejo c y radio r , sin la circunferencia $|z - c| = r$.

Observación. Conviene señalar que en la definición de bola es indispensable que las desigualdades sean estrictas ($r > 0$ y $d(x, c) < r$), porque en caso contrario carecen de sentido las definiciones de puntos interiores, exteriores y fronteras, como así también las definiciones de puntos de adherencia, acumulación y aislados, con todas las consecuencias resultantes.

De la definición de bola se sigue inmediatamente que su centro siempre le pertenece y por lo tanto ella es un conjunto no vacío.

Definición 4.7.2. Se llama **entorno** de un punto c a todo conjunto del espacio métrico $\mathbb{C}$ que contenga una bola de centro c . Se anota $E(c)$. Figura 4.3.

De esta definición se extraen dos consecuencias inmediatas:

- Toda bola $B(c, r)$ es un entorno de c .
- La existencia de un entorno de c es condición necesaria y suficiente de la existencia de una bola de centro c .

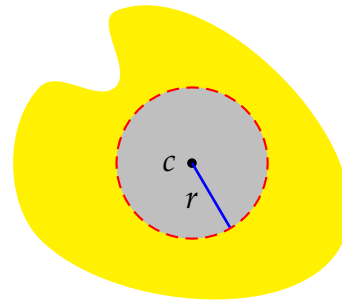


figura 4.3

Definición 4.7.3. Se llama **entorno reducido** de un punto c , en un espacio métrico (en particular $\mathbb{C}$), a todo entorno de c al cual se le excluye el mismo punto c .

Definición 4.7.4.

1. Un conjunto de un espacio métrico se llama **acotado** si existe una bola $B(c, r)$, de radio finito, que lo contenga.
2. Un conjunto cerrado y acotado se denomina **compacto**.
3. Un conjunto $S \subset \mathbb{C}$ se dice **conexo** si no puede ser escrito como la unión de dos conjuntos abiertos S_1 y S_2 no vacíos y disjuntos.
4. Un conjunto abierto y conexo del plano compleja recibe el nombre de **dominio** o **región**.

4.8 Funciones complejas

Geométricamente, la conexidad implica la existencia de una poligonal de un número finito de lados cuyos puntos pertenecen a S y que une z_1 con z_2 en S , para todo $z_1, z_2 \in S$

Ejemplo 4.7.5.

1. $S = \{z/ 1 \leq |z| < 2\}$ no es un conjunto abierto ni cerrado.
2. $S_n = \{z/ |z| \leq 1 - \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}\}$ es una colección de conjuntos cerrados, y su unión infinita

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n = \{z/ |z| < 1\}$$

no es un conjunto cerrado.

3. $S = \{z/ |z| \leq 1\}$ y $T = \{z/ |z| < 1\}$ son conexos.
4. $S = \{z/ |z| < 1\} \cup \{z/ 2 < |z| < 3\}$ no es un dominio pues no es conexo.
5. $S = \{z/ |z - z_0| < r, r > 0\}$ es un dominio.
6. $S = \{z/ a < |z - z_0| < b, r > 0\}$ es un dominio.
7. $S = \{z/ \operatorname{Re}(z) > 0\}$ y $T = \{z/ \operatorname{Re}(z) < 0\}$ son dominios.
8. $S = \{z/ \operatorname{Im}(z) > 0\}$ y $T = \{z/ \operatorname{Im}(z) < 0\}$ son dominios.
9. $S = \{z/ |z - z_0| \leq r\}$ y $T = \{z/ a \leq |z - z_0| \leq b\}$ son conjuntos compactos.
10. El plano complejo no es compacto por que no es un conjunto acotado, aunque sí cerrado.

4.8. Funciones complejas

Conocido el concepto de función de un conjunto A en un conjunto B resulta sencillo reemplazar uno de estos conjuntos, o los dos por el de números complejos para obtener las llamadas funciones complejas, de una variable real, o de una variable compleja. Al respecto:

Definición 4.8.1. Se llama función compleja de una variable real a una aplicación de la forma

$$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

Si miramos a $\mathbb{C}$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, entonces identificamos $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$, con lo cual, una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$ aparece como una función vectorial de variable real

$$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \sim \mathbb{R}^2, x \mapsto F(x) = \omega = f(x) + i g(x)$$

donde f y g son funciones reales, es decir, $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Los conceptos de cálculo que involucran este tipo de funciones, ya estudiados con anterioridad, son los siguientes:

Límite $\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + i \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

Continuidad F es continua en $x_0 \in [a, b] \iff f$ y g son continuas en $x_0 \in [a, b]$

Diferenciación $F'(x_0) = f'(x_0) + i g'(x_0)$

Integración $\int_a^b F(t) dt = \int_a^b f(t) dt + i \int_a^b g(t) dt$

Ejemplo 4.8.2. Sea $F(t) = \frac{1}{t+i}$, entonces

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dt}{t+i} &= \int_0^1 \frac{(t-i) dt}{t^2+1} = \int_0^1 \frac{t dt}{t^2+1} - i \int_0^1 \frac{dt}{t^2+1} \\ &= \left(\frac{1}{2} \ln(1+t^2) - i \operatorname{Arctg} t \right)_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \ln 2 - i \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Definición 4.8.3. Se llama función compleja de variable compleja a una aplicación de la forma

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto f(z) = w$$

Identificando $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$, un número complejo $z \in \mathbb{C}$ estará representado por un par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, con $z = x + iy$. Bajo esta perspectiva se tiene que

$$f : \mathbb{C} \sim \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C} \sim \mathbb{R}^2, \quad z \mapsto f(z) = w = u(x, y) + i v(x, y)$$

donde $u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, tales que $u(z) = \operatorname{Re}[f(z)]$ y $v(z) = \operatorname{Im}[f(z)]$.

Concluimos con esto, que las funciones complejas de variable compleja son funciones vectoriales de campos vectoriales.

4.8.1. Representación gráfica

El análisis geométrico de las funciones de variable compleja requiere de cuatro dimensiones: dos para la variable z y dos para la variable w . Una solución para ello es representar los elementos del dominio de la función sobre un plano (llamado z) y los elementos del rango sobre otro plano (llamado w).

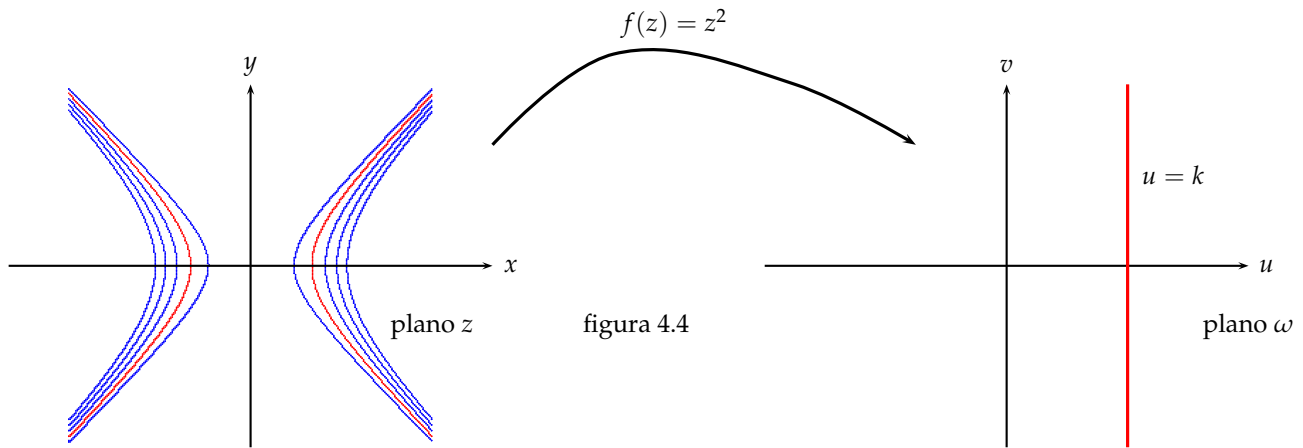
De esta manera puede decirse que una función de variable compleja establece una relación entre un punto (x, y) del plano z y un punto (u, v) del plano w .

Una forma de caracterizar geoméricamente a las funciones de variable compleja es a través de la representación de las transformaciones que produce a curvas y conjuntos en general, de un plano a otro. Esta representación es análoga, pero de una mayor dificultad, a la que hicimos para transformaciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$.

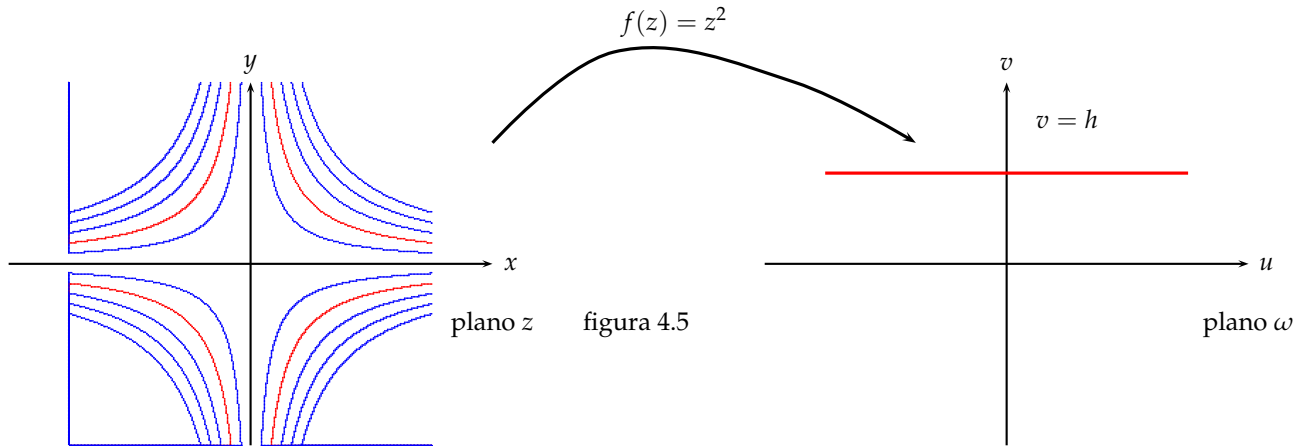
Ejemplo 4.8.4. La transformación $f(z) = z^2$ es tal que

$$\omega = z^2 \implies u + iv = x^2 - y^2 + 2xyi$$

de donde, $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$. Si consideramos una recta paralela al eje imaginario v del plano ω que tiene ecuación $u = k$, con k constante, entonces en el plano z se tiene la ecuación $x^2 - y^2 = k$, que corresponde a una familia de hipérbolas (figura 4.4).



Análogamente, las rectas $v = h$ en el plano ω , corresponden a una familia de hipérbolas en el plano z asintóticas a los planos coordenados (figura 4.5).



Ejemplo 4.8.5. Veamos la misma función $f(z) = z^2$, pero haciendo el siguiente estudio.

Se eligen dos familias de rectas, la primera de paralelas al eje y (familia F_1), y la segunda de paralelas al eje x (familia F_2). La función z^2 transforma las familias F_1 y F_2 del plano z en las familias Γ_1 y Γ_2 , respectivamente, del plano ω , que representan familias de parábolas como se demuestra a continuación.

$$F_1 = \begin{cases} x = k \\ y = y \end{cases} \rightarrow \Gamma_1 : \begin{cases} u = k^2 - y^2 \\ v = 2ky \end{cases} \implies \begin{cases} u = k^2 - \frac{v^2}{4k^2} & , \text{ si } k \neq 0 \\ u = -y^2 \leq 0, \quad v = 0 & , \text{ si } k = 0 \end{cases}$$

$$F_2 = \begin{cases} x = x \\ y = k \end{cases} \rightarrow \Gamma_2 : \begin{cases} u = x^2 - k^2 \\ v = 2kx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \frac{v^2}{4k^2} - k^2 & , \text{ si } k \neq 0 \\ u = y^2 \geq 0, v = 0 & , \text{ si } k = 0 \end{cases}$$

De esta manera, la función z^2 transforma rectángulos del plano z en rectángulos de lados parabólicos en el plano ω . Se mantienen los ángulos salvo en el caso cuando $z = 0$. Este hecho no es casual, es una propiedad general de ciertas funciones complejas que se estudiarán más adelante. Se puede verificar que las familias Γ_1 y Γ_2 son ortogonales.

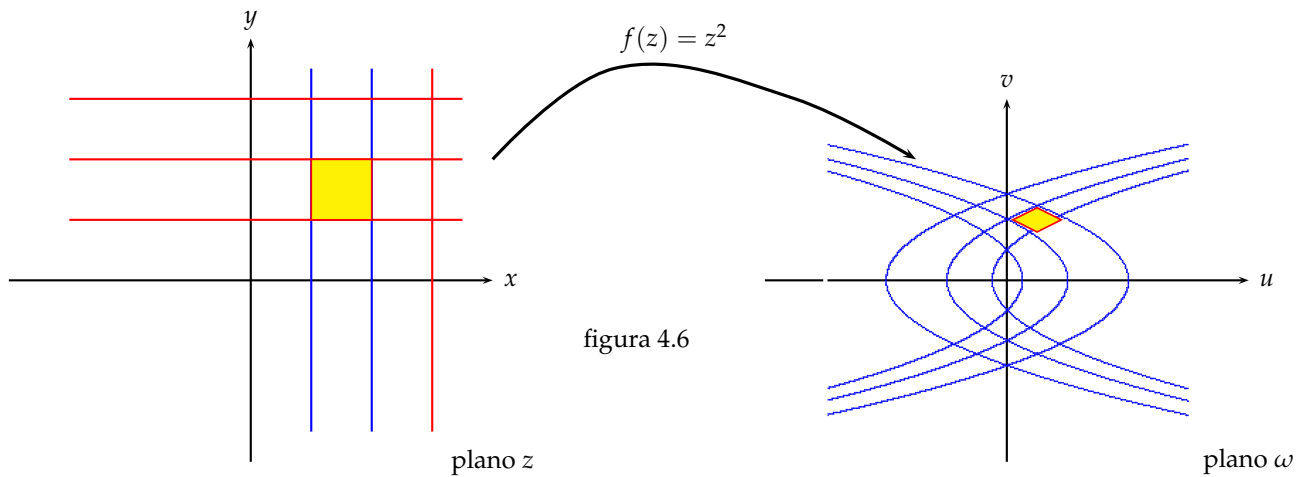


figura 4.6

4.8.2. Funciones trigonométricas e hiperbólicas

Si y es real entonces, de

$$e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y, \quad e^{-iy} = \cos y - i \operatorname{sen} y$$

se deduce que

$$\cos y = \frac{1}{2} (e^{iy} + e^{-iy}), \quad \operatorname{sen} y = \frac{1}{2i} (e^{iy} - e^{-iy})$$

Definición 4.8.6. Para todo $z \in \mathbb{C}$ se define

$$\cos z = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}), \quad \operatorname{sen} z = \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz})$$

Si z es real $\cos z$ y $\operatorname{sen} z$ se reducen a las correspondientes funciones reales.

Proposición 4.8.7. Para todo $z, w \in \mathbb{C}$ se tiene

1. $\cos(-z) = \cos(z), \operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen}(z)$.
2. $\cos(z + w) = \cos(z) \cos(w) - \operatorname{sen}(z) \operatorname{sen}(w)$.

4.8 Funciones complejas

3. $\operatorname{sen}(z + w) = \operatorname{sen}(z) \cos(w) + \cos(z) \operatorname{sen}(w)$.
4. $\cos(z) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + z\right)$.
5. $\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = 1$.
6. $\overline{\cos(z)} = \cos(\bar{z})$, $\overline{\operatorname{sen}(z)} = \operatorname{sen}(\bar{z})$.
7. $\operatorname{sen}(z) = 0 \iff z = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).
8. $\cos(z) = 0 \iff z = (2k - 1)\frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$).
9. $\cos(z)$ y $\operatorname{sen}(z)$ son funciones periódicas de período $2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Las restantes funciones trigonométricas se definen como sigue:

- $\operatorname{tg}(z) = \frac{\operatorname{sen}(z)}{\cos(z)}$, $\sec(z) = \frac{1}{\cos(z)}$ ($z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$).
- $\operatorname{ctg}(z) = \frac{\cos(z)}{\operatorname{sen}(z)} = \frac{1}{\operatorname{tg}(z)}$, $\operatorname{csc}(z) = \frac{1}{\operatorname{sen}(z)}$ ($z \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$).

Definición 4.8.8. Para todo $z \in \mathbb{C}$ se define

$$\cosh(z) = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}), \quad \sinh(z) = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$$

Las restantes funciones hiperbólicas se definen como sigue:

- $\operatorname{tgh}(z) = \frac{\sinh(z)}{\cosh(z)}$, $\operatorname{sech}(z) = \frac{1}{\cosh(z)}$.
- $\operatorname{ctgh}(z) = \frac{\cosh(z)}{\sinh(z)} = \frac{1}{\operatorname{tgh}(z)}$, $\operatorname{csch}(z) = \frac{1}{\sinh(z)}$.

Proposición 4.8.9. Las funciones hiperbólicas satisfacen:

- $\cosh(z)$ y $\sinh(z)$ son periódicas de periodo $2\pi i$.
- $\cosh(z) = \cos(iz)$, $\sinh(z) = -i \operatorname{sen}(iz)$
- $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$.
- $\operatorname{sen}(z) = \operatorname{sen}(x + iy) = \operatorname{sen}(x) \cos(iy) + \cos(x) \operatorname{sen}(iy) = \operatorname{sen}(x) \cosh(y) + i \cos(x) \sinh(y)$.
- $\sinh(z) = 0 \iff z = n\pi i$.
- $\cosh(z) = 0 \iff z = (2n - 1)\frac{\pi}{2}i$.
- $\sinh(-z) = -\sinh(z)$, $\cosh(-z) = \cosh(z)$.
- $\sinh(\bar{z}) = \overline{\sinh(z)}$, $\cosh(\bar{z}) = \overline{\cosh(z)}$.
- $\sinh(z_1 \pm z_2) = \sinh(z_1) \cosh(z_2) \pm \cosh(z_1) \sinh(z_2)$.
- $\cosh(z_1 \pm z_2) = \cosh(z_1) \cosh(z_2) \pm \sinh(z_1) \sinh(z_2)$.
- $\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$.

4.8.3. Función Logaritmo

En $\mathbb{R}$, la aplicación $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que $t \mapsto e^t$ es biyectiva. Su inversa es la función

$$\log : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \text{ tal que } t \mapsto \log(t)$$

Por definición:

$$\log x = y \iff x = e^y, x > 0$$

En $\mathbb{C}$, la función $\exp$ no es invertible al no ser inyectiva (por ser periódica). De hecho, se tiene:

$$e^w = z \implies z \neq 0$$

de lo cual, si $w = u + iv$, entonces

$$e^u (\cos v + i \sen v) = z$$

de lo cual se tiene que

$$\begin{cases} e^u = |z|, u = \log |z| \\ v = \arg z \pmod{2\pi} \end{cases}$$

se concluye que

$$w = \log |z| + i \arg z \pmod{2\pi i}$$

Si $z \neq 0$, la ecuación $e^w = z$ tiene infinitas soluciones, que difieren entre sí en múltiplos enteros de $2\pi i$. Si I es un intervalo semiabierto de longitud 2π , podemos escribir

$$z \neq 0, e^w = z \iff w = \log |z| + i \arg_I z + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$$

A cada uno de estos (infinitos) w se les denomina logaritmos de $z \neq 0$.

Ejemplo 4.8.10. $e^w = -2i \iff w = \log 2 - i\frac{\pi}{2} + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$

Definición 4.8.11.

- Se define la **determinación I del logaritmo** mediante

$$\log_I z = \log |z| + i \arg_I z, \forall z \neq 0$$

- La **determinación principal del logaritmo** se define por

$$\text{Log} = \log_{(-\pi, \pi]}$$

Ejemplo 4.8.12.

- $\text{Log}(-2i) = \log 2 - i\frac{\pi}{2}$
- $\text{Log}(-1) = i\pi$

4.8 Funciones complejas

$$3. \operatorname{Log}(1-i) = \frac{1}{2} \log 2 - i\frac{\pi}{4}$$

$$4. \operatorname{Log}(i) = \frac{\pi}{2}i, \text{ pues,}$$

$$z = 0 + 1 \cdot i \implies |z| = 1 \implies \operatorname{Log}|z| = 0$$

$$\text{Además, } \operatorname{tg}\theta = \frac{1}{0} \implies \theta = \frac{\pi}{2}.$$

$$5. \operatorname{Log}(-1+i) = \frac{1}{2} \log 2 + i\frac{3\pi}{4}$$

$$6. z_1 = i, z_2 = 1-i \implies z_1 \cdot z_2 = 1+i. \text{ Luego,}$$

$$\operatorname{Log}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Log}(1+i) = \log \sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}$$

Por otra parte,

$$\operatorname{Log}(z_1) + \operatorname{Log}(z_2) = \operatorname{Log}(i) + \operatorname{Log}(1-i) = i\frac{\pi}{2} + \log \sqrt{2} + i\frac{7\pi}{4} = \log \sqrt{2} + i\frac{9\pi}{4}$$

Se observa que son diferentes, pues están en ramas diferentes.

Observación. Si establecemos que $A = B \pmod{2\pi i}$, entonces se conserva la validez de las propiedades habituales:

- $\log(z_1 z_2) = \log(z_1) + \log(z_2) \pmod{2\pi i}$
- $\log\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \log(z_1) - \log(z_2) \pmod{2\pi i}$

Proposición 4.8.13.

1. Para todo $z \neq 0$, $e^{\log_I z} = z$.
2. $\log_I(e^w) = w \pmod{2\pi i}$. En particular, $\log_I(e^w) = w \iff \operatorname{Im}(w) \in I$.
3. $\log_I : \mathbb{C} - \{0\} \rightarrow \{s \in \mathbb{C} / \operatorname{Im}(s) \in I\}$ es biyectiva.
4. $z, w \neq 0 \implies \log_I(z \cdot w) = \log_I z + \log_I w \pmod{2\pi i}$.

Demostración.

1. $z \neq 0 \implies e^{\log_I z} = e^{\log|z| + i\arg_I z} = e^{\log|z|} e^{i\arg_I z} = |z| e^{i\arg_I z} = z$.
2. $w = u + iv \implies \log_I(e^w) = \log(e^u) + i\arg_I(e^w) = u + iv \pmod{2\pi i}$, ya que $\arg_I(e^w) = \operatorname{Im}(w) \pmod{2\pi i}$.

Además, $\log_I(e^w) = w \implies \operatorname{Im}(w) \in I$ porque $\operatorname{Im}(\log_I z) \in I$ para todo $z \neq 0$. Recíprocamente, si $\operatorname{Im}(w) \in I$ entonces $\log_I(e^w) = w$ porque ambos miembros son iguales módulo $2\pi i$ y sus partes imaginarias pertenecen a I .

3. Hay que probar que para todo w con $\text{Im}(w) \in I$ existe un único $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ tal que $\log_I z = w$. Esto es cierto por los apartados anteriores, siendo $z = e^w$.
4. Esta propiedad se prueba como sigue:

$$\begin{aligned}
 \log_I(zw) &= \log |zw| + i \arg_I(zw) \\
 &= \log(|z| \cdot |w|) + i(\arg_I z + \arg_I w) \pmod{2\pi i} \\
 &= \log |z| + \log |w| + i(\arg_I z + \arg_I w) \pmod{2\pi i} \\
 &= (\log |z| + i \arg_I z) + (\log |w| + i \arg_I w) \pmod{2\pi i} \\
 &= \log_I z + \log_I w \pmod{2\pi i}
 \end{aligned}$$

Observación. En general, $\text{Log}(zw) \neq \text{Log } z + \text{Log } w$. Por ejemplo,

$$\text{Log}(-i) = -i\frac{\pi}{2} \neq \text{Log}(-1) + \text{Log}(i) = i\pi + i\frac{\pi}{2} = 3\frac{\pi i}{2}$$

4.8.4. Potencias complejas

Si $z, w \in \mathbb{C}$ y $z \neq 0$, definimos

$$z^w = e^{w \log z} \text{ donde } \log z = \log_I z + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$$

Por tanto, en general z^w denota un conjunto de números complejos:

$$z^w = e^{2kw\pi i} e^{w \log_I z}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Más concretamente, se tiene:

1. $w \in \mathbb{Z} \implies z^w$ tiene un valor único que es $\overbrace{z \cdot z \cdots z}^{w \text{ veces}}$
2. Si $w = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, con $p \in \mathbb{Z}$ y $1 < q \in \mathbb{N}$ primos entre sí, entonces $z^w = z^{p/q}$ toma exactamente q valores (las q raíces q -ésimas de a^p).
3. En los demás casos ($w \in \mathbb{C} - \mathbb{Q}$), z^w tiene infinitos valores que difieren entre sí en un factor de la forma $e^{2kw\pi i}$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Ejemplo 4.8.14.

1. $(-i)^1 = e^{i \log(-i)} = e^{i(\frac{3\pi}{2})} = e^{-\frac{3\pi}{2}}$.
2. $(-1)^{2i} = e^{2i \log(-1)} = e^{2i(i\pi)} = e^{-2\pi}$.

4.9. Límite

Definición 4.9.1. Sea $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ función definida en todo punto del dominio D , excepto tal vez en $z_0 \in D$. Decimos que L es el límite de f cuando $z \rightarrow z_0$, si y sólo si dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que

$$0 < |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - L| < \epsilon$$

Notación: $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L$

Ejemplo 4.9.2. Usando la definición probemos que $\lim_{z \rightarrow i} \frac{z(z^2 + (2-i)z - 2i)}{z-i} = 2i - 1$

La definición establece que

$$|f(z) - L| = \left| \frac{z(z^2 + (2-i)z - 2i)}{z-i} - 2i + 1 \right| = \left| \frac{z^2(z-i) + 2z(z-i)}{z-i} - 2i + 1 \right| = |z^2 + 2z - 2i + 1|$$

de donde

$$|f(z) - L| = |z - i| |z + 2 + i| < \epsilon$$

Tomando $\delta = 1$ para acotar, entonces

$$|z - i| < 1 \implies |z| - |i| < |z - i| < 1 \implies |z| < 2$$

En consecuencia,

$$|f(z) - L| < 5|z - i| < 5\delta = \epsilon \implies \delta = \frac{\epsilon}{5}$$

Por tanto, considerando $\delta = \min\{1, \frac{\epsilon}{5}\}$ se satisface la definición, y con ello se ha probado que el límite de la función es el indicado.

4.9.1. Continuidad

Definición 4.9.3. Una función f definida en el dominio D del plano complejo es continua en el punto $z_0 \in D$, si y sólo si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$

En términos de δ, ϵ la definición de continuidad toma la forma

$$f \text{ continua en } z_0 \iff (\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(0 < |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - f(z_0)| < \epsilon)$$

Los resultados siguientes confirman que el álgebra de límites y la continuidad se trasladan a $\mathbb{C}$ en forma natural

Proposición 4.9.4. Sean $f, g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ funciones tales que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0, \quad y \quad \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = w_1$$

entonces

$$1. \lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) + g(z)] = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) + \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = w_0 + w_1$$

$$2. \lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) \cdot g(z)] = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = w_0 w_1$$

$$3. \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)}{\lim_{z \rightarrow z_0} g(z)} = \frac{w_0}{w_1}, w_1 \neq 0.$$

Teorema 4.9.5. Si $f, g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ son funciones continuas en D , entonces $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ y $\frac{f}{g}$ son funciones continuas. El cociente lo es en todos los puntos en los que $g(z) \neq 0$.

El siguiente resultado, que es análogo al de campos vectoriales, es de gran utilidad para determinar la continuidad de una función compleja

Teorema 4.9.6. Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $f(z) = u(z) + iv(z)$, entonces f es continua en z_0 si y sólo si u y v son continuas en z_0 .

Demostración.

→ Suponemos que f es continua en z_0 , entonces, de acuerdo con la definición, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - f(z_0)| < \epsilon$$

vamos a probar que u y v son continuas:

$$|u(z) - u(z_0)| = |\operatorname{Re}[f(z) - f(z_0)]| \leq |f(z) - f(z_0)| < \epsilon$$

se hizo uso del hecho que $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$. De esta manera u es continua en z_0 . Análogamente se hace para v

$$|v(z) - v(z_0)| = |\operatorname{Im}[f(z) - f(z_0)]| \leq |f(z) - f(z_0)| < \epsilon$$

se sigue que v es continua.

← Ahora suponemos que u y v son continuas en z_0 , entonces

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta_1 > 0)(0 < |z - z_0| < \delta_1 \implies |u(z) - u(z_0)| < \frac{\epsilon}{2})$$

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta_2 > 0)(0 < |z - z_0| < \delta_2 \implies |v(z) - v(z_0)| < \frac{\epsilon}{2})$$

Luego,

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &= |u(z) + iv(z) - u(z_0) - iv(z_0)| \\ &\leq |u(z) - u(z_0)| + |i| |v(z) - v(z_0)| < \epsilon \end{aligned}$$

válido para $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Así, f es continua en z_0 .

Definición 4.9.7. Sean f y g funciones complejas tales que $\operatorname{rec}(g) \subset \operatorname{dom}(f)$, entonces la función compuesta $h = f \circ g$ es, por definición, la función $h(z) = f(g(z))$, $z \in \operatorname{dom}(g)$.

4.9 Límite

Teorema 4.9.8. Si la función g es continua en z_0 y la función f lo es en $g(z_0)$, entonces la función compuesta $h = f \circ g$ es continua en z_0 . esto es,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(g(z)) = f(g(z_0))$$

Ejemplo 4.9.9.

1. La función constante $f(z) = k$ es continua para todo $z \in \mathbb{C}$
2. La función idéntica $f(z) = z$ es continua en $\mathbb{C}$
3. Todo polinomio de la forma

$$P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_nz^n$$

es continuo

4. Las funciones racionales $\frac{P(z)}{Q(z)}$ son continuas en todos los puntos donde $Q(z) \neq 0$.

4.9.2. Propiedades de las funciones continuas

- Si K es un conjunto compacto en $\mathbb{C}$ y f es una función continua, entonces $f(K)$ es un conjunto compacto.
- Si S es un conjunto conexo en $\mathbb{C}$ y f es una función continua, entonces $f(S)$ es un conjunto conexo.

Ejemplo 4.9.10. La función $f(z) = \frac{z^2}{1+|z|^2}$ es claramente continua en todo $\mathbb{C}$ que es un conjunto conexo. Por tanto, $\text{rec}(f)$ es un conjunto conexo, que vamos a determinar.

$$z = x + iy \implies z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

Luego,

$$f(z) = \frac{z^2}{1+|z|^2} = \frac{x^2 - y^2 + 2xyi}{1 + x^2 + y^2} = w = u + iv$$

de donde

$$u = \frac{x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2}, \quad v = \frac{2xy}{1 + x^2 + y^2}$$

elevando al cuadrado y sumando

$$u^2 + v^2 = \left(\frac{x^2 + y^2}{1 + x^2 + y^2} \right)^2 < 1$$

como $w = u + iv \implies |w|^2 = u^2 + v^2$, entonces

$$\text{rec}(f) = \{w / |w| < 1\}$$

4.10. Diferenciación

La definición de derivada para una función $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, de alguna manera resultará familiar, sin embargo, algunos ejemplos pondrán de manifiesto diferencias fundamentales entre derivar funciones reales de variable real y funciones complejas de variable compleja.

Definición 4.10.1. $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es **derivable** en $a \in D$ si existe

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = f'(a)$$

Esta definición de derivada también puede darse, en un punto cualquiera, en la forma

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = f'(z)$$

Una función f se dice **analítica** u **holomorfa** en D si es derivable en todos los puntos de D . En particular, f es analítica en a si es derivable en un entorno de a .

Ejemplo 4.10.2. Es sencillo verificar que $f(z) = k \implies f'(z) = 0$ y que $f(z) = z \implies f'(z) = 1$

Ejemplo 4.10.3. Sea $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $z \mapsto z^2$. Si $h \in \mathbb{C} - \{0\}$, entonces

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(z+h)^2 - z^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2z + h)$$

Resulta, como se espera, que

$$f'(z) = 2z$$

Ejemplo 4.10.4. Sea $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(z) = |z|^2$. Se tiene:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{h} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{|z|^2}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z \cdot \bar{z}}{z}$$

Al simplificar,

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{h} = \lim_{z \rightarrow 0} \bar{z} = 0$$

Así, esta función es sólo diferenciable en $z = 0$. Para probar que no es diferenciable en otro punto, consideremos $z_0 \neq 0$. Se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} &= \frac{|z_0+h|^2 - |z_0|^2}{h} = \frac{(z_0+h)(\overline{z_0+h}) - z_0\bar{z}_0}{h} \\ &= \frac{h\bar{z}_0 + \bar{h}z_0 + |h|^2}{h} = \bar{z}_0 + \frac{\bar{h}}{h}z_0 + \bar{h} \end{aligned}$$

4.10 Diferenciación

Si h es real y $h \rightarrow 0$, entonces

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \bar{z}_0 + z_0$$

Si $h = ki$, con k real y tal que $k \rightarrow 0$, entonces

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \bar{z}_0 - z_0$$

Es claro que, para $z_0 \neq 0$, es $\bar{z}_0 + z_0 \neq \bar{z}_0 - z_0$. De esta manera, f no es diferenciable en $z_0 \neq 0$

La importancia de este hecho es que pone de manifiesto la diferencia entre la diferenciación compleja y la diferenciación en sentido real. Además, exhibe una función que posee derivada en un punto aislado.

A continuación se formulan las reglas de diferenciación compleja, cuya demostración omitimos por ser análogas a las del caso real.

Proposición 4.10.5.

1. $h(z) = f(z) + g(z) \implies h'(z) = f'(z) + g'(z)$
2. $h(z) = f(z) - g(z) \implies h'(z) = f'(z) - g'(z)$
3. $h(z) = f(z) \cdot g(z) \implies h'(z) = f'(z) \cdot g(z) + f(z) \cdot g'(z)$
4. $h(z) = \frac{f(z)}{g(z)} \implies h'(z) = \frac{f'(z) \cdot g(z) - f(z) \cdot g'(z)}{g^2(z)}$
5. $h(z) = (g \circ f)(z) \implies h'(z) = g'(f(z)) \cdot f'(z)$

Teorema 4.10.6. Si f es diferenciable en z_0 , entonces f es continua en z_0

Demostración. Debemos probar que $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$. Para ello escribimos la equivalencia

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) - f(0)] = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \cdot (z - z_0)$$

Haciendo uso de la diferenciabilidad de f

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) - f(0)] = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \cdot f'(z_0) = 0$$

de modo que, efectivamente,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

lo que prueba el teorema.

Al igual que en funciones reales, la continuidad no implica diferenciabilidad, en este caso $f(z) = |z|^2$ es continua en todo $\mathbb{C}$, sin embargo, no es diferenciable en $z_0 \neq 0$.

4.10.1. Ecuaciones de Cauchy - Riemann

Las reglas formales de diferenciación de las funciones complejas son prácticamente las mismas que las funciones reales, sin embargo, en la práctica existe una gran diferencia, como por ejemplo, que en las funciones reales la mayoría de las funciones que se usan en las aplicaciones tiene derivada. En cambio, en el plano complejo la diferenciación sólo se da en casos excepcionales, esto se explica por el hecho de que las funciones complejas pueden mirarse como funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$, esto es,

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \text{ tal que } z \mapsto f(z) = w$$

donde $z = x + iy, w = u + iv$, con x, y, u, v reales. De aquí que se tenga la siguiente relación funcional:

$$\begin{cases} u &= \phi(x, y) \\ v &= \Phi(x, y) \end{cases}$$

Inversamente, es posible tomar dos funciones reales u y v que al combinarlas formen la función compleja $f(z) = u + iv$. Existe, sin embargo, la posibilidad de que formen una par mal relacionado y por consiguiente, no se podrá diferenciar la función resultante. Esto significa que existen pocas oportunidades para la diferenciación.

Teorema 4.10.7. Una condición **necesaria** para que la función $f(z) = u + iv$ sea analítica en un dominio D es que:

1. existan u_x, u_y, v_x, v_y
2. se verifiquen, para todo $(x, y) \in D$, las llamadas ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$u_x = v_y, \quad v_x = -u_y$$

Dicho de otra forma: f diferenciable implica la afirmaciones 1 y 2.

Demostración. Sea $z_0 = x_0 + iy_0$ en D . Como $f'(z_0)$ existe, el cociente

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

tiende a un límite bien definido cuando $z \rightarrow z_0$, a través de cualquier conjunto de puntos. Veamos esto:

- Nos aproximamos primero a z_0 a través de $y = y_0$.

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{u(x, y) + iv(x, y) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{(x - x_0) + i(y - y_0)} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y=y_0}} \frac{u(x, y) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} + i \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y=y_0}} \frac{v(x, y) - v(x_0, y_0)}{x - x_0} \\ &= u_x + i v_x \end{aligned}$$

- Nos aproximamos ahora a z_0 a través de $x = x_0$.

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{u(x,y) + iv(x,y) - u(x_0,y_0) - iv(x_0,y_0)}{(x - x_0) + i(y - y_0)} \\ &= \lim_{\substack{y \rightarrow y_0 \\ x = x_0}} \frac{u(x,y) - u(x_0,y_0)}{i(y - y_0)} + i \lim_{\substack{y \rightarrow y_0 \\ x = x_0}} \frac{v(x,y) - v(x_0,y_0)}{i(y - y_0)} \\ &= -i u_y + v_y \end{aligned}$$

Por la unicidad de la derivada:

$$u_x + i v_x = v_y - i u_y \implies u_x = v_y \quad y \quad v_x = -u_y$$

A continuación, ponemos de manifiesto que la condición es necesaria:

Ejemplo 4.10.8. Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$f(z) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} + i \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

La función f satisface las condiciones del teorema 8.10.7. En efecto,

$$\begin{aligned} u_x(0,0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{u(x,0) - u(0,0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 0}{x} = 1 \\ u_y(0,0) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{u(0,y) - u(0,0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y - 0}{y} = -1 \\ v_x(0,0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{v(x,0) - v(0,0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 0}{x} = 1 \\ v_y(0,0) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{v(0,y) - u(0,0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y - 0}{y} = 1 \end{aligned}$$

Se verifica que: existen u_x , u_y , v_x y v_y . Además, que satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann; $u_x = v_y$ y $u_y = -v_x$.

Probemos que, sin embargo, f' no existe en el origen:

- Consideremos, en primer lugar, el camino $y = x$, entonces

$$f(z) = u + iv = 0 + i \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = ix$$

de donde,

$$f'(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{ix}{x + ix} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$$

- Ahora elegimos el camino $y = 0$, entonces

$$f(z) = u + iv = x + i x$$

de donde,

$$f'(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{x + ix}{x} = 1 + i$$

se sigue que $f'(0)$ no existe, de modo que f no es analítica.

Si al teorema 4.10.7 le agregamos que las derivadas parciales sean continuas, entonces tenemos el siguiente resultado de condiciones necesarias y suficientes:

Teorema 4.10.9. Si la función $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, tal que $f(z) = u + iv$ satisface:

1. existen u_x, u_y, v_x, v_y
2. son continuas u_x, u_y, v_x, v_y
3. se verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$u_x = v_y, \quad v_x = -u_y$$

entonces $f'(z)$ existe para todo $z \in D$ y se tiene que

$$f'(z) = u_x + i v_x = v_y - i u_y$$

Ejemplo 4.10.10. Probemos $f(z) = z^3$ es analítica en todo el plano complejo

Para $z = x + iy$ escribimos la función $f(z)$ como sigue:

$$f(z) = \begin{cases} u = x^3 - 3xy^2 \\ v = 3x^2y - y^3 \end{cases}$$

de esto se obtiene:

$$u_x = 3x^2 - 3y^2, \quad u_y = -6xy, \quad v_x = 6xy, \quad v_y = 3x^2 - 3y^2$$

de donde, las condiciones de Cauchy-Riemann están satisfechas, y las funciones u y v son de clase ζ^1 . En consecuencia, tenemos que f es analítica en todo el plano complejo.

Ejemplo 4.10.11. La función $f(z) = |z|^2$ no es analítica en ningún dominio

Para verlo, tenemos que

$$|z|^2 = x^2 + y^2 \implies u = x^2 + y^2, v = 0$$

Por tanto,

$$u_x = 2x, \quad v_x = 0, \quad u_y = 2y, \quad v_y = 0$$

Se concluye que las ecuaciones de Cauchy-Riemann no se satisfacen en ningún punto $z \neq 0$, de manera que la función no es analítica en ningún dominio (abierto y conexo).

Definición 4.10.12. Sea $g : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Se dice que g es **armónica** en el dominio D si existen g_{xx} y g_{yy} , son continuas y satisfacen

$$g_{xx} + g_{yy} = 0, \quad \forall (x, y) \in D$$

Teorema 4.10.13. Si $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, con $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es analítica en D , entonces u y v son armónicas en D .

Demostración.

La función f analítica implica la existencia y continuidad de las derivadas: u_x, u_y, v_x, v_y y el cumplimiento de las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ v_x = -u_y \end{cases}$$

Derivando la primera de estas ecuaciones respecto de x y la segunda respecto de y , al sumarlas se obtiene

$$\begin{cases} u_{xx} = v_{xy} \\ v_{xy} = -u_{yy} \end{cases} \implies u_{xx} + u_{yy} = 0$$

de donde se sigue que u es armónica. Para v el procedimiento es análogo.

Definición 4.10.14. Si u y v son funciones armónicas en un dominio D y si la función $f(z) = u + iv$ es analítica en D , entonces u y v reciben el nombre de **armónicas conjugadas**.

Ejemplo 4.10.15. Sea $u(x, y) = e^x \cos y$, vamos a encontrar la función conjugada de u para construir la función analítica correspondiente.

En primer lugar, verifiquemos que u es armónica

$$u(x, y) = e^x \cos y \implies u_x = e^x \cos y \implies u_{xx} = e^x \cos y$$

$$u(x, y) = e^x \cos y \implies u_y = -e^x \sin y \implies u_{yy} = -e^x \cos y$$

Al sumar,

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad \text{armónica}$$

Ahora nos preocupamos de $f(z) = u + iv = e^x \cos y + iv(x, y)$, que debe ser analítica. Esto significa que debe satisfacer las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Tenemos:

$$u_x = v_y \implies e^x \cos y = v_y \implies v = \int e^x \cos y \, dy + \lambda(x)$$

$$v_x = -u_y \implies e^x \sin y = v_x$$

De esta manera,

$$v = \int e^x \cos y \, dy + \lambda(x) \implies v = e^x \operatorname{sen} y + \lambda(x)$$

derivando respecto de x

$$v_x = e^x \operatorname{sen} y + \lambda'(x) \implies e^x \operatorname{sen} y = e^x \operatorname{sen} y + \lambda'(x) \implies \lambda'(x) = 0$$

siguiéndose que $\lambda(x) = c$. Por tanto,

$$v(x, y) = e^x \operatorname{sen} y + c$$

En consecuencia,

$$f(z) = e^x \cos y + i(e^x \operatorname{sen} y + c)$$

es la función analítica buscada.

4.10.2. Interpretación geométrica de la derivada

Sabemos que una función compleja de variable compleja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es equivalente a una función vectorial $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, por tanto, su representación puede hacerse como una transformación de un plano sobre otro.

Si una función compleja es diferenciable, entonces debe satisfacer las ecuaciones de Cauchy-Riemann, lo que esto geométricamente significa, y la diferencia con una función compleja no diferenciable es lo que a continuación pasamos a explicar.

Si $w = f(z)$ es una función diferenciable, entonces $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$ existe, independiente de la forma como Δz tiene a cero. Comparando los incrementos $\Delta_1 z$ y $\Delta_2 z$ con los correspondientes incrementos Δw_1 y Δw_2 tenemos:

Los puntos $z, z + \Delta_1 z, z + \Delta_2 z$, del plano z se aplican por f sobre los siguientes puntos del plano $w, w + \Delta_1 w, w + \Delta_2 w$, respectivamente. Esto equivale a tener:

$$f(z) = w, \quad f(z + \Delta_1 z) = w + \Delta_1 w, \quad f(z + \Delta_2 z) = w + \Delta_2 w$$

Como f' existe se tiene

$$\lim_{\Delta_1 z \rightarrow 0} \frac{\Delta_1 w}{\Delta_1 z} = \lim_{\Delta_2 z \rightarrow 0} \frac{\Delta_2 w}{\Delta_2 z} = f'(z)$$

Si $f'(z) \neq 0$, entonces

$$\lim_{\substack{\Delta_1 z \rightarrow 0 \\ \Delta_2 z \rightarrow 0}} \frac{\Delta_1 w \Delta_2 z}{\Delta_1 z \Delta_2 w} = \frac{f'(z)}{f'(z)} = 1$$

de lo cual

$$\Delta_1 w \Delta_2 z \sim \Delta_1 z \Delta_2 w$$

O bien,

$$\frac{\Delta_2 z}{\Delta_1 z} \sim \frac{\Delta_2 w}{\Delta_1 w}$$

4.10 Diferenciación

Esto se cumple siempre que $\Delta_1 z$ y $\Delta_2 z$ tiendan a cero.

Esta última ecuación compleja equivale a las dos siguientes ecuaciones reales:

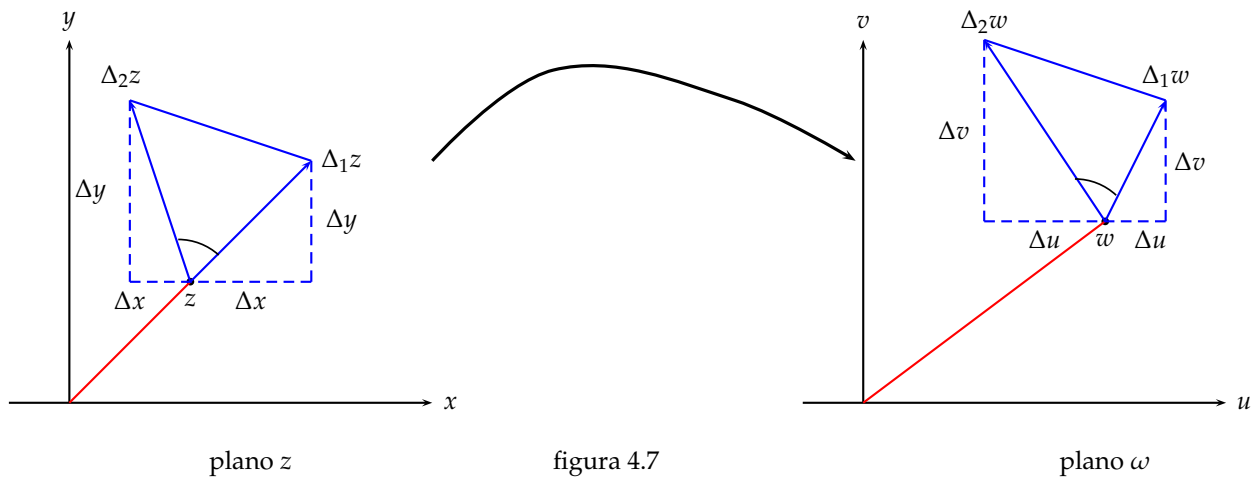
$$\left| \frac{\Delta_2 z}{\Delta_1 z} \right| \sim \left| \frac{\Delta_2 w}{\Delta_1 w} \right| \quad (4.2)$$

$$\text{Arg} \left(\frac{\Delta_2 z}{\Delta_1 z} \right) \sim \text{Arg} \left(\frac{\Delta_2 w}{\Delta_1 w} \right) \quad (4.3)$$

lo que es evidente en razón de que dos complejos z_1 y z_2 son iguales si y sólo si:

$$|z_1| = |z_2| \quad \text{y} \quad \text{Arg}(z_1) = \text{Arg}(z_2)$$

Geométricamente se tiene lo siguiente:



El triángulo en el plano z de vértices z , $z + \Delta_1 z$, $z + \Delta_2 z$ y el correspondiente triángulo en el plano w de vértices w , $w + \Delta_1 w$, $w + \Delta_2 w$, tienen, de acuerdo con la ecuación 8.3

$$\angle z = \angle w$$

tanto en magnitud como en sentido.

La ecuación 4.2 dice que los lados correspondientes de ambos triángulos son proporcionales, luego, según las ecuaciones 4.2 y 4.3 son semejantes.

Conclusión: Si f es diferenciable y $f' \neq 0$, entonces los triángulos correspondientes tienden a ser semejantes cuando sus dimensiones tienden a cero. Esto es, si la función representada por la aplicación es diferenciable, entonces las partes infinitesimales que se han transformado de un plano en otro son semejantes, cuando $\frac{dw}{dz} \neq 0$.

Definición 4.10.16. Una transformación en la cual las partes infinitesimales son de la misma forma se llama **conforme**.

Sólo de una función diferenciable se obtiene una transformación conforme, que es lo que distingue a las funciones que son diferenciables de las que no lo son.

4.10.3. Interpretación física de la derivada

Sean $w = f(z)$, (x, y) las coordenadas de z y (u, v) las coordenadas de $\bar{w}$. Esto es:

$$\begin{aligned} z &= x + iy \\ \bar{w} &= u + iv \\ w &= u - iv \end{aligned}$$

Ahora, $w = f(z) \implies f(z) = u - iv$.

Si f es diferenciable, entonces se satisface

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{i} \frac{\partial w}{\partial y}$$

En efecto.

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \text{y} \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} - i \frac{\partial v}{\partial y} \quad (4.4)$$

de aquí que se tenga

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

como $w = u + i(-v)$, entonces las condiciones de Cauchy-Riemann que se deben cumplir son:

$$u_x = -v_y, \quad -v_x = -u_y$$

Luego,

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{i} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - i \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{1}{i} \frac{\partial w}{\partial y}$$

como se afirmó.

A partir de este resultado y usando la ecuación (4.4) se sigue que

$$\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{1}{i} \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \implies \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{i} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - i \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0$$

Al separar las partes real e imaginaria

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

estas ecuaciones expresan que la función representada por nuestro campo vectorial es diferenciable.

- Si el campo vectorial bidimensional es un campo de flujo y el vector $\bar{w}$ es la velocidad o intensidad de la corriente en el punto z , entonces la expresión

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

es la **divergencia** del vector $\bar{w}$. Como esta divergencia es igual a cero (ecuación 4.5), entonces el punto z en cuestión no es fuente ni sumidero. La divergencia está midiendo la emanación o flujo de salida por unidad de volumen en $V(z, \epsilon)$.

Afirmamos entonces que la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.5)$$

caracteriza un campo sin fuentes.

- Si el campo es de fuerzas y el vector $\bar{w}$ es una fuerza, la intensidad del campo en el punto z , entonces la expresión

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

es el **rotacional** del vector $\bar{w}$. Como él mide el trabajo por unidad de área, y como él se anula, entonces el campo es **irrotacional**. Así la ecuación

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (4.6)$$

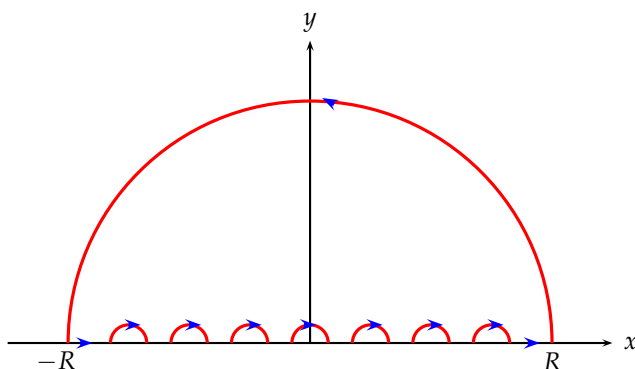
caracteriza un campo vectorial irrotacional.

Conclusión: Una función compleja diferenciable se representa por un campo irrotacional sin fuentes. Una función f no diferenciable no tiene esta representación.

El que carece de entendimiento
menosprecia a su prójimo;
Más el hombre prudente calla.

CAPÍTULO 5

INTEGRACION
COMPLEJA



5.1. Integración compleja

La integración sobre caminos fue el instrumento principal del que se sirvió Cauchy para crear la teoría de funciones analíticas de variable compleja, estableciendo lo que actualmente suele denominarse “teoría de Cauchy”, para distinguirlo de los enfoques posteriores de Riemann (con una visión más geométrica) y de Weierstrass (basado en los desarrollos locales en serie de potencias). Gracias a la representación (bajo ciertas condiciones) de una función holomorfa mediante una integral dependiente de un parámetro, Cauchy logró probar que, en $\mathbb{C}$, las nociones de holomorfía y analiticidad son las mismas, culminando su obra con lo que él denominó “cálculo de residuos”. De todo esto nos ocuparemos más adelante.

En el proceso de integración en el campo complejo, el teorema de Cauchy es el resultado principal y uno de los más importantes en la teoría de las funciones analíticas. Establece que si una función es holomorfa en un dominio simplemente conexo, su integral es nula sobre cualquier camino cerrado contenido en dicho dominio. Sus consecuencias son sorprendentes y marcan distancias con el análisis real. En el análisis real, si se considera la teoría de campos vectoriales, que es donde se enmarcan las integrales de funciones sobre curvas, este resultado no tiene contrapartida pues, en general, la integral sobre contornos cerrados de campos diferenciales no es nula; sólo una clase de funciones especiales lo verifican: las que admiten función potencial. No obstante, sí se puede establecer una analogía entre el comportamiento de las funciones holomorfas y campos gradientes, los que admiten función potencial, respecto a la integración, como se indica en los siguientes cuadros.

Teoría de funciones complejas

Sea $D \subset \mathbb{C}$ dominio simplemente conexo y α un contorno cerrado en D . Si $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa, entonces

$$\int_{\alpha} f(z) dz = 0$$

Teoría de campos vectoriales

Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ dominio simplemente conexo y α un contorno cerrado en D . Si $\vec{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ es un campo gradiente, entonces

$$\int_{\alpha} \vec{F} \cdot d\vec{L} = 0$$

Otro enfoque que también permite establecer cierta analogía con el caso real es el proporcionado por el teorema fundamental del Cálculo. En efecto, el teorema de Cauchy establece un teorema fundamental para el cálculo complejo, pero hay que exigir una hipótesis más fuerte que en el caso real, se pide que la función sea **holomorfa** frente a la **continuidad** que se exige para las funciones reales. Esta relación se enuncia en los siguientes cuadros.

Teoría de funciones complejas

Sea $D \subset \mathbb{C}$ dominio simplemente conexo y $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ **holomorfa**, entonces

$$\exists F : D \rightarrow \mathbb{C} \text{ primitiva de } f$$

Teoría de funciones reales

Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ **continua**, entonces

$$\exists F : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ primitiva de } f$$

La primera extensión del concepto de integral en el campo complejo se hace de forma natural para funciones complejas de variable real. Después ya se podrá extender la definición a integrales de funciones complejas de variable compleja sobre caminos o contornos, que incorpora la anterior definición en su cálculo final.

5.1.1. Funciones complejas de variable real

Diremos que una función $F : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ es *integrable Riemann* en el intervalo $[a, b]$, si las funciones $Re(F)$ y $Im(F)$ son integrables Riemann en $[a, b]$ (son funciones reales de variable real) en cuyo caso definimos la integral de F en $[a, b]$ como el número complejo

$$\int_a^b F(t) dt = \int_a^b Re[F(t)] dt + i \int_a^b Im[F(t)] dt$$

Indicamos a continuación las propiedades principales de la integral de Riemann de funciones de variable real con valores complejos. Todas ellas se deducen con facilidad de las propiedades correspondientes de la integral de Riemann de funciones reales de variable real ya estudiadas.

Proposición 5.1.1. (Linealidad)

Sean $F, G : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ integrables y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$. Se cumple que

$$\int_a^b [\lambda_1 F(t) + \lambda_2 G(t)] dt = \lambda_1 \int_a^b F(t) dt + \lambda_2 \int_a^b G(t) dt$$

Proposición 5.1.2. (Cambio de sentido)

$$\int_a^b F(t) dt = - \int_b^a F(t) dt \leq (b - a) \cdot \sup\{|F(t)| / a \leq t \leq b\}$$

Proposición 5.1.3. (Acotación básica)

Sea $F : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ integrable, entonces

$$\left| \int_a^b F(t) dt \right| \leq \int_a^b |F(t)| dt$$

Proposición 5.1.4. (Aditividad respecto del intervalo)

Si $a < c < b$, y $F : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ es integrable, se verifica que

$$\int_a^b F(t) dt = \int_a^c F(t) dt + \int_c^b F(t) dt$$

Teorema 5.1.5. (Primer teorema fundamental del cálculo)

Si la función $g : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ es continua, la función dada por

$$G(t) = \int_a^t g(s) ds$$

es una primitiva de g en $[a, b]$. Esto es, $G'(t) = g(t)$.

Teorema 5.1.6. (Segundo teorema fundamental del cálculo)

Sea $F : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ derivable con derivada integrable, entonces

$$\int_a^b F'(t) dt = F(b) - F(a)$$

es una primitiva de g en $[a, b]$.

Proposición 5.1.7. (Cambio de variable)

Sea $\lambda : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una función estrictamente creciente con derivada continua. Entonces

$$\int_{\lambda(c)}^{\lambda(d)} F(s) ds = \int_c^d F(\lambda(t)) \lambda'(t) dt$$

Ejemplo 5.1.8. Calculemos la integral $\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{it} dt$

Se tiene que $e^{it} = \cos t + i \sin t$. Luego,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{it} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos t dt + i \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin t dt$$

Al calcular cada integral y evaluar se encuentra que

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{it} dt = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

5.1.2. Curvas y contornos en $\mathbb{C}$

Definición 5.1.9. Si $\alpha : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una aplicación continua, entonces α recibe el nombre de **trayectoria** o **curva** en el plano complejo.

Las trayectorias más comunes son:

- Si α es de clase ζ^1 , entonces la trayectoria se llama **suave**.
- Si $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in (a, b)$, entonces la trayectoria se llama **regular**.
- Si $\{a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b\}$ es una partición de $[a, b]$ y α es regular en cada subintervalo, entonces la trayectoria se llama **regular por partes** o **contorno**.
- Si α es inyectiva en (a, b) , entonces la trayectoria se llama **simple**.
- Si $\alpha(a) = \alpha(b)$, entonces la trayectoria se llama **cerrada**.
- Si α es inyectiva en (a, b) y tal que $\alpha(a) = \alpha(b)$, entonces la trayectoria se llama **simple cerrada** o **curva de Jordan**.

Ejemplo 5.1.10.

1. $\alpha(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$, $0 \leq t \leq 1$ es la parametrización del círculo unitario recorrido una vez.
2. $\alpha(t) = (\cos 4\pi t, \sin 4\pi t)$, $0 \leq t \leq 1$ es la parametrización del círculo unitario recorrido dos veces.
3. $\alpha(t) = \cos 2\pi t + i \sin 2\pi t$, $0 \leq t \leq 2$ es la parametrización del círculo unitario recorrido dos veces.

Definición 5.1.11. Dos curvas suaves a trozos $\alpha_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ y $\alpha_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ son equivalentes si existe una biyección diferenciable $\Phi : [a, b] \rightarrow [c, d]$ tal que $\alpha_1(a) = c$, $\alpha_1(b) = d$ y $\alpha_1 = \alpha_2 \circ \Phi$.

Esta definición de curvas equivalentes establece una relación de equivalencia. Por tanto, las clases de equivalencia son las curvas que definen la misma trayectoria coincidiendo sus puntos finales e iniciales, en otras palabras, que determinan el mismo sentido del recorrido en la curva. A estas clases de equivalencia de curvas suaves a trozos se les suele llamar **caminos** o **contornos** orientados, y denominaremos parametrización del contorno a cada uno de los elementos de la clase de equivalencia.

Ejemplo 5.1.12. Dados $z_0 \neq z \in \mathbb{C}$, el segmento orientado $[z_0, z_1]$ es el camino

$$\alpha(t) = z_0 + t(z_1 - z_0), \quad t \in [0, 1]$$

Ejemplo 5.1.13. Dados $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$, la circunferencia de centro z_0 y radio r orientada positivamente es el camino

$$\alpha(t) = z_0 + r e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

Definición 5.1.14. Si $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es una trayectoria, entonces $\alpha(a + b - t)$ describe la misma trayectoria, pero con orientación opuesta.

Si $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es una curva suave a trozos, se define la longitud de α , que se denota $L(\alpha)$ como

$$L(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$$

- La longitud no depende de la parametrización de la curva. Además, como $L(\alpha) = L(-\alpha)$, entonces tampoco depende de la orientación.

5.2. Integrales de contorno en $\mathbb{C}$

Definición 5.2.1. Si f es una función continua en un abierto $D \subset \mathbb{C}$ y $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es una curva suave a trozos, se define la integral de f sobre α como

$$\int_{\alpha} f(z) dz = \int_a^b f(\alpha(t)) \alpha'(t) dt$$

El valor de la integral es independiente para curvas equivalentes. Esto es, si $\alpha_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ y $\alpha_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ son dos curvas equivalentes, mediante la biyección $\Phi : [a, b] \rightarrow [c, d]$ (diferenciable con continuidad tal que $\alpha_1(a) = c$, $\alpha_1(b) = d$ y $\alpha_1 = \alpha_2 \circ \Phi$), entonces

$$\int_{\alpha_1} f(z) dz = \int_a^b f(\alpha_1(t)) \alpha_1'(t) dt = \int_c^d f(\alpha_2(t)) \alpha_2'(t) dt$$

En consecuencia, se puede definir la integral sobre un contorno orientado como la integral sobre cualquier curva suave a trozos que sea un representante de la clase de equivalencia. No obstante, no introduciremos ninguna notación nueva para indicar la clase de equivalencia y la integral de contorno, pues esto sólo supondría un cambio de notación que no altera los resultados.

5.2.1. Interpretación de $\int_C f(z) dz$

Hemos dicho que las funciones $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ las podemos considerar equivalentes a las funciones $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, de aquí que resulte natural que la integral de una función compleja corresponda a una integral de línea. Sea

$$f : \mathbb{R}^2 \sim \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2 \sim \mathbb{C}, \text{ tal que } (x, y) \mapsto \bar{w} = u + iv = f(z)$$

y sea C una curva de punto inicial a y final b . Si consideramos al vector $\bar{w}$ como una **fuerza**, entonces es conveniente pensar en C como una trayectoria a lo largo de la cual se puede mover una partícula, y cuya dirección de movimiento está representada por el vector unitario e^{iT} (tangente a la curva), siendo T el ángulo que forman la tangente y el eje positivo de las x .

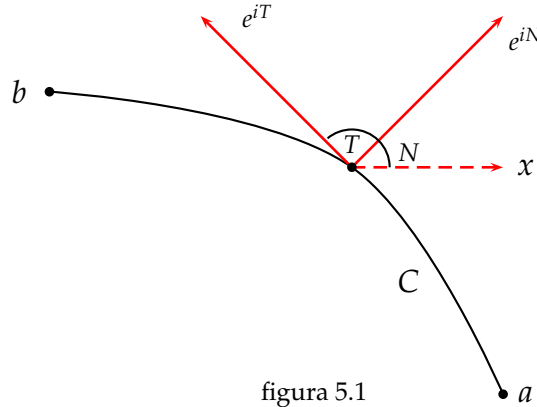


figura 5.1

Si $\bar{w}$ es **densidad**, entonces se considera que C es una **frontera** por la cual se puede mover un punto material. En este tipo de movimiento el vector unitario e^{iN} es *normal* a la curva, siendo N el ángulo que forman la normal y el eje positivo de las x . Del hecho que ambos vectores son ortogonales se tiene que

$$T - N = \frac{\pi}{2}$$

de lo cual

$$e^{i(T-N)} = e^{i\frac{\pi}{2}} \implies e^{iT-iN} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sen \frac{\pi}{2}$$

Después de evaluar,

$$e^{iT-iN} = i \implies e^{iT} = i e^{iN}$$

de donde

$$\cos T = -\sen N \quad \text{y} \quad \sen T = \cos N \quad (5.1)$$

Definición 5.2.2. Establecemos los siguientes vectores:

- $w_T = \text{proyección del vector } \bar{w} \text{ sobre la tangente a } C.$
- $w_N = \text{proyección del vector } \bar{w} \text{ sobre la normal a } C.$

A partir de esta definición tenemos:

Trabajo: Si $\bar{w}$ es una **fuerza** y ds es la diferencial de arco de C en un punto z , entonces el trabajo para transportar una partícula desde un punto a sobre la curva a otro punto b de la misma, viene dado por el producto entre la proyección de la fuerza y la distancia. Esto es, por

$$w_T \cdot ds$$

de manera que el trabajo total es

$$\text{Trabajo} = \int_C w_T ds$$

Flujo: Si $\bar{w}$ es **densidad**, entonces la cantidad de materia que cruza el elemento de línea ds por unidad de tiempo es

$$w_N \cdot ds$$

Es decir, la componente normal por la longitud de la línea que se cruza. Luego, la cantidad total de materia que cruza C por unidad de tiempo (flujo) viene dado por

$$\text{Flujo} = \int_C w_N ds$$

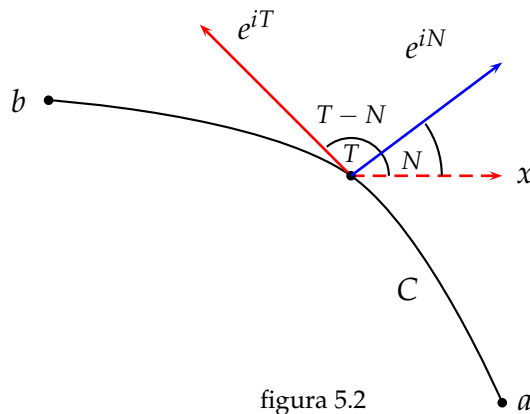


figura 5.2

A continuación vamos a obtener expresiones matemáticas para w_T y w_N , de manera que sea posible el cálculo del trabajo y flujo. Lo primero es recordar que

$$\text{comp}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{||\vec{b}||}$$

y si $\vec{b}$ es unitario, entonces

$$\text{comp}_{\vec{b}} \vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{b}$$

De este modo, para los vectores w_T y w_N se tiene que:

- $w_T = \text{comp}_{e^{iT}} \bar{w} = \bar{w} \cdot e^{iT} = (u, v) \cdot (\cos T, \sin T)$. Al simplificar se obtiene

$$w_T = u \cos T + v \sin T$$

Análogamente,

- $w_N = \text{comp}_{e^{iN}} \bar{w} = \bar{w} \cdot e^{iN} = (u, v) \cdot (\cos N, \sin N)$. Al simplificar se obtiene

$$w_N = u \cos N + v \sin N$$

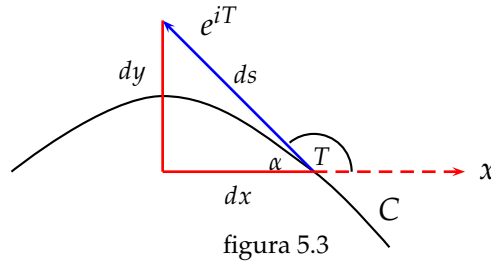
5.2 Integrales de contorno en $\mathbb{C}$

Reemplazando en las expresiones de trabajo y flujo tenemos:

$$\begin{aligned}\int_C w_T ds &= \int_C (u \cos T + v \operatorname{sen} T) ds \\ \int_C w_N ds &= \int_C (u \cos N + v \operatorname{sen} N) ds\end{aligned}\quad (5.2)$$

De la figura 5.3 se halla que

$$\begin{aligned}\cos T &= \frac{dx}{ds} \implies dx = \cos T ds \\ \operatorname{sen} T &= \frac{dy}{ds} \implies dy = \operatorname{sen} T ds\end{aligned}\quad (5.3)$$



Haciendo uso de la relación (5.1) la ecuación (5.3) toma la forma

$$dy = \cos N ds \quad \text{y} \quad dx = -\operatorname{sen} N ds \quad (5.4)$$

Reemplazando las ecuaciones (5.3) y (5.4) en (5.2) se logra

$$\begin{aligned}\int_C w_T ds &= \int_C u dx + v dy \\ \int_C w_N ds &= \int_C u dy - v dx\end{aligned}$$

Finalmente, considerando estas dos ecuaciones reales como componentes de una ecuación compleja, tenemos

$$\begin{aligned}\int_C w_T ds + i \int_C w_N ds &= \int_C [u dx + v dy + i(u dy - v dx)] \\ &= \int_C (u - iv)(dx + i dy) = \int_C w dz\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\int_C w dz = \text{TRABAJO} + i \text{ FLUJO}$$

Observación. Si C es una curva cerrada simple contenida en un dominio D , y si la función compleja $f(z) = w$ es analítica en y sobre D , entonces, de acuerdo con la interpretación que se hizo para derivadas, el campo del vector $\overline{w}$ es irrotacional y sin fuentes. Por ser irrotacional anula el trabajo a lo largo de una curva cerrada, y como no tiene fuentes, entonces el flujo total a través de la frontera es cero. Se tiene entonces que

$$\oint_C w dz = 0$$

Este es un resultado central de la teoría de las funciones analíticas y se conoce como teorema de Cauchy. Más adelante lo formulamos y demostramos analíticamente.

5.2.2. Cálculo de $\int_C w dz$

Sea C una curva que une z_0 con z_1 descrita por la función $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $t \mapsto f(t) = x(t) + iy(t)$. Sea $w(z) = u + iv$ función compleja de variable compleja definida en todo punto de $\mathbb{C}$, entonces la función compuesta $w \circ f$ es la que muestra el siguiente diagrama

$$[a, b] \subset \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{C} \xrightarrow{w} \mathbb{C}$$

en donde

$$(w \circ f)(t) = w(f(t)) = u + iv$$

Luego,

$$\begin{aligned} \int_C w dz &= \int_C w(f(t)) dz = \int_C (u + iv)(dx + i dy) \\ &= \int_a^b (u + iv) \left(\frac{dx}{dt} + i \frac{dy}{dt} \right) dt \end{aligned}$$

La integral queda en términos de la variable t , sin embargo, si hacemos $z_0 = (x_0, y_0) = f(a)$ y $z_1 = (x_1, y_1) = f(b)$, entonces el parámetro t se elimina y nos queda

$$\int_C w dz = \int_{z_0}^{z_1} (u dx - v dy) + i \int_{z_0}^{z_1} (u dy + v dx)$$

Los siguientes ejemplos muestran como se calculan las integrales complejas usando parametrizaciones. Más adelante, este “latoso” método es rápidamente dejado de lado.

Ejemplo 5.2.3. Calculemos $\int_C z^2 dz$, si C es el segmento de recta que une los puntos $(0, 0)$ y $(2, 1)$.

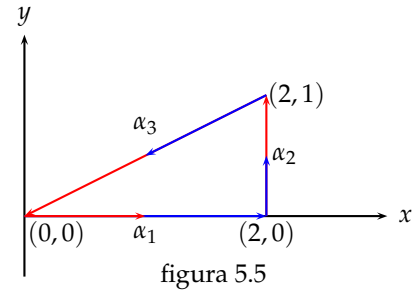
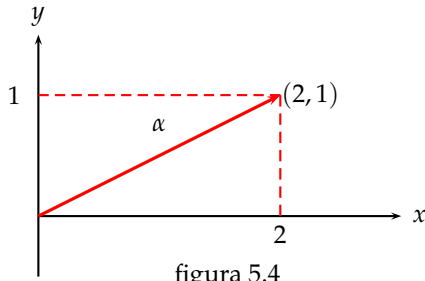
Lo primero es hallar la ecuación del segmento que une los puntos y parametrizarlo. Al respecto, la ecuación de la recta que pasa por esos puntos es $y = \frac{x}{2}$, con lo cual, su parametrización es

$$\alpha(t) = (2t, t), \quad 0 \leq t \leq 1$$

Como $z = x + iy$, entonces $z = 2t + it$, siguiéndose que $dz = (2 + i) dt$. Luego,

$$\int_C z^2 dz = \int_0^1 (3t^2 + 4t^2 i)(2 + i) dt = 2 \int_0^1 t^2 dt + 11i \int_0^1 t^2 dt = \frac{2}{3} + \frac{11}{3} i$$

5.3 Integral Indefinida



Ejemplo 5.2.4. Calculemos $\int_C z^2 dz$, si C es el triángulo de vértices $(0,0)$, $(2,0)$ y $(2,1)$.

Necesitamos parametrizar las curvas frontera:

- $\alpha_1(t) = (t, 0)$, $0 \leq t \leq 2$, $dz = dt$
- $\alpha_2(t) = (2, t)$, $0 \leq t \leq 1$, $dz = idt$
- $\alpha_3(t) = (2t, t)$, $0 \leq t \leq 1$, $dz = (2 + i) dt$

Luego,

$$\int_C z^2 dz = \int_{\alpha_1} z^2 dz + \int_{\alpha_2} z^2 dz - \int_{\alpha_3} z^2 dz$$

Como $z = x + iy$, entonces

$$\int_C z^2 dz = \int_0^2 t^2 dt + \int_0^1 (2 + it)^2 idt - \int_0^1 (2 + it)^2 (2 + it) dt$$

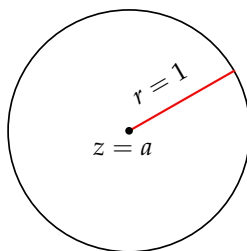
Los cálculos conducen a tener

$$\int_C z^2 dz = 0$$

Esta respuesta se sabía de antemano, pues, $f(z) = z^2$ es analítica en todo el plano complejo.

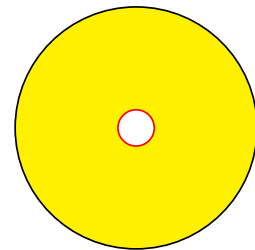
5.3. Integral Indefinida

Definición 5.3.1. Un dominio D se llama **simplemente conexo** si cualquier curva cerrada simple C contenida en D tiene su interior constituido solamente por puntos de D .



$$D = \{|z - a| < 2\}$$

figura 5.6



$$D = \{1 < |z - a| < 2\}$$

figura 5.7

La figura 5.6 muestra un conjunto conexo, mientras que la 5.7 un anillo (región achurada) no simplemente conexa.

Definición 5.3.2. Una función $F(z)$ cuya derivada es $f(z)$ se llama **integral indefinida** de $f(z)$. Se escribe

$$F(z) = \int f(z) dz$$

Las condiciones de existencia de F las proporciona el siguiente resultado, versión del primer teorema fundamental para funciones complejas.

Teorema 5.3.3. Sea $F(z) = \int_{z_0}^z f(t) dt$, con f analítica en un dominio D simplemente conexo, y sean z_0 un punto fijo en D y $z \in D$ un punto arbitrario, entonces $F'(z)$ existe y se tiene que $F'(z) = f(z)$.

Demostración.

Como D es abierto conexo, existe una vecindad de centro z y radio r contenida en D . Sea z_1 punto interior de $V(z, r)$ y sea C el contorno que es unión de la curva C_1 que une z_0 con z , con la curva C_2 que une z con z_1 . Del hecho de que

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(t) dt \quad \text{y} \quad F(z_1) = \int_{z_0}^{z_1} f(t) dt$$

deducimos que

$$F(z_1) - F(z) = \int_{z_0}^{z_1} f(t) dt - \int_{z_0}^z f(t) dt = \int_z^{z_1} f(t) dt$$

Así,

$$\frac{F(z_1) - F(z)}{z_1 - z} = \frac{1}{z_1 - z} \int_z^{z_1} f(t) dt$$

sumando $-f(z)$ en ambos lados y tomando módulo se tiene

$$\left| \frac{F(z_1) - F(z)}{z_1 - z} - f(z) \right| = \left| \frac{1}{z_1 - z} \int_z^{z_1} f(t) dt - f(z) \right|$$

Ahora usemos la igualdad siguiente

$$f(z) = \frac{z_1 - z}{z_1 - z} \cdot f(z) = \frac{1}{z_1 - z} \int_z^{z_1} f(z) dt$$

para tener que

$$\left| \frac{F(z_1) - F(z)}{z_1 - z} - f(z) \right| = \left| \frac{1}{z_1 - z} \int_z^{z_1} [f(t) - f(z)] dt \right| \leq \frac{1}{|z_1 - z|} \int_z^{z_1} |f(t) - f(z)| dt$$

Siendo f una función continua, se satisface que

$$|z_1 - z| < \delta \implies |f(z_1) - f(z)| < \epsilon$$

5.3 Integral Indefinida

como t se encuentra entre z y z_1 , entonces

$$|t - z| < \delta \implies |f(t) - f(z)| < \epsilon$$

Luego,

$$\left| \frac{F(z_1) - F(z)}{z_1 - z} - f(z) \right| < \frac{1}{|z_1 - z|} \int_z^{z_1} \epsilon dt < \epsilon$$

Por lo tanto

$$\lim_{z_1 \rightarrow z} \frac{F(z_1) - F(z)}{z_1 - z} = f(z)$$

y de aquí, $F'(z) = f(z)$, lo cual demuestra el teorema.

Corolario 5.3.4. Si F y G son dos primitivas de f , entonces $F - G = c$, siendo c una constante real o compleja.

Teorema 5.3.5. (segundo teorema fundamental)

$$\int_{z_0}^z f(z) dz = F(z) - F(z_0), \quad F' = f$$

Ejemplo 5.3.6.

$$1. \int z^n dz = \frac{z^{n+1}}{n+1} + c$$

$$2. \int_a^b \frac{dz}{z} = \ln b - \ln a, \quad F(z) = \ln z$$

Es claro que $F'(z) = \frac{1}{z}$ es analítica para $z \neq 0$. Luego, el resultado es válido para toda curva C que una a con b sin pasar por el origen.

$$3. \int_0^i (z^2 - z + 1) dz = \frac{1}{2} + \frac{2}{3}i$$

Ejemplo 5.3.7. Hallemos las primitivas de $f(z) = z \sen z$.

Usemos el método de integración por partes. Así, con $u = z$, $dv = \sen z dz$, $v = -\cos z$, tenemos

$$\int z \sen z = z(-\cos z) + \int \cos z dz = -z \cos z + \sen z + c = F(z)$$

Definición 5.3.8. Si α es una curva cerrada, suave por partes en $\mathbb{C}$, para cada $a \notin \alpha$, el **índice** de α con respecto al punto a , corresponde al número

$$n(\alpha, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} \frac{dz}{z - a}$$

Geométricamente el índice es el número de veces que la curva α da vueltas alrededor del punto a . Este índice es un número entero. Es positivo si el giro se hace en sentido opuesto a las agujas del reloj, y negativo en caso contrario. Si a es exterior al contorno α , entonces $n(\alpha, a) = 0$.

Ejemplo 5.3.9. Sea $\alpha : [0, 2n\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\alpha(t) = z_0 + re^{it}$. Si $|z - z_0| < r$, entonces

$$n(\alpha, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} \frac{dz}{z - z_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2n\pi} \frac{rie^{it}}{re^{it}} dt = \frac{1}{2\pi} \cdot 2n\pi = n$$

5.3.1. Teorema integral de Cauchy-Goursat

El teorema de Cauchy-Goursat establece, como ya se ha comentado con anterioridad, que si $D \subset \mathbb{C}$ es un abierto simplemente conexo y f es holomorfa en D , lo que notaremos por $f \in \mathcal{H}(D)$, entonces f posee primitiva en D y, en particular, su integral a lo largo de cualquier contorno cerrado es nula. El teorema establecido por Cauchy exigía la hipótesis adicional de continuidad para f' . Goursat fue el primero en dar una demostración del teorema sin utilizar esta hipótesis. Este hecho es más relevante de lo que parece dado que a partir del teorema integral se establece la fórmula de Cauchy, de la que se deduce que si $f \in \mathcal{H}(D)$, entonces existen las derivadas de todos los órdenes de f en D . Por otra parte, con la hipótesis adicional de la continuidad de f' se puede demostrar el teorema de forma muy sencilla apoyándose en el teorema de Green-Riemann para funciones vectoriales. En efecto, este teorema afirma que:

Teorema 5.3.10. (Green-Riemann):

Si $\vec{F} = (P, Q) : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ es campo vectorial continuamente diferenciable y D es un dominio simplemente conexo, entonces para toda curva α simple, cerrada, suave a trozos y positivamente orientada en D , se verifica

$$\int_{\alpha} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

donde R es la región que encierra la curva α .

Luego,

Teorema 5.3.11. Sea f analítica sobre el dominio simplemente conexo D , y C cualquier curva **cerrada** contenida en D , entonces

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

Demostración.

Probemos que f analítica implica f' es analítica.

$$f = u + iv \implies \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

5.3 Integral Indefinida

Si derivamos estas ecuaciones respecto de x se tiene

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \implies \begin{cases} (u_x)_x = (v_y)_x \\ (u_y)_x = (-v_x)_x \end{cases} \implies \begin{cases} (u_x)_x = (v_x)_y \\ (u_x)_y = (-v_x)_x \end{cases}$$

Como $f' = u_x + iv_x$, entonces el último par de ecuaciones garantiza que u_x y v_x satisfacen Cauchy - Riemann, por tanto, f' es analítica.

Por otra parte, siendo $f(z) = u + iv$, $z = x + iy$, se tiene que

$$\int_C f(z) dz = \int_C (u + iv)(dx + idy) = \int_C (udx - vdy) + i \int_C (vdx + udy)$$

Usando el teorema de Green-Riemann se tiene que

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_C (u + iv)(dx + idy) = \int_C (udx - vdy) + i \int_C (vdx + udy) \\ &= \iint_D \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dA + i \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dA \end{aligned}$$

Dado que las ecuaciones de Cauchy - Riemann se satisfacen, entonces

$$\int_C f(z) dz = 0 + i \cdot 0 = 0$$

Corolario 5.3.12. Si f es analítica en un dominio simplemente conexo D y C_1 y C_2 son dos trayectorias en D que unen los mismos puntos, entonces

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz$$

Este resultado afirma que la integral compleja es **independiente** de la trayectoria siempre que f sea analítica en un dominio simplemente conexo.

El siguiente ejemplo sirve como verificación del teorema de Cauchy-Goursat.

Ejemplo 5.3.13. Verifiquemos que $\int_C z^n dz = 0$, $n \in \mathbb{Z}^+$ y C es la circunferencia $|z| = r$, $r > 0$.

Una parametrización de $|z| = r$ es $z(t) = re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Luego,

$$\begin{aligned} \int_C z^n dz &= \int_0^{2\pi} (re^{it})^n \cdot ire^{it} dt = ir^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{itn+it} dt \\ &= ir^{n+1} \cdot e^{it(n+1)} \cdot \frac{1}{i(n+1)} \Big|_0^{2\pi} = \frac{r^{n+1}}{n+1} \cdot (e^{i2\pi(n+1)} - 1) \\ &= \frac{r^{n+1}}{n+1} \cdot (\cos 2\pi(n+1) + i \sin 2\pi(n+1) - 1) \\ &= \frac{r^{n+1}}{n+1} \cdot (\cos(2\pi n) + i \sin(2\pi n) - 1) = \frac{r^{n+1}}{n+1} \cdot (1 + 0 - 1) = 0 \end{aligned}$$

5.3.2. El teorema de Cauchy-Goursat y dominios múltiplemente conexos

Se considera ahora el caso en que el dominio no es simplemente conexo, es decir, cuando es múltiplemente conexo. El teorema no se verifica, pero permite reducir el cálculo de la integral a otros contornos más simples o más adecuados para integrar la función dada. Se tiene el siguiente resultado.

Teorema 5.3.14. (Cauchy-Goursat en regiones múltiplemente conexas)

Sea f función analítica sobre una región D múltiplemente conexa limitada por dos curvas simples cerradas C_1 y C_2 , entonces

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz$$

El “corte” AE transforma la región múltiplemente conexa en simplemente conexa, siendo así

$$\int_{ABCD AEFGEA} f(z) dz = 0 \quad (5.5)$$

Es decir,

$$\int_{ABCD A} f(z) dz + \int_{AE} f(z) dz + \int_{EFGE} f(z) dz + \int_{EA} f(z) dz = 0$$

Como

$$\int_{EA} f(z) dz = - \int_{AE} f(z) dz$$

entonces

$$\int_{ABCD A} f(z) dz = - \int_{EFGE} f(z) dz$$

De esto último se obtiene

$$\int_{C_1} f(z) dz = - \int_{C_2} f(z) dz$$

O bien

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz$$

Una versión más general de este resultado es la siguiente:

Teorema 5.3.15. Se denota por C a un contorno cerrado simple y a $C_j (j = 1, 2, \dots, n)$ como un número finito de contornos cerrados simples interiores a C tales que los conjuntos interiores a cada C_j no tienen puntos en común. R es la región cerrada que consta de todos los puntos dentro y sobre C excepto los puntos interiores a cada C_j (R es un dominio múltiplemente conexo). Se denota por B la frontera completa orientada de R que consta de C y todos los C_j , descrita en una dirección tal que los puntos de R se encuentran a la izquierda de

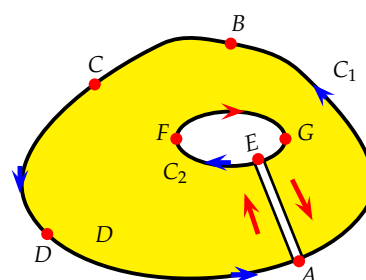


figura 5.8

5.3 Integral Indefinida

B. En este caso, si una función f es analítica en R , entonces

$$\int_B f(z) dz = 0$$

Los siguientes ejemplos aclaran el significado de este teorema.

Ejemplo 5.3.16. Hallemos $\int_B \frac{dz}{z^2(z-1)}$, si B consta de la circunferencia $|z| = 2$ descrita en la dirección positiva, y de las circunferencias $C_1 : |z+1| = \frac{1}{2}$, $C_2 : |z| = \frac{1}{2}$ y $C_3 : |z-1| = \frac{1}{2}$, descritas en la dirección negativa.

Sea R la región cerrada que consta de todos los puntos dentro y sobre $|z| = 2$ excepto los puntos interiores a $|z+1| = \frac{1}{2}$, $|z| = \frac{1}{2}$ y $|z-1| = \frac{1}{2}$. El integrando es analítico excepto en los puntos $z = 0$ y $z = \pm 1$, y estos tres puntos no pertenecen a R . Por lo tanto, aplicando el Teorema 5.3.14 concluimos que

$$\int_C \frac{dz}{z^2(z-1)} = 0$$

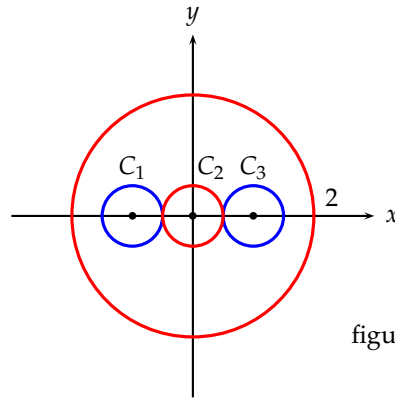


figura 5.9

Ejemplo 5.3.17. Hallemos $\int_C \frac{dz}{z-a}$ si C es una curva simple cerrada tal que:

1. $z = a$ está dentro de C .

2. $z = a$ está fuera de C .

- Si $z = a$ se encuentra dentro de C , entonces existe una vecindad $V(a, r) \subset D$ y usamos Cauchy (9.3.14) para región múltiplemente conexa. Si C_1 es la frontera de esta vecindad (no olvidar que es un disco), entonces

$$\int_C \frac{dz}{z-a} = \int_{C_1} \frac{dz}{z-a}$$

Sobre C_1 cualquier punto tienen la forma polar $z-a = re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, de lo cual se obtiene que

$$dz = ire^{i\theta} d\theta$$

Reemplazando se halla que

$$\int_{C_1} \frac{dz}{z-a} = i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i$$

- Si $z = a$ está fuera de C , entonces f es analítica dentro y sobre C , de manera que,

$$\int_C \frac{dz}{z-a} = 0$$

5.4. Algunas consecuencias del teorema integral de Cauchy

A partir del teorema integral de Cauchy se deduce su fórmula integral, resultado fundamental que permite obtener todas las propiedades locales y globales de las funciones holomorfas. Entre ellas destacaremos los teoremas de Liouville, de Morera, del valor medio de Gauss y el principio del módulo máximo.

5.4.1. La fórmula integral de Cauchy

La fórmula integral de Cauchy muestra que los valores de una función f sobre un contorno cerrado determinan sus valores en los puntos de su componente interior, siempre que dicha función sea holomorfa sobre el contorno y sobre la componente interior.

Teorema 5.4.1. (Fórmula integral de Cauchy)

Sea f función analítica dentro y sobre un contorno simple cerrado C positivamente orientado, y z_0 un punto interior de C , entonces se verifica que:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{z - z_0}$$

Ejemplo 5.4.2. Hallemos el valor de la integral $\int_C \frac{dz}{z^2 + 4}$, si C es la circunferencia $|z - i| = 2$.

No se puede decidir de inmediato si debemos aplicar la fórmula integral de Cauchy o el teorema de Cauchy-Goursat. Factorizando el denominador tenemos.

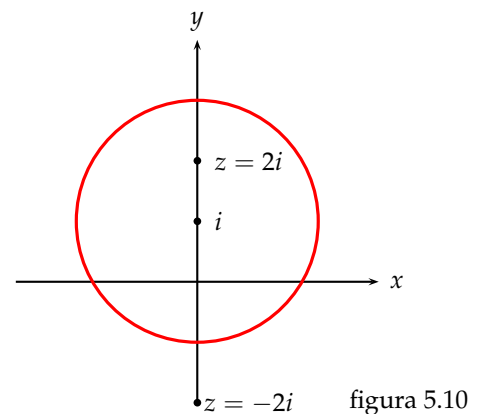
$$\int_C \frac{dz}{(z + 2i)(z - 2i)}$$

Observamos que el factor $z - 2i$ se anula dentro del contorno de integración y que $z + 2i$ no se anula ni sobre el contorno ni en su interior. Escribiendo la integral considerada en la forma

$$\int_C \frac{\frac{1}{z+2i} dz}{z - 2i}$$

vemos que, como $\frac{1}{z+2i}$ es analítica tanto en la circunferencia $|z - i| = 2$ como en su interior, podemos usar la fórmula integral de Cauchy tomamos $f(z) = \frac{1}{z+2i}$ y $z_0 = 2i$, obteniendo:

$$\frac{1}{4i} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{dz}{z^2 + 4} \implies \int_C \frac{dz}{z^2 + 4} = \frac{\pi}{2}$$



5.4 Algunas consecuencias del teorema integral de Cauchy

Ejemplo 5.4.3. Hallemos $\int_C \frac{dz}{z^2 + 1}$ en cada caso siguiente:

1. C encierra $z = i$ pero no a $z = -i$
2. C encierra $z = -i$ pero no a $z = i$
3. C encierra $z = i$ y también a $z = -i$

La figura 9.11 muestra una situación tipo

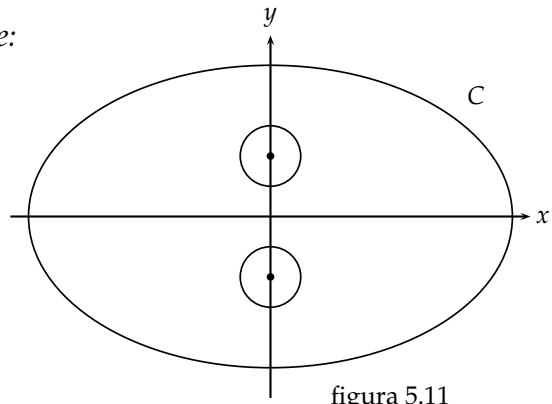


figura 5.11

Para responder a cada una de las interrogantes, descomponemos en fracciones parciales

$$\frac{1}{z^2 + 1} = \frac{1}{(z + i)(z - i)} = \frac{i}{2} \left(\frac{1}{z + i} - \frac{1}{z - i} \right)$$

$$1. \int_C \frac{dz}{z^2 + 1} = \frac{i}{2} \int_C \frac{dz}{z + i} - \frac{i}{2} \int_C \frac{dz}{z - i}$$

Estas integrales son sencillas de calcular y evaluar.

$$\int_C \frac{dz}{z^2 + 1} = 0 - \frac{i}{2} \cdot 2\pi f(i)$$

Como $f(z) = 1$, entonces $f(i) = 1$. Luego,

$$\int_C \frac{dz}{z^2 + 1} = \pi$$

$$2. \int_C \frac{dz}{z^2 + 1} = \frac{i}{2} \int_C \frac{dz}{z + i} - \frac{i}{2} \int_C \frac{dz}{z - i}$$

Ahora tenemos un pequeño cambio en la evaluación

$$\int_C \frac{dz}{z^2 + 1} = \frac{i}{2} \cdot 2\pi f(-i) - 0 = -\pi$$

$$3. \int_C \frac{dz}{z^2 + 1} = \frac{i}{2} \int_C \frac{dz}{z + i} - \frac{i}{2} \int_C \frac{dz}{z - i} = \pi - \pi = 0$$

La fórmula integral de Cauchy puede generalizarse. La generalización permite calcular el valor de cualquier derivada de una función holomorfa en los puntos interiores a un contorno simple y cerrado si se conocen los valores de la función en el contorno. No sólo esto, veremos que existen y son analíticas $f''(z), \dots, f^{(n)}(z)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Obsérvese que estos resultados no tienen equivalentes en la teoría de funciones de variable real, pues el hecho de ser derivable una función en un punto no implica, necesariamente, que existan las derivadas sucesivas de dicha función, como ya conocemos.

Teorema 5.4.4. (Fórmula integral de Cauchy para las derivadas)

Sea f función analítica dentro y sobre un contorno simple cerrado C positivamente orientado y sea z_0 un punto interior a C , entonces existen y son analíticas todas las derivadas de la función, $f^{(n)}(z)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y se verifica que:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}}$$

Usando este resultado es inmediato establecer las dos propiedades siguientes:

Proposición 5.4.5. Si f es una función analítica en un punto z_0 , todas sus derivadas son analíticas en el mismo punto.

Proposición 5.4.6. Si f admite primitiva en un abierto D del plano complejo $\mathbb{C}$, entonces f es analítica en D .

Ejemplo 5.4.7. Hallemos el valor de la integral $\int_C \frac{dz}{(z^2 + 4)^2}$, si C es la circunferencia $|z - i| = 2$.

Factorizando el denominador tenemos

$$\int_C \frac{dz}{(z - 2i)^2(z + 2i)^2}$$

Tomando $f(z) = \frac{1}{(z + 2i)^2}$ y $z_0 = 2i$ obtenemos

$$f'(2i) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{dz}{(z^2 + 4)^2}$$

como f es analítica sobre y en el interior de C y dado que

$$f'(z) = -\frac{2}{(z + 2i)^3}$$

el valor de la integral es

$$\int_C \frac{dz}{z^2 + 4} = \frac{\pi}{16}$$

Otra relación importante es la desigualdad de Cauchy para funciones analíticas, la cual establece lo siguiente.

Teorema 5.4.8. (Desigualdad de Cauchy)

Si f es analítica dentro y sobre un círculo de radio r y centro $z = a$, y si además, $|f(z)| \leq M$, $\forall z$, entonces

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{M n!}{r^n}$$

5.4 Algunas consecuencias del teorema integral de Cauchy

Demostración.

Sea C la curva frontera del círculo. Como f es analítica sobre C , entonces es continua. Usemos la fórmula integral para tener

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{(z-a)^{n+1}} \leq \frac{n!}{2\pi} \int_C \frac{|f(z)| |dz|}{|z-a|^{n+1}}$$

Como $|z-a| = r$ para z sobre C , entonces

$$f^{(n)}(a) \leq \frac{n!}{2\pi} \cdot \frac{M}{r^{n+1}} \int_C |dz| \leq \frac{n!}{2\pi} \cdot \frac{M}{r^{n+1}} \int_0^{2\pi} r d\theta = \frac{Mn!}{r^n}$$

Se consideró $z = re^{i\theta}$, con lo cual $dz = ire^{i\theta} d\theta$. En consecuencia,

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{Mn!}{r^n}$$

El teorema integral de Cauchy establece que la integral cerrada de una función analítica es cero, y el siguiente teorema establece el inverso

Teorema 5.4.9. (Morera)

Si f es continua en un dominio D simplemente conexo, y $\int_C f(z) dz = 0$ para toda curva cerrada simple C contenida en D , entonces f es analítica en D

Demostración.

Como f es continua y $\int_C f(z) dz = 0$, entonces existe F analítica tal que

$$F'(z) = f(z)$$

Además, como F analítica implica F' analítica, entonces $f(z)$ es analítica.

Este resultado permite determinar si una función f es analítica sin tener que recurrir al cálculo diferencial.

Una consecuencia fundamental de la desigualdad de Cauchy es el teorema de Liouville:

Teorema 5.4.10. (Liouville)

Si f es analítica en todo el plano complejo (f se denomina entera) y si $|f|$ es acotada en todo el plano complejo, entonces f es constante.

Demostración.

f acotada implica $|f(z)| \leq M$, para $M > 0$. Como f es analítica sobre cualquier círculo de radio r , entonces

$$|f'(z)| \leq \frac{1! M}{r}, \quad \forall r > 0$$

pues se hace $n = 1$ en la desigualdad de Cauchy. Ahora, si $n \rightarrow \infty$, entonces

$$|f'(z)| \leq 0 \implies f'(z) = 0, \quad \forall z$$

esto significa que f es constante.

Como corolario del teorema de Liouville se obtiene fácilmente el teorema fundamental del Álgebra que asegura que todo polinomio no constante tiene al menos una raíz.

Teorema 5.4.11. *(Fundamental del álgebra)*

Si P es un polinomio de grado mayor o igual que uno, entonces la ecuación $P(z) = 0$ tienen por lo menos una raíz compleja.

Demostración.

Consideremos

$$P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_nz^n = 0$$

Si suponemos que $P(z)$ no tiene raíces, entonces la función

$$f(z) = \frac{1}{P(z)}$$

es analítica para todo z . Además, $\frac{1}{P(z)} \rightarrow 0$ si $z \rightarrow \infty$, luego, $\frac{1}{P(z)}$ es acotada. En consecuencia, por teorema de Liouville f es constante y por consiguiente $P(z)$ es constante ¡contradicción! se supuso que $P(z)$ tenía grado mayor o igual a uno. Por tanto, $P(z) = 0$ para al menos un z complejo.

5.4.2. El teorema del valor medio de Gauss y el principio del módulo máximo

El teorema del valor medio de Gauss dice que si una función es holomorfa en un punto, y por tanto en un entorno de dicho punto, el valor de la función en el mismo es la media aritmética de los valores que toma sobre cualquier circunferencia que esté dentro del mencionado entorno.

Teorema 5.4.12. *(del valor medio de Gauss)*

Sea f analítica en un dominio simplemente conexo D . Sea $z = z_0 + re^{it}$, con $0 \leq r \leq r_0$ y $0 \leq t \leq 2\pi$, un círculo de centro en z_0 y radio $r_0 > 0$ perteneciente a D . Entonces

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt \quad (5.6)$$

La expresión de la derecha de la ecuación (5.6) es la media aritmética o valor medio de f a lo largo de la circunferencia del círculo. El teorema del valor medio de Gauss puede usarse para demostrar importantes propiedades de las funciones analíticas:

Teorema 5.4.13. *(Principio del módulo máximo)*

Si f es analítica y no constante en el interior de una región D , entonces $|f(z)|$ no tiene máximo en D .

Teorema 5.4.14. *(Principio del módulo mínimo)*

Si f es analítica no nula y no constante en el interior de una región, entonces $|f(z)|$ no tiene mínimo en esa región.

Finalizamos con algunos ejemplos interesantes de resolución de integrales.

5.4 Algunas consecuencias del teorema integral de Cauchy

Ejemplo 5.4.15. Hallemos $\int_C f(z) dz$, si $z = x + iy$, $f(z) = iy$, donde C es la curva que une el $(0,0)$ con $(0,1)$ del plano complejo.

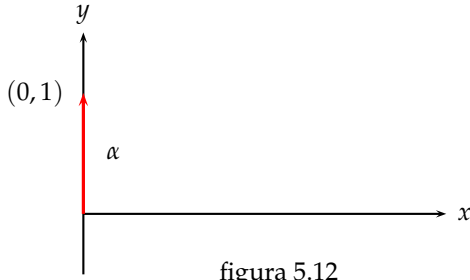


figura 5.12

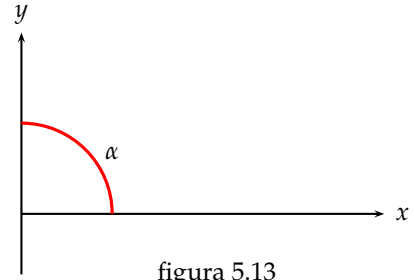


figura 5.13

La parametrización de C es $\alpha(t) = (0, t)$, con $0 \leq t \leq 1$. Luego, $f(\alpha(t)) = f(0, t) = it$. Por tanto,

$$\int_C f(z) dz = \int_0^1 it \cdot i dt = -\frac{t^2}{2} \Big|_0^1 = -\frac{1}{2}$$

Ejemplo 5.4.16. Hallemos $\int_C e^z dz$, si $\alpha(t) = e^{it}$ con $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

La curva sobre la cual se hace integración (figura 5.13) corresponde a un cuarto de circunferencia (en el primer cuadrante)

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\alpha(t)} \cdot \alpha'(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos t + i \sin t} \cdot i e^{it} dt \\ &= i \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos t} e^{i \sin t} [\cos t + i \sin t] dt \\ &= i \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos t} [\cos(\sin t) + i \sin(\sin t)] [\cos t + i \sin t] dt \\ &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos t} [\cos(\sin t) \sin t + \sin(\sin t) \cos t] dt + \\ &\quad + i \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos t} [\cos(\sin t) \cos t - \sin(\sin t) \sin t] dt \\ &= e^{\cos t} \cos(\sin t) + i e^{\cos t} \sin(\sin t) = e^{\cos t + i \sin t} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= e^i - e \end{aligned}$$

Ejemplo 5.4.17. Evaluemos $\int_C f(z) dz$, donde $f(z) = \frac{1}{z-a}$, y $\alpha(t) = re^{2\pi ti} + a$, con $t \in [0, n]$, $n \in \mathbb{N}$.

El contorno de integración es una circunferencia centrada en $z = a$ y radio r . La función evaluada en la trayectoria es $f(\alpha) = \frac{1}{re^{2\pi ti}}$. Además, $\alpha'(t) = 2\pi ri e^{2\pi ti}$. Luego,

$$\int_C f(z) dz = \int_0^n \frac{1}{re^{2\pi ti}} \cdot 2\pi ri e^{2\pi ti} dt = \int_0^n 2\pi i dt = 2\pi ni$$

Ejemplo 5.4.18. Apliquemos la fórmula integral de Cauchy para obtener el valor de una integral analítica sobre una curva cerrada.

$$1. \int_{\alpha} \frac{z^2 dz}{z-1}, \text{ siendo } \alpha(t) = 2e^{2\pi ti}, 0 \leq t \leq k.$$

La curva cerrada es una circunferencia y el índice es $n(\alpha, 1) = k$. El punto $z = 1$ es interior de la curva y $f(z) = z^2$. Así, $f(1) = 1$. Por tanto,

$$\int_{\alpha} \frac{z^2 dz}{z-1} = k2\pi i \cdot f(1) = 2\pi i k$$

$$2. \int_{\alpha} \frac{(z^2 - 1) dz}{z^2 + 1}, \text{ siendo } \alpha(t) = 2e^{2\pi ti}, 0 \leq t \leq 1.$$

Para aplicar la fórmula integral de Cauchy el denominador debe ser de la forma $(z - a)^k$ para alguna $k \geq 0$, para ello tenemos que

$$\frac{z^2 - 1}{z^2 + 1} = \frac{i}{2} \left(\frac{z^2 - 1}{z - i} - \frac{z^2 - 1}{z + i} \right)$$

Dado que $f(z) = z^2 - 1$, resulta $f(i) = -2 = f(-i)$. Además, el índice es $n(\alpha, \pm i) = 1$. En consecuencia,

$$\int_{\alpha} \frac{(z^2 - 1) dz}{z^2 + 1} = \frac{i}{2} (-2 \cdot 1 \cdot 2\pi i - (-2) \cdot 1 \cdot 2\pi i) = 0$$

$$3. \int_{\alpha} \frac{\operatorname{sen} z dz}{z^4}, \text{ siendo } \alpha(t) = e^{2\pi ti}, 0 \leq t \leq 1.$$

Aplicando la fórmula integral de Cauchy para derivadas, si $f(z) = \operatorname{sen} z$ entonces

$$n(\alpha, 0) \cdot f^{(3)}(0) = \frac{3!}{2\pi i} \int_{\alpha} \frac{f(z) dz}{z^4}$$

Como $n(\alpha, 0) = 1$, y $f^{(3)}(z) = -\cos z$, entonces $f^{(3)}(0) = -1$, luego

$$\int_{\alpha} \frac{\operatorname{sen} z dz}{z^4} = \frac{2\pi i}{3!} \cdot (-1) = -\frac{\pi i}{3}$$

$$4. \int_{\alpha} \left(\frac{z}{z-1} \right)^n dz, \text{ si } \alpha(t) = 1 + e^{2\pi ti}, 0 \leq t \leq 1, n \in \mathbb{N}.$$

Como $\left(\frac{z}{z-1} \right)^n = \frac{z^n}{(z-1)^n}$, entonces $f(z) = z^n$. Apliquemos la fórmula integral de Cauchy para derivadas

$$f^{(n)}(1) \cdot n(\alpha, 1) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\alpha} \frac{z^n dz}{(z-1)^n}$$

El índice es 1, y $f^{(n)}(z) = n!$, entonces

$$\int_{\alpha} \frac{z^n dz}{(z-1)^n} = 2\pi i$$

5.4.3. Integrales de la forma $\int_{\alpha} \frac{f'}{f}$

Suponemos que f es holomorfa en una región D que contenga en su interior la región acotada por la curva α , y que admita sólo un número finito de ceros en D .

Recordamos que, si a es un cero de la función holomorfa f , entonces existe un entero positivo m , y una función holomorfa $g(z)$, tal que

$$f(z) = (z - a)^m g(z), \text{ con } g(a) \neq 0$$

De donde, si $a_1, \dots, a_s$ son los ceros de f , siendo $a_j \neq a_k$ para $j \neq k$, entonces existen enteros positivos $m_1, \dots, m_s$, y una función holomorfa g tal que

$$f(z) = (z - a_1)^{m_1} \cdots (z - a_s)^{m_s} g(z) \text{ con } g(a_j) \neq 0$$

Si derivamos este producto,

$$\begin{aligned} f'(z) &= m_1(z - a_1)^{m_1-1} \cdot (z - a_2)^{m_2} \cdots (z - a_s)^{m_s} g(z) + \\ &\quad \cdots + (z - a_1)^{m_1} \cdot (z - a_2)^{m_2} \cdots m_s(z - a_s)^{m_s-1} g(z) \\ &\quad \cdots + (z - a_1)^{m_1} \cdot (z - a_2)^{m_2} \cdots (z - a_s)^{m_s} g'(z) \end{aligned}$$

Luego,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m_1}{z - a_1} + \cdots + \frac{m_s}{z - a_s} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

de donde

$$\int_{\alpha} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int_{\alpha} \frac{m_1 dz}{z - a_1} + \cdots + \int_{\alpha} \frac{m_s dz}{z - a_s} + \int_{\alpha} \frac{g'(z) dz}{g(z)}$$

Como g no se anula en D , entonces $\frac{g'}{g}$ es holomorfa en D , de donde

$$\int_{\alpha} \frac{g'(z) dz}{g(z)} = 0$$

y por la definición del índice

$$n(\alpha, a_k) = 2\pi i \int_{\alpha} \frac{dz}{z - a_k}$$

En consecuencia

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{k=1}^s m_k n(\alpha, a_k)$$

Ejemplo 5.4.19. Calculemos $\int_{\alpha} z^{i-1} dz$, siendo $\alpha(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. El argumento se toma entre 0 y 2π .

En primer lugar, escribimos

$$z^{i-1} = \left(e^{\log |z| + i \operatorname{Arg}(z)} \right)^{i-1} = e^{(\log |z| + i \operatorname{Arg}(z))(i-1)}$$

Como $|z| = |e^{it}| = 1$, $\log |z| = \log(1) = 0$ y $\text{Arg}(z) = t$, entonces

$$z^{i-1} = e^{it(i-1)} = e^{-it-t} = e^{-t} e^{-it}$$

Así,

$$\int_{\alpha} z^{i-1} dz = \int_0^{2\pi} e^{-t} e^{-it} \cdot i e^{it} dt = i \int_0^{2\pi} e^{-t} dt = -ie^{-t} \Big|_0^{2\pi}$$

Al evaluar,

$$\int_{\alpha} z^{i-1} dz = -i(e^{-2\pi} - 1) = i(1 - e^{-2\pi})$$

Ejemplo 5.4.20. Calculemos la integral de la función $\frac{1}{z}$ a lo largo del cuadrado de vértices $1+i$, $1-i$, $-1-i$, $-1+i$, recorrido en sentido antihorario.

Calcularemos lo que vale la integral en cada uno de los lados del cuadrado y sumaremos. Lo hacemos así porque no existe una primitiva de $\frac{1}{z}$ en un abierto que incluya al cuadrado. En cambio cada uno de los lados está contenido en un abierto simplemente conexo en el que $\frac{1}{z}$ sí tiene una primitiva, que será una conveniente rama del logaritmo.

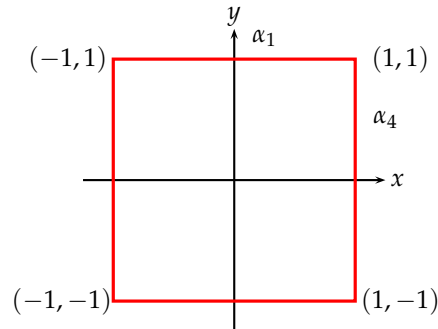


figura 5.14

- En $[1+i, -1+i]$, que corresponde al segmento que une $(1,1)$ con $(-1,1)$, elegimos el argumento comprendido entre $-\pi$ y π . Esto se debe a que el punto $(1,1)$ es $\theta = 45^\circ$, y en el punto $(-1,1)$ es $\theta = 135^\circ$. Se tiene:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha} \frac{dz}{z} &= \int_{1+i}^{-1+i} \frac{dz}{z} = \log z \Big|_{1+i}^{-1+i} = \log \sqrt{2} + i \text{Arg}(-1+i) - [\log \sqrt{2} + i \text{Arg}(1+i)] \\ &= i \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) = i \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

- En $[-1+i, -1-i]$, que corresponde al segmento que une $(-1,1)$ con $(-1,-1)$, elegimos el argumento comprendido entre 0 y 2π . Esto pues en el punto $(-1,1)$ es $\theta = 135^\circ$ y en $(-1,-1)$ es $\theta = 225^\circ$. Se tiene:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha} \frac{dz}{z} &= \int_{-1+i}^{-1-i} \frac{dz}{z} = \log z \Big|_{-1+i}^{-1-i} = \log \sqrt{2} + i \text{Arg}(-1-i) - [\log \sqrt{2} + i \text{Arg}(-1+i)] \\ &= i \left(\frac{5\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} \right) = i \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

5.4 Algunas consecuencias del teorema integral de Cauchy

- En $[-1-i, 1-i]$, que corresponde al segmento que une $(-1, -1)$ con $(1, -1)$, elegimos el argumento comprendido entre 0 y 2π . Esto pues en el punto $(-1, -1)$ es $\theta = 225^\circ$ y en $(1, -1)$ es $\theta = 315^\circ$. Se tiene:

$$\begin{aligned}\int_{\alpha} \frac{dz}{z} &= \int_{-1-i}^{1-i} \frac{dz}{z} = \log z \Big|_{-1-i}^{1-i} = \log \sqrt{2} + i \operatorname{Arg}(-1-i) - [\log \sqrt{2} + i \operatorname{Arg}(1-i)] \\ &= i \left(\frac{7\pi}{4} - \frac{5\pi}{4} \right) = i \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

- En $[1-i, 1+i]$, que corresponde al segmento que une $(1, -1)$ con $(1, 1)$, elegimos el argumento comprendido entre $-\pi$ y π , ya que en el punto $(1, -1)$ es $\theta = -45^\circ$ y en $(1, 1)$ es $\theta = 45^\circ$. Se tiene:

$$\begin{aligned}\int_{\alpha} \frac{dz}{z} &= \int_{1-i}^{1+i} \frac{dz}{z} = \log z \Big|_{1-i}^{1+i} = \log \sqrt{2} + i \operatorname{Arg}(1-i) - [\log \sqrt{2} + i \operatorname{Arg}(1+i)] \\ &= i \left(\frac{\pi}{4} - \frac{-\pi}{4} \right) = i \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Sumando todos los resultados se obtiene

$$\int_{\alpha} \frac{dz}{z} = 2\pi i$$

Ejemplo 5.4.21. Calculemos $\int_{\alpha} \frac{e^{iz}}{z^2} dz$ siendo $\alpha(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Aplicamos la fórmula de Cauchy para la derivada de la función e^{iz} en el punto 0, resulta

$$\int_{\alpha} \frac{e^{iz}}{z^2} dz = 2\pi i f'(0) = 2\pi i \cdot ie^{i0} = -2\pi$$

Ejemplo 5.4.22. Hallemos $\int_{\alpha} z^2 dz$, con $\alpha(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$.

La función en la curva tiene el valor $f(\alpha(t)) = e^{2it}$. Además, $\alpha'(t) = ie^{it}$. Luego,

$$\int_{\alpha} z^2 dz = \int_0^{\pi} e^{2it} \cdot ie^{it} dt = i \int_0^{\pi} e^{3it} dt = \frac{1}{3} e^{3it} \Big|_0^{\pi}$$

Al evaluar

$$\int_{\alpha} z^2 dz = \frac{1}{3} (e^{3i\pi} - 1) = -\frac{2}{3}$$

Ejemplo 5.4.23. Sea $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\alpha(t) = 3e^{it}$. Hallemos

$$I = \int_{\alpha} \frac{\cos(\pi z^2) + \operatorname{sen}(\pi z^2) dz}{(z-1)(z-2)}$$

Es claro que $n(\alpha, 1) = n(\alpha, 2) = 1$ y que $f(z) = \cos(\pi z^2) + \operatorname{sen}(\pi z^2)$. En fracciones parciales:

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = -\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2}$$

Luego,

$$I = -\int_{\alpha} \frac{f(z) dz}{z-1} + \int_{\alpha} \frac{f(z) dz}{z-2} = -2\pi i n(\alpha, 1) \cdot f(1) + 2\pi i n(\alpha, 2) \cdot f(2)$$

Al evaluar

$$I = 2\pi i [-f(1) + f(2)] = 4\pi i$$

5.5. Series de potencia

Estudiaremos ahora la representación de funciones analíticas mediante series, y a continuación ciertos resultados que facilitarán el cálculo de integrales complejas e integrales reales impropias, difíciles de resolver mediante integración no compleja.

Definición 5.5.1. La sucesión de números complejos $\{z_n\}$ tiene un límite o converge a un número complejo z , si para todo $\epsilon > 0$ existe un número entero positivo N tal que

$$|z_n - z| < \epsilon \text{ siempre que } n > N$$

Cuando el límite de la sucesión $\{z_n\}$ existe, es decir, que $\{z_n\}$ converge a z , se escribe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$$

Si la sucesión no tiene límite, entonces diverge.

Teorema 5.5.2. Sean $z_n = x_n + iy_n$, con $n = 0, 1, 2, \dots$, para x_n y y_n números reales, y $z = x + iy$ para x e y números reales. Entonces,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z \iff \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \quad y \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$$

Ejemplo 5.5.3. Determinemos si la sucesión $z_n = \frac{1}{n} + i \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$ converge.

Se tiene que $z_n = x_n + iy_n$, donde,

$$x_n = \frac{1}{n} \quad y \quad y_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$$

Ahora, como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \quad y \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) = 1$$

entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = i$$

de lo cual deducimos que ella es convergente.

5.5 Series de potencia

Definición 5.5.4. Una serie infinita $\sum_{n=0}^{\infty} z_n = z_0 + z_1 + z_2 + \cdots$ de números complejos converge a un número complejo S , llamado suma de la serie, si la sucesión

$$S_N = \sum_{n=0}^N z_n$$

de sumas parciales converge a S ; entonces se escribe

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = S$$

Teorema 5.5.5. Sean $z_n = x_n + iy_n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) para x_n e y_n números reales, y $S = X + iY$ para X e Y números reales. Entonces,

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = S \iff \sum_{n=0}^{\infty} x_n = X \quad y \quad \sum_{n=0}^{\infty} y_n = Y$$

Definición 5.5.6. (Serie de potencias)

Dada una sucesión $\{z_n\}$ de números complejos, a la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{5.7}$$

se le llama **serie de potencias** alrededor de $z = z_0$. A los números complejos a_n se les llama coeficientes de la serie; z_0 y z son números complejos.

El siguiente teorema da una idea completa del campo de convergencia de las series de potencias.

Teorema 5.5.7. Sea $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Entonces:

- Si $\alpha = \infty$, la serie (5.7) es convergente en el único punto $z = z_0$.
- Si $0 < \alpha < \infty$, la serie es absolutamente convergente en el círculo $|z - z_0| < \frac{1}{\alpha}$ y es divergente en el exterior de este círculo.
- Si $\alpha = 0$, la serie es absolutamente convergente en todo el plano.

De este modo, cuando $0 < \alpha < \infty$, existe un círculo con el centro en el punto $z = z_0$, en el interior del cual la serie (5.7) es absolutamente convergente y en el exterior del cual la serie es divergente. Este se llama **círculo de convergencia** de la serie de potencias y su radio $R = \frac{1}{\alpha}$, radio de convergencia de la misma. Los casos $\alpha = \infty$ y $\alpha = 0$ se pueden considerar como casos límites. En el primero de ellos el círculo de convergencia se reduce a un punto z_0 y su radio R es igual a cero. En el segundo, el círculo de convergencia se extiende a todo el plano, de modo que se puede considerar que su radio es igual a ∞ . Llamando en los tres casos al número R radio de convergencia de la serie de potencias, se obtiene la fórmula de Cauchy - Hadamard

$$R = \frac{1}{\alpha}$$

Ejemplo 5.5.8. Hallar el círculo y el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^n$.

Es claro que $z_0 = 0$. Usemos criterio del cociente

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) = e$$

Por consiguiente, $R = \frac{1}{e}$

5.5.1. Serie de Taylor

Dada una función analítica ¿es siempre posible encontrar una serie de potencias cuya suma sea dicha función en algún dominio? Dicho de otro modo ¿es posible representar cualquier función analítica por medio de una serie de potencias? La respuesta es afirmativa, como veremos en el siguiente resultado.

Teorema 5.5.9. (Taylor)

Sea f una función analítica en todo punto del disco $D = \{|z - z_0| < r\}$, entonces en cada punto de z del disco D , la función f tiene la representación

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0) \frac{z - z_0}{1!} + f''(z_0) \frac{(z - z_0)^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!} (z - z_0)^{n-1} + R_n(z) \quad (5.8)$$

Si $z_0 = 0$, esta representación se llama de Maclaurin. $R_n(z)$ se conoce como el “resto” de la serie.

Demostración.

Consideremos un punto z interior al disco D y sea C_1 el círculo de centro en z_0 encerrando z tal como muestra la figura. Así, de acuerdo con el fórmula integral de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(w)dw}{w - z}$$

Hacemos el siguiente artificio

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{(w - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{w - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{w - z_0}}$$

Sabemos que

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + \frac{x^n}{1 - x}$$

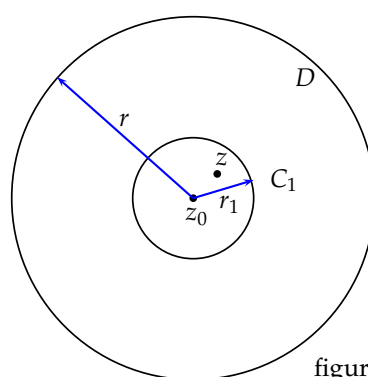


figura 5.15

5.5 Series de potencia

Luego, para $x = \frac{z-z_0}{w-z_0}$ se tiene que

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-z_0} \cdot \left(1 + \frac{z-z_0}{w-z_0} + \cdots + \left(\frac{z-z_0}{w-z_0} \right)^{n-1} + \frac{\left(\frac{z-z_0}{w-z_0} \right)^n}{1 - \frac{z-z_0}{w-z_0}} \right)$$

Así,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(w) dw}{w-z_0} + \frac{z-z_0}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(w) dw}{(w-z_0)^2} + \cdots + \frac{(z-z_0)^{n-1}}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(w) dw}{(w-z_0)^n} + \frac{(z-z_0)^n}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(w) dw}{(w-z_0)^n(w-z)}$$

Usando el hecho de que

$$\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(w) dw}{(w-z_0)^{k+1}}$$

entonces

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0) \frac{z-z_0}{1!} + f''(z_0) \frac{(z-z_0)^2}{2!} + \frac{(z-z_0)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(z_0) + \overbrace{h(z)(z-z_0)^n}^{R_n(z)}$$

donde

$$R_n(z) = \frac{(z-z_0)^n}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(w) dw}{(w-z_0)^n(w-z)}$$

Ahora probaremos que $R_n(z) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

$$|R_n(z)| \leq \frac{|z-a|^n}{2\pi} \int_{C_1} \frac{|f(w)| |dw|}{|w-z_0|^n |w-z|}$$

como $|f(w)| \leq M$, $|w-z_0| = r_1$, $|w-z| = |w-z_0 - (z-z_0)| \geq r_1 - |z-z_0|$, y si $|z-z_0| = r_2$ implica $r_2 < r_1$, entonces

$$|R_n(z)| \leq \frac{r_2^n}{2\pi} \cdot \frac{M}{r_1^n} \cdot \frac{2\pi r_1}{r_1 - r_2} = \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^n \cdot \frac{Mr_1}{r_1 - r_2}$$

Si $n \rightarrow \infty$, esta última expresión tiende a cero. Por tanto,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n, \quad \text{para todo } z_0 \in D^\circ$$

Observación. En el interior del círculo de convergencia, la serie de Taylor de f tiene las siguientes propiedades:

- Es absolutamente convergente.
- Es uniformemente convergente en cada subconjunto compacto.

- Define una función f que posee derivada de todos los órdenes. Esto es, una función f analítica.

Ejemplo 5.5.10. Dada la función $f(z) = e^z$ hallemos:

1. el desarrollo de Maclaurin de f .
2. el desarrollo de Taylor de f alrededor de $z = -i$.

1) El desarrollo de Maclaurin de e^z tiene la forma

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

Como $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ y $\frac{d}{dz}(e^z) = e^z$, entonces $a_n = \frac{1}{n!}$. Luego,

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

Dado que e^z es entera, el teorema de Taylor afirma que la serie anterior converge a e^z en todo punto del plano complejo.

2) El desarrollo de Taylor de f alrededor de $z = -i$ tiene la forma

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z + i)^n$$

La derivada n -ésima de e^z es la misma, y su evaluación en $z = -i$ es

$$f^{(n)}(z = -i) = e^{-i} \implies a_n = \frac{e^{-i}}{n!}$$

En consecuencia,

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-i}}{n!} (z + i)^n$$

Desarrollos conocidos y que pueden resultar de utilidad son:

$$\begin{aligned} \blacksquare \operatorname{sen} z &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} & \blacksquare \operatorname{senh} z &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} \\ \blacksquare \cos z &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} & \blacksquare \cosh z &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \end{aligned}$$

Estos desarrollos de Maclaurin son válidos en todo el plano complejo puesto que las cuatro funciones de la izquierda son enteras.

El siguiente teorema garantiza que el desarrollo de Taylor alrededor de z_0 de una función f , es la única serie de potencias que converge a f en un disco centrado en z_0 .

5.5 Series de potencia

Teorema 5.5.11. *El desarrollo en serie de Taylor alrededor de z_0 de una función f es la única serie de potencias de $(z - z_0)$ que converge a f en todo punto de un disco centrado en z_0 .*

El siguiente teorema nos permite calcular el radio de convergencia del mayor círculo para el cual la serie de Taylor de una función f converge.

Teorema 5.5.12. *Consideremos el desarrollo en serie de Taylor de una función f alrededor de z_0 . El mayor círculo dentro del cual esta serie converge a f en cada punto es $|z - z_0| = r$, donde r es la distancia entre z_0 y el punto singular de f más cercano.*

Este teorema no afirma que la serie de Taylor no converja fuera de $|z - z_0| = r$. Sólo asevera que este es el mayor círculo en todo punto del cual la serie converge a f .

El círculo en todo punto del cual la serie de Taylor

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

converge a f y el círculo en todo punto del cual la serie converge no son necesariamente iguales. El segundo de ellos puede tener un radio mayor. No obstante, se puede mostrar que cuando el punto singular más cercano a z_0 es tal que $|f(z)|$ se hace infinito, los dos círculos coinciden. Éste es el caso en la mayor parte de las funciones que consideraremos.

Ejemplo 5.5.13. *Sin determinar el desarrollo de Taylor, calculemos el radio del círculo máximo en donde el desarrollo indicado es válido:*

$$f(z) = \frac{1}{1 - z} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z + 1)^n$$

De la forma que tiene la serie tenemos que converge dentro de un disco centrado en $z_0 = -1$. El punto singular de f es $z = 1$. La distancia de z_0 a $z = 1$ es 2. Así, el desarrollo de Taylor converge a f en el disco $|z + 1| < 2$.

5.5.2. Serie de Laurent

Si una función f es analítica en el anillo $\{r_1 < |z - z_0| < r_2\}$, pero no lo es en todo el entorno $V(z_0, r_2)$, entonces no puede representarse allí por una serie de potencias. Si embargo, Laurent descubrió en 1843 que una función como esta puede representarse por medio de dos series, una de ellas es una serie de potencias de $(z - z_0)$ y la otra una serie de potencias de $(z - z_0)^{-1}$.

Una serie de la forma

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{(z - z_0)^k}$$

es una serie de potencias en la variable $w = (z - z_0)^{-1}$. Por tanto, existe $0 \leq R \leq \infty$ tal que la serie converge absolutamente a una función analítica si $|z - z_0| > R$ y diverge si $|z - z_0| < R$, siendo la convergencia de la serie absoluta y uniforme en el complemento de cualquier disco $D(z_0, r)$ con $r > R$. Consideremos ahora la expresión.

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z - z_0)^k \quad (5.9)$$

La primera serie convergerá absolutamente en un disco $D(z_0, r_2)$, y la segunda para $|z - z_0| > r_1$. Por tanto, f estará definida y será analítica en la corona circular

$$C(z_0, r_1, r_2) = \{z / r_1 < |z - z_0| < r_2\}$$

(**corona de convergencia**), siempre y cuando sea $0 \leq r_1 < r_2 \leq \infty$. Además (por los resultados sobre series de potencias) la convergencia de ambas series es absoluta y uniforme en toda subcorona cerrada contenida en $C(z_0, r_1, r_2)$. Una serie de este tipo se denomina serie de Laurent centrada en z_0 . Esto es,

Definición 5.5.14. (*Serie de Laurent*)

El desarrollo en serie de Laurent de una función f alrededor del punto z_0 es

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$$

donde la serie converge a $f(z)$ en cierto dominio o región (corona).

Así pues, un desarrollo de Laurent, a diferencia del desarrollo de Taylor, puede contener uno o más términos con $(z - z_0)$ elevado a una potencia negativa. También puede contener potencias positivas de $(z - z_0)$.

Normalmente los desarrollos de Laurent se obtienen a partir de los desarrollos de Taylor.

¿Qué clase de funciones pueden representarse por medio de series de Laurent y en qué región del plano complejo será válida dicha representación? La respuesta se encuentra en el siguiente resultado.

Teorema 5.5.15. (*Teorema de Laurent*)

Sea f una función analítica en la corona $C(z_0, R_1, R_2)$ con $0 \leq R_1 < R_2 \leq \infty$. Si $R_1 < r < R_2$, sea C_r la circunferencia de centro z_0 y radio r orientada positivamente, y definamos

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Entonces f admite el desarrollo en serie de Laurent

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$$

donde la serie del miembro derecho converge absoluta y uniformemente en cada subcorona cerrada contenida en $C(z_0, R_1, R_2)$.

- Ejemplo 5.5.16.** Hallemos desarrollo en serie de Laurent en torno de $z = 0$ de $f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2}$, cuando:

- $$\frac{1}{z^2 - 3z + 2} = \frac{1}{z - 2} - \frac{1}{z - 1}$$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1$$
$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2-z} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n$$
$$-\frac{1}{z-1} = \frac{1}{1-z} = \sum_0^\infty z^n$$
$$\frac{1}{z^2 - 3z + 2} = -\frac{1}{2} \sum_0^\infty \left(\frac{z}{2}\right)^n + \sum_0^\infty z^n$$
$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$$

364

- $\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \sum_0^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n$, válida en $|z| < 2$
- $-\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z} \sum_0^{\infty} \frac{1}{z^n} = \sum_0^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}}$, válida en $|z| > 1$

Luego, la función tiene la representación:

$$f(z) = -\frac{1}{2} \sum_0^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n + \sum_0^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} = -\frac{1}{2} \sum_0^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n + \sum_{-\infty}^{-1} z^n$$

En la última serie se hizo cambio de índices: $n = -n - 1$. Al escribir $f(z)$ en forma más compacta se tiene:

$$f(z) = -\sum_{-\infty}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n = -\sum_{-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

en donde

$$c_n = \begin{cases} -1 & , \text{si } n < 0 \\ -\frac{1}{2^{n+1}} & , \text{si } n \geq 0 \end{cases}$$

■ Si $2 < |z| < r$, $r > 2$, entonces

- $\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{z}} = -\frac{1}{z} \sum_0^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_0^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}}$, válida en $|z| > 2$
- $-\frac{1}{z-1} = \frac{1}{1-z} = \sum_0^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}}$, válida para $|z| > 1$

Se concluye que, para $|z| > 2$ es válida la representación

$$f(z) = \sum_0^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}} - \sum_0^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} = \sum_0^{\infty} \frac{2^n - 1}{z^{n+1}}$$

Como los coeficientes son del tipo $z^{-(n+1)}$, entonces hacemos $n = -n - 1$ para tener:

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{-1} \left(2^{-n-1} - 1\right) z^n = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

donde

$$c_n = \begin{cases} 0 & , \text{si } n \geq 0 \\ 2^{-n-1} - 1 & , \text{si } n < 0 \end{cases}$$

5.5.3. Propiedades adicionales de las series

■ Diferenciación e integración término a término

Si una función f está representada por una serie de potencias en una región anular R , la serie que se obtiene por diferenciación término a término converge a f' dentro de R . Este procedimiento puede repetirse un número indefinido de veces. También es cierto que si se integra término a término la representación en serie de f a lo largo de una trayectoria contenida en R , la serie que resulta de esta operación converge a la integral de f efectuada a lo largo de la misma trayectoria.

Ejemplo 5.5.17. Usemos el desarrollo de Taylor de $\frac{1}{z}$ alrededor de $z_0 = 1$ para obtener el desarrollo de $\frac{1}{z^2}$ alrededor del mismo punto.

La función $f(z) = \frac{1}{z}$ es analítica en todo el plano complejo excepto en el cero. Así, el desarrollo de Taylor de f alrededor de $z = 1$ es

$$f(z) = \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n$$

el cual es válido en el disco $|z-1| < 1$. Ahora, diferenciando término a término la serie anterior obtenemos

$$-\frac{1}{z^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n (z-1)^{n-1}$$

para todo z tal que $|z-1| < 1$. De esta forma, el desarrollo de Taylor de $\frac{1}{z^2}$ es

$$\frac{1}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} n (z-1)^{n-1}$$

Si queremos que la serie parta de 0, entonces con $n+1 = n$ se tiene

$$\frac{1}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) (z-1)^n, \text{ válido para } |z-1| < 1$$

Ejemplo 5.5.18. Hallemos la serie de Maclaurin de $g(z) = \int_0^z f(s) ds$, donde

$$f(s) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} s}{s}, & \text{si } s \neq 0 \\ 1, & \text{si } s = 0 \end{cases}$$

El desarrollo de Maclaurin de $\operatorname{sen} s$, que conocemos, es

$$\operatorname{sen} s = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{s^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

el que es válido en todo el plano complejo. Se sigue que

$$\frac{\operatorname{sen} s}{s} = \sum_1^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{s^{2n-2}}{(2n-1)!}$$

Ahora, integrando término a término la expresión anterior

$$\int_0^z \frac{\operatorname{sen} s}{s} = \sum_1^{\infty} \int_0^z (-1)^{n+1} \frac{s^{2n-2}}{(2n-1)!}$$

Integrando el lado derecho de esta última igualdad, y evaluando, se llega a que

$$\int_0^z \frac{\operatorname{sen} s}{s} = \sum_1^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)(2n-1)!} \right] z^{2n-1}$$

desarrollo que es válido en todo el plano complejo.

5.6. Polos, singularidades y residuos

Definición 5.6.1. Un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ se dice que es **singular aislado** de una función f , si f es analítica en una vecindad $V(z_0)$, pero no lo es en z_0 .

Ejemplo 5.6.2. El único punto singular aislado de la función $f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z-2}$ es $z = 2$, ya que $z = 2$ es el único cero del denominador.

De acuerdo con la definición de punto singular aislado, existe un anillo $\{r_1 < |z - z_0| < r_2\}$ en el que f es analítica y tiene desarrollo de Laurent único.

$$f(z) = \sum_0^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_1^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n}$$

Definición 5.6.3. (Parte Principal)

La parte del desarrollo de Laurent de f que posee potencias negativas de $z - z_0$ se denomina **parte principal** de f en z_0 . En otras palabras,

$$\sum_1^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n}$$

es la parte principal de f en z_0 .

Ejemplo 5.6.4. Determinemos la parte principal de $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$ en cada uno de sus puntos singulares.

Los puntos singulares aislados de f son: $z_1 = 0$ y $z_2 = 1$. El desarrollo de Laurent de f alrededor de $z_1 = 0$ es

$$f(z) = -\sum_1^{\infty} z^{n-1} + \frac{1}{z}, \quad 0 < |z| < 1$$

5.6 Polos, singularidades y residuos

de donde se deduce que la parte principal de f en $z_1 = 0$ es

$$-\frac{1}{z}$$

Por otra parte, el desarrollo de Laurent de f alrededor de $z_2 = 1$ es

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (z-1)^{n-1} + \frac{1}{z-1}, \quad 0 < |z-1| < 1$$

de donde se deduce que la parte principal de f en $z_2 = 1$ es

$$\frac{1}{z-1}$$

Definición 5.6.5. Un punto singular puede ser de uno de los siguientes tipos:

1. Si $a_{-n} = 0$ para todo $n = 1, 2, \dots$, se dice que z_0 es una singularidad **evitable** o **removable**.
2. Si $a_{-n} \neq 0$ para algún n , pero $a_{-m} = 0$ para todo $m > n$, entonces z_0 se llama **polo** de orden n . Si $n = 1$ el polo se llama **simple**.
3. Si $a_{-n} \neq 0$ para infinitos valores de n , entonces z_0 se llama **singularidad esencial**.

Un método rápido para determinar el tipo de singularidad en z_0 , sin tener que recurrir a efectuar el desarrollo de Laurent es como sigue:

Definición 5.6.6. Sea z_0 una singularidad aislada de f , entonces:

- z_0 singularidad evitable si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ existe.
- z_0 polo de orden n si $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n f(z) = M \neq 0$ existe y $M \neq \infty$.
- z_0 esencial si $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n f(z)$ no existe (ni finito ni infinito), para todo n .

Teorema 5.6.7. Si f tiene un polo en z_0 , entonces $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$.

Ejemplo 5.6.8. $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ tiene singularidad esencial en $z = 0$.

El desarrollo en serie de Laurent es

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n}, \quad |z| > 0$$

la parte principal de esta serie tiene infinitos valores de n para los cuales $a_{-n} = \frac{1}{n!} \neq 0$, luego la singularidad es esencial.

Si hacemos uso de la definición, resulta más claro.

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^n e^{\frac{1}{z}} = \lim_{w \rightarrow \infty} \frac{e^w}{w^n} = \lim_{w \rightarrow \infty} \frac{e^w}{n!} = \infty$$

Esto se obtiene después de n pasos usando regla de L'Hôpital.

Ejemplo 5.6.9. $f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z}$ tiene singularidad evitable en $z = 0$.

Visto el problema desde la perspectiva de su desarrollo en serie de Laurent

$$\frac{\operatorname{sen} z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \dots$$

Se observa que $a_{-n} = 0$ para todo n . Por tanto, la singularidad es evitable. Si lo vemos por el límite, entonces

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} z}{z} = 1, \quad \text{¡evitable!}$$

Ejemplo 5.6.10. La función $f(z) = \frac{1}{z^2(z-1)(z-2)}$ tiene polos en $z = 0, z = 1$ y $z = 2$.

- $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z^2(z-1)(z-2)} \cdot z^2 = \frac{1}{2}$. Polo de orden 2.
- $\lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{z^2(z-1)(z-2)} \cdot (z-1) = -1$. Polo simple.
- $\lim_{z \rightarrow 2} \frac{1}{z^2(z-1)(z-2)} \cdot (z-2) = \frac{1}{4}$. Polo simple.

Es tan común encontrarse con problemas en los que se quiere determinar el orden de los polos de una función de la forma $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$, que les dedicaremos una atención especial.

Teorema 5.6.11. Sea $z_0 \in \mathbb{C}$. Sea f una función tal que $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$, donde $p(z)$ y $q(z)$ son analíticas en z_0 y $p(z_0) \neq 0$. Entonces, z_0 es un polo de orden m de f , si y sólo si,

$$q(z_0) = q'(z_0) = \dots = q^{(m-1)}(z_0) = 0 \quad \text{y} \quad q^{(m)}(z_0) \neq 0$$

Ejemplo 5.6.12. Verifiquemos que todos los puntos singulares aislados de $f(z) = \frac{e^z}{\operatorname{sen} z}$ son polos simples.

Se tiene una función de la forma $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$, con $p(z) = e^z$, $q(z) = \operatorname{sen} z$. Ahora, los puntos singulares aislados de f son de la forma

$$z_n = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

De esta forma, $p(z_n) \neq 0$, $q(z_n) = 0$ y $q'(z_n) \neq 0$, para todo n . Por tanto, z_n es un polo simple de f para todo n .

5.7. Residuo

Definición 5.7.1. Sea f una función analítica sobre un contorno cerrado simple C y en todo punto interior a C , salvo en z_0 . El residuo de f en z_0 , que se denota por $\text{Res}[f(z)]_{z=z_0}$ o bien $\text{Res}(f(z), z_0)$, está definido por

$$\text{Res}[f(z)]_{z=z_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz$$

La relación que existe entre $\text{Res}[f(z)]_{z=z_0}$ y una serie de Laurent para f es la siguiente.

Teorema 5.7.2. El residuo de la función f en el punto singular aislado z_0 es igual al coeficiente de $(z - z_0)^{-1}$ en la serie de Laurent que representa a f en una región anular dada por $0 < |z - z_0| < r$, para cierto número real $r > 0$.

Debido a que z_0 es un punto singular aislado de f , existe un número $r > 0$ tal que f es analítica en cada punto z tal que $0 < |z - z_0| < r$. En ese dominio la función f está representada por la serie de Laurent

$$f(z) = \sum_0^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_1^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

Sea C la circunferencia $|z - z_0| = R < r$, entonces

$$\begin{aligned} \text{Res}[f(z)]_{z=z_0} &= \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \left[\sum_0^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_1^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \right] dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left[\sum_0^{\infty} a_n \int_C (z - z_0)^n dz + \sum_1^{\infty} b_n \int_C \frac{dz}{(z - z_0)^n} \right] \end{aligned}$$

Se tiene que

$$\int_C (z - z_0)^n dz = \begin{cases} 0, n \neq -1 \\ 2\pi i, n = -1 \end{cases}$$

En consecuencia,

$$\text{Res}[f(z)]_{z=z_0} = b_1 = a_{-1}$$

Ejemplo 5.7.3. Calculemos el residuo de $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ en $z = 0$.

El desarrollo de Laurent de $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ alrededor de $z = 0$ es

$$f(z) = \sum_0^{\infty} \frac{1}{n! z^n}$$

Luego el residuo de f en $z = 0$ es $\text{Res}[f(z)]_{z=0} = 1$.

El siguiente teorema nos garantiza que si una función posee un número finito de puntos singulares en el interior de un contorno cerrado simple, éstos son aislados.

Teorema 5.7.4. Si una función f tiene sólo un número finito de puntos singulares interiores a cierto contorno cerrado simple C , entonces éstos deben estar aislados.

5.7.1. Cálculo del residuo

Cuando una función f tiene una singularidad removible en z_0 su residuo es cero. Ahora, cuando una función f tiene una singularidad esencial en z_0 , la única manera que podemos determinar el residuo en dicho punto consiste en obtener el desarrollo de Laurent alrededor de z_0 y elegir el coeficiente apropiado.

Pero si la función tiene un polo en z_0 no es necesario obtener todo el desarrollo de Laurent alrededor de z_0 para encontrar el coeficiente que buscamos. Existen diversos métodos de los que podemos echar mano siempre y cuando sepamos que la singularidad es un polo.

Cálculo del residuo en un Polo

El siguiente teorema nos permite identificar si un punto z_0 es un polo de f y, además, nos dice como calcular $\text{Res}[f(z)]_{z=z_0}$

Teorema 5.7.5. Sea f una función de variable compleja. Supongamos que para cierto entero positivo m , la función

$$\phi(z) = (z - z_0)^m f(z)$$

se puede definir en z_0 de modo que sea analítica ahí y $\phi(z_0) \neq 0$. Entonces f tiene un polo de orden m en z_0 . Su residuo allí está dado por las fórmulas:

- $\text{Res}[f(z)]_{z=z_0} = \frac{\phi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$, si $m > 1$.
- $\text{Res}[f(z)]_{z=z_0} = \phi(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z)$, si $m = 1$.

Métodos para el cálculo de residuos

- Sea $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$, con g, h analíticas en un entorno de z_0 , $g(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = 0$ y $h'(z_0) \neq 0$. Entonces f tiene un polo simple en z_0 , con residuo

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

Demostración.

En efecto, en un entorno de z_0 se tiene

$$h(z) = h'(z_0)(z - z_0) \cdot H(z)$$

con H analítica y $H(z_0) = 1$ (teorema de Taylor). Por tanto

$$f(z) = \frac{1}{h'(z_0)(z - z_0)} \cdot \frac{g(z)}{H(z)}$$

Como $\frac{g}{H}$ es analítica en z_0 ($H(z_0) \neq 0$), f tiene un polo simple en z_0 con residuo

$$\frac{1}{h'(z_0)} \cdot \frac{g(z_0)}{H(z_0)} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

ya que $H(z_0) = 1$.

- Si f tiene un polo de orden n en z_0 entonces

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{(n-1)}}{dz^{(n-1)}} [(z - z_0)^n f(z)]$$

Demostración.

En efecto, en un entorno reducido de z_0 es válido el desarrollo de Laurent

$$f(z) = \frac{b_n}{(z - z_0)^n} + \cdots + \frac{b_1}{z - z_0} + g(z)$$

con g analítica en z_0 (serie de Taylor). Por tanto en un entorno reducido de z_0 se cumple

$$(z - z_0)^n f(z) = b_n + \cdots + b_1(z - z_0)^{n-1} + G(z) \cdot F(z)$$

donde $G(z) = (z - z_0)^n g(z)$ es analítica en z_0 y tiene un cero de orden mayor o igual que n en dicho punto, y F es analítica en z_0 . Por el teorema de Taylor,

$$\text{Res}(f, z_0) = b_1 = \frac{F^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} F^{(n-1)}(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{(n-1)}}{dz^{(n-1)}} [(z - z_0)^n f(z)]$$

Ejemplo 5.7.6. Hallemos $\text{Res}(f, i)$ si $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^3}$.

Es claro que, $z = i$ es un polo de orden 3

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^3} = \frac{1}{(z+i)^3(z-i)^3}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} a_{-1} &= \frac{1}{(3-1)!} \lim_{z \rightarrow i} \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{1}{(z+i)^3(z-i)^3} \cdot (z-i)^3 \right) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow i} \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{1}{(z+i)^3} \right) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow i} 12(z+i)^{-5} \\ &= -\frac{3i}{16} \end{aligned}$$

se sigue que

$$\text{Res}(f, i) = -\frac{3i}{16}$$

5.7.2. Teorema de los residuos

Teorema 5.7.7. Sea C un contorno cerrado simple y sea f analítica sobre y dentro de C , excepto tal vez en los puntos singulares aislados $z_1, z_2, \dots, z_n$ dentro de C , en donde los residuos de f son, respectivamente, $R_1, R_2, \dots, R_n$, entonces

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}(f, R_j)$$

Demostración.

Como los z_j son aislados, existen trayectorias Γ_j cerradas, simples y disjuntas encerrando estas singularidades. Además, todas ellas contenidas en el interior de C (figura 5.16). Usando el teorema integral de Cauchy para regiones múltiplemente conexas se tiene que

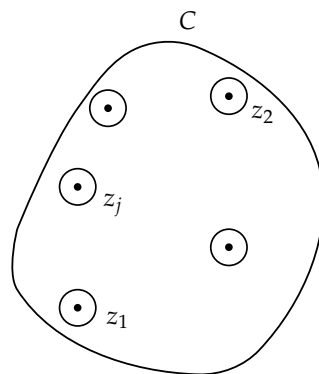


figura 5.16

$$\int_C f(z) dz = \sum_{j=1}^n \int_{\Gamma_j} f(z) dz = \sum_{j=1}^n 2\pi i \text{Res}(f, R_j) = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}(f, R_j)$$

5.8. Cálculo de integrales

Veremos ahora la importancia de los residuos en el cálculo de ciertas integrales no sencillas de resolver con cálculo tradicional.

5.8.1. Integrales del tipo $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$

Si f es analítica en $H = \{z \in \mathbb{C} / \text{Im}z \geq 0\}$, con la posible excepción de un número finito de singularidades z_k fuera del eje real, y tal que existe $p > 1, R > 0$ y $M > 0$ tal que

$$|f(z)| < \frac{M}{|z|^p}, \quad \forall z \in H, |z| > R$$

entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\text{Im}z_k > 0} \text{Res}(f, z_k)$$

Demostración.

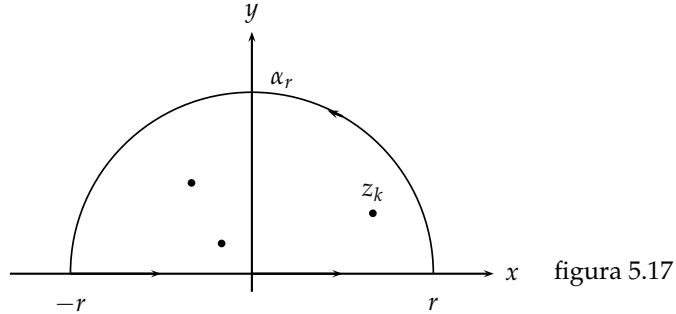


figura 5.17

Sea α_r la semicircunferencia de radio r orientada positivamente, con $r > R$ lo suficientemente grande para que todas las singularidades (necesariamente aisladas) de f en H estén en el interior de α_r . Entonces

$$\int_{\alpha_r} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\text{Im} z_k > 0} \text{Res}(f, z_k) = \int_{-r}^r f(x) dx + \int_0^\pi f(re^{i\theta}) ire^{i\theta} d\theta$$

Como $|f(x)| < M|x|^{-p}$ con $p > 1$ para $|x| > R$, la primera integral del miembro derecho converge a $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx$ cuando $r \rightarrow \infty$ (criterio de comparación). En cuanto a la segunda, su módulo está acotado por $M\pi r^{1-p}$, que tiende a 0 cuando $r \rightarrow \infty$.

Observación.

- Un resultado análogo vale intercambiando el semiplano superior H por el semiplano inferior $L = \{z \in \mathbb{C} / \text{Im} z \leq 0\}$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = -2\pi i \sum_{\text{Im} z_k < 0} \text{Res}(f, z_k)$$

5.8.2. Integrales del tipo $\int_{-\infty}^\infty \frac{p(x)}{q(x)} dx$

Aquí, p y q son polinomios reales primos entre sí, tal que q no tiene ceros reales (no hay polos en el eje x), entonces la integral converge siempre que el grado de q sea al menos dos unidades mayor que el grado de p . El valor al cual converge se encuentra aplicando el teorema del residuo a un contorno cerrado C como el de la figura 5.18, que consta del segmento que une $-R$ con R y el semicírculo S de radio R .

La función que se considera es

$$I = \int_C \frac{P(z)}{Q(z)} dz$$

donde P y Q no tienen ceros en común y Q tiene ceros sólo en el semiplano superior (en caso de que

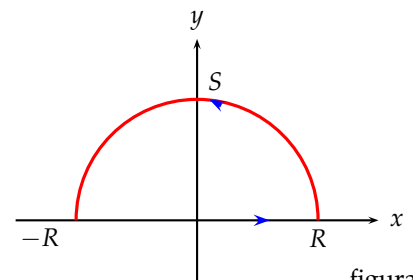


figura 9.58

Q tenga ceros en el semiplano inferior es análogo y sólo se considera que S une R con $-R$ sobre el semiplano inferior)

Ejemplo 5.8.1. Hallemos $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}$.

Los ceros de $1+z^4$ son: $e^{i\frac{\pi}{4}}, e^{i\frac{3\pi}{4}}, e^{i\frac{5\pi}{4}}, e^{i\frac{7\pi}{4}}$, de los cuales sólo los dos primeros pertenecen al semiplano superior (basta ver los argumentos). Los residuos son:

$$\text{Res}(f, e^{i\frac{\pi}{4}}) = \lim_{z \rightarrow e^{i\frac{\pi}{4}}} (z - e^{i\frac{\pi}{4}}) \cdot \frac{1}{1+z^4} = -\frac{\sqrt{2}}{8}(1+i)$$

atención que hicimos uso de la regla de L'Hôpital. Además,

$$\text{Res}(f, e^{i\frac{3\pi}{4}}) = \lim_{z \rightarrow e^{i\frac{3\pi}{4}}} (z - e^{i\frac{3\pi}{4}}) \cdot \frac{1}{1+z^4} = \frac{\sqrt{2}}{8}(1-i)$$

En consecuencia,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = 2\pi i \left(-\frac{\sqrt{2}}{8}(1+i) + \frac{\sqrt{2}}{8}(1-i) \right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

Ejemplo 5.8.2. Hallemos $\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{1+x^4}$.

Dado que el integrando es par,

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{1+x^4} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}$$

Tenemos dos grados de diferencia, por tanto sirve el mismo circuito del ejemplo anterior. Los residuos son:

$$\text{Res}(f, e^{i\frac{\pi}{4}}) = \lim_{z \rightarrow e^{i\frac{\pi}{4}}} (z - e^{i\frac{\pi}{4}}) \cdot \frac{z^2}{1+z^4} = \frac{\sqrt{2}}{8}(1-i)$$

$$\text{Res}(f, e^{i\frac{3\pi}{4}}) = \lim_{z \rightarrow e^{i\frac{3\pi}{4}}} (z - e^{i\frac{3\pi}{4}}) \cdot \frac{z^2}{1+z^4} = -\frac{\sqrt{2}}{8}(1+i)$$

En consecuencia,

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{1+x^4} = 2\pi i \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{8}(1-i) - \frac{\sqrt{2}}{8}(1+i) \right) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

Ejemplo 5.8.3. Calculemos $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{(x^2 + 4x + 13)^2}$.

El integrando es del tipo $\frac{P}{Q}$, $Q \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, de hecho, los ceros de Q son polos dobles $z = -2 \pm 3i$. Además, el grado de Q es 4, que es mayor en 3 que el grado de P que es 1. Por tanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{(x^2 + 4x + 13)^2} = 2\pi i \text{Res}(f, -2 + 3i)$$

Calculemos el residuo en $z_0 = -2 + 3i$.

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^2}, \text{ con } g(z) = \frac{z}{(z + 2 + 3i)^2}$$

como $g(z_0) \neq 0$, z_0 es un polo doble de f , con residuo

$$g'(z_0) = \frac{1}{(z_0 + 2 + 3i)^2} - \frac{2z_0}{(z_0 + 2 + 3i)^3} = \frac{2 + 3i - z_0}{(z_0 + 2 + 3i)^3} = \frac{4}{(6i)^3} = \frac{4i}{6^3}$$

Por tanto,

$$I = -\frac{8\pi}{6^3} = -\frac{\pi}{27}$$

5.8.3. Integral del tipo $\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$

Si R es una función racional de dos variables cuyo denominador no se anula para todo $\theta \in [0, 2\pi)$, entonces

$$\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta = 2\pi i \sum_{|z_k| < 1} \text{Res}(f, z_k)$$

en donde,

$$f(z) = \frac{1}{iz} R\left(\frac{1}{2}(z + z^{-1}), \frac{1}{2i}(z - z^{-1})\right)$$

También, es posible hacer el cambio $z = e^{i\theta}$ e integrar sobre la circunferencia unitaria de centro el origen.

Ejemplo 5.8.4. Hallemos $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(5 - 3\sin \theta)^2}$

La función trigonométrica $\sin \theta = \frac{1}{2i}(z - z^{-1})$. Así,

$$f(z) = \frac{1}{iz[5 - \frac{3}{2i}(z + z^{-1})]^2}$$

Al desarrollar

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{iz[25 + 15i - \frac{9}{4}(z + z^{-1})^2]} = \frac{-4z^2}{iz(10iz - 3z^2 + 3)} \\ &= \frac{4iz}{(3z^2 - 10iz - 3)^2} \\ &= \frac{4iz}{9(z - 3i)^2(z - \frac{i}{3})^2} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(5 - 3\operatorname{sen}\theta)^2} = -\frac{8\pi}{9} \operatorname{Res}(g, \frac{i}{3}), \text{ con } g(z) = \frac{z}{(z - 3i)^2} \cdot \frac{1}{(z - \frac{i}{3})^2} = \frac{h(z)}{(z - \frac{i}{3})^2}$$

El residuo es igual a

$$h'(\frac{i}{3}) = \frac{1}{(\frac{i}{3} - 3i)^2} - \frac{\frac{2i}{3}}{(\frac{i}{3} - 3i)^3} = \frac{\frac{i}{3} - 3i - \frac{2i}{3}}{(\frac{i}{3} - 3i)^3} = \frac{-\frac{10i}{3}}{-(\frac{8}{3})^3 i^3} = -\frac{90}{8^3}$$

En consecuencia,

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(5 - 3\operatorname{sen}\theta)^2} = \frac{5\pi}{32}$$

Ejemplo 5.8.5. Hallemos $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b \operatorname{sen}\theta}$, $a^2 > b^2 > 0$, $ab > 0$.

Si $z = e^{i\theta}$, entonces

$$\begin{cases} e^{i\theta} &= \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta \\ e^{-i\theta} &= \cos\theta - i \operatorname{sen}\theta \end{cases} \implies \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$$

con lo cual

$$a + b \operatorname{sen}\theta = a + b \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z})$$

Además, $dz = i e^{i\theta} d\theta$. De esta manera

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b \operatorname{sen}\theta} = \frac{1}{i} \int_C \frac{\frac{dz}{z}}{a + \frac{b}{2i}(z - \frac{1}{z})} = 2 \int_C \frac{dz}{2aiz + bz^2 - b}$$

Expresión que escribimos en la forma

$$I = \frac{2}{b} \int_C \frac{dz}{z^2 + i\frac{2a}{b}z - 1}$$

Busquemos los polos interiores a C.

$$z^2 + i\frac{2a}{b}z - 1 = 0 \implies \begin{cases} z_1 &= -i \left(\frac{a}{b} + \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1} \right) \\ z_2 &= -i \left(\frac{a}{b} - \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1} \right) \end{cases}$$

5.8 Cálculo de integrales

Por hipótesis, $a^2 > b^2 \implies \frac{a^2}{b^2} > 1$, de lo cual:

$$|z_1| = \sqrt{\left(\frac{a}{b} + \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1}\right)^2} = \frac{a}{b} + \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1} > \frac{a}{b} > 1$$

se sigue que $z_1 \notin \text{Int}(C)$. Veamos que sucede con z_2 .

$$|z_1||z_2| = \left(\frac{a}{b} + \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1}\right) \cdot \left(\frac{a}{b} - \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1}\right) = \frac{a^2}{b^2} - \left(\frac{a^2}{b^2} - 1\right) = 1$$

se sigue que

$$|z_2| = \frac{1}{|z_1|} \implies |z_2| < 1, \text{ pues } |z_1| > 1$$

Así, z_2 es el único polo simple interior a C . su residuo es (L'Hôpital)

$$\text{Res}(f, z_2) = \lim_{z \rightarrow z_2} (z - z_2) \cdot \frac{2}{b} \frac{1}{z^2 + i\frac{2a}{b}z - 1} = \lim_{z \rightarrow z_2} \frac{2}{b} \frac{1}{2z + i\frac{2a}{b}}$$

de donde,

$$\text{Res}(f, z_2) = \frac{1}{i\sqrt{a^2 - b^2}}$$

En consecuencia,

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b \sen \theta} = 2\pi i \cdot \frac{1}{i\sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

5.8.4. Integrales $\int_{-\infty}^{\infty} R(x) \sen mx \, dx$ y $\int_{-\infty}^{\infty} R(x) \cos mx \, dx$

En esta clase de integrales es $m > 0$, y se eligen:

- $I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} R(x) \sen mx \, dx$
- $I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} R(x) \cos mx \, dx$

Además, para la integración se emplea un contorno como el de la figura 5.19, y se considera que

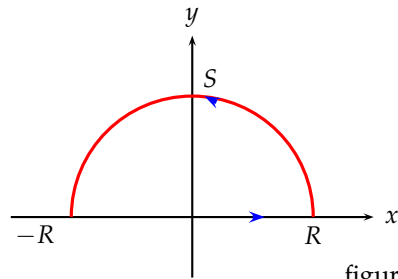


figura 5.19

$$I = I_1 + i I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} R(x) (\cos mx + i \sen mx) \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} R(x) e^{imx} \, dx$$

Ejemplo 5.8.6. Hallemos $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} mx}{x^2 + a^2} dx$, en donde $a, m \in \mathbb{R}^+$.

Se considera $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{ix}}{x^2 + a^2} dx$, y luego

$$\operatorname{Im} \int_C \frac{z e^{imz}}{x^2 + a^2}$$

Los polos son: $z_1 = ai$ y $z_2 = -ai$. Como el recinto es el de la figura 9.19, el único polo interior a C es z_1 pues, $a > 0$. El residuo es (usando L'Hôpital)

$$\operatorname{Res}(f, ai) = \lim_{z \rightarrow ai} (z - ai) \cdot \frac{z e^{imz}}{x^2 + a^2} = \frac{1}{2} e^{-ma}$$

Por tanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} mx}{x^2 + a^2} dx = \operatorname{Im}(2\pi i \cdot \frac{1}{2} e^{-ma}) = \pi e^{-ma}$$

5.8.5. Integral del tipo $\int_{-\infty}^{\infty} e^{imx} f(x) dx$

Sea $f(z)$ función meromorfa (todas sus singularidades, si las tiene, son polos) que puede tener polos simples en el eje real y tal que $f \rightarrow 0$ uniformemente sobre cualquier arco circular centrado en $z = 0$ cuando el radio del arco tiende a infinito, entonces para calcular integrales de la forma

- $I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \operatorname{sen} mx dx$
- $I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \operatorname{cos} mx dx$

el contorno que se considera es como el de la figura 5.20 y la integral compleja de la forma

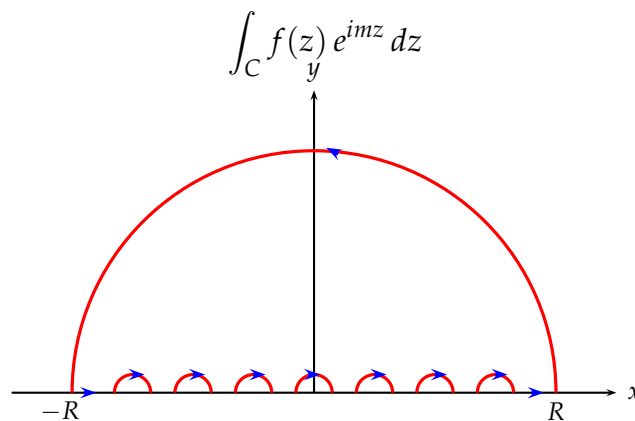


figura 5.20

Si $\sum r$ es la suma de los residuos de $f(z) e^{imz}$ dentro del contorno C y $\sum r'$ es la suma de los residuos de $f(z) e^{imz}$ en los polos simples de $f(z)$ en el eje real, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{imx} dx = 2\pi i (\sum r + \frac{1}{2} \sum r')$$

Observación.

- Si $m < 0$, se obtiene un resultado análogo intercambiando el semiplano superior por el semiplano inferior L . Se debe agregar el cambio de signo en la integral.
- Si $f = \frac{P}{Q}$, con $P \neq 0$ y Q polinomios y $Q(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, cumple las condiciones anteriores si (y sólo si) $\text{grad } Q \geq \text{grad } P + 1$. Este es el caso tratado en el apartado anterior.

Ejemplo 5.8.7. Hallemos $\int_0^\infty \frac{\cos(wx)}{x^4 + x^2 + 1}, \text{ si } w > 0.$

Se observa que el integrando es par, por tanto,

$$\int_0^\infty \frac{\cos(wx)}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos(wx)}{x^4 + x^2 + 1}$$

Ahora, La integral del lado derecho es la parte real de

$$J = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{iwx}}{x^4 + x^2 + 1}$$

Podemos aplicar lo anterior a la función racional

$$f(z) = \frac{1}{2}(z^4 + z^2 + 1)$$

en el semiplano superior (f no tiene singularidades en el eje real). Las singularidades (polos) de f se calculan resolviendo la ecuación

$$z^4 + z^2 + 1 = 0 \iff z^2 = \frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3}) = \pm e^{\pm i\pi/3}$$

Las únicas singularidades en el semiplano superior son

$$z_1 = e^{i\pi/3} = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}), \quad z_2 = -e^{-i\pi/3} = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}) = -\bar{z}_1$$

El residuo de $e^{i\omega z} f(z)$ en cualquiera de estas singularidades z_i se calcula fácilmente, ya que $e^{i\omega z} f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ con $g(z_i) \neq 0, h(z_i) = 0$ y $h'(z_i) \neq 0$

$$\text{Res}(f, z_i) = \frac{1}{4} \frac{e^{i\omega z_i}}{z_i(2z_i^2 + 1)}$$

De esto se deduce que

$$J = \frac{\pi i}{2} \left[\frac{e^{i\omega z_1}}{z_1(2z_1^2 + 1)} - \frac{e^{-i\omega \bar{z}_1}}{\bar{z}_1(2\bar{z}_1^2 + 1)} \right] = -\pi \text{Im} \left[\frac{e^{i\omega z_1}}{z_1(2z_1^2 + 1)} \right] = -\pi \text{Im } A$$

Como

$$A = \frac{2e^{\frac{iw}{2}(1+i\sqrt{3})}}{(1+i\sqrt{3})i\sqrt{3}} = \frac{2e^{\frac{w}{2}(i-\sqrt{3})}}{(i-\sqrt{3})\sqrt{3}} = -\frac{i+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}e^{\frac{w}{2}(i-\sqrt{3})}$$

se obtiene

$$I = \operatorname{Re}(J) = -\pi \operatorname{Im} A = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}w} \left(\cos \frac{w}{2} + \sqrt{3} \operatorname{sen} \frac{w}{2} \right)$$

Ejemplo 5.8.8. Hallemos $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} mx \, dx}{x}$, $m > 0$

Tal como se ha indicado, se considera $\int_C f(z) e^{imz} \, dz$, con $f(z) = \frac{1}{z}$. Esta función es meromorfa y tiende a cero cuando $R \rightarrow \infty$. El recinto de integración es el que muestra la figura 5.21.

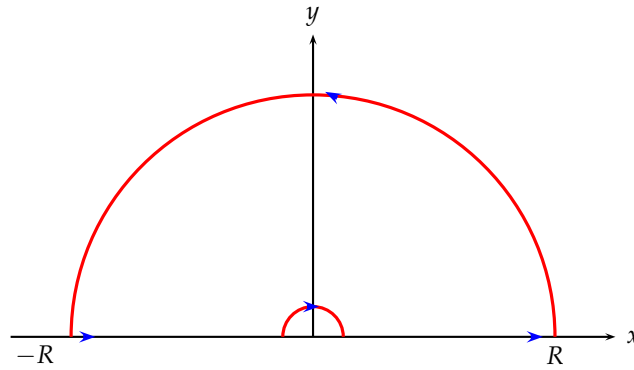


figura 5.21

Un hecho interesante de observar es que no hay polos dentro del contorno C y que el único polo sobre el eje real está en $z = 0$ y es simple. Su residuo es

$$\operatorname{Res}(f, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} z \cdot \frac{e^{imz}}{z} = 1$$

En consecuencia,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} mx \, dx}{x} = \operatorname{Im}(2\pi i \cdot [0 + \frac{1}{2} \cdot 1]) = \pi$$

5.8.6. Integrales $\int_0^{\infty} x^{-k} R(x) \, dx$

La función $R(z)$ a considerar es una función racional de z que no tiene polos en $z = 0$ ni en la parte positiva del eje real, y k no es un entero. Para asegurar convergencia es necesario probar primero que

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{1-k} R(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^{1-k} R(x) = 0$$

Luego se usa la integral compleja

$$\int_C z^{-k} R(z) \, dz$$

5.8 Cálculo de integrales

donde C es el contorno cerrado que muestra la figura 5.22. Por otra parte, como k no es entero, el integrando tiene un punto de ramificación en $z = 0$. Además, se considera $z^{-k} = e^{-k \ln z}$, y se selecciona la rama de z^{-k} que corresponde a la rama

$$\ln z = \ln r + i\theta, \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

es decir,

$$z^{-k} = e^{-k(\log r + i\theta)}, \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

Con todos estos datos las integrales de este tipo se calculan mediante la expresión

$$\int_0^\infty x^{-k} R(x) dx = \frac{\pi e^{k\pi i}}{\operatorname{sen} k\pi} \cdot \sum r$$

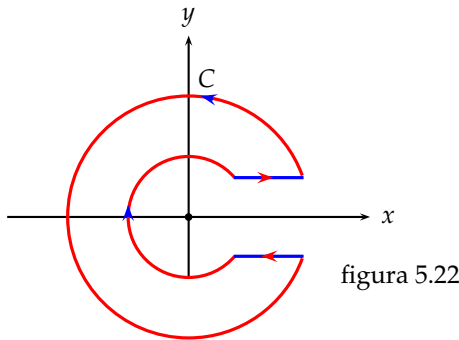


figura 5.22

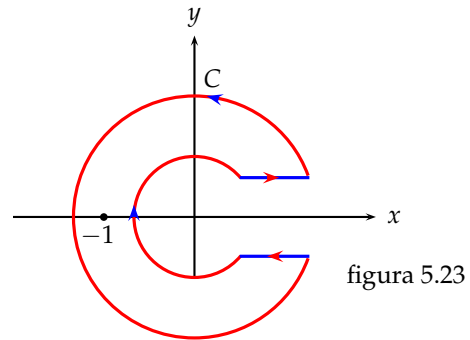


figura 5.23

Ejemplo 5.8.9. Hallemos $\int_0^\infty \frac{x^{-k}}{x+1} dx$, si $0 < k < 1$.

En primer lugar, verifiquemos el asunto de los límites.

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{1-k}}{1+x} = \frac{0}{1} = 0$, pues $0 < k < 1$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{1-k}}{1+x} \sim \frac{\infty}{\infty} = 0$, al usar L'Hôpital.

Ahora trabajamos la integral compleja $\int_0^\infty \frac{z^{-k}}{z+1} dz$, sobre el contorno indicado en la figura 5.23. Se observa que $z = -1$ es un polo simple. Su residuo es

$$\operatorname{Res}(f, -1) = \lim_{z \rightarrow -1} (z+1) \cdot \frac{z^{-k}}{z+1} = \lim_{z \rightarrow -1} z^{-k} = \lim_{z \rightarrow -1} e^{-k(\ln |z| + i \operatorname{Arg}(-1))} = e^{-k\pi i}$$

Se concluye que

$$\int_0^\infty \frac{x^{-k}}{x+1} dx = \frac{\pi e^{k\pi i}}{\operatorname{sen} k\pi} \cdot e^{-k\pi i} = \frac{\pi}{\operatorname{sen} k\pi}$$

Ejemplo 5.8.10. Hallemos $\int_0^\infty \frac{x^{-k}}{x^2+1} dx$, si $-1 < k < 1$.

La propiedad de los límites es fácilmente verificable. Hacemos uso de la función compleja

$$f(z) = \frac{z^{-k}}{z^2+1} = \frac{z^{-k}}{(z+i)(z-i)}$$

Tenemos dos polos simples, $z = i$ y $z = -i$, cuyos residuos son:

- $\text{Res}(f, i) = \lim_{z \rightarrow i} (z-i) \cdot \frac{z^{-k}}{(z+i)(z-i)} = \frac{1}{2i} e^{-k(\ln|i|+i\text{Arg}(i))} = \frac{1}{2i} e^{-\frac{k\pi i}{2}}$
- $\text{Res}(f, -i) = \lim_{z \rightarrow -i} (z+i) \cdot \frac{z^{-k}}{(z+i)(z-i)} = -\frac{1}{2i} e^{-k(\ln|-i|+i\text{Arg}(-i))} = -\frac{1}{2i} e^{-\frac{k3\pi i}{2}}$

El $\text{Arg}(-i) = \frac{3\pi}{2}$, ya que el contorno se recorre en sentido positivo (no es $-\frac{\pi}{2}$). Por lo tanto,

$$\sum r_j = \frac{1}{2i} e^{-\frac{k\pi i}{2}} - \frac{1}{2i} e^{-\frac{3k\pi i}{2}} = \frac{1}{2i} e^{-\frac{k\pi i}{2}} [1 - e^{-k\pi i}]$$

En consecuencia,

$$\int_0^\infty \frac{x^{-k}}{x^2+1} dx = \frac{\pi e^{k\pi i}}{\text{sen } k\pi} \cdot \frac{1}{2i} e^{-\frac{k\pi i}{2}} [1 - e^{-k\pi i}] = \frac{\pi i}{2\text{sen } k\pi} \cdot [e^{-k\pi i} - 1] e^{\frac{k\pi i}{2}}$$

Esto se puede transformar en un valor real, que es lo que corresponde.

$$\begin{aligned} \frac{\pi i}{2\text{sen } k\pi} \cdot [e^{-k\pi i} - 1] e^{\frac{k\pi i}{2}} &= \frac{\pi}{\text{sen } k\pi} \cdot \frac{1}{2i} [e^{ik\frac{\pi}{2}} - e^{-ki\frac{\pi}{2}}] \\ &= \frac{\pi}{\text{sen } k\pi} \cdot \text{sen } \frac{k\pi}{2} \\ &= \frac{\pi}{2\text{sen } \frac{k\pi}{2} \cos \frac{k\pi}{2}} \cdot \text{sen } \frac{k\pi}{2} = \frac{\pi}{2\cos \frac{k\pi}{2}} \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\int_0^\infty \frac{x^{-k}}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{2\cos \frac{k\pi}{2}}$$

5.8.7. Valor principal de Cauchy

Supongamos que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es **no acotada** en un entorno de $x_0 \in \mathbb{R}$, y que existen las integrales impropias $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ y $\int_c^\infty f(x) dx$ para todo $b < x_0 < c$. En ese caso,

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{x_0-\epsilon} f(x) dx + \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{x_0+\delta}^\infty f(x) dx$$

Evidentemente, si la integral impropia existe entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{-\infty}^{x_0 - \epsilon} f(x) dx + \int_{x_0 + \epsilon}^{\infty} f(x) dx \right]$$

El miembro derecho se denomina valor principal de Cauchy de la integral impropia:

$$V.P. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{-\infty}^{x_0 - \epsilon} f(x) dx + \int_{x_0 + \epsilon}^{\infty} f(x) dx \right]$$

(Esta definición se generaliza de manera obvia al caso en que f tiene un número finito de singularidades en el eje real) Si existe la integral impropia entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = V.P. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

Sin embargo, el valor principal de Cauchy puede existir aunque no exista la integral impropia: por ejemplo, si f es una función impar e integrable entonces

$$V.P. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 0$$

y sin embargo, la integral impropia no existe.

Sea f una función analítica en H , excepto en un número finito de singularidades z_k , siendo las posibles singularidades de f en el eje real polos simples. Si f satisface una de las dos condiciones siguientes:

1. $\exists p > 1, R > 0, M > 0$ tal que $|f(z)| < \frac{M}{|z|^p}$ si $|z| > R$ y $z \in H$.
2. $f(z) = e^{i\omega z} g(z)$, con $\omega > 0$ y $|g(z)| \rightarrow 0$ cuando $|z| \rightarrow \infty$ en H , entonces

$$V.P. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\text{Im } z_k > 0} \text{Res}(f, z_k) + \pi i \sum_{z_k \in \mathbb{R}} \text{Res}(f, z_k)$$

Observación. Si se reemplaza H por L y $\omega > 0$ por $\omega < 0$, entonces

$$V.P. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = -2\pi i \sum_{\text{Im } z_k > 0} \text{Res}(f, z_k) - \pi i \sum_{z_k \in \mathbb{R}} \text{Res}(f, z_k)$$

Ejemplo 5.8.11. Hallemos $I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

Si definimos $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ para $x \neq 0$ y $f(0) = 1$, entonces f es continua en 0 y par, y por tanto

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

Al ser f continua en 0

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = V.P. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

si el miembro derecho existe. En tal caso

$$I = \frac{1}{2} V.P. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left[V.P. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx \right] = \frac{1}{2} J$$

La función $f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z}$ tiene una singularidad evitable en $z = 0$, pero no cumple las condiciones

(1) o (2). Sin embargo, $g(z) = \frac{e^{iz}}{z}$ tiene un polo simple en el origen y cumple la condición (2) del apartado anterior, por lo que

$$J = \pi i \operatorname{Res} \left(\frac{e^{iz}}{z}, 0 \right) = \pi i \cdot 1 \implies I = \frac{\pi}{2}$$

Ejemplo 5.8.12. $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} dx$

Si f es la función del apartado anterior

$$I = \frac{1}{2} V.P. \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) dx = \frac{1}{4} V.P. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} dx$$

Esto sugiere que consideremos

$$\frac{1}{4} \operatorname{Re} \left[V.P. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{2ix}}{x^2} dx \right] = \frac{1}{4} J$$

Si $g(z) = \frac{1 - e^{2iz}}{z^2}$, entonces

$$|g(z)| \leq \frac{1 + |e^{iz}|}{|z|^2} \leq \frac{2}{|z|^2}, \quad \operatorname{Im} z \geq 0, z \neq 0$$

y por tanto se cumple la condición (1) en el semiplano superior. Además, $z = 0$ es un polo simple de g (el numerador tiene un cero simple y el denominador uno doble en el origen), con residuo

$$\operatorname{Res}(g, 0) = -2ie^{2iz} \Big|_{z=0} = -2i$$

Por tanto,

$$J = \pi i \cdot (-2i) = 2\pi \implies I = \frac{\pi}{2}$$

Ejemplo 5.8.13. Hallemos $I = V.P. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sen x dx}{(x-1)(x^2+4)}$

Aquí. $I = \text{Im } J$, en donde

$$J = V.P. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix} dx}{(x-1)(x^2+4)}$$

La función

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{(z-1)(z^2+4)}$$

es analítica en $C - \{1, \pm 2i\}$, y la singularidad en $z = 1$ es claramente un polo simple. Además, se cumple claramente la condición (ii) en el semiplano superior, por lo que

$$J = \pi i [\text{Res}(f, 1) + 2\text{Res}(f, 2i)] = \pi i \left[\frac{e^i}{5} + \frac{2e^{-2}}{(2i-1) \cdot 4i} \right] = \pi i \left[\frac{e^i}{5} + \frac{e^{-2}}{2(2+i)} \right]$$

O bien,

$$J = \pi i \left[\frac{e^i}{5} + \frac{(2-i)e^{-2}}{10} \right]$$

Por tanto,

$$I = \frac{\pi}{5} \left(\cos 1 - \frac{1}{e^2} \right)$$

5.8.8. Integrales del tipo $\int_0^{\infty} f(x) \log x dx$

Las condiciones son:

1. f es una función real y par.
2. f es analítica en H , excepto tal vez en un número finito de singularidades $z_k \notin \mathbb{R} - \{0\}$
3. Existen $M_1, M_2, R_1 > R_2$ constantes positivas y $a < 1 < b$ tales que

$$f(z) < \begin{cases} \frac{M_1}{|z|^b}, |z| > R_1 \\ \frac{M_2}{|z|^a}, 0 < |z| < R_2 \end{cases}$$

entonces

$$\int_0^{\infty} f(x) \log x dx = -\pi i \left[\sum_{\text{Im } z_k > 0} \text{Res}(f(z) \log z, z_k) \right], \quad \log \equiv \log_{[-\pi/2, 3\pi/2]}$$

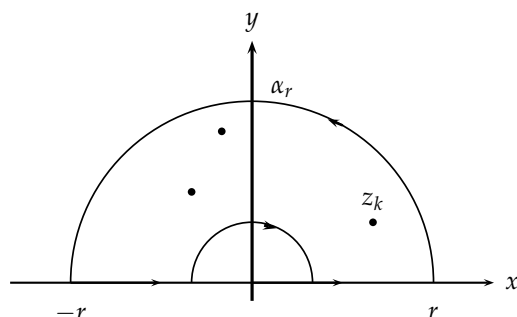


figura 5.24

Ejemplo 5.8.14. Hallemos $I = \int_0^\infty \frac{\log x}{(x^2 + 1)^2} dx$

La función $f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2}$ cumple todas las condiciones anteriores ($a = 0$ y $b = 4$). La única singularidad en el semiplano superior es $z_0 = i$. Como

$$f(z) \log z = \frac{\log z}{(z + i)^2} \cdot \frac{1}{(z - i)^2}$$

se tiene

$$\text{Res}(f(z) \log z, i) = \frac{d}{dz} \left[\frac{\log z}{(z + i)^2} \right]_{z=i} = \frac{1}{i(2i)^2} - \frac{2 \log i}{(2i)^3} = \frac{i}{4} - \frac{i}{4} \log i = \frac{i}{4} + \frac{\pi}{8}$$

Por tanto,

$$I = -\frac{\pi}{4}$$

5.8.9. Transformada de Laplace inversa por residuos

Finalizamos las aplicaciones de los residuos, calculando algunas transformadas de Laplace inversas.

Teorema 5.8.15. Si $\mathcal{L}[F(t)] = f(s)$, entonces la transformada inversa $\mathcal{L}^{-1}[f(s)] = F(t)$ viene dada por

$$F(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{st} f(s) ds, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Este resultado se conoce como **fórmula de inversión compleja**, o fórmula integral de Bromwich, y ofrece un método directo para obtener la transformada inversa de una función $f(s)$. El contorno de integración, llamado contorno de Bromwich, es el que muestra la figura 5.25, y que está compuesto de un segmento recto y un arco de circunferencia de radio R y centrado en el origen.

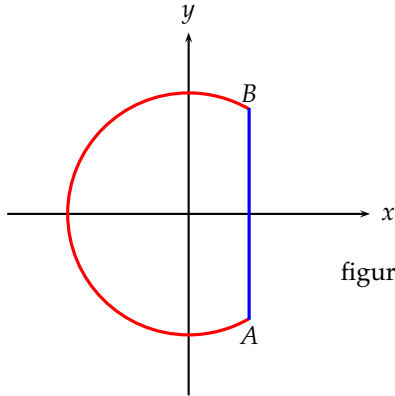


figura 5.25

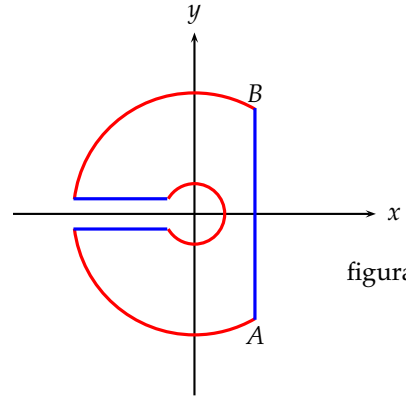


figura 5.26

Ejemplo 5.8.16. Hallemos la transformada inversa de $f(s) = \frac{1}{s-2}$ usando la fórmula de inversión.

En $s = 2$ tenemos un polo simple, cuyo residuo es

$$\text{Res}\left(\frac{e^{st}}{s-2}, 2\right) = \lim_{s \rightarrow 2} (s-2) \cdot \frac{e^{st}}{s-2} = e^{2t}$$

Luego,

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{st}}{s-2} = \frac{1}{2\pi i} \cdot 2\pi i \cdot e^{2t} = e^{2t}$$

Observación.

- Si $f(s)$ tiene puntos de ramificación hay que modificar convenientemente el contorno de Bromwich. Por ejemplo, como lo muestra la figura 5.26.
- Si la función $f(s)$ tiene infinitas singularidades aisladas, puede aplicarse el método anterior tomando la parte curva del contorno con radio R_m y que encierre sólo un número finito de singularidades sin pasar por ninguna de ellas. La transformada inversa de Laplace que se busca se encuentra tomando un límite conveniente cuando $m \rightarrow \infty$.

Ejemplo 5.8.17. Hallemos la transformada inversa de $f(s) = \frac{1}{(s+1)(s-2)^2}$ usando la fórmula de inversión.

Hay dos polos, uno simple en $s = -1$ con residuo

$$\text{Res}\left(\frac{e^{st}}{(s+1)(s-2)^2}, -1\right) = \lim_{s \rightarrow -1} (s+1) \cdot \frac{e^{st}}{(s+1)(s-2)^2} = \frac{1}{9}e^{-t}$$

y otro doble en $s = 2$, con residuo

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}\left(\frac{e^{st}}{(s+1)(s-2)^2}, 2\right) &= \lim_{s \rightarrow 2} \frac{1}{1!} \frac{d}{ds} \left((s-2)^2 \cdot \frac{e^{st}}{(s+1)(s-2)^2} \right) \\ &= \lim_{s \rightarrow 2} \frac{d}{ds} \left(\frac{e^{st}}{s+1} \right) \\ &= \lim_{s \rightarrow 2} \left(\frac{te^{st}(s+1) - e^{st}}{(s+1)^2} \right) \\ &= \frac{1}{3}te^{2t} - \frac{1}{9}e^{2t} \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{st}}{(s+1)(s-2)^2} = \frac{1}{2\pi i} \cdot 2\pi i \cdot \left[\frac{1}{9}e^{-t} + \frac{1}{3}te^{2t} - \frac{1}{9}e^{2t} \right]$$

Es decir,

$$\mathcal{L} \left(\frac{1}{(s+1)(s-2)^2} \right) = \frac{1}{9}e^{-t} + \frac{1}{3}te^{2t} - \frac{1}{9}e^{2t}$$

5.9. Problemas resueltos

Ejemplo 5.9.1. *Probemos que $\operatorname{sen}(z) = \operatorname{sen}x \cosh(y) + i \cos x \operatorname{senh}(y)$*

Trabajemos el segundo miembro, utilizando las identidades

$$\operatorname{sen}x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}), \quad \cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}), \quad \operatorname{senh}(y) = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y}), \quad \cosh(y) = \frac{1}{2}(e^y + e^{-y})$$

Tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}x \cosh(y) + i \cos x \operatorname{senh}(y) &= \frac{1}{4i} \left((e^{ix} - e^{-ix})(e^y + e^{-y}) - (e^{ix} + e^{-ix})(e^y - e^{-y}) \right) \\ &= \frac{1}{4i} (2e^{ix}e^{-y} - 2e^{-ix}e^y) \\ &= \frac{1}{2i} (e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}) \\ &= \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}) = \operatorname{sen}(z) \end{aligned}$$

Ejemplo 5.9.2. *Probemos que $\cos(2z) = \cos^2 z - \operatorname{sen}^2 z$*

Vamos del segundo al primer miembro.

$$\begin{aligned} \cos^2 z - \operatorname{sen}^2 z &= \left[\frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) \right]^2 - \left[\frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) \right]^2 \\ &= \frac{1}{4} [2e^{2iz} + 2e^{-2iz}] = \frac{1}{2} (e^{2iz} + e^{-2iz}) \\ &= \cos(2z) \end{aligned}$$

Ejemplo 5.9.3. *Es sabido que $z^n = e^{\ln z^n} = e^{n \ln z}$. Probemos que*

$$(1+i)^i = e^{-\frac{\pi}{4} - 2n\pi} e^{\frac{i}{2} \log 2}$$

El complejo $1+i$, que se muestra en la figura 5.27, satisface $|1+i| = \sqrt{2}$ y $\operatorname{Arg}(1+i) = \frac{\pi}{4}$. Además,

$$\log(1+i) = \log |1+i| + i \operatorname{Arg}(1+i) + 2n\pi i, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Esto equivale a

$$\log(1+i) = \log \sqrt{2} + i \frac{\pi}{4} + 2n\pi i = \frac{1}{2} \log 2 + i \frac{\pi}{4} + 2n\pi i$$

Ahora,

$$(1+i)^i = e^{i \log(1+i)} = e^{i(\frac{1}{2} \log 2 + i \frac{\pi}{4} + 2n\pi i)} = e^{-\frac{\pi}{4} - 2n\pi} \cdot e^{\frac{i}{2} \log 2}$$

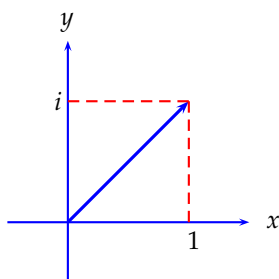


figura 5.27

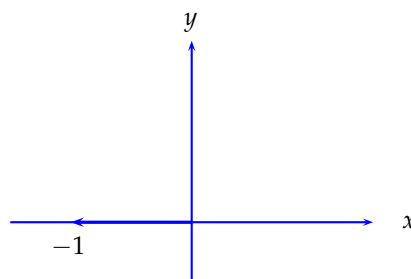


figura 5.28

Ejemplo 5.9.4. Hallemos $(-1)^{\frac{1}{\pi}}$

La figura 5.28 muestra $z = -1$. Tenemos que

$$\log(-1) = \log|-1| + i \operatorname{Arg}(-1) + 2n\pi i = \pi + 2n\pi i = (2n+1)\pi$$

En consecuencia,

$$(-1)^{1/\pi} = e^{\frac{1}{\pi} \log(-1)} = e^{2(n+1)i}$$

Ejemplo 5.9.5. Sean a, c, d, z números complejos, con $z \neq 0$. Comprobar que si todas las potencias involucradas son valores principales, entonces

$$1. z^{-c} = \frac{1}{z^c} \quad 2. (z^c)^n = z^{cn} \quad 3. z^c \cdot z^d = z^{c+d} \quad 4. \frac{z^c}{z^d} = z^{c-d}$$

$$1. z^c = e^{c \log z}, z^{-c} = e^{-c \log z} \implies z^c \cdot z^{-c} = e^{c \log z - c \log z} = 1 \implies z^{-c} = \frac{1}{z^c}$$

$$2. z^c = e^{c \log z} \implies (z^c)^n = (e^{c \log z})^n = e^{cn \log z} = e^{\log z^{cn}} = z^{cn}$$

$$3. z^c \cdot z^d = e^{c \log z} \cdot e^{d \log z} = e^{(c+d) \log z} = z^{c+d}$$

$$4. z^c \cdot z^{-d} = e^{c \log z} \cdot e^{-d \log z} = e^{(c-d) \log z} = z^{c-d}$$

Ejemplo 5.9.6. Hallemos el valor principal de i^i

El valor principal se obtiene con $n = 0$. El complejo $z = i$ satisface; $|i| = 1$, $\operatorname{Arg}(i) = \frac{\pi}{2}$. Luego,

$$i^i = e^{i \log i} = e^{i(0 + i\frac{\pi}{2})} = e^{-\frac{\pi}{2}}$$

Ejemplo 5.9.7. Hallemos $[\frac{e}{2}(-1 - i\sqrt{3})]^{3\pi i}$

El complejo $-1 - i\sqrt{3}$ tiene módulo 4 y $\operatorname{Arg}(-1 - i\sqrt{3}) = -\frac{2\pi}{3}$ en la rama principal. Por tanto,

$$\log\left(\frac{e}{2}(-1 - i\sqrt{3})\right) = \log\left|\frac{e}{2}(-1 - i\sqrt{3})\right| - \frac{2\pi}{3}i = \log e - \frac{2\pi}{3}i = 1 - \frac{2\pi}{3}i$$

En consecuencia,

$$\left[\frac{e}{2}(-1 - i\sqrt{3})\right]^{3\pi i} = e^{3\pi i(1 - \frac{2\pi}{3}i)} = -2e^{\pi^2}$$

5.9 Problemas resueltos

Ejemplo 5.9.8. Si $f'(z)$ existe, hallar la fórmula de $\frac{d}{dz}(c^{f(z)})$

Es claro que debemos usar la forma exponencial

$$c^{f(z)} = e^{f(z) \ln c} \implies \frac{d}{dz}(c^{f(z)}) = f'(z) \ln c e^{f(z) \ln c} = f'(z) \ln c c^{f(z)}$$

En síntesis, la fórmula es

$$\frac{d}{dz}(c^{f(z)}) = c^{f(z)} f'(z) \ln c$$

Ejemplo 5.9.9. Hallemos el valor de $\arctg(2i)$

Si $tg(w) = z$ se define $\arctg(z) = \frac{i}{2} \log \left(\frac{i+z}{i-z} \right)$. Por tanto,

$$\arctg(2i) = \frac{i}{2} \log \left(\frac{i+2i}{i-2i} \right) = \frac{i}{2} \log(-3)$$

Para determinar el valor de $\log(-3)$ tenemos

$$\log(-3) = \log|-3| + i \operatorname{Arg}(-3) + 2n\pi i = \log 3 + i\pi + 2n\pi i$$

En consecuencia,

$$\arctg(2i) = \frac{i}{2} (\log 3 + i\pi + 2n\pi i) = -\pi(n + \frac{1}{2}) + \frac{i}{2} \log 3$$

Ejemplo 5.9.10. Hallemos el valor de $\operatorname{arccosh}(-1)$

Si $\cosh(w) = z$ se define $\operatorname{arccosh}(z) = \log(z \pm \sqrt{z^2 - 1})$. Por tanto,

$$\operatorname{arccosh}(-1) = \log(-1 \pm \sqrt{1-1}) = \log|-1| + i \operatorname{Arg}(-1) + 2n\pi i$$

Como $\operatorname{Arg}(-1) = \pi$, entonces

$$\operatorname{arccosh}(-1) = i\pi + 2n\pi i = \pi i(2n+1), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Ejemplo 5.9.11. Hallemos los valores de z para los que $\operatorname{sen} z = 2$.

Si $\operatorname{sen} w = z$, entonces $\operatorname{arcsen}(z) = \frac{1}{i} \log(\sqrt{1-z^2} + iz)$. Por tanto,

$$\operatorname{arcsen}(2) = \frac{1}{i} \log(\sqrt{1-4} + 2i) = \frac{1}{i} \log(i\sqrt{3} + 2i)$$

Veamos cuánto vale este logaritmo

$$\log(i\sqrt{3} + 2i) = \log|i\sqrt{3} + 2i| + i \operatorname{Arg}(i\sqrt{3} + 2i) + 2n\pi i = \log(2 + \sqrt{3}) + i\frac{\pi}{2} + 2n\pi i$$

Por tanto,

$$\operatorname{arcsen}(2) = \frac{1}{i} \left[\log(2 + \sqrt{3}) + i\frac{\pi}{2} + 2n\pi i \right] = \pi(2n + \frac{1}{2}) + \frac{1}{i} \log(2 + \sqrt{3})$$

Ejemplo 5.9.12. Probemos que $f(z) = \sinh(z)$ tiene periodo $2\pi i$.

Suponemos que la función tiene periodo λ , entonces

$$\sinh(z) = \sinh(z + \lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \lambda = x + iy$$

Usando forma exponencial

$$\frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) = \frac{1}{2}(e^{z+\lambda} - e^{-(z+\lambda)})$$

después de desarrollar se llega a

$$e^z - e^{-z} = e^z e^\lambda - e^{-z} \frac{1}{e^\lambda}$$

se deduce que $e^\lambda = 1$, lo que equivale a tener

$$e^{x+iy} = 1 \implies e^x(\cos y + i \sin y) = 1 \implies \begin{cases} e^x \cos y = 1 \\ e^x \sin y = 0 \end{cases}$$

De la ecuación $e^x \sin y = 0$ se deduce que $\sin y = 0$, y de aquí que $y = n\pi$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Al reemplazar este valor de y en la ecuación $e^x \cos y = 1$ tenemos que

$$\pm e^x = 1 \implies x = 0, \quad y = n\pi \text{ par}$$

Luego,

$$\lambda = x + iy \implies \lambda = 0 + i2k\pi \implies \lambda = 2k\pi i$$

Como el periodo λ de la función $\sinh(z)$ lo representa el menor valor de k , es decir, $k = 1$, entonces el periodo de $\sinh(z)$ es $2\pi i$.

Ejemplo 5.9.13. Probemos que si $f(z) = \operatorname{Re}(z)$, entonces $f'(z)$ no existe.

Aplicamos la definición de derivada

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Re}(z + \Delta z) - \operatorname{Re}(z)}{\Delta z}$$

Como $\operatorname{Re}(z + \Delta z) = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Re}(\Delta z)$, entonces

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Re}(\Delta z) - \operatorname{Re}(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Re}(\Delta z)}{\Delta z} = \begin{cases} 1, & \text{si } \Delta z \text{ es real} \\ 0, & \text{si } \Delta z \text{ es imaginario puro} \end{cases}$$

Se sigue que $f'(z)$ no existe

Ejemplo 5.9.14. Probemos que si $f(z) = \bar{z}$, entonces $f'(z)$ no existe.

5.9 Problemas resueltos

Aplicamos la definición de derivada

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\overline{z + \Delta z} - \bar{z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$$

Si $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, entonces $\overline{\Delta z} = \Delta x - i\Delta y$. Luego,

$$f'(z) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}$$

Si hacemos $\Delta y = 0$, se tiene que

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

Por otra parte, si $\Delta x = 0$, se tiene que

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{-\Delta y}{\Delta y} = -1$$

Por tanto, la derivada de $f(z) = \bar{z}$ no existe.

Otra forma de probar esto, es ver si se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\bar{z} = x - iy = u + iv \implies u_x = 1, u_y = 0, v_x = 0, v_y = -1$$

Como $u_x \neq v_y$, entonces $f(z) = \bar{z}$ no es derivable.

Ejemplo 5.9.15. Probemos que $f(z) = z^3$ es derivable y hallemos su derivada.

Veamos si se satisface Cauchy-Riemann

$$z = x + iy \implies z^3 = x^3 + 3x^2iy - 3xy^2 - iy^3 = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3)$$

se deduce que

$$u_x = 3x^2 - 3y^2 = v_y \quad \text{y} \quad v_x = 6xy = -v_y$$

Tenemos que Cauchy-Riemann se satisfacen, por tanto, $f(z) = z^3$ es diferenciable. Hallemos su derivada

$$f(z) = u_x + iv_y = 3x^2 - 3y^2 + 6xyi = 3(x^2 - y^2 + 2xyi) = 3z^2$$

Ejemplo 5.9.16. Probemos que $f(z) = \begin{cases} \frac{\bar{z}^2}{z}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$ no es diferenciable en $z = 0$, pero que si se satisfacen las ecuaciones de Cauchy - Riemann.

Si $z = x + iy$, para $z \neq 0$ se tiene

$$f(z) = \frac{\bar{z}^2}{z} = \frac{(x - iy)^2}{x + iy} = \frac{(x - iy)^2}{x + iy} \cdot \frac{x - iy}{x - iy} = \frac{(x^3 - 3xy^2) + i(y^3 - 3x^2y)}{x^2 + y^2}$$

Es claro que,

$$u(x, y) = \frac{x^3 - 3xy^2}{x^2 + y^2}, \quad v(x, y) = \frac{y^3 - 3x^2y}{x^2 + y^2}$$

de lo cual se ve que

$$u_x = \frac{(3x^2 - 3y^2)(x^2 + y^2) - (x^3 - 3xy^2)(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^4 + 6x^2y^2 - 3y^4}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$v_y = \frac{(3y^2 - 3x^2)(x^2 + y^2) - (y^3 - 3x^2y)(2y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^4 + 6x^2y^2 - 3x^4}{(x^2 + y^2)^2}$$

Como $u_x \neq v_y$, se sigue que las condiciones de Cauchy - Riemann no se satisfacen para $z \neq 0$. En el origen se tiene

$$u_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{u(x, 0) - u(0, 0)}{x - 0} = 1$$

$$u_y(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{u(0, y) - u(0, 0)}{y - 0} = 0$$

$$v_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{v(x, 0) - v(0, 0)}{x - 0} = 0$$

$$v_y(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{v(0, y) - v(0, 0)}{y - 0} = 1$$

Como $u_x = v_y = 1$, $v_x = -u_y = 0$, las condiciones de Cauchy - Riemann se satisfacen en $(0, 0)$. Probamos a continuación que esta f no es diferenciable en $(0, 0)$. Tomaremos dos caminos:

- **camino $y = x$:** En este caso $f(z) = -x - ix$. Luego,

$$f'(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x - ix}{x + ix} = -1$$

- **camino $y = 0$:** En este caso $f(z) = x$. Luego,

$$f'(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 0}{x - 0} = 1$$

Se concluye que f no es diferenciable en $z = (0, 0)$.

Ejemplo 5.9.17. Determinemos las familias de curvas de nivel de las funciones componentes u y v cuando $f(z) = \frac{1}{z}$.

Escribimos primero f en términos de x e y .

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2} = u + iv$$

Ahora hacemos

$$C_1 = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad C_2 = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

Analizamos algunos casos:

- Si $C_1 = 0$, entonces $x = 0$
- Si $C_1 = 1$, entonces $x = x^2 + y^2$, de lo cual $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$
- Si $C_1 = 2$, entonces $x = 2x^2 + 2y^2$, de lo cual $(x - \frac{1}{4})^2 + y^2 = \frac{1}{16}$

Se deduce que existe una familia de circunferencias, tal como muestra la figura 9.29

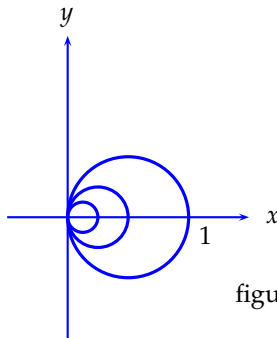


figura 5.29

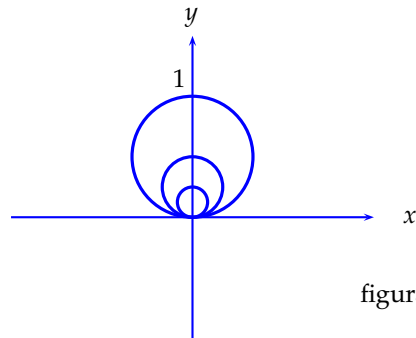


figura 5.30

Veamos ahora que sucede para algunos valores de C_2

- Si $C_2 = 0$, entonces $y = 0$
- Si $C_2 = 1$, entonces $y = x^2 + y^2$, de lo cual $x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$
- Si $C_2 = 2$, entonces $y = 2x^2 + 2y^2$, de lo cual $x^2 + (y - \frac{1}{4})^2 = \frac{1}{16}$

Una familia de circunferencia, que muestra la figura 9.30.

Ejemplo 5.9.18. Probemos que $\int_C \frac{e^{az}}{z} dz = 2\pi i$, si C es la circunferencia $z = e^{i\theta}$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$, $a \in \mathbb{R}$

Si $f(z) = \frac{e^{az}}{z}$, entonces g es analítica para todo $z \neq 0$. Luego, por teorema de Cauchy

$$\int_C \frac{e^{az}}{z} dz = 2\pi i g(z_0)$$

Como en este caso, $g(z) = e^{az}$ y $z_0 = 0$, entonces $g(z_0) = e^0 = 1$. Se sigue que

$$\int_C \frac{e^{az}}{z} dz = 2\pi i g(z_0) = 2\pi i$$

Ejemplo 5.9.19. Para cada arco C y función f hallar $\int_C f(z) dz$

1. $f(z) = y - x - 3x^2i$, C es el segmento de recta que une $z = 0$ con $z = 1 + i$

La figura 5.31 muestra el segmento sobre el que se hace la integración. La parametrización de C es $x = t$, $y = t$, $0 \leq t \leq 1$. Además, de $z = x + iy$ se halla que $dz = dx + idy$. Se tiene

$$\int_C f(z) dz = \int_0^1 (t - t - 3t^2i)(dt + idt) = \int_0^1 (-3t^2i)(dt + idt)$$

Al simplificar

$$\int_C f(z) dz = \int_0^1 (-3t^2i)(1 + i)dt = -3i(1 + i) \int_0^1 t^2 dt = 1 - i$$

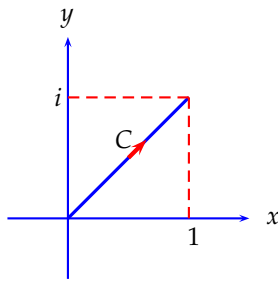


figura 5.31

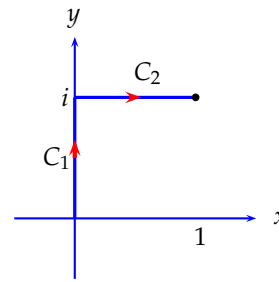


figura 5.32

2. $f(z) = y - x - 3x^2i$, C consta de los segmentos que unen $z = 0$ con $z = i$ y éste con $z = 1 + i$.

En la figura 5.32 se muestran los segmentos C_1 y C_2 de integración. Para C_1 se tiene

$$\begin{cases} x = 0 & \implies dx = 0 \\ y = t & \implies dy = dt \end{cases}$$

con $0 \leq t \leq 1$, $dz = i dt$. Por tanto,

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_0^1 (t - 0 - 0) i dt = \frac{i}{2}$$

En el caso de C_2 :

$$\begin{cases} x = t & \implies dx = dt \\ y = i & \implies dy = 0 \end{cases}$$

con $0 \leq t \leq 1$, $dz = dt$. Por tanto,

$$\int_{C_2} f(z) dz = \int_0^1 (i - t - 3t^2i) dt = -\frac{1}{2}$$

En consecuencia,

$$\int_C f(z) dz = \frac{i}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(i - 1)$$

5.9 Problemas resueltos

3. $f(z) = \frac{z+2}{z}$, C la semi circunferencia $z = 2e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$.

La figura 5.33 muestra la curva de integración. Además, $z = 2e^{i\theta} \implies dz = 2i e^{i\theta} d\theta$. Se tiene

$$\int_C f(z) dz = \int_0^\pi \frac{(2e^{i\theta} + 2) \cdot 2i e^{i\theta} d\theta}{2e^{i\theta}} = -4 + 2i\pi$$

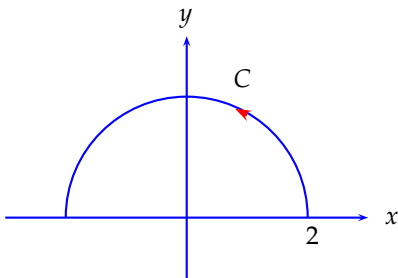


figura 5.33

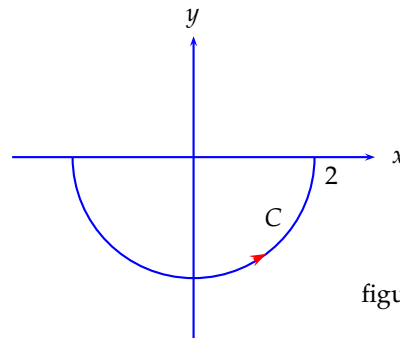


figura 5.34

4. $f(z) = \frac{z+2}{z}$, C la semi circunferencia $z = 2e^{i\theta}$, $\pi \leq \theta \leq 2\pi$.

La figura 5.34 muestra la curva de integración. Además, $z = 2e^{i\theta} \implies dz = 2i e^{i\theta} d\theta$. Se tiene

$$\int_C f(z) dz = \int_\pi^{2\pi} \frac{(2e^{i\theta} + 2) \cdot 2i e^{i\theta} d\theta}{2e^{i\theta}} = 4 + 2i\pi$$

5. $f(z) = \frac{z+2}{z}$, C la semi circunferencia $z = 2e^{i\theta}$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$.

La figura 5.35 muestra la curva de integración. De nuevo cambia el punto inicial y final de la curva y ahora el sentido.

$$\int_C f(z) dz = \int_{-\pi}^\pi \frac{(2e^{i\theta} + 2) \cdot 2i e^{i\theta} d\theta}{2e^{i\theta}} = 4i\pi$$

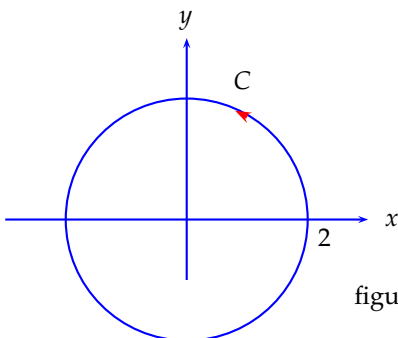


figura 5.35

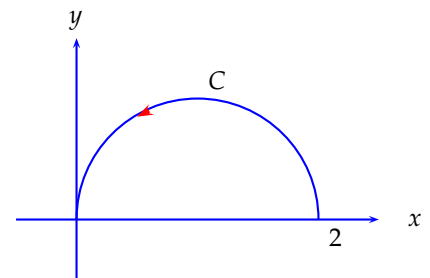


figura 5.36

6. $f(z) = z - 1$, C es el arco $z - 1 = e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$, desde $z = 0$ hasta $z = 2$.

Veáse figura 5.36. La diferencial $dz = ie^{i\theta} d\theta$. Luego,

$$\int_C f(z) dz = \int_0^\pi e^{i\theta} \cdot i e^{i\theta} d\theta = 0$$

7. $f(z) = \begin{cases} 4y, & y > 0 \\ 1, & y < 0 \end{cases}$, C es el arco desde $z = -1 - i$ hasta $z = 1 + i$ a lo largo de la curva $y = x^3$.

La curva se parametriza $x = y, y = t^3, -1 \leq t \leq 1$. La figura 5.37 muestra esta trayectoria.

$$z = x + iy = y + it^3 \implies dx = dt, \quad dy = 3it^2 dt$$

Por tanto,

$$\int_C f(z) dz = \int_{-1}^0 1 \cdot (1 + 3it^2) dt + \int_0^1 4(t^3)(1 + 3it^2) dt = (1 + i) + (1 + 2i) = 2 + 3i$$

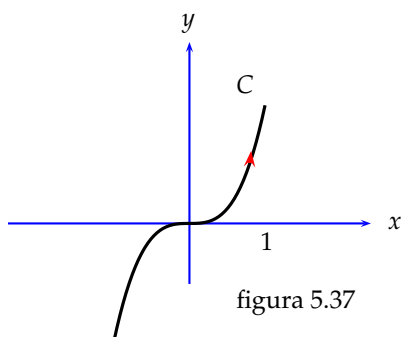


figura 5.37

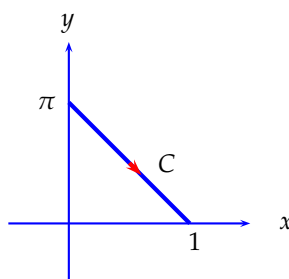


figura 5.38

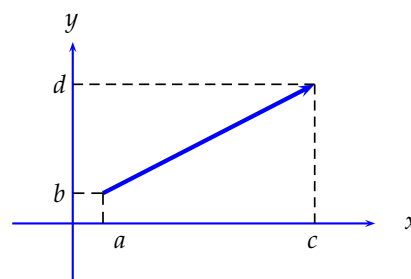


figura 5.39

8. $f(z) = e^z$, C es el segmento de recta que une $z = \pi i$ con $z = 1$

La figura 5.38 sirve para ilustrar el camino de integración. Su parametrización es

$$x = t, \quad y = \pi - \pi t, \quad 0 \leq t \leq 1$$

de lo cual, $dx = dt, dy = -\pi dt$. Se tiene:

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_0^1 e^{x+iy} (dx + i dy) = \int_0^1 e^{t+i(\pi-\pi t)} (dt - i\pi dt) \\ &= \int_0^1 e^t e^{i\pi} e^{-i\pi t} (1 - i\pi) dt = e^{i\pi} (1 - i\pi) \int_0^1 e^{(1-i\pi)t} dt \\ &= 1 + e \end{aligned}$$

Ejemplo 5.9.20. Escribir la integral en términos de integrales de funciones de valores reales de una variable real para demostrar que

$$\int_{\alpha}^{\beta} dz = \beta - \alpha$$

si la trayectoria de integración desde $z = \alpha$ hasta $z = \beta$ es el segmento de recta que une α con β

Consideremos $\alpha = a + ib, \beta = c + id$. Una situación gráfica se muestra en la figura 5.39. La parametrización del segmento es $x = t, y - b = \frac{d-b}{c-a}(t-a)$, con $a \leq t \leq c$ y $dx = dt, dy = \frac{d-b}{c-a} dt$. Se tiene:

$$\int_{\alpha}^{\beta} dz = \int_a^c \left(1 + i \frac{d-b}{c-a}\right) dt = \left(1 + i \frac{d-b}{c-a}\right) \cdot (c-a) = c-a + id-ib = (c+id) - (a+ib) = \beta - \alpha$$

5.9 Problemas resueltos

Ejemplo 5.9.21. Evaluemos $\int_C z^m \bar{z}^n dz$, con m y n enteros y C la circunferencia $|z| = 1$ tomada en sentido positivo.

Antes de probar esta afirmación es necesario probar la siguiente, válida para m y n enteros:

$$\int_0^{2\pi} e^{imt} e^{-int} dt = \begin{cases} 0, & \text{si } m \neq n \\ 2\pi, & \text{si } m = n \end{cases}$$

Si fuese $m = n$, entonces

$$\int_0^{2\pi} e^{imt} e^{-int} dt = \int_0^{2\pi} e^0 dt = 2\pi$$

En caso de ser $m \neq n$, entonces

$$\int_0^{2\pi} e^{imt} e^{-int} dt = \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)t} dt = \frac{e^{i(m-n)t}}{i(m-n)t} \Big|_0^{2\pi}$$

Al evaluar,

$$\frac{1}{i(m-n)t} [e^{i(m-n)2\pi} - 1] = \frac{1}{i(m-n)t} [\cos(m-n)2\pi + i\sin(m-n)2\pi - 1]$$

La expresión $2(m-n)$ es un entero **par**. Luego, el seno vale 0 y el coseno 1. Se sigue que

$$\int_0^{2\pi} e^{imt} e^{-int} dt = 0, \quad \text{si } m \neq n$$

Ahora estamos en condiciones de calcular la integral dada. La trayectoria $|z| = 1$ en polares tiene la forma

$$z = |z|e^{i\theta} = e^{i\theta} \implies dz = ie^{i\theta} d\theta$$

Con esto,

$$\int_C z^m \bar{z}^n dz = \int_0^{2\pi} e^{i\theta m} \cdot e^{-i\theta n} \cdot i e^{i\theta} d\theta = i \int_0^{2\pi} e^{i\theta(m+1)} \cdot e^{-i\theta n} d\theta$$

De acuerdo a la propiedad, previamente probada, esta integral tiene los valores:

$$\int_C z^m \bar{z}^n dz = i \begin{cases} 0, & m+1 \neq n \\ 2\pi, & m+1 = n \end{cases} = \begin{cases} 0, & m+1 \neq n \\ 2\pi i, & m+1 = n \end{cases}$$

Ejemplo 5.9.22. Probemos que $\int_C (3z+1) dz = 0$, siendo C el contorno del cuadrado de vértices $z = 0$, $z = 1$, $z = i$, $z = 1+i$ (figura 5.40).

C consiste en cuatro curvas frontera. Para cada una de ellas, en $0 \leq t \leq 1$, se tiene:

1. $\alpha_1(t) = (t, 0) \implies dx = dt, dy = 0$
2. $\alpha_2(t) = (1, t) \implies dx = 0, dy = i dt$

$$3. \alpha_3(t) = (t, 1) \implies dx = dt, dy = 0$$

$$4. \alpha_4(t) = (0, t) \implies dx = 0, dy = i dt$$

Considerando que $z = x + iy$, cada integral es como sigue:

$$1. \int_{\alpha_1} (3z + 1) dz = \int_0^1 (3t + 1) dt = \frac{5}{2}$$

$$2. \int_{\alpha_2} (3z + 1) dz = \int_0^1 (4 + 3it) i dt = 4i - \frac{3}{2}$$

$$3. \int_{\alpha_3} (3z + 1) dz = - \int_0^1 (3t + 1 + 3i) dt = -\frac{5}{2} - 3i$$

$$4. \int_{\alpha_4} (3z + 1) dz = - \int_0^1 (1 + 3it) i dt = -i + \frac{3}{2}$$

Cabe indicar que los signos negativos en la dos últimas integrales se justifican pues la parametrización se hizo en sentido opuesto. Al sumar todos los resultados se tiene

$$\int_C (3z + 1) dz = \int_{\alpha_1} (3z + 1) dz + \int_{\alpha_2} (3z + 1) dz + \int_{\alpha_3} (3z + 1) dz + \int_{\alpha_4} (3z + 1) dz = 0$$

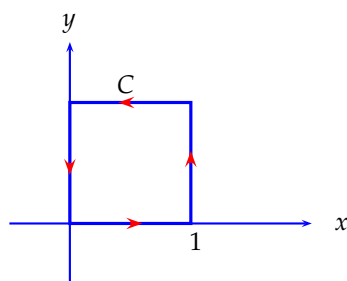


figura 5.40

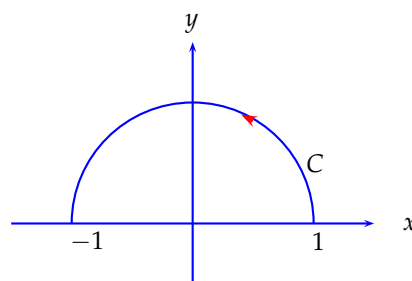


figura 5.41

Ejemplo 5.9.23. Hallemos $\int_C \pi e^{\pi \bar{z}} dz$, siendo C el contorno del cuadrado de vértices $z = 0, z = 1, z = i, z = 1 + i$.

El contorno C es el mismo del ejercicio anterior. Además, $z = x + iy \implies \bar{z} = x - iy$. Escribimos las correspondientes integrales:

$$1. \int_{\alpha_1} \pi e^{\pi \bar{z}} dz = \pi \int_0^1 e^{\pi t} dt = e^{\pi} - 1$$

$$2. \int_{\alpha_2} \pi e^{\pi \bar{z}} dz = \pi \int_0^1 e^{\pi(1-it)} i dt = 2e^{\pi}$$

$$3. \int_{\alpha_3} \pi e^{\pi \bar{z}} dz = -\pi \int_0^1 e^{\pi(t-i)} dt = e^{\pi} - 1$$

$$4. \int_{\alpha_4} \pi e^{\pi \bar{z}} dz = -\pi \int_0^1 e^{-\pi(it)} dt = -2$$

5.9 Problemas resueltos

En consecuencia

$$\int_C \pi e^{\pi \bar{z}} dz = e^{\pi} - 1 + 2e^{\pi} - 1 + e^{\pi} - 2 = 4(e^{\pi} - 1)$$

Ejemplo 5.9.24. Hallemos $\int_C \bar{z} dz$, siendo $C = \{|z| = 1, y > 0\}$ y $z(t) = t + i\sqrt{1-t^2}$.

Para parametrizar la semi circunferencia que muestra la figura 5.41, podemos usar $z = e^{i\theta}$ o bien $x = t, y = \sqrt{1-t^2}, -1 \leq t \leq 1$. Es más conveniente esta última. Tenemos:

$$z = x + iy \implies dz = x + idy, \bar{z} = x - iy$$

Además,

$$dx = dt, \quad dy = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

En consecuencia,

$$\int_C f(z) dz = \int_{-1}^1 (x - iy)(dx + idy) = \int_{-1}^1 (t - i\sqrt{1-t^2}) \left(1 - i\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right) dt$$

Al multiplicar y reducir se llega que

$$\int_C f(z) dz = -i \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -i \arcsen(t) \Big|_{-1}^1 = \pi i$$

Ejemplo 5.9.25. Aplicar el teorema de Cauchy-Goursat para probar que $\int_C f(z) dz = 0$, cuando C es la circunferencia $|z| = 1$, y f es:

$$1. f(z) = \frac{z^2}{z-3}$$

Se observa que $z-3=0 \implies z=3$. Como $z=3$ queda fuera de la circunferencia de radio 1, entonces

$$\int_{|z|=1} \frac{z^2}{z-3} dz = 0$$

$$2. f(z) = ze^{-z}$$

En este caso, f es analítica en todo el plano (verificar Cauchy-Riemann). Por tanto,

$$\int_{|z|=1} ze^{-z} dz = 0$$

$$3. f(z) = \frac{1}{z^2 + 2z + 1}$$

El denominador se descompone

$$\frac{1}{z^2 + 2z + 1} = \frac{1}{(z-1+i)(z-1-i)}$$

de lo cual, f es analítica en todo punto del plano, con excepción de los puntos $z = 1 \pm i$. Veamos si ellos están dentro o fuera de la circunferencia.

$$|1 \pm i| = \sqrt{2} \implies \text{¡fuera!}$$

Por lo tanto,

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{z^2 + 2z + 1} dz = 0$$

4. $f(z) = \operatorname{sech}(z)$

La función $\operatorname{sech}(z) = 0$ sólo en los puntos $z = i(2n + 1)\frac{\pi}{2}$, con $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Pero

$$|i(2n + 1)\frac{\pi}{2}| = (2n + 1)\frac{\pi}{2} > 1, \forall n \implies \text{¡fuera!}$$

Se sigue que

$$\int_{|z|=1} \operatorname{sech}(z) dz = 0$$

5. $f(z) = \operatorname{tg}(z)$

La función $\operatorname{tg}(z) = \frac{\operatorname{sen}(z)}{\operatorname{cos} z} = 0$ sólo en los puntos $z = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$, con $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Pero

$$|(2n + 1)\frac{\pi}{2}| = (2n + 1)\frac{\pi}{2} > 1, \forall n \implies \text{¡fuera!}$$

Se sigue que

$$\int_{|z|=1} \operatorname{tg}(z) dz = 0$$

Ejemplo 5.9.26. Explicar las razones por las que $\int_B f(z) dz = 0$, si se considera la región que queda entre la circunferencia $|z| = 4$ y el cuadrado cuyos lados están sobre las rectas $x = \pm 1$ e $y = \pm 1$. Además, B es la frontera orientada de la región y descrita de tal modo que la región se encuentra a su izquierda. Las funciones a estudiar son:

1. $f(z) = \frac{1}{3z^2 + 1}$.

El denominador $3z^2 + 1 = 0 \implies z = \pm \frac{i}{\sqrt{3}}$. Por tanto f es analítica en todo el plano menos en esos puntos, que quedan fuera de la región que encierra B (figura 5.42). Luego

$$\int_B f(z) dz = 0$$

2. $f(z) = \frac{z + 2}{\operatorname{sen}(z/2)}$.

El denominador $\operatorname{sen}(z/2) = 0 \implies z = 2n\pi$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Es claro que los puntos $z = 2n\pi$ se encuentran fuera de la región. Luego

$$\int_B f(z) dz = 0$$

5.9 Problemas resueltos

3. $f(z) = \frac{z}{1 - e^z}$.

El denominador

$$1 - e^z = 0 \implies e^z = 1 \implies z = 2n\pi i$$

Pero, todos los puntos $z = 2n\pi i$ se encuentra fuera de la región. Luego

$$\int_B f(z) dz = 0$$

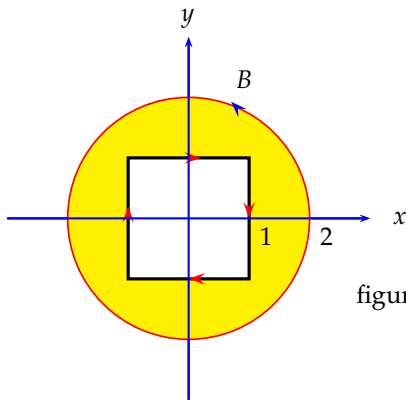


figura 5.42

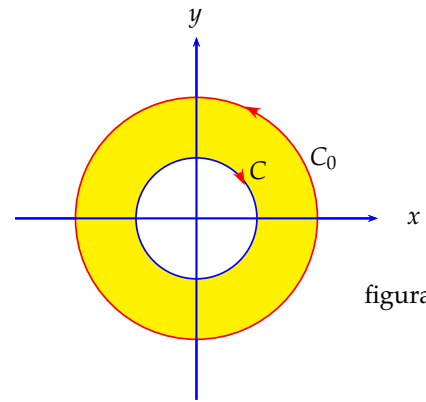


figura 5.43

Ejemplo 5.9.27. Si C es un contorno cerrado simple interior a un contorno cerrado simple C_0 , con C y C_0 orientados positivamente, demostrar que, para toda función f analítica en la región limitada entre C y C_0 se cumple que

$$\int_C f(z) dz = \int_{C_0} f(z) dz$$

La figura 5.43 muestra una región tipo En la región que queda entre C_0 y C es analítica, luego,

$$\int_{C_0} f(z) dz + \int_C f(z) dz = 0$$

Como la orientación sobre ambas curvas es opuesto, entonces, si hacemos que vayan en el mismo sentido tenemos que

$$\int_{C_0} f(z) dz - \int_C f(z) dz = 0$$

de lo cual se deduce la igualdad.

Ejemplo 5.9.28. Sea C el contorno del rectángulo $0 \leq x \leq 3$, $0 \leq y \leq 2$ descrito en sentido positivo. Probemos que

$$\int_C \frac{dz}{z - 2 - i} = 2\pi i, \quad \int_C (z - 2 - i)^{n-1} dz = 0, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

La figura 5.44 muestra el contorno. La función $f(z) = \frac{1}{z-2-i}$ es analítica en todo el plano, excepto en el punto $z = 2 + i$, que se encuentra en el interior del contorno. Podemos usar:

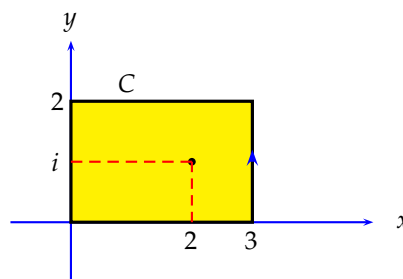


figura 5.44

Teorema 5.9.29. (Fórmula integral de Cauchy)

Sea f función analítica dentro y sobre un contorno simple cerrado C positivamente orientado, y z_0 un punto interior de C , entonces se verifica que:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{z - z_0}$$

En consecuencia,

$$\int_C \frac{dz}{z - 2 - i} = 2\pi i f(2 + i) = 2\pi i = 2\pi i$$

pues, $f(z) = 1$.

Para la integral restante, se consideran 2 casos:

1. Para $n \geq 1$ la función $f(z) = (z - 2 - i)^{n-1}$ es analítica $\forall n \geq 1$. Luego,

$$\int_C (z - 2 - i)^{n-1} dz = 0$$

2. Si $n < 1$, hacemos $n = -m > 0$ para tener

$$\int_C \frac{1 \cdot dz}{(z - 2 - i)^{m+1}} = \frac{2\pi i}{m!} f^{(m)}(z_0) = 0$$

En este caso, $f(z) = 1$ y su derivada de orden m en el punto $z = 2 + i$ es cero.

Ejemplo 5.9.30. Usar una integral definida para mostrar que, para todo contorno C que se extiende del punto α al punto β .

$$\int_C z^n dz = \frac{1}{n+1} (\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\int_C z^n dz = \int_{\alpha}^{\beta} z^n dz = \frac{1}{n+1} z^{n+1} \Big|_{\alpha}^{\beta} = \frac{1}{n+1} (\beta^{n+1} - \alpha^{n+1})$$

Ejemplo 5.9.31. Evaluemos cada integral siguiente, donde la trayectoria de integración es un contorno arbitrario entre los límites que se indican:

5.9 Problemas resueltos

$$1. \int_i^{i/2} e^{\pi z} dz = \frac{1}{\pi} e^{\pi z} \Big|_i^{i/2} = \frac{1}{\pi(1+i)}$$

$$2. \int_0^{\pi+2i} \cos\left(\frac{z}{2}\right) dz = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{z}{2}\right) \Big|_0^{\pi+2i} = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + i\right)$$

Usando identidad, este resultado se reduce a

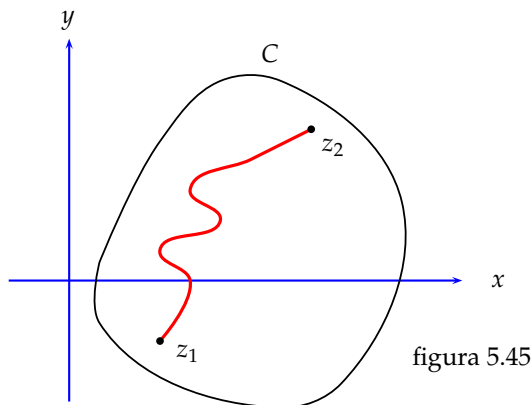
$$\int_0^{\pi+2i} \cos\left(\frac{z}{2}\right) dz = 2 \left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} \cosh 1 + i \cos\frac{\pi}{2} \sinh 1 \right) = 2 \cosh 1 = 2 \cdot \frac{1}{2}(e + e^{-1}) = e + \frac{1}{e}$$

$$3. \int_1^3 (z-2)^3 dz = \frac{1}{4} (z-2)^4 \Big|_1^3 = 0$$

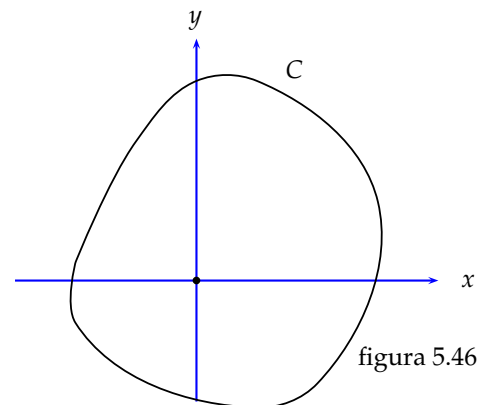
Ejemplo 5.9.32. Demostremos que si $z_1 \neq 0$, $z_2 \neq 0$ y $z_1 \neq z_2$, se cumple que

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{z^2} = \frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_1}$$

siempre que la trayectoria sea interior a un dominio simplemente conexo que no contenga el origen. Además, probaremos que para cualquier contorno cerrado simple, donde el origen no está sobre el contorno (está fuera o dentro), la integral



$$\int_C \frac{dz}{z^2} = 0$$



La figura 5.45 muestra una trayectoria que une dos puntos z_1 y z_2 dentro de un recinto simplemente conexo. El origen de coordenadas se halla fuera del recinto. En el recinto, $f(z) = \frac{1}{z^2}$ es analítica, por lo que podemos integrar directamente

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{z^2} = -\frac{1}{z} \Big|_{z_1}^{z_2} = \frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_1}$$

Para responder a la segunda pregunta, la figura 5.46 muestra el caso en que el origen se encuentra en el interior del contorno, pero no sobre él. Siendo así, la función $f(z) = \frac{1}{z^2}$ es analítica, se tiene

$$\int_C \frac{dz}{z^2} = 0$$

Cuando el origen se halla dentro del contorno, entonces la fórmula integral de Cauchy afirma que

$$\int_C \frac{dz}{z^2} = 2\pi i f'(0)$$

Dado que $f(z) = 1$, es $f'(0) = 0$. Por tanto,

$$\int_C \frac{dz}{z^2} = 0$$

Ejemplo 5.9.33. Hallemos $\int_{-2i}^{2i} \frac{dz}{z}$, sobre cualquier contorno que une $-2i$ con $2i$ y que se encuentre en el semi plano derecho.

Estamos en la rama principal del logaritmo. Se tiene

$$\int_{-2i}^{2i} \frac{dz}{z} = \log z \Big|_{-2i}^{2i} = \log(2i) - \log(-2i) = \log 2 + i\frac{\pi}{2} - (\log 2 - i\frac{\pi}{2}) = i\pi$$

Ejemplo 5.9.34. Sea C la circunferencia $|z| = 3$ descrita en sentido positivo. Probemos que

$$g(z) = \int_C \frac{2s^2 - s - 2}{s - z} = \begin{cases} 8\pi i & , \text{si } z = 2 \\ 0 & , \text{si } |z| > 3 \end{cases}$$

El punto $z = 2$ está dentro de la circunferencia $|z| = 3$. Es claro que

$$g(2) = \int_C \frac{2s^2 - s - 2}{s - 2}$$

Aplicamos teorema de residuos

$$g(2) = 2\pi i \sum R_j = 2\pi i a_{-1}, \quad a_{-1} = \lim_{s \rightarrow 2} \frac{2s^2 - s - 2}{s - 2} \cdot (s - 2)$$

Se sigue que

$$g(2) = 2\pi i \cdot 4 = 8\pi i$$

Por otra parte, si $|z| > 3$, entonces los puntos z están fuera de C y se tiene que

$$\int_C \frac{2s^2 - s - 2}{s - z} ds = 0$$

Ejemplo 5.9.35. Sea C un contorno cerrado simple descrito en sentido positivo. Probemos que

$$g(z) = \int_C \frac{s^3 + 2s}{(s - z)^3} = \begin{cases} 6\pi i z & , \text{si } z \text{ está dentro de } C \\ 0 & , \text{si } z \text{ está fuera de } C \end{cases}$$

5.9 Problemas resueltos

Si z está dentro de C ,

$$g(z) = \int_C \frac{s^3 + 2s}{(s - z)^3} = 2\pi i \sum R_j = 2\pi i a_{-1}$$

El valor de a_{-1} es el siguiente

$$a_{-1} = \frac{1}{2!} \lim_{s \rightarrow z} \frac{d^2}{ds^2} (s^3 + 2s) = \frac{1}{2} \lim_{s \rightarrow z} (6s) = 3z$$

Por tanto,

$$g(z) = \int_C \frac{s^3 + 2s}{(s - z)^3} = 2\pi i \cdot 3z = 6\pi iz$$

válido para todo z dentro de C .

Si z está fuera de C , la función $f(s) = \frac{s^3 + 2s}{(s - z)^3}$ es analítica y se tiene que

$$\int_C \frac{s^3 + 2s}{(s - z)^3} = 0$$

Ejemplo 5.9.36. Si $\frac{1}{1 - z} = \sum_0^\infty z^n$, hallar los desarrollos de, $\frac{1}{(1 - z)^2}$ y $\frac{2}{(1 - z)^3}$

El primer desarrollo se halla derivando como sigue:

$$\frac{1}{1 - z} = \sum_0^\infty z^n \implies \frac{1}{(1 - z)^2} = \sum_1^\infty n z^{n-1}, \quad |z| < 1$$

El otro desarrollo consiste en derivar el recién encontrado. Tenemos:

$$\frac{1}{(1 - z)^2} = \sum_1^\infty n z^{n-1} \implies \frac{2}{(1 - z)^3} = \sum_1^\infty n(n - 1) z^{n-2}, \quad |z| < 1$$

Ejemplo 5.9.37. Hallemos el desarrollo de $f(z) = \frac{1}{z}$ en potencias de $z - 1$ y luego el de $g(z) = \frac{1}{z^2}$

Hacemos uso de el desarrollo conocido

$$\frac{1}{1 + z} = \sum_0^\infty (-1)^n z^n, \quad |z| < 1$$

para tener que

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1 + (z - 1)} = \sum_0^\infty (-1)^n (z - 1)^n, \quad |z - 1| < 1$$

Al derivar se obtiene

$$\frac{d}{dz} \frac{1}{z} = -\frac{1}{z^2} = \sum_1^\infty n(-1)^n (z - 1)^{n-1}, \quad |z| < 1$$

Ejemplo 5.9.38. *Integramos la serie de $f(s) = \frac{1}{s+1}$ a lo largo de un contorno interior al círculo de convergencia desde $s = 0$ hasta $s = z$ para obtener*

$$\log(z+1) = \sum_1^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}$$

Partimos de la hipótesis.

$$\begin{aligned} \frac{1}{s+1} &= 1 - s + s^2 - s^3 + s^4 + \dots \\ \int_0^z \frac{1}{s+1} &= \int_0^z (1 - s + s^2 - s^3 + s^4 + \dots) ds \\ \ln(s+1) &= \left(s - \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{3} - \frac{s^4}{4} + \dots \right)_0^z \\ \ln(s+1) &= z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots \\ \ln(s+1) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n} \end{aligned}$$

Ejemplo 5.9.39. *Para las funciones dadas, mostrar que todos los puntos singulares son polos y hallar su orden:*

■ $f(z) = \frac{z+1}{z^2-2z}.$

Esta función tiene dos puntos singulares: $z = 0$ y $z = 2$.

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z+1}{z(z-2)} \cdot z = -\frac{1}{2}, \quad \text{finito}$$

se sigue que $z = 0$ es polo de orden 1. Para $z = 2$ tenemos

$$\lim_{z \rightarrow 2} \frac{z+1}{z(z-2)} \cdot (z-2) = \frac{3}{2}, \quad \text{finito}$$

Por tanto, $z = 2$ es polo de orden 1.

■ $f(z) = \frac{z}{\cos(z)}.$

El denominador $\cos(z) = 0 \implies z = (2n+1)\frac{\pi}{2} = z_0$. Para él tenemos:

$$\lim_{z \rightarrow (2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos(z)} \cdot [z - (2n+1)\frac{\pi}{2}] \sim \frac{0}{0}$$

Usando L'Hôpital,

$$\lim_{z \rightarrow (2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos(z)} \cdot [z - (2n+1)\frac{\pi}{2}] = - \lim_{z \rightarrow (2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{2n - (2n+1)\frac{\pi}{2}}{\sin(z)} = - \frac{(2n+1)\frac{\pi}{2}}{\pm 1}$$

Del hecho de que este límite es distinto de cero y finito se sigue que $z_0 = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ es polo simple.

Ejemplo 5.9.40. Hallar residuos en $z = 0$ de:

1. $f(z) = \csc^2(z) = \frac{1}{\sin^2 z}$ es polo de orden 2. En efecto, usemos fórmula para polos de orden 2.

$$\text{Res}(f, 0) = \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left(\frac{z^2}{\sin^2 z} \right) \implies \text{Res}(f, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \frac{2(z \sin z - z^2 \cos z)}{\sin^3 z}$$

Después de usar regla de L'Hôpital, dos veces, se llega a que

$$\text{Res}(f, 0) = 0$$

2. $f(z) = z^{-3} \csc(z^2)$ tiene un polo de orden 5 en $z = 0$.

Escribimos $f(z) = \frac{1}{z^3 \sin^2 z}$. Veamos que pasa con el límite

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^5}{z^3 \sin^2 z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2}{\sin^2 z} = 1 \neq 0, \quad \text{finito}$$

Por tanto, $z = 0$ es polo de orden 5.

Ejemplo 5.9.41. Hallemos $\int_C \frac{(3z^3 + 2)dz}{(z-1)(z^2+9)}$, si:

1. $C = \{|z-2| = 2\}$ (figura 5.47)

Los puntos singulares de la función son $z = 1$, $z = 3i$, $z = -3i$. Si $C = \{|z-2| = 2\}$, entonces $z = \pm 3i$ se hallan fuera de C , lo que hace que sólo $z = 1$ sea análisis de estudio. Como $z = 1$ es un polo simple,

$$\text{Res}f(f, 1) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{3z^2 + 1}{(z-1)(z^2+9)} \cdot (z-1) = \frac{1}{2}$$

De esta forma,

$$\int_{|z-2|=2} \frac{(3z^3 + 2)dz}{(z-1)(z^2+9)} = 2\pi i \cdot \frac{1}{2} = \pi i$$

2. $C = \{|z| = 4\}$ (figura 5.48)

En este caso los tres puntos singulares se hallan dentro del contorno C .

$z = 3i$ es un polo simple, pues,

$$\text{Res}(f, 3i) = \lim_{z \rightarrow 3i} \frac{3z^2 + 2}{(z-1)(z+3i)(z-3i)} \cdot (z-3i) = \frac{5}{4} + i\frac{49}{12}$$

$z_0 = -3i$ es un polo simple

$$\text{Res}(f, -3i) = \lim_{z \rightarrow -3i} \frac{3z^2 + 2}{(z-1)(z+3i)(z-3i)} \cdot (z+3i) = \frac{5}{4} - i\frac{49}{12}$$

En consecuencia,

$$\int_{|z|=4} \frac{(3z^3 + 2)dz}{(z-1)(z^2+9)} = 2\pi i \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{4} + i\frac{49}{12} + \frac{5}{4} - i\frac{49}{12} \right) = 6\pi i$$

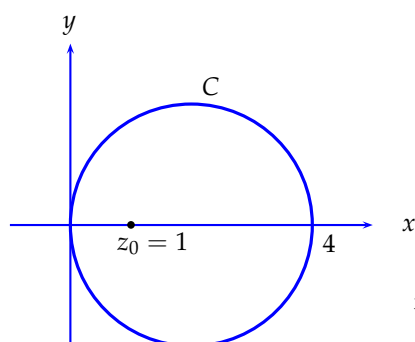


figura 5.47

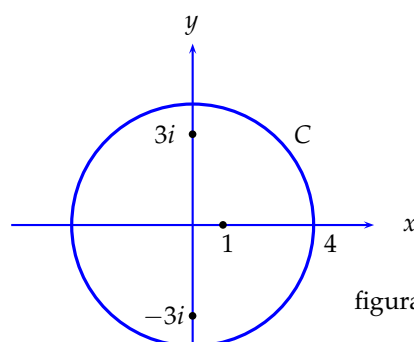


figura 5.48

Ejemplo 5.9.42. Hallemos el valor de la integral de las funciones $f(z) = \frac{1}{z^2+4}$ y $g(z) = \frac{1}{(z^2+4)^2}$, sobre el contorno $|z-i| = 2$.

En el caso de $f(z) = \frac{1}{z^2+4}$, tenemos dos puntos singulares: $z = 2i$ y $z = -2i$. De los cuales sólo $z = 2i$ se halla dentro del contorno (figura 5.49). Saquemos el valor del residuo en este polo simple

$$\text{Res}(f, 2i) = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{1}{z^2+4} \cdot (z-2i) = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{1}{(z-2i)(z+2i)} \cdot (z-2i) = \frac{1}{4i}$$

Por tanto,

$$\int_{|z-i|=2} \frac{1}{z^2+4} dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{4i} = \frac{\pi}{2}$$

Para $g(z) = \frac{1}{(z^2+4)^2}$ se tiene algo análogo al caso anterior, sólo $z = 2i$ se encuentra en el interior del contorno, pero esta vez, se trata de un polo de orden 2.

$$f(z) = \frac{1}{(z+2i)^2} \implies f'(z) = -2(z+2i)^{-3} \implies f'(2i) = \frac{1}{32i}$$

5.9 Problemas resueltos

Luego,

$$\int_{|z-i|=2} \frac{1}{(z^2+4)^2} dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{32i} = \frac{\pi}{16}$$

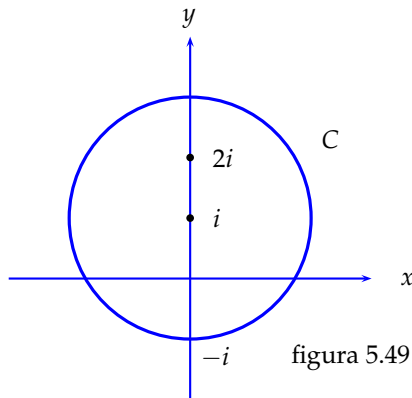


figura 5.49

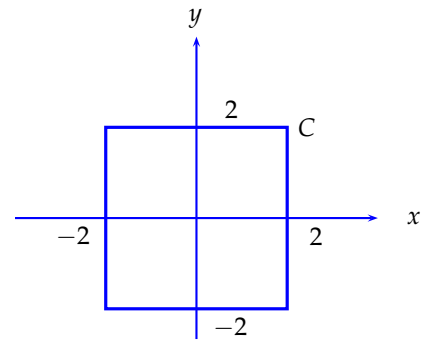


figura 5.50

Ejemplo 5.9.43. Hallemos $\int_C \frac{\cosh(z)}{z^4} dz$, si C es el contorno del cuadrado de la figura 5.50 recorrido en sentido positivo.

La función tiene un problema en $z = 0$ que se encuentra en el interior de C . Este $z = 0$ es un polo de orden 4. Se tiene

$$\int_C \frac{\cosh(z)}{z^4} dz = 2\pi i f'''(z_0)$$

Como,

$$f(z) = \cosh(z) \implies f'(z) = \sinh(z) \implies f''(z) = \cosh(z) \implies f'''(z) = \sinh(z)$$

Ahora, $f'''(0) = 0$, entonces

$$\int_C \frac{\cosh(z)}{z^4} dz = 2\pi i \cdot 0 = 0$$

Ejemplo 5.9.44. Hallemos $\int_C \frac{\cos(z)}{z(z^2+8)} dz$, si C es el contorno de la figura 9.50

Se muestra una forma diferente de cálculo. En $z = 0$ hay un polo simple. Sea $g(z) = \frac{\cos(z)}{z^2+8}$ función analítica (holomorfa) en todo punto interior al contorno C . Se tiene

$$\int_C \frac{\cos(z)}{z(z^2+8)} dz = \int_C \frac{g(z)}{z} dz = 2\pi i \cdot g(0) = 2\pi i \cdot \frac{1}{8} = \frac{\pi i}{4}$$

Ejemplo 5.9.45. Hallemos $\int_C \frac{z}{2z+1} dz$, si C es el contorno de la figura 5.50

El punto singular $z = -\frac{1}{2}$ se halla en el interior del recinto. La función $g(z) = \frac{z}{2}$ es holomorfa en el interior del contorno. Tenemos

$$\int_C \frac{z}{2z+1} dz = \int_C \frac{z/2}{z + \frac{1}{2}} dz = \int_C \frac{g(z)}{z + \frac{1}{2}} dz = 2\pi i g(-\frac{1}{2}) = 2\pi i \cdot -\frac{1}{4} = -\frac{\pi i}{2}$$

Ejemplo 5.9.46. Hallemos $\int_C \frac{e^{-z}}{z - i\frac{\pi}{2}} dz$, si C es el contorno de la figura 9.50

El punto singular $z = i\frac{\pi}{2}$ es interior al contorno. Se considera $g(z) = e^{-z}$ función holomorfa. Se tiene

$$\int_C \frac{e^{-z}}{z - i\frac{\pi}{2}} dz = \int_C \frac{g(z)}{z - i\frac{\pi}{2}} dz = 2\pi i g(i\frac{\pi}{2}) = 2\pi i \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}} = 2\pi i \cdot i = -2\pi$$

Ejemplo 5.9.47. Hallemos $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sen x dx}{x(\pi^2 - x^2)}$.

Consideremos la integral compleja $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz} dz}{z(\pi^2 - z^2)}$ y el contorno cerrado que muestra la figura 5.51.

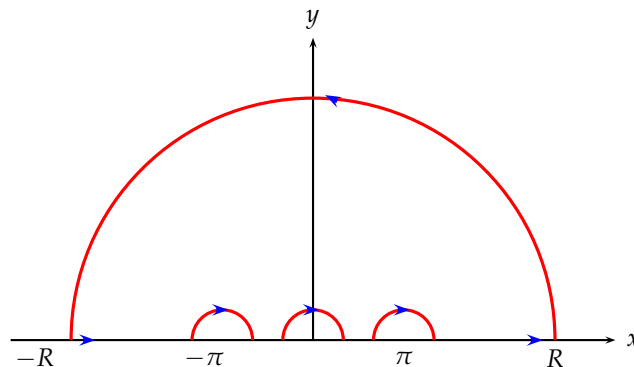


figura 5.51

Los polos del integrando son $z = 0$, $z = \pi$, $z = -\pi$, los tres sobre el eje real. Los residuos son:

$$\text{Res}(f, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} z \cdot \frac{e^{iz}}{z(\pi^2 - z^2)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{iz}}{(\pi^2 - z^2)} = \frac{1}{\pi^2}$$

$$\text{Res}(f, \pi) = \lim_{z \rightarrow \pi} (z - \pi) \cdot \frac{e^{iz}}{z(\pi - z)(\pi + z)} = \lim_{z \rightarrow \pi} \frac{e^{iz}}{(\pi + z)} = \frac{1}{2\pi^2}$$

$$\text{Res}(f, -\pi) = \lim_{z \rightarrow -\pi} (z + \pi) \cdot \frac{e^{iz}}{z(\pi - z)(\pi + z)} = \lim_{z \rightarrow -\pi} \frac{e^{iz}}{(\pi - z)} = \frac{1}{2\pi^2}$$

En consecuencia,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sen x dx}{x(\pi^2 - x^2)} = \text{Im}[2\pi i(0 + \frac{1}{2}(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{2\pi^2} + \frac{1}{2\pi^2}))] = \frac{2}{\pi}$$

5.10. Ejercicios propuestos

1. Representar geoméricamente los conjuntos de números complejos dados por las siguientes condiciones:

- | | |
|--|---|
| a) $\operatorname{Re}(z) > 0$ | j) $\operatorname{Im}(z) > 4$ y $1 < \operatorname{Re}(z) < 3$ |
| b) $z = \bar{z}$ | k) $\operatorname{Im}(z - 1) = 4$ |
| c) $-\theta < \operatorname{Arg}(z) < \theta$ | l) $\operatorname{Re}(z^2) = -1$ y $1 < \operatorname{Re}(z) < 3$ |
| d) $ \operatorname{Arg}(z) - \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2}$ | m) $\left \frac{z-1}{z+1} \right = 2$ |
| e) $ z + 1 < 1$ | n) $\operatorname{Arg}\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \frac{\pi}{4}$ |
| f) $ z - i \leq 2$ | ñ) $ z - z_1 = z - z_2 $ |
| g) $ z + 2i + z - 2i < 6$ | o) $0 < \operatorname{Re}(iz) < 1$ |
| h) $\operatorname{Im}(z^2) > 4$ | |
| i) $1 < z + i \leq 2$ | |

¿Cuáles de ellos son dominios?

2. Determinar, en términos de una variable compleja, la ecuación de las siguientes curvas:

- La recta que pasa por los puntos $(0, 1)$ y $(-2, -1)$.
- La circunferencia con centro en $(-2, 1)$ y radio 4.
- La elipse con focos $(-3, 0)$ y $(3, 0)$ cuyo eje mayor tiene longitud 10.

3. Considerar $u(x, y) = \operatorname{sen}(x)\cosh(y)$

- Probar que u es armónica.
- Hallar una conjugada armónica v de u .
- Formar la función analítica $f(z) = u + iv$.
- Probar que $f'(z) = -f(z)$.

$$\text{Resp. } v(x, y) = \cos(x)\sinh(y)$$

- Expresar las funciones complejas $f(z) = z^3$, $f(z) = \frac{1}{1-z}$, y $f(z) = \frac{z-1}{z+1}$ en la forma $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$.
- ¿En qué regiones se transforma el sector angular $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ bajo las aplicaciones $f(z) = z^2$, $g(z) = z^3$ y $h(z) = z^4$?
- ¿En qué región se transforma el triángulo limitado por las rectas $y = \pm x$ y $x = 1$ bajo la aplicación $f(z) = z^2$?
- ¿En qué región se transforma la mitad superior del anillo $1 \leq r \leq R$ bajo la aplicación $f(z) = z + z^{-1}$? Indicación: usa la expresión polar.

8. Se considera la función de variable compleja $f(z) = \frac{e^{2\pi z} - 1}{(z^2 + 1)(z - a)}$

- Hallar los puntos singulares de f y calcular el residuo de f en cada uno de ellos.
- Para $R > 0$, se considera el rectángulo $[-R, R] \times [-2, 2]$, y se denota por C a su frontera orientada positivamente. Determinar los valores de R para los cuales C no pasa por ninguna singularidad de f , y
- Calcular $\int_C \frac{e^{2\pi z} - 1}{(z^2 + 1)(z - a)} dz$

Respuestas:

- $z = \pm i, z = a$, $\text{Res}(f, \pm i) = 0$, $\text{Res}(f, a) = \frac{e^{2a\pi} - 1}{a^2 + 1}$
- Para cada $R > 0$, las dos singularidades $\pm i$ siempre están en el interior del rectángulo $[-R, R] \times [-2, 2]$ y no en su frontera. En cuanto al polo $z = a$, sólo pertenece a la frontera si $R = a$.
- Si $R < a$, la función sólo contiene singularidades evitables en el interior del rectángulo, luego la integral pedida es 0. Si $R > a$, por el teorema de los residuos la integral vale

$$2\pi i \cdot \frac{e^{2a\pi} - 1}{a^2 + 1}$$

9. Probar que las integrales dadas tienen el valor asignado:

$$a) \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a + \sin^2 x} = \frac{\pi}{2\sqrt{a(a+1)}}, \quad a > 0$$

$$b) \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{x^4 + 6x^2 + 13} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}\sqrt{3 + \sqrt{13}}}$$

$$c) \int_0^\infty \frac{(x^2 - x + 2) dx}{x^4 + 10x^2 + 9} = \frac{5\pi}{12}$$

$$d) \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^3} = \frac{\pi}{16a^3}, \quad a > 0$$

$$e) \int_0^\infty \frac{\cos x dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{2ae^a}, \quad a > 0$$

$$f) \int_0^\infty \frac{x \sin x dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{2e^a}, \quad a > 0$$

$$g) \int_0^\infty \frac{\sin^2 x dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi(1 - e^{-a})}{4a}, \quad a > 0$$

$$h) \int_0^\infty \frac{\log x dx}{1 + x^2} = 0$$

5.10 Ejercicios propuestos

$$i) \int_0^{\infty} \frac{\log x \, dx}{(1+x^2)^2} = -\frac{\pi}{4}$$

$$j) \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^b(1+x)} = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi b}, \quad 0 < b < 1$$

10. Sea $u(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$ definida para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Probar que u es armónica.

11. Sea f una función meromorfa en el plano complejo, no idénticamente nula y tal que $zf(z+1) = (z+1)f(z)$ para todo z que no es polo de f . Probar que:

$$\frac{1}{z} + \frac{f'(z+1)}{f(z+1)} = \frac{1}{z+1} + \frac{f'(z)}{f(z)}$$

12. Sea $f(z) = \frac{1}{(z^2 + 9)^2}$.

a) Calcular los residuos de f .

b) Calcular $\int_0^{\infty} f(z)$, considerando el contorno compuesto de la semi circunferencia superior $z = Re^{i\theta}$ y el segmento recto $-R \leq x \leq R$.

$$\text{Resp } \operatorname{Res}(f, 3i) = -\frac{i}{108} \text{ y } \operatorname{Res}(f, -3i) = \frac{i}{108}. \quad \int_C = \frac{\pi}{108}$$

13. Probar que las integrales dadas tienen el valor asignado.

$$a) \int_{|z|=3} \frac{dz}{z(z^2 - 1)} = 0$$

$$b) \int_{|z-1|=2} \frac{dz}{z^2(z-1)} = 2\pi i(e-2)$$

$$c) \int_{|z|=6} \frac{dz}{1 - \cos z} = 0$$

$$d) \int_{|z-2|=1} \frac{\ln z \, dz}{(z-2)^2} = \pi i$$

$$e) \int_C \frac{dz}{z(z-1)(z-3)^2} = \frac{5\pi i}{18}, \quad C = \{|x| \leq 2, |y| \leq 2\}$$

$$f) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta)^2} = \frac{\pi}{a^3 b^3} (a^2 + b^2)$$

$$g) \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta \, d\theta}{5 + 4 \cos \theta} = \frac{\pi}{6}$$

$$h) \int_0^{\pi} \frac{\cos \theta \, d\theta}{3 + \cos \theta} = -\frac{\pi}{4} (3\sqrt{2} - 4)$$

- i) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$
 j) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$
 k) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+2x^2)} = \frac{\pi}{2}(\sqrt{2}-1)$
 l) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$
 m) $\int_0^{\infty} \frac{x^2 \cos x dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} e^{-1/\sqrt{2}} (\cos \frac{1}{\sqrt{2}} - \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{2}})$
 n) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x dx}{x^2+x+1} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} e^{-\sqrt{3}/2} \cos \frac{1}{2}$
 ñ) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1+x) \cos 2x dx}{x^2+x+1} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} e^{-\sqrt{3}/2} (\cos \frac{1}{2} + \sqrt{3} \operatorname{sen} \frac{1}{2})$
 o) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x dx}{x(1+x^4)} = \pi(1 - e^{-1/\sqrt{2}} \cos \frac{1}{\sqrt{2}})$
 p) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1-\cos x) dx}{4\pi^2 - x^2} = 0$
 q) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1-\cos x) dx}{(4\pi^2 - x^2)^2} = \frac{1}{8\pi}$
 r) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos 4x dx = \pi^{1/2} e^{-4}$

14. Calcular las siguientes integrales de línea:

- a) $\int_C (|z|^2 + e^z) dz$, con C la curva parametrizada $x + \pi i \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$
 b) $\int_{C^+} \frac{tg(z)}{(z^2+1)^2} dz$, con C la curva $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$.

Resp. $-e - \frac{2}{3} + \frac{\pi^2}{2} + i \left(\frac{\pi}{5} + \frac{\pi^3}{3} \right)$ y $\pi(-1 + tgh^2(1) + tgh(1))$

15. Calcular las integrales:

- a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(z^2-1) dz}{(z^2+1)(z^2+2z+2)}$ Resp. $-\pi$
 b) $\int_{C^+} \frac{4e^{\pi z}}{z^4(z^4-1)} dz$, donde C es la curva $|z + \frac{i}{2}| = 1$. Resp. $2\pi - 1 + i \frac{4\pi^3}{3}$
 c) $\int_{C^+} \frac{z(z-1)}{(z^2-1)(z+2i)} dz$, donde C es la curva $|z-1+i| = 2$. Resp. $-\frac{4\pi}{5}(1+2i)$

5.10 Ejercicios propuestos

- d) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}$. Resp. $\frac{\pi}{2}$
- e) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 + 2\cos t}$. Resp. 0
- f) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5 + 4\sin x}$. Resp. $\frac{2\pi}{3}$
- g) $\int_0^{2\pi} \frac{\cos x \, dx}{\cos x + \cosh(a)}$. Resp. $\frac{4\pi}{1 - e^{-2a}}$
- h) $\int_0^{\pi} \frac{\cos 2t \, dt}{5 - 3\cos t}$. Resp. $\frac{\pi}{36}$
- i) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2}$. Resp. $\frac{\pi}{4a^3}$
- j) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2 - x + 2) \, dx}{x^4 + 10x^2 + 9}$. Resp. $\frac{5\pi}{12}$
- k) $\int_0^{\infty} \frac{x \sin x \, dx}{x^2 + a^2}$. Resp. $\frac{\pi}{2} e^{-a}$
- l) $\int_0^{\infty} \frac{\cos ax \, dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)}$. Resp. $\frac{\pi}{12}(2e^{-a} - e^{-2a})$
- m) $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x} \, dx}{x^2 + 1}$. Resp. $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$
- n) $\int_0^{\infty} \frac{x^{-p} \, dx}{1 + x}, 0 < p < 1$. Resp. $\frac{\pi}{\sin \pi p}$

16. Desarrollar $f(z) = \frac{z}{z^2 + 4}$ en serie de potencias de z , en las regiones delimitadas por los puntos singulares de f .

Respuestas:

- Los puntos singulares son $z = 2i$ y $z = -2i$.
- Si $|z| < 2$, entonces $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2^{2n+2}}$
- Si $|z| > 2$, entonces $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}}{z^{2n+1}}$

17. Desarrollar $f(z) = \frac{z}{(z+2)(z-1)}$ en serie de potencias de $(z-1)$ en cada una de las regiones determinadas por los puntos singulares. Deducir el orden del polo $z = 1$, y el valor del residuo de f en este polo.

Respuestas:

- $R_1 : 0 < |z - 1| < 3, \quad R_2 : 3 < |z - 1| < \infty$
- En $R_1, \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} (z-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} (z-1)^{n-1}$
- En $R_2, \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{(z-1)^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{(z-1)^{n+2}}$
- $\text{Res}(f, 1) = \frac{1}{3}$

18. Hallar el desarrollo en serie de potencias alrededor de $z = 0$ de las siguientes funciones, y encontrar el radio de convergencia de cada una:

a) $f(z) = \frac{1}{1-z}$

c) $f(z) = \frac{1}{(1+z)^5}$

e) $f(z) = \frac{z+2}{(1+3z)^2}$

b) $f(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$

d) $f(z) = \frac{1}{4+z}$

19. Sea C el arco de la circunferencia $|z| = 2$ recorrido en sentido antihorario desde $z = 2$ hasta $z = 2i$. Probar que

$$\left| \int_C \frac{dz}{z^2 + 1} \right| \leq \frac{\pi}{3}$$

20. Integrando $f(z) = \frac{1}{z}$ sobre la elipse $\alpha(t) = (a \cos t + b \sin t)$, mostrar que

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} = \frac{2\pi}{ab}$$

5.11. Problemas adicionales

1. Representar gráficamente, en el plano, los siguientes conjuntos:

a) $\{|z - i| = \text{Im}(z) + 1\}$

c) $\{|z - 1| \leq 3, \text{Re}(z) > 1\}$

e) $\{|z| = \text{Re}(z) - \text{Im}(z)\}$

b) $\left\{ \left| \frac{z-2}{z-1} \right| = 6 \right\}$

d) $\{|z| < 2|z-3|\}$

f) $\left\{ \left| \frac{z-3}{z+3} \right| \leq 2 \right\}$

2. Probar que si C es la frontera del triángulo de vértices: $z = 0, z = 3i, z = -4$ orientada de forma positiva, entonces se verifica:

$$\left| \int_C (e^z - |z|) dz \right| \leq 60$$

3. Calcular $\int_C |z|^2 dz$, donde C es el contorno del cuadrado de vértices $(0,0), (2,0), (2,2), (0,2)$.
 Resp. $-\frac{8}{3} + i\frac{8}{3}$

5.11 Problemas adicionales

4. Sea $G(z) = \int_{\pi-\pi i}^z \cos 3t \, dt$. Hallar $G(\pi i)$. Resp. 0

5. Calcular las siguientes integrales:

a) $\int_{C^+} \frac{\operatorname{sen}(\pi z) \, dz}{z^2 + 4}$, siendo C el contorno $|z| = 1$. Resp. 0

b) $\int_{C^+} \frac{\operatorname{sen}(\pi z) \, dz}{(z-1)^2}$, siendo C el contorno $|z| = 3$. Resp $-\pi^2 i$

c) $\int_{C^+} z \, dz$, siendo C el arco de la circunferencia $|z| = 2$ desde $z = -2$ hasta $z = -2i$. Resp -4

d) $\int_{C^+} \frac{\cos(z) \, dz}{z^2}$, siendo C el contorno $|z-2| = 3$. Resp 0

e) $\int_{C^+} \frac{(1-z^4) \, dz}{z^2 + 1}$, siendo C el contorno $|z-1| = 1$. Resp 0

f) $\int_{C^+} \frac{\bar{z} \, dz}{5}$, siendo C el contorno $|z| = 5$. Resp $\frac{2\pi i}{5}$

g) $\int_{C^+} \frac{\cos(z) \, dz}{z}$, siendo C el contorno $|z-2| = 1$. Resp 0

h) $\int_{C^+} \frac{(z+1) \, dz}{z^2 + 1}$, siendo C el contorno $|z-i| = 1$. Resp $2\pi(1+i)$

i) $\int_{C^+} \frac{(2z+5i) \, dz}{(z^2+9)^2}$, siendo C el contorno $|z| = 4$. Resp $\frac{10\pi i}{9}$

j) $\int_{C^+} \frac{\cos(\pi z) \, dz}{z^2 - 6z + 8}$, siendo C cada uno de los siguientes contornos:

$$|z| = 1, \quad |z-2| = 1, \quad |z-3| = 2$$

Resp 0, $\frac{1}{2}$, 0

k) $\int_{C^+} \frac{\cosh(z) \, dz}{z^2(z^2+4)}$, siendo C cada uno de los siguientes contornos:

$$|z| = 1, \quad |z-2i| = 1, \quad |z-i| = 2, \quad |z-1| = \frac{1}{2}$$

Resp 0, $\frac{2\pi i}{5}$, 0

l) $\int_{C^+} \frac{e^{2z} \, dz}{z^4 - 16}$, siendo C la elipse $16x^2 + y^2 = 16$. Resp $-\frac{\pi i \operatorname{sen} 4}{6}$

m) $\int_{C^+} \frac{e^{z^2} \, dz}{z^3 - iz^2}$, siendo C el contorno $|z-i| = 3$. Resp $2\pi(1-e^{-1})$

n) $\int_{C^+} \frac{\cos(z) dz}{z^2(z^2 + 1)}$, siendo C el contorno $|z| = \frac{1}{2}$. Resp. 0

6. Sea C la circunferencia unidad centrada en el origen de coordenadas. Calcular $\int_{C^+} \frac{e^z}{z} dz$ y $\int_0^{2\pi} e^{\cos t} \cos(\sin t) dt$. Resp. $2\pi i$ y 2π

7. Estudiar la convergencia de las siguientes series:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n^2}$

b) $(1+i) + (\frac{1}{2^2} - i\frac{1}{2}) + (\frac{1}{3^2} + i\frac{1}{3}) + (\frac{1}{4^2} - i\frac{1}{4}) + \dots$

c) $1 + \frac{z-1}{5} + \frac{(z-1)^2}{5^2} + \dots$

d) $\frac{1}{2(z-1)} + \frac{1}{2^2(z-1)^2} + \dots$

Resp. Abs conv, conv. (suma de dos convergentes), conv. ($|z-1| < 5$), conv. ($|z-1| < 10$)

8. Utilizar $\sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ para probar que:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n(n+1)} = \frac{1}{z}(z + \ln(1-z) - z \ln(1-z))$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} z^{2n} = \frac{z^2}{1-z^2}$

9. Desarrollar en serie de Taylor, en el punto que se indica las funciones siguientes:

a) $f(z) = \sin z$ en $z = 0$. Resp. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}$

b) $f(z) = e^{z-i}$ en $z = i$. Resp. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{n!}$

10. Verificar que $\sum_{n=0}^{160} i^n = 1$

11. Encontrar el desarrollo en serie de Laurent de $f(z) = \frac{1}{(z-i)^2(z+3i)}$ en la corona $D_R(i) = \{0 < |z-i| < R\}$, y hallar el máximo $R > 0$ para el cual dicha serie es convergente para todo $z \in D_R(i)$

$R = 4, \sum_{m=-2}^{\infty} \frac{(i)^{m+1}}{4^{m+3}} (z-i)^m$

5.11 Problemas adicionales

12. Calcular los residuos $\text{Res}(f, i)$ y $\text{Res}(f, -3i)$ de la función $f(z) = \frac{1}{(z-i)^2(z+3i)}$. Calcular la integral $\int_{C^+} f(z) dz$, siendo C el camino cerrado $C = [-r, r] + S_r$, donde r es real, $r > 1$, y S_r es la semicircunferencia $z(t) = re^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$. Resp. $\frac{1}{16}, -\frac{1}{16}, \int_C = \frac{\pi i}{8}$
13. Hallar los residuos de $f(z) = \frac{z^2+2}{(z^2+4)(z^2+9)}$. Calcular la integral $\int_{C^+} f(z) dz$, siendo C el camino cerrado $C = [-r, r] + S_r$, donde r es real, $r > 1$, y S_r es la semicircunferencia $z(t) = re^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$. Resp. $-\frac{7i}{30}, \frac{7i}{30}, \frac{i}{10}, -\frac{i}{10}, \int_C = \frac{2\pi}{15}$
14. Dados los contornos C y las funciones $f(z)$, calcular $\int_{C^+} \frac{z+2}{z} dz$.
- a) El semicírculo $z = 2e^{it}$ con $0 \leq t \leq \pi$. Resp. $-4 + 2\pi i$
- b) El semicírculo $z = 2e^{it}$ con $\pi \leq t \leq 2\pi$. Resp. $4 + 2\pi i$
- c) El semicírculo $z = 2e^{it}$ con $0 \leq t \leq 2\pi$. Resp. $4\pi i$
15. Encontrar el radio de convergencia de las siguientes series:
- a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2 2^n}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{3^n}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} (1+i)^n z^n$
- $\epsilon, 2, 3, \frac{1}{\sqrt{2}}$
16. Desarrollar las siguientes funciones en series de Taylor en los puntos correspondientes y calcular el radio de convergencia de la serie obtenida.
- a) $f(z) = \text{sen}(2z+1)$ en $z_0 = -1$. c) $f(z) = \frac{z}{z^2+i}$ en $z_0 = 0$.
- b) $f(z) = \frac{1}{3z+1}$ en $z_0 = -2$. d) $f(z) = \text{sen}^2 \frac{z}{2}$ en $z_0 = 0$.

Respuestas:

- a) $f(z) = -a + 2b(z+1) + \frac{2^2}{2!}a(z+1)^2 - \frac{2^3}{3!}b(z+1)^3 + \dots$, $a = \text{sen } 1, b = \cos 1, R = \infty$
- b) $f(z) = -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}(z+2) + \frac{3^2}{5^2}(z+2)^2 + \frac{3^3}{5^3}(z+2)^3 + \dots$, $R = \infty$
- c) $f(z) = -iz + z^3 + iz^5 - z^7 - \dots$ $R = 1$
- d) $f(z) = \frac{1}{2} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \dots$, $R = \infty$

17. Desarrollar en series de Laurent en un entorno de $z_0 = 0$ las siguientes funciones:

- a) $\frac{\text{sen } z}{z^2}$ b) $\frac{e^z}{z^3}$ c) $z^4 \cos \frac{1}{z}$ d) $\frac{1-e^{-z}}{z^3}$

Respuestas:

- a) $\frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - \frac{z^5}{7!} + \dots$

$$b) \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2z} + \frac{1}{3!} + \frac{z}{4!} + \dots$$

$$c) z^4 - \frac{z^2}{2!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{6!z^2} + \dots$$

$$d) \frac{1}{z^2} - \frac{1}{2!z} + \frac{1}{3!} - \frac{z}{4!} + \dots$$

18. Desarrollar en series de Laurent en un entorno de $z_0 = 0$ la función

$$f(z) = \frac{2z + 1}{z^2 + z - 2}$$

Resp.

$$\blacksquare \text{ En } |z| < 1 \text{ es } f(z) = -\frac{1}{2} - \frac{5}{4}z - \frac{7}{8}z^2 - \frac{17}{16}z^3 + \dots$$

$$\blacksquare \text{ En } 1 < |z| < 2 \text{ es } f(z) = \sum_1^{\infty} \frac{1}{z^n} + \sum_0^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$$

$$\blacksquare \text{ En } |z| > 2 \text{ es } f(z) = \frac{2}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{5}{z^3} - \frac{7}{z^4} + \dots$$

19. Desarrollar las siguientes funciones en series de Laurent en la región considerada

$$a) \frac{1}{z^2+z} \text{ en } 0 < |z| < 1.$$

$$\text{Resp. } \frac{1}{z} \sum_0^{\infty} (-1)^n z^n$$

$$b) \frac{1}{z^2+z} \text{ en } 1 < |z| < \infty.$$

$$\text{Resp. } \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{n+1}}$$

$$c) \frac{2z+3}{z^2+3z+2} \text{ en } 1 < |z| < 2.$$

$$\text{Resp. } \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{z^n} + \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} z^n$$

$$d) \frac{1}{(z^2-4)^2} \text{ en } 4 < |z+2| < \infty.$$

$$\text{Resp. } \sum_1^{\infty} \frac{n4^{n-1}}{(z+2)^{n+3}}$$

20. Representar la función $f(z) = \frac{z+1}{z-1}$ por:

a) Su serie de McLaurin.

$$\text{Resp. } 1 - 2 \sum_0^{\infty} z^n \text{ en } |z| < 1$$

b) Su serie de Laurent en el dominio $1 < |z| < \infty$.

$$\text{Resp. } 1 + 2 \sum_1^{\infty} \frac{1}{z^n}$$

Índice alfabético

- acotado, 296
- amplitud, 165
- arco-conexo, 12
- área de superficie, 58
- armónicas, 312

- bola, 295

- camino, 8
- campo escalar, 1
- campo vectorial, 1
- campos gradientes, 29
- Cauchy-Goursat, 331
- Cauchy - Riemann, 309
- centro de masa, 16, 64
- cerrada, 322
- circulación, 22
- compacto, 296
- componentes armónicas, 162
- conexo, 12, 296
- conforme, 315
- continuidad, 304
- contorno, 322
- conservativos, 26
- continuidad, 5
- convergencia puntual, 151
- convexo, 12
- convolución, 235, 252
- curva, 8
- curva de Jordan, 322

- DeMoivre, 290
- desigualdad de Cauchy, 337
- desplazamiento, 233

- determinación, 301
- diferenciabilidad, 5
- diferenciación, 307
- diferenciable, 5
- distancia, 288
- divergencia, 33, 81
- dominio, 296

- entorno, 295
- escalón unitario, 227
- escalonamiento, 232
- espectro, 167, 174
- explícita, 53
- extensión impar, 159
- extensión par, 159

- fase, 165
- fasor, 165
- fenómeno de Gibbs, 178
- flujo, 2, 52, 67, 325
- fórmula de Euler, 291
- forma exponencial, 294
- forma polar, 28
- fórmula de Cauchy, 335
- Fourier, 147
- fuentes, 3
- función e^z , 292
- función logaritmo, 301
- funciones complejas, 296
- funciones hiperbólicas, 299
- funciones trigonométricas, 299

- Green-Riemann, 331

Heaviside, 227

implícita, 53

impulso unitario, 228

integración compleja, 319

integral de campo vectorial, 18

integral de contorno, 323

integral de cosenos, 220

integral de Fourier, 219

integral de línea, 13

integral de senos, 220

integral de superficie, 63, 66

integral de superficie, 52

integral indefinida, 328

irrotacional, 41

jacobiana, 6

laplaciano, 39

ley de Gauss, 84

límite, 4

línea, 2

linealidad, 231

Maclaurin, 347

masa, 13, 64

módulo, 288

momento de inercia, 16

múltiplemente conexo, 12

orientación, 69

paridad, 232

Parseval, 175

paramétrica, 53

periódica, 149, 294

plano tangente, 56

polos, 355

potencia, 175

potencial escalar, 40

potencias complejas, 303

raíces, 291

regular, 322

región, 296

regla de la cadena, 6

reparametrizaciones, 9

residuo, 358

residuos, 355

rotacional, 34, 71

señales, 164

series de Fourier, 148

serie de Laurent, 351

series de potencia, 345

simple, 322

simplemente conexo, 12

simetría, 233

singularidades, 355

solenoidal, 42

suave, 322

sumideros, 3

superficie, 53

superficie elemental, 59

Taylor, 347

teorema de Dirichlet, 152

teorema de Gauss, 49, 81

teorema de Green, 42

teorema de Liouville, 338

teorema de Morera, 338

teorema de Parseval, 247

teorema de Stokes, 71

teorema de Weierstrass, 152

teorema del valor medio, 339

teorema fundamental del álgebra, 339

topología, 294

transformada coseno, 243

transformada de Fourier, 216, 224

transformada de Laplace, 216, 250

transformada finita, 245

transformada seno, 243

transformadas inversas, 256

trayectoria, 8

valor absoluto, 288

valor promedio, 14

vector fundamental, 57