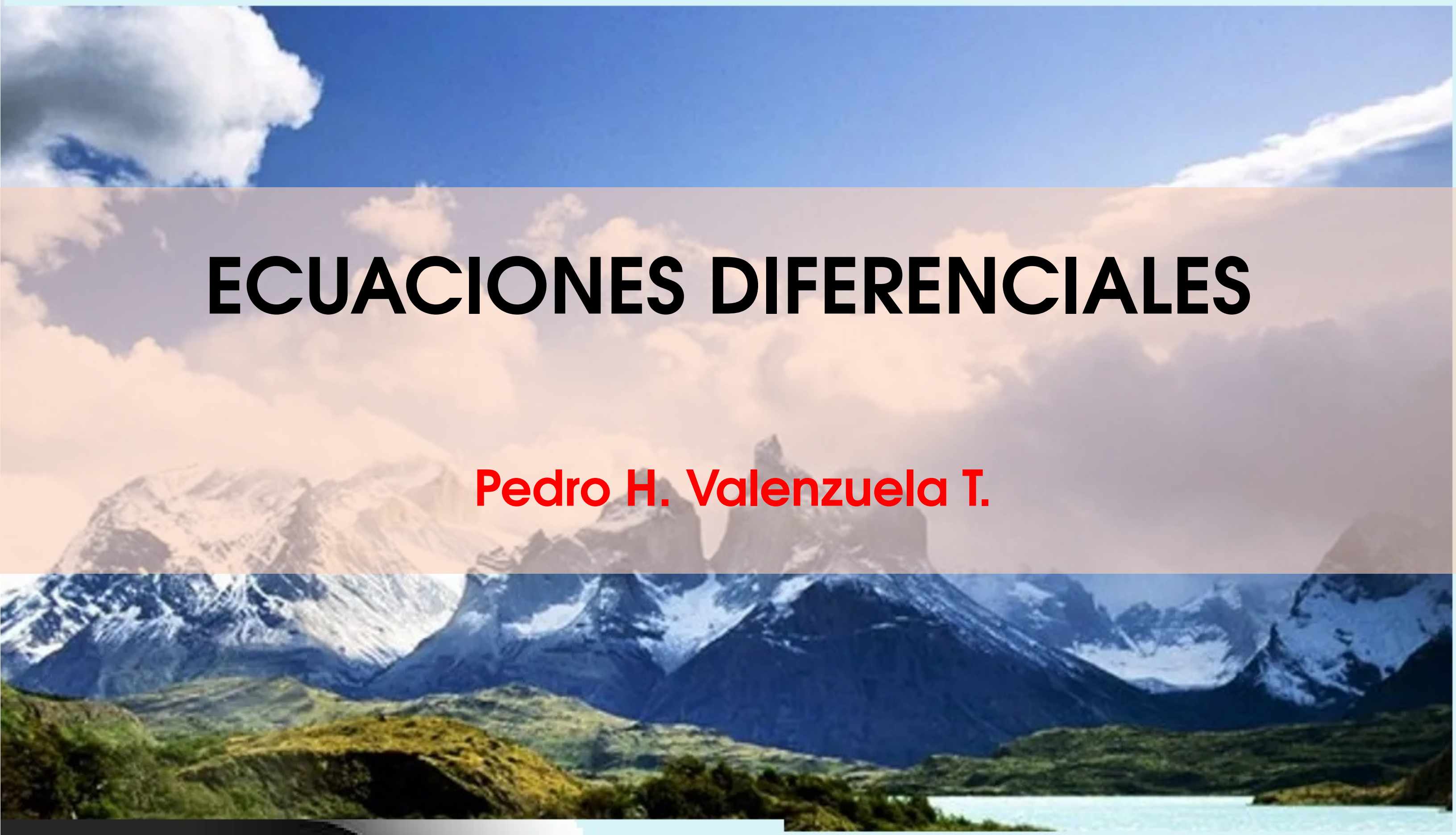
MATEMATICA

ecuaciones diferenciales

VOLUMEN 6



ECUACIONES DIFERENCIALES

Pedro H. Valenzuela T.

2024

Índice general

INTRODUCCIÓN

Lo primero que debo decir, es que existe una gran cantidad de textos sobre ecuaciones diferenciales y todos ellos de muy buena calidad. Pero eso no es todo, vas a Internet y tienes miles de páginas que hablan sobre ecuaciones diferenciales. Resulta claro entonces preguntarse ¿Para qué escribir algo más sobre ecuaciones diferenciales? La razón es más de tipo sentimental, eran viejos apuntes del primer curso de *Ecuaciones Diferenciales* (1982) que se dictó en la Universidad y que me correspondió impartir. Han pasado los años y de pronto he vuelto a este "viejo amor" por las ecuaciones diferenciales (2016). Miro esos antiguos papeles que he guardado y aún no me convenzo que hallan recobrado vida y estén digitalizados con LaTeXy en formato libro. Por supuesto que están actualizados, he agregado problemas resueltos, problemas de pruebas y problemas propuestos. Los contenidos han sido adaptados al programa actual (2024).

Estas notas presentan un aspecto didáctico propio, en cada unidad he agregado unos Test interactivos que te proporcionan retroalimentación inmediata. He agregado pequeños desafíos de respuesta inmediata. Para ello he usado el procesador científico Latex, en conjunto con el software ACROTEX que permite crear quizzes interactivos. El texto lo componen cuatro unidades. La primera trata de ecuaciones diferenciales de primer órden, sus métodos de resolución y sus aplicaciones a problemas de temperatura, crecimiento de poblaciones, radioctividad y problemas de mezclas. La segunda unidad tiene que ver con el estudio de las ecuaciones lineales de orden superior y sus formas de resolución, haciendo hincapie en el uso de operadores y la transformada de Laplace. La tercera unidad presenta como resolver sistemas de ecuaciones diferenciales a través de valores y vectores propios, variación de parámetros y por aplicación de la transformada de Laplace. La cuarta unidad presenta una breve introducción a la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales y sistemas de ecuaciones.

Estas notas son de libre disposición, puedes copiar, imprimir y modificar el contenido a tu pinta, no hay registro de propiedad intelectual ni nada que se parezca.

Una de las ventajas de estas notas es que son de este momento, son actuales, además, los conceptos e ideas son establecidos en un lenguaje sencillo y de manera jovial. El objetivo primordial sigue siendo el facilitar el proceso de enseñanza - aprendizaje.
Cualquier error u omisión que se detecte en estos apuntes, es de exclusiva responsabilidad del autor. Si hallas algún error, me puedes contactar en `pedro.valenzuela@ufrontera.cl` y desde ya te lo agradezco sinceramente, de hecho, en una próxima versión lo haré saber y tu nombre formará parte de este proyecto.

Se agradece a mis colegas; Mario Choquehuanca, Alex Sepúlveda, Herme Soto, Abdón Catalán y Ana Calfiqueo, pues con ellos he confeccionado la mayoría de las pruebas en formato que componen parte de este libro. Así mismo, agradezco a los estudiantes de ingeniería la buena acogida que han tenido estas notas.

Pedro. H. Valenzuela T.
Peache

1. Ecuaciones de primer orden

1.1 Introducción

Las ecuaciones diferenciales son un campo fértil de aplicaciones ya que una ecuación diferencial describe la dinámica de un proceso; el resolverla permite predecir su comportamiento y da la posibilidad de analizar el fenómeno en condiciones distintas.

Por ejemplo, si hacemos un asado en la parrilla y luego se deja enfriar, el tiempo que tarda en enfriarse depende de la temperatura del medio circundante. No es igual que el asado se deje en un lado de la parrilla a que se deje sobre la superficie de una mesa. Se puede observar que cuanto menor es la temperatura del medio circundante, más rápido se enfría el asado. Desde el punto de vista matemático, esto significa que la rapidez de cambio de la temperatura del asado está en proporción directa a la diferencia de las temperaturas del asado y del medio circundante. Esto es, si T_0 es la temperatura al sacar el asado, T_c es la temperatura constante del medio circundante y $T(t)$ es la temperatura del asado después de t minutos, entonces la rapidez de cambio de la temperatura $\frac{dT}{dt}$ es directamente proporcional a la diferencia de las temperaturas del asado y del medio circundante. Es decir

$$\frac{dT}{dt} = k\left[(T(t) - T_c\right]$$

donde k es una constante, que se puede determinar experimentalmente, denominada constante de proporcionalidad, y que se puede calcular por una lectura de la temperatura del asado en algún instante posterior a la lectura inicial. Esta ecuación es un ejemplo de una ecuación diferencial, en donde T es la incógnita.

Definición 1.1.1 Una ecuación diferencial es una ecuación que contiene las derivadas de una o más variables dependientes, con respecto a una o más variables independientes

En términos simples, se dice que una ecuación diferencial es una ecuación en que interviene una función incógnita y sus derivadas.

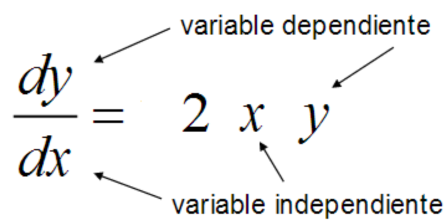


Figura 1.1: una variable

Una formulación más general y precisa de ecuación diferencial es la siguiente:

Definición 1.1.2

Sea $\vec{f} : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ una función continua con dominio D, un conjunto abierto no vacío, entonces una ecuación diferencial ordinaria (EDO) tiene la forma

$$\vec{x}'(t) = \vec{f}(t, \vec{x}) \tag{1.1}$$

en donde $\vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

- La función $\vec{f}(t, \vec{x})$ es el campo vectorial asociado a la EDO.
- Una solución de esta ecuación diferencial es una curva $\phi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, donde I es un intervalo abierto y en donde para cada $t \in I$ se cumple que $\phi'(t) = \vec{f}(t, \phi(t))$
- La ecuación diferencial (1.1) describe el movimiento de un fluído formado por un gran número de partículas, en donde la velocidad instantánea de la partícula que en el tiempo t estáen la posición $\vec{x}$ es $\vec{f}(t, \vec{x})$.
- Las soluciones son las trayectorias de las diferentes partículas. Es por esto que el campo vectorial es llamado **campo de velocidades** y las soluciones **líneas de flujo**.
- Si la función desconocida depende sólo de una variable, la ecuación se llama ecuación diferencial **ordinaria**. Si la función desconocida depende de más de una variable la ecuación se llama ecuación diferencial **parcial**.

1.1.1 Orden y grado

El **orden** de una ecuación diferencial es el orden mayor de las derivadas involucradas en la ecuación. El **grado** de una ecuación diferencial es el grado algebraico de su derivada de mayor orden. Es decir, el grado de una ecuación diferencial es la potencia a la que está elevada la derivada que nos da el orden de la ecuación diferencial.

Ejemplo 1.1.3

1. $xx' - t^3 + 1 = 0$, primer orden y primer grado.
2. $x'^2 - tx = 0$, primer orden y segundo grado.
3. $\left(\dfrac{\partial^2 y}{\partial^2 x}\right)^3 + \dfrac{\partial^2 y}{\partial^2 x} \cdot \left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)^4 - x^7 y = \operatorname{sen} x$, segundo orden y tercer grado
4. $\dfrac{d^2 y}{dx^2} + 2b\dfrac{dy}{dx} + y = 0$, segundo orden y primer grado

En las dos primeras ecuaciones la variable independiente es t, es decir, $x = x(t)$. En las dos restantes $y = y(x)$. La tercera es una ecuación en derivadas parciales.

Inicio Test Pasas con 100 %.

1. Dada la ecuación $y'''(x) - 2xy(x) + (y')^2(x) = 0$.

(a) ¿Es ésta una ecuación diferencial?

(a) yes (b) no

(b) Si tu respuesta es si, anota el orden de la ecuación diferencial. Si es no, anota el signo menos “-”.

2. Dada la ecuación $y^3(x) - 3y^2(x) + 3y(x) - 1 = 0$.

(a) ¿Es ésta una ecuación diferencial?

(a) yes (b) no

(b) Si es si, anota el orden de la ecuación diferencial. Si es no, anota un signo menos “-”.

Fin Test $\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{ScoreField}}$ $\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{PointsField}}$ Correct

Respuesta Correcta:

1.1.2 Forma implícita y explícita de la ecuación

Definición 1.1.4 Una ecuación diferencial de orden n:

- está expresada en forma implícita cuando tiene la forma

$$\underbrace{F(t,x,x',\cdots,x^{(n)})=0}_{n+2 \text{ variables}}$$

siendo $F : D \subset \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$ función con dominio un subconjunto abierto D. La variable independiente es t, siendo $x = x(t)$.

- está expresada en forma explícita cuando

$$x^{(n)} = \underbrace{f(t,x,x',\cdots,x^{(n-1)})}_{n+1 \text{ variables}}$$

con $f : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, función definida en un subconjunto abierto D. Se dice también que la ecuación está en forma **normal**.

Ejemplo 1.1.5 La ecuación $4xy' + y = x$, está escrita:

- en forma implícita si $4xy' + y - x = 0$
- en forma explícita si $y' = \dfrac{x-y}{4x}$, $x \neq 0$

1.1.3 Soluciones de las ecuaciones diferenciales

En términos generales, cualquier función implícita o explícita que satisfaga la ecuación diferencial, se llama **solución**.

Ejemplo 1.1.6 La funcion $y = xe^x$ es solucion de la ecuación $y'' - 2y' + y = 0$

Para verificarlo hallemos y' e y'' para luego reemplazar en la ecuación dada y ver si se satisface.

- $y = xe^x \Longrightarrow y' = e^x + xe^x \Longrightarrow y'' = e^x + e^x + xe^x = 2e^x + xe^x$

Se sigue que:

$$\overbrace{(2e^x + xe^x)}^{y''} - 2\overbrace{(e^x + xe^x)}^{y'} + \overbrace{xe^x}^{y} = 0$$

Por tanto, $y = xe^x$ es solución de la ecuación diferencial dada.
Agregamos lo siguiente:

- La solución de una ecuación diferencial de orden n que contiene n constantes arbitrarias, se llama **solución general**.
- La solución que se obtiene dando valores particulares a las constantes arbitrarias de una solución general se llama **solución particular**.
- La solución de la ecuación diferencial que no contiene constantes arbitrarias y no está contenida en la familia de soluciones generales se llama **solución singular**. No siempre existen. Si existe, se trata de la curva llamada **envolvente** de la familia.
- La gráfica de las soluciones de una ecuación diferencial son llamadas **curvas integrales**

Ejemplo 1.1.7

- La ecuación $y' = e^x$ tiene solución general $y = e^x + C_1$
- La ecuación $y'' = e^x$ tiene solución general $y = e^x + C_1 x + C_2$
- La ecuación $y''' = e^x$ tiene solución general $y = e^x + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$

Cada una de las soluciones generales representan familias de soluciones, una para cada constante.

Si a las constantes arbitrarias se les asignan valores determinados, se obtiene la solución particular. Así, la función $y = e^x + 1$ es una solución particular de la primera ecuación. La función $y = e^x - x + 1$ es solución particular de la segunda, e $y = e^x - x^2 + x + 1$ es solución particular de la tercera.

1.2 Ecuaciones de primer orden

En diversas aplicaciones, se adopta el convenio de designar la variable independiente con la letra t, con el fin de averiguar la evolución temporal de una cantidad desconocida x como función del tiempo t. De esta manera, la función buscada se denota $x(t)$. También es común emplear la notación $y' = f(x,y)$. Usaremos ambas notaciones a lo largo de estos apuntes.

Definición 1.2.1

Una ecuación diferencial (ordinaria) de primer orden para una función $x(t)$ es una relación de la forma

$$x'(t) = f(t, x(t))$$

donde $x'(t) = \frac{dx}{dt}$ es la derivada de $x(t)$ de primer orden, mientras $f(t,x)$ es una función conocida de dos variables reales.

Definición 1.2.2

Dada una ecuación diferencial de primer orden, una condición inicial toma la forma $x(t_0) = x_0$. Entonces se plantea el problema siguiente:

$$x'(t) = f(t, x(t)),\ x(t_0) = x_0$$

Este plantamiento se llama un problema de Cauchy , o más simplemente, un problema de valor inicial (PVI) .

Ejemplo 1.2.3 Se considera el problema de valor inicial

$$x' = 2t, \quad x(1) = 4$$

Es sencillo ver que la solución general es $x(t) = t^2 + c$. Lo que el problema plantea es hallar aquella solución que pase por el punto $(1,4)$. (la condición inicial). Para ello hacemos lo que sigue

$$x(t) = t^2 + c \Longrightarrow x(1) = 1 + c = 4 \Longrightarrow c = 3$$

de donde se obtiene que $x(t) = t^2 + 3$ es la solución deseada. Una interpretación gráfica se muestra en la figura 1.2, y que da cuenta que la constante c juega un papel de parámetro, ya que asignándole distintos valores se halla la solución que se desee.

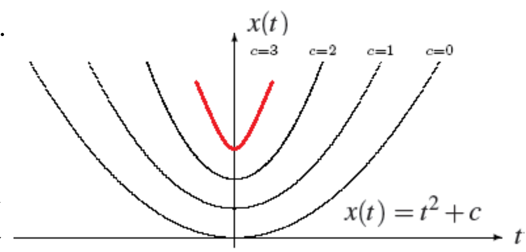


Figura 1.2: curvas solución

Un problema de valor inicial de segundo orden se representa mediante la ecuación

$$y'' = f(x,y,y'), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1$$

Ejemplo 1.2.4 Un problema, de segundo órden, con valor inicial es

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$$

Si los datos se dan en más de un punto se tiene un problema con **condiciones de contorno**.

Definición 1.2.5 Resolver una ecuación diferencial de segundo orden del tipo

$$x'' = f(t,x,x'), \quad t \in [a,b]$$

con las condiciones de frontera $x(a) = \alpha$, $x(b) = \beta$ se denomina un problema de **contorno** o con valores en la **frontera**.

Ejemplo 1.2.6 Un problema de contorno es el siguiente

$$y'' + 9y = 0, \quad y(0) = -2, \quad y(\frac{\pi}{6}) = 4$$

1.2.1 Existencia y unicidad de las soluciones

El teorema principal para problemas de Cauchy de primer orden es el siguiente, cuya demostración se puede hallar en textos de la bibliografía.

Teorema 1.2.7 Se considera la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x(t))$$

Si se verifica que:

1. La función f está definida y es **continua** en un rectángulo $R = \{(x,y/\ a < x < b, c < y < d\}$ que contiene al punto (t_0, x_0).
2. La función tiene derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}$ **continua** en R.

entonces, el problema de valor inicial tiene una única solución $\phi(t)$ en algún intervalo $t_0 - h < x < t_0 + h$ con $h > 0$.

Este teorema afirma dos cosas:

1. Cuando una ecuación diferencial satisface las hipótesis de continuidad, tenemos la seguridad de que el problema con valor inicial tiene solución.
2. Cuando se satisface la hipótesis de la condición inicial $x(t_0) = x_0$ podemos asegurar que la solución es única

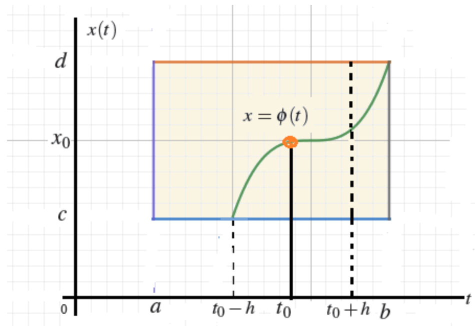


Figura 1.3: campo de direcciones

Gráficamente el teorema dice que existe una única curva solución por el punto (t_0, x_0). Para esta ecuación de primer orden no puede ocurrir que se crucen dos soluciones en algún punto del rectángulo. [1]

Ejemplo 1.2.8 Para la ecuación diferencial $x' = x^2$, $x(0) = 1$

La función $f(t,x) = x^2$ es continua en todo abierto D de $\mathbb{R}^2$, tiene derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$ también continua $\forall x$. La solución es la función

$$x(t) = \frac{1}{t-1}$$

que es discontinua en $t = 1$. Se sigue entonces que la solución existe y es válida en el intervalo $I = (-\infty, 1)$ (que es donde está la condición inicial).

Ejemplo 1.2.9 El problema de Cauchy

$$y' = \frac{y}{\sqrt{x}}, \quad y(1) = 2$$

Cumple que, tanto la función $f(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x}}$, como la función $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ son continuas $\forall x > 0$, se sigue que el problema de Cauchy tiene solución única en $(0, \infty)$.

Ejemplo 1.2.10 Considerar la ecuación $xy' - y = 0$

Es sencillo verificar que $y = Cx$ es la solución general de la ecuación. Dos casos:

- Bajo la condición inicial $y(0) = 0$ se tiene

$$0 = 0 \cdot C \Longrightarrow C \text{ puede ser cualquier número real}$$

- Si la condición inicial es $y(0) = 2$ se tiene

$$2 = 0 \cdot C \Longrightarrow \text{ no existe número real } C$$

[1] más información en apéndice

Uno se pregunta ¿cuál es el problema?, la respuesta es que **no** es posible encontrar una solución particular para cualquier punto (x,y) del plano. ¿porqué? La función primera derivada no está definida en $x = 0$, ya que

$$xy' - y = 0 \Longrightarrow y' = \frac{y}{x} \Longrightarrow \text{ no definida en } x = 0$$

He aquí la importancia del teorema de existencia y unicidad.

1.2.2 Interpretación geométrica

Toda ecuación diferencial de primer orden y grado 1, expresada en forma normal, $y' = f(x,y)$, se puede interpretar como una expresión que asocia a cada punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ en el dominio de la función f, una dirección o, más concretamente, la pendiente de una recta: La tangente a la curva solución en el punto (x,y) en cuestión. De esta manera, una solución de la ecuación, $y = f(x)$ o bien $f(x,y) = 0$, es una curva en $\mathbb{R}^2$, cuya pendiente en cada punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ vale justamente $f(x,y)$. Se dice entonces, que la ecuación $y' = f(x,y)$ determina un "**campo de direcciones**" en la región considerada, pudiendo visualizarse este campo dibujando por cada punto un trozo de recta de la correspondiente solución. Este método de resolución gráfica de la ecuación diferencial no posee exactitud matemática, y su utilidad se presenta en casos excepcionales, dándonos una idea de las soluciones.

Método de Isoclinas

Se llama **isoclina** al lugar geométrico de los puntos en los que las rectas tangentes a las curvas integrales consideradas tienen una misma dirección. La familia de las isoclinas de la ecuación diferencial $y' = f(x,y)$ viene dada por la condición

$$f(x,y) = c$$

donde c es una constante. Usando valores de c cercanos podemos dibujar una red bastante compacta de isoclinas, a partir de las cuales es posible trazar aproximadamente las curvas integrales de la ecuación $y' = f(x,y)$

Ejemplo 1.2.11 Dibujemos el campo de direcciones de la ecuación $y' = -\dfrac{x}{y}$

Se observa que $f(x,y) = -\frac{x}{y}$, de donde las isoclinas son rectas de la forma

$$-\frac{x}{y} = c \quad \text{o bien} \quad y = -\frac{x}{c}$$

- Si $c = 1$ tenemos la isoclina $y = -x$ a lo largo de la cual la inclinación de las tangentes a las curvas integrales es de $45°$.
- Si $c = -1$ resulta la isoclina $y = x$ sobre la cual las tangentes forman un ángulo de $135°$ con respecto al eje x.
- Si $y = 0$ (en el eje x) en $-\frac{x}{y} = c$, entonces c es infinita, luego las tangentes trazadas a las curvas integrales en los puntos de intersección con el eje x son verticales.
- Si $x = 0$ (en el eje y) en $-\frac{x}{y} = c$, entonces las tangentes trazadas a las curvas integrales en los puntos de intersección con el eje y $(x = 0)$ son horizontales.
- En el punto $(0,0)$ no tenemos tangentes.

Con la tabla siguiente se puede construír el campo de direcciones de la ecuación.

x	1	2	0	1	2	-1	-2	0	1
y	0	0	1	1	1	1	1	2	2
y'	$-\infty$	$-\infty$	0	-1	-2	1	2	0	$-\frac{1}{2}$

El campo de direcciones y algunas curvas integrales se muestran en la figura 1.4. En ella se observa que las curvas $x^2+y^2=c$ satisfacen la condición de tangencia, siendo las soluciones del problema. Estas curvas son sólo aproximaciones a las soluciones, por lo que debe verificarse que satisfacen la ecuación diferencial. Visita `https://www.geogebra.org/m/u3VRk9Ab`

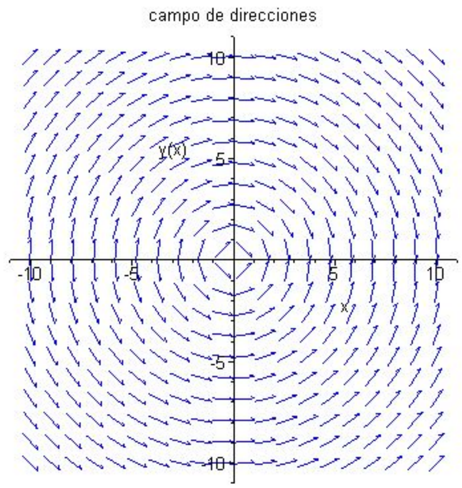


Figura 1.4: campo de direcciones

En el capítulo 4 profundizamos estas ideas al estudiar la teoría cualitativa de las ecuaciones de primer órden.

1.3 Resolución de ecuaciones

En la practica, es común que interesen soluciones particulares de una ecuación diferencial en lugar de una solución general. Desde este punto de vista trataremos de dar a conocer ciertos métodos de resolución de ecuaciones diferenciales que no requieren de mucho esfuerzo, dado que en la actualidad, los sistemas computacionales, tales como Maple realizan todo tipo de cálculo de ecuaciones, incluyendo métodos numéricos, tales como los de Euler, Runge-Kutta y otros, que no serán vistos acá. Los métodos analíticos que emplearemos son los siguientes:

1.3.1 Ecuaciones de variables separables

Se dice que una EDO de primer orden es de variables separadas si se escribe, en forma diferencial, de la manera siguiente

$$f(x)dx = g(y)dy$$

para resolverla se hace integración directa

$$\int f(x)dx = \int g(y)dy \Longrightarrow F(x) - F(y) = C$$

Se debe tener presente que cada vez que se resuelve una integral y aparece el logaritmo natural, es conveniente escribir la constante de integración como $\ln C$ en lugar de C, ya que esto permite escribir la solución de la ecuación diferencial en forma más simple y elegante.

Ejemplo 1.3.1 La ecuación diferencial $x\,dx + y\,dy = 0$ tiene como integral general

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C$$

tomando $C = \frac{r^2}{2}$ se tiene que $x^2+y^2=r^2$, de modo que la solución de la ecuación dada es una familia de circunferencias concéntricas.

Ejemplo 1.3.2 Resolvemos la ecuación $\dfrac{dy}{dx} = y - y^2$.

Al separar variables se tiene la ecuación escrita en la forma

$$\frac{dy}{y(1-y)} = dx \Longrightarrow \int \frac{dy}{y(1-y)} = \int dx + C$$

al realizar la integración se obtiene

$$\ln y - \ln(1-y) = x + C \Longrightarrow \ln \frac{y}{1-y} = x + C$$

expresión que al reducir se transforma en

$$\frac{y}{1-y} = k \cdot e^x$$

y finalmente, la solución general resulta ser

$$y = \frac{k e^x}{1 + k e^x}$$

Si se quiere saber algo sobre el comportamiento de esta solución, es sencillo verificar que si $x \to \infty$, entonces $y \to 1$, y que si $x \to -\infty$, entonces $y \to 0$. Teniéndose que tanto $y = 1$ como $y = 0$ son soluciones de la ecuación diferencial considerada.

Inicio Test Pasas con 100 %.

1. Una solución de la ecuación diferencial $(x^2+4)dy = x\,dx$ es:

(a) $y = Ce^{x^2+4}$ (b) $y = C\ln(x^2+4)$ (c) $y = C\sqrt{x^2+4}$ (d) $y = C\sqrt{4-x^2}$

2. La solución particular tal que $y(0) = 4$ de la ecuación $y' = \dfrac{x+xy}{1+x^2}$ es:

(a) $y = 5\sqrt{1+x^2} - 1$ (b) $y = 5\sqrt{1+x^2}$ (c) $y = 5\sqrt{1+x^2} + 1$ (d) $y = \sqrt{1+x^2} - 5$

3. La solución de la ecuación diferencial $y' = y(1-y)$ es:

(a) $y = 1 + \dfrac{1}{2}(x^2+C)^2$ (b) $y = \dfrac{1}{2}(x^2+C)^2$

(c) $y = 1 + \dfrac{1}{4}(x^2+C)^2$ (d) $y = \dfrac{C}{C+e^{-x}}$

4. La solución de la ecuación diferencial $y^2dx - xy\,dy = x^2y\,dy$ es:

(a) $y = \dfrac{1}{C(x+1)}$ (b) $y = \dfrac{x}{C(x+1)}$ (c) $y = \dfrac{x}{Cx+1}$ (d) $y = \dfrac{x}{x+C}$

Fin Test Correctas

ScoreField PointsField

Correctas

1.3.2 Ecuaciones Homogéneas

Se dice que la función $f(x,y)$ es homogénea de grado n, respecto de las variables x e y, si para todo λ se verifica

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y)$$

Por ejemplo, la función $f(x,y) = xy - y^2$ es homogénea de segundo grado ya que

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda x \lambda y - \lambda^2 y^2 = \lambda^2 (xy - y^2) = \lambda^2 f(x,y)$$

Definición 1.3.3 La ecuación diferencial $y' = f(x,y)$ se dice homogénea respecto de las variables x e y si $f(x,y)$ es homogénea de grado cero respecto de x e y.

Ejemplo 1.3.4 La ecuación $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 - y^2}{xy}$ es homogénea puesto que

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{xy} \Longrightarrow f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda^2 x^2 - \lambda^2 y^2}{\lambda x \cdot \lambda y} = \lambda^0 f(x,y) = f(x,y)$$

La ecuación diferencial homogénea $y' = f(x,y)$ se transforma en una ecuación de **variables separadas** mediante la sustitución $y = ux$. En efecto, como la ecuación es homogénea, entonces

$$f(\lambda x, \lambda y) = f(x,y)$$

haciendo $\lambda = \dfrac{1}{x}$ se tiene

$$f(x,y) = f(1, \frac{y}{x})$$

de manera que la ecuación diferencial toma la forma

$$y' = f(1, \frac{y}{x})$$

al tomar derivada con respecto de x en $y = ux$ se tiene

$$y' = u' \cdot x + u$$

reemplazando en la ecuación diferencial el resultado es

$$u + xu' = f(1,u)$$

en la cual, separando variables

$$\frac{du}{f(1,u) - u} = \frac{dx}{x}$$

que era lo que se tenía que probar. Si se quiere la solución general, sólo basta hacer la integración.

Ejemplo 1.3.5 Resolvemos la ecuación homogénea $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy}{x^2 - y^2}$

Es claro que es homogénea (grado 2 arriba y grado 2 abajo hacen grado cero). Hacemos $y = ux$ para tener $y' = u' \cdot x + u$. Reemplazamos esto en la ecuación dada

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2 - y^2} \Longrightarrow u' \cdot x + u = \frac{ux^2}{x^2 - u^2 x^2}$$

al simplificar queda

$$u' \cdot x + u = \frac{u}{1-u^2}$$

al asociar se tiene

$$u' \cdot x = \frac{u^3}{1-u^2}$$

al separar variables y usando diferenciales

$$\frac{1-u^2}{u^3} du = \frac{dx}{x}$$

al integrar

$$\int \frac{1-u^2}{u^3} du = \int \frac{dx}{x} - \ln C$$

de aquí que

$$-\frac{1}{2u^2} - \ln u = \ln x - \ln C \Longrightarrow \ln(\frac{ux}{C}) = -\frac{1}{2u^2}$$

y finalmente, como $y = ux$, entonces

$$y = C e^{-x^2/2y^2}$$

Otra forma de transformar una ecuación no homogénea a homogénea es utilizando la sustitución $y = z^{\alpha}$, pero esto se puede hacer sólo si todos los términos de la ecuación son del mismo grado, atribuyendo el grado α a la variable y , el grado uno (1) a la variable x, y el grado $\alpha - 1$ a la derivada y'.

Ejemplo 1.3.6 Resolvemos la ecuación $4xy^2 dx + (3x^2 y - 1) dy = 0$

Sea $y = z^{\alpha}$, entonces $dy = \alpha z^{\alpha-1} dz$. Reemplazamos en la ecuación

$$4xz^{2\alpha} dx + (3x^2 z^{\alpha} - 1)\, \alpha z^{\alpha-1} dz$$

La que equivale a:

$$4xz^{2\alpha} dx + (3x^2 z^{2\alpha-1} - z^{\alpha-1})\, \alpha\, dz \tag{1.2}$$

La idea es que esta ecuación sea homogénea, por tanto, los exponentes deben satisfacer:

$$2\alpha + 1 = \alpha - 1 \Longrightarrow \alpha = -2$$

El $2\alpha + 1$ sale de la suma de exponentes de x y $z^{2\alpha}$ y para que "todo" sea del mismo grado, es necesario que $2\alpha + 1 = \alpha - 1$. Reemplazando en la ecuación (1.2)

$$4xz^{-4} dx + (3x^2 z^{-5} - z^{-3})\,(-2)\, dz = 0$$

Al multiplicar por z^5 se tiene que

$$4xz\, dx - 2\,(3x^2 - z^2)\, dz = 0 \tag{1.3}$$

Ecuación claramente homogénea. Hacemos $z = ux$ para tener que

$$dz = u\, dx + x\, du$$

Reemplazamos esto en la ecuación (1.3)

$$4xz\,dx - 2\,(3x^2 - z^2)(u\,dx + x\,du) = 0$$

Cambiamos $z = ux$ y distribuimos

$$4x^2u\,dx - 6x^2u\,dx - 6x^3\,du + 2u^3x^2\,dx + 2u^2x^3\,du = 0$$

Esto equivale a:

$$(2u^3x^2 - 2x^2u)\,dx + (2u^2x^3 - 6x^3)\,du = 0$$

O bien

$$2x^2u(u^2-1)\,dx + 2x^3(u^2-3)\,du = 0$$

Simplificando

$$u(u^2-1)\,dx + x(u^2-3)\,du = 0$$

Separamos variables

$$\frac{dx}{x} = -\frac{u^2-3}{u(u^2-1)}du \Longrightarrow \int \frac{dx}{x} = -\int \frac{u^2-3}{u(u^2-1)}$$

Luego de pasar a fracciones parciales se llega a:

$$\ln x + 3\ln u - \ln(u^2-1) = \ln C$$

O lo que equivalente

$$\frac{xu^3}{u^2-1} = C$$

Como $u = \frac{z}{x}$, $y = z^{-2}$, entonces la solución general es

$$y(1-x^2y)^2 = k$$

1.3.3 Ecuación reducible a homogénea

Las ecuaciones del tipo

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \tag{1.4}$$

se reducen a una ecuación homogénea trasladando el origen de coordenadas al punto de intersección de las rectas $a_1x + b_1y + c_1$, $a_2x + b_2y + c_2$

Para verificar esto, suponemos que (x_1, y_1) es el punto de intersección de las rectas. Usando las ecuaciones de traslación se tiene

$$u = x - x_1, \quad v = y - y_1 \Longrightarrow \frac{du}{dv} = \frac{dy}{dx}$$

reemplazando en (1.4) esa ecuación se transforma en

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v}\right)$$

al dividir por u, dentro del paréntesis, tenemos que

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{a_1 + b_1\frac{v}{u}}{a_2 + b_2\frac{u}{v}}\right) = f\left(\frac{v}{u}\right)$$

lo que prueba que la ecuación es homogénea.

Observación. Si las rectas en cuestión son paralelas, este método no puede aplicarse, pero como en este caso las coeficientes de las coordenadas son proporcionales, es decir,

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1}$$

la ecuación (1.4) se escribe

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{k(a_1x + b_1y) + c_2}\right) = F(a_1x + b_1y) \tag{1.5}$$

usando ahora la sustitución $z = a_1x + b_1y$ se tiene que

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dx}$$

lo cual nos conduce a tener que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b_1}\frac{dz}{dx} - a_1 = F(z)$$

despejando la derivada respecto de z se tiene

$$\frac{dz}{dx} = a_1 + b_1 F(z)$$

resultando una ecuación de variables separadas.

No hay nada más gratificante que un buen ejemplo

Ejemplo 1.3.7 Resolvemos la ecuación $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y-3}{x-y-1}$

Tienes que observar que sobra un -3 arriba y un -1 abajo, así que hay que trasladar el origen de coordenadas, que se logra al resolver

$$x + y - 3 = 0, \quad x - y - 1 = 0 \Longrightarrow x = 2,\ y = 1$$

luego, las ecuaciones de traslación son

$$u = x - 2, \quad v = y - 1$$

Esto hace que acortemos camino, pues debe quedar

$$\frac{dv}{du} = \frac{u+v}{u-v}, \qquad \text{¡¡homogénea!!}$$

Todo el mundo sabe que en las sustituciones las variables son “mudas”, así que para no confundir el trabajo, cambiemos la última ecuación a variables x e y.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$$

esto permite darse cuenta que lo único diferente con la ecuación original es haber eliminado las constante que "molestaban" en el numerador y denominador. Esto siempre es así, sólo que tienes que tener las coordenadas del punto al cual trasladas el origen. Una vez dicho lo anterior, retomamos nuestra última ecuación, que es homogénea, y hacemos $y = ux$ de donde $y' = u'x + u$, para tener que

$$u'x + u = \frac{x + ux}{x - ux} \Longrightarrow \frac{1+u}{1+u^2}\,du = \frac{dx}{x}$$

al integrar y llamando $\ln C$ a la constante, se llega a

$$\ln Cx \cdot \sqrt{1+u^2} = \operatorname{arc\,tg} u$$

y en las variables originales se tiene

$$C\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = e^{\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y-1}{x-2}\right)}$$

Inicio Test Pasas con 100 %.

1. Si $y = ux$, la ecuación homogénea $(x^2 + y^2)dx - xydy = 0$ se transforma en la ecuación de variables eparadas:

(a) $x^2dx - x^2udu = 0$ (b) $x^3dx - x^2udu = 0$
(c) $x^2dx + x^3udu = 0$ (d) $x^2dx - x^3udu = 0$

2. La función

$$f(x,y) = x + \sqrt{y^2 - xy} - \frac{xy + y^2}{x} + \frac{x^5}{y^4}$$

es homogénea. Su grado de homogeneidad es:

(a) 1 (b) 2 (c) 0 (d) 5

3. Si en la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} = x(x^2 + 2y + 1)$ se hace $z = x^2$ se obtiene la ecuación

(a) $\dfrac{dy}{dz} = \dfrac{1}{2}(z + 2y + 1)$ (b) $\dfrac{dy}{dz} = z + 2y + 1$
(c) $\dfrac{dy}{dz} = \dfrac{1}{4}(z + 2y + 1)$ (d) $\dfrac{dy}{dz} = 2(z + 2y + 1)$

4. Si en la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dz} = \dfrac{1}{2}(z + 2y + 1)$ se hace $u = z + 2y + 1$ se obtiene la ecuación

(a) $\dfrac{du}{u} = z - 2$ (b) $\dfrac{du}{u} = z + 2$ (c) $\dfrac{du}{u} = z + 1$ (d) $\dfrac{du}{u} = 2z + 1$

Fin Test Correctas

ScoreField PointsField

Correctas

1.3.4 Ecuación lineal de primer orden

Una ecuación diferencial lineal de primer orden es una ecuación de la forma

$$y' + p(x)y = q(x)$$

donde p y q son funciones continuas definidas en un intervalo.
(a) Si $q(x) = 0$ la ecuación se dice homogénea, y es de variables separables.
(b) Si $q(x) \neq 0$ la ecuación se dice no homogénea.

Solución de la homogénea
La ecuación homogénea tiene la forma

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$$

Esta ecuación es de variable separables. Al resolver se halla:

$$y = C\,e^{-\int p(x)dx}$$

Solución de la no homogénea
La ecuación tiene la forma

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\,y = q(x)$$

multiplicando ambos miembros por $e^{\int p(x)\,dx}$

$$e^{\int p(x)\,dx} \cdot \frac{dy}{dx} + e^{\int p(x)\,dx} p(x)\,y = q(x)e^{\int p(x)\,dx}$$

El primer miembro viene de una derivada

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\int p(x)\,dx} y\right) = q(x)e^{\int p(x)\,dx}$$

integrando

$$e^{\int p(x)\,dx} y = \int q(x)e^{\int p(x)\,dx}\,dx + C$$

de donde

$$\boxed{y = e^{-\int p(x)\,dx} \cdot \left[\int e^{\int p(x)\,dx} \cdot q(x) + C\right]}$$

Esta es la fórmula a usar para hallar la solución general de una ecuación lineal de primer orden.

Ejemplo 1.3.8 Resolvemos $xy' - y = x^3\sqrt{1-x^2}$

En primer lugar, la ecuación se escribe en forma normal

$$y' - y \cdot \frac{1}{x} = x^2\sqrt{1-x^2}$$

Ahora sí, se ve que es lineal, con $p(x) = -\dfrac{1}{x}$, $q(x) = x^2\sqrt{1-x^2}$. La aplicación de la fórmula permite la rápida determinación de la solución.

$$y = x\left[-\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2} + C\right]$$

1.3.5 Ecuación de Bernoulli

Una ecuación de la forma

$$y' + p(x)\,y = q(x)\,y^n, \quad n \geq 1$$

se llama ecuación de **Bernouilli**. Esta ecuación es reducible a una lineal mediante mediante la sustitución $z = y^{1-n}$, en efecto,

$$z = y^{1-n} \Longrightarrow \frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y^n}{1-n}\frac{dz}{dx}$$

reemplazando en la ecuación de Bernouilli tenemos

$$\begin{aligned} \frac{y^n}{1-n}\frac{dz}{dx} + P(x)\,y &= Q(x)\,y^n \;\Big/ \cdot y^{-n} \\ \frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx} + P(x)\,y^{1-n} &= Q(x) \\ \frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx} + P(x)\,z &= Q(x) \\ \frac{1}{1-n}z' + P(x)\,z &= Q(x) \quad \text{¡lineal!} \end{aligned}$$

Ejemplo 1.3.9 Resolvemos la ecuación $y' = \dfrac{y}{2x} + \dfrac{x^2}{2y}$

A escribir la ecuación en la forma

$$y' - \frac{1}{2x}\cdot y = \frac{x^2}{2}\cdot y^{-1}$$

se observa que es semejante a una de Bernouilli, con

$$p(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad q(x) = \frac{x^2}{2}$$

Como $n = -1$, hacemos $z = y^2$, se tiene (sin olvidar que las derivadas son respecto de x)

$$z' = 2yy'$$

si se multiplica la ecuación $2y$ (para formar el z') se tiene

$$2yy' - 2y\frac{1}{2x}\cdot y = 2y\frac{x^2}{2}\cdot y^{-1}$$

$$\frac{dz}{dx} - \frac{y^2}{x} = x^2$$

y en términos de la variable z

$$\frac{dz}{dx} - \frac{z}{x} = x^2$$

Por tanto, la solución general es

$$z = y^2 = \frac{x^3}{2} + Cx$$

1.3.6 Ecuación Exacta

Una ecuación de la forma $M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$ se llama **exacta** si se satisface

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

Equivalentemente, la ecuación diferencial

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

es exacta si existe una función f tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x}=M(x,y) \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=N(x,y)$$

A la función f que cumple estas dos condiciones se le denomina **función potencial**, mientras que a la función vectorial

$$\vec{F}(x,y)=(M(x,y),N(x,y))$$

se le llama campo vectorial **conservativo**. En este contexto, resolver la ecuación diferencial exacta es equivalente a encontrar la función potencial del campo.

Al ser la integral de línea independiente de la trayectoria, ella es igual al potencial en el punto final menos al potencial en el punto inicial. Si f denota el potencial, (x_0,y_0) es el punto inicial y (x,y) es el punto final, entonces

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy$$

Si $M(x,y)dx+N(x,y)dy$ es una ecuación exacta, entonces su solución general viene dada por

$$\int_{x_0}^{x} M(t,y_0)dt+\int_{y_0}^{y} N(x,t)dt=C$$

El punto (x_0,y_0) es arbitrario, pero no debe ser un punto de discontinuidad de las funciones M y N.

Ejemplo 1.3.10 Resolver la ecuación diferencial $(2xy-\sec^2 x)\,dx+(x^2+2y)dy=0$

Se reconoce que $M(x,y)=2xy-\sec^2 x),\ N(x,y)=x^2+2y$. Las derivadas cruzadas son:

$$\frac{\partial M}{\partial y}=2x=\frac{\partial N}{\partial x}$$

Así, la ecuación es exacta. Como M y N son continuas en todo punto (x,y), elegimos $x_0=0=y_0$ para utilizar la fórmula

$$\int_0^x M(t,0)dt+\int_0^y N(x,t)dt=C$$

la cual equivale a tener

$$\int_0^x (2t\cdot 0-\sec^2 t)\,dt+\int_0^y (x^2+2t)\,dt=C$$

Resolviendo,

$$-\operatorname{tg} t\Big|_0^x + (x^2 t + t^2)\Big|_0^y = C$$

Evaluando,

$$-\operatorname{tg} x + x^2 y + y^2 = C$$

1.3.7 Ecuación de Ricatti

Una ecuación diferencial de la forma

$$y' + P(x)\,y + Q(x)\,y^2 = R(x)$$

se denomina de Ricatti.

Lo que se debe tener claro es que esta ecuación no se puede resolver, a menos que se conozca una solución, y en tal caso existe una sustitución que la transforma en una ecuación de Bernouilli. Vamos a ver esto.

Sea y_1 una solución conocida. hacemos la sustitución $y = y_1 + z$, de la cual $y' = {y_1}' + z'$. Se reemplaza en la ecuación de Ricatti

$${y_1}' + z' + P(x)\,(y_1 + z) + Q(x)\,(y_1^2 + z^2 + 2y_1 z) = R(x)$$

haciendo algunos arreglos

$$({y_1}' + P(x)\,y_1 + Q(x)\,y_1^2) + z' + P(x)\,z + Q(x)\,z^2 + 2y_1 z\,Q(x) = R(x)$$

pero y_1 solución, de modo que ${y_1}' + P(x)\,y_1 + Q(x)\,y_1^2 = R(x)$, por tanto,

$$z' + P(x)\,z + Q(x)\,z^2 + 2y_1 z\,Q(x) = 0$$

otro arreglo permite tener

$$z' + (\,P(x) + 2y_1\,Q(x)\,)\,z = -Q(x)\,z^2$$

Hemos llegado a una ecuación de Bernouilli en z. Pero te voy a agregar algo más, es posible transformar una ecuación de Ricatti directamente en ecuación Lineal haciendo la sustitución $y = y_1 + \dfrac{1}{z}$, esto es lo que se usa en la práctica.

Ejemplo 1.3.11 Se sabe que $y_1 = \dfrac{1}{x}$ es solución de la ecuación $y' = y^2 - \frac{2}{x^2}$. Hallar la solución general de esta ecuación.

Es claro que se trata de una ecuación de Ricatti. La pasaremos a lineal.

$$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{z} \Longrightarrow y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{z^2}\,z'$$

reemplazando en la ecuación dada

$$-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{z^2}\,z' = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right)^2 - \frac{2}{x^2}$$

un arreglo más

$$z' + \frac{2}{x} z = -1, \qquad \text{¡lineal!}$$

Aquí se puede usar la fórmula de la lineal.

$$z = -\frac{x}{3} + \frac{C}{x^2}$$

En consecuencia, la solución de la ecuación de Ricatti es

$$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x} + \frac{3x^2}{3C - x^3}$$

1.3.8 Factores Integrantes

Sirven para transformar ecuaciones diferenciales no exactas en exactas. No es un problema sencillo, pero tiene su gracia hallar estos factores integrantes.

Una función $\mu(x,y)$ tal que

$$M(x,y)\,\mu(x,y)\,dx + N(x,y)\,\mu(x,y)\,dy = 0$$

es una ecuación diferencial exacta, se llama **factor integrante** (F.I.)

Búsqueda de factores integrantes

Partimos con la idea de que la ecuación

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

no es diferencial exacta. Se espera que exista una función $\mu(x,y)$ que al multiplicarla la haga exacta, esto es,

$$M(x,y)\,\mu(x,y)\,dx + N(x,y)\,\mu(x,y)\,dy = 0$$

Ahora, usemos la definición de exacta

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu N)$$

sacando las derivadas de estos productos tenemos

$$\mu \frac{\partial M}{\partial y} + M \frac{\partial \mu}{\partial y} = N \frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu \frac{\partial N}{\partial x}$$

al asociar

$$\mu \left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right] = N \frac{\partial \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \mu}{\partial y}$$

y al dividir por μ

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{1}{\mu} \left[N \frac{\partial \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \mu}{\partial y} \right]$$

todavía podemos mejorar esto si nos percatamos que tenemos una derivada de logaritmo.

$$\boxed{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = N\,\frac{\partial \ln(\mu)}{\partial x} - M\,\frac{\partial \ln(\mu)}{\partial y}}$$

Caso I: *El F.I. depende sólo de x*

Siendo dependiente sólo de x la derivada respecto de y es cero, es decir,

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = 0$$

luego, se tiene que

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = \frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right]$$

en caso de tener continuidad respecto de x en esta ecuación, podemos hacer integración, y tener

$$\ln \mu = \int \frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] dx + \ln C$$

de donde se obtiene que

$$\mu = C\,e^{\displaystyle\int \frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] dx}$$

es la forma que tiene este factor integrante.

Caso II: *El F.I. depende sólo de y*

Siendo el F.I: dependiente sólo de y, la derivada respecto de x es cero, es decir,

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = 0$$

luego, se tiene que

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = -\frac{1}{M}\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right]$$

en caso de tener continuidad respecto de y en esta ecuación, podemos hacer integración, y tener

$$\ln \mu = -\int \frac{1}{M}\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] dy + \ln C$$

de donde se obtiene que

$$\mu = C\,e^{\displaystyle -\int \frac{1}{M}\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] dy}$$

es la forma que tiene este factor integrante.

Caso III: *El F.I. depende de x e y*

Si existe factor integrante, y es de cierta forma función de un argumento del tipo xy, $x \pm y$, $x^2 + y^2$, $\frac{x}{y}$, etc, tenemos un "truco" infalible, hacer $z = f(x,y)$, y aplicar la regla de la cadena para hallar el $\mu(x,y)$. Te anoto con zoom el siguiente recordatorio

$$\boxed{\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = \frac{\partial \ln \mu}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}}$$

Ejemplo 1.3.12 Hallemos solución general de $(y+xy^2)\,dx - x\,dy = 0$

Lo primero que se hace al mirar una ecuación diferencial es tratar de identificarla. Si la escribes en la forma

$$y' - \frac{1}{x}y = y^2$$

es una ecuación de Bernouilli. Esas ya las sabemos resolver, busquemos una alternativa. Veamos si es exacta

$$M = y + xy^2 \implies \frac{\partial M}{\partial y} = 1 + 2xy$$

$$N = -x \implies \frac{\partial N}{\partial x} = -1$$

se concluye que la ecuación no es exacta por tener estas derivadas distintas. Le buscamos un factor integrante

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 2(1+xy)$$

Estamos entre dos alternativas, dividimos por N o dividimos por M. Si dividimos por M se tiene que

$$\frac{1}{M}\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = -\frac{1}{y(1+xy)} \cdot 2(1+xy) = -\frac{2}{y} = F(y)$$

¡¡Bingo!!, el factor integrante depende sólo de y. Este F.I. es

$$\mu = C\,e^{-\int \frac{2}{y}\,dy} = \frac{C}{y^2}$$

tomando $C = 1$, el F.I: es $\mu(x,y) = \dfrac{1}{y^2}$. Con este F.I ya calculado nos vamos a la ecuación que no era exacta, multiplicamos y tenemos

$$\frac{y+xy^2}{y^2}\,dx - \frac{x}{y^2}\,dy = 0, \qquad \text{¡Exacta!}$$

A continuación una tabla de factores de integración que debes tener a mano

Tabla de factores integrantes

Expresión	Dependencia	Factor de integración
$\dfrac{M_y - N_x}{N} = f(x)$	depende de x	$\mu(x) = e^{\int f(x)dx}$
$-\dfrac{M_y - N_x}{M} = f(y)$	depende de y	$\mu(y) = e^{-\int f(y)dy}$
$\dfrac{M_y - N_x}{N - M} = f(x+y)$	depende de $z = x+y$	$\mu(z) = e^{\int f(z)d(z)}$
$\dfrac{M_y - N_x}{N + M} = f(x-y)$	depende de $z = x-y$	$\mu(z) = e^{\int f(z)d(z)}$
$\dfrac{M_y - N_x}{yN - xM} = f(xy)$	depende de $z = xy$	$\mu(z) = e^{\int f(z)d(z)}$
$\dfrac{M_y - N_x}{N - 2yM}$	depende de $z = x+y^2$	$\mu(z) = e^{\int f(z)dz}$
$\dfrac{M_y - N_x}{2xN - 2yM} = f(x^2+y^2)$	depende de $z = x^2+y^2$	$\mu(z) = e^{\int f(z)d(z)}$
$M_y - N_x = m\dfrac{N}{x} - n\dfrac{M}{y}$		$\mu(x,y) = x^m y^n$
$M_y - N_x = NP - MQ$		$\mu(x,y) = e^{\int P(x)dx} \cdot e^{\int Q(y)dy}$

Ejemplo 1.3.13 Resolvemos la ecuación $(2y+3x^2y^3)\,dx + (3x+5x^3y^2)\,dy = 0$ sabiendo que admite un factor integrante de la forma $x^m y^n$

Del enunciado se deduce que al multiplicar la ecuación por dicho factor integrante resulta una ecuación exacta. Vamos por eso entonces

$$\frac{\partial}{\partial y}((2y+3x^2y^3)x^m y^n) = \frac{\partial}{\partial x}((3x+5x^3y^2)x^m y^n)$$

al hacer esta derivada parcial se encuentra que

$$nx^m y^{n-1}(2y+3x^2y^3) + x^m y^n(2+9x^2y^2) = mx^{m-1}y^n(3xy+5x^3y^2) + x^m y^n(3+15x^2y^2)$$

al factorizar por $x^m y^n$ se tiene

$$x^m y^n\left[2n+(3n+9)x^2y^2+2\right] = x^m y^n(\left[3m+3+x^2y^2(5m+15)\right]$$

de donde,

$$2n+2+(3n+9)x^2y^2 = 3m+3+x^2y^2(5m+15)$$

traspasando e igualando a cero

$$x^2y^2(3n+9-5m-15) + (2n+2-3m-3) = 0$$

lo que nos lleva a que

$$3n-5m=6, \qquad \text{y} \qquad 2n-3m=1$$

de lo cual se obtiene $m=-9,\ n=-13$, con lo cual, el factor integrante es $x^{-9}y^{-13}$. Resolvemos ahora la ecuación exacta

$$(2y+3x^2y^2)x^{-9}y^{-13}\,dx+(3x+5x^3y^2)x^{-9}y^{-13}\,dy=0$$

Para ello tenemos que

$$\mu=\int(2y+3x^2y^2)x^{-9}y^{-13}\,dx+K(y)=\int\frac{2y+3x^2y^2}{x^9y^{13}}\,dx+K(y)$$

la integral es sencilla

$$\mu=-\frac{1}{4x^8y^{12}}-\frac{1}{2x^6y^{10}}+K(y)$$

Para determinar el valor de la función $K(y)$ derivamos respecto de y para tener

$$\frac{\partial\mu}{\partial y}=\frac{3}{x^8y^{13}}+\frac{5}{x^6y^{11}}+K'(y)$$

como $\frac{\partial\mu}{\partial y}$ es conocida, entonces

$$\frac{3}{x^8y^{11}}+\frac{5}{x^6y^{11}}=\frac{3}{x^8y^{13}}+\frac{5}{x^6y^{11}}+K'(y)$$

deduciendo que $K(y)$ es una función constante, que denominamos C. Por tanto, la solución general de la ecuación diferencial es

$$\frac{1}{4x^8y^{12}}+\frac{1}{2x^6y^{10}}=C$$

Ejemplo 1.3.14 Para la ecuación $(x-y)dx+(x+y)dy=0$, hallar un factor integrante de la forma $\mu=\mu(x^2+y^2)$.

De acuerdo a lo establecido, el factor integrante se obtiene a partir de

$$\frac{M_y-N_x}{2xN-2yM}=f(x^2+y^2)$$

Las derivadas a sacar son:

- $M_y=-1$
- $N_x=1$
- $\boxed{M_y-N_x=-2}$
- $2xN=2x(x+y)=2x^2+2xy$
- $2yM=2y(x-y)=2xy-2y^2$
- $\boxed{2xN-2yM=2x^2+2y^2}$

Luego,

$$\frac{M_y-N_x}{2xN-2yM}=\frac{-2}{2x^2+2y^2}=-\frac{1}{x^2+y^2}=f(x^2+y^2)$$

El factor integrante es

$$\mu(x,y)=e^{\int f(x^2+y^2)d(x^2+y^2)}$$

reemplazando $z = x^2 + y^2$

$$\mu(x,y) = e^{\int -\frac{1}{z}dz} = e^{-\ln z} = \frac{1}{z} = \frac{1}{x^2+y^2}$$

Vamos a verificar nuestro trabajo. La ecuación a trabajar es ahora

$$\overbrace{\frac{1}{x^2+y^2}\cdot(x-y)}^{M}\,dx + \overbrace{\frac{1}{x^2+y^2}\cdot(x+y)}^{N}\,dy = 0$$

que se puede escribir

$$\overbrace{\frac{x-y}{x^2+y^2}}^{M}\,dx + \overbrace{\frac{x+y}{x^2+y^2}}^{N}\,dy = 0$$

debiera ser exacta. ¡Vamos a ver!

- $M_y = -\dfrac{(x^2+y^2)-2y(x-y)}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{y^2-x^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}$
- $N_x = \dfrac{(x^2+y^2)-2x(x+y)}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{y^2-x^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}$

Como son iguales, hemos probado que tiene ese factor integrante.

Inicio Test Pasas con 100 %.

1. El valor de k para que sea exacta la ecuación

$$(2x - y\,\text{sen}(xy))dx - (20k^2xy^3 + x\,\text{sen}(xy))dy = 0$$

(a) $k = 5$ (b) $k = -5$ (c) $k = \dfrac{1}{5}$ (d) $k = -\dfrac{1}{5}$

2. El valor de k de modo que la ecuación diferencial sea exacta.

$$(kx^2y + e^y)dx + (x^3 + xe^y - y)dy = 0$$

(a) $k = 1$ (b) $k = 0$ (c) $k = 2$ (d) $k = 3$

3. La función $M(x,y)$ de modo que la ecuación diferencial sea exacta

$$M(x,y)dx + (x^3 + xe^y - y)dy = 0$$

(a) $3x^2y + ye^y$ (b) $3xy + ye^y$ (c) $3x^2y + xe^y$ (d) $3x^2y + ye^x$

4. La ecuación $(x + 3x^3\,\text{sen}\,y)dx + x^4\cos y\,dy = 0$ tiene un factor integrante que depende de x. El factor es:

(a) $\mu(x) = \dfrac{2}{x}$ (b) $\mu(x) = -\dfrac{1}{x}$ (c) $\mu(x) = \dfrac{1}{x}$ (d) $\mu(x) = \dfrac{1}{x^2}$

Fin Test Correctas

ScoreField PointsField

Correctas

Inicio Test Pasas con 100 %.

1. Indica factor integrante del tipo $\mu(x,y) = x^n y^m$ para la ecuación dada.

$$(2y-6x)dx + (3x - \frac{4x^2}{y})dy = 0$$

(a) $\mu(x,y) = xy$ (b) $\mu(x,y) = x^2y^2$ (c) $\mu(x,y) = x^2y$ (d) $\mu(x,y) = xy^2$

2. Indica, para la ecuación $(3x+2y+y^2)dx + (x+4xy+5y^2)dy = 0$, un F.I. si;

$$\frac{M_y - N_x}{N - 2yM} = f(x+y^2) \Longrightarrow \mu(x+y^2) = e^{\int f(x+y^2)d(x+y^2)} \text{ es F.I.}$$

(a) $\mu(x,y) = x+y^2$ (b) $\mu(x,y) = \dfrac{1}{x+y^2}$ (c) $\mu(x,y) = x^2+y$ (d) $\mu(x,y) = \dfrac{2}{x+y^2}$

3. Indica el factor integrante, $\mu(xy)$, de la ecuación

$$2(y^2 + \frac{1}{y})dx + 3xydy = 0$$

(a) $\mu(x,y) = xy+2$ (b) $\mu(x,y) = xy+1$ (c) $\mu(x,y) = xy$ (d) $\mu(x,y) = x^2y$

Fin Test Correctas

ScoreField PointsField

Correctas

1.4 Aplicaciones Elementales

Abordamos crecimiento de poblaciones, desintegración radiactiva, Ley de enfriamiento de Newton y problemas de mezclas.

1.4.1 Modelos de crecimiento y decrecimiento

La rapidez de crecimiento del número de bacterias en una solución es proporcional al número de bacterias presente. Si x representa el número de bacterias presente en una solución en el tiempo t y k es un factor de proporcionalidad, entonces la **ley de descomposición** y de crecimiento está expresada por:

$$\frac{dx}{dt} = -kx \quad \text{para la descomposición}$$
$$\frac{dx}{dt} = kx \quad \text{para el crecimiento}$$

Ejemplo 1.4.1 Una población bacteriana B se sabe que tiene una tasa de crecimiento proporcional a si misma. Si entre el medio día y las 2 pm se triplica, hallar a qué tiempo, sin ningún tipo de control, B será 100 veces mayor que al mediodía.

Sea x la cantidad bacteriana y sea x_0 la cantidad al mediodía. La ecuación diferencial que gobierna este tipo de problemas es:

$$\frac{dx}{dt} = Kx$$

con solución

$$x = C\,e^{kt}$$

Como en $t = 0$ es $x = x_0$, entonces $C = x_0$. Por tanto,

$$x = x_0\,e^{kt}$$

Para hallar K usemos que en $t = 2$ es $x = 3x_0$. Luego,

$$3x_0 = x_0\,e^{kt} \Longrightarrow k = \frac{\ln 3}{2}$$

Así que la ecuación tiene la forma

$$x = x_0\,e^{t\,\frac{\ln 3}{2}}$$

Ahora hallamos t para que se tenga $x = 100x_0$. Es decir, debemos resolver

$$100x_0 = x_0\,e^{t\,\frac{\ln 3}{2}} \Longrightarrow t = 8,38 \text{ hrs}$$

Ejemplo 1.4.2 Una reacción química se desarrolla con la ley de descomposición. Si la mitad de la sustancia A ha sido convertida al finalizar 10 seg, hallar en cuanto tiempo se han convertido los nueve décimos de la sustancia.

Sea x_0 la cantidad inicial de sustancia A. La ecuación de descomposición es

$$\frac{dx}{dt} = -kx$$

Al resolver esta ecuación se tiene:

$$x = C\,e^{-kt}$$

Esta es la cantidad presente en todo tiempo t. Para hallar la constante C se hace uso del hecho de que en $t = 0$ la cantidad inicial es x_0, esto es,

$$x = x_0\,e^{-kt}$$

Por hipótesis, en $t = 10$ la cantidad de sustancia A es $\frac{x_0}{2}$. Tenemos:

$$\frac{x_0}{2} = x_0\,e^{-K\cdot 10} \Longrightarrow k = \frac{\ln 2}{10}$$

Con esto, la ecuación diferencial es

$$x = x_0\,e^{-t\,\frac{\ln 2}{10}}$$

Ahora hallamos t para que se tenga $x = \frac{1}{10}x_0$ (es lo queda en cualquier instánte. Es decir, debemos resolver

$$\frac{9}{10}x_0 = x_0\,e^{-t\,\frac{\ln 2}{10}} \Longrightarrow t = 33 \text{ seg}$$

Ejemplo 1.4.3

En la conservación de alimentos, el azúcar sufre un proceso de inversión y se transforma en glucosa y fructuosa. En las soluciones diluidas, el ritmo de inversión es proporcional a la concentración $y(t)$ del azúcar inalterada. Sí la concentración es de $\frac{1}{50}$ cuando $t = 0$ y $\frac{1}{200}$ tras 3 horas, hallar la concentración del azúcar inalterada después de 6 horas.
La ecuación que modela es

$$\frac{dx}{dt} = kx$$

Al resolver

$$x(t) = Ce^{kt}$$

Si $x(0) = \frac{1}{50}$, entonces $C = \frac{1}{50}$, de modo que la ecuación queda

$$x(t) = \frac{1}{50}e^{kt}$$

Ahora

$$\frac{1}{200} = \frac{1}{50}e^{3k}$$

se halla $k = -\ln\sqrt[3]{4}$. Con esto, la ecuación es

$$x(t) = \frac{1}{50}e^{-t\ln\sqrt[3]{4}} \Longrightarrow x(6) = \frac{1}{800}$$

Desafío 1.

► La tasa de crecimiento de una población de moscas de la fruta en un instante dado es proporcional al tamaño de la población en dicho momento. Si hay 180 moscas después del segundo día del experimento y 300 moscas después del cuarto día. ¿Cuántas moscas había originalmente?

Ans Clear

1.4.2 Desintegración radiactiva

Entre 1900 y 1902, Rutherford y Soddy (posteriormente galardonados ambos con el premio Nobel de Química), estudiaron la desintegración de la materia por emisión de radiactividad. Experimentalmente verificaron que el ritmo de desintegración de los elementos radiactivos es proporcional a la **cantidad de elemento presente**. Así, si $x(t)$ designa dicha cantidad en cada instante de tiempo, se tiene que la ley de desintegración es

$$\frac{dx}{dt} = -kx, \quad k > 0$$

cuya solución general es

$$x(t) = Ce^{-kt}$$

Si se fija la condición inicial $x(0) = x_0$, se obtiene que $C = x_0$, con lo cual

$$x(t) = x_0\,e^{-kt}$$

Un elemento interesante en este clase de problemas es el de vida media.

Definición 1.4.4 La **vida media** de una sustancia radiactiva es el tiempo necesario para que se desintegren la mitad de los átomos de una cantidad inicial de dicha sustancia.

Ejemplo 1.4.5 Un material radiactivo se desintegra a una razón proporcional a la cantidad presente. Si inicialmente hay 40 mg de material y al cabo de una hora se observa que ha perdido el 8 % de la cantidad inicial, hallar:

1. la cantidad de masa en cualquier instante t
2. la masa del material después de 3 horas.
3. el tiempo que transcurre hasta la desintegración de la mitad de la cantidad inicial.

1) Sea $x(t)$ la cantidad presente del material radiactivo (en miligramos). De acuerdo al modelo, la ecuación que gobierna este proceso es

$$\frac{dx}{dt} = kt$$

con solución

$$x(t) = C\,e^{kt}$$

De acuerdo con los datos del problema $x(0) = 40$, con lo cual

$$x(t) = C\,e^{kt} \Longrightarrow 40 = C\,e^{0} \Longrightarrow C = 40$$

De esta manera la ecuación queda

$$x(t) = 40\,e^{kt}$$

Ahora se debe determinar la constante de proporcionalidad

$$x(1) = 40 \cdot \frac{92}{100} = 40\,e^{t}$$

Esta es la cantidad **presente** al cabo de una hora (el 8 % de 40 es 3,2, queda 40-3,2=36,8). Se sigue que

$$t = \ln\left(40 \cdot \frac{92}{100}\right) = -0,0833$$

Por tanto,

$$x(t) = 40\,e^{-0,0833t}$$

es la ecuación que entrega la cantidad de material radiactivo presente en cualquier instante de tiempo t.

2) La masa del material después de 3 horas lo proporciona

$$x(3) = 40\,e^{-0,0833\times 3} = 31,155\,mg$$

3) El tiempo para que quede la midad se halla como sigue:

$$\frac{40}{2} = 20 = 40\,e^{-0,0833t} \Longrightarrow t = 8,3210\,min$$

Ejemplo 1.4.6 La velocidad con que se desintegran núcleos radiactivos es proporcional al número de núcleos que están presentes en una muestra dada. La mitad del número original de núcleos radiactivos ha experimentado la desintegración en un período de 1500 años.

1. ¿Qué porcentaje de núcleos radiactivos originales continuarán después de 4500 años?
2. ¿En cuántos años quedará solamente un décimo del número original de núcleos radiactivos?

De la lectura del problema, *la velocidad con la que se desintegran los núcleos en tiempo t es proporcional al número de núcleos presentes*, se puede plantear la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = kx$$

en donde $x(t)$ es la cantidad de núcleos radiactivos presente después de t años y k es una constante de proporcionalidad. Si x_0 es el número original de núcleos radiactivos. Entonces

$$x(0) = x_0$$

La vida media es

$$x(1500) = \frac{1}{2}x_0$$

La solución de la ecuación diferencial es

$$x(t) = C\,e^{kt}$$

para $t = 0$ se tiene $x(0) = C = x_0$. Luego,

$$x(t) = x_0\,e^{kt}$$

Con la vida media se halla la constante k. Se tiene

$$\frac{1}{2}x_0 = x_0\,e^{k\cdot 1500}$$

de donde

$$k = \frac{\ln\frac{1}{2}}{1500}$$

Se tiene la siguiente ecuación

$$x(t) = x_0\,e^{-t\cdot 1500\cdot \ln 2}$$

1) Para dar respuesta a la primera pregunta

$$x(4500) = x_0\,e^{-1500\cdot \ln 2\cdot 4500} = 0,125x_0$$

de lo cual se tiene $12,5\,\%$

2) Para determinar en cuántos años quedará solamente un décimo del número original de núcleos, es necesario hallar el valor de t tal que $x(t) = \frac{1}{10}x_0$. Esto es,

$$\frac{1}{10}x_0 = x_0\,e^{kt}$$

Con el valor de k previamente obtenido:

$$t = \frac{\ln 0,1}{k} = 4983 \text{ años}$$

Desafío 2.

► Se analizó con C_{14} que tiene una vida media de 5600 años, un hueso fosilizado. Se encontró que contenía la milésima parte de la cantidad original de C_{14}. Determinar la edad del fósil (en años aprox.).

Ans Clear

1.4.3 Ley de enfriamiento de Newton

Se sabe de observaciones experimentales que la temperatura de un objeto cambia a una velocidad proporcional a la diferencia entre la temperatura del objeto y la del medio que le rodea. Esto se conoce como la **Ley de enfriamiento de Newton**. Esto es,

La temperatura de un cuerpo cambia a una velocidad que es proporcional a la diferencia de las temperaturas entre el medio externo y el cuerpo

Suponiendo que la constante de proporcionalidad es la misma ya sea que la temperatura aumente o disminuya, entonces la ecuación diferencial de la ley de enfriamiento es:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m)$$

donde:

- T = Temperatura del cuerpo
- t = tiempo
- T_m = Temperatura del medio ambiente
- k = constante de proporcionalidad.

Al resolver esta ecuación encontraremos la temperatura del cuerpo en cualquier instante de tiempo t. Esta solución es:

$$T = T_m + C e^{-kt}$$

Observación. Una alternativa interesante como método para resolver esta clase de problemas consiste en considerar, no la solución de la ecuación diferencial, si no el planteamiento de la ecuación diferencial como sigue:

$$\int_{T_0}^{T} \frac{dT}{T - T_m} = -k \int_0^t dt$$

en donde la parte izquierda de la ecuación conlleva la **temperatura** y el lado derecho el **tiempo**, de modo que se debe leer del modo siguiente:

- a tiempo $t = 0$ corresponde temperatura inicial T_0.
- a tiempo t corresponde temperatura T.

Ejemplo 1.4.7 Se calienta un alambre hasta 100°, a continuación se sumerge en agua que se mantiene a 30°, despues de 3 minutos la temperatura del alambre se ha reducido a 70°. Hallar el tiempo necesario para que la temperatura del alambre sea de 31°.

Vamos a resolver el problema aplicando la ley de Newton e integrando inmediatamente. También se puede hacer por integración indefinida y calculando las constantes, tú eliges.

$$\begin{aligned} T' = -k(T - T_m) \quad &\Longrightarrow \quad \int_{100}^{70} \frac{dT}{T - 30} = -k \int_0^3 dt \\ &\Longrightarrow \quad \ln(40) - \ln(70) = -3k \\ &\Longrightarrow \quad k = \frac{1}{3} \ln(\frac{7}{4}) = 0,1865383 \end{aligned}$$

Con la constante k ya calculada, finiquitamos el problema como sigue

$$\int_{100}^{31} \frac{dT}{T - 30} = -0,1865383 \quad \Longrightarrow \quad \ln(70) = 0,1865383\, t$$

Al despejar se obtiene

$$t = \frac{\ln(70)}{0,1865383} = 22,7754, \text{ minutos}$$

Desafío 3.

▶ Si la temperatura del aire es de $20°C$ y un cuerpo se enfría en 20 minutos de $100°C$ a $60°C$, hallar en cuánto tiempo (minutos) la temperatura descenderá a $30°C$.

Ans Clear

Si tienes un tiempo libre visita
https://www.youtube.com/watch?v=jrAOAo8Zv_4
http://curso-ecuaciones.blogspot.cl/2009/10/mezclas.html

1.4.4 Problemas de Mezclas

Se trata de calcular la cantidad de soluto $x(t)$ que hay en un tanque, que tiene un volumen inicial V_0 de solución (una mezcla de soluto y solvente), en cualquier instante de tiempo t, en función de la cantidad inicial de soluto x_0, conociendo además que hay un flujo tanto de entrada como de salida.

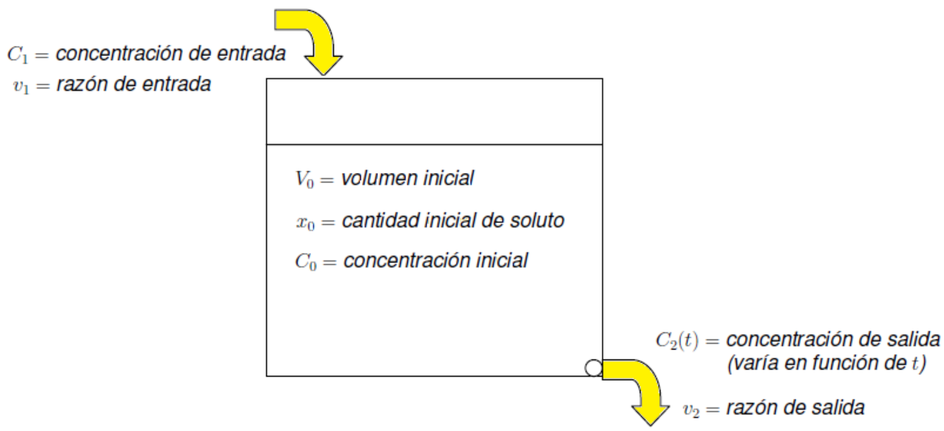


Figura 1.5: elementos de una mezcla

Supongamos que la solución que se inyecta al tanque tiene una concentración de C_1 gramos de soluto por litro, y fluye a éste con una tasa de v_1 litros por segundo, en tanto que la sustancia contenida en el tanque se mantiene bien mezclada por agitación y fluye hacia fuera de este a una tasa de v_2 litros por segundo (figura 1.4).

Observación. Debe quedar claro que la cantidad de soluto en el tanque, una vez iniciado el proceso, va a variar en la medida en que transcurre el tiempo; es decir, la concentración de sal en el tanque es una función del tiempo.

Sea $x(t)$ la cantidad de soluto en el tanque en un instante de tiempo t. La cantidad de soluto que fluye hacia el tanque durante Δt segundos es $(v_1 C_1 \Delta t)$ gramos. La cantidad de soluto que fluye hacia fuera del tanque durante el mismo intervalo de tiempo, depende de la concentración de soluto $C_2(t)$ en el tanque al instante t.

La concentración de soluto en el tanque en cualquier instante de tiempo t es

$$C_2(t) = \frac{x(t)}{V(t)}$$

donde $x(t)$ es la cantidad de soluto en cualquier instante t y $V(t)$ el volumen de líquido en el tanque en cualquier instante t.

Si la tasa de entrada de líquido al tanque es igual a la tasa de salida de líquido del tanque ($v_1 = v_2$) entonces el volumen en cualquier instante de tiempo t es el mismo, es decir, el volumen se mantiene constante ($V(t) = V_0$, con V_0 volumen inicial).

El volumen de líquido en el tanque, en cualquier instante de tiempo t, viene dado por la ecuación

$$\boxed{V(t) = V_0 + (v_1 - v_2)t}$$

Por otra parte, la variación de la cantidad de soluto en un instante t, es igual a la diferencia entre la cantidad de líquido que fluye hacia el tanque ($v_1 C_1 \Delta t$) y la cantidad de líquido que fluye fuera del tanque ($v_2 C_2 \Delta t$). Es decir,

$$\Delta x = \text{(gramos que ingresan) - (gramos que salen)} = v_1 C_1 \Delta t - v_2 C_2 \Delta t$$

Al dividir por Δt:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = v_1 C_1 - v_2 C_2$$

calculando el límite de cuando $\Delta t \to 0$ se obtiene

$$\frac{dx}{dt} = v_1 C_1 - v_2 C_2 \tag{1.6}$$

expresión conocida como **ecuación de continuidad**.

Sustituyendo en esta ecuación la concentración de salida:

$$C_2(t) = \frac{x(t)}{V(t)} = \frac{x(t)}{V_0 + (v_1 - v_2)t}$$

se tiene la ecuación diferencial lineal

$$\boxed{\frac{dx}{dt} + \frac{v_2}{V_0 + (v_1 - v_2)t} x = v_1 C_1}$$

con las condición inicial $x(0)$ se halla la constante de integración C y se establece $x(t)$.

Ejemplo 1.4.8

En un estanque de 378,5 litros de capacidad va entrando salmuera, que contiene 240 gramos de sal por litro, a razón de 11,35 litros por minuto, mezclándose con el agua limpia que contiene el estanque. Al mismo tiempo, va saliendo una cantidad igual de la mezcla por minuto. Hallar la cantidad de sal que hay en el estanque al cabo de una hora.

En 11,35 litros hay 2724 gramos de sal, lo que en kilos son 2,724 kilos de sal, y de acuerdo con los datos del problema, corresponde a la cantidad de sal que está entrando.

$$\text{razón de entrada} = \left(0,24\frac{\text{kg}}{L}\right)\cdot\left(11,35\frac{L}{\text{min}}\right) = 2,724\frac{\text{kg}}{\text{min}}$$

El problema dice que también sale cierta cantidad de mezcla. Necesitamos la concentración, que es la cantidad de sal en la unidad de volumen de solución. Esto es

$$\text{razón de salida} = \left(\frac{x(t)\text{kg}}{378,5L}\right)\cdot\frac{11,35L}{\text{min}} = \frac{11,35x}{378,5}\left(\frac{\text{kg}}{\text{min}}\right)$$

Tenemos todos los datos, por tanto, la ecuación de continuidad es

$$x' = 2,724 - \frac{11,35}{378,5}x$$

que en diferenciales es

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1031,034 - 11,35x}{378,5}$$

se separan variables (también se puede ver como lineal) y ponemos los límites de integración.

$$378,5\int_0^x \frac{dx}{1031,034 - 11,35x} = \int_0^{60} dt$$

la primera integral es un logaritmo, al evaluar, usando calculadora por supuesto, debes tener

$$x = 75,81234185 \text{ kgs de sal}$$

Ejemplo 1.4.9

Un tanque contiene $1000L$ de agua pura. Entra salmuera por dos llaves, por una de ellas entra salmuera con $0,05$ kg de sal por litro de agua a razón de 5 L/min, y por la otra entra salmuera con 0,04 kg de sal por litro de agua a razón de 10 L/min. La solución se mantiene mezclada perfectamente y se sale del tanque con una rapidez de 15 L/min. ¿Cuánta sal está en el tanque después de t minutos y también después de una hora?
Sean $x(t)$ la cantidad de sal (en kilogramos) después de t minutos y $\frac{dx}{dt}$ la razón de cambio de la cantidad de sal. La ecuación de continuidad nos permite plantear la ecuación diferencial:

$$\frac{dx}{dt} = (\text{razón de entrada}) - (\text{razón de salida})$$

La razón de entrada es:

$$\left(0,05\frac{\text{kg}}{L}\right)\cdot\left(5\frac{L}{\text{min}}\right) + \left(0,04\frac{\text{kg}}{L}\right)\cdot\left(10\frac{L}{\text{min}}\right) = 0,65\frac{\text{kg}}{\text{min}}$$

Y la razón de salida:

$$\left(\frac{x(t)\text{kg}}{1000L}\right)\cdot\frac{15L}{\text{min}} = \frac{3x}{200}\left(\frac{\text{kg}}{\text{min}}\right)$$

Por tanto, nuestra ecuación diferencial a resolver es:

$$\frac{dx}{dt} = 0,65 - \frac{3x}{200}$$

Al resolver:

$$x(60) = 43,3\cdot(1 - e^{-\frac{3\cdot 60}{200}}) = 25,715\ kg$$

Ejemplo 1.4.10

Un tanque con capacidad de 500 galones contiene inicialmente 200 galones de agua con 100 lb de sal en solución. Se inyecta al tanque agua cuya concentración de sal es de 1 lb/gal, a razón de 3 gal/min. La mezcla debidamente agitada y homogeneizada sale del tanque a razón de 2 gal/min.

1. Encuentre la cantidad de sal y la concentración de sal en el tanque para cualquier tiempo.
2. Determine la concentración de sal en el instante justo en que la solución alcanza el volumen total del tanque.

1) De acuerdo con los datos la ecuación modelo es

$$\frac{dx}{dt}+\frac{2x}{200+t}=3$$

Resolviendo con condiciones iniciales se tiene

$$x(t)=(200+t)-100\left(\frac{200}{200+t}\right)^2$$

Para determinar la ley de variación de la concentración de sal en el tanque en cualquier instante t, se debe recordar que la concentración en cualquier instante t se obtiene como el cociente entre la cantidad de sal en cualquier instante t y el volumen en cualquier instante t

$$C(t)=\frac{x(t)}{V(t)}$$

donde

$$V(t)=V_0+(v_1-v_2)t=200+t$$

al reemplazar

$$C(t)=1-\frac{4(10)^6}{(200+t)^3}$$

2) El volumen de líquido en el tanque, en cualquier instante t del proceso, se obtiene por medio de la ecuación

$$V(t)=V_0+(v_1-v_2)t$$

Así, para determinar el tiempo que demora en alcanzarse el volumen total de líquido en el tanque, se sustituyen los datos en la esta ecuación

$$500=200+(3-2)t\Longrightarrow t=300\;min=5\,h$$

Para determinar la cantidad de sal y la concentración justo en el instante que el tanque llega a su volumen máximo, se sustituye en las el tiempo $t=300$ min (que es cuando alcanza el volumen total

$$x(300)=484$$

$$C(300)=0,98$$

Luego, al cabo de 5 horas la cantidad de sal en el tanque es 484 lb y la concentración es 0,98 lb/gal

Desafío 4.

► Se sabe que la población de cierto país aumenta de una forma proporcional al número de habitantes actuales. Si después de dos años la población se ha duplicado y después de tres años la población es de 20.000 habitantes, hallar el número de habitantes que había inicialmente en el país.

Ans Clear

1.5 Problemas Resueltos

Los problemas que se desarrollan a continuación han formado parte de pruebas escritas que he tomado a otros alumnos de Ingeniería. Espero que te sirvan como complemento de tus estudios. ¡Aprovéchalos!

Problema 1.1 Plantear los siguientes enunciados en términos de una ecuación diferencial, indicando claramente cuales son las variables que se utilizan y las constantes de proporcionalidad empleadas. ¡¡Por favor!!, **No resuelvas**, no aporta puntaje.

1. Un tanque contiene 100 litros de salmuera obtenida disolviendo 60 kgr de sal en agua. Se introduce agua salada en el tanque a razón de 2 litros por segundo que contiene 1 kgr de sal, y la mezcla que se mantiene homogénea sale del tanque a una velocidad de 3 litros por segundo. Escribir la ecuación diferencial que da la cantidad de sal en el tanque al cabo de un minuto.
   Resp. $\frac{dy}{dt} = 2 - \frac{3y}{100-t}$
2. Para cierta sustancia la velocidad de cambio de la presión (P) respecto a la temperatura (T) es proporcional a la presión e inversamente proporcional al cuadrado de la temperatura.
   Resp. $\frac{dP}{dT} = \frac{kP}{T^2}$
3. La población P de una ciudad aumenta a una velocidad proporcional a la población y a la diferencia entre 200000 y la población.
   Resp. $\frac{dP}{dt} = kP(200000 - P)$
4. 100 gramos de azúcar que están en agua se convierten en Dextrosa a una velocidad que es proporcional a la cantidad que aún no se ha convertido. Dar la ecuación que expresa la velocidad de conversión después de t minutos.
   Resp. $\frac{dq}{dt} = k(100 - q), \qquad q = \text{conversión}$
5. El numero de personas implicadas en un escándalo aumenta a una tasa que es proporcional tanto al número de personas ya implicadas como al número de personas comprometidas que no han sido implicadas todavía.
   Resp. $\frac{dP}{dt} = kP(N - P)$
6. El crecimiento de cierta población animal es proporcional a la cantidad de individuos presente disminuída en un factor proporcional al cuadrado da dicha cantidad.
   Resp. $\frac{dP}{dt} = k_1 P - k_2 P^2$
7. Suponiendo que mientras más tiempo conduce una persona bajo condiciones de riesgo uniforme, mayor es la posibilidad de que sufra un accidente. Un análisis cuidadoso de la situación muestra que la tasa de aumento en la probabilidad P es proporcional a la probabilidad de no tener accidéntes.
   Resp. $\frac{dP}{dt} = k(1 - P)$
8. El dinero. depositado en un banco aumenta de tal manera que en cualquier momento la tasa a la cual está aumentando el saldo es igual al 7 % del saldo de ese momento.
   Resp. $\frac{ds}{dt} = \frac{7}{100} s$

Problema 1.2 Para cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales, escribe la forma estándar, bajo la cual decides poner (1) si es homogénea, (2) si es lineal, (3) si es de Bernouilli, (4) si es reducible a homogénea, (5) si es exacta, y (6) de otro tipo que si puedes identificar.

1. $(\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y + \operatorname{tg} x)\, dx - \cos x \cos y\, dy = 0$
2. $x\, dx + (y\, dx - x\, dy) \cdot \operatorname{sen}^2 \frac{y}{x} = 0$
3. $x\,(3xy - 4y^3 + 6)\, dx + (x^3 - 6x^2y^2 - 1)\, dy = 0$
4. $(xy^2 + x - 2y + 3)\, dx + x^2 y\, dy = 2(x+y)\, dy$
5. $2y\,(y^2 - x)\, dy = dx$
6. $4dx + (x - y + 2)^2\, dy = 0$
7. $6y^2\, dx - x\,(2x^3 + y)\, dy = 0$
8. $t\, dx + x\, dt = t^3\, dt$
9. $(x + y + 1)\, dx = (2x + 2y - 1)\, dy$

Respuestas

1. Se verifica que $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x} = \operatorname{sen} x \cos y$ ¡exacta! (5)
2. Consideras en primer lugar que
$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) = \frac{x + y \operatorname{sen}^2(y/x)}{x \operatorname{sen}^2(y/x)}$$
Si reemplazas, x por kx e y por ky tienes que
$$\frac{dy}{dx} = \frac{kx + ky \operatorname{sen}^2(ky/kx)}{kx \operatorname{sen}^2(ky/kx)} = \frac{x + y \operatorname{sen}^2(y/x)}{x \operatorname{sen}^2(y/x)} = f(x,y)$$
¡homogénea!, (1). Si te simpatiza hacer $y = ux$, encuentras que tu ecuación se transforma en variables separables.
$$u'x + u = \frac{1 + \operatorname{sen}^2(u)}{\operatorname{sen}^2(u)} \Longrightarrow u'x = F(u) \Longrightarrow \frac{du}{F(u)} = dx$$
3. Esta es exacta, (5)
$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2 - 12xy^2$$
4. ¡Otra vez, exacta! (5)
5. Esta es lineal (2). Debes escribirla como $\dfrac{dx}{dy}$
6. Si haces $x - y + 2 = z$ es de variables separables (6). Si la escribes
$$x' - \frac{x}{2}(y-2) + \frac{x^2}{4} = -(y-2)^2$$
es de Ricatti (6)

7. ¡Bernouilli! (3)
$$x' - \frac{1}{6y}x = \frac{1}{3y^2}x^4$$
8. Verifica que es lineal y también exacta. Usa x'
9. Con $z = x + y$ la llevas a variables separadas

Problema 1.3 Resolver la ecuación diferencial $x^2y' = 1 - x^2 + y^2 - x^2y^2$
Se separan variables
$$x^2y' = (1-x^2) + (1-x^2)y^2 \Longrightarrow \frac{dy}{1+y^2} = \frac{(1-x^2)dx}{x^2}$$
Integrando
$$\operatorname{arc\,tg}(y) = -\frac{1}{x} - 1 + C$$

Problema 1.4 Resolver las siguientes ecuaciones sabiendo que, una de ellas admite un factor integrante de la forma $\phi(xy)$ y otra es de Ricatti con solución particular $y = x - 1$.

1. $(y\,dx + x\,dy)\,x \cos\left(\frac{y}{x}\right) = (x\,dy - y\,dx)\,\operatorname{sen}\left(\frac{y}{x}\right)$
2. $dy - x\,dx - dx + xy\,(y - 2x)\,dx + x^3\,dx = 0$
3. $(3xy + 4y^2 + 1)\,dx + (2x^2 + 6xy + 2)\,dy = 0$

Respuestas

(1) Esta ecuación es homogénea. Con $y = ux$ se tiene $y' = u'x + u$.
$$[ux + x\,(u'x + u)]\,x \cos u = [x\,(u'x + u) - ux]\,ux \operatorname{sen} u$$
Seguro te diste cuenta que se dividió por dx para hacer y'. Reducimos términos semejantes.
$$2ux^2 \cos u + x^3 u' \cos u = x^3\, u\, u' \operatorname{sen} u$$
Factorizamos el u'
$$u'\,(x^3 \cos u - x^3\, u \operatorname{sen} u) + 2ux^2 \cos u = 0$$
de donde
$$x\,u'\,(\cos u - u \operatorname{sen} u) + 2u \cos u = 0 \Longrightarrow \frac{(\cos u - u \operatorname{sen} u)\,du}{u \cos u} = -\frac{2\,dx}{x}$$
Al integrar
$$\ln(u \cos u) = -2 \ln x + \ln C \Longrightarrow \ln[(u \cos u) \cdot x^2] = \ln C$$
Esto es
$$u \cos u \cdot x^2 = C \Longrightarrow xy \cos(\frac{y}{x}) = C$$
es la solución de la ecuación dada.

(2) La ecuación se escribe como
$$\frac{dy}{dx} - x - 1 + xy(y - 2x) + x^3 = 0$$

lo que permite pasarla a la forma

$$\frac{dy}{dx} - (2x^2)\,y + (x)\,y^2 = x + 1 - x^3$$

una linda y hermosa ecuación de Ricatti Sea $y = z + x - 1$, entonces $\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} + 1$. Reemplazando en Ricatti tenemos

$$\frac{dz}{dx} = -(z^2 - 2z)\,x \Longrightarrow \frac{dz}{z(z-2)} = -x\,dx$$

Al integrar (fracciones parciales por supuesto)

$$-\frac{1}{2}\ln z + \frac{1}{2}\ln(z-2) = -\frac{x^2}{2} + \ln C$$

Juntando logarítmos y despejando se halla

$$z = \frac{2\,e^{x^2}}{e^{x^2} - C}$$

Se concluye que la solución general es

$$y = \frac{2\,e^{x^2}}{e^{x^2} - C} + x - 1$$

(3) No es necesario ser mago para darse cuenta que esta tiene que ser la candidata a **exacta**.

$$(3xy + 4y^2 + 1)\,dx + (2x^2 + 6xy + 2)\,dy = 0$$

Sacamos las derivadas parciales

$$\frac{\partial M}{dy} = 3x + 8y, \qquad \frac{\partial N}{dx} = 4x + 6y$$

le faltó poco para ser exacta. Pero, nos dicen que hay un factor integrante del tipo $\phi(xy)$. El asunto funciona como sigue.

$$z = xy \Longrightarrow \frac{\partial z}{dx} = y, \qquad \frac{\partial z}{dy} = x$$

Formamos la ecuación que permite la determinación del factor.

$$\frac{\partial M}{dy} - \frac{\partial N}{dx} = N\,\frac{\partial}{dx}(\ln\mu) - M\,\frac{\partial}{dy}(\ln\mu)$$

Haciendo los reemplazos correspondientes y reduciendo los términos semejante

$$\frac{\partial}{dz}(\ln\mu) = \frac{1}{z+1} \Longrightarrow \mu = xy + 1$$

Con este factor integrante ($\mu = xy + 1$), la ecuación exacta es

$$(3xy + 4y^2 + 1)(xy + 1)\,dx + (2x^2 + 6xy + 2)(xy + 1)\,dy = 0$$

Esto significa que existe una función F tal que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2y^2 + 4xy + 4xy^3 + 1$$

al integrar respecto de x

$$F(x,y) = x^3y^2 + 2x^2y + 2x^2y^3 + 4xy^2 + x + k(y)$$

se deriva respecto de y para determinar esa constante $k(y)$.

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2x^3y + 2x^2 + 6x^2y^2 + 8xy + k'(y)$$

Como se sabe que

$$\frac{\partial F}{\partial y} = (2x^2 + 6xy + 2)(xy + 1) = 2x^3y + 2x^2 + 6x^2y^2 + 8xy + 2$$

al igualar se obtiene

$$k'(y) = 2 \Longrightarrow k(y) = 2y$$

En consecuencia,

$$F(x,y) = x^3y^2 + 2x^2y^3 + 2x^2y + 4xy^2 + x + 2y$$

Con lo cual la solución general tiene la forma

$$x^3y^2 + 2x^2y^3 + 2x^2y + 4xy^2 + x + 2y = C$$

Problema 1.5 Una lancha a motor circula por las tranquilas aguas del Calafquén con velocidad de 10 km/h. A plena carrera su motor fue apagado, y después de $t = 20$ segundos la velocidad de la lancha disminuyó hasta $v_1 = 6$ km/h. Determinar la velocidad de la lancha 2 minutos después de haber apagado el motor, considerando que la resistencia del agua es proporcional a la velocidad de movimiento de la lancha.
De la lectura del problema se deduce la ecuación que modela la situación es

$$\frac{dv}{dt} = k\,v \Longrightarrow v = C\,e^{kt}$$

dado que, en $t = 0$ es $v = 10$, entonces

$$v = 10\,e^{kt}$$

Ahora, 20 segundos son $\frac{1}{3}$ de minuto. Luego,

$$6 = 10\,e^{k/3} \Longrightarrow k = 3\,\ln(\frac{3}{5})$$

Para $t = 2$ minutos tenemos

$$v = 10\,e^{6\,\ln(3/5)} \Longrightarrow v = 10\,(\frac{3}{5})^6 \Longrightarrow v = \frac{2724}{3125} = 0,4665$$

Es probable que no te guste la forma en que se trabajó el problema. ¿Qué te parece la siguiente?

$$\int_{10}^{v} \frac{dv}{v} = k\int_0^{1/3} \Longrightarrow \ln(\frac{6}{10}) = \frac{1}{3}k \Longrightarrow k = 3\,\ln(\frac{3}{5})$$

con este dato se tiene

$$\int_{10}^{v} \frac{dv}{v} = \ln(\frac{3}{5})\int_0^{2} \Longrightarrow \ln(\frac{v}{10}) = 2\cdot 3\,\ln(\frac{3}{5}) \Longrightarrow v = 10\,(\frac{3}{5})^6 = 0,4665$$

Problema 1.6 Resolver la ecuación $(3y^2-x)\,dx+2y\,(y^2-3x)\,dy=0$ sabiendo que tiene un factor integrante de la forma $\mu(x+y^2)$.
Si μ es factor integrante, entonces la ecuación

$$(3y^2-x)\,\mu\,dx+2y\,(y^2-3x)\,\mu\,dy=0$$

es exacta. Se aplica ahora la condición de ser exacta

$$\frac{\partial}{\partial y}(3y^2-x)\,\mu \;=\frac{\partial}{\partial x}2y\,(y^2-3x)\,\mu$$

Derivando correctamente

$$(3y^2-x)\,\frac{\partial\mu}{\partial y}+6\,\mu\,y=2y\,(y^2-3x)\,\frac{\partial}{\partial x}-6y\,\mu$$

Si $z=x+y^2$, entonces la regla de la cadena nos dice que

$$(3y^2-x)\,\frac{\partial\mu}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial y}+6\,\mu\,y=2y\,(y^2-3x)\,\frac{\partial\mu}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial x}-6\mu\,y$$

de donde,

$$(3y^2-x)\,\frac{\partial\mu}{\partial z}\,2y+12\,\mu\,y=2y\,(y^2-3x)\,\frac{\partial\mu}{\partial z}\cdot 1$$

factorizando,

$$\frac{\partial\mu}{\partial z}\,\left[2y\,(3y^2-x)-2y\,(y^2-3x)\right]=-12\,\mu\,y$$

Lo que equivale a tener

$$\left[y^2+x\right]\,\frac{\partial\mu}{\partial z}\;=-3\,\mu$$

Al separar variables se encuentra que

$$\frac{\partial\mu}{\partial z}=-\frac{3\,\mu}{x+y^2}\Longrightarrow\frac{\partial\mu}{\partial z}=-\frac{3\,\mu}{z}$$

al integrar, el factor integrante buscado es

$$\mu=z^{-3}$$

Problema 1.7 Demostrar que la sustitución $x=r\cos t,\ y=r\,\mathrm{sen}\,t$ transforma la ecuación homogénea $y'=f(x,y)$ en una ecuación de variables separadas en t y r. Usar la sustitución para hallar la solución de la ecuación

$$(x+2y)\,dx+(y-2x)\,dy=0$$

Para dar respuesta a la primera interrogante, establecemos la condición de ser homogénea

$$y'=f(x,y)\text{ homogénea }\Longrightarrow y'=f(1,\frac{y}{x})$$

usamos la sustitución

$$\begin{cases}x&=&r\cos t\\ y&=&r\,\mathrm{sen}\,t\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}dx&=&\cos t\,dr-r\,\mathrm{sen}\,t\,dt\\ dy&=&\mathrm{sen}\,t\,dr+r\cos t\,dt\end{cases}$$

reemplazamos en la condición de homogeneidad

$$y' = f(1, \frac{y}{x}) \Longrightarrow \frac{\operatorname{sen} t\, dr + r \cos t\, dt}{\cos t\, dr - r \operatorname{sen} t\, dt} = f(1, \operatorname{tg} t) = F(t)$$

al multiplicar y reunir términos semejantes se tiene

$$\frac{dr}{r} = -\frac{F(t) \operatorname{sen} t + \cos t}{\operatorname{sen} t - F(t) \cos t}\, dt$$

que más podemos pedir, están separadas la variables, y es la respuesta.

Para resolver la ecuación dada seguimos un camino simple y sin dramas. La ecuación es

$$(x + 2y)\, dx + (y - 2x)\, dy = 0$$

reemplazando $x = r \cos t$, $y = r \operatorname{sen} t$, tenemos

$$(r \cos t + 2r \operatorname{sen} t)(\cos t\, dr - r \operatorname{sen} t\, dt) + (r \operatorname{sen} t - 2r \cos t)(\operatorname{sen} t\, dr + r \cos t\, dt) = 0$$

después de multiplicar y reunir términos semejantes,

$$r\, dr - 2r^2\, dt = 0 \Longrightarrow r = C e^{2t}$$

Problema 1.8 Resolver las tres siguientes ecuaciones, sabiendo que una de ellas es de Bernouilli, y otra reducible a homogénea.

1. $(x + y)\, dy + (x + y + 1)\, dx = 0$
2. $(x y^2 \ln x)\, y' + y^3 = x^2 + x \ln x$
3. $(2x + y)\, dy - dx = 0$

Resulta inoficioso tener que escribir todo el desarrollo de estos problemas, lo mejor es tener la respuesta y un "camino propio" de resolver. Te doy las pistas necesarias y suficientes para que tengas éxito.

La primera es la reducible, y su respuesta es $y = \sqrt{C - 2x} - x$. La segunda es de Bernoulli, ¡atrévete! y anótala en esa forma. La lineal en la cual se transforma es

$$\frac{dz}{dx} + \frac{3z}{x \ln x} = \frac{3(x + \ln x)}{\ln x}$$

La respuesta es más o menos la siguiente

$$y^3 = \frac{3}{4 \ln x} \cdot \left[4x \ln^3 x + (2x^2 - 12) \ln^2 x + (24x - 2x^2) \ln x + x^2 - 24x\right] + C$$

La tercera ecuación es lineal en $\frac{dx}{dy}$, con solución

$$x = e^{-2y} \left[e^{-2y}(1 + 2y) + C\right]$$

Problema 1.9 Demostrar que, si la ecuación $y' = \dfrac{mx+ny}{px+qy}$, con m,n,p,q constantes, y $mq-np \neq 0$, es **exacta**, entonces $n+p=0$. Hallar la solución general de la ecuación cuando es exacta.
No le tengas miedo a las demostraciones, lo primero es leer bien el problema y establecer todos los elementos que se entregan y los que se pide probar. Ten en cuenta que te dieron la ecuación y te dicen que es exacta, por tanto, se debe satisfacer la condición de exacta

$$y' = \frac{mx+ny}{px+qy} \Longrightarrow \overbrace{(mx+ny)\,dx}^{M} - \overbrace{(px+qy)\,dy}^{N} = 0$$

Se debe cumplir,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \Longrightarrow n = -p \Longrightarrow n+p=0$$

Estamos listos con la primera parte ¿Algún drama?

Ahora le hallamos la solución general empleando

$$\int_{x_0}^{y_0} M(t,y_0)\,dt + \int_{x_0}^{y_0} N(x,t)\,dt = C$$

Se tiene:

$$\int_{x_0}^{y_0} (mt+ny_0)\,dt - \int_{x_0}^{y_0} (px,qt)\,dt = C$$

Al resolver y evaluar se obtiene

$$\frac{mx^2}{2} + nxy_0 - \frac{mx_0^2}{2} - nx_0y_0 - pxy - \frac{qy^2}{2} + pxy_0 + \frac{qy_0^2}{2} = C$$

de lo cual

$$\frac{mx^2}{2} + (n+p)xy_0 - pxy - \frac{qy^2}{2} = C + \frac{mx_0^2}{2} + nx_0y_0 + \frac{qy_0^2}{2}$$

Se sabe que $n+p=0$. Si llamamos K a la constante que es la suma de todos los términos constantes que sumamos con C, entonces la solución general es

$$\frac{mx^2}{2} - pxy - \frac{qy^2}{2} = K$$

Problema 1.10 Considere la ecuación diferencial

$$6xy\,dx + \left(4x^2 + \frac{10}{x}\right) dy = 0$$

1. Hallar la solución general de la ecuación sabiendo que admite un factor integrante de la forma $\mu(x,y) = y\,f(x)$
2. Hallar la solución particular $y(0) = 1$.

Multiplicando la ecuación por el factor integrante:

$$6xy^2 f(x)dx + \left(4x^2 y f(x) + \frac{10y f(x)}{x}\right) dy = 0$$

Como esta ecuación es exacta:

$$\frac{\partial}{\partial y}(6xy^2 f(x)) = \frac{\partial}{\partial x}\left(4x^2 y f(x) + \frac{10yf(x)}{x}\right)$$

es decir:

$$12xyf(x) = 8xyf(x)4x^2yf'(x) + 10y\left(\frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}\right)$$

Desarrollando lo anterior y factorizando por $f(x)$ y $f'(x)$, se tiene:

$$\left(4xy + \frac{10y}{x^2}\right) f(x) = f'(x)\left(4x^2y + \frac{10y}{x}\right)$$

que equivale a:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x} \qquad \Longrightarrow \qquad \ln(f(x)) = \ln(x)$$

Por lo que se concluye que $f(x) = x$, por tanto, $\mu(x,y) = xy$.

De esta manera, multiplicando la EDO por el factor integrante se tiene la ecuación diferencial exacta

$$6x^2y^2dx + (4x^3y + 10y)dy = 0$$

Cuya solución se puede obtener en la forma:

$$F(x,y) = \int 6x^2y^2dx + g(y) = 2x^3y^2 + g(y)$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 4x^3y + g'(y) = 4x^3y + 10y$$

Lo que nos lleva a decir que $g'(y) = 10y$, es decir, $g(y) = 5y^2$.
Por lo tanto, la solución general, para algun $C \in \mathbb{R}$ es:

$$2x^3y^2 + 5y^2 = C$$

O bien, como la potencial del campo, esto es

$$\int_{x_0}^{x} 6t^2y_0^2dt + \int_{y_0}^{y}(4x^3t + 10t)dt = C$$

Realizando la integración y juntando todos los valores constantes con la constante C se tiene la solución

$$2x^3y^2 + 5y^2 = C$$

La solución particular que cumple $y(0) = 1$ hace que $C = 5$. Por tanto

$$2x^3y^2 + 5y^2 = 5$$

es la solución particular.

Problema 1.11 Para $x>0$ considere la ecuación de Ricatti

$$y'+e^{-2x}y^2-\frac{1}{x}\left(1+4x+2x^2\right)y=-\frac{e^{2x}}{x}\left(1+x+2x^2+x^3\right)$$

1. Hallar una solución particular de la forma $y_1(x)=e^{2x}(Ax+B)$
2. Hallar la solución general de la ecuación de Ricatti usando la particular $y_1(x)$.

1. Si $y(x)=e^{2x}(Ax+B)$, se tiene:

$$y'(x)=e^{2x}(A+2B+2Ax)$$
$$e^{-2x}y^2(x)=e^{2x}(B^2+2ABx+A^2x^2)$$
$$-\frac{1}{x}(1+4x+2x^2)y(x)=-\frac{e^{2x}}{x}[B+(A+4B)x+(4A+2B)x^2+2Ax^3]$$

Luego, igualando en la ecuación diferencial de Ricatti.

$$-\frac{e^{-2x}}{x}(1+x+2x^2+x^3)=-\frac{e^{-2x}}{x}[B+(2B-B^2)x+(2A+2B-2AB)x^2+(2A-A^2)x^3]$$

De lo anterior se deduce que $A=1$ y $B=1$. Por lo tanto:

$$y_1(x)=e^{2x}(x+1)$$

2. Para la ecuación de Ricatti, hacemos el cambio de variable

$$y=y_1+\frac{1}{z}$$

Entonces:

$$y'(x)=y_1'(x)-\frac{z'(x)}{z^2(x)}$$

Con el cambio de variable anterior, la ecuación se reduce a una lineal de la forma:

$$z'(x)+\frac{1}{x}(1+2x)z(x)=e^{-2x}$$

Cuya solución es:

$$z(x)=\frac{e^{-2x}}{x}\left[\frac{x^2}{2}+c\right]$$

Volviendo a la variable original con $z(x)=\frac{1}{y(x)-y_1}$, y para algún $C\in\mathbb{R}$ la solución general al problema es:

$$y(x)=e^{2x}(x+1)+\frac{2xe^{2x}}{x^2+C}$$

Problema 1.12 Una pequeña barra de metal, cuya temperatura inicial es de 20° C, se deja caer en un recipiente de agua hirviendo (100°)

1. Calcule el tiempo que dicha barra demorará en alcanzar los 90° C si se sabe que su temperatura aumenta 2° en 1 seg.
2. ¿Cuál será la temperatura de la barra al cabo de 45 seg?
3. ¿Cuánto demorará la barra en alcanzar los 98°C?

Primero se calcula la constante de proporcionalidad.

$$\int_{20}^{22} \frac{dT}{100-T} = -k\int_{0}^{1} dt \Longrightarrow k = \ln\frac{78}{80} \sim 0,025$$

(a) Para alcanzar 90° se resuelve

$$\int_{20}^{90} \frac{dT}{100-T} = -k\int_{0}^{t} dt \Longrightarrow \ln\frac{10}{80} = t\cdot\ln\frac{78}{80}$$

Con calculadora se halla que $t = 83,16$ seg. lo que equivale a $t = 1$ min 23 seg

(b) Para la temperatura a los 45 seg se usa

$$\int_{20}^{t} \frac{dT}{100-T} = -k\int_{0}^{45} dt \Longrightarrow \ln\frac{100-t}{80} = \ln\frac{78}{80}\cdot 45$$

al resolver

$$100-t = 80\cdot e^{-1,139} \Longrightarrow t = 74,3$$

(c) Para que la barra alcance los 98° se usa

$$\int_{20}^{98} \frac{dT}{100-T} = -k\int_{0}^{t} dt \Longrightarrow \ln\frac{2}{80} = -0,025t$$

se halla que $t = 147,55$ seg o bien $t = 2$ min 28 seg

Problema 1.13 Un tanque contiene 100 galones de salmuera. Por una llave entran al tanque 3 galones de salmuera por minuto, que contienen 2 libras de sal por galón. La mezcla que se mantiene uniforme sale a una velocidad de 2 gal/min. Si al cabo de una hora la concentración es de 1,8 lb/gal, calcular las libras de sal que había inicialmente en el tanque.
Se tienen los siguientes datos: $v_1 = 3, c_1 = 2, v_2 = 2, V_0 = 100$. Además, $C(60) = \frac{x(60)}{160} = 1,8$. Se pide calcular $x(0) = x_0$. La ecuación diferencial que gobierna el proceso es

$$\frac{dx}{dt} + \frac{2x}{100+t} = 6$$

Resolviendo como lineal

$$x(t) = e^{\ln(100+t)^{-2}}\left[\int e^{\ln(100+t)^2}\cdot 6dt + C\right]$$

Resolviendo

$$x(t) = 2(100+t) + \frac{C}{(100+t)^2}$$

Sabemos que $x(0) = x_0$, entonces

$$x(0) = 200t + \frac{C}{100^2} = x_0 \Longrightarrow C = (x_0-200)\cdot 100^2$$

Como $v(60) = 100+60 = 160$, entonces

$$C(60) = \frac{x(60)}{V(60)} = \frac{320 + \frac{(x-200)100^2}{(100+60)^2}}{160} = 1,8$$

Al resolver

$$x_0 - 200 = -81,92 \Longrightarrow x_0 = 118,08$$

Problema 1.14 La velocidad de enfriamiento de un cuerpo es proporcional a la diferencia de temperatura entre el cuerpo y la del medio que lo rodea. En una pieza que se encuentra a 10° un cuerpo se enfría de 200° celsius a 100° celsius en 40 minutos, determinar en cuanto tiempo se enfriará de 100° a 60° en una pieza a 5° celsius.
La ley de enfriamiento de Newton afirma que

$$\frac{dy}{dt} = -k\,(y-A)$$

donde A es la temperatura ambiente, k constante de proporcionalidad que se debe calcular. El camino más sencillo es usar la integral definida, a partir de la ecuación de enfriamiento.

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{y-A} = -k\int_{t_1}^{t_2} dt$$

Ponemos los datos iniciales como límites de integración

$$\int_{200}^{100} \frac{dy}{y-10} = -k\int_{0}^{40} dt$$

al integrar y evaluar se halla que

$$k = \frac{\ln(9)-\ln(19)}{40}$$

Con la constante en la mano, nos vamos a establecer la integral que dará la respuesta que se anda buscando.

$$\int_{100}^{60} \frac{dy}{y-5} = -k\int_{0}^{T} dt$$

después de integrar, evaluar y reemplazar el valor de k se encuentra que

$$T = 157,876 \quad \text{minutos}$$

Problema 1.15 El número de bacterias contenidas en un litro de leche se duplica en 4 horas, determinar en cuánto tiempo se hará 25 veces mayor, suponiendo que la velocidad de multiplicación es proporcional al número de bacterias presente.

Está claro que la ecuación diferencial que modela la situación es

$$\frac{dv}{dt} = k\,v$$

al separar variables y establecer la integral definida tenemos.

$$\int_{0}^{2} \frac{dv}{v} = k\int_{0}^{4} dt \Longrightarrow k = \frac{\ln(2)}{4}$$

Ahora que tenemos el k podemos dar un respiro de alivio y responder la pregunta.

$$\int_{0}^{25} \frac{dv}{v} = \frac{\ln(2)}{4}\int_{0}^{T} dt \Longrightarrow T = 18,57$$

téngase presente que son horas.

Problema 1.16 Un cuerpo se mueve sobre una recta. Sea $s(t)$ la distancia del cuerpo a un punto fijo sobre la recta, se sabe que si $t = 0$, entonces $s = 1$. Suponiendo que la velocidad del cuerpo es $-s(t)$ hallar la ecuación diferencial y resolver para las condiciones iniciales.

De la lectura del problema se deduce que

$$\frac{ds}{dt} = -s \Longrightarrow \ln(s) = -t + C \Longrightarrow s = C\,e^{-t}$$

con la condición inicial $s(0) = 1$, se tiene que la ecuación que modela esta situación es

$$s = e^{-t}$$

Problema 1.17 Un objeto, en una habitación que se encuentra a 20°, se enfria de 100° a 60° en 20 minutos. Hallar el tiempo en que tarda en alcanzar los 30°.

Para nadie debe ser un misterio que la ley de enfriamiento de Newton es la que modela esta clase de problemas. Le ponemos "wendy"

$$\int_{100}^{60} \frac{dy}{y-20} = -k \int_{0}^{20} dt$$

al integrar y evaluar se halla que

$$k = \frac{\ln(2)}{20}$$

Teniendo la constante se establece la integral

$$\int_{100}^{30} \frac{dy}{y-20} = -k \int_{0}^{T} dt$$

después de integrar, evaluar y reemplazar el valor de k se encuentra que

$$T = 59{,}999 = 60 \quad \text{minutos}$$

Problema 1.18 Hallar el tiempo en que tarda en desaparecer el 1 % de radio A (isótopo del polonio) que tiene una vida media de 3,05 minutos.

La ecuación que gobierna todos estos problemas es

$$\frac{dR}{dt} = -kR$$

cuya solución es

$$R = R_0\,e^{-kt}$$

y que representa la cantidad presente en todo tiempo t. Por otra parte, se sabe que la constante de proporcionalidad es

$$k = \frac{\ln(2)}{\text{vida media}}$$

por tanto,

$$R = R_0\,e^{-t\,\ln(2)/3{,}03)}$$

Si tiene que desaparecer el 1 %, lo que queda es el 99 %. Se tiene

$$\frac{99}{100}R_0 = R_0\, e^{-t\,\ln(2)/3{,}03)} \Longrightarrow t = 0{,}0442236$$

ojo que son minutos.

Problema 1.19 Resolver, sabiendo que acepta factor integrante de la forma $x^m\, y^n$, la ecuación

$$(2y + 3x^2y^3)\, dx + (3x + 5x^3y^2)\, dy = 0$$

Es claro que la idea es hacerla exacta con este factor. Se tiene

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[x^m\, y^n\,(2y + 3x^2y^3)\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[x^m\, y^n\,(3x + 5x^3y^2)\right]$$

Al hacer las derivadas se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}\left[x^m\, y^n\,(2y + 3x^2y^3)\right] &= n\,x^m\, y^{n-1}\,(2y + 3x^2y^3) + x^m\, y^m\,(2 + 9x^2y^2) \\
\tfrac{\partial}{\partial x}\left[x^m\, y^n\,(2y + 3x^2y^3)\right] &= m\,x^{m-1}\, y^n\,(3x + 5x^3y^2) + x^m\, y^n\,(3 + 15x^2y^2)
\end{aligned}$$

Al igualar y factorizar,

$$x^n\, y^m\left[2n + (3n+9)x^2y^2 + 2\right] = x^n\, y^m\left[3m + 3 + x^2y^2\,(5m + 15)\right]$$

de esto,

$$2n + (3n+9)x^2y^2 + 2 = 3m + 3 + x^2y^2\,(5m + 15) \Longrightarrow \begin{cases} 3n - 5m &= 6 \\ 2n - 3m &= 1 \end{cases}$$

al resolver el sistema, $x^{-9}\, y^{-13}$ es el factor integrante. Vamos ahora a resolver la ecuación

$$\frac{2y + 3x^2y^3}{x^9\, y^{13}}\, dx + \frac{3x + 5x^3y^2}{x^9\, y^{13}}\, dy = 0$$

Manejamos la primera de estas ecuaciones

$$F(x,y) = \int \frac{2y + 3x^2y^3}{x^9\, y^{13}}\, dx + k(y)$$

después de integrar,

$$F(x,y) = -\frac{1}{4x^8\, y^{12}} - \frac{1}{2x^6\, y^{10}} + k(y)$$

La derivada respecto de y es conocida, de modo que derivando respecto de y se tiene

$$\frac{3}{x^8\, y^{13}} + \frac{5}{x^6\, y^{11}} = \frac{\partial}{\partial y}F(x,y) = \frac{3}{x^8\, y^{13}} + \frac{5}{x^6\, y^{11}} + k'(y)$$

se deduce que $k'(y) = 0 \Longrightarrow k(y) = c$. En consecuencia, la solución general es

$$\frac{1}{4x^8\, y^{12}} + \frac{1}{2x^6\, y^{10}} = c$$

Problema 1.20 Resolver $xy' + y = (xy)^3$

Por supuesto, es de Bernouilli. hay que escribirla de esa forma para poder actuar con prestancia y gallardía.

$$y' + \frac{1}{x}y = x^2y^3$$

se descubre que

$$P(x) = \frac{1}{x}, \quad Q(x) = x^2, \quad n = 3$$

con $z = y^{-2}$ se tiene que $z' = -2yy^{-3}y'$. Por esta razón se multiplica la ecuación dada por $-2yy^{-3}$ para formar el z'.

$$y' + \frac{1}{x}y = x^2y^3 \Longrightarrow -2yy^{-3}y' + (-2yy^{-3})\frac{1}{x}y = (-2yy^{-3})x^2y^3$$

al reducir términos y usar z y z':

$$z' - \frac{2}{x}z = -2x^2, \qquad \text{¡lineal!}$$

sabemos que su solución es de la forma

$$z = e^{-\int P(x)\,dx}\left[\int e^{\int P(x)\,dx}\,Q(x)\,dx + C\right]$$

en donde $P(x) = -\frac{2}{x}$, $Q(x) = -2x^2$. De este modo,

$$z = e^{2\ln x}\left[\int e^{-2\ln x}\,Q(x)\,dx + C\right]$$

la exponencial y la logarítmica son inversas, entonces

$$z = x^2\left[\int x^{-2}(-2x^2)\,dx + C\right] = x^2\left[-2x + C\right]$$

de lo cual,

$$z = -2x^3 + Cx^2 \Longrightarrow y^{-2} = x^2(C - 2x) \Longrightarrow y = \frac{1}{\|x\|\sqrt{C - 2x}}$$

Problema 1.21 Resolver $xy' - 4y - x^2\sqrt{y} = 0$

¡Otra de Bernouilli!, asi es la vida, algunos profes tienen preferencias muy marcadas. Se escribe

$$y' - \frac{4}{x}y = xy^{1/2}$$

se hace $z = y^{1/2}$, y se obtiene la lineal

$$z' - \frac{2}{x}z = \frac{x}{2}$$

Para no fomentar la flojera, te digo que la solución es

$$y = x^4\left[\frac{1}{2}\ln x + C\right]^2$$

Problema 1.22 Resolver $(xy^2-3y)\,dx - x\,dy = 0$

Si la escribes

$$xy' + \frac{3}{x}y = y^2$$

¿Qué crees que encuentras?, parece chiste, si ¡¡ Bernouilli!! con $z = y^{-1}$ encuentras la lineal

$$z' - \frac{3}{x}z = -1$$

cuya solución es

$$y = \frac{1}{\frac{x}{2} + x^3 C}$$

Problema 1.23 Resolver $(1+y^2)\,dx - (xy+y+y^3)\,dy = 0$

De seguro estás pensando, " si no fuera por la x la tengo lista". Mira lo siguiente

$$(1+y^2)\,dx - y\,(x + (1+y^2))\,dy = 0$$

Se repite un factor, por tanto, no es pecado hacer $1+y^2 = z$, de lo cual $2yy' = z'$. Se multiplica la ecuación por 2, y se divide por dx. La nueva ecuación es

$$2z - (x+z)\,z' = 0 \Longrightarrow z' = \frac{2z}{x+z}$$

claramente, sin discusión ¡homogénea!. Se hace $z = ux$ para tener $z' = u'x + u$. La ecuación se transforma en

$$\frac{1+u}{u(1-u)}\,du = \frac{dx}{x}$$

está lista, tiene las variable separadas. Al integrar encuentras la solución general

$$\frac{1+y^2}{(x-1-y^2)^2} = C$$

Problema 1.24 Resolver $y\,y'\,\operatorname{sen} x = \cos x\,(\operatorname{sen} x - y^2)$

Como todas las ecuaciones, tiene un aire de inocencia que dan ganas de rezarle. Pero, con calma. Tiremos sobre la hoja la idea que es exacta, o que por allí puede ir la cosa.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -2y\cos x, \qquad\qquad \frac{\partial N}{\partial x} = -y\cos x$$

Recuerda que la diferencia de estas derivadas te da luz sobre el factor integrante.

$$-\frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = \operatorname{cotg} x$$

Tenemos más de la mitad del camino recorrido. El factor es

$$\mu = e^{\int \operatorname{cotg} x\,dx} = e^{\ln(\operatorname{sen} x)} = \operatorname{sen} x$$

Luego, la ecuación exacta es

$$\operatorname{sen} x \cos x\, (\operatorname{sen} x - y^2)\, dx - y \operatorname{sen}^2 x\, dy = 0$$

Ahora,

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \operatorname{sen} x \cos x\, (\operatorname{sen} x - y^2) \Longrightarrow \mu = \int \operatorname{sen} x \cos x\, (\operatorname{sen} x - y^2)\, dx$$

de donde,

$$\mu = \frac{1}{3} \operatorname{sen}^3 x - \frac{1}{2} y^2 \operatorname{sen}^2 x + k(y)$$

se deriva respecto de y, usando el hecho que la derivada parcial respecto de y es conocida.

$$-y \operatorname{sen}^2 x = \frac{\partial \mu}{\partial y} = -y \operatorname{sen}^2 x + k'(x)$$

se tiene que $k(y)$ es una constante. Por tanto, la solución general es

$$\frac{1}{3} \operatorname{sen}^3 x - \frac{1}{2} y^2 \operatorname{sen}^2 x = C$$

Problema 1.25 Resolver $y^2\, dx + (2a^2 - xy)\, dy = 0$

Veamos si es exacta

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y, \ \frac{\partial N}{\partial x} = -y \Longrightarrow \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 3y$$

de modo que

$$-\frac{1}{M}\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = -\frac{3y}{y^2} = \frac{3}{y} \Longrightarrow \mu = e^{\int(-3/y)dy} = y^{-3}$$

es el factor integrante. En consecuencia, la ecuación exacta es

$$\frac{1}{y}\, dx + \frac{2a^2 - xy}{y^3}\, dy = 0$$

Para hallar su solución general, hacemos lo de siempre.

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{1}{y} \Longrightarrow \mu = \frac{x}{y} + k(y)$$

Se deriva ahora esto respecto de y.

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + k'(y) = \frac{2a^2 - xy}{y^3} \Longrightarrow k(y) = -\frac{a^2}{y^2}$$

Por lo tanto, la solución general es

$$\frac{x}{y} - \frac{a^2}{y} = c \Longrightarrow x = Cy + \frac{a^2}{3}$$

Problema 1.26 Determinar la validez de las siguientes afirmaciones. Señalar con una V la que es verdadera, y con una F la que es falsa. Justificar las falsas.

a) La ecuación $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3 = 3x^2 - 1$ es de primer orden
b) La ecuación $2xy\,dx + (1+x^2)\,dy = 0$ es de variables separables ($y \neq 0$)
c) Toda ecuación exacta es de variables separables
d) La función $f(x,y) = x^2 - y^2 + x^2 \operatorname{sen}(\frac{x}{y})$ es homogénea de grado 1.
e) Toda ecuación de variables separables es exacta.
f) La ecuación $(3y^2 - x)\,dx + 2y\,(y^2 - 3x)\,dy = 0$ no posee factor integrante de la forma $\mu = \mu(x+y^2)$
g) La ecuación $y' + P(x)\,y = Q(x)\,y$ es de Bernouilli.

Espero que leas cada enunciado con mucha atención, y no te vayas derecho a las respuestas. Los enunciados (a) y (b) son los únicos verdaderos. Para probar que algo es falso basta un contraejemplo. En el caso de la (c) toma $(x+y)\,dx + (x-y)\,dy = 0$. La (d) es homogénea pero de grado 2. La (e) es más falsa que Judas, $xy\,dx + dx = 0$ es un buen ejemplo. La (f) es falsa, ese **es** factor integrante, y a la (g) le falla el exponente del lado derecho de la igualdad, debe ser distinto de cero y de uno.

Problema 1.27 Un cuerpo cae partiendo de $t = 0$ con velocidad proporcional al tiempo transcurrido. Determinar el espacio recorrido.

La modelación del enunciado es

$$\frac{ds}{dt} = kt \Longrightarrow s = k\frac{t^2}{2} + C$$

usando las condiciones iniciales, $s(0) = 0$, la constante $C = 0$, y con $k = g$ se tiene

$$s = \frac{gt^2}{2}$$

ecuación “very” popular.

Problema 1.28 Se calienta un fierro a $100°$, luego, en $t = 0$ se mete en agua que está a $30°$. Después de 3 minutos la temperatura del fierro se reduce a $70°$. Hallar el tiempo necesario para que la temperatura del fierro alcance los $31°$.

Está demás decirte que este es un problema de enfriamiento de Newton. La lectura del problema y sus condiciones iniciales nos llevan a usar integral definida

$$\int_{100}^{70} \frac{dy}{y-30} = -k\int_0^3 dt \Longrightarrow k = \frac{1}{3}\ln(\frac{7}{4})$$

eso es lo primero que se hace ¡hallar la constante de proporcionalidad!. Se tiene

$$\int_{100}^{31} \frac{dy}{y-30} = -k\int_0^t dt \Longrightarrow t = \frac{1}{k}\ln(70) = 22,77$$

son minutos, por si acaso.

Problema 1.29 Una sustancia radiactiva tiene vida media de 1590 años. Hallar el porcentaje que desaparece al cabo de 1 año.

Es claro que se trata de la ecuación de desintegración, por tanto,

$$\frac{dr}{dt} = -kr \Longrightarrow r = Ce^{-kt}$$

Con la hipótesis de la vida media (vm) se halla que

$$k = \frac{\ln(2)}{vm} = \frac{\ln(2)}{1590}$$

Si r_0 es la cantidad que existe al comienzo, entonces, la ecuación que gobierna esto es

$$r = r_0\, e^{-t\ln(2)/1590}$$

al cabo de un año ($t = 1$) hay

$$r(1) = r_0\, e^{-\ln(2)/1590} = r_0\, (\frac{1}{2})^{1/1590}$$

de modo que lo que desapareció es

$$r_0 - r_0\, (\frac{1}{2})^{1/1590}$$

Veamos que porcentaje es este.

$$\frac{r_0}{100} = \frac{r_0 - r_0\, (\frac{1}{2})^{1/1590}}{x} \Longrightarrow x = 100(1 - (\frac{1}{2})^{1/1590}) = 0,04359\,\%$$

Problema 1.30 El valor de reventa de cierta máquina industrial disminuye durante un periodo de 10 años a una razón que depende de la edad de la máquina. Cuando la máquina tiene x años, la razón a la cual está cambiando su valor es $220(x-10)$ pesos por año.

1. Expresar el valor de la máquina como función de su edad y su valor inicial
2. Si la máquina costaba originalmente \$12000 hallar su valor al cabo de 10 años

Para dar respuesta a la primera pregunta, sea $y = f(x)$ el valor de la máquina a los x años. La formulación matemática del problema es

$$\frac{dy}{dx} = 220\,(x-10)$$

una sencilla ecuación de variables separables, que en un “abrir y cerrar de ojos” resuelves para tener

$$y = 220\left(\frac{x^2}{2} - 10x\right) + C = 110x^2 - 2200x + C$$

donde $C = y_0$ es el valor inicial.

La respuesta a la segunda pregunta es como sigue. Si $C = y_0 = 12000$ es el precio inicial, entonces

$$y = 11000 - 22000 + 12000 = 1000$$

es el valor al cabo de 10 años.

Problema 1.31 Una unidad de control de costos ha encontrado que a medida que la unidad se amplía, el costo promedio mensual y de los elementos de oficina se relacionaba con el número de empleados x, por medio de la ecuación

$$y' + 2y = y^2\, e^{-x}$$

Hallar el costo promedio , si para $x = 0$ es $y = 3$.

¡Sorpresa!, una ecuación de Bernouilli.

La pasamos a lineal, sabiendo que $n=2$, y que $z=y^{-1}$. Tenemos

$$-y^2\,\frac{dz}{dx}+2y=y^2\,e^{-x}\Longrightarrow\frac{dz}{dx}-2y^{-1}=-e^{-x}\Longrightarrow\frac{dz}{dx}-2z=-e^{-x}$$

ahora que se ha transformado en un ecuación lineal, cuya solución es

$$z=e^{2x}\,\left[\frac{1}{3}e^{-3x}+C\right]$$

como $z=y^{-1}$, entonces

$$y^{-1}=e^{2x}\,\left[\frac{1}{3}e^{-3x}+C\right]$$

De la condición inicial $y(0)=3$ se tiene $C=0$, con lo cual, la respuesta al problema es

$$y^{-1}=\frac{1}{3}e^{-x}$$

O en forma más elegante

$$y=3\,e^{x}$$

1.6 Problemas Propuestos

Espero que no te desanimes si algunos de los problemas planteados está sin solución. Recuerda que Symbolab las hace todas
`https://es.symbolab.com/solver/ordinary-differential-equation-calculator`

Problema 1.32 Identificar cada ecuación siguiente con (1) si es homogénea, (2) si es exacta, (3) si es reducible a homogénea, (4) si es de Bernoulli, (6) si es de Ricatti, (7) si es lineal, (8) si no es exacta, y luego resolver de acuerdo a esa identificación:

1. $(12x^2+8xy+2y^2)dx+(4x^2+4xy+6y^2)dy=0$
2. $\dfrac{dy}{dx}=(x+y+1)^2$
3. $(2xy^2+ye^x)dx+(2x^2y+e^x-1)dy=0$
4. $xy'+4y=x^5$
5. $(2x-y-2xy+1)dx+(x-2y+xy-2)dy=0$

Problema 1.33 La ecuación $(x^3y^2+x)dy+(x^2y^3-y)dx=0$ tiene un factor integrante del tipo $\mu(x,y)=x^my^n$. Hallar m y n y resolver.
Problema 1.34 Hallar la solución general de $\frac{dy}{dx}-y^2=-9$ y luego hallar en cada caso una solución particular que pase por: a) $(0,0)$, b) $(0,3)$.

Resp. a) $\frac{y-3}{y+3}=-e^{6x}$, b) $y=3$

Problema 1.35 Considere la ecuación $(x^4 + y^4)dx - xy^3dy = 0$

1. Resolver la ecuación como homogénea
2. Resolver la ecuación mediante un factor integrante

Problema 1.36 Dada la ecuación diferencial $(x+y)dx + (3x+3y-4)dy = 0$

1. Resolver la ecuación diferencial
2. Hallar la solución que satisface $y(0) = 1$.

Problema 1.37 Resolver la ecuación diferencial $y' = \frac{y}{x} + x^3y^2 - x^5$ sabiendo que $y = x$ es una solución particular.

Problema 1.38 Resolver la ecuación $(3y^2 + 4x)dx + 2xy\,dy = 0$ de dos (2) formas diferentes.

Problema 1.39 Hallar la solución general de la ecuación $y' = xy^3 + 3y^2 - \frac{1}{x^2}$ usando el cambio de variable $u = y + \frac{1}{x}$

Problema 1.40 Resolver la ecuación $y \ln y\,dx + x\,dy = 0$ usando un factor integrante adecuado.

Problema 1.41 Considere la ecuación $(2x^2 + 3y^2 - 7)xdx - (3x^2 + 2y^2 - 8)ydy = 0$

1. Use $u = x^2$ y $v = y^2$ para transformar la ecuación.
2. Transforme esta nueva ecuación a homogénea **NO RESOLVER**

Problema 1.42 A un tanque que contiene inicialmente 400 litros de agua pura se le incorpora salmuera, la cual contiene 1/8 kg de sal por litro, a razón de 8 lt/min. Simultáneamente, la mezcla (que es mantenida uniforme por agitación) abandona el tanque a razón de 4 lt/min. Determine la cantidad de sal presente en el tanque cuando este contiene 500 litros de salmuera. Resp. $X(25) = 22,5$ grs

Problema 1.43 Considerar la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2y - \frac{y^2}{x}}{x + 2y}$$

1. Verificar que la ecuación no es exacta
2. Determinar el valor de k para que x^k sea un factor integrante de la ecuación.
3. Resolver la ecuación diferencial con ese factor integrante encontrado.

Resp. $\mu(x,y) = x$

Problema 1.44 Una pileta contiene 50 litros de agua bien mezclados con 40 gramos de un contaminante. Entra a la pileta contaminante a una velocidad de 8lt/min con una concentración de 0,5 grs/lt. Si por otra llave se permite la salida de la mezcla a una velocidad de 5lt/min

1. Determinar el volumen de la pileta si esta se empieza a derramar a los 12 minutos.
2. Determinar la cantidad de contaminante y la concentración antes que se derrame la mezcla ($t \leq 12$).
3. Hallar la cantidad de contaminante en el instante $t = 20$ ($t > 12$ min)

Problema 1.45 Para $x \neq 0$ considere la ecuación diferencial

$$x\frac{dy}{dx} = 2 - x^2 + (2x+1)y - y^2$$

Usar el cambio de variables $z = x - y + 1$ para calcular la solución general de la ecuación.

Problema 1.46 Para $y \neq 0$ considere la ecuación diferencial

$$2y\frac{dy}{dx} = 5 + 2x - 2y^2$$

1. Encontrar la solución general usando factores integrantes.
2. Hallar la solución particular que pasa por el punto $(0, \sqrt{5})$.

Problema 1.47 Para $x > -1$, encuentre la solución general de la ecuación

$$(x^2+y^2+1)dx - (xy+y)dy = 0$$

sabiendo que tiene factor integrante de la forma $\mu(x,y) = (x+1)^{-n}$.

Resp. $n = 3$

Problema 1.48 Resolver las siguientes ecuaciones:

1. $x\dfrac{dy}{dx} = y + \sqrt{y^2 - x^2}$. Resp $\dfrac{y}{x} + \sqrt{\dfrac{y^2}{x^2} - 1} = xC$
2. $(x-4y-9)dx + (4x+y-2)dy = 0$. Resp $4\operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x} = \ln\left(\dfrac{C}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$
3. $(x^5+3y)dx - x\,dy = 0$. Resp $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{y}{x^3} = C$.
4. $x\left(\dfrac{dy}{dx} - y\right) = x - y$. Resp $\dfrac{e^x}{x}\left[-e^{-x}(x+1) + C\right]$
5. $2x\dfrac{dy}{dx} + 2y = xy^3$. Resp $y^{-2} = x^2\left[\dfrac{1}{x} + C\right]$
6. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{x^2y + y^3}$. Resp $x^2 + y^2 + 1 = Ce^{y^2}$
7. $(2xy^2 + 2y)dx + (2x^2y + 2x)dy = 0$. Resp $x^2y^2 + 2xy = C$
8. $(e^x \operatorname{sen} y - 2y \operatorname{sen} x)dx + (e^x \cos y + 2\cos x)dy = 0$. Resp $2y\cos x + e^x \operatorname{sen} y = C$
9. $(1 - x^2y)dx + x^2(y-x)dy = 0$. Resp $\dfrac{y^2}{2} - \dfrac{1}{x} - xy = C$
10. $2y\,dx - x(1+y^3)dy = 0$, usar $\mu(x,y) = x^m y^n$. Resp $\ln\dfrac{x^2}{y} - \dfrac{y^3}{3} = C$

Problema 1.49 Resolver los siguientes problemas de aplicación:

1. Una sustancia radiactiva tiene una vida media de 38 horas, encontrar que tanto tiempo toma el 90 % de la radiactividad para disiparse. Resp. $k = \frac{\ln 2}{30}$ y $t = 126$ años
2. Se sabe que cierto material radiactivo decae a una velocidad proporcional a su cantidad de material presente. Un bloque de ese material tiene originalmente una masa de 100 grs. y cuando se le observa 20 años después tiene una masa de 80 grs. Hallar la vida media del material. Resp. $k = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{5}{4}\right)$.
3. Cierto material radiactivo tiene una vida media de dos horas. Hallar el tiempo requerido para que una cantidad dada de este material decaiga hasta un décimo de su masa original.
   Resp. $t = \frac{2\ln 10}{\ln 2}$ horas

4. Determinar el camino S recorrido por un cuerpo en el tiempo t, si su velocidad es proporcional al trayecto, sabiendo que en 10 segundos el cuerpo recorre 100 mts y en 15 segundos recorre 200 mts. Resp. $S = 25 \cdot 2^{t/5}$
5. Cierta cantidad de una sustancia indisoluble que contiene en sus poros 2 kg de sal se somete a la acción de 30 litros de agua. Después de 5 minutos se disuelve 1kg de sal. Dentro de cuánto tiempo se disolverá el 99 % de la cantidad inicial de sal? No olvidar que la rapidez de disolución es proporcional a la cantidad presente. Resp. $t = -\frac{\ln 0{,}99}{\ln 2}$
6. Un termómetro marca 18°F, se lleva a un cuarto donde la temperatura es de 70°F. Un minuto después la temperatura del termómetro es de 31°F. Hallar la temperatura que marca el termómetro 5 minutos después de ser llevado al cuarto. Resp. $T = 58$°F.
7. Un cuerpo cuya temperatura es de 30°C requiere de 2 minutos para bajar su temperatura a 20°C si se coloca en un medio refrigerante con una temperatura constante de 10°C. Hallar cuánto tiempo requerirá el mismo cuerpo en bajar su temperatura de 40°C a 35°C si se coloca en un medio refrigerante de temperatura constante de 15°C. Resp. $k = 0{,}348$, $t = 0{,}64$ minutos
8. Dentro de cuánto tiempo la temperatura de un cuerpo calentado hasta 100°C descenderá hasta 30°C si la temperatura del local es de 20°C y durante los primeros 20 minutos el cuerpo en cuestión se enfría hasta 60°C. Resp. $t = 60$ minutos
9. Un tanque está parcialmente lleno con 200 gal de agua en las cuales se disuelven 20 Ib de sal. Una salmuera que contiene 2 Ib de sal por galón, se bombea al tanque con una rapidez de 6 gal/min y la mezcla bien agitada sale a la misma tasa.

   a) Hallar el número de libras de sal en el tanque en cualquier tiempo.
   b) ¿Cuánta sal está presente después de 30 min?
   c) ¿Cuánta sal estará presente después de un tiempo largo?

   Resp. a) $x(t) = 400 - 380e^{-3t/100}$, b) $x(30) = 245{,}50$, c) $400\,lb$
10. Un tanque contiene inicialmente 60 galones de agua pura. Entra al tanque, a una tasa de 2 gal/min, salmuera que contiene 1 Lb de sal por galón, y la solución (perfectamente mezclada) sale de él a razón de 3 gal/min. Obtenga el número de libras $x(t)$ de sal que hay en el tanque en un instante cualquiera. ¿Cuánto demorará el tanque en vaciarse? ¿Cuál es la máxima cantidad de sal que llega a tener el tanque?

    Resp. $x(t) = 60 - t - \frac{(60-t)^3}{3600}$, El tanque se vacía después de 60 minutos. $x'(t) = 0 \Longrightarrow t = 60 - \sqrt{1200}$. Así, la cantidad máxima de sal que llega a tener el tanque es $\frac{2}{3}\sqrt{1200}$ libras.
11. Un tanque contiene inicialmente 100 L de agua, en el cual se disuelven 80 kg de sal. Se introduce en el tanque agua pura a velocidad de 4 L/min y la mezcla, conservada homogénea mediante agitación, sale a la misma velocidad y va a parar a un segundo tanque que contiene al principio 100 L de agua pura. Agitando se mantiene homogénea la mezcla que sale de este segundo tanque a la misma velocidad ya citada. Hallar la cantidad de sal en el segundo tanque al cabo de 1 h.
    Resp. La cantidad de sal en el segundo tanque después de una hora es $17{,}4$ kg

Problema 1.50 Usando la ley de enfriamiento de Newton, determinar la temperatura exterior si un termómetro se saca de un recinto donde había 68º y marca 53º y 42º, medio minuto y un minuto después, respectivamente. Resp. $11{,}75°$
Problema 1.51 Un tanque de 100 litros contiene agua pura hasta la mitad de su capacidad. Se agrega salmuera que contiene 0,1 kilogramos por litro de sal a una tasa de 4 litros por minuto. Luego la solución adecuadamente mezclada se bombea hacia afuera a una tasa de 2 litros por minuto. Hallar la cantidad y la concentración de sal en el tanque en un instante t cualquiera. ¿Cuál es el valor límite de

cantidad de sal en el tanque?

Problema 1.52 Un tanque de 400 galones de capacidad, contiene inicialmente 100 galones de solución salina en la que se han disuelto 8 libras de sal. Se agrega solución salina que contiene 2 libras por galón a razón de 5 galones por minuto, y la mezcla sale del tanque a razón de 3 galones por minuto. Determine cuanta sal hay en el tanque al momento que éste se empieza a desbordar. Resp $t = 150$, $x(t) = 776$

Problema 1.53 El isótopo radiactivo Torio 234 se desintegra a una rapidez proporcional a la cantidad presente. Si 100 miligramos de este material se reducen a 82.04 mg. en una semana, encontrar una expresión para la cantidad presente en cualquier instante. Encuentre también el intervalo de debe transcurrir para que la masa caiga a la mitad de su valor original. Resp. $Q(t) = 100e^{-0,02828t}$mg. La mitad en 24,5 días.

Problema 1.54 En un gran tanque con 1000 litros de agua pura se comienza a vaciar un solución salina con una velocidad constante de 6 litros por minuto. La solución dentro del tanque se mantiene revuelta y sale del tanque a la misma razón. Si la concentración de sal en la solución que entra en el tanque es de $0,1$ kg/l, determinar el momento en que la concentración de sal en el tanque llegue a $0,05$ Kg/L. Resp $115,52$ min.

Problema 1.55 Suponga que un alumno es portador del virus de la gripe y regresa a la Colegio, donde hay 1000 estudiantes. Si se supone que la rapidez con que se propaga el virus es proporcional no sólo a la cantidad x de alumnos infectados sino también a la cantidad de alumnos no infectados, determine la cantidad de alumnos infectados treinta días después si se observa que a los cuatro días $x(4) = 50$. (Suponer que nadie sale del Colegio)

La ecuación la modela el PVI

$$\frac{dx}{dt} = kx(1000 - x), \quad x(0) = 1$$

Al resolver:

$$x(30) = 1000 \text{ alumnos}$$

Problema 1.56 Un gran depósito está lleno con 500 galones de agua pura. Una salmuera que contiene 2 libras de sal por galón se bombea al tanque a razón de 5 galones por minuto, y la solución adecuadamente mezclada se bombea hacia fuera con una rapidez de 10 galones por minuto. Determinar el número de libras de sal que hay en el tanque en un instante cualquiera. ¿Cuánto demorará el tanque en vaciarse? Resp.

Problema 1.57 La rapidez con que un medicamento se disemina en el flujo sanguíneo se rige por la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = A - 4x, \quad x(0) = 0$$

en donde A es una constante positiva. La función $x(t)$ describe la concentración del fármaco en el flujo sanguíneo en un instante t cualquiera. Hallar $x(t)$ y determinar el valor límite de $x(t)$ cuando $t \to \infty$. ¿Cuánto demora la concentración en alcanzar la mitad de este valor límite?

Problema 1.58 Suponer que una población experimental de moscas se incrementa conforme a la ley de crecimiento exponencial. Había 100 moscas antes del segundo día del experimento y 300 moscas después del cuarto día. Hallar la cantidad inicial de moscas en la población original. Resp. 33 moscas

2. Ecuaciones Lineales de orden n

Se llama ecuación diferencial lineal de n-ésimo orden a una ecuación que es lineal respecto a y (función incógnita) y a sus n primeras derivadas, es decir, una ecuación de la forma:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x) \tag{2.1}$$

donde $a_0, a_1, \cdots, a_n, g$ son funciones que están definidas y son continuas en cierto intervalo $I \subset \mathbb{R}$, con $a_n(x) \neq 0\ \forall x \in I$.

- Si $a_n(x) = 1$, la ecuación se dice que está en forma **normal**.
- Si $g(x) = 0$ la ecuación se dice que es **homogénea**.
- Si $g(x) \neq 0$, la ecuación se llama **no homogénea**.

Dos propiedades características de una ecuación diferencial lineal son:

1. La función desconocida y sus derivadas son de primer grado.
2. Los coeficientes de la función desconocida y sus derivadas dependen solo de la variable independiente.

Ejemplo 2.0.1

1. La ecuación $y''' + 5y'' - y' + 4y = 0$ es lineal homogénea, de coeficientes constantes, es de tercer órden, y dada en forma normal.
2. La ecuación $y''' - 2xy' = x + 1$ es lineal no homogénea.
3. La ecuación $y'' - y^2 \cdot y' = x$ es no lineal, ya que el coeficiente de y' depende de y^2
4. La ecuación $y''' + xy' + y^2 = 0$ es no lineal, ya que aparece el término y^2, que no es de primer grado.

2.0.1 Operadores diferenciales lineales

El uso de operadores simplifica la escritura y permite una resolución más sencilla de ecuaciones diferenciales de órden superior.

En lenguaje sencillo "Un operador es un objeto matemático que convierte una función en otra función".

Podemos pensar en que un operador es una máquina que recibe una función (input), realiza un proceso (aplicarle el operador a la función) y regresa otra función (output); es decir, el input y output son funciones

El operador más importante, para estos contenidos, es el operador de diferenciación D, básicamente, si f es una función Df es la derivada de f

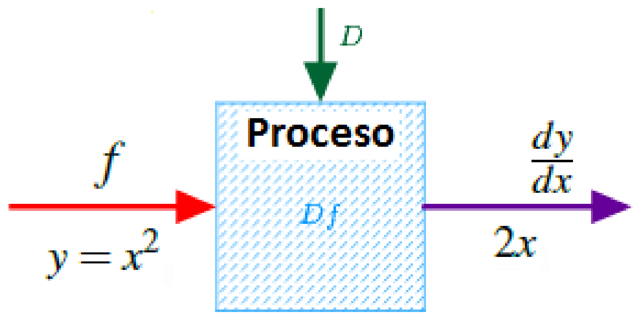


Figura 2.1: Diagrama de un operador

Dada la función $y = f(x)$, su derivada se anota como $Dy = \frac{dy}{dx}$. El símbolo D se llama **operador diferencial**. Por ejemplo, si se considera la ecuación

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = q(x)$$

al usar el operador D se escribe como

$$a_1(x)Dy + a_0(x)y = q(x)$$

Factorizando por la función desconocida $y(x)$ podemos escribirla en la forma

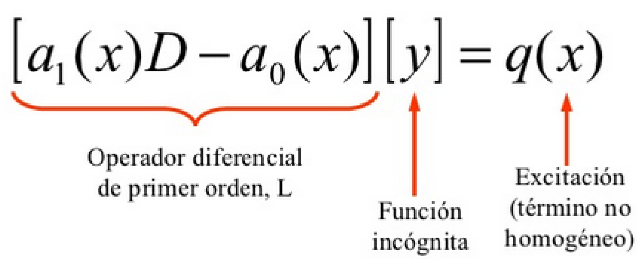


Figura 2.2: ecuación en operadores

El operador diferencial de esta ecuación es $L = a_1(x)D - a_0(x)$
Es importante señalar que **toda** ecuación diferencial se puede escribir en notación D.

Ejemplo 2.0.2 Escribir la ecuación $y' + 2xy = 3x$ en operadores e identificar el operador

Para empezar podemos escribir la ecuación como sigue

$$Dy + 2xy = 3x$$

Se factoriza en y

$$(D + 2x)[y] = 3x$$

Se observa que el operador diferencial es

$$L = D + 2x$$

De esta forma, podemos escribir la ecuación como

$$L[y] = 3x$$

Observación. Los operadores diferenciales pueden tener coeficientes variables o coeficientes constantes, sólo los de coeficientes constantes son conmutativos.

Ejemplo 2.0.3 Sean $L_1 = D$, $L_2 = tD$, entonces

$$(L_1 L_2)[x] = L_1\,(L_2)[x] = D(tD)[x] = D[t\,x'] = x' + t\,x''$$

Se derivó respecto de t como producto. Por otra parte

$$(L_2 L_1)[x] = L_2\,(L_1)[x] = (tD)(D)[x] = (tD)[x'] = t\,x''$$

Se observa que no existe conmutatividad. Esto es

$$(L_1 L_2)[x] \neq L_2\,(L_1)[x]$$

Ejemplo 2.0.4 La ecuación $y' + 2y = 1$ es de operadores diferenciales constantes, pues se puede escribir

$$(D+2)[y] = 1$$

de lo cual se observa que

$$L = D + 2 \quad \text{¡lineal!}$$

Ejemplo 2.0.5 La ecuación $y'' + y = 0 \Longleftrightarrow (D^2+1)\,[y] = 0$, es lineal, homogénea, de orden 2 en $(-\infty, \infty)$, y escrita en forma normal.

Ejemplo 2.0.6 La ecuación $x^3\,y''' + x\,y' = 0 \Longleftrightarrow (x^3 D^3 + xD)\,[y] = 0$, es lineal, no homogénea, de orden 3 en $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$. No es normal en cualquier intervalo que contenga el origen.

2.0.2 El espacio vectorial $C(I)$

Un pequeño soporte teórico considera la siguiente simbología:

- $I = [a,b]$ intervalo en $\mathbb{R}$.
- $C[a,b] = C(I)$ el conjunto de todas las funciones continuas en el intervalo I.
- $C^n[a,b] = C^n(I)$ el conjunto de todas las funciones que tienen derivada de orden n continua en I.

Teorema 2.0.7 Si $f,\, g \in C(I)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, definimos:

1. $(f+g)(x) = f(x) + g(x) \in C(I)$ para todo $x \in I$
   (la suma de dos funciones continuas es una función continua)
2. $(\alpha\, f)(x) = \alpha\, f(x) \in C(I)$, para todo $x \in \mathbb{R}$
   (el producto de un escalar por una función continua es una función continua).

Con estas operaciones así definidas, $C(I)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

Teorema 2.0.8 Si para $f, g \in C^n(I)$ definimos:

1. $(f+g)(x) = f(x)+g(x) \in C^n(I)$ para todo $x \in I$.
2. $(\alpha f)(x) = \alpha f(x) \in C^n(I)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

entonces $C^n(I)$ es un subespacio vectorial de $C(I)$ para $n \geq 1$.

Definición 2.0.9 Se dice que una transformación lineal $L : C^n(I) \to C(I)$ es un **operador diferencial lineal** de orden n sobre el intervalo I si puede expresarse de la forma

$$L = a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_1(x)D + a_0(x)$$

Donde los coeficientes $a_0(x), a_1(x), \cdots, a_n(x)$ son continuos en todo punto de I y el coeficiente $a_n(x) \neq 0$.

Teorema 2.0.10 El operador diferencial $L : C^n(I) \to C(I)$ es lineal. Es decir, satisface:

$$L(\lambda_1 f + \lambda_2 g) = \lambda_1 L(f) + \lambda_2 L(g)$$

De la definición se tiene que, para $y \in C^n(I)$ su imagen bajo el operador diferencial lineal L es la función en $C(I)$ definida por

$$\begin{aligned} L[y] &= (a_n D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_2 D^2 + a_1 D + a_0)[y] \\ &= a_n D^n[y] + a_{n-1}D^{n-1}[y] + \cdots + a_1 D[y] + a_0 y \\ &= a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y \end{aligned}$$

Ejemplo 2.0.11 Desarrollar $(D^2 - 2D - 3)[x^2 + \operatorname{sen} x]$

Te muestro la respuesta factorizando el operador (puedes resolver también sin factorizar)

$$\begin{aligned} (D^2 - 2D - 3)[x^2 + \operatorname{sen} x] = (D+1)(D-3)[x^2 + \operatorname{sen} x] &= (D+1)[2x + \cos x - 3x^2 - 3\operatorname{sen} x] \\ &= 2 - \operatorname{sen} x - 6x + -3\cos x + 2x + \cos x - 3x^2 - 3\operatorname{sen} x \\ &= 2 - 4\operatorname{sen} x - 2\cos x - 4x - 3x^2 \end{aligned}$$

Establecemos la ecuación diferencial lineal en términos del operador.

Definición 2.0.12

- Una ecuación diferencial lineal de orden n en un intervalo I es una ecuación con operadores de la forma
$$L[y] = g(x)$$
Donde g es continua en I, y L es un operador diferencial lineal de orden n definido en I. La ecuación se dice que es homogénea si g es idénticamente cero en I, en otro caso se dice que es no homogénea.
- Se dice que $y(x)$ es una solución de la ecuación diferencial, si y sólo si $y(x)$ pertenece a $C^n(I)$ y satisface idénticamente la ecuación en I.

El siguiente resultado muestra que la suma o superposición de dos o más soluciones de una ecuación diferencial lineal, también es solución de la ecuación diferencial. El principio de superposición se ocupa principalmente de la ecuación diferencial lineal homogénea. El nombre se mantiene por su similitud con el principio de superposición aplicado en física y otras áreas de la ciencia, en el cual se estudia; si existen dos estímulos en un sistema lineal, entonces el resultado neto de su fuerza en algún momento y en algún lugar será equivalente a la sumatoria de las fuerzas de estos dos estímulos tomados independientemente.

Teorema 2.0.13 Principio de Superposición

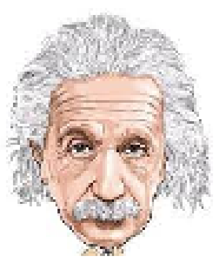
Sean $y_1, y_2, \cdots y_n$ soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea de orden n en un intervalo I, entonces la combinación lineal

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n$$

es también solución de la ecuación diferencial, las C_i, con $i = 1, 2 \cdots n$ son constantes arbitrarias.
Demostración.
Probamos para el caso $n = 2$. Sea L el operador diferencial y sean $y_1(x)$ e $y_2(x)$ soluciones de la ecuación homogénea $L[y] = 0$. Si $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, entonces por la linealidad de L se tiene

$$L[y] = L[C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)] = C_1 L[y_1(x)] + C_2 L[y_2(x)] = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0$$

En resumen, vamos a resolver el siguiente problema:



$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Dado } f \in C(I), \text{ hallar } y \in C^n(I) \text{ tal que} \\ L[y(x)] = f(x), \quad \forall x \in I\end{array}}$$

Figura 2.3: ¡Este es el problema!

2.0.3 Problema de valor inicial

Tal como se planteó el problema de valor inicial para una ecuación diferencial de primer orden, se puede plantear el problema de valor inicial para una ecuación de orden superior:

Resolver

$$a_n(x) y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x) y' + a_0(x) y = g(x)$$

Sujeta a:

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1, \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

En particular, para una ecuación se segundo orden se tiene:

Resolver

$$a_2(x) y'' + a_1(x) y' + a_0(x) y = g(x)$$

Sujeta a:

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1$$

2.0.4 Teorema de existencia y unicidad

Al igual que en el caso de las ecuaciones diferenciales de primer orden, este teorema establece las condiciones necesarias para que un problema de valor inicial tenga solución (existencia) y que esa solución sea la única que existe (unicidad).

Teorema 2.0.14 (Existencia y Unicidad)
Sean $a_0, a_1, \cdots, a_n$ y g son continuas en un intervalo I, y sea $a_n(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Si $x = x_0$ es cualquier punto de este intervalo, entonces existe una solución $y(x)$ del problema de valor inicial en el intervalo, y esa solución es única.

2.0.5 Ecuación diferencial homogénea

Resolver el problema homogéneo $L[y] = 0$, no es otra cosa que determinar

$$S = \{y \in C^n(I) / \ L[y] = 0\} = \ker(L)$$

el cual es llamado el **espacio solución** de $L[y] = 0$.

Se puede demostrar que $\dim(S) = n$ (orden de L), con lo cual para determinar S es suficiente encontrar una **base** de $\ker(L)$. Para esto, basta con encontrar un conjunto de n funciones linealmente independiente contenida en $\ker(L)$. de esta manera, si $\{y_1(x), y_2(x), \cdots y_n(x)\}$ es tal base, la solución general queda representada por la siguiente combinación lineal

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x)$$

donde c_i son números reales adecuados.

Ahora estamos en condiciones de ir en la búsqueda de las soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea de orden n. Sabemos que la dimensión del espacio solución es n y que este espacio solución es un subespacio vectorial, y como todo espacio vectorial (o subespacio vectorial) posee una base, si la encontramos, tendremos las n funciones cuya combinación lineal será la solución. Para hallar la respuesta partimos de lo siguiente:

Definición 2.0.15 Los vectores $v_1, v_2, \cdots, v_n$ son linealmente independientes si y solo si la única combinación lineal posible entre ellos es la nula, es decir, si

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n = 0$$

donde $c_1, c_2, \cdots, c_n$ son números reales, entonces necesariamente $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$.
Para funciones la relación es la misma solo que debe cumplirse para todos los puntos donde se pueda evaluar la función.

Definición 2.0.16 Un conjunto de funciones $f_1, f_2, \cdots, f_n$ es linealmente independiente sobre un intervalo I si la única forma en que

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x) = 0$$

para todo x en I es que $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$. De lo contrario las funciones son linealmente dependientes.
Una forma eficiente para determinar la independencia lineal o dependencia lineal es la siguiente:

Definición 2.0.17 Si $f_1, f_2, \cdots, f_n$ son n funciones derivables $n-1$ veces su Wronskiano se define como el determinante de la matriz $n \times n$ siguiente

$$W[f_1, \cdots, f_n] = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Si $f_1, f_2, \cdots, f_n$ son linealmente dependientes, entonces $W(f_1, \cdots, f_n)$ se anula en todo el intervalo I. Por lo tanto, para verificar que son linealmente independientes es suficiente ver que el Wronskiano $W[f_1, \cdots, f_n]$ no se anula en algún punto del intervalo I.

Observación. Una forma alternativa y de fácil visualización para saber si dos funciones y_1 e y_2 son linealmente dependientes, es determinar si son proporcionales, esto es

$$y_1(x) = k_1 y_2(x) \quad \text{o bien} \quad y_2(x) = k_2 y_1(x)$$

siendo k_1 y k_2 constantes de proporcionalidad. Otra forma de expresar esta idea, es decir que " si se divide y_1 entre y_2, y el resultado no es una constante, entonces las funciones son linealmente independientes.

Ejemplo 2.0.18 Determinar si son o no L.I. las funciones:

1. $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = e^{2x}$, $f_3(x) = e^{3x}$
2. $f_1(x) = \operatorname{sen} x, f_2(x) = \cos x$

1) Es sencillo ver que si se divide cada función por cada una de las otras dos, el resultado no es una constante. Luego, la funciones son linealmente independientes. También se pudo usar el Wronskiano.

2) Hacemos uso del Wronskiano

$$W[f_1, f_2] = \begin{vmatrix} \operatorname{sen} x & \cos x \\ \cos x & -\operatorname{sen} x \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Como el determinante nunca es cero, son LI

Ejemplo 2.0.19 Las funciones $y_1(x) = \operatorname{sen}^3 x$ y $y_2(x) = \operatorname{sen} x - \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3x$ son soluciones de la ecuación

$$y'' + (\operatorname{tg} x - 2 \operatorname{cotg} x) y' = 0$$

en cualquier intervalo I en el que la tangente y cotangente estén definidas.
Veamos que sucede con su Wronkiano

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} \operatorname{sen}^3 x & \operatorname{sen} x - \dfrac{1}{3} \operatorname{sen} 3x \\ & \\ 3 \operatorname{sen}^2 x \cos x & \cos x - \cos 3x \end{vmatrix}$$

Al calcular este determinante se tiene

$$\begin{aligned} W[y_1, y_2] &= \operatorname{sen}^3 x (\cos x - \cos 3x) - 3 \operatorname{sen}^2 x \cos x (\operatorname{sen} x - \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3x) \\ &= \operatorname{sen}^3 x \cos x - \operatorname{sen}^3 x \cos 3x - 3 \operatorname{sen}^3 x \cos x + \operatorname{sen}^2 x \cos x \operatorname{sen} 3x \\ &= -2 \operatorname{sen}^3 x \cos x + \operatorname{sen}^2 x (-\operatorname{sen} x \cos 3x + \cos x \operatorname{sen} 3x) \\ &= -\operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} 2x = 0 \end{aligned}$$

Se concluye que $\{y_1, y_2\}$ son linealmente dependientes en $\zeta(I)$, y **no son** base del espacio solución de la ecuación dada.

Ejemplo 2.0.20 Las funciones $y_1 = 6e^{5x}$ e $y_2 = 2e^{5x}$ son linealmente dependientes, pues $\frac{y_1}{y_2} = 3$, una constante diferente de cero.

Definición 2.0.21 Dada la ecuación diferencial lineal homogénea $L[y] = 0$, llamamos **sistema fundamental de soluciones** a cualquier conjunto de n soluciones $\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ que sean linealmente independientes.

Teorema 2.0.22 Dado un sistema fundamental de soluciones para $L[y] = 0$ (con a_i continuas en I), entonces la solución general de la ecuación lineal homogénea $L[y] = 0$ es la combinación lineal de dichas soluciones:

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x)$$

Teorema 2.0.23 Si $L[y] = 0$ tiene solución compleja $y(x) = u(x) + i\,v(x)$, entonces la parte real $u(x)$ y su parte imaginaria $v(x)$ son, por separado, soluciones de dicha ecuación homogénea.

2.1 Ecuación homogénea con coeficientes constantes

Esta ecuación es de la forma

$$L[y] = (D^n + p_{n-1} D^{n-1} + \cdots + p_0)\,y = 0$$

con los p_i constantes.

R Los operadores diferenciales con coeficientes constantes se comportan como polinomios en D, es decir, la suma y multiplicación de polinomios cumplen las mismas propiedades que los operadores con coeficientes constantes, por ejemplo

$$D^3 - 1 = (D-1)(D^2 + D + 1) = (D^2 + D + 1)(D-1)$$

Cuando se trabaja con operador el primer paso es factorizar el operador. La importancia de esto se refleja en el siguiente resultado:

Proposición 2.1.1 Si $L_1, L_2, \cdots, L_n$ son operadores diferenciales lineales con coeficientes constantes, entonces el espacio nulo de cada uno de ellos está incluido en el espacio nulo del producto $L = L_1 \cdot L_2 \cdots L_n$.

Demostración. Supongamos que $y \in \ker(L_i)$, para algún $i = 1, \cdots, n$. Esto implica que $L_i[y] = 0$, con lo se tiene

$$\begin{aligned}
(L_1 \cdot L_2 \cdots L_n)[y] &= (L_1 \cdot L_2 \cdots L_{i-1} \cdot L_{i+1} \cdots L_n \cdot L_i)[y] \\
&= (L_1 \cdot L_2 \cdots L_{i-1} \cdot L_{i+1} \cdots L_n)(L_i[y]) \\
&= (L_1 \cdot L_2 \cdots L_{i-1} \cdot L_{i+1} \cdots L_n)[0] = 0
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.1.2 La ecuación en operadores $(D^2 - 4)[y] = 0$, se puede expresar como producto de operadores

$$(D^2 - 4)[y] = (D-2)(D+2)[y]$$

El espacio nulo de los operadores

$$L_1 = D-2, \qquad L_2 = D+2$$

está formado por las funciones

$$y_1 = e^{2x}, \qquad y_2 = e^{-2x}$$

En efecto, para $L_1 = D-2$ se tiene:

$$(D-2)[y] = Dy - 2y = 0 \Longrightarrow y' = 2y$$

de lo cual

$$\frac{dy}{y} = 2\,dx \Longrightarrow \ln y = 2x + \ln C$$

se sigue que, con $y = y_1$:

$$y_1 = C\,e^{2x}$$

De igual manera,para el operador L_2 se tiene

$$y_2 = C\,e^{-2x}$$

De esta manera, el espacio nulo del producto (D^2-4) está formado por $\{e^{2x}, e^{-2x}\}$, y dado que estas funciones son L.I (el cociente entre ellas no es una constante), entonces son base del espacio solución de la ecuación diferencial. Por tanto,

$$y = C_1\,e^{2x} + C_2\,e^{-2x}$$

es la solución general.

R Se observa, de este ejemplo, que el problema de resolver una ecuación diferencial homogénea de la forma

$$(D^n + p_{n-1}\,D^{n-1} + \cdots + p_0)\,[y] = 0$$

con p_i constantes, está resuelto si se descompone el operador dado en factores lineales y cuadráticos. Los factores lineales están determinados por las raíces reales de la llamada **Ecuación característica**

$$D^n + p_{n-1}\,D^{n-1} + \cdots + p_0 = 0$$

y los factores cuadráticos por las raíces complejas de esta ecuación.

Se tiene así, que para factores lineales y cuadráticos diferentes, las soluciones son de la forma $y = e^{kx}$. El único problema se presenta para los factores lineales del tipo $(D-\alpha)^m$ correspondiente a la raíz α de multiplicidad m, y para los factores de la forma $(D^2 - 2aD + a^2 + b^2)^m$ correspondientes al par de raíces complejas $a \pm b\,i$. Afortunadamente, esto lo resuelve el siguiente resultado.

Teorema 2.1.3 Si $y(x)$ pertenece al espacio nulo de un operador diferencial lineal L con coeficientes constantes, entonces $x^{m-1}y(x)$ pertenece al espacio nulo de L^m

La consecuencia más importante de este resultado es que se puede afirmar que:

- El espacio nulo del operador $(D-\alpha)^m$ contiene las funciones

$$e^{\alpha x},\ x\,e^{\alpha x},\ x^2\,e^{\alpha x},\ \cdots,\ x^{m-1}\,e^{\alpha x}$$

- El espacio nulo del operador $(D^2-2aD+a^2+b^2)^m$ contiene a las funciones

$$\begin{aligned} &e^{ax}\,\mathrm{sen}\,bx,\ x\,e^{ax}\,\mathrm{sen}\,bx,\ \cdots, x^{m-1}\,e^{ax}\,\mathrm{sen}\,bx,\\ &e^{ax}\cos bx,\ x\,e^{ax}\cos bx,\ \cdots, x^{m-1}\,e^{ax}\cos bx, \end{aligned}$$

y es con tales funciones con las que se construye la solución general de **TODA** ecuación diferencial lineal homogénea de coeficientes constantes.

Ejemplo 2.1.4 Hallar las funciones que están en el espacio nulo de $(D-1)^2(D-2)^3$.

Se observa un producto de operadores, por tanto hallamos las funciones que pertenecen al espacio nulo de cada factor.
Como consecuencia del teorema 2.1.3, en $(D-1)^2$ se halla la función e^x y por estar al cuadrado también se halla xe^x. De la misma forma, en $(D-2)^3$ están las funciones $e^{2x}, xe^{2x}, x^2e^{2x}$. Podemos afirmar que

$$\{e^x, xe^x, e^{2x}, xe^{2x}, x^2e^{2x}\} \subset \ker[(D-1)^2(D-2)^3]$$

Ejemplo 2.1.5 Resolver la ecuación $y''+4y'+5y=0$ equivale a resolver la ecuación en operadores $(D^2+4D+5)[y]=0$.

Es claro que $b^2-4ac=16-20<0$, esto indica que estamos en presencia de un operador irreductible en $\mathbb{R}$. Al resolver

$$D^2+4D+5=0 \Longrightarrow D=-2\pm i$$

Este mismo resultado se obtiene al considerar la segunda consecuencia del teorema 2.1.2 con $m=1$. En efecto, al comparar $D^2-2aD+a^2+b^2$ con D^2+4D+5 se sigue que $a=-2$ y $b=1$. Por tanto, la solución real es

$$y=C_1\,e^{-2x}\,\mathrm{sen}\,x+C_2\,e^{-2x}\cos x$$

Actividad 1 Hallar una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes que tenga como soluciones a e^{2x} y a $x\,e^{-3x}$.

Begin Test Math Pasas con 100 %.

1. La solución de la ecuación $y'''-2y''-y'+2y=0$ es:

- ☐ $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}+C_3e^{-x}$
- ☐ $y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}+C_3e^{-x}$
- ☐ $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+C_3e^{-x}$
- ☐ $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+C_3e^{3x}$

2. La solución de la ecuación $y'''-3y''+3y'-y=0$ es:

- ☐ $y=C_1e^x+C_2xe^x+C_3x^2e^x$
- ☐ $y=C_1e^x+C_2e^x+C_3e^x$
- ☐ $y=C_1e^x+xC_2e^{2x}+C_3x^2e^x$
- ☐ $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+C_3e^{3x}$

3. La solución de la ecuación $y''''+2y''+y=0$ es:

- ☐ $y=C_1\,\mathrm{sen}\,x+C_2\cos x+C_3x\cos x+C_4x\,\mathrm{sen}\,x$
- ☐ $y=C_1\,\mathrm{sen}\,x+C_2\cos x+C_3x\cos x+C_4x^2\cos x$
- ☐ $y=C_1x\,\mathrm{sen}\,x+C_2\cos x+C_3x\cos x+C_4x^2\,\mathrm{sen}\,x$
- ☐ $y=C_1\,\mathrm{sen}\,x+C_2\cos x+C_3\cos x+C_4\,\mathrm{sen}\,x$

4. La solución de la ecuación $y'' - 4y' + 8y = 0$ es:

- [ ] $y = C_1 e^x \cos 2x + C_2 e^x \operatorname{sen} 2x$
- [ ] $y = C_1 e^{2x} \cos x + C_2 e^{2x} \operatorname{sen} x$
- [ ] $y = C_1 e^{2x} \cos 2x + C_2 e^{2x} \operatorname{sen} 2x$
- [ ] $y = C_1 e^x \cos 2x + C_2 e^{2x} \operatorname{sen} 2x$

5. La solución de la ecuación $y'' - 2y' + y = 0$ es:

- [ ] $y = C_1 e^x + C_2 e^x$
- [ ] $y = C_1 e^x + C_2 x e^x$
- [ ] $y = C_1 e^x + C_2 x^2 e^x$
- [ ] $y = C_1 x + C_2 x e^x$

6. La solución de la ecuación $3y'' - 10y' + 3y = 0$ es:

- [ ] $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{x/3}$
- [ ] $y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$
- [ ] $y = C_1 e^x + C_2 e^{x/3}$
- [ ] $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^x$

End Test | Puntos: | Correctas

2.1.1 Ecuaciones Lineales No Homogéneas

Recordemos que se llama **no homogénea** a una ecuación diferencial lineal de la forma

$$L[y] = g(x)$$

Toda función y_p libre de parámetros arbitrarios (constantes) que satisface la ecuación $L[y] = g(x)$ se llama **solución particular** de la ecuación. Por ejemplo, es sencillo ver que la función constante $y_p = 2$ es una solución particular de la ecuación no homogénea $y'' + 2y = 4$.

Teorema 2.1.6 Si se conoce una solución particular $y_p(x)$ de la ecuación diferencial lineal de orden n

$$L[y] = g(x)$$

entonces cualquier otra solución $y(x)$ puede escribirse como

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x)$$

donde y_h es la solución general del problema homogéneo asociado $L[y] = 0$.

Ejemplo 2.1.7 Verificar que:

1. $y_p = e^{2x}$ es solución particular de $y'' - 3y' + 4y = 2e^{2x}$
2. $y_p = xe^x$ es solución particular de $3y' + 4y = 2xe^x - e^x$

Para hallar la solución particular existen varios métodos:

- Método de los coeficientes indeterminados (Aniquiladores).
- Método de Variación de Parámetros.
- Transformada de Laplace, si existen condiciones inciales
- Método del Operador inverso.

2.1.2 Método de coeficientes indeterminados

Este método es muy simple de entender y funciona en la mayoría de los casos. El método exige que la función $g(x)$ tenga alguna de las tres siguientes características necesariamente (o cualquier combinación de estas formas), caso contrario no se podrá aplicar:

1. $g(x) = P_n(x)$
2. $g(x) = P_n(x)\, e^{kx}$
3. $g(x) = [P_n(x)\cos\beta + Q_n(x)\operatorname{sen}\beta]\, e^{kx}$

donde $P_n(x)$ y $Q_n(x)$ son polinomios de igual grado n, $n \in \mathbb{Z}_0^+$

Este método se basa en el hecho de que si es posible encontrar un operador $L_1(D)$ que anule a $g(x)$ en la ecuación no homogénea, entonces aplicamos $L_1(D)$ a la ecuación diferencial original, es decir:

$$L_1[L[y]] = L_1[g(x)] = 0$$

Por lo tanto la expresión anterior es una EDO lineal, homogénea de coeficientes constantes, le aplicamos a esta ecuación el método de las homogéneas y hallamos su solución general, de esta solución general descartamos la parte correspondiente a la homogénea asociada a la EDO original, la parte restante corresponde a la solución particular que estamos buscando.

El operador L_1 de orden mínimo con coeficientes reales y constantes tal que $L_1[g(x)] = 0$ se denomina **Aniquilador** de g

Se tiene así que toda solución de $L[y] = g(x)$ es tambien solución de la ecuación homogénea $L_1[L[y]] = 0$, de donde, determinando las constantes apropiadas podemos obtener una solución particular de $L[y] = g(x)$.

Ejemplo 2.1.8 Determinar un operador lineal con coeficientes constantes que aniquile el segundo miembro de la ecuación

$$(D^2+1)(D-1)[y] = e^x + 2 - 7x\operatorname{sen}x$$

Si llamamos L al aniquilador, entonces empezamos a razonar, primero, que debe aniquilar e^x. Siendo así, debe estar presente el factor $(D-1)$. En segundo lugar, para el 2, es suficiente con el factor D. Finalmente, para $7x\operatorname{sen}x$ tiene que ser cuadrático, esto es, $(D^2+1)^2$. Por tanto, el aniquilador es

$$L = (D-1)(D^2+1)^2 D$$

Algunos aniquiladores de uso habitual son:

- **Aniquilador de polinomios**

A la función constante $y = c$ la aniquila la primera derivada D, a la función $y = x$ la aniquila la segunda derivada D^2, siguiendo de esta forma, a la función $y = x^n$ la aniquila D^{n+1}. Luego, D^{n+1} es el aniquilador da cada una de las funciones

$$x^n, x^{n-1}, \cdots, x, x_0, \quad n \in \mathbb{N},\ x_0 \in \mathbb{R}$$

Consecuencia de esto es que D^{n+1} anula la combinación lineal

$$C_0 + C_1x + C_2x^2 + \cdots + C_nx^n$$

que es un polinomio de grado n.

- **Aniquilador de exponenciales**

El operador $(D-a)^n$ es el aniquilador de las siguientes funciones:

$$e^{ax}, xe^{ax}, x^2e^{ax}, \cdots, x^{n-1}e^{ax}$$

y también aniquilador de la combinación lineal siguiente:

$$C_1e^{ax} + C_2xe^{ax} + C_3x^2e^{ax} + \cdots + C_nx^{n-1}e^{ax} = P_{n-1}(x)e^{ax}$$

- **Aniquilador de seno y coseno**

El operador $(D^2 - 2aD + a^2 + b^2)^n$ es el aniquilador de las funciones:

$$e^{ax}\cos bx, xe^{ax}\cos bx, x^2e^{ax}\cos bx, \cdots, x^{n-1}e^{ax}\cos bx$$

$$e^{ax}\operatorname{sen} bx, xe^{ax}\operatorname{sen} bx, x^2e^{ax}\operatorname{sen} bx, \cdots, x^{n-1}e^{ax}\operatorname{sen} bx$$

y también anula la combinación lineal siguiente:

$$\begin{aligned} C_1e^{ax}\cos bx + C_2xe^{ax}\cos bx + C_3x^2e^{ax}\cos bx + \cdots + C_nx^{n-1}e^{ax}\cos bx + \\ D_1e^{ax}\operatorname{sen} bx + D_2xe^{ax}\operatorname{sen} bx + D_3x^2e^{ax}\operatorname{sen} bx + \cdots + D_nx^{n-1}e^{ax}\operatorname{sen} bx \\ = P_{n-1}(x)e^{ax}\cos bx + Q_{n-1}(x)e^{ax}\operatorname{sen} bx \end{aligned}$$

donde $P_{n-1}(x)$ y $Q_{n-1}(x)$ son polinomios de grado $n-1$.

En particular:

- si $a = 0$, entonces $(D^2 + b^2)^n$ es el aniquilador de:

$$\cos bx, x\cos bx, x^2\cos bx, \cdots, x^{n-1}\cos bx$$

$$\operatorname{sen} bx, x\operatorname{sen} bx, x^2\operatorname{sen} bx, \cdots, x^{n-1}\operatorname{sen} bx$$

  y de sus combinaciones lineales:

$$\begin{aligned} C_1\cos bx + C_2x\cos bx + \cdots + C_nx^{n-1}\cos bx + D_1\operatorname{sen} bx + D_2x\operatorname{sen} bx + \cdots \\ + D_nx^{n-1}\operatorname{sen} bx = P_{n-1}(x)\cos bx + Q_{n-1}(x)\operatorname{sen} bx \end{aligned}$$

- Si $n = 1$ y $a = 0$, entonces $(D^2 + b^2)$ es el anulador de: $\cos bx$, $\operatorname{sen} bx$ y de su combinación lineal

$$C_1\cos bx + C_2\operatorname{sen} bx$$

Un pequeño resúmen de aniquiladores es el siguiente:

FUNCION	ANIQUILADOR
$1, x, x^2, \cdots, x^{m-1}$	D^m
$e^{ax}, xe^{ax}, \cdots, x^{m-1}e^{ax}$	$(D-a)^m$
$\cos bx, x\cos bx, \cdots, x^{m-1}\cos bx$	$(D^2+b^2)^m$
$\operatorname{sen} bx, x\operatorname{sen} bx, \cdots, x^{m-1}\operatorname{sen} bx$	$(D^2+b^2)^m$
$e^{ax}\cos bx, xe^{ax}\cos bx, \cdots, x^{m-1}e^{ax}\cos bx$	$(D^2-2aD+a^2+b^2)^m$
$e^{ax}\operatorname{sen} bx, xe^{ax}\operatorname{sen} bx, \cdots, x^{m-1}e^{ax}\operatorname{sen} bx$	$(D^2-2aD+a^2+b^2)^m$

Ejemplo 2.1.9 Resolver la ecuación $y'' + 4y = 7$

Primero, en operadores se tiene

$$(D^2+4)[y] = 7$$

El aniquilador de la constante 7 es D. Se aplica en cada lado de la ecuación

$$D(D^2+4)[y] = 0$$

La solución de esta homogénea es

$$y = C_1 + C_2 \operatorname{sen} 2x + C_3 \cos 2x$$

En esta solución se halla la solución y_h de la homogénea original

$$y_h = C_2 \operatorname{sen} 2x + C_3 \cos 2x$$

y la solución particular y_p, a saber,

$$y_p = C_1$$

Ahora, debemos hallar el valor de esta constante, para ello reemplazamos y_p en la ecuación original

$$y_p = C_1 \Longrightarrow y_p' = 0 \Longrightarrow y_p'' = 0$$

Luego,

$$0 + 4C_1 = 7 \Longrightarrow C_1 = \frac{7}{4}$$

En consecuencia, la solución general de la ecuación dada es

$$y = \overbrace{\frac{7}{4}}^{y_p} + \overbrace{C_2 \operatorname{sen} 2x + C_3 \cos 2x}^{y_h}$$

Ejemplo 2.1.10 Resolver la ecuación $y'' - 3y' + 2y = x + e^x$

Escrita en operadores esta ecuación es

$$(D^2 - 3D + 2)[y] = x + e^x$$

El operador que aniquila $f(x) = x$ es D^2, y el que aniquila $g(x) = e^x$ es $(D-1)$. De esta manera, el operador $D^2(D-1)$ aniquila $x + e^x$. Aplicando este aniquilador se tiene:

$$D^2(D-1)(D-2)(D-1)[y] = 0$$

O bien

$$D^2(D-1)^2(D-2)[y] = 0$$

luego, la solución particular se halla entre la solución de esta homogénea.

$$y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^x + c_4 x e^x + c_5 e^{2x}$$

La solución de la homogénea original es

$$y_h = c_3 e^x + c_5 e^{2x}$$

Consideramos como candidata a solución particular:

$$y_p = c_1 + c_2 x + c_4 x e^x$$

Ponemos a esta y_p en la ecuación original

$$\begin{aligned}
(D-1)(D-2)[y_p] &= (D-1)(D-2)[c_1 + c_2 x + c_4 x e^x] \\
&= (D-1)[c_2 + c_4 e^x + \cancel{c_4 x e^x} - 2c_1 - 2c_2 x - \cancel{2c_4 x e^x}] \\
&= (D-1)[c_2 - 2c_1 - 2c_2 x - c_4 e^x - c_4 x e^x] \\
&= -2c_2 - \cancel{2c_4 e^x} - \cancel{c_4 x e^x} - c_2 + 2c_1 + 2c_2 x + \cancel{c_4 e^x} + \cancel{c_4 x e^x}] \\
&= 2c_1 - 3c_2 + 2c_2 x - c_4 e^x
\end{aligned}$$

Al comparar

$$2c_1 - 3c_2 + 2c_2 x - c_4 e^x = x + e^x$$

se tiene

$$\begin{aligned}
2c_1 - 3c_2 &= 0 \\
2c_2 &= 1 \\
-c_4 &= 1
\end{aligned}$$

de lo cual

$$c_2 = \frac{1}{2},\ c_1 = \frac{3}{4},\ c_4 = -1$$

con lo que

$$y(x) = \left[c_3 e^x + c_5 e^{2x}\right] + \left[\frac{3}{4} + \frac{1}{2}x - x e^x\right] = y_h + y_p$$

es la solución general

Ejemplo 2.1.11 Resolver $(D^2+1)[y] = 3x^2+4$

Claramente, la ecuación diferencial es lineal no homogénea. El operador $L = D^3$ "aniquila" $3x^2+4$. Luego una solución particular de la ecuación diferencial dada puede hallarse entre las soluciones de la ecuación homogénea.

$$D^3(D^2+1)y = 0$$

Tenemos ahora una ecuación homogénea, que sabemos trabajar. Su solución es

$$y(x) = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4 \operatorname{sen} x + C_5 \cos x$$

En esta solución está la y_h y la y_p. La solución de la homogénea original es:

$$y_h = C_4 \operatorname{sen} x + C_5 \cos x$$

De modo que nuestra candidata a solución y_p, con la determinación adecuada de las C_i, es.

$$y_p = C_1 + C_2x + C_3x^2$$

La ponemos en la ecuación original

$$\begin{aligned}(D^2+1)[y_p] &= (D^2+1)[C_1 + C_2x + C_3x^2] \\ &= 2C_3 + C_1 + C_2x + C_3x^2 \\ &= (2C_3 + C_1) + C_2x + C_3x^2\end{aligned}$$

Al comparar

$$(2C_3 + C_1) + C_2x + C_3x^2 = 3x^2 + 4$$

se tiene:

$$\begin{aligned}(2C_3 + C_1) &= 4 \\ C_2 &= 0 \\ C_3 &= 3\end{aligned}$$

de lo cual

$$C_1 = -2,\ C_2 = 0,\ C_3 = 3$$

Por tanto, la solución particular es

$$y_p(x) = -2 + 3x^2$$

De esta forma, la solución general es

$$y(x) = y_h + y_p = C_4 \operatorname{sen} x + C_5 \cos x + 3x^2 - 2$$

Actividad 2 Resolver:

1. $y'' - 4y = 2e^{3x}$. Resp. $y(x) = \frac{2}{5}e^{3x} + C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}$
2. $y'' + 5y' + 4y = 3x + 2$. Resp $y(x) = C_1e^{-4x} + C_2e^{-x} + \frac{3}{4}x - \frac{7}{16}$
3. $y'' + 25y = 20 \operatorname{sen} 5x$. Resp. $y(x) = y_h + y_p = C_1 \cos 5x + C_2 \operatorname{sen} 5x - 2\cos 5x$
4. $y'' + 4y = \cos^2 x$. Usa $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$. Debes encontrar

$$y = \frac{11}{8} + C_2 \cos 2x + C_3 \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{8}x \operatorname{sen} 2x$$

2.2 Método de variación de parámetros

El método de variación de parámetros es un procedimiento útil para la obtención de una solución particular y_p de la ecuación diferencial no homogénea de orden superior

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_1(x)y' + a_0(x) = g(x)$$

normalizada (el coeficiente de la mayor derivada es 1), de la cual sabemos que la solución de la ecuación homogénea son un conjunto de funciones linealmente independientes $\{y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)\}$, siendo la solución homogénea de la forma

$$y_h = C_1 y_1(x) + \cdots + C_n y_n(x)$$

El método consiste en cambiar las constantes C_i por funciones $C_i(x)$ de tal manera que la solución particular de la ecuación diferencial es de la forma

$$y_p = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \cdots + C_n(x)y_n(x)$$

Si se reemplaza esta y_p en la ecuación original se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{cases} C_1{}'(x)\,y_1 + C_2{}'(x)\,y_2 + \cdots + C_n{}'(x)\,y_n & = \; 0 \\ C_1{}'(x)\,y_1{}' + C_2{}'(x)\,y_2{}' + \cdots + C_n{}'(x)\,y_n{}' & = \; 0 \\ & \vdots \\ C_1{}'(x)\,y_1^{(n-2)} + C_2{}'(x)\,y_2^{(n-2)} + \cdots + C_n{}'(x)\,y_n^{(n-2)} & = \; 0 \\ C_1{}'(x)\,y_1^{(n-1)} + C_2{}'(x)\,y_2^{(n-1)} + \cdots + C_n{}'(x)\,y_n^{(n-1)} & = \; g(x) \end{cases}$$

En este sistema hay que determinar las C_i. El sistema se puede resolver por el método de eliminación de Gauss, o haciendo uso de la regla de Cramer. En este último caso, el determinante de este sistema es el Wronskiano $W[y_1, y_2, \cdots, y_n]$. Por la regla de Cramer

$$C_k{}'(x) = \frac{W_k}{W}$$

donde

- W es el Wronskiano de $\{y_1, \cdots, y_n\}$
- W_k es el determinante obtenido al sustituir la k - ésima columna del wronskiano por $(0, 0, \cdots g(x))$

Se puede aplicar el método tanto para ecuaciones con coeficientes constantes como para coeficientes variables

Ejemplo 2.2.1 Resolver la ecuación $y'' + y = \sec^2 x$

Pasamos la ecuación a operadores

$$(D^2 + 1)[y] = \sec^2 x$$

La solución de la ecuación homogénea es

$$y = C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \cos x$$

Suponemos que la solución de la particular es

$$y_p = C_1(x) \operatorname{sen} x + C_2(x) \cos x$$

Formamos el sistema

$$\begin{cases} C_1{}'(x)\,\text{sen}\,x + C_2{}'(x)\cos x &= 0 \\ C_1{}'(x)\cos x - C_2{}'(x)\,\text{sen}\,x &= \sec^2 x \end{cases}$$

Al multiplicar la primera ecuación por $\text{sen}\,x$ y la segunda por $\cos x$ se halla que

$$C_1{}'(x)[\text{sen}^2 x + \cos^2 x] = \sec^2 x \cdot \cos x$$

Despejando $C_1\,(x)$ y simplificando tenemos

$$C_1{}'(x) = \sec x \Longrightarrow C_1(x) = \ln(\sec x + \text{tg}\,x)$$

Con esto, $C_2(x) = -\dfrac{1}{\cos x}$. En consecuencia, la solución general es

$$y = C_1\,\text{sen}\,x + C_2\cos x + (\text{sen}\,x)\cdot\ln(\sec x + \text{tg}\,x) - 1$$

Ejemplo 2.2.2 Resolver por método de variación de parámetros $y'' - y = e^x$

La ecuación, en operadores, equivale a

$$(D^2 - 1)[y] = 0 \Longleftrightarrow y_h = C_1\,e^x + C_2\,e^{-x}$$

Buscamos la solución particular en la forma

$$y_p = C_1(x)\,e^x + C_2(x)\,e^{-x}$$

Se debe cumplir:

$$\begin{aligned} C_1{}'(x)\,e^x + C_2{}'(x)\,e^{-x} &= 0 \\ C_1{}'(x)\,e^x - C_2{}'(x)\,e^{-x} &= e^x \end{aligned}$$

Al sumar, se obtiene

$$C_1{}'(x) = \frac{1}{2} \Longrightarrow C_1(x) = \frac{x}{2} + C_1$$

Al reemplazar este C_1' en cualquiera de las dos ecuaciones tienes que

$$C_2{}'(x) = -\frac{1}{2}e^{2x} \Longrightarrow C_2(x) = -\frac{1}{4}e^{2x} + C_2$$

Conviene agregar las constantes C_1 y C_2 de esa forma pues tenemos así identificada la homogénea.

$$y_p = \left(\frac{x}{2} + C_1\right)e^x + \left(C_2 - \frac{1}{4}e^{2x}\right)e^{-x}$$

Al desarrollar esta expresión

$$y_p = \left(\frac{x}{2}e^x + C_1\right)e^x + \left(C_2 - \frac{1}{4}\right)e^x$$

En esta solucion está la de la homogénea, de modo que agrupamos

$$y_p = \overbrace{\left(C_1 e^x + C_2 e^{-x}\right)}^{homogenea} + \overbrace{\left(\frac{x}{2}e^x - \frac{1}{4}e^x\right)}^{particular}$$

De esta manera, la solución general es

$$y = y_p + y_h = \frac{x}{2}e^x - \frac{1}{4}e^x + C_1\,e^x + C_2\,e^{-x}$$

Ejemplo 2.2.3 Resolver $y'' + 3y' + 2y = \operatorname{sen}(e^x)$

La solución de la homogénea es

$$y_h = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}$$

Ahora se forma el requisito del método

$$\begin{array}{rcl} C_1' e^{-2x} & + & C_2' e^{-x} = 0 \\ -2C_1' e^{-2x} & + & -C_2' e^{-x} = \operatorname{sen}(e^x) \end{array}$$

Al sumar:

$$-C_1' e^{-2x} = \operatorname{sen}(e^x)$$

de lo cual

$$C_1'(x) = -e^{2x} \operatorname{sen}(e^x) \Longrightarrow C_1(x) = -\int e^{2x} \operatorname{sen}(e^x)\, dx$$

Si $z = e^x$, entonces $dz = e^x dx$, la integral se reduce a

$$C_1(x) = -\int z \operatorname{sen}(z)\, dz$$

Al integrar por partes se obtiene

$$C_2(x) = -\cos(e^x), \quad C_1(x) = e^x \cos(e^x) - \operatorname{sen}(e^x)$$

Por tanto, la solución particular es

$$y_p = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} - e^{-2x} \operatorname{sen}(e^x)$$

Y la solución general

$$y(x) = y_h + y_p = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} - e^{-2x} \operatorname{sen}(e^x)$$

Begin Test Pasas con 100 %. Para hallar la ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes de menor orden cuya solución general es

$$y(x) = e^{-3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \operatorname{sen} 2x) + C_3 + C_4 x + 5e^{4x}$$

1. La solución particular y_p es:
(a) $y_p = C_5 e^{4x}$ (b) $y_p = 5e^{4x}$ (c) $y_p = C_3 + C_4 x$ (d) $y_p = C_3 + 5e^{4x}$

2. La parte homogénea presenta un par de raices compleja. En operadores es:
(a) $D = -3 \pm 2i$ (b) $D = 3 \pm 2i$ (c) $D = 2 \pm 3i$ (d) $D = -2 \pm 3i$

3. La parte polinomial de la homogénea $C_3 + C_4 x$ corresponde al operador:
(a) D^4 (b) D^3 (c) D (d) D^2

4. Con el producto de operadores $(D - (-3+2i)) \cdot (D - (-3+2i)) \cdot D^2$ hallas que la ecuación homogénea es:
(a) $(D^4 + 6D^3 - 13D^2)[y] = 0$ (b) $(D^4 + 6D^3 + 13D^2)[y] = 0$
(c) $(D^4 - 6D^3 + 13D^2)[y] = 0$ (d) $(D^4 - 6D^3 - 13D^2)[y] = 0$

5. Tienes construída la ecuación diferencial

$$y'''' + 6y''' + 13y'' = Q(x)$$

Para hallar $Q(x)$ ingresa $y_p = 5e^{4x}$ en la ecuación homogénea. Encuentras que $Q(x)$ es;

(a) $Q(x) = 4250e^{4x}$ (b) $Q(x) = 4242e^{4x}$ (c) $Q(x) = 4240e^{4x}$ (d) $Q(x) = 4040e^{4x}$

End Test Correctas

ScoreField PointsField

Correctas

2.2.1 Ecuaciones lineales con coeficientes variables

No existen métodos generales para resolver una ecuación diferencial lineal con coeficientes variables, pero hay diversos procedimientos, utilizando distintos cambios de variable, que permiten rebajar el orden de la ecuación. Por otra parte existen algunas ecuaciones especiales, como la ecuación de Cauchy-Euler, a las que se puede aplicar un método general de resolución.

2.2.2 La fórmula de Abel

Sirve para conocer una segunda solución de una ecuación diferencial homogénea de segundo orden, siempre que sea dada una solución.

Teorema 2.2.4

Sean $y_1, y_2, \cdots, y_n$ soluciones sobre I de

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_0(x)\,y = 0$$

entonces

$$W[y_1, y_2, \cdots, y_n] = C\,e^{-\int p_{n-1}(x)\,dx}$$

Demostración.
Probamos para el caso $n = 2$. (por simplicidad, $p_{n-1} = p$ y $p_0 = q$)
Sean $y_1(x)$, $y_2(x)$ dos soluciones de la ODE lineal homogénea

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

entonces el Wronskiano de las soluciones es

$$W[y_1, y_2] = y_1y_2' - y_2y_1'$$

y la derivada del Wronskiano es

$$W' = y_1'y_2' + y_1y_2'' - y_2'y_1' - y_2y_1'' = y_1y_2'' - y_2y_1''$$

como y_1, y_2 son soluciones, se despejan de la ecuación, se reemplazan

$$W' = y_1(-py_2' - qy_2) - y_2(-py_1' - qy_1) = -pW$$

Al eliminar términos semejantes

$$W(y) = C\,e^{-\int p\,dx}$$

Teorema 2.2.5 (Abel)

Si $y_1 \neq 0$ es solución de la ecuación $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ entonces

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int p dx}}{y_1^2(x)} dx$$

es también solución de la ecuación.

Demostración.

Según teorema 2.1.4 se debe cumplir que

$$W[y_1, y_2] = C e^{-\int p(x)\, dx}$$

lo cual significa que

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1{}' & y_2{}' \end{vmatrix} = C e^{-\int p(x)\, dx}$$

al calcular el determinante,

$$y_1 y_2{}' - y_2 y_1{}' = C e^{-\int p(x)\, dx}$$

la ecuación la escribimos en diferenciales para y_2

$$y_1 \frac{dy_2}{dx} - y_1{}' y_2 = C e^{-\int p(x)\, dx}, \quad \text{¡Lineal!}$$

Un arreglo

$$\frac{dy_2}{dx} - \left(\frac{y_1{}'}{y_1}\right) y_2 = \frac{C}{y_1} e^{-\int p(x)\, dx}$$

Por la fórmula de la lineal, la solución tiene la forma

$$y_2 = y_1 \left(\int \frac{C}{y_1^2}\ e^{-\int p(x)\, dx} dx + K \right)$$

O bien,

$$y_2 = C y_1 \int \frac{1}{y_1^2}\ e^{-\int p(x)\, dx} dx + K y_1$$

para $K = 0$, $C = 1$, se tiene

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)\, dx} dx$$

es una solución particular.

Ejemplo 2.2.6 Se sabe que $y_1 = e^{2x}$ es solución de $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Una segunda solución se obtiene de

$$y_2 = e^{2x} \int \frac{1}{e^{4x}} \cdot e^{-\int 4dx} dx$$

que equivale a tener

$$y_2 = e^{2x} \int \frac{1}{e^{4x}} \cdot e^{4x} dx = x e^{2x}$$

De esta manera,

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$$

es la solución general

Ejemplo 2.2.7 Hallar la solución general de la ecuación

$$y'' - \frac{2x}{x^2-1}y' + \frac{2}{x^2-1}y = 0$$

si se sabe que $y_1(x) = x$ es una solución.
Al observar la ecuación se encuentra que $p(x) = -\frac{2x}{x^2-1}$. Al integrar

$$-\int -\frac{2x}{x^2-1}dx = \ln(x^2-1)$$

Por propiedad

$$e^{\ln(x^2-1)} = x^2-1$$

Se tiene que

$$y_2(x) = x\int\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)dx = x^2+1$$

En consecuencia, la solución general es

$$y(x) = C_1x + C_2(x^2+1)$$

2.2.3 Ecuación de Cauchy - Euler

La ecuación de Euler es una una ecuación lineal con coeficientes variables de la siguiente forma:

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 x y' + a_0 y = 0$$

donde $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_2, a_1, a_0$, son constantes reales.
Una forma más general que representa a una ecuación de Cauchy - Euler es

$$a_n(ax+b)^n y^{(n)} + a_{n-1}(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1(ax+b)y' + a_0 y = 0$$

con a_i, a y b constantes. Esta forma se reduce a la anterior mediante la sustitución $ax+b = z$.
Para resolverlas tenemos dos alternativas:

2.2.4 Resolver con la potencia de $y = x^k$

Se supone que dicha solución tiene la forma $y = x^k$ donde k será una variable por determinar, de lo cual, dependiendo de los valores que resulten, viene dada la solución. Al aplicar esta solución se deben encontrar las derivadas que aparezcan en la ecuación diferencial, realizar las respectivas sustituciones y proceder a resolver la ecuación polinómica en función de k que resulte. Se pueden presentar los siguientes casos:

- **Caso 1**: raíces reales distintas

Sean k_1 y k_2 las raíces reales, con $k_1 \neq k_2$. Entonces $y_1 = x^{k_1}$ e $y_2 = x^{k_2}$ forman un conjunto fundamental de soluciones. Por consiguiente, la solución general es:

$$y = C_1x^{k_1} + C_2x^{k_2}$$

- **Caso 2**: Raíces reales repetidas.

Si las raíces son repetidas (esto es, si $k_l = k_2$), la solución general es de la forma

$$y = C_1 x^{k_1} + C_2 x^{k_1} \ln x$$

- **Caso 3**: Raíces complejas.

Si la ecuación característica tiene las raíces complejas conjugadas, entonces $k_1 = a + ib$ y $k_2 = a - ib$, donde $a, b > 0$, entonces la solución general es

$$y = x^a [C_1 \cos(b \ln x) + C_2 \operatorname{sen}(b \ln x)$$

Ejemplo 2.2.8 Resolver $x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0$

Sea $y = x^k$, entonces $y' = kx^{k-1}$, $y'' = k(k-1)x^{k-2}$. Reemplazando en la ecuación dada tenemos lo siguiente:

$$x^2 \cdot k(k-1)x^{k-2} + 2xkx^{k-1} - 2x^k = 0$$

Factorizando

$$x^k [k^2 + k - 2] = 0 \Longrightarrow (k-1)(k+2) = 0$$

de lo cual, $k_1 = 1$, $k_2 = -2$. De esta forma, la solución general es

$$y = C_1 x + C_2 x^{-2}$$

Actividad 3 Resolver usando $y = x^k$:

1. $x^3 y''' + 5x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0$. Resp. $y = C_1 x + C_2 x^{-1} + C_3 x^{-2}$
2. $x^2 y'' + xy' + 4y = 0$. Resp. $y = C_1 \cos(2 \ln x) + C_2 \operatorname{sen}(2 \ln x)$
3. $x^2 y'' + \frac{5}{2} xy' - y = 0$. Resp. $y = C_1 x^{\frac{1}{2}} + C_2 x^{-2}$

2.2.5 Resolver con la magia de la exponencial

Otra forma de resolver una ecuación de Euler - Cauchy es usar la sustitución $x = e^t$ y la aplicación de la regla de la cadena, esto convierte a la ecuación en una de coeficientes constantes.

Si hacemos el cambio de variable $x = e^t$, entonces

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right)^{-1} = e^{-t} \cdot \frac{dy}{dt}$$

Para y'' se tiene:

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left(e^{-t} \cdot \frac{dy}{dt} \right) \cdot \frac{dt}{dx} = e^{-2t} \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right)$$

Para la tercera derivada se tiene:

$$\begin{aligned} y''' = \frac{d^3 y}{dx^3} &= \frac{d}{dt} \left[e^{-2t} \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) \right] \cdot \frac{dt}{dx} \\ &= e^{-3t} \left(\frac{d^3 y}{dt^3} - 3 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} \right) \end{aligned}$$

Todos estos cálculos de derivadas los podemos reducir a operadores y tener lo siguiente:

$$xy' = D, \quad x^2 y'' = D(D-1), \quad x^3 y''' = D(D-1)(D-2)y$$

Ejemplo 2.2.9 Resolver usando $x = e^t$ la ecuación $x^2y'' + xy' - y = 0$

Si $x = e^t$, el cálculo de y' e y'' son conocidos:

$$y' = e^{-t}D, \quad y'' = e^{-2t}(D^2 - D)$$

Reemplazando en la ecuación dada, ésta queda en la forma

$$e^{2t} \cdot e^{-2t}(D^2 - D)[y] + e^t e^{-t} D[y] - e^t = 0$$

Al reducir

$$(D^2 - D)[y] + D[y] - y = 0$$

Lo que es equivalente a

$$(D^2 - 1)[y] = 0$$

Recordando que las derivadas son respecto de t, la solución general de esta ecuación es

$$y(t) = C_1e^t + C_2e^{-t}$$

Deshaciendo el cambio se obtiene la solución general de la ecuación inicial:

$$y(x) = C_1x + C_2x^{-1}$$

Actividad 4 Resolver las ecuaciones:

1. $x^2y'' - xy' + y = 0.$ Resp. $y = C_1\,x + C_2\,x\ln x$
2. $x^2y'' - xy' + y = 4x\ln x$ Resp. $y = y_h + y_p = C_1x + C_2x\ln x + \frac{2}{3}x\ln^3 x$

2.3 Transformada de Laplace

La transformada de Laplace es un operador lineal muy útil para la resolución de ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas. Laplace demostró como transformar las ecuaciones lineales no homogéneas en ecuaciones algebraicas que pueden resolverse por medios algebraicos. El operador de Laplace, que se denota por $\mathscr{L}$, actúa sobre una función $x(t)$ y devuelve otra función $\mathscr{L}[x(t)]$.

2.3.1 Señales y Sistemas

- **Señal**

En términos generales, una señal es un signo, marca o medio que informa, avisa o advierte de algo. Este aviso permite dar a conocer una **información**. La señal sustituye por lo tanto a la palabra escrita o al lenguaje. Ejemplos sencillos son: la señal de voz, la señal luminosa o la señal eléctrica (un semáforo).

Haciendo uso del lenguaje matemático, las señales son funciones de una o más variables independientes, y contienen información sobre la naturaleza o comportamiento de algún fenómeno. El objetivo de conocer y clasificar las señales es el de tener la capacidad de tratarlas y así transmitirlas o extraer de ellas información.

- **Sistema**

Un sistema es un grupo de objetos que pueden interactuar armónicamente y que se combinan para lograr un determinado objetivo. Dicho de otro modo, un sistema es un elemento que permite transformar una señal de entrada en otra señal de salida

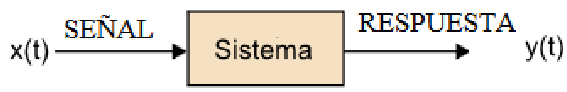


Figura 2.4: esquema de un sistema

Definición 2.3.1 Sea $x(t)$ una señal de tiempo continuo definida en $(0,\infty)$. La Transformada de Laplace de esta señal, simbolizada por $\mathscr{L}[x(t)]$ se define como:

$$\mathscr{L}[x(t)] = \int_0^\infty e^{-st}\,x(t)\,dt = F(s)$$

donde s es una variable compleja, $s = u + iv$.

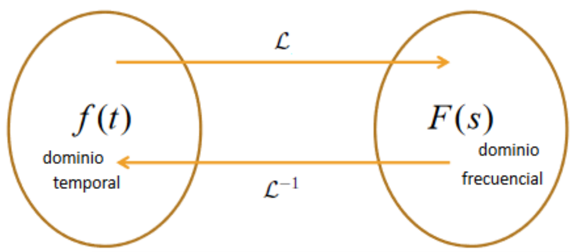


Figura 2.5: tiempo y frecuencia

La figura indica que la transformada de Laplace toma una señal en el espacio del tiempo, y, al procesarla, la deja en el espacio de la frecuencia

2.3.2 Existencia

Importa describir las condiciones que debe satisfacer una función para que exista su transformada.

Definición 2.3.2 Una función (señal) f es continua por tramos en $[a,b]$ si y sólo si:

1. f está definida y es continua en todos, salvo un número finito de puntos de $[a,b]$
2. Existen los límites laterales; $f(x_0^+)$ y $f(x_0^-)$, en cada punto $x_0 \in [a,b]$

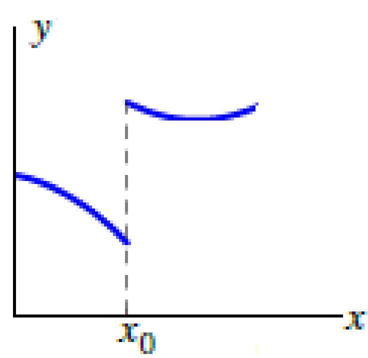
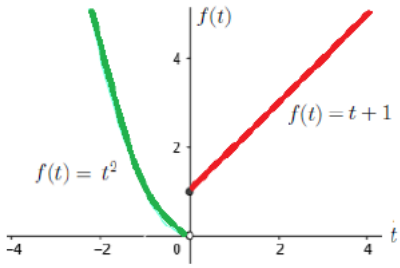


Figura 2.6: continuidad por tramos

Ejemplo 2.3.3 La función $f(t)=\begin{cases} t^2 & ,t<0 \\ t+1 & ,t\geq 0 \end{cases}$ es continua por tramos

El punto $t=0$ es el único punto de discontinuidad. Los límites laterales existen, son 0 por izquierda y 1 por derecha. Por tanto, cumple con ser continua por tramos.



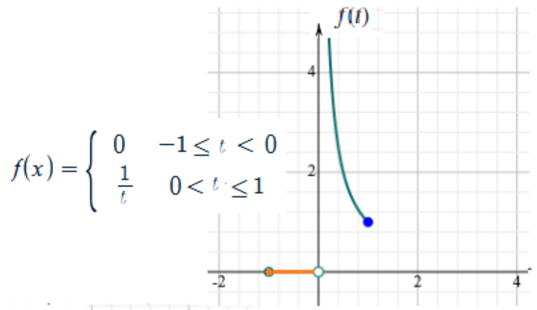


Figura 2.7: continuidad por tramos

Ejemplo 2.3.4 La función siguiente NO es continua por tramos

$$f(t)=\begin{cases} 0 & ,-1\leq t\leq 0 \\ \frac{1}{t} & ,0<t\leq 1 \end{cases}$$

Definición 2.3.5 Una función $f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ es de orden exponencial si existen números k, $M>0$ y $T>0$ tales que para $t>T$

$$|f(t)|\leq M\,e^{kt}$$

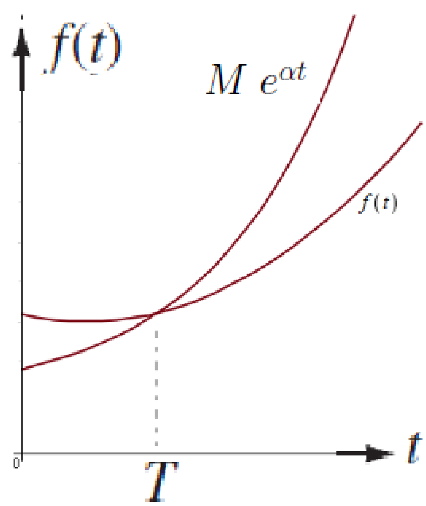


Figura 2.8: órden exponencial

En la práctica, para verificar que una función f es de orden exponencial, conviene calcular el siguiente límite:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{|f(t)|}{e^{kt}}=L$$

para algún valor de k. Si L es finito, entonces M puede ser cualquier número mayor que L (y este determina T). Por otra parte, si $L=\infty$, la función f no es de orden exponencial.

Ejemplo 2.3.6 La función $f(t)=t$ es de órden exponencial

Hacemos uso de la regla de L'Hopital para hallar:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^{kt}}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{ke^{kt}}=0$$

para cualquier número positivo k. Por lo tanto, $f(t)$ es de orden exponencial.

Estas dos condiciones: continuidad por tramos y orden exponencial, garantizan la existencia de la transformada de Laplace. Es decir,

$$\mathscr{L}[x(t)]=\int_0^{\infty}e^{-st}\,x(t)\,dt$$

La mayoría de las señales (funciones) con las que se trabaja son de órden exponencial, sin embargo debe tenerse cuidado con aquellas que no lo son, tal como $x(t)=e^{t^2}$, y que por tanto no tienen transformada de Laplace.
La figura que muestra que $f(t)$ es de órden exponencial, mientras que e^{t^2} no lo es.

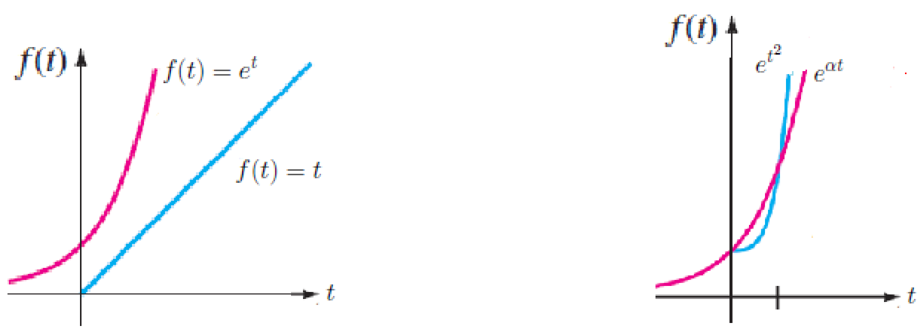


Figura 2.9: órden exponencial

Para las funciones de órden exponencial se tiene el siguiente resultado interesante.

Teorema 2.3.7 Si f es una función de orden exponencial entonces

$$\lim_{s\to\infty}\mathscr{L}[x(t)]=\lim_{s\to\infty}F(s)=0$$

Observación. . La importancia de este resultado es que permite saber en forma inmediata que funciones no tienen inversas. Por ejemplo,

$$F(s)=1,F(s)=s,F(s)=\operatorname{sen}s,\ F(s)=\frac{s}{s+1}$$

no poseen inversas pues $\lim\limits_{s\to\infty}\mathscr{L}(f)\neq 0$.

Las siguientes funciones son de orden exponencial (n entero positivo)

- $f(t) = 1$
- $f(t) = \sqrt{t}$
- $f(t) = t^n$
- $f(t) = e^{at}$
- $f(t) = \operatorname{sen} bt$
- $f(t) = \cos bt$
- $f(t) = t^n\, e^{at} \operatorname{sen} bt$
- $f(t) = t^n\, e^{at} \cos bt$

La transformada de Laplace posee una serie de propiedades, que resultan útiles en el análisis de señales y respuesta de sistemas a excitaciones. Además, estas mismas propiedades permiten obtener la transformada de ciertas funciones en base a las transformadas de otras señales más simples.

- Propiedad de linealidad

La transformada de Laplace es un operador lineal, es decir, dadas las señales $x_1(t)$ y $x_2(t)$ definidas en $[0,\infty)$, cuyas transformadas de Laplace son $\mathscr{L}[x_1(t)]$ y $\mathscr{L}[x_2(t)]$, respectivamente, entonces:

$$\boxed{\mathscr{L}\left[k_1\, x_1(t) + k_2\, x_2(t)\right] = k_1\, \mathscr{L}[x_1(t)] + k_2\, \mathscr{L}[x_2(t)]}$$

Estudiaremos algunas señales de uso habitual, tales como el escalón unitario, el delta de Dirac, señales exponenciales, señales seno coseno y otras, además de ir conociendo propiedades de la transformada, con la finalidad de resolver algunas ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constante no homogéneas.

2.3.3 Calculando transformadas

Al igual que cuando se trabaja con derivadas e integrales, con pequeños ejemplos se puede construír una tabla básica de derivadas o de integrales, según sea el caso. En transformadas ello no es diferente. Veamos algunas transformadas de uso habitual.

- La transformada de la señal $x(t) = 1$.

$$\mathscr{L}[1] = \int_0^{\infty} 1\, e^{-st}\, dt = \left(-\frac{1}{s}\, e^{-st}\right)_0^{\infty} = \frac{1}{s}, \quad s > 0$$

- La transformada de la señal $x(t) = t$.

$$\mathscr{L}[t] = \int_0^{\infty} t\, e^{-st}\, dt$$

Se debe hacer integración por partes

$$u = t \Longrightarrow du = dt$$
$$dv = e^{-st} \Longrightarrow v = -\frac{1}{s} e^{-st}$$

Se sigue que

$$\mathscr{L}[t] = \int_0^{\infty} t\, e^{-st}\, dt = -t \cdot \frac{1}{s} e^{-st}\Big|_0^{\infty} + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} dt$$

La expresión

$$-t \cdot \frac{1}{s} e^{-st}\Big|_0^{\infty} = -\frac{1}{s}\frac{t}{e^{st}}\Big|_0^{\infty} \to 0$$

Se puede ver que es así usando L'Hopital. Nos queda

$$\mathscr{L}[t] = \int_0^\infty t\, e^{-st}\, dt = \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st} dt = -\frac{1}{s^2} e^{-st}\Big|_0^\infty$$

Si $s > 0$ el límite de la exponencial es cero, por tanto, queda la evaluación en $t = 0$

$$\mathscr{L}[t] = \frac{1}{s^2}, \quad s > 0$$

- La transformada de la señal $x(t) = e^{at}$

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}[e^{at}] &= \int_0^\infty e^{at} \cdot e^{-st}\, dt \\
&= \int_0^\infty e^{-(s-a)t}\, dt = \lim_{k\to\infty} \int_0^\infty e^{-(s-a)t}\, dt \\
&= \lim_{k\to\infty} \left(-\frac{1}{s-a}\, e^{-(s-a)t} \right)_0^k \\
&= -\frac{1}{s-a} \cdot (0-1) = \frac{1}{s-a}, \quad s > a
\end{aligned}$$

- La transformada de la señal $x(t) = e^{-at}$

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}[e^{-at}] &= \int_0^\infty e^{-at} \cdot e^{-st}\, dt \\
&= \int_0^\infty e^{-(s+a)t}\, dt = \lim_{k\to\infty} \int_0^\infty e^{-(s+a)t}\, dt \\
&= \lim_{k\to\infty} \left(-\frac{1}{s+a}\, e^{-(s+a)t} \right)_0^k \\
&= -\frac{1}{s+a} \cdot (0-1) = \frac{1}{s+a}, \quad s > -a
\end{aligned}$$

- La transformada de la señal $x(t) = e^{-ati}$

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}[e^{-ati}] &= \int_0^\infty e^{-ati} \cdot e^{-st}\, dt \\
&= \int_0^\infty e^{-(s+ai)t}\, dt = \lim_{k\to\infty} \int_0^\infty e^{-(s+ai)t}\, dt \\
&= \lim_{k\to\infty} \left(-\frac{1}{s+ai}\, e^{-(s+ai)t} \right)_0^k \\
&= -\frac{1}{s+ai} \cdot (0-1) = \frac{1}{s+ai}
\end{aligned}$$

- La transformada de la señal $x(t) = e^{ati}$

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}[e^{ati}] &= \int_0^\infty e^{ati} \cdot e^{-st}\, dt \\
&= \int_0^\infty e^{-(s-ai)t}\, dt = \lim_{k\to\infty} \int_0^\infty e^{-(s-ai)t}\, dt \\
&= \lim_{k\to\infty} \left(-\frac{1}{s-ai}\, e^{-(s-ai)t} \right)_0^k \\
&= -\frac{1}{s-ai} \cdot (0-1) = \frac{1}{s-ai}
\end{aligned}$$

Observación. La fórmula de Euler establece que

$$\begin{cases} e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x \\ e^{-ix} = \cos x - i \operatorname{sen} x \end{cases}$$

Al sumar se elimina la parte compleja y es posible obtener que

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$$

Al restar se elimina el $\cos x$ y resulta

$$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$$

- La transformada de la señal $x(t) = \operatorname{sen} at$
  Hacemos uso de la exponencial compleja y de la propiedad de linealidad para escribir

$$\begin{aligned} L[\operatorname{sen} at] &= \frac{1}{2i}\mathscr{L}\left[e^{ati} - e^{-ati}\right] = \frac{1}{2i}\left(\mathscr{L}[e^{ati}] - \mathscr{L}[e^{-ati}]\right) \\ &= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s-ai} - \frac{1}{s+ai}\right) = \frac{a}{s^2+a^2} \end{aligned}$$

- La transformada de la señal $x(t) = \cos at$

$$\begin{aligned} L[\cos at] &= \frac{1}{2}\mathscr{L}\left[e^{ati} + e^{-ati}\right] = \frac{1}{2}\left(\mathscr{L}[e^{ati}] + \mathscr{L}[e^{-ati}]\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-ai} + \frac{1}{s+ai}\right) = \frac{s}{s^2+a^2} \end{aligned}$$

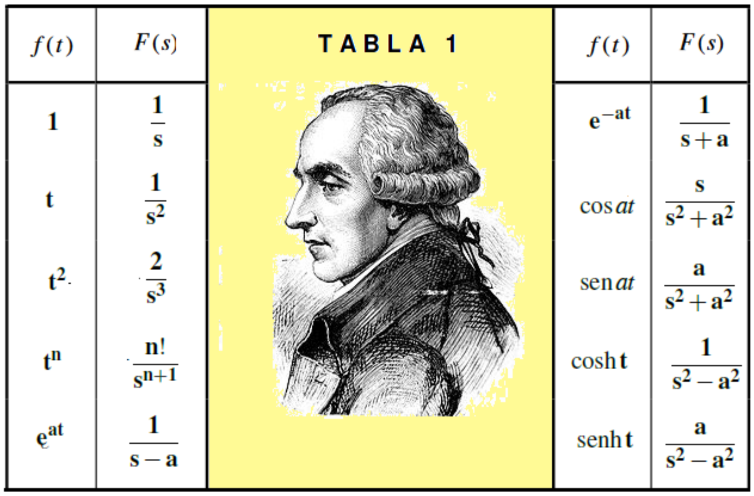
- La transformada de la señal hiperbólica $x(t) = \cosh at$
  Haciendo uso de la linealidad del operador $\mathscr{L}$ se tiene

$$\begin{aligned} \mathscr{L}[\cosh at] &= \mathscr{L}[\frac{1}{2}(e^{at} + e^{-at})] = \frac{1}{2}\mathscr{L}[e^{at}] + \frac{1}{2}\mathscr{L}[e^{-at}] \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a}\right) = \frac{1}{s^2-a^2} \end{aligned}$$

- La transformada de la señal hiperbólica $x(t) = \operatorname{senh} at$
  Usando la linealidad del operador $\mathscr{L}$ se tiene

$$\begin{aligned} \mathscr{L}[\operatorname{senh} at] &= \mathscr{L}[\frac{1}{2}(e^{at} - e^{-at})] = \frac{1}{2}\mathscr{L}[e^{at}] - \frac{1}{2}\mathscr{L}[e^{-at}] \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right) = \frac{a}{s^2-a^2} \end{aligned}$$

Una primera tabla de transformadas de Laplace de funciones elementales, que naturalmente puede usarse también de modo inverso, como una tabla elemental de antitransformadas.



$f(t)$	$F(s)$	TABLA 1	$f(t)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s}$		e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
t	$\frac{1}{s^2}$		$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
t^2	$\frac{2}{s^3}$		$\operatorname{sen} at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$		$\cosh t$	$\frac{1}{s^2-a^2}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$		$\operatorname{senh} t$	$\frac{a}{s^2-a^2}$

Figura 2.10: Tabla - Laplace

2.3.4 Escalón unitario

Esta función debe su nombre al matemático inglés Oliver Heaviside. En ingeniería se puede encontrar funciones que están “desactivadas” o “activadas”. Por ejemplo una fuerza externa que actúa en un sistema mecánico, o un voltaje aplicado a un circuito, se puede desactivar después de cierto tiempo. Es conveniente definir una función especial que es el número 0 (desactivada) hasta un cierto tiempo $t = a$ y entonces el numero 1 (activada) después de ese tiempo. Esta función se la conoce como escalón unitario o función de Heaviside.

$$\mu(t) = \begin{cases} 1 & ,t \geq 0 \\ 0 & ,t < 0 \end{cases}$$

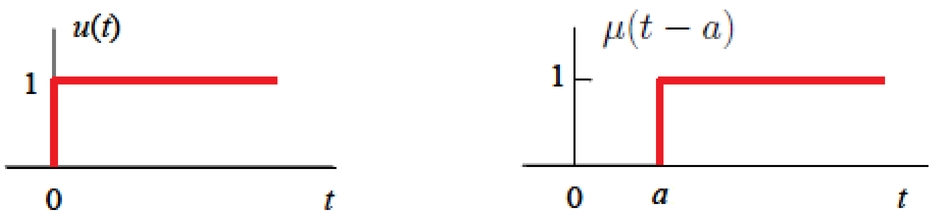


Figura 2.11: Escalón unitario

El escalón se puede desplazar en el tiempo, adquiriendo la forma

$$\mu(t-a) = \begin{cases} 1 & ,t \geq a \\ 0 & ,t < a \end{cases}$$

Cuando cualquier función es multiplicada por una función escalón, se dice que la función escalón “apaga” a la función para cualquier valor antes de a, y la deja “encendida” después de a

Ejemplo 2.3.8 Si se quiere "apagar" la función $f(t) = t$, es decir, hacerla cero antes del 2, entonces se multiplica por $\mu(t-2)$, con esto se tiene $f(t)\mu(t-2)$. Este proceso en forma gráfica se muestra en la figura

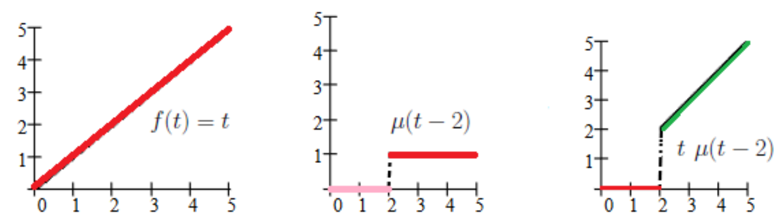


Figura 2.12: prender - apagar

En general, si f es una función con dominio $[0,\infty)$ y $\mu(t-a)$ es la función escalón unitario. Se define la función

$$f_a(t) = f(t-a)\mu(t-a) = \begin{cases} 0 & 0 \leq a \\ f(t-a), t \geq a \end{cases}$$

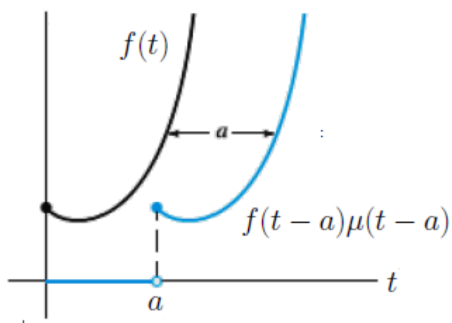


Figura 2.13: función por escalón

Ejemplo 2.3.9 Escribir con ayuda del escalón unitario la función

$$f(t) = \begin{cases} g(t) & ,t < a \\ h(t) & ,t \geq a \end{cases}$$

Se mantiene la primera función y se resta la primera de la segunda con el escalón del corte. Esto es

$$f(t) = g(t) + [h(t) - g(t)]\mu(t-a)$$

Actividad 5 Escribir con escalón la función

$$f(t) = \begin{cases} t^2 & ,t < 1 \\ 2t & ,1 \leq t < 4 \\ t+1 & ,t \geq 4 \end{cases}$$

En este caso hay tres funciones, pero el proceso es similar. En términos del escalón se tiene.

$$f(t) = t^2 + (2t - t^2)\mu(t-1) + (1-t)\mu(t-4)$$

Ejemplo 2.3.10 Escribie en términos del escalón unitario la función

$$f(t) = \begin{cases} 2t & ,1 \le t < 2 \\ 2 & ,1 \le t < 3 \\ 0 & ,t \ge 3 \end{cases}$$

Observando la función se deduce que

$$f(t) = 2t\mu(t-1) + (2-2t)\mu(t-2) - 2\mu(t-3)$$

Transformada de un Pulso Rectangular

La función pulso en el dominio de Laplace se expresa en el tiempo como

$$p(t) = \begin{cases} 0, t < 0 \\ A, 0 \le t \le b \\ 0, t > b \end{cases}$$

En términos del escalón, es la resta de dos escalones.

$$p(t) = A\mu(t) - A\mu(t-b)]$$

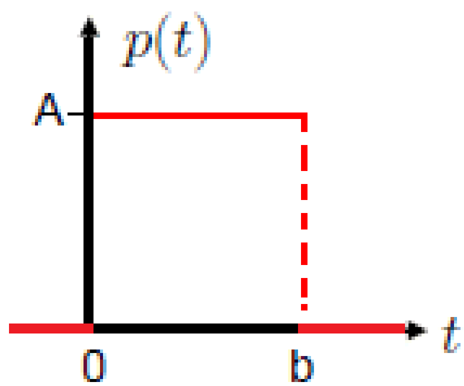


Figura 2.14: pulso rectangular

La transformada es

$$\begin{aligned} \mathscr{L}[p(t)] &= \int_0^\infty e^{-st} \cdot p(t)dt \\ &= A\int_0^\infty \mu(t)e^{-st}dt - A\int_0^\infty e^{-st}\mu(t-b)dt \\ &= \frac{A}{s} - \frac{A}{s}e^{-bs} \end{aligned}$$

Ejemplo 2.3.11 Las transformadas del escalón y del escalón desplazado son:

$$\mathscr{L}[\mu(t)] = \int_0^\infty e^{-st}\mu(t)dt = \int_0^\infty e^{-st}dt = \frac{1}{s}$$

$$\mathscr{L}[\mu(t-a)] = \int_0^\infty e^{-st}\mu(t-a)dt = \int_a^\infty e^{-st}dt = \frac{e^{-as}}{s}$$

2.3.5 La delta de Dirac

En algunos sistemas mecánicos, circuitos eléctricos, doblamiento de vigas y otras aplicaciones, aparecen fuerzas externas muy grandes que actúan en intervalos de tiempo muy cortos, por ejemplo, el golpe de un martillo, un relámpago, etc. Para representar esta fuerza los ingenieros "crearon" la función delta de Dirac.

El impulso unitario o delta de Dirac se puede obtener a partir del límite de la siguiente función:

$$h_a(t) = \begin{cases} \frac{1}{a} & \text{, si } -\frac{a}{2} < t < \frac{a}{2} \\ 0 & \text{, en el resto} \end{cases}$$

Siendo a muy pequeño.

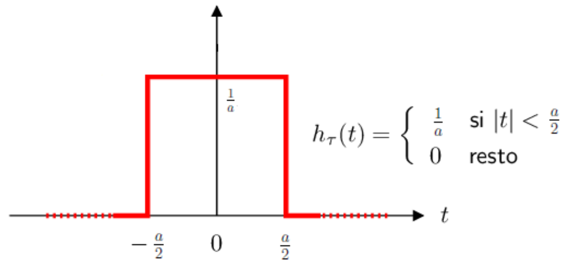


Figura 2.15: delta de Dirac

Nótese que el área bajo el pulso se mantiene igual a 1 cualquiera que sea el valor de a. Si a se hace progresivamente pequeño, el área se mantiene igual a 1, obteniéndose un pulso de gran altura y muy estrecho. La figura 2.16 muestra esta parte del proceso.

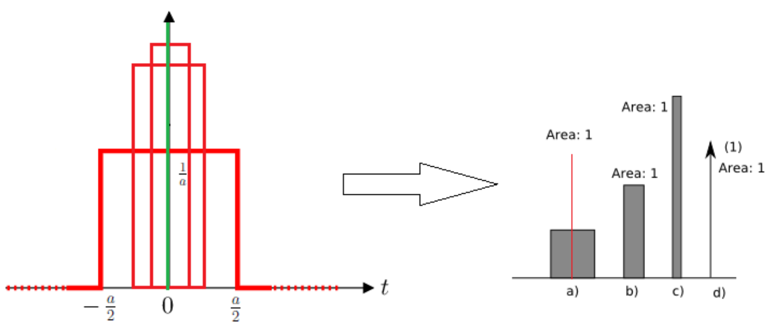


Figura 2.16: proceso para delta

Definición 2.3.12 La función impulso se define como

$$\delta(t) = \lim_{a \to 0} h_a(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t \neq 0 \\ \infty, & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

http://la-mecanica-cuantica.blogspot.cl/2009/08/la-funcion-delta-de-dirac.html
Tres propiedades interesantes:

Proposición 2.3.13 Sean $f(t)$ cualquier señal continua del tiempo t y sea $a \in \mathbb{R}$:

$a)$ $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1$ $\quad$ $b)$ $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)\,dt = f(0)$ $\quad$ $c)$ $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-a)\,dt = f(a)$

Transformada del impulso

Empleando la definición y propiedades, se tiene:

$$\mathscr{L}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st}\delta(t)dt = f(0) = 1$$

pues $f(t) = e^{-st}$, entonces $f(0) = 1$

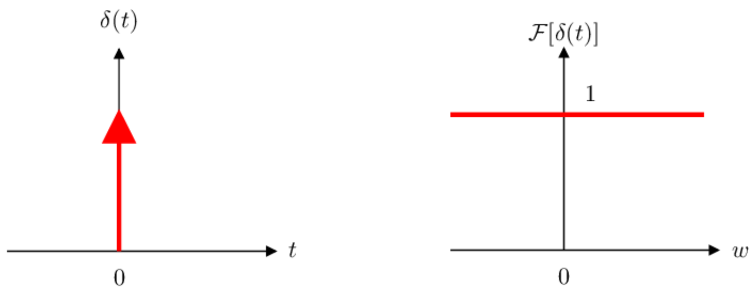


Figura 2.17: El impulso y su transformada

2.3.6 Desplazamiento en la frecuencia

Esta interesante propiedad se usa cuando se tiene el producto entre dos señales, una de las cuales debe ser exponencial.

$$\boxed{\mathscr{L}[x(t)] = F(s) \Longrightarrow \mathscr{L}[x(t)\ e^{at}] = F(s-a)}$$

Sea $\mathscr{L}[x(t)] = \int_0^\infty x(t)e^{-st}dt = F(s)$, entonces

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[x(t)e^{at}] &= \int_0^\infty x(t)e^{at}e^{-st}dt = \int_0^\infty x(t)e^{-(s-a)t}dt \\ &= F(s-a)\end{aligned}$$

Ejemplo 2.3.14 Calcular $\mathscr{L}[e^{-2t}\cos 3t]$

La presencia de la exponencial indica el desplazamiento ($a=-2$), por tanto, interesa la función que multiplica a la exponencial ($f(t) = \cos 3t$), cuya transformada es

$$\mathscr{L}[\cos 3t] = \frac{s}{s^2+9}$$

En consecuencia,

$$\mathscr{L}[e^{-2t}\cos 3t] = F(s+2) = \frac{s+2}{(s+2)^2+3^2}$$

Ejemplo 2.3.15 Hallar $\mathscr{L}[e^{-3t}\operatorname{sen} 2t]$

En este caso, $a=-3$, $f(t) = \operatorname{sen} 2t$. Como $\mathscr{L}[\operatorname{sen} 2t] = \frac{2}{s^2+4}$, entonces

$$\mathscr{L}[\operatorname{sen} 2t\, e^{-3t}] = F(s+3) = \frac{2}{(s+3)^2+4}$$

2.3.7 Transformada de t^n

Otra señal que aparece a menudo en los cálculos es $x(t) = t^n$, con t número natural.

$$\boxed{\mathscr{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}}$$

2.3.8 Transformada de $t^n x(t)$

Cuando se tiene el producto de dos señales, y una de ellas es potencial, entonces el cálculo de su transformada se realiza a través de la expresión

$$\mathscr{L}[t^n x(t)] = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n} = (-1)^n D_s^n [F(s)]$$

en donde $\mathscr{L}[x(t)] = F(s)$

Ejemplo 2.3.16 Calcular $\mathscr{L}[t \operatorname{sen} t]$

Calcular usando la definición es tarea casi imposible. Haremos uso de la propiedad recién vista. La transformada del seno es

$$\mathscr{L}[\operatorname{sen} t] = \frac{1}{s^2+1} = F(s)$$

Derivando $F(s)$ tenemos la solución

$$-\frac{dF(s)}{ds} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = \frac{2s}{(s^2+1)^2}$$

En consecuencia

$$\mathscr{L}[t \operatorname{sen} t] = \frac{2s}{(s^2+1)^2}$$

Actividad 6 Calcular $\mathscr{L}[t^2 \operatorname{sen} 2t]$. Resp. $\mathscr{L}[t^2 \operatorname{sen} 2t] = \frac{12s^2-16}{(s^2+4)^3}$

2.3.9 Desplazamiento en el tiempo

Un desplazamiento en el dominio del tiempo provoca un factor exponencial en el dominio de la frecuencia, cuyo exponente es proporcional a tal desplazamiento.

Sea $a > 0$ y $\mathscr{L}[x(t)] = F(s)$, entonces

$$\mathscr{L}[x(t-a)\mu(t-a)] = e^{-as}\mathscr{L}[x(t)]$$

O también

$$\mathscr{L}[g(t)\mu(t-a)](s) = e^{-as}\mathscr{L}[g(t+a)](s)$$

En primer lugar, la función

$$x(t-a)\mu(t-a) = \begin{cases} 0 & ,t < a \\ x(t-a) & ,t > a \end{cases}$$

es la obtenida por traslado de $x(t)$ en a unidades a la derecha, tomando además el valor 0, para $t < a$.

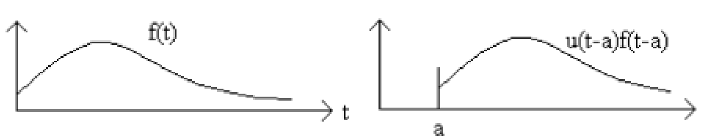


Figura 2.18: desplazamiento en el tiempo

La prueba de la propiedad es como sigue:

Sea $\mathscr{L}[x(t)] = F(s)$ la transformada de $x(t)$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}[x(t-a)\mu(t-a)] &= \int_a^\infty x(t-a)e^{-st}dt \\
&= \int_0^\infty x(z)e^{-s(a+z)}dz,\ t-a=z \\
&= e^{-sa}\int_0^\infty x(z)e^{-sz}dz \\
&= e^{-sa}F(s)
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.3.17 Hallar $\mathscr{L}[\mu(t-a)\ \text{sen}\ t]$

Usamos la propiedad de desplazamiento en el tiempo.

$$\mathscr{L}[\mu(t-a)\,\text{sen}\,t] = e^{-as}\mathscr{L}[\text{sen}(t+a)]$$

Pero

$$\text{sen}(t+a) = \text{sen}\,t\ \cos a + \text{sen}\,a\ \cos t$$

Luego,

$$\mathscr{L}[\mu(t-a)\,\text{sen}\,t] = e^{-as}\ (\mathscr{L}[\text{sen}\,t]\cos a + \mathscr{L}[\cos t]\,\text{sen}\,a)$$

de donde

$$\mathscr{L}[\mu(t-a)\,\text{sen}\,t] = e^{-as}\left(\frac{\cos a}{s^2+1} + \frac{s\,\text{sen}\,a}{s^2+1}\right)$$

El resultado final es

$$\mathscr{L}[\mu(t-a)\,\text{sen}\,t] = e^{-as}\left(\frac{s\ \text{sen}\,a + \cos a}{s^2+1}\right)$$

Ejemplo 2.3.18 Hallar $\mathscr{L}[\mu(t-\pi)\cos t]$.

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}[\mu(t-\pi)\cos t] &= e^{-\pi s}\mathscr{L}[\cos(t+\pi)] \\
&= e^{-\pi s}\mathscr{L}[-\cos(t] \\
&= -e^{-\pi s}\,\frac{s}{s^2+1}
\end{aligned}$$

2.4 Transformada inversa de Laplace

La transformada inversa o anti-transformada de Laplace es una herramienta matemática que nos permite pasar del dominio frecuencial al temporal, esto es, conociendo la señal de salida hallar la señal de entrada. Para ello, es necesario que se cumplan ciertas condiciones.

Definición 2.4.1 Si $F(s)$ es la transformada de $x(t)$, es decir, si $\mathscr{L}[x(t)] = F(s)$, entonces la transformada inversa de Laplace de $F(s)$, escrita $\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$ es $x(t)$. Esto significa que

$$\mathscr{L}^{-1}[F(s)] = x(t) \Longleftrightarrow \mathscr{L}[x(t)] = F(s)$$

Proposición 2.4.2 Si se satisface que

$$\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$$

entonces existe la inversa de F.

Un procedimiento adecuado para hallar la transformada inversa de funciones racionales, es utilizar las propiedades de la transformada y descomponer en fracciones parciales la función $F(s)$. La propiedad de la transformada (directa e inversa) de ser un operador lineal permite el cálculo de las transformadas inversas de cada fracción parcial, sumar las expresiones analíticas y entonces hallar la señal de entrada $x(t)$.

Ejemplo 2.4.3 Hallar la transformada inversa de $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s+1}{s^2(s+2)^3}\right]$

El uso de fracciones parciales es fundamental

$$\frac{s+1}{s^2(s+2)^3}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s+2}+\frac{D}{(s+2)^2}+\frac{E}{(s+2)^3}$$

Sin calcular el valor de estas constantes, la respuesta es

$$f(t)=A+Bt+Ce^{-2t}+\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{D}{(s+2)^2}\right]+\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{E}{(s+2)^3}\right]$$

Las transformadas que faltan merecen una explicación

- $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{D}{(s+2)^2}\right]$

  El denominador muestra $(s+2)$ que es un desplazamiento (va una exponencial), como $(s+2)^2$ es una potencia de t. Luego,
  $$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{D}{(s+2)^2}\right]=D\,t\,e^{-2t}$$

- $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{E}{(s+2)^3}\right]$

  El denominador muestra $(s+2)$ que es un desplazamiento (va una exponencial), como $(s+2)^3$ es una potencia de t^2. Luego,
  $$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{E}{(s+2)^3}\right]=\frac{E}{2}t^2\,e^{-2t}$$

En consecuencia
$$f(t)=A+Bt+Ce^{-2t}+D\,t\,e^{-2t}+\frac{E}{2}t^2\,e^{-2t}$$

Los ejercicios siguiente tienen repuesta, para verla, "pincha" la letra, y para volver "pincha" el rectángulito.

EJERCICIO 1. Hallar las transformadas inversas:

(a) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2+7}\right]$

(b) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{2s^2+10s}{(s+1)(s^2-2s+5)}\right]$

(c) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{-2s+6}{s^2+4}\right]$

(d) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s-1}{(s+1)(s+2(s-3)}\right]$

(e) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{2s+3}{s^2-4s+20}\right]$

(f) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s+3}{(s-2)(s+1)}\right]$

(g) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s(s^2+1)}\right]$

(h) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s+4}{s^2+4s+8}\right]$

Begin Test Pasas con 100 %.

1. La transformada de Laplace de $f(t) = 5t + 4\,\mathrm{sen}\,3t$ es:

(a) $\dfrac{17s^2+45}{s^2+9}$ (b) $\dfrac{17s^2}{s^2(s^2+9)}$ (c) $\dfrac{17s^2+45}{s^2(s^2+9)}$ (d) $\dfrac{17s^2+5}{s^2(s^2+9)}$

2. La transformada inversa de $F(s) = \dfrac{5}{s^4}$ es:

(a) $\dfrac{3}{6}t^3$ (b) $\dfrac{5}{6}t^3$ (c) $\dfrac{1}{6}t^3$ (d) $\dfrac{7}{6}t^3$

3. La transformada inversa de $F(s) = \dfrac{8s+11}{s^2+3s+2}$ es:

(a) $f(t) = 5e^{-t} + 3e^{-2t}$ (b) $f(t) = 3e^{t} + 5e^{-2t}$
(c) $f(t) = 3e^{-t} + 5e^{2t}$ (d) $f(t) = 3e^{-t} + 5e^{-2t}$

4. La transformada inversa de $F(s) = \dfrac{9}{s-5}$ es:

(a) $f(t) = 9e^{5t}$ (b) $f(t) = 9e^{-5t}$ (c) $f(t) = 9e^{-t}$ (d) $f(t) = 9e^{t}$

End Test Correctas

ScoreField PointsField

Correctas

2.5 Aplicación a Ecuaciones Diferenciales

Veamos como se usan las transformadas de Laplace para resolver ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. Se supone siempre que todas las ecuaciones son válidas para $t \geq 0$.
Una ecuación diferencial lineal de orden n con coeficientes constantes es una ecuación de la forma

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = x(t) \tag{2.2}$$

donde $x(t)$, la excitación, es una función conocida y $a_0, a_1, \cdots, a_n$ son constantes dadas.
A esta ecuación diferencial se le puede dar una interpretación de sistema. En esta interpretación, la ecuación diferencial lineal de órden n especifica un sistema con entrada (excitación) $x(t)$ y salida (respuesta) $y(t)$. La salida así especificada, $y(t)$, es la solución única de la ecuación bajo las condiciones iniciales especificadas

$$y(0) = y_0, y'(0) = y_1, \cdots, y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}$$

Estos valores se denominan condiciones iniciales.

2.5.1 Transformada de las derivadas

Sea $x(t)$ una señal continua y de orden exponencial, cuya derivada primera $x'(t)$ es continua a trozos y de orden exponencial. La transformada de Laplace de la primera derivada de x verifica

$$\mathscr{L}[x'(t)] = sF(s) - x(0)$$

siendo $F(s) = \mathscr{L}[x(t)]$ y $x(0)$ el valor de la señal en el origen. En efecto

$$\mathscr{L}[x'(t)] = \int_0^{\infty} x'(t)e^{-st}\,dt$$

Aplicando integración por partes, con $u = e^{-st}$, $du = -se^{-st}dt$, $dv = x'(t)dt$, $v = x(t)$ se tiene

$$\int_0^{\infty} x'(t)e^{-st}dt = \left(x(t)e^{-st}\right)_0^{\infty} + s\int_0^{\infty} x(t)e^{-st}dt = -x(0) + sF(s)$$

Luego,

$$\mathscr{L}[x'(t)] = sF(s) - x(0)$$

- **Transformada de** $x''(t)$

A partir de la expresión que proporciona la transformada de la primera derivada se puede obtener la transformada de $x''(t)$, en efecto

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[x''(t)] &= s\mathscr{L}[x'(t)] - x'(0) = s\,(sF(s) - x(0)) - x'(0)\\ &= s^2F(s) - sx(0) - x'(0)\end{aligned}$$

Siguiendo de este modo, la generalización es:

$$\boxed{\mathscr{L}[x^{(n)}(t)] = s^nF(s) - s^{n-1}x(0) - s^{n-2}x'(0)\cdots - x^{(n-1)}(0)}$$

La aplicación de la transformada de Laplace para resolver la ecuación diferencial comprende los siguientes pasos:

- Aplicar la transformada en ambos miembros de la EDO
- Utilizar las propiedades de la transformada para que sólo quede en términos de $\mathscr{L}[y(t)]$ y despejarla.
- Lo que se obtiene recibe el nombre de ecuación algebraica.
- Aplicar la transformada inversa para hallar $y(t)$

Ejemplo 2.5.1 Resolver la ecuación $y'' - y = 1$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Se aplica transformada en ambos miembros de la ecuación para tener

$$\mathscr{L}[y''] - \mathscr{L}[y] = L[1] \Longrightarrow s^2\mathscr{L}[y] - s\,f(0^+) - f'(0^+) - \mathscr{L}[y] = \frac{1}{s}$$

Reemplazando las condiciones iniciales

$$s^2\mathscr{L}[y] - \mathscr{L}[y] = 1 + \frac{1}{s} = \frac{1+s}{s(s^2-1)} = \frac{1}{s(s-1)} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}$$

La separación en fracciones parciales permite el cálculo de la transformada inversa (linealidad)

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{s-1}] - \mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{s}] \Longrightarrow y(t) = e^t - 1$$

Actividad 7 Hallar la solución de las ecuaciones:

1. $4y'' - y = 1$, $y(0) = 0$, $y'(0) = \frac{1}{2}$. Resp. $y = -1 + e^{t/2}$
2. $y'' + 9y = \dfrac{3}{2}\operatorname{sen} 2t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$. Resp. $y = \frac{3}{10}\operatorname{sen} 2t - \frac{1}{5}\operatorname{sen} 3t$

Ejemplo 2.5.2 Resolver $y' - 2y = 2t + 1$, $y(1) = 2$

Como la condición inicial no es en cero, se debe usar un cambio de variable del tipo $t = T + 1$, de modo que para $t = 1$ se tenga $T = 0$. De esta forma, la ecuación original toma la forma

$$y' - 2y = 2(T+1) + 1 = 2T + 3,\ y(0) = 2$$

Aplicando transformada en ambos lados de la ecuación:

$$sL[y] - 2 - 2L[y] = \frac{2}{s^2} + \frac{3}{s}$$

Agrupando y despejando se llega a

$$L[y] = \frac{2s^2 + 3s + 2}{(s-2)s^2}$$

Se separa en fracciones parciales

$$L[y] = \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s-2}$$

de los cual

$$y(T) = AT + B + Ce^{2T}$$

Como $T = t - 1$, entonces

$$y(T) = A(t-1) + B + Ce^{2(t-1)}$$

2.5.2 Convolución en el tiempo

En matemática una convolución es un operador matemático que transforma dos funciones f y g en una tercera función. En términos de señales, la convolución combina dos señales para producir una tercera señal.

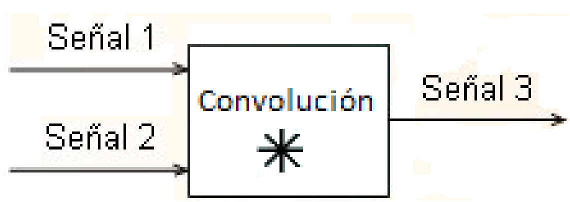


Figura 2.19: convolución

En el campo de las señales digitales la convolución es muy importante, ya que permite obtener la señal de salida de un sistema a partir de la señal de entrada y la respuesta al impulso unidad $\delta(t)$. Es decir, se puede predecir la salida, conociendo la entrada y la respuesta al impulso unitario.
Si la respuesta del sistema ante un impulso unitario se anota como $h(t)$, la salida de un sistema lineal e invariante excitado con una entrada cualquiera $x(t)$ está dada por la expresión

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

y se dice que la función $y(t)$ es la convolución de las funciones $x(t)$ y $h(t)$, que se anota

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

Ejemplo 2.5.3 Hallar convolución entre $f(t) = t$ y $g(t) = \operatorname{sen} t$

$$\begin{aligned} t * \operatorname{sen} t &= \int_0^t (t-u) \operatorname{sen} u\, du = t \int_0^t \operatorname{sen} u\, du - \int_0^t u \operatorname{sen} u\, du \\ &= t - t\cos t - \operatorname{sen} t + t\cos t = t - \operatorname{sen} t \end{aligned}$$

Teorema 2.5.4 (Teorema de convolución)
Si $\mathscr{L}[f(t)]$ y $\mathscr{L}[g(t)]$ existen para $s > a \geq 0$, entonces

$$\mathscr{L}[f \star g)](t) = \mathscr{L}[f(t)]\,\mathscr{L}[g(t)] = F(s)G(s)$$

Observación. : La forma inversa del teorema de convolución

$$(f \star g)(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[F(s) \cdot G(s)\right]$$

es muy importante en la solución de ecuaciones diferenciales, pues nos puede evitar el cálculo de fraciones parciales complejas.

Ejemplo 2.5.5 Obtener la transformada de la convolución de las señales $x_1(t) = e^{-3t}\mu(t)$ y $x_2(t) = \mu(t)$

Hay que calcular las transformadas de ambas señales

$$\mathscr{L}[x_1(t)] = F(s) = \frac{1}{s+3} \quad \text{y} \quad \mathscr{L}[x_2(t)] = G(s) = \frac{1}{s}$$

Ahora, la transformada de esta convolución es

$$\mathscr{L}[x_1(t) * x_2(t)] = \frac{1}{s(s+3)}$$

Ejemplo 2.5.6 Hallar $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s+1}{(s-2)^2((s+1)^2+9)}\right]$

Podemos ver el problema como un producto

$$\frac{s+1}{(s-2)^2((s+1)^2+9)} = \frac{1}{(s-2)^2} \cdot \frac{s+1}{(s+1)^2+9}$$

Se calcula transformada inversa de cada factor del lado derecho:

$$\begin{aligned} \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)^2}\right] &= te^{2t} \\ \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s+1}{(s+1)^2+9}\right] &= e^{-t}\cos 3t \end{aligned}$$

Su convolución es

$$\begin{aligned} te^{2t} * e^{-t}\cos 3t &= \int_0^t (t-u)e^{2(t-u)} \cdot e^{-u}\cos 3u\, du \\ &= \frac{1}{6}te^{2t} - \frac{1}{18}e^{-t}\operatorname{sen} 3t \end{aligned}$$

Begin Test Pasas con 100 %.

1. Al aplicar transformada a la ecuación

$$y'' + 4y' + 6y = 1 + e^{-t},\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$$

(a) $F(s) = \dfrac{2s+1}{s(s+1)(s^2+4s+6)}$ (b) $F(s) = \dfrac{2s+1}{(s+1)(s^2+4s+6)}$

(c) $F(s) = \dfrac{2s+1}{s(s+1)^2(s^2+4s+6)}$ (d) $F(s) = \dfrac{2s+1}{s(s+1)(s^2+2s+6}$

2. Al aplicar transformada a la ecuación

$$y' + 10y = \mu(t),\ y(0) = 0$$

(a) $F(s) = \dfrac{5}{s(s+10)}$ (b) $F(s) = \dfrac{1}{s(s+10)}$ (c) $F(s) = \dfrac{10}{s+10}$ (d) $F(s) = \dfrac{10}{s(s+10)}$

End Test Correctas

ScoreField PointsField

Correctas

Begin Test Pasas con 100 %.

1. La transformada inversa de

$$\frac{s-5}{(s+3)(s-2)}$$

(a) $f(t) = \dfrac{8}{3}e^{-3t} - \dfrac{1}{5}e^{2t}$ (b) $f(t) = \dfrac{8}{3}e^{-3t} + \dfrac{3}{5}e^{2t}$

(c) $f(t) = \dfrac{4}{3}e^{-3t} - \dfrac{3}{5}e^{2t}$ (d) $f(t) = \dfrac{8}{3}e^{-3t} - \dfrac{3}{5}e^{2t}$

2. Al aplicar transformada a la ecuación

$$y'' + 5y' + 4y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$$

(a) $F(s) = \dfrac{s}{s^2+5s+4}$ (b) $F(s) = \dfrac{s+5}{s^2+5s+4}$

(c) $F(s) = \dfrac{s+5}{s^2+s+4}$ (d) $F(s) = \dfrac{s+5}{s^2+5s+8}$

End Test Correctas

ScoreField PointsField

Correctas

2.6 Problemas Resueltos

Problema 2.1 Resolver la ecuación $y'' - y = 1$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
Se aplica transformada en ambos miembros de la ecuación para tener

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}[y''] - \mathscr{L}[y] &= L[1] \\
s^2\,\mathscr{L}[y] - s\,f(0^+) - f'(0^+) - \mathscr{L}[y] &= \frac{1}{s} \\
s^2\,\mathscr{L}[y] - \mathscr{L}[y] &= 1 + \frac{1}{s} = \frac{1+s}{s(s^2-1)} \\
&= \frac{1}{s(s-1)} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}
\end{aligned}$$

Ahora, aplicando transformada inversa obtenemos

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{s-1}] - \mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{s}] \Longrightarrow y(t) = e^t - 1$$

Problema 2.2 Usar transformada de Laplace para resolver la ecuación

$$y''' - y'' + 2y = 6, \qquad y(0) = y'(0) = 0,\ y''(0) = 3$$

Se aplica transformada en ambos lados de la ecuación

$$L[y'''] - L[y''] + 2L[y] = L[6] \Longrightarrow s^3L[y] - 3 - s^2L[y] + 2L[y] = L[6]$$

Se sabe que $L[1] = \frac{1}{s}$, por tanto, despejando $L[y]$ se tiene

$$L[y] = \frac{3s+6}{s(s+1)(s^2-2s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{cs+d}{s^2-2s+2}$$

Tienes que obtener

$$A = 3, \quad B = -\frac{3}{5}, \quad c = -\frac{12}{5}, \quad d = \frac{21}{5}$$

Por tanto,

$$y = 3L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - \frac{3}{5}L^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] - \frac{3}{5}L^{-1}\left[\frac{4s-7}{s^2-2s+2}\right]$$

las dos primeras inversas son sencillas

$$y = 3 - \frac{3}{5}e^{-t} - \frac{3}{5}L^{-1}\left[\frac{4(s-1)-3}{(s-1)^2+1}\right]$$

Observa el desplazamiento.

$$y = 3 - \frac{3}{5}e^{-t} - \frac{12}{5}L^{-1}\left[\frac{s-1}{(s-1)^2+1}\right] + \frac{9}{5}L^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^2+1}\right]$$

Ahora estamos listos

$$y = 3 - \frac{3}{5}e^{-t} - \frac{12}{5}e^t\,\cos t + \frac{9}{5}e^t\,\operatorname{sen} t$$

para los más "exigentes" esto se puede escribir

$$y = \frac{3}{5}\left[5 - e^{-t} + 3e^t\,\operatorname{sen} t - 4e^t\,\cos t\right]$$

Problema 2.3 Resolver $8x^2y'' + 2xy' + y = 0$
Esta es una ecuación de Euler.

$$y = x^k \Longrightarrow 8x^2k(k-1)x^{k-2} + 2xk\,k^{k-1} + x^k = 0 \Longrightarrow 8k(k-1) + 2k + 1 = 0$$

al resolver la ecuación en k se obtienen, $k = \frac{1}{2}$ y $k = \frac{1}{4}$. Por tanto, la solución general es

$$y = C_1\,x^{1/4} + C_2\,x^{1/2}$$

Problema 2.4 Resolver $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = e^{2x} + 2e^x + 3e^{-x}$
Cambiamos a operadores.

$$(D-1)(D-2)^2[y] = e^{2x} + 2e^x + 3e^{-x}$$

Aplicamos aniquiladores, en este caso $(D-2)(D-1)(D+1)$. Luego,

$$(D-1)^2(D-2)^3(D+1)[y] = 0 \Longrightarrow y = C_1\,e^{-t} + C_2\,e^t + C_3\,t\,e^t + C_4\,e^{2t} + C_5\,t\,e^{2t} + C_6\,t^2\,e^{2t}$$

Pero aquí está la solución de la homogénea, que es

$$y_h = C_2\,e^t + C_4\,e^{2t} + C_5\,t\,e^{2t}$$

Nos queda calcular las otras constantes

$$(D-1)(D-2)^2\,[C_1\,e^{-t} + C_3\,t\,e^t + C_6\,t^2\,e^{2t}] = e^{2t} + 2\,e^t + 3\,e^{-t}$$

Después de batallar arduamente, debieras obtener

$$C_1 = -\frac{1}{6}, \quad C_3 = 2, \quad C_6 = \frac{1}{2}$$

La solución general es

$$y(t) = -\frac{1}{6}\,e^{-t} + C_2\,e^t + 2\,t\,e^t + C_4\,e^{2t} + C_5\,t\,e^{2t} + \frac{1}{2}\,t^2\,e^{2t}$$

Ahora, si la quieres separada en homogéna más particular

$$y(t) = \left(C_2\,e^t + C_4\,e^{2t} + C_5\,t\,e^{2t}\right) + \left(2\,t\,e^t + \frac{1}{2}\,t^2\,e^{2t} - \frac{1}{6}\,e^{-t}\right)$$

Problema 2.5 Hallar la transformada inversa de $\dfrac{2s+3}{s^2-4s+20}$
Escribimos lo siguiente

$$\frac{2s+3}{s^2-4s+20} = \frac{2(s-2)}{(s-2)^2+16} + \frac{7}{(s-2)^2+16}$$

Con ello nos damos cuenta que aparecen las transformadas de las funciones seno y coseno, desplazadas.
En consecuencia

$$L^{-1}\left[\frac{2s+3}{s^2-4s+20}\right] = 2e^{2t}\,\cos 4t + \frac{7}{4}\,e^{2t}\,\operatorname{sen} 4t = f(t)$$

Problema 2.6 Hallar transformada inversa de $\dfrac{1}{s(s^2+1)}$

Un primer método para resolver es usando fracciones parciales:

$$\begin{aligned}\frac{1}{s(s^2+1)} &= \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}\\ \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+1)}\right] &= \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right]\\ \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+1)}\right] &= 1-\cos t\end{aligned}$$

Convolución. Para usar la convolución escribimos lo que sigue

$$\frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s^2+1} = F_1(s)\cdot F_2(s)$$

Ahora,

$$\begin{aligned}F_1(s) &= \frac{1}{s} \Longrightarrow f(t)=1\\ F_2(s) &= \frac{1}{s^2+1} \Longrightarrow g(t) = \operatorname{sen} t\end{aligned}$$

En consecuencia

$$\mathscr{L}[f(t)*g(t)] = \frac{1}{s(s^2+1)} \Longrightarrow f(t)*g(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+1)}\right]$$

Esto significa que la transformada inversa la podemos hallar por convolución. Tenemos.

$$\begin{aligned}L^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+1)}\right] &= \int_0^t 1\cdot\operatorname{sen}(t-x)\,dx = \cos(t-x)\big]_0^t\\ &= 1-\cos t\end{aligned}$$

Problema 2.7 Usar transformada de Laplace para resolver la ecuación

$$x''+x = \begin{cases} 3, & 0\le t\le 4\\ 2t-5, & t>4\end{cases}, \qquad x'(0)=0,\ x(0)=1$$

En términos del escalón, la ecuación diferencial es

$$x''+x = 3\mu(t)+2(t-4)\mu(t-4)$$

así como se ve, está ¡espectacular! Al tomar transformada se tiene

$$L[x'']+L[x] = L[f(t)],\quad f(t) = 3\mu(t)+2(t-4)\mu(t-4)$$

Sea sabe que,

$$\begin{aligned}L[x''] &= s^2L[x]-sx(0)-x'(0) = s^2L[x]-s\\ f(t) &= \mu(t-a)g(t-a) \Longrightarrow L[f(t)] = e^{-as}L[g(t)]\end{aligned}$$

al mirar esto tenemos que

$$L[\mu(t-4)\,(t-4)] = \frac{1}{s^2}e^{-4s}$$

Luego, la ecuación, en términos de transformadas es

$$(s^2+1)L[x] = s + \frac{3}{s} + \frac{2}{s^2}\, e^{-4s}$$

al despejar la transformada

$$L[x] = \frac{s}{s^2+1} + \frac{3}{s(s^2+1)} + \frac{2}{s^2(s^2+1)}\, e^{-4s}$$

¿Tienes tu tabla de transformadas a mano? Por favor, mira si está bien lo que saco

$$x(t) = \cos t + 3\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}\right) + 2\,e^{-4s}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1}\right)$$

¿viste las fracciones parciales?

$$x(t) = \cos t + 3\,\mu(t) - 3\,\cos t + 2(t-4)\mu(t-4) - 2\mu(t-4)\ \mathrm{sen}(t-4)$$

al reducir términos semejantes

$$x(t) = 3 - 2\,\cos t + 3\,\mu(t) + 2\,\mu(t-4)\,[t-4-\mathrm{sen}(t-4)]$$

Problema 2.8 Una cuerda es de un material tal que es alargada 6 pulgadas por un peso de 12 libras. El peso de 12 libras es jalado 3 pulgadas hacia abajo del punto de equilibrio y entonces es soltado. Si sobre la cuerda está actuando una fuerza de magnitud $9\,sen(4t)$ libras, describir el movimiento, suponiendo, además, que la fuerza actúa hacia abajo para t pequeña.
La ley de Hooke no puede fallar.

$$F = kx \Longrightarrow 12 = k\cdot\frac{1}{2} \Longrightarrow k = 24$$

Por otra parte, $m = \frac{P}{g}$, $g = 32$ implica $m = \frac{3}{8}$. La ecuación que gobierna este asunto de resortes es

$$mx'' + kx = 9\ \mathrm{sen}(4t) \Longrightarrow x(t) = \frac{3}{8}x'' + 24x = 9\ \mathrm{sen}(4t)$$

¡fuera denominadores!

$$x'' + 64x = 24\ \mathrm{sen}(4t), \quad x(0) = \frac{1}{4},\ x'(0) = 0$$

En operadores se ve más linda la ecuación

$$(D^2+64)[x] = 24\ \mathrm{sen}(4t) \Longrightarrow x_H(t) = C_1\ \cos(8t) + C_2\ \mathrm{sen}(8t)$$

Como el aniquilador de $\mathrm{sen}(4t)$ es (D^2+16), entonces agregamos

$$C_3\ \cos(4t) + C_4\ \mathrm{sen}(4t)$$

Vamos por las constantes

$$(D^2+64)\,(C_3\ \cos(4t) + C_4\ \mathrm{sen}(4t)) = 24\ \mathrm{sen}(4t) \Longrightarrow C_3 = 0, \quad C_4 = \frac{1}{2}$$

Por tanto,

$$x(t) = C_1 \cos(8t) + C_2 \operatorname{sen}(8t) + \frac{1}{2} \operatorname{sen}(4t)$$

como $x(0) = 0$, entonces $C_1 = \frac{1}{4}$. Para hallar C_2 hay que derivar y usar la condición inicial

$$x'(t) = -8C_1 \operatorname{sen}(8t) + 8C_2 \cos(8t) + 2\cos(4t)$$

dado que $x'(0) = 0$, entonces $8C_2 + 2 = 0$ nos dice que $C_2 = -\frac{1}{4}$. En consecuencia,

$$x(t) = \frac{1}{4}\cos(8t) - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(8t) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(4t)$$

Problema 2.9 Resolver por variación de parámetros la ecuación

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 48\,x\,e^x$$

Pasamos a operadores

$$(D^3 - 3D^2 + 3D - 1)\,y = 48\,x\,e^x \Longrightarrow (D-1)^3\,y = 48\,x\,e^x$$

Con esto sacamos la solución de la homogénea

$$y_h = C_1\,e^x + C_2\,x\,e^x + C_3\,x^2\,e^x$$

Ahora hacemos variación de parámetros

$$\begin{cases} C_1{}'e^x + C_2{}'\,x\,e^x + C_3{}'\,x^2\,e^x = 0 \\ C_1{}'e^x + C_2{}'(e^x + x\,e^x) + C_3{}'\,(2x\,e^x + x^2\,e^x) = 0 \\ C_1{}'e^x + C_2{}'(2e^x + x\,e^x) + C_3{}'\,(4x\,e^x + x^2\,e^x + 2e^x) = 48\,x\,e^x \end{cases}$$

que equivale a

$$\begin{cases} C_1{}' + C_2{}'\,x + C_3{}'\,x^2 = 0 \\ C_1{}' + C_2{}'(1+x) + C_3{}'\,(2x + x^2) = 0 \\ C_1{}' + C_2{}'(2+x) + C_3{}'\,(4x + x^2 + 2) = 48\,x \end{cases}$$

Se resta, a la segunda ecuación, la primera, y a la tercera la segunda. El sistema se reduce

$$\begin{cases} C_2{}' + 2x'C_3{}' = 0 \\ C_2{}' + 2xC_3 + 2C_3{}' = 48\,x \end{cases}$$

Este sistema de 2×2 es muy simple para tus conocimientos avanzados de matemática. Al restar el segundo del primero, reemplazar C_2 y calcular C_1 debes hallar:

$$C_3 = 12x^2 + \overline{C}_3, \qquad C_2 = -16x^3 + \overline{C}_2, \quad C_1 = 6x^4 + \overline{C}_1$$

En consecuencia la solución general es

$$y = \left[(6x^4 + \overline{C}_1) + (\overline{C}_2 - 16x^3)\,x + (12x^2 + \overline{C}_3)\,x^2\right]\,e^x$$

O bien

$$y = \left[\overline{C}_1 + \overline{C}_2\,x + \overline{C}_3)\,x^2 + 2x^4\right]\,e^x$$

Problema 2.10 Se sabe que $y = x$ es una solución de la ecuación homogénea asociada:

$$(x^2-1)y''-2xy'-ay=(x^2-1)^2$$

1. Determine el valor de la constante a.
2. Obtenga la segunda solución, y_h, de la ecuación homogénea asociada.
3. Determine la solución particular y_p de la ecuación no homogénea.

a) Para determinar la constante a tenemos:

$$y=x \Longrightarrow y'=1,\ y''=0$$

Se reemplaza en la ecuación y se obtiene $a=-2$.

b) Si $a=-2$, entonces la ecuación homogénea es

$$(x^2-1)y''-2xy'+2y=0$$

Ahora usamos el teorema de Abel, pues se conoce una solución ($y=x$). Normalizamos la ecuación

$$y''-\frac{2x}{x^2-1}y'+\frac{2}{x^2-1}y=0$$

Se observa que $p(x)=-\dfrac{2x}{x^2-1}$, $q(x)=\dfrac{2}{x^2-1}$. Luego

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1\int\frac{e^{-\int p(x)\,dx}}{y_1^2}\,dx = x\int\frac{e^{-\int\frac{-2x}{x^2-1}\,dx}}{x^2}\,dx \\ &= x\int\frac{e^{\ln(x^2-1)}}{x^2}\,dx = x\int\frac{x^2-1}{x^2}\,dx = x^2+1 \end{aligned}$$

c) Se tiene que la solución de la homogénea es

$$y_h = C_1x + C_2(1+x^2)$$

Hacemos variación de parámetros para hallar la solución particular

$$\begin{cases} {C_1}'(x)x+{C_2}'(x)(1+x^2)=0 \\ {C_1}'(x)+2x{C_2}'(x)=\dfrac{\cancel{(x^2-1)^2}}{\cancel{x^2-1}}=x^2-1 \end{cases}$$

Al multiplicar por $-x$ la segunda ecuación y sumar se tiene

$${C_2}'(x)=x \Longrightarrow C_1(x)=\frac{x^2}{2}$$

Al reemplazar $C_2'(x)$ en la primera ecuación

$${C_1}'(x)=-1-x^2 \Longrightarrow C_1(x)=-x-\frac{x^3}{3}$$

En consecuencia, la solución particular es

$$y_p=-\left(x+\frac{x^3}{3}\right)x+\frac{x^2}{2}(1+x^2)$$

Problema 2.11 Dada la ecuación $4y''' + 33y' - 37y = 0$ con $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = 3$:

1. Escribir la ecuación factorizada en operadores
2. Escribir la solución general de la ecuación homogénea.
3. Escribir la solución que satisface las condiciones indicadas.

a) En operadores la ecuación tiene la forma $(4D^3 + 33D - 37)[y] = 0$. Factorizada es

$$(D-1)(D^2 + D + \frac{37}{4})[y] = 0$$

La cuadrática es irreductible, con raíces complejas; $D = -\frac{1}{2} \pm 3i$

b) La solución general, considerando que $a = -\frac{1}{2}$ y $b = 3$ es

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-1/2x} \cos 3x + C_3 e^{-1/2x} \operatorname{sen} 3x$$

c) Para las condiciones iniciales, obtenemos en primer lugar las derivadas de y.

$$\begin{aligned}
y &= C_1 e^x + C_2 e^{-1/2x} \cos 3x + C_3 e^{-1/2x} \operatorname{sen} 3x \\
y' &= C_1 e^x - \frac{1}{2} C_2 e^{-1/2x} \cos 3x - 3C_2 e^{-1/2x} \operatorname{sen} 3x - \frac{1}{2} C_3 e^{-1/2x} \operatorname{sen} 3x + 3C_3 e^{-1/2x} \cos 3x \\
y'' &= C_1 e^x + \frac{1}{4} C_2 e^{-1/2x} \cos 3x + \frac{3}{2} C_2 e^{-1/2x} \operatorname{sen} 3x + \frac{3}{2} C_2 e^{-1/2x} \operatorname{sen} 3x - 9C_2 e^{-1/2x} \cos 3x \\
&+ \frac{1}{4} C_3 e^{-1/2x} \operatorname{sen} 3x - \frac{3}{2} C_3 e^{-1/2x} \cos 3x - \frac{3}{2} C_3 e^{-1/2x} \cos 3x - 9C_3 e^{-1/2x} \operatorname{sen} 3x
\end{aligned}$$

Aplicando condiciones iniciales

$$\begin{cases}
y(0) = 0 \longrightarrow C_1 + C_2 = 0 \\
y'(0) = -1 \longrightarrow C_1 - \frac{1}{2} C_2 + 3C_3 = -1 \\
y'(0) = 3 \longrightarrow C_1 + \frac{1}{4} C_2 - 9C_2 - \frac{3}{2} C_3 = 3
\end{cases}$$

Al resolver; $C_1 = \frac{1}{7}$, $C_2 = -\frac{1}{7}$, $C_3 = -\frac{17}{42}$

Problema 2.12 Hallar $f(t)$ si $\mathscr{L}[f(t)] = \dfrac{s^2 + 2s + 5}{(s+3)(s+5)^2}$

Escribimos en fracción parciales

$$\frac{s^2 + 2s + 5}{(s+3)(s+5)^2} = \frac{A}{s+3} + \frac{B}{s+5} + \frac{C}{(s+5)^2}$$

Al resolver, $A = 2,\ B = -1, C = -10$. Se tiene

$$\frac{s^2 + 2s + 5}{(s+3)(s+5)^2} = \frac{2}{s+3} - \frac{1}{s+5} - \frac{10}{(s+5)^2}$$

Usando transformada inversa de Laplace

$$f(t) = 2e^{-3t} - 5e^{-5t} - 10te^{-5t}$$

Problema 2.13 Resolver usando Transformada de Laplace la ecuación $y'' + 9y = \frac{3}{2} \operatorname{sen} 2t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$. No es necesario calcular las constantes en fracciones parciales.

Aplicamos transformada en ambos lados de la ecuación

$$s^2F(s)+9F(s)=\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{s^2+4}$$

Se despeja $F(s)$

$$F(s)=\frac{3}{(s^2+4)(s^2+9)}$$

Hacemos uso de fracciones parciales.

$$\frac{3}{(s^2+4)(s^2+9)}=\frac{As+B}{s^2+4}+\frac{Cs+D}{s^2+9}$$

Al separar

$$\frac{3}{(s^2+4)(s^2+9)}=\frac{As}{s^2+4}+\frac{B}{s^2+4}+\frac{Cs}{s^2+9}+\frac{D}{s^2+9}$$

Ahora estamos en condiciones de aplicar transformada inversa

$$f(t)=A\cos 2t+\frac{B}{2}\operatorname{sen} 2t+C\cos 3t+\frac{1}{3}\operatorname{sen} 3t$$

Problema 2.14

Considerar la ecuación $y'''-y''-4y'+4y=2x^2-4x-1+2x^2e^{2x}+5xe^{2x}+e^{2x}$

1. Hallar la solución de la homogénea y_h.
2. Escribir el aniquilador de la parte no homogénea de la ecuación.

a) Escribimos la ecuación homogénea en operadores

$$(D^3-D^2-4D+4)[y]=0\Longrightarrow(D-1)(D-2)(D+2)[y]=0$$

La solución de la homogénea es

$$y_h=C_1e^x+C_2e^{2x}+C_3e^{-2x}$$

b) El aniquilador de $2x^2-4x-1+2x^2e^{2x}+5xe^{2x}+e^{2x}$ es

$$D^3(D-2)^3$$

El D^3 aniquila $2x^2-4x-1$ y $(D-2)^3$ aniquila $2x^2e^{2x}+5xe^{2x}+e^{2x}$

Problema 2.15 Las raíces de la ecuación característica de cierta ecuación diferencial homogénea de orden 10, con coeficientes constantes, son:

$$4,4,4,4,2+3i,2-3i,2+3i,2-3i,2+3i,2-3i$$

Escriba la solución general.

Se observa que la raíz $D=4$ tiene multiplicidad 4, de manera que $e^{4t}(C_1+C_2t+C_3t^2+C_4t^3)$ forma parte de la solución. La raíz $D=2+3i$ tiene multiplicidad 3, aquí $a=2$ y $b=3$. Esto permite afirmar que $e^{2t}\cos(3t)(C_5+C_6t+C_7t^2)$ también es parte de la solución general. Además, al estar las raíces $D=2-3i$, conjugada de la anterior, hace que tambíen estén en la solución general $e^{2t}\operatorname{sen}(3t)(C_8+C_9t+C_{10}t^2)$.

La solución general es

$$y(t)=e^{4t}(C_1+C_2t+C_3t^2+C_4t^3)+e^{2t}\cos(3t)(C_5+C_6t+C_7t^2)+e^{2t}\operatorname{sen}(3t)(C_8+C_9t+C_{10}t^2)$$

Problema 2.16 Usar transformada de Laplace para resolver la ecuación

$$y''' - y'' + 2y = 6, \qquad y(0) = y'(0) = 0,\ y''(0) = 3$$

No olvidar que L es un operador lineal. Se aplica en ambos lados.

$$L[y'''] - L[y''] + 2L[y] = L[6] \Longrightarrow s^3L[y] - 3 - s^2L[y] + 2L[y] = L[6]$$

Se sabe que $L[6] = \frac{6}{s}$, por tanto, despejando $L[y]$ se tiene

$$L[y] = \frac{3s+6}{s(s+1)(s^2-2s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{cs+d}{s^2-2s+2}$$

Se halla que

$$A = 3, \quad B = -\frac{3}{5}, \quad c = -\frac{12}{5}, \quad d = \frac{21}{5}$$

Por tanto,

$$y = 3L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - \frac{3}{5}L^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] - \frac{3}{5}L^{-1}\left[\frac{4s-7}{s^2-2s+2}\right]$$

las dos primeras inversas son sencillas

$$y = 3 - \frac{3}{5}e^{-t} - \frac{3}{5}L^{-1}\left[\frac{4(s-1)-3}{(s-1)^2+1}\right]$$

Se observa un desplazamiento

$$y = 3 - \frac{3}{5}e^{-t} - \frac{12}{5}L^{-1}\left[\frac{s-1}{(s-1)^2+1}\right] + \frac{9}{5}L^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^2+1}\right]$$

Ahora estamos listos

$$y = 3 - \frac{3}{5}e^{-t} - \frac{12}{5}e^t\cos t + \frac{9}{5}e^t\operatorname{sen} t$$

Esto se puede escribir

$$y = \frac{3}{5}\left[5 - e^{-t} + 3e^t\operatorname{sen} t - 4e^t\cos t\right]$$

2.7 Problemas propuestos

Problema 2.17 Escribir en operadores:

1. $y'' + y = x^2 + xe^{2x} + 3$ — Resp. $(D^2+1)[y]$
2. $x^3y''' + xy' = 0$ — Resp. $(x^3D^3 + xD)[y] = 0$

Problema 2.18 Resolver las ecuaciones:

1. $y'' - 3y' + 2y = 0$ — Resp. $y = C_1e^x + C_2e^{2x}$
2. $y^{(4)} + 4y'' + 4y = 0$ — Resp. $y = C_1\operatorname{sen} x\sqrt{2} + c_2x\operatorname{sen} x\sqrt{2} + C_3\cos x\sqrt{2} + C_4x\cos x\sqrt{2}$
3. $y''' - y' = 0$ — Resp. $y = C_1 + C_2e^{-x} + C_3e^x$
4. $y'' + 4y' + 5y = 0$ hfill Resp. $y = C_1e^{-2x}\operatorname{sen} x + C_2e^{-2x}\cos x$
5. $y'' + 2y = 0$ — Resp. $y = C_1\operatorname{sen} x\sqrt{2} + C_2\cos x\sqrt{2}$
6. $y''' + y'' + y' + y = 0$ — Resp. $y = c_1e^{-x} + c_2\cos x + c_3\operatorname{sen} x$

Problema 2.19 Hallar el operador aniquilador de:

1. $e^x + 2xe^x - x^2e^x$ Resp. $(D-1)^3$
2. $3 + e^x \cos 2x$ Resp. $D(D^2 - 2D + 5)$
3. $13x + 9x^2 - \operatorname{sen} 4x$ Resp. $D^3(D^2 + 16)$.
4. $(2 - e^x)^2$ Resp. $D(D-1)(D-2)$

Problema 2.20 Resolver:

1. $y'' - 4y = 2e^{3x}$ Resp. $y(x) = \frac{2}{5}e^{3x} + C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}$
2. $y'' + 5y' + 4y = 3x + 2$ Resp. $y(x) = C_1e^{-4x} + C_2e^{-x} + \frac{3}{4}x - \frac{7}{16}$
3. $y'' + 25y = 20 \operatorname{sen} 5x$ Resp. $y(x) = y_h + y_p = C_1 \cos 5x + C_2 \operatorname{sen} 5x - 2\cos 5x$
4. $y'' + 4y = \cos^2 x$ Resp. $y = \frac{11}{8} + C_2 \cos 2x + C_3 \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{8}x \operatorname{sen} 2x)$

Problema 2.21 Resolver por variación de parámetros

1. $y'' + 3y' + 2y = \operatorname{sen}(e^x)$. Resp. $y(x) = y_h + y_p = C_1e^{-2x} + C_2e^{-x} - e^{-2x}\operatorname{sen}(e^x)$
2. $y''' + 3y'' + 2y' = -e^{-x}$. Resp. $y = C_1 + C_2\, e^{-x} + C_3\, e^{-2x} + x\, e^{-x}$
3. $y'' + 2y' + y = e^{-x}\ln x$ Resp. $y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + \frac{x^2}{2}e^{-x}\ln x - \frac{3}{4}x^2e^{-x}$

Problema 2.22 Resolver las siguientes ecuaciones de Euler.

1. $x^2y'' + \frac{5}{2}xy' - y = 0$, usando $y = x^k$ Resp. $y = C_1\, x^{\frac{1}{2}} + C_2\, x^{-2}$
2. $x^2y'' + xy' - y = 0,\ x \neq 0$, usando $x = e^t$. Resp. $y(x) = C_1x + C_2x^{-1}$

Problema 2.23 Hallar la solución general de las ecuaciones:

1. $x^2y'' - xy' + y = 0$ Resp. $y = C_1\, x + C_2\, x \ln x$
2. $x^2y'' - xy' + y = 4x\ln x$ Resp. $y = y_h + y_p = C_1x + C_2x\ln x + \frac{2}{3}x\ln^3 x$

Problema 2.24 Resolver la ecuación diferencial:

1. $xy'' - 2y' = x$ Resp. $y(x) = -\frac{x^2}{2} + C_1\frac{x^3}{3} + C_2$, usa $y' = z$
2. $xy''' - 2y'' = 0$ Resp. $y(x) = C_x^4 + C_2x + C_3$, usa $y'' = z$

Problema 2.25 Resolver las siguientes ecuaciones homogéneas:

1. $y''' - 4y'' + 5y' = 0$
2. $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$

Problema 2.26 Resolver el problema de valor inicial

$$y''' + 12y'' + 36y' = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = -7$$

Resp. $y = c_1 + c_2e^{-6x} + c_3xe^{-6x}\ c_1 = c_2 = \frac{5}{36},\ c_3 = \frac{1}{6}$

Problema 2.27 Resolver las siguientes ecuaciones no homogéneas:

1. $y'' + y = \cos^2 x$ Resp. $y = y_h + y_p = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + 13\cos 4x + \operatorname{sen} 2x - 13 \operatorname{sen} 4x$
2. $y'' + y' + y = x \operatorname{sen} x$ Resp. $y_p = \operatorname{sen} x + 2\cos x - x\cos x$
3. $y'' + 2y' - 8y = 2e^{-2x} - e^{-x}$ Resp. $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-4x} - 14e^{-2x} + 19e^{-x}$

Problema 2.28 Resolver $x^2y'' - xy' - 3y = -\frac{\ln x}{x}$ como sigue:

1. Hallar la solución de la homogénea (Euler)
2. Normalizar la ecuación dividiendo por x^2
3. Usar variación de parámetros con $g(x) = -\dfrac{\ln x}{x^3}$. Resp. $x > 0 \Longrightarrow y_h = C_1x^3 + C_2\frac{1}{x}$

Problema 2.29 Hallar segunda solución de:

1. $x^2y'' - 7xy' + 16y = 0$ si $y_1 = x^4$ es solución. Resp $y_2 = x^4 \ln|x|$

2. $x^2y'' + 2xy' - 6y = 0$ si $y_1 = x^2$ es solución. Resp. $y_2 = -\frac{1}{5x^3}$

Problema 2.30 Resolver las siguientes ecuaciones:

1. $y^{(4)} + y''' + y'' = 0$. Resp. $y = c_1 + c_2x + e^{-x/2}\left(c_3 \cos x\frac{\sqrt{3}}{2} + c_4 \operatorname{sen} x\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
2. $y'' - 4y' + 8y = 0$. Resp. $y = c_1e^{2x}\cos 2x + c_2e^{2x}\operatorname{sen} 2x$

Problema 2.31 Resolver los problemas de valor inicial:

1. $y''' + 12y'' + 36y' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = -7$. Resp. $y = \dfrac{5}{36} - \dfrac{5}{36}e^{-6x} + \dfrac{1}{6}xe^{-6x}$
2. $y'' - y = 18e^{-2x}$, $y(0) = 8$, $y'(0) = -7$. Resp. $y = 3e^{-2x} + 2e^x + 3e^{-x}$

Problema 2.32 Resolver las siguientes ecuaciones:

1. $y'' + 3y' + 2y = 5\operatorname{sen} 2x$. Resp. $y = -\frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x - \frac{3}{4}\cos 2x + C_1e^x + C_2e^{-2x}$
2. $(D^2 - 2D + 1)y = x^{-5}e^x$. Resp. $y = C_1e^x + C_2xe^x + \frac{1}{12}x^{-3}e^x$

Problema 2.33 Resolver las ecuaciones de Euler:

1. $x^2y'' - xy' + 2y = x\ln x$. Resp. $y = C_1x\cos(\ln x) + C_2x\operatorname{sen}(\ln x) + x\ln x$
2. $(x-1)^3y''' + 2(x-1)^2y'' - 4(x-1)y' + 4y = 4\ln(x-1)$.

   Resp. $y = C_1(x-1) + C_2(x-1)^{-2} + C_3(x-1)^2 + 1 + \ln(x-1)$

Problema 2.34 Calcular las siguientes transformadas:

1. $\mathscr{L}[t^2e^{3t}]$. Resp. $\frac{4}{(s+2)^2+16}$
2. $g(t) = \begin{cases} (t-2)^2 & ,\text{si } t > 2 \\ 0 & ,\text{si } t < 2 \end{cases}$. Resp. $\mathscr{L}[g(t)] = \frac{6}{s^4}e^{-2s}$

Problema 2.35 Hallar transformada inversa de:

1. $F(s) = \dfrac{8s^2 - 7s + 6}{s^2(s-2)}$. Resp. $y(t) = 2 - 3t + 6e^{2t}$
2. $F(s) = \dfrac{s^2 + 3s - 7}{(s+3)(s+4)(s-1)}$. Resp. $y(t) = \frac{7}{4}e^{-3t} - \frac{3}{5}e^{-4t} - \frac{3}{20}e^t$
3. $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s}{s^2+4}\right]$ Resp. $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s}{s^2+4}\right] \Longrightarrow ft) = \cos 2t$
4. $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{7s-1}{(s+1)(s+2)(s-3)}\right]$ Resp. $Ae^{-t} + Be^{-2t} + Ce^{3t}$
5. $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2+7}\right]$ Resp. $\frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{sen} t\sqrt{7}$
6. $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{2s^2+10s}{(s+1)(s^2-2s+5)}\right]$ Resp. $Ae^{-t} + Be^t\cos 2t + \frac{B+C}{2}e^t\operatorname{sen} 2t$

7. $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{-2s+6}{s^2+4}\right]$ Resp. $-2\cos 2t+3\operatorname{sen} 2t$

8. $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s+3}{(s-2)(s+1)}\right]$ Resp. $\frac{5}{3}e^{2t}-\frac{2}{3}e^{-t}$

9. $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s+4}{s^2+4s+8}\right]$ Resp. $e^{-2t}\cos 2t+e^{-2t}\operatorname{sen} 2t$

Problema 2.36 Resolver las siguientes ecuaciones usando transformada de Laplace:

1. $y'''+4y''+5y'+2y=10\cos t$, $y(0)=y'(0)=0$, $y''(0)=3$.

   Resp. $y(t)=-e^{-2t}+2e^{-t}-2te^{-t}-\cos t+2\operatorname{sen} t$
2. $y''+y=4\delta(t-2\pi),\ y(0)=1,\ y'(0)=0.$ Resp. $y(t)=\cos t+4\operatorname{sen} t\,\mu(t-2\pi)$
3. $y'-5y=0$, $y(0)=2$. Resp. $y(t)=2e^{5t}$
4. $y'(t)+3y(t)=0,\ t>0\ y(0)=2$ Resp. $y(t)=2-2e^{-3t}$
5. $4y''-y=1$, $y(0)=0$, $y'(0)=\frac{1}{2}$ Resp. $y=-1+e^{t/2}$
6. $y''+9y=\dfrac{3}{2}\operatorname{sen} 2t$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$ Resp. $y=\frac{3}{10}\operatorname{sen} 2t-\frac{1}{5}\operatorname{sen} 3t$

Problema 2.37 Resolver la ecuación $y''+4y'+4y=\dfrac{e^{-2x}}{x^2}$

Resp. $y(x)=C_1e^{-2x}+C_2xe^{-2x}-e^{-2x}\ln x-e^{-2x}$

Problema 2.38 Resolver las siguientes ecuaciones:

1. Resolver $y'''+y''=e^x\cos x$ Resp. $y=C_1+C_2x+C_3e^{-x}-\frac{1}{10}e^x\cos x+\frac{1}{5}e^x\operatorname{sen} x$
2. Resolver $x^3y'''-x^2y''-2xy'+6y=x^2$
3. Resolver $y''+2y'+2y=e^{-x}\cos x$ Resp. $y=C_1e^{-x}\cos x+C_2e^{-x}\operatorname{sen} x+\frac{1}{2}xe^{-x}\operatorname{sen} x$

Problema 2.39 Considerar la ecuación

$$(x^2+2x)y''+(x^2-2)y'-2(x+1)y=0$$

1. Con la sustitución $y=e^{kx}$ hallar una solución de la ecuación. Resp. $y_1=e^{-x}$
2. Encuentre la segunda solución de la ecuación. Resp. $y_2=x^2$

Problema 2.40 Dada la ecuación diferencial $xy''+2y'-xy=x$

1. Muestre que $y=x^{-1}e^x$ es una solución de la homogénea asociada.
2. Encuentre la otra solución de la homogénea.
3. Encuentre la solución particular.
4. Resuelva el problema de valor inicial formado con la ecuación diferencial dada y las condiciones iniciales $y(1)=1$, $y'(1)=1$.

3. Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

Existen muchos situaciones en que se necesita modelar fenómenos que tienen más de una variable dependiente de un mismo parámetro. Para resolver esto es necesario estudiar los sistemas de ecuaciones diferenciales.

Definición 3.0.1 Un sistema de ecuaciones diferenciales es un conjunto de una o más ecuaciones en las que aparecen una o más funciones incógnita, pero todas ellas dependiendo de una sola variable independiente.

La forma más general que tiene un sistema de ecuaciones diferenciales es la siguiente

$$\begin{cases} F_1(t,x_1,x_1',x_2,x_2',\cdots,x_n,x_n') & =0 \\ F_2(t,x_1,x_1',x_2,x_2',\cdots,x_n,x_n') & =0 \\ & \vdots \\ F_n(t,x_1,x_1',x_2,x_2',\cdots,x_n,x_n') & =0 \end{cases}$$

siendo t la variable independiente

$$x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$$

son las n funciones incógnitas a determinar. Las F_i son funciones reales de varias variables $F_i : A \subset \mathbb{R}^{2n+1} \to \mathbb{R}$, con $1 \leq i \leq n$. Se suele suponer que hay igual número de ecuaciones que de incógnitas de manera que todas las ecuaciones son independientes, es decir, ninguna puede deducirse de las demás. Si es posible despejar la primera derivada de cada una de las funciones incógnita, se tiene el sistema en la forma **normal**

$$\begin{cases} x_1'(t) & = & f_1(t,x_1,x_2,\cdots,x_n) \\ x_2'(t) & = & f_2(t,x_1,x_2,\cdots,x_n) \\ & \vdots & \\ x_n'(t) & = & f_n(t,x_1,x_2,\cdots,x_n) \end{cases} \tag{3.1}$$

donde $f_i : A \subset \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$, son funciones reales.

Reducción de un sistema a primer órden

El siguiente resultado permite dedicarse a estudiar solamente sistemas de primer órden.

Proposición 3.0.2 Todo sistema de orden superior a dos puede transformarse en uno de primer orden mediante la simple redefinición y agregado de variables.

Para que esto se pueda realizar, en el sistema se debe poder despejar las derivadas de máximo orden.

Actividad 8 Escribir el sistema dado como uno de primer órden

$$\begin{cases} x'' + 3x - y &= 0 \\ y'' - 2x + 2y &= 0 \end{cases}$$

Se despejan las derivadas de órden más alto

$$\begin{cases} x'' &= -3x + y \\ y'' &= 2x - 2y \end{cases}$$

Se introducen nuevas funciones $z_1 = x,\ z_2 = x',\ z_3 = y,\ z_4 = y'$. Se tiene que

$$\begin{cases} z_1' &= z_2 \\ z_2' &= -3z_1 + z_3 \\ z_3' &= z_4 \\ z_4' &= 2z_1 - 2z_3 \end{cases}$$

Actividad 9 Escribir el sistema

$$\begin{cases} x'' &= 2x + 3y \\ y'' &= 6x^2 + y' + 3x't^2 \end{cases}$$

en uno equivalente de primer órden

Es claro que el sistema es de segundo órden y las máximas derivadas están despejadas. Si hacemos

$$\begin{cases} x' &= x_1 \\ y' &= y_1 \\ x_1' &= 2x + y \\ y_1' &= 6x^2 + y_1 + 3x_1 t^2 \end{cases}$$

tenemos un sistema de primer órden equivalente al dado.
Por tanto, consideraremos en lo sucesivo sistemas de ecuaciones de primer orden, Además, asumimos que es posible despejar las derivadas y que el número de ecuaciones es igual al número de incógnitas.

3.0.1 Sistemas lineales de primer orden

A partir de ahora nos concentraremos en los sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden lineales, es decir, sistemas cuya forma normal (las derivadas de primer órden están despejadas) del tipo

$$\begin{cases} x_1' &= a_{11}(t)x_1 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ x_2' &= a_{21}(t)x_1 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\ \vdots &= \\ x_n' &= a_{n1}(t)x_1 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t) \end{cases}$$

El sistema anterior se dice homogéneo si $f_i(t)=0$ para $i=1,\cdots,n$, y no homogéneo en caso contrario. Este sistema puede escribirse en forma matricial

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t)+\cdots+a_{1n}(t) \\ a_{21}(t)+\cdots+a_{2n}(t) \\ \vdots \\ a_{n1}(t)+\cdots+a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

o, en forma compacta,

$$\vec{X}' = A(t)\vec{X} + \vec{F}(t) \tag{3.2}$$

El correspondiente problema de condiciones iniciales se escribe en la forma

$$\vec{X}' = A(t)\vec{X} + \vec{F}(t), \quad \vec{X}(t_0) = \vec{X}_0$$

Teorema 3.0.3 (Existencia y unicidad de soluciones)
Si las componentes de $A(t)$ y $F(t)$ son funciones continuas en un intervalo común I que contiene al punto t_0, entonces existe una única solución del problema de valor inicial.

Actividad 10 Escribir en forma matricial los sistemas:

1. $\begin{cases} x_1' &= 2x_1 - 3x_2 \\ x_2' &= x_1 - 2x_2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1' &= 2x_1 - 3x_2 + 3t \\ x_2' &= x_1 - 2x_2 - t^2 \end{cases}$

Definición 3.0.4 El vector

$$\vec{X} = (x_1(t), x_2(t), \cdots x_n(t))^T = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

es solución de (3.2) en un intervalo I si sus elementos son funciones diferenciables que la satisfacen en dicho intervalo

Ejemplo 3.0.5 Para el sistema $\vec{X}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \vec{X}$

Son soluciones:

$$\vec{X}_1(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \vec{X}_2(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$$

Verificamos para $\vec{X}_1(t)$. Se tiene:

$$\vec{X}_1'(t) = \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}$$

Por otra parte

$$A\vec{X}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}$$

Se verifica entonces la igualdad. de modo que es solución.

En el caso en que la matriz A sea constante, llamaremos a este sistema, sistema de ecuaciones diferenciales lineal con coeficientes constantes. Este es el caso que estudiamos a continuación.

3.0.2 Sistemas lineales homogéneos

Estudiamos ahora como resolver sistemas diferenciales lineales homogéneos

$$\vec{X}\,' = A(t)\vec{X} \tag{3.3}$$

La solución nula $\vec{X}(t) = 0\ \forall t \in I$ es obviamente una solución posible para cualquier sistema homogéneo y se denomina **solución trivial**.
Muchos resultados para los sistemas de ecuaciones lineales son análogos al de las ecuaciones lineales de orden n.

Teorema 3.0.6 El conjunto de todas las soluciones del sistema lineal homogéneo $\vec{X}\,' = A(t)\vec{X}$, donde $A(t)$ es continua en el intervalo abierto I, es un espacio vectorial de dimensión n, siendo n el número de ecuaciones e incógnitas del sistema.

De este teorema se deduce que cualquier solución del sistema lineal homogéneo puede expresarse como combinación lineal de las funciones de una base de soluciones.

Definición 3.0.7 El conjunto

$$\{\vec{X}_1(t), \vec{X}_2(t), \cdots, \vec{X}_n(t)\}$$

de soluciones del sistema homogéneo se denomina **sistema fundamental de soluciones**.
De esta forma, la solución general del sistema lineal homogéneo es

$$\vec{X}(t) = C_1\vec{X}_1(t) + \cdots + C_n\vec{X}_n(t)$$

donde $C_1, C_2, \cdots, C_n \in \mathbb{R}$.

Otra forma más breve de escribir la solución general, consiste en considerar el vector $\vec{C} = (C_1, C_2, \cdots, C_n)^T$ y la matriz

$$\Phi(t) = (\vec{X}_1(t) \quad |\vec{X}_2(t) \quad | \cdots |\vec{X}_n(t))$$

cuyas columnas son las soluciones del sistema fundamental. De esta forma la solución general puede escribirse en la forma

$$\vec{X}(t) = \Phi(t) \cdot \vec{C}$$

La matriz Φ se llama **matriz fundamental** del sistema.

Proposición 3.0.8 Sea $\Phi(t)$ una matriz fundamental de un sistema de primer orden lineal homogéneo. Entonces

- La matriz fundamental es invertible, $\det \Phi(t) \neq 0$, $\forall t$.
- La derivada de la matriz fundamental (que se realiza derivando individualmente las componentes de la matriz) cumple

$$\Phi'(t) = A\Phi(t)$$

Actividad 11 Verificar que $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ -e^{2t} & e^{2t} - te^{2t} \end{pmatrix}$ es una matriz fundamental del sistema

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Se debe verificar que $\Phi'(t) = A\,\Phi(t)$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Veamos si ello ocurre. Para $\Phi'(t)$ tenemos

$$\Phi'(t) = \begin{pmatrix} 2e^{2t} & e^{2t} + 2te^{2t} \\ -2e^{2t} & e^{2t} - 2te^{2t} \end{pmatrix}$$

Para $A\,\Phi(t)$ se tiene:

$$\begin{aligned} A\,\Phi(t) &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ -e^{2t} & e^{2t} - te^{2t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2e^{2t} & e^{2t} + 2te^{2t} \\ -2e^{2t} & e^{2t} - 2te^{2t} \end{pmatrix} = \Phi'(t) \end{aligned}$$

En consecuencia $\Phi(t)$ es matriz fundamental del sistema dado.

Actividad 12 Dado el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

verificar si las siguientes funciones vectoriales son solución

$$\vec{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{X}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{4t}, \quad \vec{X}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix} e^{9t}$$

Observación. Para el cálculo de la solución general de un sistema lineal homogéneo necesitamos no sólo encontrar n soluciones, sino que éstas deben formar base.

3.0.3 Método de eliminación

El método de eliminación para sistemas de ecuaciones diferenciales lineales consiste, como en el caso de ecuaciones algebraicas, en ir eliminando de manera sucesiva las incógnitas hasta llegar a una ecuación diferencial, generalmente de orden superior, con una única incógnita que habrá que revolver empleando los métodos vistos.

Actividad 13 Resolver el sistema

$$\begin{cases} x' - x + 2y &= 0 \\ 3x + y' &= 0 \end{cases}$$

Se deriva la primera ecuación

$$x'' - x' + 2y' = 0$$

Se despeja y' de la segunda ecuación y se reemplaza en la última ecuación

$$x'' - x' + 2(-3x) = 0 \Longrightarrow x'' - x' - 6x = 0$$

En operadores esta ecuación tiene la forma

$$(D^2 - D - 6)[x] = 0 \Longrightarrow (D-3)(D+2)[x] = 0$$

La solución de esta es

$$x(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-2t}$$

Para hallar el $y(t)$ despejamos, en la primera ecuación del sistema, la variable y

$$y = \frac{1}{2}(x - x')$$

Se reemplaza aquí el $x(t)$ hallado y su derivada.

$$y(t) = \frac{1}{2}(C_1 e^{3t} + C_2 e^{-2t} - 3C_1 e^{3t} + 2C_2 e^{-2t}) = \frac{1}{2}(-2C_1 e^{3t} + 3C_2 e^{-2t})$$

Se concluye que la solución general es

$$\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} C_1 e^{3t} + C_2 e^{-2t} \\ -C_1 e^{3t} + \frac{3}{2} C_2 e^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{-2t} \\ -e^{3t} & \frac{3}{2} e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

Actividad 14 Resolver el siguiente problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' &= -5x - y \\ y' &= 4x - y \end{cases}, \qquad x(1) = 0,\ y(1) = 1$$

Al derivar la primera ecuación

$$x'' = -5x' - y' \Longrightarrow x'' = -5x' - (4x - y)$$

De la primera ecuación $y = -5x - x'$. Reemplazando se llega a la ecuación

$$x'' + 6x' + 9x = 0$$

Al pasar a operadores

$$(D+3)^2[x] = 0$$

Tenemos una raíz doble, siendo la solución

$$x(t) = c_1 e^{-3t} + + c_2 t e^{-3t}$$

Para hallar la función y del sistema, la $x(t)$ recién encontrada se reemplaza en la primera ecuación, y se encuentra que

$$y(t) = -2c_1 e^{-3t} - 2c_2 t e^{-3t} - c_2 e^{-3t}$$

Aplicando condiciones iniciales, el resultado final es

$$\begin{cases} x(t) = e^{3-3t} - t e^{3-3t} \\ y(t) = -e^{3-3t} + 2t e^{3-3t} \end{cases}$$

Este procedimiento de resolución de sistemas lineales es útil si el sistema es sencillo. Para sistemas más complicados hay otros métodos que resultan más adecuados.

3.0.4 Método de valores y vectores propios

Considerando que la ecuación $x' = ax$, en donde a es una constante, tiene por solución

$$x = Ce^{at}$$

por analogía con el sistema

$$\vec{X}' = A\vec{X} \tag{3.4}$$

suponemos que tal sistema admite soluciones de tipo exponencial de la forma

$$\vec{X}(t) = e^{\lambda t}\vec{v}$$

donde λ es un número real y $\vec{v} = (v_1, v_2, \cdots, v_n)^T$ es un vector de $\mathbb{R}^n$. Si esta exponencial es solución de (3.4) se debe tener que:

$$\lambda\, e^{\lambda t}\vec{v} = A\,(e^{\lambda t}\vec{v}) = A\, e^{\lambda t}\vec{v}$$

Al simplificar se obtiene la ecuación

$$A\,\vec{v} = \lambda\,\vec{v} \tag{3.5}$$

Es decir, $\vec{X} = e^{\lambda t}\vec{v}$ es solución de (3.4) si y solo si λ y $\vec{v}$ satisfacen (3.5).

Definición 3.0.9 (Vector y valor propio)
Un vector $\vec{v} \neq \vec{0}$ que satisface (3.5) se llama **vector propio** de A con valor propio λ

Observación. λ es un valor propio de la matriz A si y solo si

$$A\,\vec{v} = \lambda\,\vec{v} \Longrightarrow A\,\vec{v} - \lambda\,\vec{v} = \vec{0}$$

La última ecuación se escribe

$$(A - \lambda\, I_n)\,\vec{v} = \vec{0} \tag{3.6}$$

Con I_n la matriz identidad $n \times n$. Esta ecuación (3.6) tiene una solución $\vec{v} \neq \vec{0}$ si y solo si $det(A - \lambda\, I) = 0$. Luego los valores propios de A son las raíces de la ecuación.

$$0 = \det(A - \lambda I_n) = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{a1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix}$$

El polinomio que aparece al resolver el determinante se llama **polinomio característico** de A, y la ecuación misma se llama **ecuación característica**.

Actividad 15 Hallar la matriz A del sistema y sus valores y vectores propios.

$$\begin{cases} x_1' &= x_1 + 3x_2 \\ x_2' &= x_1 - x_2 \end{cases}$$

Escrito matricialmente, el sistema tiene la forma

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Para tener la ecuación característica formamos el determinante

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

del cual obtenemos

$$\lambda_1 = 2, \qquad \lambda_2 = -2$$

tenemos valores propios distintos. Sus vectores propios asociados (ecuación 3.5) son:

$$\lambda = 2 \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

lo que equivale a resolver el sistema

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 & = & 2x_1 \\ x_1 - x_2 & = & 2x_2 \end{cases} \Longrightarrow x_1 = 3x_2$$

considerando $x_1 = 3$, entonces $x_2 = 1$, con lo cual, el vector propio asociado es

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Con un poco de paciencia, debieras poder calcular $\vec{v}_2$ y tener que

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Supongamos que se han calculado ya los valores y vectores propios de A, podemos encontrar las siguientes situaciones:

3.0.5 vectores propios reales distintos

Se considera el sistema lineal homogéneo de coeficientes constantes

$$\vec{X}' = A\vec{X}$$

Teorema 3.0.10 Si la matriz A tiene n valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n$, reales y distintos y si $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\cdots$, $\vec{v}_n$ son los vectores propios correspondientes a los valores propios, entonces el conjunto de funciones

$$e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1, e^{\lambda_2 t}\vec{v}_2, \cdots, e^{\lambda_n t}\vec{v}_n$$

es un conjunto fundamental de soluciones del sistema $\vec{X}' = A\vec{X}$.

La funciones son linealmente independientes, ya que al evaluarlas en el punto $t = 0$ los vectores obtenidos son linealmente independientes. Por tanto, en este caso, toda solución del sistema se puede expresar en la forma

$$\boxed{\vec{X}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t}\vec{v}_2 + \cdots + C_n e^{\lambda_n t}\vec{v}_n} \tag{3.7}$$

donde $C_1, C_2, \cdots, C_n \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 3.0.11 Escribir la solución general del sistema:

$$\begin{cases} x_1' &= x_1 + 3x_2 \\ x_2' &= x_1 - x_2 \end{cases}$$

Hemos obtenido para $\lambda_1 = 2$ el vector propio

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y para $\lambda_2 = -2$ el vector propio

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Con esto tenemos la solución general

$$\vec{X}(t) = C_1 \vec{v}_1 e^{2t} + C_2 \vec{v}_2 e^{-2t}$$

O bien,

$$\vec{X}(t) = C_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t}$$

Y también

$$\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} 3C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t} \\ C_1 e^{2t} - C_2 e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Actividad 16 Hallar las soluciones linealmente independientes, una matriz fundamental y la solución general del siguiente sistema:

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \vec{X}$$

El polinomio característico de A es

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 4 \\ 3 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

de lo cual $p(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda-3)(\lambda+2)$, de modo que los valores propios de A son $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3$ y $\lambda_3 = -2$. Hallemos los vectores propios asociados a λ_1, λ_2, λ_3:

- **Valor propio** $\lambda = 1$

$$(A - 1I)\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 4 \\ 3 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matriz se puede escalonar (sumar la primera fila a la segunda y a la tercera fila)

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La segunda fila se divide por 3, y la tercera por 2. Luego se resta a la tercera fila la segunda.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Queda por resolver

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Escribiendo lo anterior en forma de sistema

$$\begin{cases} v_1 + v_3 & = 0 \\ -v_2 + 4v_3 & = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} v_1 & = -v_3 \\ v_2 & = 4v_3 \end{cases}$$

Si se considera $v_3 = 1$, se obtiene $v_1 = -1$, $v_2 = 4$. Con lo cual el vector propio asociado a $\lambda = 1$ es

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Con esto, la primera solución tiene la forma

$$\vec{X}_1(t) = e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^t \\ 4e^t \\ e^t \end{pmatrix}$$

- **Valor propio** $\lambda = 3$

De forma análoga se obtiene:

$$\lambda = 3 \Longrightarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \vec{X}_2(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 2e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$$

- **Valor propio** $\lambda = -2$

$$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \vec{X}_3(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Las tres soluciones son linealmente independientes, esto significa que la matriz fundamental es

$$\Phi(t) = [\vec{X}_1, \vec{X}_2, \vec{X}_3] = \begin{pmatrix} -e^t & e^{-2t} & e^{3t} \\ 4e^t & -e^{-2t} & 2e^{3t} \\ e^t & -e^{-2t} & e^{3t} \end{pmatrix}$$

La solución general es

$$\begin{aligned} \vec{X}(t) &= c_1\vec{X}_1 + c_2\vec{X}_2 + c_3\vec{X}_3 \\ &= \begin{pmatrix} -c_1e^t + c_2e^{3t} - c_2e^{-2t} \\ 4c_1e^t + 2c_2e^{3t} + c_3e^{-2t} \\ c_1e^t + c_2e^{3t} + c_2e^{-2t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Actividad 17 Considerar el sistema

$$\begin{cases} x' &= x + 2y \\ y' &= 3x + 2y \end{cases}$$

1. Resolver el sistema por eliminación
2. Calcular los valores y vectores propios

La respuesta a la primera pregunta es

$$x = C_1 e^{4t} + C_2 e^{-t}, \qquad y = \frac{3}{2} C_1 e^{4t} - C_2 e^{-t}$$

Veamos ahora los valores y vectores propios:
La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Los valores propios son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 4$. Sus vectores propios son

$$\vec{v}_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \qquad \vec{v}_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Las soluciones coinciden.

3.0.6 Multiplicidad algebraica y geométrica

Definición 3.0.12

- El número de veces que un valor propio λ se repite como raíz en el polinomio característico de A, se llama **multiplicidad algebraica** de λ.
- El número máximo de vectores propios linealmente independientes que tiene asociado un valor propio λ, es decir, la dimensión del subespacio propio de λ, se llama **multiplicidad geométrica** de λ.

La dimensión de este subespacio (esto es, el número de soluciones linealmente independientes del sistema característico) es $n - rang(A - \lambda_0 I_n)$. A este número se le llama multiplicidad geométrica de λ_0 como valor propio de A. Hay tantos vectores propios linealmente independientes asociados a λ_0 como su multiplicidad geométrica.
Las dos multiplicidades están relacionadas por

$$1 \leq M_g(\lambda) \leq M_a(\lambda)$$

Observación. Si un valor propio es simple, entonces su multiplicidad algebraica es 1 y su multiplicidad geométrica es 1. Es decir,

$$\lambda \text{ simple} \Longrightarrow M_g(\lambda) = M_a(\lambda) = 1$$

Ejemplo 3.0.13 se considera la matriz $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Los valores propios son

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

se obtienen $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 3$. Es claro que su multiplicidad algebraica es 1 (aparecen con exponente 1 en el polinomio característico).

Hallemos una base de $\mathbb{R}^2$ formada con vectores propios de A.

$$\lambda_1 = 2 \Longrightarrow (A - 2I_2)\vec{v} = \vec{0} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

se forma el sistema

$$\begin{cases} 2v_1 - 2v_2 & = 0 \\ v_1 - v_2 & = 0 \end{cases} \Longrightarrow v_1 = v_2$$

Al trabajar la matriz A se observa que su rango es 1, de modo que su multiplicidad geométrica es

$$n - rang(A - \lambda I_2) = 2 - 1 = 1$$

El vector propio asociado a este valor propio es

$$\vec{v}_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Veamos que sucede con el otro valor propio.

$$\lambda_2 = 3 \Longrightarrow (A - 3I)\vec{v} = \vec{0}$$

se forma el sistema

$$\begin{cases} v_1 - 2v_2 & = 0 \\ v_1 - 2v_2 & = 0 \end{cases} \Longrightarrow v_1 = 2v_2$$

Al trabajar la matriz A se observa que su rango es 1, de manera que su multiplicidad geométrica es $2 - 1 = 1$. El vector propio asociado al valor propio es

$$\vec{v}_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Así, $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son linealmente independientes, y forman una base de $\mathbb{R}^2$ formada con vectores propios de A.

Actividad 18 En el sistema

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} 3 & -18 \\ 2 & -9 \end{pmatrix} \vec{X}$$

La ecuación característica es

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -18 \\ 2 & -9 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

de lo cual

$$(\lambda + 3)^2 = 0 \Longrightarrow \lambda = -3$$

valor propio de multiplicidad 2. Veamos el rango del subespacio propio de este valor propio

$$\begin{pmatrix} 6 & -18 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 6 & -18 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De este modo, el rango de esta matriz es 1. Se sigue que la multiplicidad geométrica es

$$m_g(\lambda) = 2 - 1 = 1$$

Así que este valor propio tiene asociado SOLO UN vector propio. Hallemos este vector propio

$$(A-3I)\vec{v} = \vec{0} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 6 & -18 \\ 2 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Al resolver $v_1 = 3v_2$. Si $v_2 = 1$, entonces $v_1 = 3$. Se tiene que el vector propio asociado es

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \vec{x}_1(t) = e^{-3t} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Debemos hallar la segunda solución linealmente independiente. De acuerdo a lo establecido,

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

Resolvemos la ecuación

$$(A - \lambda_1 I_2)\vec{w} = \vec{v} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 6 & -18 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Al resolver se obtiene el sistema

$$\begin{cases} 6w_1 - 18w_2 & = 3 \\ 2w_1 - 6w_2 & = 1 \end{cases}$$

Como una ecuación es múltiplo escalar de la otra, existen infinitas soluciones. En particular, si $w_2 = 0$, entonces $w_1 = \frac{1}{2}$. Luego

$$\vec{X}_2(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} te^{-3t} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-3t}$$

es la segunda solución del sistema lineal dado. En consecuencia, la solución general es

$$\vec{X}(t) = C_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t} + C_2 \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} te^{-3t} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-3t} \right]$$

Actividad 19 Considerar el sistema

$$\begin{cases} x' & = 7x + y \\ y' & = -4x + 3y \end{cases}$$

1. Resolver el sistema por eliminación
2. Calcular los valores y vectores propios

Al resolver por eliminación se halla que

$$x = (C_1 + C_2 t)e^{5t}, \qquad y = (C_2 - 2C_1 - 2C_2 t)e^{5t}$$

Ahora, para hallar los valores y vectores propios se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Los valores propios son $\lambda_1 = \lambda_2 = 5$. Un vector propio es

$$\vec{v}_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Un posible segundo vector propio es

$$\vec{v}_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

La solución general debe ser la misma.

Begin Test Pasas con 100 %.

1. La matriz del sistema $\begin{cases} x' &= 2x+3y \\ y' &= 2x+y \end{cases}$ tiene por valores propios:

(a) 1 y 4 (b) -1 y 4 (c) 1 y -4 (d) -1 y -4

2. Un vector propio para el valor propio $\lambda = -1$ es:

(a) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

3. Un vector propio para el valor propio $\lambda = 4$ es:

(a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

4. La solución del sistema es:

(a) $\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} C_1e^{-t}+3C_2e^{4t} \\ C_1e^{-t}+2C_2e^{4t} \end{pmatrix}$ (b) $\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} C_1e^{-t}+3C_2e^{4t} \\ -C_1e^{-t}+2C_2e^{4t} \end{pmatrix}$

(c) $\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} C_1e^{-t}-3C_2e^{4t} \\ -C_1e^{-t}+2C_2e^{4t} \end{pmatrix}$ (d) $\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} C_1e^{-t}+3C_2e^{4t} \\ r-C_1e^{-t}-2C_2e^{4t} \end{pmatrix}$

End Test Correctas

$\underbrace{\hspace{6em}}_{\text{ScoreField}}$ $\underbrace{\hspace{6em}}_{\text{PointsField}}$

Correctas

3.0.7 Valores propios repetidos

Si la matriz A tiene valores propios repetidos con multiplicidad m (raíces repetidas de la ecuación característica) entonces hay que buscar m soluciones fundamentales asociadas a dicho valor propio. Pueden ocurrir dos casos

- Si la ecuación $(A-\lambda I)\vec{v} = 0$ entrega m vectores propios, ¡NO hay problemas! Esto siempre ocurre cuando la matriz A tenga coeficientes reales y sea simétrica.
- Si la ecuación $(A-\lambda I)\vec{v} = 0$ entrega menos de m vectores propios distintos asociados a un mismo valor propio de multiplicidad m, entonces hay que calcular lo que se conocen como vectores propios generalizados. Vamos a considerar los casos de la raíz doble y triple repetidas.

Caso una raíz doble

Supongamos un sistema de dos ecuaciones diferenciales cuya ecuación característica tiene una raíz doble. Sea λ_1 un valor propio de multiplicidad dos y que solo hay un vector propio $\vec{v}$ asociado con él, entonces $\vec{X}_1(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}$ es una solución. La segunda solución es de la forma

$$\vec{X}_2 = \vec{v}\, t\, e^{\lambda_1 t} + \vec{w}\, e^{\lambda_1 t}$$

en donde

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

siendo $\vec{w}$ un vector a determinar de la ecuación

$$(A - \lambda_1 I)\vec{w} = \vec{v}$$

Veamos de donde proviene esto. Como $\vec{X}_2(t)$ es solución de la parte homogénea, debe satisfacer

$$\vec{X}_2'(t) = A\vec{X}_2(t)$$

Se tiene

$$\lambda \vec{v}\, t\, e^{\lambda t} + \vec{v}\, e^{\lambda t} + \lambda \vec{w}\, e^{\lambda t} = A(\vec{v}\, t\, e^{\lambda t} + \vec{w}\, e^{\lambda t})$$

Agrupando términos en el lado izquierdo

$$(A\vec{v} - \vec{v}\lambda) t\, e^{\lambda t} + (A\vec{w} - \vec{v} - \lambda \vec{w}) e^{\lambda t} = 0$$

Esto genera el par de ecuaciones

$$\begin{cases} (A - \lambda\, I)\vec{v} & = \vec{0} \\ (A - \lambda\, I)\vec{w} & = \vec{v} \end{cases}$$

Siendo la primer ecuación la definición del primer vector principal y la segunda ecuación la que genera a un vector linealmente independiente con respecto al primero.

Actividad 20 En el sistema

$$\vec{X}\,' = \begin{pmatrix} 3 & -18 \\ 2 & -9 \end{pmatrix} \vec{X}$$

La ecuación característica es

$$\det(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} 3 - \lambda & -18 \\ 2 & -9 - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

de lo cual

$$(\lambda + 3)^2 = 0 \Longrightarrow \lambda = -3$$

valor propio de multiplicidad 2. Hallemos su vector propio

$$(A - 3I)\vec{v} = \vec{0} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 6 & -18 \\ 2 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Al resolver $v_1 = 3v_2$. Si $v_2 = 1$, entonces $v_1 = 3$. Se tiene que el vector propio asociado es

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \vec{x}_1(t) = e^{-3t} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Debemos hallar la segunda solución linealmente independiente. De acuerdo a lo establecido,

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

Resolvemos la ecuación

$$(A - \lambda_1 I)\vec{w} = \vec{v}$$

Tenemos:

$$\left[\begin{pmatrix} 3 & -18 \\ 2 & -9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Al resolver se obtiene el sistema

$$\begin{cases} 6w_1 - 18w_2 & = 3 \\ 2w_1 - 6w_2 & = 1 \end{cases}$$

Como una ecuación es múltiplo escalar de la otra, existen infinitas soluciones. En particular, si $w_2 = 0$, entonces $w_1 = \frac{1}{2}$. Luego

$$\vec{X}_2(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} te^{-3t} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-3t}$$

es la segunda solución del sistema lineal dado. En consecuencia, la solución general es

$$\vec{X}(t) = C_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t} + C_2 \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} te^{-3t} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-3t}\right]$$

Actividad 21 Para el sistema

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Los valores propios son $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = -1$ y $\lambda_3 = -1$ (calcular). El vector propio de λ_1 es

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De lo cual se tiene

$$\vec{X}_1(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t}$$

Para $\lambda_2 = -1$ se debe resolver

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Al hacer operaciones por filas se obtiene que el rango de la matriz es 1 (sumar primera fila a la segunda y se anula, luego, a la tercera fila restar la primera y se anula). Como la matriz de coeficiente es de 3×3 y la matriz reducida del valor propio tiene rango 1 (número de filas distintas de cero), la multiplidad geométrica de este valor propio es 2, lo que nos dice que tiene asociados dos vectores propios linealmente independientes, en efecto, quedando una única ecuación a resolver

$$2v_1 - 2v_2 + 2v_3 = 0$$

podemos obtener dos vectores L.I. Si $v_3 = 0$, entonces $v_2 = v_1 = 1$. Con esto, el vector propio es:

$$\lambda_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Con $v_2 = 0$ se halla un segundo vector propio linealmente independiente al obtenido

$$\lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

La solución general es

$$\vec{X}(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

Actividad 22 Hallar valores y vectores propios, y la solución general del sistema

$$\begin{cases} x' &= 3x - y - z \\ y' &= x + y - z \\ z' &= x - y + z \end{cases}$$

Del determinante

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

se obtienen los valores propios

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 2$$

Con el valor propio $\lambda_1 = 1$ se obtiene el vector propio

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda_2 = 2$ tenemos la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Queda una sola ecuación, por tanto, tenemos los dos vectores propios

$$v_3 = 0 \Longrightarrow v_1 = v_2 \Longrightarrow \vec{v}_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = 0 \Longrightarrow v_1 = v_3 \Longrightarrow \vec{v}_{\lambda_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De esta forma, la solución generL es:

$$\vec{X}(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

3.0.8 Valores propios de multiplicidad tres

Cuando una matriz A sólo tiene un vector propio asociado con un valor λ_1 de multiplicidad tres, una tercera solución es de la forma

$$\vec{X}_3 = \frac{t^2}{2}\vec{v}e^{\lambda_1 t} + \vec{w}te^{\lambda_1 t} + \vec{z}e^{\lambda_1 t} \tag{3.8}$$

en donde

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}, \quad \vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

Ahora, el tercer vector propio se halla al resolver

$$(A - \lambda_1 I_n)\vec{z} = \vec{w}$$

Actividad 23 Resolver el sistema

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \vec{X}$$

La ecuación característica

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 6 \\ 0 & 2-\lambda & 5 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow (\lambda - 2)^3 = 0$$

Así, $\lambda_1 = 2$ es un valor propio de multiplicidad tres. Al resolver

$$\left[\begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - 2I \right] \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

se halla que

$$\begin{cases} v_2 + 6v_3 = 0 \\ 5v_3 = 0 \\ 2v_3 = 0 \end{cases}$$

de lo cual, $v_2 = v_3 = 0$ y $v_1 = v_1$. Con $v_1 = 1$ se tiene el vector propio

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vamos por el segundo vector propio resolviendo

$$(A-\lambda_1 I)\vec{w}=\vec{v}$$

Se tiene:

$$\left[\begin{pmatrix}2&1&6\\0&2&5\\0&0&2\end{pmatrix}-2I\right]\begin{pmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

de lo cual

$$\begin{cases}w_2+6w_3=1\\ \qquad 5w_3=0\end{cases}$$

se sigue que $w_3=0, w_2=1, w_1=w_1$. Así, el segundo vector propio (con $w_1=0$) es

$$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

Ahora calculamos el tercer valor propio resolviendo

$$(A-\lambda_1 I)\vec{z}=\vec{w}$$

Se tiene:

$$\left[\begin{pmatrix}2&1&6\\0&2&5\\0&0&2\end{pmatrix}-2I\right]\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

de lo cual

$$\begin{aligned}z_2+6z_3&=0\\5z_3&=1\end{aligned}$$

se sigue que $z_3=\frac{1}{5}, z_2=-\frac{6}{5}, z_1=z_1$. Así, el tercer vector propio (con $z_1=0$) es

$$\begin{pmatrix}0\\-\frac{6}{5}\\\frac{1}{5}\end{pmatrix}$$

En consecuencia la solución general es

$$\vec{X}=C_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}e^{2t}+C_2\left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}te^{2t}+\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}e^{2t}\right]+C_3\left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\frac{1}{2}t^2e^{2t}+\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}te^{2t}+\begin{pmatrix}0\\-\frac{6}{5}\\\frac{1}{5}\end{pmatrix}e^{2t}\right]$$

3.0.9 Valores propios complejos

Si $\lambda=a+bi$ es un valor propio o característico de A con vector propio asociado $\vec{v}=\vec{v}_1+i\vec{v}_2$, entonces

$$\vec{X}(t)=e^{\lambda t}\vec{v}$$

es una solución vectorial compleja de $\vec{X}\,'=A\vec{X}$.

Esta solución vectorial compleja da lugar a dos soluciones vectoriales reales; en efecto:

Proposición 3.0.14 Sea $\vec{X}(t) = \vec{X}_1(t) + i\vec{X}_2(t)$ una solución vectorial compleja de $\vec{X}\,' = A\vec{X}$, entonces $\vec{X}_1(t)$ y $\vec{X}_2(t)$ son soluciones vectoriales reales de $\vec{X}\,' = A\vec{X}$.

Demostración. Como $\vec{X}(t)$ es solución de $\vec{X}\,' = A\vec{X}$, entonces

$$\vec{X}_1{}'(t) + i\vec{X}_2{}'(t) = A\left(\vec{X}_1(t) + i\vec{X}_2(t)\right) = A\vec{X}_1(t) + iA\vec{X}_2(t)$$

igualando parte Real y parte Imaginaria:

$$\vec{X}_1{}'(t) = A\vec{X}_1(t) \quad \text{y} \quad \vec{X}_2{}'(t) = A\vec{X}_2(t)$$

Esto prueba que $\vec{X}_1(t)$ y $\vec{X}_2$ son soluciones.

3.0.10 Solución real

Si $\lambda = a+bi$ es un valor propio complejo y $\vec{v} = \vec{v}_1 + i\vec{v}_2$ es un vector propio complejo asociado a λ, entonces la solución es de la forma

$$\begin{aligned} \vec{X}(t) &= e^{(a+bi)t}\left(\vec{v}_1 + i\vec{v}_2\right) = e^{at}\left(\cos bt + i\,\mathrm{sen}\, bt\right)\left(\vec{v}_1 + i\vec{v}_2\right) \\ &= e^{at}\left[\vec{v}_1 \cos bt - \vec{v}_2\,\mathrm{sen}\, bt + i\left(\vec{v}_1\,\mathrm{sen}\, bt + \vec{v}_2 \cos bt\right)\right] \end{aligned}$$

de lo cual se halla que

$$\vec{X}_1 = e^{at}\left[\vec{v}_1 \cos bt - \vec{v}_2\,\mathrm{sen}\, bt\right], \qquad \vec{X}_2 = e^{at}\left[\vec{v}_1\,\mathrm{sen}\, bt + \vec{v}_2 \cos bt\right]$$

son dos soluciones vectoriales reales de $\vec{X}\,'(t) = A\vec{X}$ y son linealmente independientes.

Actividad 24 Resolver el sistema: $\begin{cases} x' &= 6x - y \\ y' &= 5x + 4y \end{cases}$

Formamos el determinante

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & -1 \\ 5 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 10\lambda + 29 = 0$$

$$\lambda_1 = 5+2i, \quad \lambda_2 = 5-2i$$

El vector propio asociado a λ_1 se obtiene a partir de

$$\begin{pmatrix} 1-2i & -1 \\ 5 & -(1+2i) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y es

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Con lo cual, la solución compleja es

$$\vec{X} = e^{(5+2i)t}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}\right]$$

La solución real es:

$$\begin{aligned} \vec{X}_1 &= e^{5t}\left[\vec{v}_1 \cos 2t - \vec{v}_2\,\mathrm{sen}\, 2t\right] \\ \vec{X}_2 &= e^{5t}\left[\vec{v}_1\,\mathrm{sen}\, 2t + \vec{v}_2 \cos 2t\right] \end{aligned}$$

Al reemplazar $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ se tiene

$$\begin{aligned}\vec{X}_1 = &\quad e^{5t}\left[\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\cos 2t - \begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}\operatorname{sen} 2t\right]\\ \vec{X}_2 = &\quad e^{5t}\left[\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\operatorname{sen} 2t + \begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}\cos 2t\right]\end{aligned}$$

Simplificando escritura

$$\begin{aligned}\vec{X}_1 &= e^{5t}\begin{pmatrix}\cos 2t\\ \cos 2t + 2\operatorname{sen} 2t\end{pmatrix}\\ \vec{X}_2 &= \begin{pmatrix}\operatorname{sen} 2t\\ \operatorname{sen} 2t - 2\cos 2t\end{pmatrix}\end{aligned}$$

La solución general es

$$\vec{X} = C_1\vec{X}_1 + C_2\vec{X}_2$$

que una vez simplificada corresponde a

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} e^{5t}\left[C_1\cos 2t + C_2\operatorname{sen} 2t\right]\\ e^{5t}\left[C_1(\cos 2t + 2\operatorname{sen} 2t) + C_2(\operatorname{sen} 2t - 2\cos 2t)\right]\end{pmatrix}$$

Actividad 25 Resolver usando valores y vectores propios el sistema

$$\begin{cases} x' &= -y\\ y' &= x\end{cases}$$

Se escribe el sistema en forma matricial

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

con ecuación característica

$$\begin{vmatrix}-\lambda & -1\\ 1 & -\lambda\end{vmatrix} = 0$$

de donde $\lambda = \pm i$, y de lo cual $a = 0,\ b = \pm 1$. Buscamos los vectores propios asociados:

$$\lambda = i \Longrightarrow \begin{pmatrix}-i & -1\\ 1 & -i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

lo que equivale a resolver el sistema

$$\begin{cases} -iv_1 - v_2 &= 0\\ v_1 - iv_2 &= 0\end{cases} \Longrightarrow v_2 = 1,\ v_1 = i$$

entonces el vector propio asociado es

$$\vec{v}_i = \begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}$$

Separamos este vector en su parte real y conjugada

$$\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + i\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

Con esto, las soluciones linealmente independientes del sistema son:

$$\begin{aligned}
\vec{X}_1(t) &= \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\cos t+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\operatorname{sen} t=\begin{pmatrix}\operatorname{sen} t\\ \cos t\end{pmatrix}\\
\vec{X}_2(t) &= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cos t-\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\operatorname{sen} t=\begin{pmatrix}\cos t\\ -\operatorname{sen} t\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Por tanto, la solución general la podemos escribir en la forma

$$\vec{X}(t)=C_1\vec{X}_1(t)+C_2\vec{X}_2(t)=C_1\begin{pmatrix}\operatorname{sen} t\\ \cos t\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}\cos t\\ -\operatorname{sen} t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_1\operatorname{sen} t & C_2\cos t\\ C_1\cos t & -C_2\operatorname{sen} t\end{pmatrix}$$

Actividad 26 Resolver el sistema $\vec{X}\,'=\begin{pmatrix}12 & -17\\ 4 & -4\end{pmatrix}\vec{X}$

Hallemos el polinomio característico

$$p(\lambda)=\begin{pmatrix}12-\lambda & -17\\ 4 & -4-\lambda\end{pmatrix}=\lambda^2-8\lambda+20=0$$

Al resolver, los valores propios son $\lambda_1=4+2i$ y $\lambda_2=4-2i$.

$$\lambda_1=4+2i\Longrightarrow\begin{pmatrix}8-2i & -17\\ 4 & -8-2i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

Al resolver se halla que

$$(8-2i)v_1-17v_2=0 \quad \text{y} \quad 4v_1+(-8-2i)v_2=0$$

como estas dos ecuaciones son linealmente dependientes, se toma una cualquiera de las dos, por ejemplo la primera

$$v_2=\frac{1}{17}(8-2i)v_1,\quad v_1=v_1$$

de esto,

$$\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{17}(8-2i)\end{pmatrix}v_1$$

Considerando $v_1=17$ se tiene

$$\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\ 8-2i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17\\ 8\end{pmatrix}+i\begin{pmatrix}0\\ -2\end{pmatrix}$$

Elegimos

$$\vec{v}_1=\begin{pmatrix}17\\ 8\end{pmatrix},\qquad \vec{v}_2=\begin{pmatrix}0\\ -2\end{pmatrix}$$

Por lo tanto las dos soluciones vectoriales reales son:

$$\begin{aligned}
\vec{x}_1(t)&=e^{at}\left(\vec{v}_1\cos bt-\vec{v}_2\operatorname{sen} bt\right)=e^{4t}\left(\begin{pmatrix}17\\ 8\end{pmatrix}\cos 2t+\begin{pmatrix}0\\ -2\end{pmatrix}\operatorname{sen} 2t\right)\\
&=e^{4t}\begin{pmatrix}17\cos 2t\\ 8\cos 2t+2\operatorname{sen} 2t\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

y también

$$\vec{x}_2(t) = e^{at}\left(\vec{v}_1 \operatorname{sen} bt + \vec{v}_2 \cos bt\right) = e^{4t}\left(\begin{pmatrix}17\\8\end{pmatrix}\operatorname{sen} 2t + \begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}\cos 2t\right)$$
$$= e^{4t}\begin{pmatrix}17\operatorname{sen} 2t\\8\operatorname{sen} 2t - 2\cos 2t\end{pmatrix}$$

Nota: si se utiliza el otro valor propio $\lambda_2 = 4-2i$ y se sigue el mismo procedimiento se llega a que

$$\vec{x}_1(t) = e^{4t}\begin{pmatrix}17\cos 2t\\8\cos 2t - 2\operatorname{sen} 2t\end{pmatrix} \qquad \vec{x}_2(t) = e^{4t}\begin{pmatrix}17\operatorname{sen} 2t\\8\operatorname{sen} 2t + 2\cos 2t\end{pmatrix}$$

que también son dos soluciones linealmente independientes de la EDO, es decir, que de acuerdo a la selección que hagamos ya sea en los valores propios o en las ecuaciones lineales cuando escalonemos la matriz de coeficientes, tendremos respuestas diferentes, esto se debe a que escogemos vectores base $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ diferentes.

Actividad 27 Resolver el sistema $\vec{X}' = \begin{pmatrix}2 & 8\\-1 & -2\end{pmatrix}\vec{X}$

Valores propios $\lambda = \pm 2i$. Los vectores propios REALES son

$$\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$$

La solución final es

$$\vec{X} = C_1\begin{pmatrix}2\cos 2t - 2\operatorname{sen} 2t\\-\cos 2t\end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix}2\cos 2t + 2\operatorname{sen} 2t\\-\operatorname{sen} 2t\end{pmatrix}$$

Begin Test Pasas con 100 %.

1. La matriz del sistema $\vec{X}' = \begin{pmatrix}4 & -1 & 0\\3 & 1 & -1\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ no es simétrica. Tiene como valor propio $\lambda = 2$ de multiplicidad 3. Un vector propio asociado es

☐ $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

2. Un segundo vector propio asociado a $\lambda = 2$ es:

☐ $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

3. El tercer vector propio de $\lambda = 2$ es:

☐ $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

End Test Puntos: Correctas

Begin Test Pasas con 100 %.

1. Para el sistema $\begin{cases} x_1' + x_1 - 5x_2 = 0 \\ 4x_1 + x_2{}' + 5x_2 = 0 \end{cases}$, la matriz de coeficientes es:

(a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$ (c) $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ (d) $A = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$

2. Un valor propio es $\lambda = -3+4i$. El vector propio asociado es

(a) $\begin{pmatrix} 5 \\ -2-4i \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 5 \\ -2+4i \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 5 \\ 2+4i \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} -5 \\ -2+4i \end{pmatrix}$

3. La matriz $\begin{pmatrix} -5 & 5 & 4 \\ -8 & 7 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ tiene por valores propios:

(a) $2,\ i,\ -i$ (b) $-2,\ i,\ -i$ (c) $1,\ i,\ -i$ (d) $-1,\ i,\ -i$

4. Un vector propio para $\lambda = i$ es:

(a) $\begin{pmatrix} 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} i \\ 1-i \\ 1 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} i \\ 1+i \\ 1 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} i \\ -1+i \\ 1 \end{pmatrix}$

5. La matriz $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ tiene a $\lambda = -5$ como valor propio de multiplicidad 2. Un vector propio asociado es

(a) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

6. Un segundo vector propio asociado a $\lambda = -5$ es:

(a) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

7. El valor propio $\lambda = 1$ tiene un vector propio asociado:

(a) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

End Test Puntos: Correctas

3.1 Sistema no homogéneos

Los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales no homogóneos son de la forma

$$\vec{X}' = A(t)\vec{X} + \vec{F}(t) \tag{3.9}$$

donde, para cada t la matriz $A(t)$ es $n \times n$, $\vec{x}$ es un vector columna de funciones incógnita y $F(t)$ es un vector columna de funciones conocidas.
El siguiente resultado es la base para encontrar todas las soluciones del sistema (3.11)

Teorema 3.1.1 Sea $\vec{X}_h(t)$ la solución general del sistema homogéneo $\vec{X}'(t) = A(t)\vec{X}$ y sea $\vec{X}_p(t)$ una solución particular del sistema no homogéneo (3.11), entonces la solución general del sistema (3.11) es de la forma

$$\vec{X}(t) = \vec{X}_h(t) + \vec{X}_p(t)$$

Demostración. Si $\vec{X}(t) = \vec{X}_h(t) + \vec{X}_p(t)$, entonces $\vec{X}(t)$ es solución de (11), en efecto

$$\begin{aligned}
\vec{X}'(t) &= \vec{X}_h'(t) + \vec{X}_p'(t) \\
&= A(t)\vec{X}_p(t) + \vec{F}(t) + A(t)\vec{X}_h(t) \\
&= A(t)[\vec{X}_p(t) + \vec{X}_h(t)] + \vec{F}(t) \\
&= A(t)\vec{X}(t) + \vec{F}(t)
\end{aligned}$$

Esto prueba que $\vec{X}(t) = \vec{X}_h(t) + \vec{X}_p(t)$ es solución del sistema no homogéneo.

Variación de parámetros o de constantes

Al igual que para las ecuaciones lineales utilizaremos el método de variación de las constantes para obtener una solución particular de los sistemas no homogéneos.

Para resolver el sistema lineal no homogéneo

$$\vec{X}'(t) = A(t)\vec{X} + \vec{F}(t) \tag{3.10}$$

se halla primero la solución del sistema homogéneo

$$\vec{X}'(t) = A\vec{X}(t) \tag{3.11}$$

que resulta ser

$$\vec{X}_h = \Phi(t)\vec{C} \tag{3.12}$$

donde $\Phi(t)$ es una matriz fundamental y $\vec{C}$ un vector arbitrario de constantes (números reales).
En analogía con la ecuación diferencial lineal de orden n, en el método de variación de parámetros se supone que la solución particular, $\vec{X}_p$, es de la forma

$$\vec{X}_p = \Phi(t)\vec{C}(t) \tag{3.13}$$

donde ahora el vector $\vec{C}(t)$ es variable. Derivando la expresión (3.13) se tiene:

$$\vec{X}'_p = \Phi'(t)\vec{C}(t) + \Phi(t)\vec{C}'(t)$$

Al reemplazar esto en (3.11)

$$\Phi'(t)\vec{C}(t) + \Phi(t)\vec{C}'(t) = A(t)\vec{X} + \vec{F}(t) \tag{3.14}$$

como $\Phi(t)$ es una matriz fundamental de soluciones, satisface la ecuación

$$\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$$

sustituyendo en la ecuación (3.14)

$$\cancel{A(t)\Phi(t)\vec{C}(t)} + \Phi(t)\vec{C}\,'(t) = \cancel{A(t)\Phi(t)\vec{C}(t)} + \vec{F}(t)$$

Una vez cancelado

$$\boxed{\Phi(t)\vec{C}\,'(t) = \vec{F}(t)} \tag{3.15}$$

Esta ecuación es más sencilla para el cálculo de la solución particular. No obstante, como la matriz fundamental es invertible, de la ecuación (3.15) se obtiene

$$\vec{C}\,'(t) = \Phi^{-1}(t)\vec{F}(t)$$

al integrar se halla que

$$\vec{C}(t) = \int \Phi^{-1}(t)\vec{F}(t)\,dt$$

Por lo tanto, la solución general del problema no homogéneo es

$$\boxed{\vec{X}(t) = \Phi(t)\vec{C}(t) + \Phi(t)\int \Phi^{-1}(t)\vec{F}(t)dt} \tag{3.16}$$

Se debe tener presente que la solución particular es

$$\vec{X}_p(t) = \Phi(t)\int \Phi^{-1}(t)\vec{F}(t)dt$$

Actividad 28 Hallar la solución general del sistema no homogéneo

$$\vec{X}\,' = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\vec{X} + \begin{pmatrix} 3t \\ e^{-t} \end{pmatrix}$$

Primero se resuelve el sistema homogéneo

$$\vec{X}\,' = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\vec{X}$$

La ecuación característica de la matriz de coeficientes es

$$\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 \\ 2 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda+5) = 0$$

de modo que los valores propios son $\lambda_1 = -2$ y $\lambda_2 = -5$. Los vectores propios que corresponden son, respectivamente,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Los vectores solución del sistema son:

$$\vec{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{pmatrix}, \quad \vec{X}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-5t} = \begin{pmatrix} e^{-5t} \\ -2e^{-5t} \end{pmatrix}$$

Los elementos en $\vec{X}_1$ forman la primera columna de $\Phi(t)$ y los elementos de $\vec{X}_2$, la segunda; por consiguiente, la matriz fundamental es

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{pmatrix}$$

Para hallar su inversa usamos la fórmula para la inversa de una matriz dos por dos

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

De esto se obtiene que la inversa de la fundamental es

$$\Phi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}e^{2t} & \frac{1}{3}e^{2t} \\ \frac{1}{3}e^{5t} & -\frac{1}{3}e^{5t} \end{pmatrix}$$

Ahora calculamos la solución particular

$$\vec{X}_p = \phi(t)\int \phi^{-1}(t)\vec{f}(t)\,dt$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} \frac{2}{3}e^{2t} & \frac{1}{3}e^{2t} \\ \frac{1}{3}e^{5t} & -\frac{1}{3}e^{5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3t \\ e^{-t} \end{pmatrix} dt$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} 2te^{2t} + \frac{1}{3}e^{t} \\ te^{5t} - \frac{1}{3}e^{4t} \end{pmatrix} dt$$

Integrando término a término y multiplicando las matrices se llega a que

$$\vec{X}_p = \begin{pmatrix} \frac{6}{5}t + -\frac{27}{50} + \frac{1}{4}e^{-t} \\ \\ \frac{3}{5}t - \frac{21}{50} + \frac{1}{2}e^{-t} \end{pmatrix}$$

En consecuencia, la solución general del sistema dado es

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{6}{5}t + -\frac{27}{50} + \frac{1}{4}e^{-t} \\ \\ \frac{3}{5}t - \frac{21}{50} + \frac{1}{2}e^{-t} \end{pmatrix}$$

que puede desarrollarse y tener que

$$\vec{X} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-5t} + c_1\begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} t - c_1\begin{pmatrix} \frac{27}{50} \\ \frac{21}{50} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} e^{-t}$$

Actividad 29 Resolver por variación de parámetros el sistema

$$\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{X} + \begin{pmatrix} e^{t} \\ te^{t} \\ e^{t} \end{pmatrix}$$

Los valores propios de la matriz son $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1$ y $\lambda_3 = -1$. Sus vectores propios son los siguientes:

$\boxed{\text{Vector propio de } \lambda_1 = 1}$

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolviendo este sistema se tiene que

$$\vec{v}_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Así, tenemos la solución

$$\vec{X}_1(t) = e^{\lambda_1 t}\vec{v}_{\lambda_1} = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Como la multiplicidad del valor propio $\lambda_1 = 1$ es dos, buscamos un segundo vector propio en la forma

$$(A - \lambda_1 I)\vec{w} = \vec{v}$$

en donde $\vec{w}$ es por determinar y $\vec{v} = \vec{v}_{\lambda_1}$. Se tiene:

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Al resolver se halla $w_1 = w_2$, $w_3 = 1 - w_1$. Luego, si se considera $w_1 = 1$ resulta $w_2 = 1$ y $w_3 = 0$. El segundo vector propio asociado al valor propio λ_1 es

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego, tenemos la solución

$$\vec{X}_2(t) = e^{\lambda_1 t}[\vec{v}_2 + t\vec{v}_1] = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Vector propio de } \lambda_1 = -1}$

Se sigue la misma rutina del primer valor propio. Se obtiene

$$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Con esto se tiene la tercera solución

$$\vec{X}_3(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De esta manera, una matriz fundamental es

$$\Phi(t) = [\vec{X}_1(t), \vec{X}_2(t), \vec{X}_3(t)]^T = \begin{pmatrix} e^t & e^t + te^t & e^{-t} \\ e^t & e^t + te^t & 0 \\ -e^t & -te^t & e^{-t} \end{pmatrix}$$

Hemos logrado, con mucho trabajo, llegar a la solución del sistema homogéneo, esto es

$$\vec{X}(t) = \Phi(t)\vec{C} = \begin{pmatrix} e^t & e^t + te^t & e^{-t} \\ e^t & e^t + te^t & 0 \\ -e^t & -te^t & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^tC_1 + C_2(e^t + te^t) + C_3e^{-t} \\ e^tC_1 + C_2(e^t + te^t) \\ -e^tC_1 - C_2te^t + C_3e^{-t} \end{pmatrix}$$

En este momento hacemos variación de parámetros considerando la ecuación (15), esto es $\Phi(t)\vec{C}'(t) = \vec{F}(t)$. Esto significa debemos resolver el sistema

$$\begin{cases} e^tC_1'(t) + C_2'(t)(e^t + te^t) + C_3'(t)e^{-t} & = e^t \\ e^tC_1'(t) + C_2'(t)(e^t + te^t) & = te^t \\ -e^tC_1'(t) - C_2'(t)te^t + C_3'(t)e^{-t} & = e^t \end{cases}$$

Observar que aparecen sólo derivadas del vector $\vec{C}(t)$. Tomando la diferencia entre la primera ecuación y la segunda se encuentra

$$C_3'(t) = e^{2t} - te^{2t}, \quad C_3(t) = \frac{3}{4}e^{2t} - \frac{t}{2}e^{2t}$$

Sumando la primera con la tercera y reemplazando el $C_3(t)$:

$$C_2'(t) = \frac{1}{2} + t, \quad C_2(t) = \frac{t}{2} + \frac{t^2}{2}$$

Reemplazando $C_2(t)$ y $C_3(t)$ en la ecuación 2

$$C_1'(t) = -\frac{1}{2} - \frac{t}{2} - t^2, \quad C_1(t) = -\frac{t}{2} - \frac{t^2}{4} - \frac{t^3}{3}$$

Ahora nos vamos a reemplazar en la ecuación

$$\vec{X}_p = \Phi(t)\vec{C}(t)$$

Después de simplificar se llega a algo como

$$\vec{X}_p = \begin{pmatrix} \left(\frac{t^3}{6} + \frac{t^2}{4} + \frac{3}{4}\right)e^t \\ \left(\frac{t^3}{6} + \frac{3t^2}{4}\right)e^t \\ \left(\frac{5t^3}{6} + \frac{3t^2}{4} + \frac{3}{4}\right)e^t \end{pmatrix}$$

La solución general es (no la vamos a escribir)

$$\vec{X} = \vec{X}_h(t) + \vec{X}_p(t)$$

3.2 Método de la Transformada de Laplace

Al igual que en ecuaciones lineales con condición inicial, la Transformada de Laplace vuelve a ser una excelente herramienta, tanto en sistemas homogéneos como no homogéneos.

Actividad 30 Resolver, con condiciones $x(0) = 8$, $y(0) = 3$ el sistema

$$\begin{cases} x' & = 2x - 3y \\ y' & = y - 2x \end{cases}$$

Definimos previamente $\mathscr{L}[x(t)] = F(s)$ y $\mathscr{L}[y(t)] = G(s)$. Se aplica transformada a cada ecuación del sistema

$$\begin{cases} \mathscr{L}[x'] & = 2\mathscr{L}[x] - 3\mathscr{L}[y] \\ \mathscr{L}[y'] & = \mathscr{L}[y] - 2\mathscr{L}[x] \end{cases}$$

Desarrollando se llega a

$$\begin{cases} sF(s) - x(0) & = 2F(s) - 3G(s) \\ sG(S) - y(0) & = G(s) - 2F(s) \end{cases}$$

Agrupando

$$\begin{cases} (s-2)F(s) + 3G(s) & = 8 \\ 2F(s) + (s-1)G(S) & = 3 \end{cases}$$

Multiplicando por 2 la primera ecuación y por $(s-2)$ la segunda, se resta para hallar que

$$G(s) = \frac{3s - 22}{(s+1)(s-4)}$$

Por fracciones parciales

$$G(s) = \frac{5}{s+1} - \frac{2}{s-4}$$

de los cual

$$y(t) = 5e^{-t} - 2e^{4t}$$

Para $F(s)$ se halla que

$$F(s) = \frac{8s - 17}{(s+1)(s-4)} = \frac{5}{s+1} + \frac{3}{s-4}$$

de manera que

$$x(t) = 5e^{-t} + 3e^{4t}$$

Actividad 31 Resolver, con condiciones $x(0) = \frac{1}{2}$, $y(0) = \frac{1}{5}$ el sistema:

$$\begin{cases} x' & = 6x + y + 6t \\ y' & = 4x + 3y - 10t + 4 \end{cases}$$

Se aplica Transformada de Laplace a cada ecuación del sistema

$$\begin{cases} sx(s) - \frac{1}{2} - 6x(s) - y(s) & = \frac{6}{s^2} \\ sy(s) - \frac{1}{5} - 4x(s) - 3y(s) & = -\frac{10}{s^2} + \frac{4}{s} \end{cases}$$

Esto equivale a

$$\begin{cases} x(s)[s-6]-y(s) & = \frac{6}{s^2}+\frac{1}{2} \\ y(s)[s-3]-4x(s)-3y(s) & = -\frac{10}{s^2}+\frac{4}{s}+\frac{1}{5} \end{cases}$$

de lo cual

$$\begin{cases} x(s)[s-6]-y(s) & = \frac{12+s^2}{2s^2} \\ \\ y(s)[s-3]-4x(s)-3y(s) & = \frac{s^2-50+20s}{5s^2} \end{cases}$$

Multiplicamos por $(s-3)$ la primera ecuación y sumando ambas ecuaciones:

$$x(s)[s^2-9s+14] = \frac{12+s^2}{2s^2}[s-3]+\frac{s^2-50+20s}{5s^2}$$

Factorizando y expandiendo el lado derecho se llega a

$$x(s) = \frac{23}{50}\left[\frac{1}{s-2}\right]+\frac{107}{175}\left[\frac{1}{s-7}\right]-\frac{4}{7}\left[\frac{1}{s}\right]-2\left[\frac{1}{s^2}\right]$$

Sacando transformada inversa obtenemos:

$$x(t) = \frac{107}{175}e^{7t}-\frac{4}{7}-2t+\frac{23}{50}e^{2t}$$

Sustituyendo lo que vale $x(s)$ se halla que

$$y(t) = \frac{107}{75}e^{7t}+\frac{10}{7}+6t-\frac{46}{25}e^{2t}$$

Begin Test Math Pasas con 100%.

1. Considerar el sistema $\vec{X}' = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}$. El valor propio $\lambda = -1$ tiene multiplicidad 2. Un primer vector propio es:

☐ $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. Un segundo vector propio asociado a $\lambda = -1$ es:

☐ $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

3. Una matriz fundamental es:

☐ $\begin{pmatrix} -2e^{-t} & (2t+3)e^{-t} \\ e^{-t} & (t-1)e^{-t} \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} -2e^{-t} & (-2t+3)e^{-t} \\ e^{-t} & (t+1)e^{-t} \end{pmatrix}$

☐ $\begin{pmatrix} 2e^{-t} & (-2t+3)e^{-t} \\ e^{-t} & (t-1)e^{-t} \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} -2e^{-t} & (-2t+3)e^{-t} \\ e^{-t} & (t-1)e^{-t} \end{pmatrix}$

End Test Puntos: Correctas

Begin Test Pasas con 100 %.

1. El sistema $\vec{X}' = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}$ tiene matriz fundamental:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} -2e^{-t} & (-2t+3)e^{-t} \\ e^{-t} & (t-1)e^{-t} \end{pmatrix}$$

Usando la fórmula

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

La matriz inversa $\Phi(t)^{-1}$ es:

(a) $\begin{pmatrix} (1-t)e^{t} & (-2t+3)e^{-t} \\ e^{-t} & (t-1)e^{-t} \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} (1-t)e^{-t} & (-2t+3)e^{t} \\ e^{t} & e^{2t} \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} e^{-t} & (-2t+3)e^{-t} \\ -e^{-t} & (t-1)e^{-t} \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} (t-1)e^{-t} & (2t+3)e^{-t} \\ e^{-t} & e^{2t} \end{pmatrix}$

2. el valor de la integral

$$\int \Phi^{-1}(t) \cdot \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} dt = \ldots$$

(a) $\begin{pmatrix} 2t-t^2 \\ 2t \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 2-t^2 \\ 2t \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} t-t^2 \\ 2t \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 2t-t^2 \\ t \end{pmatrix}$

3. La solución general del sistema es:

(a) $\begin{pmatrix} (-2t^2+2(1-C_2)t-2C_1+3C_2)e^{-t} \\ (t^2+C_2t+C_1-C_2)e^{t} \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} (-2t^2+2(1-C_2)t-C_1+3C_2)e^{-t} \\ (t^2+C_2t+C_1-C_2)e^{-t} \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} (2t^2+2(1-C_2)t-2C_1+3C_2)e^{-t} \\ (t^2+C_2t+C_1-C_2)e^{-t} \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} (-2t^2+2(1-C_2)t-2C_1+3C_2)e^{-t} \\ (t^2+C_2t+C_1-C_2)e^{-t} \end{pmatrix}$

End Test Puntos: Correctas

Begin Test Pasas con 100 %.

1. Al usar Laplace el sistema $\begin{cases} {y_1}' = y_1 + 2y_2 \\ {y_2}' = -2y_1 + y_2 \end{cases}$, con $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 0$ es:

(a) $\begin{cases} (s+1)F(s) - 2G(s) = 1 \\ 2F(s) + (s-1)G(s) = 0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} (s-1)F(s) - 2G(s) = 1 \\ 2F(s) + (s+1)G(s) = 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} (s-1)F(s) + 2G(s) = 1 \\ 2F(s) + (s-1)G(s) = 0 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} (s-1)F(s) - 2G(s) = 1 \\ 2F(s) + (s-1)G(s) = 0 \end{cases}$

2. Al resolver se tiene que

(a) $F(s) = \dfrac{s-1}{(s-1)^2+4}$ (b) $F(s) = \dfrac{s-1}{(s-1)^2+2}$

(c) $F(s) = \dfrac{s}{(s-1)^2+4}$ (d) $F(s) = \dfrac{1}{s-1}$

3. Al resolver, para $G(s)$ se tiene que

(a) $G(s) = \dfrac{2}{(s-1)^2+2}$ (b) $G(s) = \dfrac{2}{(s-1)^2+4}$

(c) $G(s) = \dfrac{1}{(s-1)^2+4}$ (d) $G(s) = \dfrac{s}{(s-1)^2+4}$

4. La inversa de $F(s)$ es:

(a) $y_1 = e^t \cos t$ (b) $y_1 = e^{2t} \cos 2t$ (c) $y_1 = e^{2t} \cos t$ (d) $y_1 = e^t \cos 2t$

5. La inversa de $G(s)$ es:

(a) $y_2 = e^t \operatorname{sen} 2t$ (b) $y_2 = e^{2t} \operatorname{sen} 2t$ (c) $y_2 = -e^t \operatorname{sen} 2t$ (d) $y_2 = e^{-t} \operatorname{sen} 2t$

End Test

Correctas

ScoreField PointsField

Correctas

3.3 Problemas Resueltos

Problema 3.1 Resolver el sistema $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = x + 2y \end{cases}$

Los valores propios son; $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 3$. La solución general es

$$\vec{X}_{h(t)} = c_1 e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \vec{v}_2 = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Problema 3.2 Resolver el sistema $\begin{cases} x' &= -2x + y \\ y' &= x - 2y \end{cases}$

Los valores y vectores propios son; $\lambda_1 = -3$, $\vec{v}_1 = (-1, 1)$, $\lambda_2 = -1, \vec{v}_2 = (1, 1)$. La solución general es

$$\vec{X}_{h(t)} = c_1 e^{-3t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Problema 3.3 Resolver el sistema $\begin{cases} x''-4y' &= 0 \\ x''+x'+y'' &= 0 \end{cases}$

La solución general es

$$\begin{cases} x(t) &= C_1+C_2e^{-2t}+C_3te^{-2t} \\ y(t) &= -\frac{1}{2}C_2e^{-2t}-\frac{1}{2}C_3te^{-2t}+\frac{1}{4}C_3e^{-2t}+C_4 \end{cases}$$

Observar que la solución general contiene cuatro constantes ya que se resolvió un sistema de dos ecuaciones diferenciales de segundo orden.

Problema 3.4 Resolver el sistema

$$\begin{cases} x_1' &= -2x_1-4x_2+1 \\ x_2' &= -x_1+x-2+\frac{3}{2}t^2 \end{cases}$$

La solución general es

$$\begin{cases} x_1(t) &= C_1e^{2t}+4C_2e^{-3t}+t+t^2 \\ x_2(t) &= -C_1e^{2t}+C_2e^{-3t}-\frac{1}{2}t^2 \end{cases}$$

Problema 3.5 Resolver, por valores propios el sistema

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \vec{X}$$

$$\lambda_1=\lambda_2=-1,\ \lambda_3=5$$

La solución es

$$\vec{X} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t}+c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}+c_3\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t}$$

Problema 3.6 Resolver por eliminación el sistema $\begin{cases} (D+2)x_1+(D-1)x_2 &= -\operatorname{sen} t \\ (D-3)x_1(D+2)x_2 &= 4\cos t \end{cases}$

La solución del sistema es

$$\begin{cases} x_1 &= 3Ce^{-\frac{1}{8}}-\cos t+2\operatorname{sen} t \\ x_2 &= Ce^{-\frac{1}{8}}+\cos t+\operatorname{sen} t \end{cases}$$

Problema 3.7 Resolver $\begin{cases} x''+x'+y'+y &= 0 \\ x'''+y''+y &= 0 \end{cases}$

La solución es

$$\begin{cases} x(t) &= C_1+C_2e^{-t} \\ y(t) &= \frac{1}{2}C_2e^{-t} \end{cases}$$

La solución general solamente tiene dos constantes aún cuando el sistema de ecuaciones diferenciales cuenta con una ecuación de tercer orden. En estos casos cuando el número de constantes que tendrá la solución general no es evidente, es posible recurrir al determinante de la matriz operacional del sistema, ya que el grado del polinomio diferencial del sistema indica el número de constantes de la solución general.

Problema 3.8 Resolver, $\begin{pmatrix} 1-D & 2 \\ -2 & 5-D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, por método de valores y vectores propios

Lo primero es desarmar la forma matricial, escribir el sistema con las derivadas despejasdas, y utilizar valores y vectores propios. La solución general es

$$\vec{X}(t) = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} + C_2 \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right] e^{3x}$$

Problema 3.9 Resolver $\begin{cases} x' = -4x + y + z \\ y' = x + 5y - z \\ z' = y - 3z \end{cases}$

Los valores propios son $\lambda_1 = -4, \lambda_2 = -3, \lambda_3 = 5$. La solución es

$$x(t) = C_1 \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t}$$

Problema 3.10 Resolver $\begin{cases} x' = y + z \\ y' = 3x + z \\ z' = 3x + y \end{cases}$

$$\vec{X}(t) = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} e^{3t} + C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

Problema 3.11 Resolver $\begin{cases} y' = 2y - 9z \\ z' = y + 8z \end{cases}$

La solución general es

$$y(t) = (-3C_1 + C_2 - 3C_2 t)e^{5t}$$
$$z(t) = (C_1 - C_2 t)e^{5t}$$

Problema 3.12 Resolver el siguiente problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' & = -5x - y \\ y' & = 4x - y \end{cases}, \quad x(1) = 0, \; y(1) = 1$$

La solución general es

$$\begin{cases} x(t) & = C_1 e^{-3t} + C_2 t e^{-3t} \\ y(t) & = -2C_1 e^{-3t} - 2C_2 t e^{-3t} - C_2 e^{-3t} \end{cases}$$

La solución particular es

$$\begin{cases} x(t) & = e^{3-3t} - t e^{3-3t} \\ y(t) & = -e^{3-3t} + 2t e^{3-3t} \end{cases}$$

Problema 3.13 Utilizar el método de variación de las constantes para resolver el sistema:

$$\begin{cases} y' + y + 2z & = \cos x + \operatorname{sen} x \\ z' + 2y + z & = \operatorname{sen} x - \cos x \end{cases}$$

La solución de la homogénea es:

$$\vec{X}_h(x) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^x + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3x}$$

Por lo tanto la solución general del sistema es:

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-3x} + \frac{1}{2}(\operatorname{sen} x - \cos x) + \frac{1}{10}(3\operatorname{sen} x - \cos x) = \frac{8}{10}\operatorname{sen} x - \frac{6}{10}\cos x$$
$$z(x) = -C_1 e^x + C_2 e^{-3x} + \frac{1}{2}(-\operatorname{sen} x + \cos x) + \frac{1}{10}(3\operatorname{sen} x - \cos x) = -\frac{2}{10}\operatorname{sen} x + \frac{2}{5}\cos x$$

Problema 3.14 Utilizar el método de la transformada de Laplace para resolver el sistema

$$\begin{cases} x'' - y'' & = t^2 \\ x'' + y'' & = 4t \end{cases}$$

con condiciones iniciales $x(0) = 8$, $x'(0) = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
La solución es

$$\begin{cases} x(t) & = \frac{t^4}{4!} + \frac{2t^3}{3!} + 8 \\ y(t) & = -\frac{t^4}{4!} + \frac{2t^3}{3!} \end{cases}$$

Problema 3.15 Resolver el sistema

$$\vec{X}'(t) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \vec{X}$$

El valor propio es $\lambda_1 = 4$ de multiplicidad 3. En este caso se deben hallar los vectores propios generalizados, La solución general es

$$\vec{X}(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{4t} + C_2 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) e^{4t} + C_3 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{t^2}{2} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t + C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) e^{4t}$$

Problema 3.16 Resolver, usando la expresión

$$\vec{X}(t) = \Phi(t)\vec{C} + \Phi(t) \int \Phi^{-1}(t)\vec{F}(t)\,dt$$

el sistema

$$\vec{X}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \vec{X}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t$$

Los valores propios son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$. Los vectores propios

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La matriz fundamental y su inversa son

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 2e^t & 1e^{2t} \\ 1e^t & 1e^{2t} \end{pmatrix} \Longrightarrow \Phi^{-1}(t) = \frac{1}{e^{3t}} \begin{pmatrix} e^{2t} & -e^{2t} \\ -e^t & 2e^t \end{pmatrix}$$

La solución general es

$$\vec{X}(t) = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + \begin{pmatrix} 4te^t + 3e^t \\ 2te^t + 3e^t \end{pmatrix}$$

Problema 3.17 Transformar cada sistema a ecuación diferencial y resolver:

$$\begin{cases} x' &= 3x - 2y \\ y' &= 2x - y \end{cases}$$

Elegimos la segunda ecuación

$$\frac{dy}{dt} = 2x - y \Longrightarrow \frac{d^2y}{dt^2} = 2\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt}$$

hacemos los reemplazos pertinentes para tener

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 2(3x-2y) - (2x-y) = 4x - 3y$$

$$= 4 \cdot \frac{1}{2}\left(y + \frac{dy}{dt}\right) - 3y$$

$$= 2\frac{dy}{dt} - y$$

Escribiendo en operadores esta ecuación,

$$(D^2 - 2D + 1)[y] = 0 \Longleftrightarrow (D-1)^2[y] = 0$$

de donde,

$$y = C_1 e^t + C_2 t\, e^t$$

Reemplazamos esto en la segunda ecuación del sistema original.

$$x = \frac{1}{2}\left(C_1 e^t + C_2 t\, e^t + C_1 e^t + C_2 e^t + C_1 e^t + C_2 t\, e^t\right)$$

de donde

$$x = \frac{1}{2} e^t \left(2C_1 + C_2 + 2C_2 t\right)$$

En consecuencia, la familia solución es

$$x = \frac{1}{2} e^t \left(2C_1 + C_2 + 2C_2 t\right)$$
$$y = (C_1 + t\, C_2)\, e^t$$

Actividad 32 Resolver el sistema $\begin{cases} 2Dx_1 - (D^2-4)x_2 &= 0 \\ (D^2-1)x_1 + 5Dx_2 &= e^t \end{cases}$

Este sistema no es de primer órden. Se puede transformar en uno de primer órden y luego resolver, o bien, aplicar proceso de eliminación. Veamos esto último. Al multiplicar la primera ecuación por $-\frac{1}{2}D$ y sumarla con la segunda, se tiene el siguiente sistema equivalente

$$\left.\begin{array}{rcl} 2Dx_1 - (D^2-4)x_2 &=& 0 \\ \boxed{-D^2x_1 + \dfrac{D}{2}(D^2-4)x_2} + (D^2-1)x_1 + 5Dx_2 &=& e^t \end{array}\right\}$$

en una caja está indicada la cantidad que se suma. Al simplificar queda

$$\begin{cases} 2Dx_1 - (D^2-4)x_2 &= 0 \\ -x_1 + (\dfrac{D^3}{2} + 3D)x_2 &= e^t \end{cases}$$

Ahora se multiplica la segunda ecuación por $2D$, y sumamos con la primera.

$$\left.\begin{aligned} 2Dx_1 - (D^2-4)x_2 &= 0 \\ \boxed{2D\left(\frac{D^3}{2}+3D\right)x_2 - 2Dx_1} + 2Dx_1 - (D^2-4)x_2 &= 2e^t \end{aligned}\right\}$$

O bien,

$$\left.\begin{aligned} 2Dx_1 - (D^2-4)x_2 &= 0 \\ (D^4+5D^2+4)x_2 &= 2e^t \end{aligned}\right\}$$

que también se puede mejorar, escribiendo como producto de operadores

$$\left.\begin{aligned} 2Dx_1 - (D^2-4)x_2 &= 0 \\ (D^2+4)(D^2+1)x_2 &= 2e^t \end{aligned}\right\}$$

Con la segunda ecuación se calcula x_2. Se tiene

$$(x_2)_H(t) = C_1 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t + C_3 \operatorname{sen} 2t + C_4 \cos 2t$$

es la solución de la homogénea, y usando aniquiladores se tiene que

$$(D-1)(D^2+4)(D^2+1)[x_2] = 0$$

como la solución de $(D-1)[x_2]$ es $x_2 = C_5\, e^t$, entonces

$$(D^2+4)(D^2+1)[C_5\, e^t] = 2\, e^t \Longrightarrow C_5 = \frac{1}{5}$$

En consecuencia,

$$x_2(t) = C_1 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t + C_3 \operatorname{sen} 2t + C_4 \cos 2t + \frac{1}{5}\, e^t$$

En el último sistema, con la primera ecuación, determinamos el x_1

$$2Dx_1 - (D^2-4)\,(C_1 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t + C_3 \operatorname{sen} 2t + C_4 \cos 2t + \frac{1}{5}\, e^t) = 0$$

de donde,

$$x_1(t) = -\frac{5}{2} C_1 \operatorname{sen} t + \frac{5}{2} \cos t + 2C_3 \cos 2t - 2C_4 \operatorname{sen} 2t - \frac{3}{10}\, e^t$$

Ejemplo 3.3.1 Resolver el sistema

$$\begin{cases} x'' - 4y' = 0 \\ x'' + x' + y'' = 0 \end{cases}$$

Se deriva la primera ecuación para tener $y'' = \frac{1}{4}x'''$. Con esto nos vamos a la segunda ecuación y se obtiene

$$(D^3 + 4D^2 + 4D)[x] = 0 \Longleftrightarrow D(D+2)^2[x] = 0$$

cuya solución es

$$x(t) = C_1 + C_2e^{-2t} + tC_3e^{-2t}$$

Para hallar $y(t)$, en la primera ecuación hallaremos la segunda derivada y luego, por integración, hallaremos $y(t)$.

$$\begin{aligned} x(t) = C_1 + C_2e^{-2t} + tC_3e^{-2t} \Longrightarrow & x'(t) = -2C_2e^{-2t} + C_3e^{-2t} - 2tC_3e^{-2t} \\ & x''(t) = 4C_2e^{-2t} - 2C_3e^{-2t} - 2C_3e^{-2t} + 4tC_3e^{-2t} \\ & x''(t) = 4C_2e^{-2t} - 4C_3e^{-2t} + 4tC_3e^{-2t} \end{aligned}$$

Ahora,

$$x''(t) - 4y' = 0 \Longrightarrow y' = C_2e^{-2t} - C_3e^{-2t} + tC_3e^{-2t}$$

Al integrar

$$y(t) = -\frac{1}{2}C_2e^{-2t} + \frac{1}{2}C_3e^{-2t} + \int tC_3e^{-2t}dt$$

con integración por partes se encuentra que

$$y(t) = -\frac{1}{2}C_2e^{-2t} + \frac{1}{4}C_3e^{-2t} - \frac{1}{2}C_3te^{-2t} + C_4$$

Problema 3.18 Resolver $\begin{cases} x' - x + 2y = 0 \\ 3x + y' = 0 \end{cases}$

Se tiene más de una opción para resolver. Se despejan las derivadas y se usan valores y vectores propios, o se aplica eliminación. Haré esto último.
Se deriva la primera ecuación

$$x'' - x' + 2y' = 0$$

pero, de la segunda ecuación $y' = -3x$, al reemplazar en la ecuación anterior

$$x'' - x' - 6x = 0$$

En operadores

$$(D^2 - D - 6)[x] = 0 \Longrightarrow (D-3)(D+2)[x] = 0$$

la solución es

$$x(t) = C_1e^{3t} + C_2e^{-2t}$$

Para encontrar a $y(t)$ usamos la segunda ecuación del sistema para tener

$$3x + y' = 0 \Longrightarrow y' = -3(C_1e^{3t} + C_2e^{-2t})$$

al integrar

$$y = -C_1e^{3t} + \frac{3}{2}C_2e^{-2t} + C_3$$

Problema 3.19 Considere dos recipientes A, B como el de la figura. Suponga que el recipiente A contiene 50 litros de agua en los que hay disueltos 25 kilogramos de sal y que en el recipiente B hay 50 litros de agua pura. A los recipientes ingresan líquidos como se indica la figura, se supone que los líquidos están bien mezclazdos en todo instante. Determine el número de kilogramos $x_1(t)$ y $x_2(t)$ en los recipientes en todo instante.

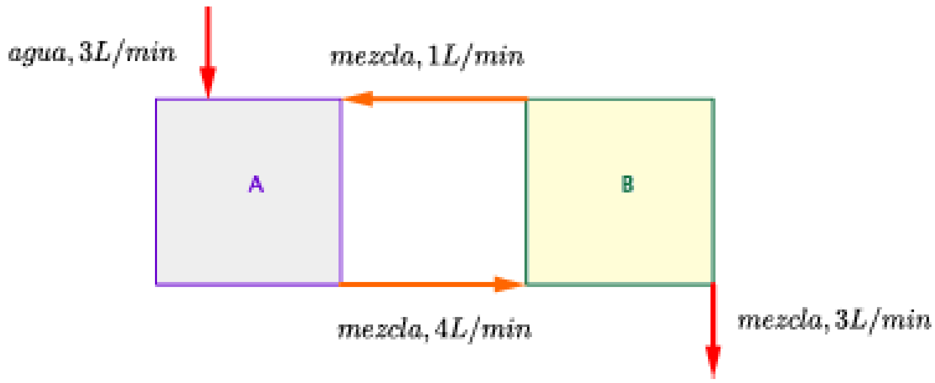


Figura 3.1: tanques

Se observa que el volumen neto en cada recipiente es constante. De esta forma:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 0 \cdot 3 + \dfrac{1 \cdot x_2}{50} - \dfrac{4x_1}{50} = \dfrac{x_2}{50} - \dfrac{4x_1}{50} \\ \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \dfrac{4 \cdot x_1}{50} - \dfrac{1 \cdot x_2}{50} - \dfrac{3 \cdot x_2}{50} = \dfrac{4x_1}{50} - \dfrac{4x_2}{50} \end{cases}$$

Hay que resolver el sistema

$$\begin{cases} x_1' = \dfrac{x_2}{50} - \dfrac{4x_1}{50} \\ \\ x_2' = \dfrac{4x_1}{50} - \dfrac{4x_2}{50} \end{cases}$$

Queda verificar que la solución general es

$$\begin{cases} x_1(t) = C_1 e^{-\frac{t}{25}} + C_2 e^{-\frac{3t}{25}} \\ x_2(t) = 2C_1 e^{-\frac{t}{25}} - 2C_2 e^{-\frac{3t}{2}} \end{cases}$$

Problema 3.20 Un tanque A contiene 100 galones de salmuera en la que se han disuelto 100 libras de sal, y un tanque B contiene 100 galones de agua. Al tanque A empieza a entrar agua a razón de 2 galones por minuto, la mezcla que se produce con la salmuera, sale del tanque A al tanque B a razón de 3 galones por minuto. Desde el tanque B se bombea un galón por minuto al tanque A (retroalimentación), y de éste se expulsan fuera 2 galones por minuto. Hallar la cantidad de sal en ambos tanques al cabo de una hora cuarenta minutos.

Te puedes hacer un esquema gráfico de la situación. El agua que entra al tanque A proviene de una llave, no del tanque B. Después de leer el problema, de seguro, tienes claro que, si x e y son las cantidades de sal en tanque A y B, respectivamente, entonces las condiciones iniciales son $x(0) = 100$ e $y(0) = 0$. El sistema de ecuaciones que se establece es

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\frac{3x}{100} + \frac{y}{100} \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{3x}{100} - \frac{3y}{100} \end{aligned}$$

En forma matricial esto toma la forma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \frac{1}{100} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Para los valores propios

$$\lambda^2 + 6\lambda + 6 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = -3 + \sqrt{3}, \quad \lambda_2 = -3 - \sqrt{3}$$

Para los vectores propios asociados usamos el siguiente truco. Reemplaza el λ en el determinante

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 \\ 3 & -3-\lambda \end{vmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} -\sqrt{3}x + y = 0 \\ 3x - \sqrt{3}y = 0 \end{cases}$$

al resolver se deduce que, si $x = \sqrt{3}$, entonces $y = 3$. De igual manera hallas el otro vector propio. Por tanto

$$E_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad E_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -3 \end{pmatrix}$$

De esta forma,

$$X(t) = C_1 \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 3 \end{pmatrix} e^{(-3+\sqrt{3})/100} + C_2 \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -3 \end{pmatrix} e^{(-3-\sqrt{3})/100}$$

de donde,

$$\begin{cases} x(t) &= C_1\sqrt{3}e^{(-3+\sqrt{3})/100} + C_2\sqrt{3}e^{(-3-\sqrt{3})/100} \\ y(t) &= 3C_1\sqrt{3}e^{(-3+\sqrt{3})/100} - 3C_2\sqrt{3}e^{(-3-\sqrt{3})/100} \end{cases}$$

Con las condiciones iniciales determinamos las constantes.

$$\begin{aligned} x(0) = 100 &\Longrightarrow 100 = x(t)C_1\sqrt{3} + C_2\sqrt{3} \Longrightarrow C_1 + C_2 = 100\sqrt{3} \\ y(0) = 0 &\Longrightarrow 0 = 3C_1 - 3C_2 = 0 \end{aligned}$$

De esto,

$$C_1 = 50\sqrt{3}, \qquad C_2 = 50\sqrt{3}$$

En consecuencia,

$$\begin{cases} x(t) &= 50\left[e^{(-3+\sqrt{3})/100} + e^{(-3-\sqrt{3})/100}\right] \sim 14,5 \\ y(t) &= 50\sqrt{3}\left[e^{(-3+\sqrt{3})/100} - e^{(-3-\sqrt{3})/100}\right] \sim 13,62 \end{cases}$$

Problema 3.21 Un recipiente contiene 100 litros de salmuera en la que hay disueltos 10 kilos de sal. En el recipiente entra agua con velocidad de 3 litros por minuto, produciéndose una mezcla, que a su vez, se traspasa, con la misma velocidad a un segundo recipiente de 100 litros de capacidad, y que se encuentra lleno de agua limpia, pura y cristalina. De este segundo recipiente sale el exceso de líquido.

1. Hallar la cantidad de sal que contiene el segundo recipiente al cabo de una hora.
2. Determinar la cantidad máxima de sal en el segundo recipiente, y el tiempo t en que se alcanza esa máxima cantidad de sal.

Este problema da origen a un lindo y hermoso sistema de ecuaciones. Sea x la cantidad de sal en el primer recipiente, e y la cantidad de sal en el segundo, entonces

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= 0 - \dfrac{3x}{100} \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} &= \dfrac{3x}{100} - \dfrac{3y}{100} \end{cases}$$

De la primera ecuación se obtiene

$$\ln x = -\frac{3t}{100} + \ln C \Longrightarrow x(t) = C\, e^{(-3t/100)}$$

como $x(0) = 10$, entonces $C = 10$, con lo cual

$$x(t) = 10\, e^{(-3t/100)}$$

es la cantidad de sal en todo tiempo t que hay en el primer recipiente.

Para resolver en y, miramos la segunda ecuación, y como ya encontramos $x(t)$, lo llevamos para reemplazarlo.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{3}{100} \cdot 10\, e^{(-3t/100)} - \frac{3y}{100}$$

O bien,

$$\frac{dy}{dt} + \frac{3}{100} y = \frac{3}{10} e^{(-3t/100)}$$

¡hermosa lineal! Su solución tiene la forma

$$y = e^{(-3t/100)} \left[\int e^{(3t/100)} \cdot \frac{3}{10} e^{(-3t/100)}\, dt + C \right] = e^{(-3t/100)} \left[\frac{3t}{10} + C \right]$$

como $y(0) = 0$, entonces $C = 0$, con lo cual,

$$y = \frac{3t}{10} e^{(-3t/100)}$$

Al cabo de una hora (60 minutos) se tiene que la cantidad de sal en el segundo tanque es

$$y(60) = \frac{180}{10} e^{(-180/100)} = 2,9753$$

Para determinar la máxima cantidad de sal en el segundo recipiente, se recurre a la derivada.

$$y = \frac{3t}{10} e^{(-3t/100)} \Longrightarrow y' = \frac{3t}{10} - \frac{9}{1000} t\, e^{(-3t/100)}$$

al igualar la derivada a cero se halla que

$$t = \frac{100}{3} = 33,33 \text{ minutos}$$

es el tiempo en que se alcanza la máxima cantidad de sal, siendo ésta de

$$y(\frac{100}{3}) = \frac{3}{10}\frac{100}{3}e^{-1} = \frac{10}{e} = 3,6787944$$

Problema 3.22 Verificar que $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & xe^{2t} \\ -e^{2t} & e^{2t} - te^{2t} \end{pmatrix}$ es una matriz fundamental del sistema

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Se debe verificar que $\Phi'(t) = A\Phi(t)$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Veamos si ello ocurre. Para $\Phi'(t)$ tenemos

$$\Phi'(t) = \begin{pmatrix} 2e^{2t} & e^{2t} + 2te^{2t} \\ -2e^{2t} & e^{2t} - 2te^{2t} \end{pmatrix}$$

Para $A\Phi(t)$ se tiene:

$$\begin{aligned} A\Phi(t) &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ -e^{2t} & e^{2t} - te^{2t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2e^{2t} & e^{2t} + 2te^{2t} \\ -2e^{2t} & e^{2t} - 2te^{2t} \end{pmatrix} \end{aligned} = \Phi'(t)$$

En consecuencia $\Phi(t)$ es matriz fundamental del sistema dado.

Problema 3.23 Resolver el sistema $\begin{cases} x' &= y \\ y' &= x \end{cases}$

En la segunda ecuación

$$y' = x \Longrightarrow y'' = x' \Longrightarrow y'' - y = 0$$

En operadores

$$(D^2 - 1)[y] = 0 \Longrightarrow y = C_1 e^t + C_2 e^{-t}$$

Para hallar x derivamos esta última ecuación

$$y = C_1 e^t + C_2 e^{-t} \Longrightarrow y' = x = C_1 e^t - C_2 e^{-t}$$

en consecuencia,

$$\begin{cases} x &= C_1 e^t - C_2 e^{-t} \\ \\ y &= C_1 e^t + C_2 e^{-t} \end{cases}$$

es la familia de soluciones.

Problema 3.24 Resolver el sistema $\begin{cases} x' - x + 2y &= 0 \\ 3x + y' &= 0 \end{cases}$

Se deriva la primera ecuación

$$x'' - x' + 2y' = 0$$

Se despeja y' de la segunda ecuación y se reemplaza en la última ecuación

$$x'' - x' + 2(-3x) = 0 \Longrightarrow x'' - x' - 6x = 0$$

En operadores esta ecuación tiene la forma

$$(D^2 - D - 6)[x] = 0 \Longrightarrow (D-3)(D+2) = 0$$

La solución de esta es

$$x(t) = C_1e^{3t} + C_2e^{-2t}$$

Para hallar el $y(t)$ despejamos, en la primera ecuación del sistema, la variable y

$$y = \frac{1}{2}(x - x')$$

Se reemplaza aquí el $x(t)$ hallado y su derivada.

$$y(t) = \frac{1}{2}(C_1e^{3t} + C_2e^{-2t} - 3C_1e^{3t} + 2C_2e^{-2t}) = \frac{1}{2}(-2C_1e^{3t} + 3C_2e^{-2t}$$

Se concluye que la solución general es

$$\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} C_1e^{3t} + C_2e^{-2t} \\ -C_1e^{3t} + \frac{3}{2}C_2e^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{-2t} \\ -e^{3t} & \frac{3}{2}e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

Problema 3.25 Resolver el sistema $\begin{cases} x' &= -5x - y \\ y' &= 4x - y \end{cases}, \qquad x(1) = 0,\ y(1) = 1$

Al eliminar $y(t)$ de llega a la ecuación auxiliar

$$(\lambda + 3)^2 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 3 = \lambda_2$$

de lo cual

$$x(t) = c_1e^{-3t} + +c_2te^{-3t}$$

Se despeja $y(t)$ del sistema y se halla que

$$y(t) = -2c_1e^{-3t} - 2c_2te^{-3t} - c_2e^{-3t}$$

Aplicando condiciones iniciales se obtiene

$$x(t) = e^{3-3t} - te^{3-3t} \qquad\qquad y(t) = -e^{3-3t} + 2te^{3-3t}$$

Problema 3.26 transformar el sistema a ecuación diferencial y resolver. $\begin{cases} x' &= 3x - 2y \\ y' &= 2x - y \end{cases}$

Elegimos la segunda ecuación

$$\frac{dy}{dt} = 2x - y \Longrightarrow \frac{d^2y}{dt^2} = 2\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt}$$

hacemos los reemplazos pertinentes para tener

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 2(3x-2y) - (2x-y) = 4x - 3y = 4 \cdot \frac{1}{2}\left(y + \frac{dy}{dt}\right) - 3y = 2\frac{dy}{dt} - y$$

Escribiendo en operadores esta ecuación,

$$(D^2 - 2D + 1)[y] = 0 \Longleftrightarrow (D-1)^2[y] = 0$$

de donde,

$$y = C_1 e^t + C_2 t\, e^t$$

Reemplazamos esto en la segunda ecuación del sistema original.

$$x = \frac{1}{2}\left(C_1 e^t + C_2 t\, e^t + C_1 e^t + C_2 e^t + C_1 e^t + C_2 t\, e^t\right)$$

de donde

$$x = \frac{1}{2} e^t\,(2C_1 + C_2 + 2C_2 t)$$

En consecuencia, la familia solución es

$$x = \frac{1}{2} e^t\,(2C_1 + C_2 + 2C_2 t) \qquad\qquad y = (C_1 + t\, C_2)\, e^t$$

Problema 3.27 Resolvemos el sistema $\begin{cases} x_1' &= x_1 + 3x_2 \\ x_2' &= x_1 - x_2 \end{cases}$

Escrito matricialmente tiene la forma

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Para tener la ecuación característica formamos el determinante

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

del cual obtenemos

$$\lambda_1 = 2, \qquad \lambda_2 = -2$$

tenemos entonces, valores propios distintos. Sus vectores propios asociados son:

$$\lambda = 2 \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

lo que equivale a resolver el sistema

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 &= 2x_1 \\ x_1 - x_2 &= 2x_2 \end{cases} \Longrightarrow x_1 = 3x_2$$

considerando $x_1 = 3$, entonces $x_2 = 1$, con lo cual, el vector propio asociado es

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Con un poco de paciencia, debieras poder calcular $\vec{v}_2$ y tener que

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Con esto tenemos la solución general

$$\vec{X}(t) = C_1\,\vec{v}_1\,e^{2t} + C_2\,\vec{v}_2\,e^{-2t}$$

lo que equivale a

$$\vec{X}(t) = C_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t}$$

O bien,

$$\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} 3C_1\,e^{2t} + C_2\,e^{-2t} \\ C_1\,e^{2t} - C_2\,e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Problema 3.28 Hallar tres soluciones linealmente independientes, una matriz fundamental y la solución general del siguiente sistema:

$$\vec{X}\,' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \vec{X}$$

El polinomio característico de A es

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 4 \\ 3 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

de lo cual $p(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda-3)(\lambda+2)$, de modo que los valores propios de A son $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3$ y $\lambda_3 = -2$. Hallemos los vectores propios asociados a λ_1, λ_2, λ_3:

- **Valor propio $\lambda = 1$**

$$(A - 1I)\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 4 \\ 3 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matriz se puede escalonar y llevar a

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolviendo

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se obtiene:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \vec{X}_1(t) = e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^t \\ 4e^t \\ e^t \end{pmatrix}$$

- **Valor propio** $\lambda = 3$

De forma análoga se obtiene:

$$\lambda = 3 \Longrightarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \vec{X}_2(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 2e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$$

- **Valor propio** $\lambda = -2$

$$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \vec{X}_3(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Las tres soluciones son linealmente independientes, esto significa que la matriz fundamental es

$$\Phi(t) = [\vec{X}_1, \vec{X}_2, \vec{X}_3] = \begin{pmatrix} -e^t & e^{-2t} & e^{3t} \\ 4e^t & -e^{-2t} & 2e^{3t} \\ e^t & -e^{-2t} & e^{3t} \end{pmatrix}$$

La solución general es

$$\begin{aligned} \vec{X}(t) &= c_1\vec{X}_1 + c_2\vec{X}_2 + c_3\vec{X}_3 \\ &= \begin{pmatrix} -c_1e^t + c_2e^{3t} - c_2e^{-2t} \\ 4c_1e^t + 2c_2e^{3t} + c_3e^{-2t} \\ c_1e^t + c_2e^{3t} + c_2e^{-2t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Problema 3.29 Resolver el sistema $\vec{X}' = \begin{pmatrix} 3 & -18 \\ 2 & -9 \end{pmatrix} \vec{X}$

La ecuación característica es

$$\det(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} 3-\lambda & -18 \\ 2 & -9-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

de lo cual

$$(\lambda + 3)^2 = 0 \Longrightarrow \lambda = -3$$

valor propio de multiplicidad 2. Hallemos su vector propio

$$(A - 3I)\vec{v} = \vec{0} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 6 & -18 \\ 2 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Al resolver $v_1 = 3v_2$. Si $v_2 = 1$, entonces $v_1 = 3$. Se tiene que el vector propio asociado es

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \vec{x}_1(t) = e^{-3t} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Debemos hallar la segunda solución linealmente independiente. De acuerdo a lo establecido,

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

Resolvemos la ecuación

$$(A-\lambda_1 I)\vec{w}=\vec{v}$$

Tenemos:

$$\left[\begin{pmatrix}3 & -18\\ 2 & -9\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}w_1\\ w_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}$$

Al resolver se obtiene el sistema

$$\begin{cases}6w_1-18w_2 & =3\\ 2w_1-6w_2 & =1\end{cases}$$

Como una ecuación es múltiplo escalar de la otra, existen infinitas soluciones. En particular, si $w_2=0$, entonces $w_1=\frac{1}{2}$. Luego

$$\vec{X}_2(t)=\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}te^{-3t}+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix}e^{-3t}$$

es la segunda solución del sistema lineal dado. En consecuencia, la solución general es

$$\vec{X}(t)=C_1\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}e^{-3t}+C_2\left[\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}te^{-3t}+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix}e^{-3t}\right]$$

Problema 3.30 Resolver el sistema $\begin{cases}x' & =6x-y\\ y' & =5x+4y\end{cases}$

Se buscan los valores propios

$$\begin{vmatrix}6-\lambda & -1\\ 5 & 4-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-10\lambda+29=0$$

$$\lambda_1=5+2i,\quad \lambda_2=5-2i$$

la solución es

$$\vec{X}=c_1\begin{pmatrix}1\\ 1-2i\end{pmatrix}e^{(5+2i)t}+c_2\begin{pmatrix}1\\ 1+2i\end{pmatrix}e^{(5-2i)t}$$

Problema 3.31 Resolver, usando valores y vectores propios. $\begin{cases}x' & =-y\\ y' & =x\end{cases}$

Se escribe el sistema en forma matricial

$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

con ecuación característica

$$\begin{vmatrix}-\lambda & -1\\ 1 & -\lambda\end{vmatrix}=0$$

de donde $\lambda=\pm i$, y de lo cual $a=0,\ b=\pm 1$. Buscamos los vectores propios asociados:

$$\lambda=i\Longrightarrow\begin{pmatrix}-i & -1\\ 1 & -i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

lo que equivale a resolver el sistema

$$\begin{cases}-iv_1-v_2 & =0\\ v_1-iv_2 & =0\end{cases}\Longrightarrow v_2=1,\ v_1=i$$

entonces el vector propio asociado es

$$\vec{v}_i = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

El otro vector propio asociado lo hallamos de

$$\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Con esto, las soluciones linealmente independientes del sistema son:

$$\begin{aligned} \vec{X}_1(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \operatorname{sen} t = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ \cos t \end{pmatrix} \\ \vec{X}_2(t) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos t - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \operatorname{sen} t = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\operatorname{sen} t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por tanto, la solución general la podemos escribir en la forma

$$\vec{X}(t) = C_1 \vec{X}_1(t) + C_2 \vec{X}_2(t) = C_1 \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ \cos t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\operatorname{sen} t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \operatorname{sen} t & C_2 \cos t \\ C_1 \cos t & -C_2 \operatorname{sen} t \end{pmatrix}$$

Problema 3.32 Resolver por valores y vectores propios. $\vec{X}' = \begin{pmatrix} 12 & -17 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \vec{X}$

Hallemos el polinomio característico

$$p(\lambda) = \begin{pmatrix} 12-\lambda & -17 \\ 4 & -4-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 8\lambda + 20 = 0$$

Al resolver, los valores propios son $\lambda_1 = 4+2i$ y $\lambda_2 = 4-2i$.

$$\lambda_1 = 4+2i \Longrightarrow \begin{pmatrix} 8-2i & -17 \\ 4 & -8-2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Al resolver se halla que

$$(8-2i)v_1 - 17v_2 = 0 \quad \text{y} \quad 4v_1 + (-8-2i)v_2 = 0$$

como estas dos ecuaciones son linealmente dependientes, se toma una cualquiera de las dos, por ejemplo la primera

$$v_2 = \frac{1}{17}(8-2i)v_1, \quad v_1 = v_1$$

de esto,

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{17}(8-2i) \end{pmatrix} v_1$$

Considerando $v_1 = 17$ se tiene

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8-2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 8 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Elegimos

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 17 \\ 8 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto las dos soluciones vectoriales reales son:

$$\vec{x}_1(t) = e^{at}\left(\vec{v}_1 \cos bt - \vec{v}_2 \operatorname{sen} bt\right) = e^{4t}\left(\begin{pmatrix} 17 \\ 8 \end{pmatrix} \cos 2t + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \operatorname{sen} 2t\right)$$
$$= e^{4t}\begin{pmatrix} 17\cos 2t \\ 8\cos 2t + 2\operatorname{sen} 2t \end{pmatrix}$$

y también

$$\vec{x}_2(t) = e^{at}\left(\vec{v}_1 \operatorname{sen} bt + \vec{v}_2 \cos bt\right) = e^{4t}\left(\begin{pmatrix} 17 \\ 8 \end{pmatrix} \operatorname{sen} 2t + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \cos 2t\right)$$
$$= e^{4t}\begin{pmatrix} 17\operatorname{sen} 2t \\ 8\operatorname{sen} 2t - 2\cos 2t \end{pmatrix}$$

Nota: si se utiliza el otro valor propio $\lambda_2 = 4 - 2i$ y se sigue el mismo procedimiento se llega a que

$$\vec{x}_1(t) = e^{4t}\begin{pmatrix} 17\cos 2t \\ 8\cos 2t - 2\operatorname{sen} 2t \end{pmatrix} \qquad \vec{x}_2(t) = e^{4t}\begin{pmatrix} 17\operatorname{sen} 2t \\ 8\operatorname{sen} 2t + 2\cos 2t \end{pmatrix}$$

que también son dos soluciones linealmente independientes de la EDO, es decir, que de acuerdo a la selección que hagamos ya sea en los valores propios o en las ecuaciones lineales cuando escalonemos la matriz de coeficientes, tendremos respuestas diferentes, esto se debe a que escogemos vectores base $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ diferentes.

Problema 3.33 Resolver por valores y vectores propios $\vec{X}\,' = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\vec{X}$

Valores propios $\lambda = \pm 2i$. Los vectores propios REALES son

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La solución final es

$$\vec{X} = C_1\begin{pmatrix} 2\cos 2t - 2\operatorname{sen} 2t \\ -\cos 2t \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 2\cos 2t + 2\operatorname{sen} 2t \\ -\operatorname{sen} 2t \end{pmatrix}$$

Problema 3.34 Determinar la solución general del sistema no homogéneo

$$\vec{X}\,' = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\vec{X} + \begin{pmatrix} 3t \\ e^{-t} \end{pmatrix}$$

Primero se resuelve el sistema homogéneo

$$\vec{X}\,' = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\vec{X}$$

La ecuación característica de la matriz de coeficientes es

$$det(A - AI) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 \\ 2 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda+5) = 0$$

de modo que los valores propios son $\lambda_1 = -2$ y $\lambda_2 = -5$. Los vectores propios que corresponden son, respectivamente,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Los vectores solución del sistema son:

$$\vec{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{pmatrix}, \quad \vec{X}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-5t} = \begin{pmatrix} e^{-5t} \\ -2e^{-5t} \end{pmatrix}$$

Los elementos en $\vec{X}_1$ forman la primera columna de $\Phi(t)$ y los elementos de $\vec{X}_2$, la segunda; por consiguiente, la matriz fundamental es

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{pmatrix}$$

Para hallar su inversa usamos la fórmula para la inversa de una matriz dos por dos

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

De esto se obtiene que la inversa de la fundamental es

$$\Phi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}e^{2t} & \frac{1}{3}e^{2t} \\ \frac{1}{3}e^{5t} & -\frac{1}{3}e^{5t} \end{pmatrix}$$

Ahora calculamos la solución particular

$$\vec{X}_p = \phi(t) \int \phi^{-1}(t) \vec{f}(t)\, dt$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} \frac{2}{3}e^{2t} & \frac{1}{3}e^{2t} \\ \frac{1}{3}e^{5t} & -\frac{1}{3}e^{5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3t \\ e^{-t} \end{pmatrix} dt$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} 2te^{2t} + \frac{1}{3}e^{t} \\ te^{5t} - \frac{1}{3}e^{4t} \end{pmatrix} dt$$

Integrando término a término y multiplicando las matrices se llega a que

$$\vec{X}_p = \begin{pmatrix} \frac{6}{5}t + -\frac{27}{50} + \frac{1}{4}e^{-t} \\ \\ \frac{3}{5}t - \frac{21}{50} + \frac{1}{2}e^{-t} \end{pmatrix}$$

En consecuencia, la solución general del sistema dado es

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{6}{5}t + -\frac{27}{50} + \frac{1}{4}e^{-t} \\ \\ \frac{3}{5}t - \frac{21}{50} + \frac{1}{2}e^{-t} \end{pmatrix}$$

que puede desarrollarse y tener que

$$\vec{X} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-5t} + c_1 \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} t - c_1 \begin{pmatrix} \frac{27}{50} \\ \frac{21}{50} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} e^{-t}$$

Problema 3.35 Resolver por variación de parámetros el sistema

$$\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{X} + \begin{pmatrix} e^t \\ te^t \\ e^t \end{pmatrix}$$

Los valores propios de la matriz son $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1$ y $\lambda_3 = -1$. Sus vectores propios son los siguientes:

Vector propio de $\lambda_1 = 1$

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolviendo este sistema se tiene que

$$\vec{v}_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Así, tenemos la solución

$$\vec{X}_1(t) = e^{\lambda_1 t}\vec{v}_{\lambda_1} = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Como la multiplicidad del valor propio $\lambda_1 = 1$ es dos, buscamos un segundo vector propio en la forma

$$(A - \lambda_1 I)\vec{w} = \vec{v}$$

en donde $\vec{w}$ es por determinar y $\vec{v} = \vec{v}_{\lambda_1}$. Se tiene:

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Al resolver se halla $w_1 = w_2$, $w_3 = 1 - w_1$. Luego, si se considera $w_1 = 1$ resulta $w_2 = 1$ y $w_3 = 0$. El segundo vector propio asociado al valor propio λ_1 es

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego, tenemos la solución

$$\vec{X}_2(t) = e^{\lambda_1 t}[\vec{v}_2 + t\vec{v}_1] = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Vector propio de $\lambda_1 = -1$

Se sigue la misma rutina del primer valor propio. Se obtiene

$$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Con esto se tiene la tercera solución

$$\vec{X}_3(t) = e^{-t}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

De esta manera, una matriz fundamental es

$$\Phi(t) = [\vec{X}_1(t), \vec{X}_2(t), \vec{X}_3(t)]^T = \begin{pmatrix} e^t & e^t + te^t & e^{-t} \\ e^t & e^t + te^t & 0 \\ -e^t & -te^t & e^{-t} \end{pmatrix}$$

Hemos logrado, con mucho trabajo, llegar a la solución del sistema homogéneo, esto es

$$\vec{X}(t) = \Phi(t)\vec{C} = \begin{pmatrix} e^t & e^t + te^t & e^{-t} \\ e^t & e^t + te^t & 0 \\ -e^t & -te^t & e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\C_2\\C_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^tC_1 + C_2(e^t+te^t) + C_3e^{-t} \\ e^tC_1 + C_2(e^t+te^t) \\ -e^tC_1 - C_2te^t + C_3e^{-t} \end{pmatrix}$$

En este momento hacemos variación de parámetros considerando la ecuación (12), esto es $\Phi(t)\vec{C}'(t) = \vec{F}(t)$. Esto significa debemos resolver el sistema

$$\begin{cases} e^tC_1'(t) + C_2'(t)(e^t+te^t) + C_3'(t)e^{-t} & = e^t \\ e^tC_1'(t) + C_2'(t)(e^t+te^t) & = te^t \ = \\ -e^tC_1'(t) - C_2'(t)te^t + C_3'(t)e^{-t} & = e^t \end{cases}$$

Observar que aparecen sólo derivadas del vector $\vec{C}(t)$. Tomando la diferencia entre la primera ecuación y la segunda se encuentra

$$C_3'(t) = e^{2t} - te^{2t}, \quad C_3(t) = \frac{3}{4}e^{2t} - \frac{t}{2}e^{2t}$$

Sumando la primera con la tercera y reemplazando el $C_3(t)$:

$$C_2'(t) = \frac{1}{2} + t, \quad C_2(t) = \frac{t}{2} + \frac{t^2}{2}$$

Reemplazando $C_2(t)$ y $C_3(t)$ en la ecuación 2

$$C_1'(t) = -\frac{1}{2} - \frac{t}{2} - t^2, \quad C_1(t) = -\frac{t}{2} - \frac{t^2}{4} - \frac{t^3}{3}$$

Ahora nos vamos a reemplazar en la ecuación

$$\vec{X}_p = \Phi(t)\vec{C}(t)$$

Después de simplificar se llega a algo como (favor calcular)

$$\vec{X}_p = \begin{pmatrix} \left(\frac{t^3}{6} + \frac{t^2}{4} + \frac{3}{4}\right)e^t \\ \left(\frac{t^3}{6} + \frac{3t^2}{4}\right)e^t \\ \left(\frac{5t^3}{6} + \frac{3t^2}{4} + \frac{3}{4}\right)e^t \end{pmatrix}$$

La solución general es (no la vamos a escribir)

$$\vec{X} = \vec{X}_h(t) + \vec{X}_p$$

Problema 3.36 Resolver, sujeto a las condiciones $x(0)=8$, $y(0)=3$, el sistema

$$\begin{cases} x' &= 2x-3y \\ y' &= y-2x \end{cases}$$

Definimos previamente $\mathscr{L}[x(t)]=F(s)$ y $\mathscr{L}[y(t)]=G(s)$. Se aplica transformada a cada ecuación del sistema

$$\begin{cases} \mathscr{L}[x'] &= 2\mathscr{L}[x]-3\mathscr{L}[y] \\ \mathscr{L}[y'] &= \mathscr{L}[y]-2\mathscr{L}[x] \end{cases}$$

Desarrollando se llega a

$$\begin{cases} sF(s)-x(0) &= 2F(s)-3G(s) \\ sG(S)-y(0) &= G(s)-2F(s) \end{cases}$$

Agrupando

$$\begin{cases} (s-2)F(s)+3G(s) &= 8 \\ 2F(s)+(s-1)G(S) &= 3 \end{cases}$$

Multiplicando por 2 la primera ecuación y por $(s-2)$ la segunda, se resta para hallar que

$$G(s)=\frac{3s-22}{(s+1)(s-4)}$$

Por fracciones parciales

$$G(s)=\frac{5}{s+1}-\frac{2}{s-4}$$

de los cual

$$y(t)=5e^{-5t}-2e^{4t}$$

Para $F(s)$ se halla que

$$F(s)=\frac{8s-17}{(s+1)(s-4)}=\frac{5}{s+1}+\frac{3}{s-4}$$

de manera que

$$x(t)=5e^{-5t}+3e^{4t}$$

Problema 3.37 Resolver, sujeto a las condiciones: $x(0)=\frac{1}{2}$, $y(0)=\frac{1}{5}$, el sistema

$$\begin{cases} x' &= 6x+y+6t \\ y' &= 4x+3y-10t+4 \end{cases}$$

Se aplica Transformada de Laplace a cada ecuación del sistema

$$\begin{cases} sx(s)-\frac{1}{2}-6x(s)-y(s) &= \frac{6}{s^2} \\ sy(s)-\frac{1}{5}-4x(s)-3y(s) &= -\frac{10}{s^2}+\frac{4}{s} \end{cases}$$

Esto equivale a

$$\begin{cases} x(s)[s-6]-y(s) &= \frac{6}{s^2}+\frac{1}{2} \\ y(s)[s-3]-4x(s)-3y(s) &= -\frac{10}{s^2}+\frac{4}{s}+\frac{1}{5} \end{cases}$$

de lo cual

$$\begin{cases} x(s)[s-6]-y(s) & = \frac{12+s^2}{2s^2} \\ \\ y(s)[s-3]-4x(s)-3y(s) & = \frac{s^2-50+20s}{5s^2} \end{cases}$$

Multiplicamos por $(s-3)$ la primera ecuación y sumando ambas ecuaciones:

$$x(s)[s^2-9s+14] = \frac{12+s^2}{2s^2}[s-3] + \frac{s^2-50+20s}{5s^2}$$

Factorizando y expandiendo el lado derecho se llega a

$$x(s) = \frac{23}{50}\left[\frac{1}{s-2}\right] + \frac{107}{175}\left[\frac{1}{s-7}\right] - \frac{4}{7}\left[\frac{1}{s}\right] - 2\left[\frac{1}{s^2}\right]$$

Sacando transformada inversa obtenemos:

$$x(t) = \frac{107}{175}e^{7t} - \frac{4}{7} - 2t + \frac{23}{50}e^{2t}$$

Sustituyendo lo que vale $x(s)$ se halla que

$$y(t) = \frac{107}{75}e^{7t} + \frac{10}{7} + 6t - \frac{46}{25}e^{2t}$$

Problema 3.38 Resolver el sistema

$$\begin{cases} x'' + 3y' - 4x + 6y & = & 0 \\ x' + y'' - 2x + 4y & = & 0 \end{cases}$$

No podemos usar valores y vectores propios. Se puede aplicar el método de eliminación, pero primero lo paso a operadores

$$\begin{cases} (D^2-4)[x] + 3(D+2)[y] = 0 \\ (D-2)[x] + (D^2+4)[y] = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} (D^2-4)[x] + 3(D+2)[y] & = 0 \\ -(D-2)(D+2)[x] - (D+2)(D^2+4)[y] & = 0 \end{cases}$$

Se multiplicó la segunda ecuación del sistema por $-(D+2)$. Al sumar queda el sistema equivalente

$$\begin{cases} (D^2-4)[x] + 3(D+2)[y] & = & 0 \\ 3(D+2)[y] - (D+2)(D^2+4)[y] & = & 0 \end{cases} \sim \begin{cases} (D^2-4)[x] + 3(D+2)[y] & = & 0 \\ (D+2)(D^2+1)[y] & = & 0 \end{cases}$$

Ahora resolvemos la ecuación solitaria (que tiene y)

$$(D+2)(D^2+1)[y] = 0 \Longrightarrow y(t) = c_1\, e^{-2t} + c_2\, cos\, t + c_3\, sen\, t$$

LLevamos esto a la primera ecuación (en el último sistema) para tener

$$(D^2-4)[x] = -3(D+2)(c_1\, e^{-2t} + c_2\, \cos t + c_3\, \operatorname{sen} t)$$

aquí tienes que sacar lápiz y papel, por que después de trabajar el lado derecho de la igualdad, debes obtener

$$(D^2-4)[x] = (2c_3 - c_2)\, \operatorname{sen} t + (2c_2 + c_3)\, \cos t$$

Aplicamos el aniquilador (D^2+1). Se tiene

$$x_h = c_1\,e^{-2t} + c_2\,\cos t + c_3\,\operatorname{sen} t$$

eso como solución de la homogénea. Ahora,

$$(D^2-4)[A\,\cos t + B\,\operatorname{sen} t] = (2c_3 - c_2)\,\operatorname{sen} t + (2c_2 + c_3)\,\cos t$$

se obtiene

$$A = -\frac{1}{5}\,(2c_2 + c_3), \qquad B = -\frac{1}{5}\,(2c_3 - c_2)$$

En consecuencia,

$$x(t) = c_4\,e^{-2t} + c_5\,e^{2t} - \frac{1}{5}\,(2c_2 + c_3)\cos t - \frac{1}{5}\,(2c_3 - c_2)\,\operatorname{sen} t$$

Como $x(t)$ e $y(t)$ deben satisfacer ambas ecuaciones, hay que comprobar. Para ello usemos la segunda ecuación.

$$x' + y'' - 2x + 4y = 0 \Longrightarrow (8c_1 - 4c_4)\,e^{-2t} + 4c_3\,\operatorname{sen} t + 4c_2\,\cos t = 0$$

de donde

$$c_2 = c_3 = 0, \quad c_4 = 2c_1$$

En consecuencia, la solución general del sistema es

$$\begin{cases} x(t) &=& 2c_1\,e^{-2t} + c_5\,e^{2t} \\ y(t) &=& c_1\,e^{-2t} \end{cases}$$

Problema 3.39 Hallar solución general del sistema

$$\begin{cases} x' &=& 1 + y - t\,\operatorname{cotg} t\ \csc t \\ y' &=& -x + t\,\csc t \end{cases}$$

Resolvemos en forma matricial

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 - t\,\operatorname{cotg} t\,\csc t \\ t\,\csc t \end{pmatrix}$$

La homogénea asociada

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

tiene valores propios

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \lambda = \pm i$$

Vamos a calcular los vectores propios asociados.

$$\lambda = i \Longrightarrow \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Al resolver

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De esta manera, las soluciones L.I. son de la forma

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cos t + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \operatorname{sen} t = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} t \\ -\cos t \end{pmatrix}$$

$$x_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos t - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \operatorname{sen} t = \begin{pmatrix} -\cos t \\ \operatorname{sen} t \end{pmatrix}$$

de modo que la solución de la homogénea es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} t \\ -\cos t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -\cos t \\ \operatorname{sen} t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C_1 \operatorname{sen} t - C_2 \cos t \\ -C_1 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t \end{pmatrix}$$

Con variación de parámetros vamos en busca de la solución general del sistema.

$$\begin{cases} -C_1{}' \operatorname{sen} t - C_2{}' \cos t = 1 - t \operatorname{cotg} t \csc t \\ -C_1{}' \cos t + C_2{}' \operatorname{sen} t = t \csc t \end{cases}$$

si multiplicas la primera ecuación por $\operatorname{sen} t$ y la segunda por $\cos t$, tienes que

$$-C_1{}' = \operatorname{sen} t \Longrightarrow C_1 = \cos t + \overline{C}_1$$

al reemplazar esto en la segunda ecuación

$$\operatorname{sen} t \cos t + C_2{}' \operatorname{sen} t = t \csc t \Longrightarrow C_2 = t \csc^2 t - \cos t$$

al integrar, por partes,

$$C_2 = -t \operatorname{cotg} t + \ln(\operatorname{sen} t) + \operatorname{sen} t + \overline{C_2}$$

En consecuencia, la solución general del sistema es

$$x(t) = -(\overline{C}_1 + \cos t) \operatorname{sen} t - (\ln(\operatorname{sen} t) - t \operatorname{cotg} t + \operatorname{sen} t + \overline{C}_2) \cos t$$

$$y(t) = -(\overline{C}_1 + \cos t) \cos t + (\ln(\operatorname{sen} t) - t \operatorname{cotg} t + \operatorname{sen} t + \overline{C}_2) \operatorname{sen} t$$

Problema 3.40 Escribir como un sistema la ecuación diferencial $x'' + t x' - x = 0$
Hacemos $x' = y$, $z = y' = x''$, con lo cual, $x''' = z' = -t x' + x = -t y + x$. En consecuencia, el sistema equivalente a la ecuación es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -t & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 3.41 Resolver el sistema

$$\begin{cases} x'' + A y' = B \\ y'' - A x' = 0 \end{cases}, \quad A, B \text{ constantes}$$

Derivemos la segunda ecuación del sistema

$$y''' - Ax'' = 0 \Longrightarrow y''' = (B - Ay')A \Longrightarrow y''' + A^2 y' = AB$$

pasando esto a operadores,

$$D(D^2 + A^2)[y] = AB \Longrightarrow D^2(D^2 + A^2)[y] = 0$$

no olvidar que D "aniquila" cualquier constante. Se sigue que,

$$y_h = c_1 + c_2 \cos At + c_3 \operatorname{sen} At + c_4 t$$

Luego,

$$D(D^2 + A^2)[c_4 t] = AB \Longrightarrow D(A^2 c_4 t) = AB \Longrightarrow A^2 c_4 = AB \Longrightarrow c_4 = \frac{B}{A}$$

Con esto,

$$y(t) = c_1 + c_2 \cos At + c_3 \operatorname{sen} At + \frac{B}{A} t$$

No olvidar que la segunda ecuación del sistema es $y'' - Ax' = 0$. Derivando el $y(t)$ obtenido dos veces, y despejando x' vamos a calcular $x(t)$.

$$y'' - Ax' = 0 \Longrightarrow Ax' = -A^2 c_2 \cos At - A^2 c_3 \operatorname{sen} At$$

al dividir por $A \neq 0$ e integrar,

$$x(t) = -c_2 \operatorname{sen} At + c_3 \cos At + c_4$$

Problema 3.42 Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x_1{}' &= x_2 \\ x_2{}' &= x_3 \\ x_3{}' &= -6x_1 - 11x_2 - 6x_3 \end{cases}, \qquad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vamos a utilizar matrices

$$\begin{pmatrix} x_1{}' \\ x_2{}' \\ x_3{}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Valores propios

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -6 & -11 & -6-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 = 0 \Longrightarrow (\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3) = 0$$

de lo cual, los valores propios son:

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -2, \quad \lambda_3 = -3$$

Vectores propios

Saco el primero y te doy a conocer los dos restantes.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_1 \\ -v_2 \\ -v_3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De igual modo tienes que sacar

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \vec{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Con esto, la solución general es

$$y = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} e^{-2t} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} e^{-3t}$$

de donde, la solución particular se halla aplicando las condiciones iniciales

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 + C_2 + C_3 \\ -C_1 - 2C_2 - 3C_3 \\ C_1 + 4C_2 + 9C_3 \end{pmatrix} \Longrightarrow C_1 = 3,\ c_2 = -3,\ C_3 = 1$$

con lo cual,

$$y = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix} e^{-2t} + \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} e^{-3t}$$

Problema 3.43 Resolver el sistema

$$\begin{cases} (D^2-1)[x] + y & = & e^t \\ (D+1)[x] - (D+1)[y] & = & 3\,e^t \end{cases}$$

La segunda ecuación se multiplica por $(D-1)$ y se suma con la primera, teniéndose

$$\begin{cases} (D^2-1)[x] + y & = & e^t \\ D^2[y] & = & e^t \end{cases}$$

De inmediato se obtiene que

$$y = C_2 + C_1\,t + e^t$$

con esto nos vamos a la primera ecuación

$$(D^2-1)[x] + C_2 + C_1\,t + e^t = e^t \Longrightarrow (D^2-1)[x] = -c_2 - C_1\,t$$

Un buen aniquilador sabe hacer su trabajo

$$D^2\,(D^2-1)[x] = 0 \Longrightarrow x_H = k_1 + k_2\,t + k_3\,e^t + k_4\,e^{-t}$$

Ahora,

$$(D^2-1)[x_H] = -C_2 - C_1\,t \Longrightarrow -k_1 - k_2\,t = -C_2 - C_1\,t \Longrightarrow k_1 = C_2,\ k_2 = C_1$$

Por tanto,

$$x = C_2 + C_1\,t + k_3\,e^t + k_4\,e^{-t}$$

Si uno se da el trabajo de verificar estas soluciones se observa que x e y satisfacen la ecuación 1, y que x satisface la 2 a condición de que $k_3 = \frac{5}{2}$. En consecuencia, la solución general es

$$\begin{cases} x(t) = & C_2 + C_1\,t + \dfrac{5}{2}\,e^t + k_4\,e^{-t} \\ y(t) = & C_2 + C_1\,t + e^t \end{cases}$$

Problema 3.44 Resolver el sistema

$$\begin{cases} t\,\dfrac{dx}{dt} + y = & 0 \\ t\,\dfrac{dy}{dt} + x = & 0 \end{cases}$$

Se deriva la segunda ecuación

$$\frac{dy}{dt} + t\,\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = 0$$

Es obvio que $\dfrac{dx}{dt}$ "molesta". Se cambia por lo que dice la primera ecuación

$$t\,\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - \frac{y}{t} = 0$$

si multiplicas por t, tienes una hermosa ecuación de ... ¡Euler!

$$t^2\,\frac{d^2y}{dt^2} + t\,\frac{dy}{dt} - y = 0 \Longleftrightarrow t^2\,y'' + t\,y' - y = 0$$

Tienes dos alternativas; usas $y = x^k$ o bien $x = e^t$ (La decisión es tuya). Si eliges la primera opción, $y = x^k$, entonces $y' = k\,t^{k-1}$, $y'' = k(k-1)\,t^{k-2}$. Se reemplaza en la ecuación

$$t^2\,k\,(k-1)\,t^{k-2} + k\,t^{k-1} - t^k = 0 \Longrightarrow k = \pm 1$$

En consecuencia,

$$y = C_1\,t + C_2\,t^{-1}$$

Reemplazando este y en la segunda ecuación se obtiene

$$t(C_1 - C_2\,t^{-2}) + x = 0 \Longrightarrow x = -C_1\,t + C_2\,t^{-1}$$

Problema 3.45 Dado el sistema

$$\begin{cases} x' & = & 3x + 3y + t \\ y' & = & -x - y + 1 \end{cases}$$

1. Escribirlo en términos de operadores
2. Escribirlo en la forma matricial $X' = AX + B$
3. Hallar los valores propios y vectores propios asociados
4. Hallar la ecuación diferencial asociada al sistema

5. Resolver el sistema libre y democráticamente.

Respuesta

1. Más fácil que esto imposible

$$\begin{cases} (D-3)x-3y &= t \\ x+(D+1)y &= 1 \end{cases}$$

2. En forma matricial, el sistema queda como

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. Para valores y vectores propios se tiene

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 3 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \lambda\,(\lambda-2) = 0 \Longrightarrow \lambda_0 = 0,\ \lambda_2 = 2$$

de donde,

$$E_{\lambda_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad E_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. Hallemos la ecuación diferencial asociada

$$\begin{aligned} x'' = 3x' + 3y' + 1 &\Longrightarrow x'' - 3x' - 1 = 3(1 - x - y) \\ &\Longrightarrow x'' - 3x' + 3x - 4 + 3y = 0 \\ &\Longrightarrow x'' - 3x' + 3x - 4 + 3(x' - t - 3x) = 0 \\ &\Longrightarrow x'' - 2x' - 4 - t = 0 \end{aligned}$$

si la quieres en operadores, entonces

$$(D^2 - 2D)[x] = 4 + t$$

5. Si hay que resolver el sistema, que mejor que hacerlo a partir de la ecuación asociada, y con mis mejores “amigos” los operadores.

$$(D^2 - 2D)[x] = 4 + t$$

la homogénea tiene solución

$$x_h(t) = C_1 + C_2\,e^{2t}$$

El aniquilador de $t+4$ es D^2, por tanto,

$$D^3(D-2)[x] = 0 \Longrightarrow x(t) = (\overbrace{C_1 + C_2\,e^{2t}}^{x_h}) + C_3\,t + C_4\,t^2$$

Calculemos las constantes

$$D(D-2)[C_3\,t + C_4\,t^2] = t + 4 \Longrightarrow C_4 = -\frac{1}{4}, \quad C_3 = -\frac{9}{4}$$

Por tanto,

$$x(t) = C_1 + C_2\,e^{2t} - \frac{9}{4}t - \frac{1}{4}t^2$$

Si tienes la amabilidad de calcular $y(t)$, debieras encontrar

$$y(t) = -C_1 - \frac{C_2}{3}e^{2t} - \frac{3}{4} + \frac{7}{4}t + \frac{1}{4}t^2$$

Problema 3.46 Un tanque A contiene 100 galones de salmuera en la que se han disuelto 100 libras de sal, y un tanque B contiene 100 galones de agua. Al tanque A empieza a entrar agua a razón de 2 galones por minuto, la mezcla que se produce con la salmuera, sale del tanque A al tanque B a razón de 3 galones por minuto. Desde el tanque B se bombea un galón por minuto al tanque A (retroalimentación), y de éste se expulsan fuera 2 galones por minuto. Hallar la cantidad de sal en ambos tanques al cabo de una hora cuarenta minutos.
Te puedes hacer un esquema gráfico de la situación. El agua que entra al tanque A proviene de una llave, no del tanque B. Después de leer el problema, de seguro, tienes claro que, si x e y son las cantidades de sal en tanque A y B, respectivamente, entonces las condiciones iniciales son $x(0) = 100$ e $y(0) = 0$. El sistema de ecuaciones que se establece es

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{3x}{100} + \dfrac{y}{100} \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{3x}{100} - \dfrac{3y}{100} \end{cases}$$

En forma matricial esto toma la forma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \frac{1}{100} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Para los valores propios

$$\lambda^2 + 6\lambda + 6 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = -3 + \sqrt{3}, \quad \lambda_2 = -3 - \sqrt{3}$$

Para los vectores propios asociados usamos el siguiente truco. Reemplaza el λ en el determinante

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 \\ 3 & -3-\lambda \end{vmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} -\sqrt{3}x + y = 0 \\ 3x - \sqrt{3}y = 0 \end{cases}$$

al resolver se deduce que, si $x = \sqrt{3}$, entonces $y = 3$. De igual manera hallas el otro vector propio. Por tanto

$$E_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad E_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -3 \end{pmatrix}$$

De esta forma,

$$X(t) = C_1 \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 3 \end{pmatrix} e^{(-3+\sqrt{3})/100} + C_2 \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -3 \end{pmatrix} e^{(-3-\sqrt{3})/100}$$

de donde,

$$\begin{cases} x(t) &= C_1 \sqrt{3} e^{(-3+\sqrt{3})/100} + C_2 \sqrt{3} e^{(-3-\sqrt{3})/100} \\ \\ y(t) &= 3C_1 \sqrt{3} e^{(-3+\sqrt{3})/100} - 3C_2 \sqrt{3} e^{(-3-\sqrt{3})/100} \end{cases}$$

Con las condiciones iniciales determinamos las constantes.

$$x(0) = 100 \quad \Longrightarrow \quad 100 = x(t) C_1 \sqrt{3} + C_2 \sqrt{3} \Longrightarrow C_1 + C_2 = 100\sqrt{3}$$

$$y(0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad 0 = 3C_1 - 3C_2 = 0$$

De esto,

$$C_1 = 50\sqrt{3}, \qquad C_2 = 50\sqrt{3}$$

En consecuencia,

$$\begin{cases} x(t) & = 50\left[e^{(-3+\sqrt{3})/100} + e^{(-3-\sqrt{3})/100}\right] \sim 14,5 \\ \\ y(t) & = 50\sqrt{3}\left[e^{(-3+\sqrt{3})/100} - e^{(-3-\sqrt{3})/100}\right] \sim 13,62 \end{cases}$$

Actividad 33 Resolver el sistema

$$\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -10 & 8 \end{pmatrix}\vec{X}, \quad \vec{X}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Haremos uso de valores y vectores propios.

$$\begin{vmatrix} -4-\lambda & 4 \\ -10 & 8-\lambda \end{vmatrix} \Longrightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 8 = 0$$

Al resolver se hallan dos complejos

$$\lambda_1 = 2+2i, \quad \lambda_2 = 2-2i$$

Hallemos valor propio de $\lambda_1 = 2+2i$

$$\begin{pmatrix} -4-2-2i & 4 \\ -10 & 8-2-2i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6-2i & 4 \\ -10 & 6-2i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se llega al sistema

$$\begin{cases} -(6+2i)v_1 + 4v_2 & = 0 \\ -10v_1 + (6-2i)v_2 & = 0 \end{cases}$$

Si se multiplica la primera ecuación por $(6-2i)$ y la segunda por 4 se tiene que las ecuaciones son L.D. De modo que tenemos una sola ecuación:

$$-40v_1 + 4(6-2i)v_2 = 0$$

Despejando, $v_1 = \dfrac{3-i}{5}v_2$. Si se toma $v_2 = \dfrac{5}{3-i}$, entonces $v_1 = 1$. Así, un vector propio es

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{5}{3-i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3+i}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3+i \end{pmatrix}$$

En cual, con el fin de usarlo para hallar una solución real, escribimos en la forma

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{v}_1 + i\vec{v}_2$$

Por tanto, una solución compleja del sistema es

$$\begin{aligned} \vec{X}(t) &= e^{(2+2i)t}\vec{v} = e^{(2+2i)t}\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \\ &= e^{2t}(\cos 2t + i\operatorname{sen} 2t)\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \end{aligned}$$

Dos soluciones reales linealmente independientes son la parte real y la parte imaginaria de esta solución. Las calculamos usando $\vec{v} = \vec{v}_1 + i\vec{v}_2$.

$$\begin{aligned}\vec{X}(t) &= e^{2t}(\cos 2t + i \operatorname{sen} 2t)(\vec{v}_1 + i\vec{v}_2)\\ &= e^{2t}\left[\cos 2t\vec{v}_1 - \operatorname{sen} 2t\vec{v}_2\right] + i\left[\operatorname{sen} 2t\vec{v}_1 + \cos 2t\vec{v}_2\right]\\ &= e^{2t}\left[(\cos 2t \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} - \operatorname{sen} 2t \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}) + i(\operatorname{sen} 2t \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} + \cos 2t \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix})\right]\end{aligned}$$

simplificando escritura

$$\vec{X}(t) = e^{2t}\begin{pmatrix}2\cos 2t\\ 3\cos 2t - sen2t\end{pmatrix} + ie^{2t}\begin{pmatrix}2\operatorname{sen} 2t\\ 3\operatorname{sen} 2t + \cos 2t\end{pmatrix} = \vec{X}_1(t) + \vec{X}_2(t)$$

Una matriz fundamental del sistema es

$$\vec{X}(t) = \Phi(t) = \begin{pmatrix}2e^{2t}\cos 2t & | & 2e^{2t}\operatorname{sen} 2t\\ e^{2t}(3\cos 2t - \operatorname{sen} 2t) & | & e^{2t}(3\operatorname{sen} 2t + \cos 2t)\end{pmatrix}$$

Por tanto, la solución general tiene la forma

$$\vec{X}(t)\vec{C} = \Phi(t)\vec{C} = \begin{pmatrix}2e^{2t}\cos 2t & | & 2e^{2t}\operatorname{sen} 2t\\ e^{2t}(3\cos 2t - \operatorname{sen} 2t) & | & e^{2t}(3\operatorname{sen} 2t + \cos 2t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\C_2\end{pmatrix}$$

Ahora hallemos las constantes

$$\Phi(0)\vec{C} = \begin{pmatrix}2 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\C_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

de lo cual se obtiene; $C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$. ¡Problema resuelto!

Problema 3.47 Resolver el sistema

$$\vec{X}'(t) = \begin{pmatrix}-2 & -1 & 3\\ 5 & 0 & -5\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\vec{X}$$

Hallemos los valores propios

$$\begin{vmatrix}-2-\lambda & -1 & 3\\ 5 & -\lambda & -5\\ 0 & 0 & 1-\lambda\end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow (\lambda - 1)(\lambda^2 + 2\lambda + 5) = 0$$

Luego, los valores propios son:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1 + 2i, \quad \lambda_3 = -1 - 2i$$

- Vector propio de λ_1

$$\begin{pmatrix}-3 & -1 & 3\\ 5 & -1 & -5\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases}-3v_1 - v_2 + 3v_3 & = 0\\ 5v_1 - v_2 - 5v_3 & = 0\end{cases}$$

se deduce que $v_1 = v_3$. Si hacemos $v_1 = v_3 = 1$ y $v_2 = 0$, entonces

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \Longrightarrow \vec{X}_1(t) = e^t\vec{v}_1 = e^t\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

- Vector propio de $\lambda_2 = -1+2i$

$$\begin{pmatrix} -1-2i & -1 & 3 \\ 5 & 1-2i & -5 \\ 0 & 0 & 2-2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} -(1+2i)v_1 - v_2 + 3v_3 & = 0 \\ 5v_1 + (1-2i)v_2 - 5v_3 & = 0 \\ (2-2i)v_3 & = 0 \end{cases}$$

Se deduce que $v_3 = 0$. Las dos ecuaciones restantes son la misma (multiplicar por 5 la primera y $-(1+2i)$ la segunda). De la primera de estas ecuaciones

$$v_2 = -(1+2i)v_1$$

Con $v_2 = -(1+2i)$ es $v_1 = 1$. Luego,

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1-2i \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \vec{X}_2 = e^{(-1+2i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1-2i \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Vector propio de $\lambda_2 = -1-2i$

No es necesario hacer cálculos, el tercer vector propio linealmente independiente es el conjugado, es decir,

$$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1+2i \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \vec{X}_3 = e^{(-1-2i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1+2i \\ 0 \end{pmatrix}$$

En consecuencia, una base de soluciones complejas del sistema es

$$\vec{X}_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{X}_2 = e^{(-1+2i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1-2i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{X}_3 = e^{(-1-2i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1+2i \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para hallar soluciones reales basta tomar $\vec{X}_2$ como sigue:

$$\begin{aligned} \vec{X}_2 &= e^{-t}(\cos 2t + i \operatorname{sen} 2t) \begin{pmatrix} 1 \\ -1-2i \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= e^{-t}(\cos 2t + i \operatorname{sen} 2t) \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= e^{-t} \left[\begin{pmatrix} \cos 2t \\ -\cos 2t \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ -2\cos 2t \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \operatorname{sen} 2t \\ -\operatorname{sen} 2t \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -2\operatorname{sen} 2t \\ 0 \end{pmatrix} \right] \end{aligned}$$

Separando parte real e imaginaria

$$\vec{X}_2(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos 2t \\ -\cos 2t + 2\operatorname{sen} 2t \\ 0 \end{pmatrix} + ie^{-t} \begin{pmatrix} \operatorname{sen} 2t \\ -2\operatorname{sen} 2t - 2\cos 2t \\ 0 \end{pmatrix}$$

De modo que la solución general es

$$\vec{X}(t) = C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} \cos 2t \\ -\cos 2t + 2\operatorname{sen} 2t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \operatorname{sen} 2t \\ -2\operatorname{sen} 2t - 2\cos 2t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Problema 3.48 Resolver el sistema

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t \\ te^t \\ e^t \end{pmatrix}$$

Hallemos los valores propios

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 4 & 1 \\ -1 & 3-\lambda & 1 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow (\lambda-1)^2(\lambda+1) = 0$$

Luego, los valores propios son:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = -1$$

- Vector propio de λ_1

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} -3v_1 + 4v_2 + v_3 & = 0 \\ -v_1 + 2v_2 + v_3 & = 0 \\ -v_1 - v_3 & = 0 \end{cases}$$

Al sumar la segunda y tercera ecuación se halla que $-2v_1 + 2v_2 = 0$, de lo cual $v_1 = v_2 = 1$ y $v_3 = -1$. De esta manera

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \vec{X}_1(t) = e^t \vec{v}_1 = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- Vector propio **repetido** $\lambda_2 = 1$

Se sabe que la solución es de la forma

$$\vec{X}_2 = \vec{v}_1 \, t \, e^{\lambda_1 t} + \vec{w} \, e^{\lambda_1 t}$$

Hay que hallar $\vec{w}$ a partir de

$$(A - \lambda_1 t)\, \vec{w} = \vec{v}$$

Esto es,

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} -3w_1 + 4w_2 + w_3 & = 1 \\ -w_1 + 2w_2 + w_3 & = 1 \\ -w_1 - w_3 & = -1 \end{cases}$$

Al resolver se halla $w_1 = w_2 = 0$ y $w_3 = 1$. Por tanto,

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Con este vector propio, la segunda solución es

$$\vec{X}_2(t) = t\, e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} te^t \\ te^t \\ -te^t + e^t \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} t \\ t \\ 1-t \end{pmatrix}$$

- Vector propio $\lambda_3 = -1$

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} -v_1 + 4v_2 + v_3 & = 0 \\ -v_1 + 4v_2 + v_3 & = 0 \\ -v_1 + v_3 & = 0 \end{cases}$$

Al resolver se halla $v_1 = v_3 = 1$ y $v_2 = 0$. Por tanto,

$$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y la tercera solución LI es

$$\vec{X}_3(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De esta forma, la matriz fundamental es

$$\begin{pmatrix} e^t & | & te^t & | & e^{-t} \\ e^t & | & te^t & | & 0 \\ -e^t & | & (1-t)e^t & | & e^{-t} \end{pmatrix}$$

de manera que la solución general del sistema es

$$\vec{X}(t) = \Phi(t)\vec{C} = \begin{pmatrix} e^t & | & te^t & | & e^{-t} \\ e^t & | & te^t & | & 0 \\ -e^t & | & (1-t)e^t & | & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1e^t + C_2te^t + C_3e^{-t} \\ C_1e^t + C_2te^t \\ -C_1e^t + C_2(1-t)e^t + C_3e^{-t} \end{pmatrix}$$

Ahora, a contar de la expresión

$$\Phi(t)\vec{C} = \vec{F}(t)$$

hacemos variación de parámetros. Tenemos:

$$\begin{cases} C_1'(t)e^t + C_2'(t)te^t + C_3'(t)e^{-t} & = e^t \qquad (1) \\ C_1'(t)e^t + C_2'(t)te^t & = te^t \qquad (2) \\ -C_1'(t)e^t + C_2'(t)(1-t)e^t + C_3'(t)e^{-t} & = e^t \qquad (3) \end{cases}$$

Restando la ecuación (2) de la (1) se halla

$$C_3'(t) = e^{2t} - te^{2t}$$

Al integrar por partes

$$C_3(t) = \frac{1}{2}(1-t)e^{2t} + \frac{1}{4}e^{2t} = \left(\frac{3}{4} - \frac{t}{2}\right)e^{2t}$$

Al sumar (2) y (3) tenemos

$$C_2'(t)e^t + e^{-t}C_3'(t) = e^t + te^t$$

Como $C_3'(t) = (1-t)e^{2t}$, entonces

$$C_2'(t) = 2t \Longrightarrow C_2(t) = t^2$$

Si se reemplaza $C_2'(t)$ en la ecuación (2) se encuentra que

$$C_1(t) = \frac{t^2}{2} - \frac{2t^3}{3}$$

Así, la solución particular del sistema es

$$\begin{aligned}\vec{X}_p(t) &= \Phi(t)\vec{C}\\ &= \begin{pmatrix} \left(\frac{t^2}{2} - \frac{2t^3}{3}\right)e^t + t^3e^t + \left(\frac{3}{4} - \frac{t}{2}\right)e^{2t}e^{-t} \\ \left(\frac{t^2}{2} - \frac{2t^3}{3}\right)e^t + t^3e^t \\ -\left(\frac{t^2}{2} - \frac{2t^3}{3}\right)e^t + t^2(1-t)e^t + \left(\frac{3}{4} - \frac{t}{2}\right)e^{2t}e^{-t} \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} \frac{t^2}{2} - \frac{2t^3}{3} + t^3 + \frac{3}{4} - \frac{t}{2} \\ \frac{t^2}{2} - \frac{2t^3}{3} + t^3 \\ -\frac{t^2}{2} + \frac{2t^3}{3} + t^2 - t^3 + \frac{3}{4} - \frac{t}{2} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

La solución general del sistema es

$$\vec{X} = \vec{X}_h + \vec{X}_p$$

3.4 Problemas Propuestos

Problema 3.49 Utilizar el método de valores y vectores propios para resolver el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Escriba la matriz fundamental.

$$\begin{cases} y' &= 2y - 9z \\ z' &= y + 8z \end{cases}$$

Resp. $z(t) = (C_1 + C_2t)e^{5t}$

Problema 3.50 Usar el método de valores y vectores propios resolver el sistema

$$\begin{cases} x' &= y + z \\ y' &= x + z \\ z' &= x + y \end{cases}$$

Resp. Los vectores propios son

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Problema 3.51 Usar variación de parámetros para resolver el sistema. Indicar en forma clara X_h y X_p.

$$\begin{aligned} y' + y + 2z &= \operatorname{sen} x + \cos x \\ z' + 2y + z &= \operatorname{sen} x - \cos x \end{aligned}$$

Problema 3.52 Utilizando la transformada de Laplace encontrar la solución particular del sistema

$$\begin{cases} y' &= 3y - z \\ z' &= y + z \end{cases} \quad y(0) = 1, \; z(0) = 2$$

Resp. $y(t) = (1-t)e^{2t}$

Problema 3.53 Usar variación de parámetros para resolver el sistema. Indicar en forma clara X_h y X_p.

$$
\begin{aligned}
y' + y + 2z &= \operatorname{sen} x + \cos x \\
z' + 2y + z &= \operatorname{sen} x - \cos x
\end{aligned}
$$

Problema 3.54 Dado el sistema de ecuaciones diferenciales

$$
\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}
$$

comprobar si las siguientes funciones vectoriales son solución

$$
\vec{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{X}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{4t}, \quad \vec{X}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} e^{9t}
$$

Problema 3.55 transformar el sistema a ecuación diferencial y resolver. $\begin{cases} x' &= 3x \\ y' &= x + 2y + t \end{cases}$

Resp. $x = e^{3x}, \quad y = e^{3x} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$

Problema 3.56 Resolver $\begin{cases} x'' - 4y' &= 0 \\ x'' + x' + y'' &= 0 \end{cases}$

Los valores propios son $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = -2$. La solución general

$$
x(t) = c_1 + c_2 e^{-2t} + c_3 t e^{-2t}
$$

$$
y(t) = -\frac{1}{2} c_2 e^{-2t} - \frac{1}{2} c_3 t e^{-2t} + \frac{1}{4} c_3 e^{-2t} + c_4
$$

Problema 3.57 Comprobar que $\Phi = \begin{pmatrix} 4e^{2x} & -e^{-3x} \\ e^{2x} & e^{-3x} \end{pmatrix}$ es una matriz fundamental del sistema

$$
\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}
$$

Problema 3.58 Resolver el sistema $\begin{cases} x'' - 4x + y' &= 0 \\ -4x' + y'' + 2y &= 0 \end{cases}$

Resp.

$$
y(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t + c_3 e^{-t\sqrt{2}} + c_4 e^{t\sqrt{2}}
$$

$$
x(t) = -\frac{1}{4} c_1 \operatorname{sen} 2t + \frac{1}{4} c_2 \cos 2t - \frac{c_3}{\sqrt{2}} e^{-t\sqrt{2}} + \frac{c_4}{\sqrt{2}} e^{t\sqrt{2}}
$$

Problema 3.59 Resolver $\begin{cases} x' &= 2x + y \\ y' &= x + 2y \end{cases}$

Resp.

$$
\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3
$$

$$
\vec{X}_{h(t)} = c_1 e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \vec{v}_2 = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

Problema 3.60 Resolver $\begin{cases} x' &= -2x+y \\ y' &= x-2y \end{cases}$

Resp.

$$\lambda_1 = -3,\ \vec{v}_1 = (-1,1),\ \lambda_2 = -1, \vec{v}_2 = (1,1)$$

$$\vec{X}_{h(t)} = c_1 e^{-3t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Problema 3.61 Resolver $\begin{cases} x''-4y' &= 0 \\ x''+x'+y'' &= 0 \end{cases}$

Resp. La solución general es

$$\begin{cases} x(t) &= C_1 + C_2 e^{-2t} + C_3 t e^{-2t} \\ y(t) &= -\frac{1}{2}C_2 e^{-2t} - \frac{1}{2}C_3 t e^{-2t} + \frac{1}{4}C_3 e^{-2t} + C_4 \end{cases}$$

Observar que la solución general contiene cuatro constantes ya que se resolvió un sistema de dos ecuaciones diferenciales de segundo orden.

Problema 3.62 Resolver el sistema

$$\begin{cases} x_1' &= -2x_1 - 4x_2 + 1 \\ x_2' &= -x_1 + x - 2 + \frac{3}{2}t^2 \end{cases}$$

Resp. La solución general es

$$\begin{cases} x_1(t) &= C_1 e^{2t} + 4C_2 e^{-3t} + t + t^2 \\ x_2(t) &= -C_1 e^{2t} + C_2 e^{-3t} - \frac{1}{2}t^2 \end{cases}$$

Problema 3.63 Probar que el vector $\vec{X}_p = \begin{pmatrix} 3t-4 \\ -5t+6 \end{pmatrix}$ es una solución particular del sistema no homogéneo

$$\vec{X}\,' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\vec{X} + \begin{pmatrix} 12t-11 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Problema 3.64 Resolver, por valores propios el sistema

$$\vec{X}\,' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}\vec{X}$$

Los valores propios son

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = 5$$

La solución es

$$\vec{X} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_3\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t}$$

Problema 3.65 Resolver por eliminación el sistema $\begin{cases} (D+2)x_1 + (D-1)x_2 &= -\operatorname{sen} t \\ (D-3)x_1(D+2)x_2 &= 4\cos t \end{cases}$

Resp. La solución del sistema es

$$\begin{cases} x_1 & = 3Ce^{-\frac{1}{8}} - \cos t + 2\,\mathrm{sen}\,t \\ x_2 & = Ce^{-\frac{1}{8}} + \cos t + \mathrm{sen}\,t \end{cases}$$

Problema 3.66 Resolver por eliminación el sistema $\begin{cases} x'' + x' + y' + y & = 0 \\ x''' + y'' + y & = 0 \end{cases}$

Resp. La solución es

$$\begin{cases} x(t) & = C_1 + C_2 e^{-t} \\ y(t) & = \frac{1}{2} C_2 e^{-t} \end{cases}$$

Problema 3.67 Resolver por método de valores y vectores propios

$$\begin{pmatrix} 1-D & 2 \\ -2 & 5-D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resp. La solución general es

$$\vec{X}(t) = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} + C_2 \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right] e^{3x}$$

Problema 3.68 Resolver por método de valores y vectores propios $\begin{cases} x' = -4x + y + z \\ y' = x + 5y - z \\ z' = y - 3z \end{cases}$

Los valores propios son $\lambda_1 = -4, \lambda_2 = -3, \lambda_3 = 5$. La solución es

$$x(t) = C_1 \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t}$$

Problema 3.69 Resolver por método de valores y vectores propios $\begin{cases} x' = y + z \\ y' = 3x + z \\ z' = 3x + y \end{cases}$

Resp. La solución general es

$$\vec{X}(t) = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} e^{3t} + C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

Problema 3.70 Resolver por método de valores y vectores propios $\begin{cases} y' = 2y - 9z \\ z' = y + 8z \end{cases}$

La solución general es

$$y(t) = (-3C_1 + C_2 - 3C_2 t)e^{5t}$$
$$z(t) = (C_1 - C_2 t)e^{5t}$$

Problema 3.71 Resolver el siguiente problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' &= -5x - y \\ y' &= 4x - y \end{cases}, \quad x(1) = 0,\ y(1) = 1$$

La solución general es

$$\begin{cases} x(t) &= C_1 e^{-3t} + C_2 t e^{-3t} \\ y(t) &= -2C_1 e^{-3t} - 2C_2 t e^{-3t} - C_2 e^{-3t} \end{cases}$$

La solución particular es

$$\begin{cases} x(t) &= e^{3-3t} - t e^{3-3t} \\ y(t) &= -e^{3-3t} + 2t e^{3-3t} \end{cases}$$

Problema 3.72 Utilizar el método de variación de las constantes para resolver el sistema:

$$\begin{cases} y' + y + 2z &= \cos x + \operatorname{sen} x \\ z' + 2y + z &= \operatorname{sen} x - \cos x \end{cases}$$

La solución de la homogénea es:

$$\vec{X}_h(x) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^x + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3x}$$

Por lo tanto la solución general del sistema es:

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-3x} + \frac{1}{2}(\operatorname{sen} x - \cos x) + \frac{1}{10}(3\operatorname{sen} x - \cos x) = \frac{8}{10}\operatorname{sen} x - \frac{6}{10}\cos x$$
$$z(x) = -C_1 e^x + C_2 e^{-3x} + \frac{1}{2}(-\operatorname{sen} x + \cos x) + \frac{1}{10}(3\operatorname{sen} x - \cos x) = -\frac{2}{10}\operatorname{sen} x + \frac{2}{5}\cos x$$

Problema 3.73 Utilizar el método de la transformada de Laplace para resolver el sistema

$$\begin{cases} x'' - y'' &= t^2 \\ x'' + y'' &= 4t \end{cases}$$

con condiciones iniciales $x(0) = 8$, $x'(0) = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
La solución es

$$\begin{cases} x(t) &= \frac{t^4}{4!} + \frac{2t^3}{3!} + 8 \\ y(t) &= -\frac{t^4}{4!} + \frac{2t^3}{3!} \end{cases}$$

Problema 3.74 Obtener, mediante la transformada de Laplace, la solución del sistema

$$\begin{cases} x_1{}'' + 10x_1 &= 4x_2 \\ -4x_1 + x_2{}'' &= -4x_2 \end{cases}$$

sujeta a las condiciones iniciales $x_1(0) = 0$, $x_1'(0) = 1$, $x_2(0) = 0$, $x_2'(0) = -1$

Problema 3.75 Utilizar el método por eliminación para resolver el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$\begin{cases} y' &= 2y - 9z \\ z' &= y + 8z \end{cases}$$

Resp. $z(t) = (C_1 + C_2 t)e^{5t}$
Problema 3.76 Usando valores y vectores propios resolver el sistema

$$\begin{cases} x' &= y + z \\ y' &= x + z \\ z' &= x + y \end{cases}$$

Ayuda. Los vectores propios son

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Problema 3.77 Utilizando la transformada de Laplace encontrar la solución particular del sistema

$$\begin{cases} y' &= 3y - z \\ z' &= y + z \end{cases}$$

que verifica que $y(0) = 1$, $z(0) = 2$. Resp. $y(t) = (1 - t)e^{2t}$

4. Elementos de teoría cualitativa

La teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales intenta obtener propiedades de las soluciones de una ecuación diferencial sin conocerlas explícitamente, es decir, únicamente a través del hecho de que son soluciones de una ecuación diferencial.

En esta unidad se estudian las ecuaciones diferenciales ordinarias desde una perspectiva cualitativa y geométrica. De igual manera se estudian las propiedades cualitativas de los sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden.

4.1 Ecuaciones de primer órden

Se considera una ecuación diferencial de primer orden de la forma $y' = f(x,y)$. Esta función asocia a cada punto del plano (x,y) donde está definida la función $f(x,y)$ el valor de y', que es la pendiente de la tangente a la curva integral en ese punto. Por tanto, la ecuación diferencial $y' = f(x,y)$ determina un campo de direcciones. El campo de direcciones definido por la terna (x,y,y') se representa como un conjunto de segmentos; cada uno de ellos pasa por el punto (x,y) y tiene y' como pendiente.

Desde este punto de vista, resolver una ecuación diferencial es calcular una curva cuya tangente en cada punto tenga la misma dirección que el campo de direcciones en ese punto. Una técnica util para visualizar (graficar) las soluciones de una ecuación diferencial consiste en trazar el campo de direcciones de la ecuación.

Ejemplo 4.1.1 Considerar la ecuación $\frac{dy}{dx} = F(x,y) = x+y-1$

En el plano se eligen algunos puntos (x_i, y_i), y sobre cada uno de ellos se construye un pequeño segmento con pendiente $F(x_i,y_i) = x_i + y_i - 1$, que corresponde a una porción de la recta tangente a la curva solución que pasa dicho punto. Este esquema gráfico el campo de direcciones de la ecuación diferencial.

x	y	$F(x,y) = x+y-1$
0	0	$f(0,0) = -1 = m$
1	1	$f(1,1) = 1 = m$
-1	1	$f(-1,1) = -1 = m$
0	2	$f(0,2) = 1 = m$
2	0	$f(2,0) = 1 = m$

Se han considerado los puntos $(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,1)$, $(0,2)$ y $(2,0)$, y sus respectivos vectores. Puedes visitar la página `https://www.geogebra.org/m/kpp3FjBh`, y escribir el campo que estamos tratando.

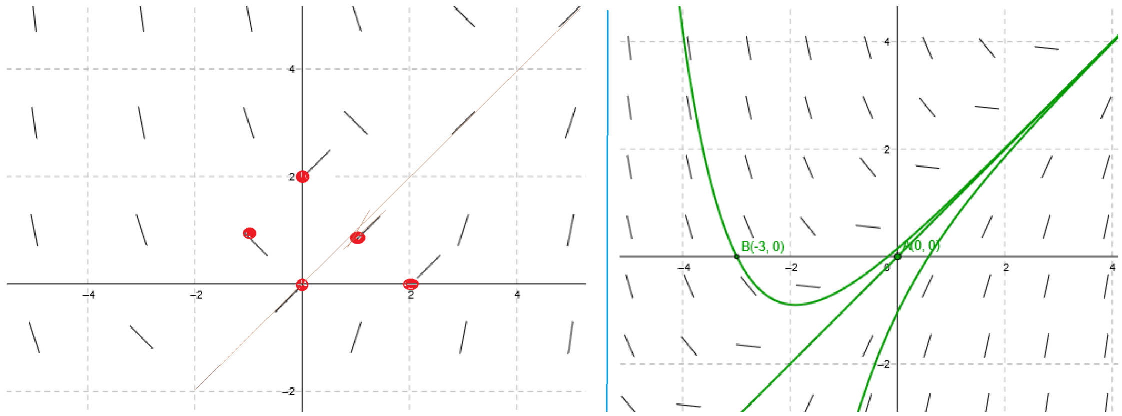


Figura 4.1: campo de vectores y campo de direcciones

4.1.1 Isoclinas

El método anterior de considerar algunos puntos y luego trazar segmentos de recta es muy laborioso. Existe un método que permite dibujar elementos lineales de forma eficiente sin necesidad de ir evaluando punto a punto, este método es conocido como el método de las **isoclinas**.

Definición 4.1.2 Una isoclina para la ecuación diferencial $y' = F(x,y)$ es un conjunto de puntos en el plano xy donde todas las soluciones tienen la misma pendiente $m = y'$.

En lenguaje más simple, una isóclina es una curva de nivel de la función $F(x,y)$, es decir

$$F(x,y) = k$$

Con este método sólo hay que encontrar las isoclinas de la ecuación diferencial y sobre ellas dibujar elementos lineales que tengan la misma pendiente, obteniendo así el campo de pendientes y por tanto las curvas solución.
Para usar el método de las Isoclinas hay que seguir los siguientes pasos:

1. Trazar algunas de las curvas $F(x,y) = k$ (isoclinas o curvas de nivel).
2. Tomar algunos puntos y dibujar, a través de ellos, un segmento de recta que tenga pendiente $k = F(x,y)$.
3. Trazar la curva solución de manera que pase por los ptos y respetando que los segmentos de recta sean tangentes a la curva solución.

Ejemplo 4.1.3 Hallar isóclinas y el campo de pendientes de la ecuación diferencial $y' = y - x$

Se considera la ecuación

$$y - x = k$$

Esta es la ecuación de una recta, para cada valor arbitrario de k se obtiene una recta distinta, lo interesante, importante y genial es que a lo largo de toda esa recta hay segmentos lineales con la **misma pendiente**, sólo basta evaluar un punto de cada isóclina en la función y se obtiene el valor de la pendiente para **toda** la isóclina.

Para $k=0$ la recta es $y=x$, como las restantes son paralelas. Se consideran los puntos $k=0$, $k=1$, $k=-1$, $k=2$, $k=-2$. Se tiene una situación como muestra la figura

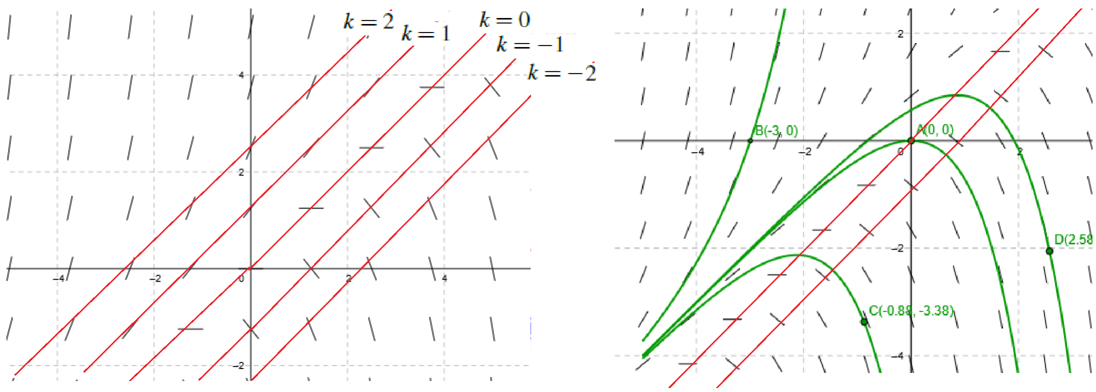


Figura 4.2: Isoclinas y campo de direcciones

Ejemplo 4.1.4 Trazar las isclinas de la ecuación diferencial $y'=x^2+2x-y$.

Para hallar las ecuaciones de las isoclinas, resolvemos

$$x^2+2x-y=k \iff y=x^2+2x-k$$

al completar cuadrados

$$y=(x+1)^2-1-k$$

Se observa que las isoclinas son parábolas con el eje vertical de simetría $x=-1$. Algunas isoclinas son:

- $k=0 \Longrightarrow y=x^2+2x$
- $k=-1 \Longrightarrow y=x^2+2x+1$
- $k=1 \Longrightarrow y=x^2+2x-1$
- $k=2 \Longrightarrow y=x^2+2x-2$

En el plano la situación es la siguiente

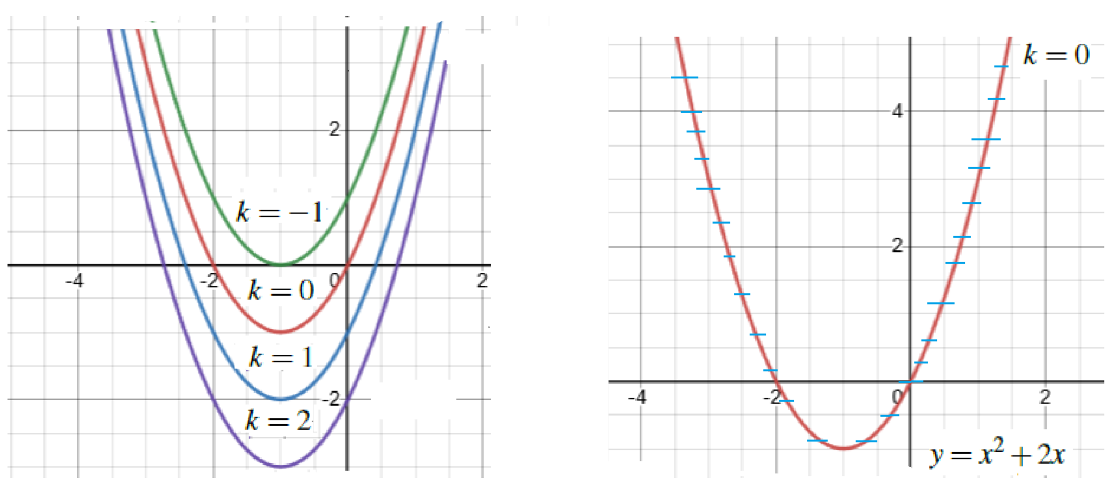


Figura 4.3: Isoclinas

En el caso $k = 0$ las curvas integrales tienen tangentes horizontales en los puntos de intersección con la isoclina $y = x^2 + 2x$. La parábola $y = x^2 + 2x$ tiene derivada $y' = 2x + 2$, de lo cual $x = -1$ es un punto crítico. Esto hace que la parábola divida al plano xy en dos partes:

- En una de ellas es $y' < 0$ (las soluciones decrecen)
- En la otra $y' > 0$ (las soluciones crecen).

Como esta isoclina $y = x^2 + 2$ no es una curva integral, en ella están situados los puntos de extremos relativos de las curvas integrales: Los puntos de máximo se encuentran en la parte de la parábola $y = x^2 + 2x$, en que $x < -1$, y los puntos de mínimo, en la otra parte de la misma, en que $x > -1$ (esto se ve con la derivada).
Para analizar la concavidad de las curvas integrales, se usa la segunda derivada.

$$y' = x^2 + 2x - y \Longrightarrow y'' = 2x + 2 - y'$$

pero

$$y' = x^2 + 2x - y \Longrightarrow y'' = -x^2 + 2 + y$$

Con la segunda derivada igualada a cero tenemos

$$y'' = 0 \Longrightarrow 0 = -x^2 + 2 + y \Longrightarrow y = x^2 - 2$$

esto significa que sólo en los puntos situados en la parábola $y = x^2 - 2$ es $y'' = 0$.
En base a lo anterior, los puntos del plano cuyas coordenadas satisfacen la condición $y'' < 0$, es decir, para $y < x^2 - 2$, las curvas integrales tienen sus concavidades hacia abajo. Los puntos del plano cuyas coordenadas satisfacen la condición $y'' > 0$, esto es, donde $y > x^2 - 2$, las curvas integrales tienen concavidad hacia arriba.
Los puntos de intersección de las curvas integrales con la parábola $y = x^2 - 2$, son los puntos de inflexión de éstas.

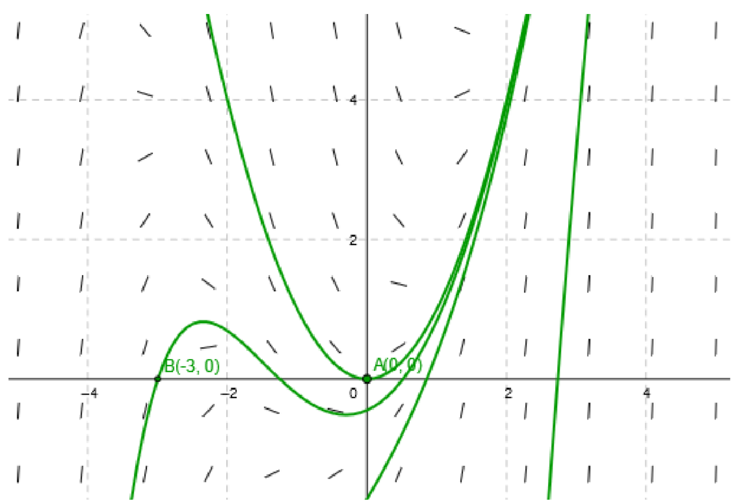


Figura 4.4: campo de direcciones $y' = x^2 + 2x - y$

Ejemplo 4.1.5 Considerar la siguiente ecuación diferencial $y' = x^3$.

Haremos uso de nuestros conocimientos de cálculo diferencial e integral para estudiar el comportamiento de sus soluciones. En primer lugar, de $x^3 = 0$ se obtiene que $x = 0$ es el único punto crítico. Se hace el estudio de la solución en $(-\infty, \infty)$, considerando valores a izquierda y derecha del punto crítico

intervalo	$-\infty < x < 0$	$0 < x < \infty$
valor de prueba	$x = -2$	$x = 3$
signo de $f'(x)$	$f'(-2) < 0$	f'(3) >0
conclusión	decreciente	creciente

Otro elemento a considerar es la concavidad (segunda derivada)

$$y' = x^3 \Longrightarrow y'' = 3x^2$$

al igualar la segunda derivada a cero se encuentra que $x = 0$. Por tanto,

$$f''(x) > 0, \quad \text{para todo } x$$

esto significa que la curva es cóncava hacia arriba en todo su dominio, y como no cambia su concavidad, no tiene puntos de inflexión.
Para construir el campo de pendientes de $y' = x^3$ se consideran puntos de la función $f(x) = x^3$, con ellos se obtiene el valor de la pendiente en esos puntos.

x	y	$f(x,y)$
0	0	$f(0,0) = 0 = m$
1	1	$f(1,1) = 1 = m$
-1	1	$f(-1,1) = -1 = m$
0	2	$f(0,2) = 0 = m$
0	y	$f(0,y) = 0 = m$

De esta forma, en el punto $(0,0)$ trazamos un pequeño segmento de recta de pendiente cero. En el punto $(1,1)$ un pequeño segmento de pendiente 1, y así sucesivamente. La figura muestra "muchos" valores.

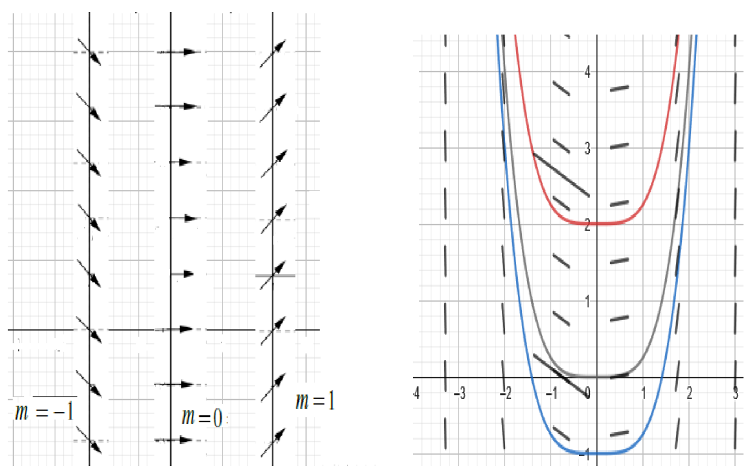


Figura 4.5: campo de vectores y de pendientes

Veamos ahora el cálculo de la solución

$$y' = x^3 \Longrightarrow y = \frac{x^4}{4} + C$$

La constante C genera un número infinito de soluciones (familia), esto es una solución diferente para cada valor asignado a la constante arbitraria. (`https://www.geogebra.org/m/kpp3FjBh`).

- De acuerdo con la figura, las soluciones de la ecuación diferencial están definidas para todo valor de $x \in (-\infty, \infty)$.
- Las soluciones crecen en el intervalo $(0, \infty)$ y decrecen en $(-\infty, 0)$.
- Las soluciones tienen concavidad hacia arriba en todo momento.
- Las curvas solución presentan simetría respecto del eje y. Esto se puede ver cambiando x por $-x$ para tener

$$\frac{dy}{-dx} = (-x)^3 \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = x^3$$

- Como la función $f(x) = x^3$ está definida para todo x, no existen singularidades

4.2 Ecuaciones autónomas

Una ecuación diferencial ordinaria en la que la variable independiente (x) no aparece explícitamente se llama **autónoma**. Estas ecuaciones autónoma de primer orden se escriben como

$$f(y, y') = 0$$

o en la forma normal como

$$\frac{dy}{dx} = f(y)$$

donde la función f es real de variable real. Además, f y su derivada f' son funciones continuas de y en algún intervalo $I \subset \mathbb{R}$.

Se llama punto de **equilibrio** o punto **críticos** de la ecuación a los valores de y, tales que $f(y) = 0$, es decir los valores de y tales que $y' = 0$. Geométricamente, todas las marcas de pendiente son horizontales para estos puntos.

Otra idea interesante a considerar es la llamada **línea de fase**, que es una recta que resume el campo de direcciones, y en cual se ubican los puntos de equilibrio y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(y)$.
Una línea de fase es un diagrama que muestra el comportamiento cualitativo de una ecuación diferencial ordinaria autónoma en una sola variable. La línea de fase es la forma unidimensional del espacio de fase bidimensional general y se puede analizar con facilidad. Para ello se puede utlizar una recta vertical o una horizontal.
Una recta, generalmente vertical, representa un intervalo del dominio de la derivada. En ella se indican los puntos críticos y los intervalos entre los puntos críticos, los cuales tienen sus signos indicados con flechas: un intervalo sobre el cual la derivada es positiva tiene una flecha que apunta en la dirección positiva a lo largo de la línea (hacia arriba o hacia la derecha), y un intervalo en el que la derivada es negativa tiene una flecha que apunta en la dirección negativa a lo largo de la línea (hacia abajo o hacia la izquierda).
Un punto crítico se puede clasificar como estable, inestable o semiestable (equivalentemente, sumidero, fuente o nodo), mediante la inspección de sus flechas vecinas.
Si ambas flechas apuntan hacia el punto crítico, es estable (un sumidero): las soluciones cercanas convergerán asintóticamente al punto crítico, y la solución es estable bajo pequeñas perturbaciones, lo que significa que si la solución se altera, volverá a (converger a) la solución.

Ejemplo 4.2.1 Determinar el campo de pendientes de la ecuación autónoma

$$\frac{dy}{dt} = y(1-y)$$

En este caso, los puntos de equilibrio son:

$$f(y) = 0 \Longrightarrow y = 0 \text{ e } y = 1$$

Un primer análisis que se puede hacer es el siguiente:

- Si $0 < y < 1$, entonces y' es positiva y las tangentes establecen que una solución con $0 < y < 1$ es creciente.
- Si $y < -1$ o bien si $y > 1$, entonces y' es negativa y cualquier solución con $y < -1$ o $y > 1$ es decreciente.
- Si $y = y(1-y)$, entonces $y'' = 0$ si $y = \frac{1}{2}$ ¡punto de inflexión!

Podemos dibujar la línea de fase colocando los puntos de equilibrio $y = 0$ e $y = 1$, y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento con una flecha.

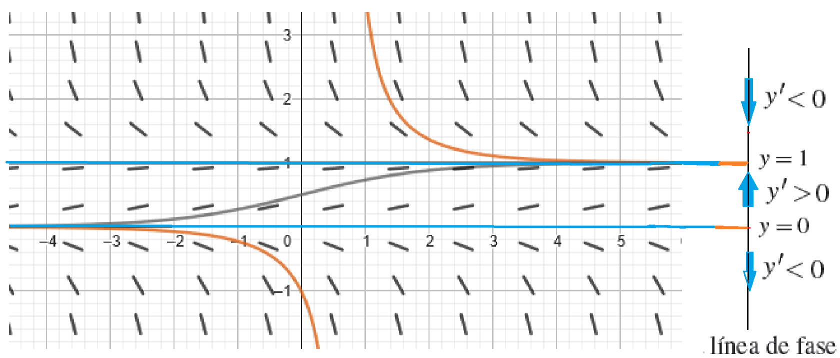


Figura 4.6

El campo de pendientes es horizontal a lo largo de esas dos líneas horizontales (isoclinas) y por tanto sabemos que ambas corresponden a las gráficas de soluciones.

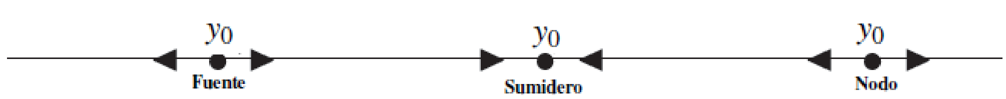


Figura 4.7: linea de fase: estabilidad

Definición 4.2.2 (Clasificación de los puntos de equilibrio) (fig. 4.7)
Si y_0 es un punto de equilibrio de la ecuación diferencial autónoma $\frac{dy}{dt} = f(y)$, tenemos:

- **Sumidero asintóticamente estable** si cualquier solución cercana a y_0 se acerca a y_0 en forma asintótica cuando $t \to \infty$.
- **Fuente** si cualquier solución cercana a y_0 se aleja de y_0 cuando $t \to \infty$.
- **Nodo** si y_0 no es sumidero ni fuente.

Ejemplo 4.2.3 Clasificar los puntos de equilibrio como sumideros, fuentes o nodos, a partir de la línea de fase de

$$\frac{dy}{dt} = y^2 + y - 6$$

Para llegar a la línea de fase lo primero es hallar los puntos de equilibrio

Figura 4.8

Hemos hecho la línea de fase en forma horizontal. Se concluye que $y = -3$ es un sumidero y que $y = 2$ una fuente.

$$y^2 + y - 6 = 0 \Longleftrightarrow (y+3)(y-2) = 0$$

de lo cual, $y = 2$ e $y = -3$. Como

$$y' = (y+3)(y-2) \Longrightarrow \begin{cases} y' > 0 & \text{si } y > -3 \\ y' < 0 & \text{si } y < -3 \vee y < -2 \end{cases}$$

4.3 Estabilidad

Se considera la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

con x_0 un equilibrio de ella. Siendo así, $f(x_0) = 0$. Por otra parte, la ecuación de la recta tangente establece que, si x está cerca de x_0, entonces

$$\frac{dx}{dt} = f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \cdot f'(x_0)$$

como $f(x_0) = 0$, se tiene la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = (x - x_0) \cdot f'(x_0)$$

al integrar

$$\int \frac{dx}{x - x_0} = \int f'(x_0)dt$$

al resolver

$$x(t) = x_0 + e^{\int f'(x_0)dt}$$

se tienen las siguientes conclusiones:

- Si $f'(x_0) > 0$, las soluciones se alejan del equilibrio exponencialmente, cuando $t \to \infty$ y se tiene que x_0 es inestable.
- Si $f'(x_0) < 0$, las soluciones decaen exponencialmente hacia el equilibrio, cuando $t \to \infty$ y se dice que el equilibrio x_0 es estable. Además, como $x(t) \to x_0$, se dice que el equilibrio es asintóticamente estable.
- Si $f'(x_{)}) = 0$, y $f''(x_0) \neq 0$, el punto x_0 es semiestable.

Ejemplo 4.3.1 Se considera la ecuación $\dfrac{dx}{dt} = x - x^3$. Determinar su estabilidad

En primer lugar, los puntos críticos

$$x - x^3 = 0 \Longrightarrow x(1-x)(1+x) = 0$$

de manera que, los puntos críticos son; $x = 0$, $x = 1$ y $x = -1$. Además, como $f(x) = x - x^3$, su derivada en el punto de equilibrio satisface:

- $f'(x) = 1 - 3x^2 \Longrightarrow f'(-1) = -2 < 0$ asintóticamente estable.
- $f'(x) = 1 - 3x^2 \Longrightarrow f'(0) = 1 > 0$ inestable
- $f'(x) = 1 - 3x^2 \Longrightarrow f'(1) = -2 < 0$ asintóticamente estable.

La línea de fase y el campo de direcciones es el siguiente

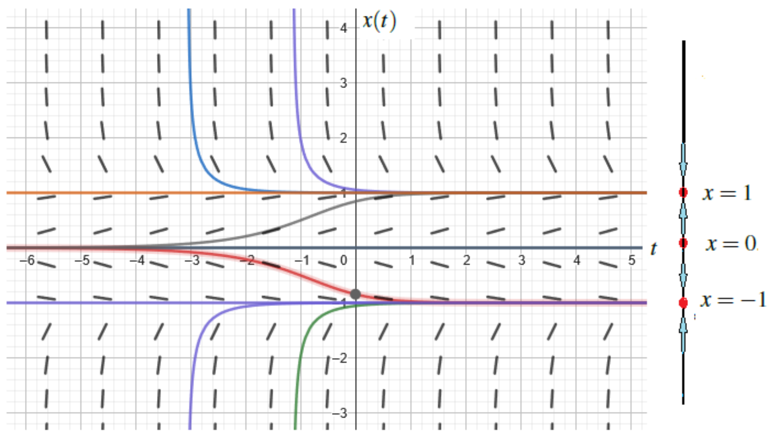


Figura 4.9

Ejemplo 4.3.2 Analizar la ecuación autónoma, cuya gráfica de $f(y)$ viene dada.

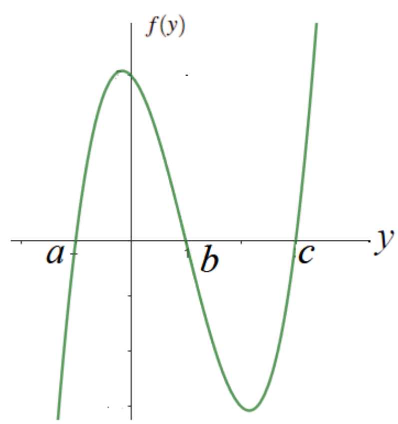
$$\frac{dy}{dt} = f(y)$$

Conociendo la posición de los puntos de equilibrio se puede dibujar la línea de fase de la ecuación diferencial. La figura nos dice que los puntos de equilibrio son

$$y = a, \quad y = b, \quad y = c$$

En estos puntos $f(y) = 0$, así que se deben hallar los intervalos en donde $f(y) > 0$ y en donde $f(y) < 0$.

- En $(-\infty, a)$ es $f(y) > 0$.
- En (a, b) es $f(y) < 0$.
- En (b, c) es $f(y) > 0$
- En (c, ∞) es $f(y) < 0$



Como los puntos de equilibrio están sobre las rectas horizontales, el comportamiento cualitativo lo muestra la siguiente figura.

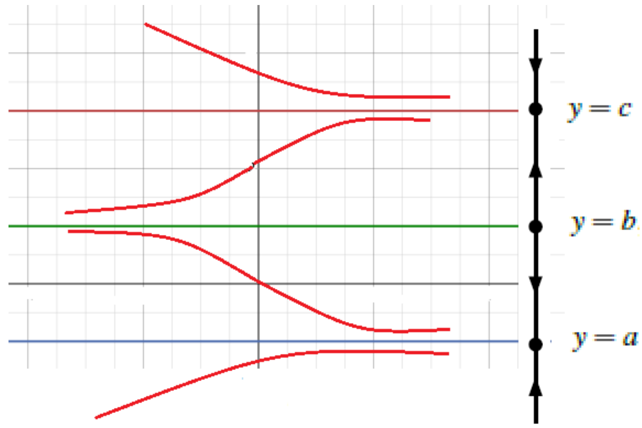


Figura 4.10: comportamiento de la solución

4.4 Teoría cualitativa en sistemas

La teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales intenta obtener propiedades de las soluciones de una ecuación diferencial sin conocerlas explícitamente, es decir, únicamente a través del hecho de que son soluciones de una ecuación diferencial.
Restringimos el estudio a las propiedades cualitativas de los sistemas lineales autónomos compuestos por dos ecuaciones diferenciales de primer orden homogéneas con coeficientes constantes. Un sistema de este tipo lo podemos escribir de la siguiente forma.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = F(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} = G(x,y) \end{cases}$$

Si F, G y sus derivadas parciales son continuas en todo el plano, entonces existe una única solución del sistema que satisface los datos iniciales $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$.
En los sistemas autónomos la variable independiente t no aparece explícitamente en ellas.

Interesa determinar las siguientes propiedades de las soluciones del sistema:

- ¿Existen valores de equilibrio x_0 e y_0, para los cuales el vector (x_0, y_0) es solución del sistema.
- Si $\phi(t)$ es una solución del sistema y $\Phi(t)$ es otra solución con $\phi(0)$ muy cerca de $\Phi(0)$, ¿estará $\Phi(t)$ cercana a $\phi(t)$ para todo tiempo $t \to \infty$, o serán divergentes? Este problema se conoce como de **estabilidad**.
- ¿Qué ocurre con las soluciones del sistema cuando t tiende al infinito? ¿Tienden todas las soluciones a valores de equilibrio? Si no tienden a valores de equilibrio, ¿se aproximarán a una solución periódica?

Definición 4.4.1 **Punto Crítico**
Un punto **crítico** o de **equilibrio** del sistema autónomo, es un punto (x_0, y_0), tal que

$$F(x_0, y_0) = G(x_0, y_0) = 0$$

Ejemplo 4.4.2 Es sencillo ver que $(-1, 1)$ es el único punto de equilibrio del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 1 - y \\ \dfrac{dy}{dt} = x^3 + y \end{cases}$$

Definición 4.4.3 Solución de equilibrio
Si (x_0, y_0) es un punto crítico del sistema, entonces las funciones constantes

$$x(t) = x_0, \quad y(t) = y_0$$

satisface las ecuaciones del sistema. A esta solución se le llama **solución de equilibrio** del sistema.

Ejemplo 4.4.4 Hallar las soluciones de equilibrio del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (x-1)(y-1) \\ \dfrac{dy}{dt} = (x+1)(y+1) \end{cases}$$

Se debe resolver el sistema

$$\begin{cases} (x-1)(y-1) & = 0 \\ (x+1)(y+1) & = 0 \end{cases}$$

se encuentra que

$$(x(t), y(t)) = (-1, 1), \quad \text{y} \quad (x(t), y(t)) = (-1, -1)$$

son las soluciones de equilibrio.
Un primer resultado interesante es el siguiente

Teorema 4.4.5
Si $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ es solución del sistema y $k \in \mathbb{R}$, entonces $\vec{x}(t+k) = \begin{pmatrix} x(t+k) \\ y(t+k) \end{pmatrix}$ es también solución del sistema.

Ejemplo 4.4.6 Hallar los puntos críticos del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 60x - 3x^2 - 4xy \\ \dfrac{dy}{dt} = 42y - 3y^2 - 2xy \end{cases}$$

Este proceso es similar a lo realizado con campos escalares y sus puntos críticos.

$$\begin{cases} 60x - 3x^2 - 4xy = 0 \\ 42y - 3y^2 - 2xy = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x(60 - 3x - 4y) = 0 \\ y(42 - 3y - 2x) = 0 \end{cases}$$

Se observa que $(0,0)$ es punto crítico, además:

- $x = 0$ en la primera ecuación implica $y = 14$ en la segunda.
- $y = 0$ en la segunda ecuación implica $x = 20$ en la primera.

La cuarta alternativa es que

$$\begin{cases} 3x+4y=60 \\ 2x+3y=42 \end{cases}$$

Al resolver, se halla el punto $(12,6)$. En consecuencia los puntos críticos son; $(0,0)$, $(0,14)$, $(20,0)$ y $(12,6)$.

4.4.1 Órbita y plano fase

En muchas ocasiones se tiene en cuenta la curva definida por la solución del sistema en el plano xy. Es decir, se considera la curva $(x(t),y(t))$. Dicha curva se conoce como **órbita**, **trayectoria**, o línea de **flujo** de la solución. El plano xy se denomina **plano fase** de las soluciones del sistema. De manera que se puede considerar la órbita $(x(t),y(t))$ como la trayectoria que describe la solución en el plano xy.

Una de las ventajas de considerar la órbita de la solución y no la solución misma es que, con frecuencia, es posible obtener la órbita de una solución sin conocimiento previo de la solución. De hecho, las órbitas del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=F(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt}=G(x,y) \end{cases}$$

son las curvas solución de la ecuación escalar

$$\frac{dy}{dx}=\frac{G(x,y)}{F(x,y)}$$

Esta ecuación también permite la construcción del plano de fase. Además, una información parecida a la que nos proporciona el campo de direcciones del sistema se obtiene tratando el campo vectorial $\vec{v}$ dado en cada punto del plano por

$$\vec{v}(x,y)=(F(x,),G(x,y))=(x',y')$$

Por tanto, las órbitas del sistema serán curvas tangentes a (y recorridas en el sentido que indican) los vectores del campo $\vec{v}$ (como se ve, este campo sólo se anula en los puntos críticos). Generalmente usaremos el dibujo de algunos vectores del campo $\vec{v}$ hacernos una idea del retrato de fases.

Ejemplo 4.4.7 Para el sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=y^2 \\ \dfrac{dx}{dt}=x^2 \end{cases}$$

la ecuación de las órbitas es

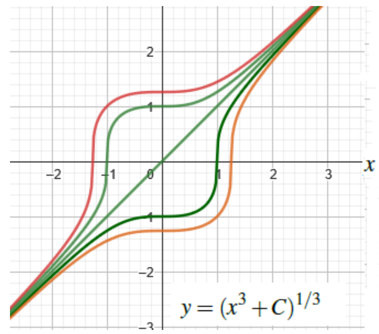
$$\frac{dy}{dx} = \frac{G(x,y)}{F(x,y)} = \frac{x^2}{y^2}$$

ecuación de variables separables, que al resolver entrega la solución

$$y(x) = (x^3 + C)^{1/3}$$

Por tanto, las órbitas del sistema dado son el conjunto de todas las curvas

$$y = (x^3 + C)^{1/3}$$



Ejemplo 4.4.8 Se considera el sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x' = x \\ \dfrac{dy}{dt} = y' = y^2 \end{cases}$$

El origen es el único punto crítico. Algunos vectores del campo $\vec{v} = (x, y^2)$ se muestran en la figura (con un mismo módulo pues interesa su dirección y sentido). Por ejemplo:

- En el punto $(1,1)$ se dibuja el vector $(1,1)$.
- En el punto $(0,0)$ se dibuja el vector $(0,0)$.
- En el punto $(1,0)$ se dibuja el vectores $(1,0)$
- En el punto $(2,0)$ se dibuja el vectores $(2,0)$
- En el punto $(-1,0)$ se dibuja el vectores $(-1,0)$
- En el punto $(0,1)$ se dibuja el vectores $(0,1)$
- En el punto $(0,2)$ se dibuja el vectores $(0,4)$

Para ver las órbitas en el plano fase se resuelve

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x} \Longrightarrow -\frac{1}{y} = \ln x + \ln C$$

al despejar la variable x

$$x = C e^{-1/y}$$

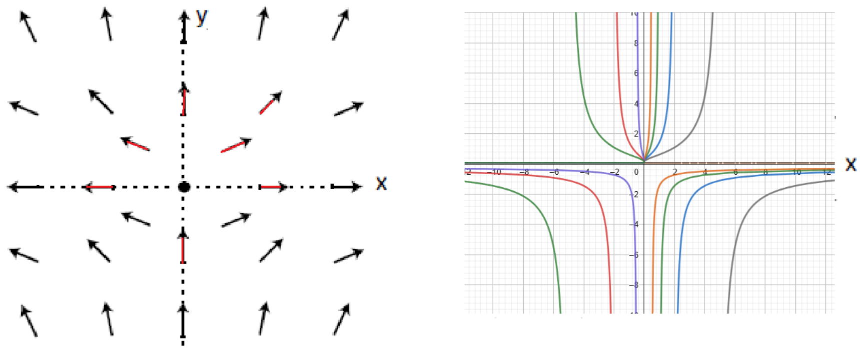


Figura 4.11: campo de vectores y plano de fase

Definición 4.4.9 Retrato de fase o diagrama de fase

Un **retrato** de fase es una representación geométrica, en el plano de fase, de todas las trayectorias de un sistema dinámico en el plano. Cada curva representa una condición inicial diferente.

Para confeccionar el retrato de fase es requisito que el sistema sea autónomo, es decir la derivada de las variables x e y con respecto al tiempo no dependen explícitamente del tiempo. Ambas funciones, F y G, pueden o no ser lineales.

Para poder graficarlo en el plano cartesiano se analiza un sistema con dos variables. Lo que interesa analizar de este sistema es el comportamiento de las dos variables con respecto al tiempo. Para esto vamos a determinar el o los puntos de equilibrio y luego determinar el sentido de movimiento de las variables x e y en el plano y así inferir como se mueven a medida que transcurre el tiempo.

Para determinar la posición de una partícula en un instante t debemos conocer también su posición en algún instante t_0 ya que en un instante dado habrá partículas en diferentes puntos y por lo tanto sus trayectorias no son iguales.

Teorema 4.4.10 Por cada punto del plano de fase pasa una única órbita del sistema autónomo. Si una órbita se corta a sí misma corresponde a una solución periódica y dicha órbita es una curva cerrada simple.

Ejemplo 4.4.11 Hallar puntos críticos y bosquejar el campo de direcciones de

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x \\ \dfrac{dy}{dt} = -2y \end{cases}$$

Se observa que $(0,0)$ es el único punto crítico. El campo de direcciones se obtiene de la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$$

Esta es una ecuación de variables separables, su solución es $y = Cx^2$ y es una familia de parábolas.

gráfica obtenida de `https://www.wolframalpha.com/widgets/view.jsp?id=9ad78a1ce61d0cfe43bcc13e48aec5`

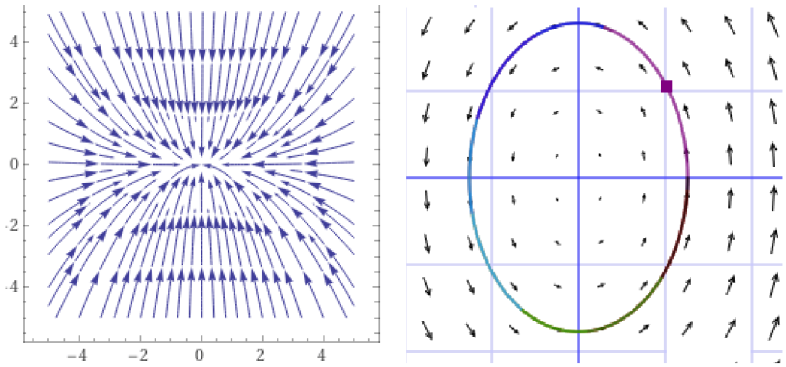


Figura 4.12: plano fase

4.4.2 Isoclinas

Sea $(x(t), y(t))$ una solución del sistema plano

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = F(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} = G(x,y) \end{cases}$$

El vector $\vec{V}(x,y) = (F(x,y), G(x,y))$ define un **campo vectorial** en una región del plano, y una solución del sistema puede interpretarse como la trayectoria resultante de una partícula a medida que se desplaza por la región. El vector velocidad de la curva plana, determinado por la solución, es

$$\vec{V}\,'(t) = (x'(t), y'(t)) = (F(x,y), G(x,y))$$

Ejemplo 4.4.12

1. Graficar el campo estacionario $\vec{V}(x,y) = (-\frac{y}{2}, x)$.
2. Visualizar la línea de flujo de una partícula que se suelta en el punto $(1,1)$.
3. Determinar la ecuación de la familia de líneas de flujo y describirlas geométricamente.

En la página `https://aeb019.hosted.uark.edu/pplane.html` se obtiene la siguiente representación del campo vectorial y de la línea de flujo que pasa por $(1,1)$.
Si la trayectoria es $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$, entonces el vector velocidad es

$$\vec{r}\,'(t) = \vec{v}(t) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = \left(-\frac{y}{2}, x\right)$$

Esto se puede escribir en la forma

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{y}{2} \\ \dfrac{dy}{dt} = x \end{cases}$$

Al eliminar la dependencia de t

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{y} \Longrightarrow y\,dy = -2x\,dx$$

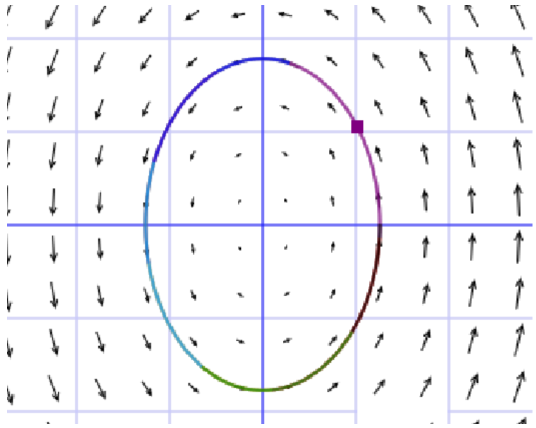


Figura 4.13: campo vectorial

al integrar

$$\frac{y^2}{2} = -x^2 + C \Longleftrightarrow x^2 + \frac{y^2}{2} = C$$

una familia de elipses. Para la solución que pasa por $(1,1)$ se tiene

$$1 + \frac{1}{2} = C \Longrightarrow C = \frac{3}{2}$$

Por tanto, la línea de flujo que pasa por $(1,1)$ es

$$x^2 + \frac{y^2}{2} = \frac{3}{2}$$

Definición 4.4.13 Las líneas en donde $x' = y' = 0$ son conjuntos de puntos en los que las variables $x(t)$, $y(t)$ no cambian con respecto a la variable independiente t. Estas líneas se llaman **isoclinas** del sistema, y corresponden con los puntos de equilibrio de cada una de las ecuaciones del sistema.

Así,

- la isoclina $x' = 0$ contiene los puntos para los cuales las curvas solución tienen pendiente vertical. Se determina por la ecuación $G(x,y) = 0$
- La isoclina $y' = 0$ está formada por los puntos para los cuales las soluciones tienen pendiente horizontaL. Esta isoclina se determina por $F(x,y) = 0$.

En general las isoclinas dividen el plano en diferentes regiones donde el vector tangente tiene la misma dirección y sentido.

Las isoclinas son útiles para obtener la dirección de los vectores del campo de dirección y por lo tanto sirven para esbozar las curvas solución.

- En la isoclina $x' = 0$ es $F(x,y) = 0$ y contiene todos los puntos de equilibrio para x. La isoclina $x' = 0$ divide al plano en dos regiones, una con $x' > 0$ y la otra con $x' < 0$.
- En la isoclina $y' = 0$, en la cual $G(x,y) = 0$ están todos los puntos de equilibrio para y. La isoclina $y' = 0$ divide al plano en dos regiones, una con $y' > 0$ y la otra con $y' < 0$.

Al graficar ambas isoclinas, el plano queda dividido en cuatro tipos de regiones, y es posible dar el flujo de x e y en cada uno.

Ejemplo 4.4.14 Hallar las isoclinas horizontal y vertical para el sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y \end{cases}$$

El único punto crítico del sistema es el $(0,0)$. La isoclina horizontal viene dada por

$$G(x,y) = 0 \Longrightarrow x - y = 0 \Longrightarrow y = x$$

La isoclina vertical por

$$F(x,y) = 0 \Longrightarrow x + y = 0 \Longrightarrow y = -x$$

Para encontrar las direcciones de los vectores velocidad se analiza los signos de x' e y' cerca del punto crítico sobre las isoclinas horizontal y vertical.

- Isoclina horizontal $y = x$

Se toman dos puntos sobre la isoclina (uno a la izquierda y uno a la derecha del punto crítico) y se sustituyen en el sistema

$$\begin{cases} x' &= x + y \\ y' &= x - y \end{cases}$$

Si se elige el punto $(1,1)$ (debes mirar la recta $y = x$ para tu elección), entonces

$$\begin{pmatrix} x \\ \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1+1 \\ \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como el signo de la componente x es positivo el vector velocidad lleva dirección hacia la derecha.
Un segundo punto, sobre la recta $y = x$ y a la izquierda del $(0,0)$, puede ser $(-1,-1)$. Se tiene

$$\begin{pmatrix} x \\ \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \\ -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} -1-1 \\ \\ -1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como el signo de la componente x es negativo el vector velocidad lleva dirección hacia la izquierda.

- Isoclina vertical $y = -x$

Se toman dos puntos sobre la isoclina (uno a la izquierda y otro a la derecha del punto crítico) y se sustituyen en el sistema

$$\begin{cases} x' &= x + y \\ y' &= x - y \end{cases}$$

Si se elige el punto $(-1,1)$ (debes mirar la recta $y = -x$ para tu elección), entonces

$$\begin{pmatrix} x \\ \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} -1+1 \\ \\ -1-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ -2 \end{pmatrix}$$

Como el signo de la componente y es negativo el vector velocidad lleva dirección hacia abajo.

Un segundo punto, sobre la recta $y = -x$ y a la derecha del $(0,0)$, puede ser $(1,-1)$. Se tiene

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1-1 \\ 1-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Como el signo de la componente y es positivo el vector velocidad lleva dirección hacia arriba.

Con estos datos se puede bosquejar una primera aproximación al campo de velocidades (figura), donde hay que poner especial atención en las direcciones y sentidos de los vectores velocidad.

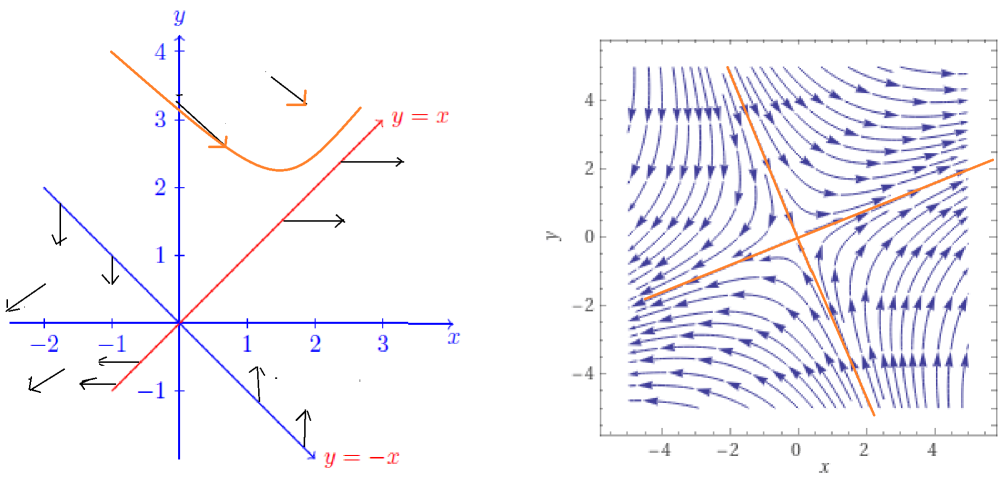


Figura 4.14: campo de velocidades

Fuente: https://www.i-ciencias.com/pregunta/102245/trazado-de-diagramas-de-fase-de-ecuaciones-diferenciales

Ejemplo 4.4.15 Obtener el diagrama de fase del sistema

$$\begin{cases} x' &= xy \\ y' &= x^2 \end{cases}$$

En primer lugar, se determinan las isoclinas horizontal y vertical del sistema.

$$xy = 0 \Longrightarrow x = 0 \ \vee \ y = 0$$

Si $x = 0$ en la primera ecuación, entonces satisface también la segunda, y luego el $(0, y)$ son puntos críticos, es decir, el eje y está lleno de puntos críticos. Esto significa que no hay isoclina vertical ni horizontal en el sistema. Por tanto, para obtener las direcciones de los vectores velocidad se toman algunos puntos del plano y se analizan en el sistema. Se consideran los siguientes puntos; $(1,1)$, $(-1,-1)$, $(-1,1)$ y $(1,-1)$, para los cuales se tiene:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De esta manera, el vector velocidad se mueve una unidad hacia la derecha y una unidad hacia arriba.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De esta manera, el vector velocidad se mueve una unidad hacia la derecha y una unidad hacia arriba.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De esta manera, el vector velocidad se mueve una unidad hacia la izquierda y una unidad hacia arriba.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De esta manera, el vector velocidad se mueve una unidad hacia la izquierda y una unidad hacia arriba.
Para el cálculo de las integrales primera debe resolverse la ecuación de variables separables

$$\frac{dy}{dx} = y'(x) = \frac{x^2}{xy} = \frac{x}{y}$$

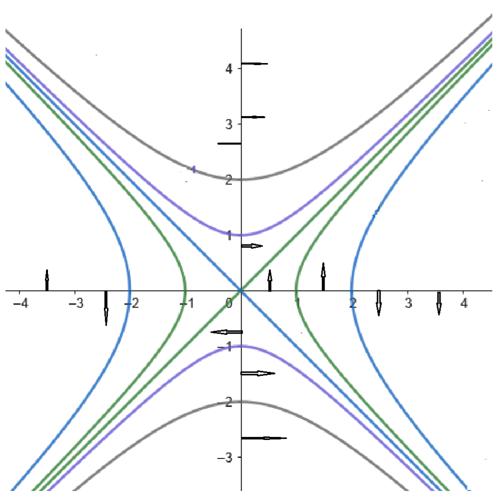
cuya solución es

$$y^2 = x^2 + C$$

Esta es una hipérbola para $C \neq 0$, pues $C = 0$ implica

$$y^2 = x^2 \Longrightarrow (y-x)(y+x) = 0$$

un par de rectas. Con esta información se puede hacer el esbozo del diagrama de fase, que se muestra en la figura.



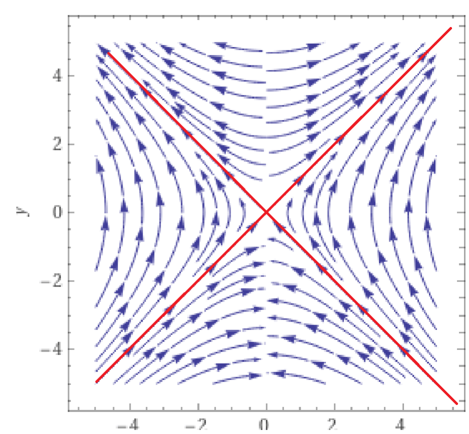


Figura 4.15: diagrama de fase

4.4.3 Estabilidad

Ahora veremos, en el caso de los sistemas autónomos lineales, que la naturaleza y estabilidad del punto crítico queda caracterizada por los autovalores de la matriz del sistema.

Definición 4.4.16

1. El punto crítico $(0,0)$ del sistema lineal autónomo es **estable** si para todo número $R > 0$, existe algún $r > 0$, con $r \leq R$, tal que cada trayectoria que está dentro del círculo $x^2 + y^2 = r^2$ en algún momento $t = t_0$, permanezca dentro del círculo $x^2 + y^2 = R^2$ para todos los $t > t_0$. Esto signfica que, si una trayectoria está cerca del punto de equilibrio, se mantendrá cerca a lo largo del tiempo $(t \to \infty)$.
2. El punto crítico $(0,0)$ del sistema lineal autónomo es **asintóticamente estable**, cuando es estable y existe algún número $r_0 > 0$, tal que toda trayectoria que está dentro del círculo $x^2 + y^2 = r_0^2$ en algún momento $t = t_0$, se aproxima al origen cuando $t \to \infty$. Esto significa que las trayectorias cercanas no sólo se mantienen cerca, sino que se aproximan al punto de equilibrio a lo largo del tiempo.
3. El punto crítico $(0,0)$ del sistema lineal autónomo es **inestable** cuando no es estable. Esto es, las trayectorias que empiezan cerca del punto de equilibrio se alejan de este punto a lo largo del tiempo.

4.4.4 Naturaleza de los puntos críticos

Consideremos un sistema autónomo lineal

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by \\ \dfrac{dy}{dt} = cx + dy \end{cases}$$

Para que $(0,0)$ sea su único punto crítico, la matriz del sistema

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

debe tener determinante no nulo, y por ello los autovalores λ_1, λ_2 deben ser diferentes de cero. En función del comportamiento de las trayectorias en relación con el punto crítico aislado $(0,0)$, el punto crítico se denominará: nodo, punto de silla, centro, o foco:
Los valores propios de la matriz A, se obtienen de

$$p(\lambda) = |A - ¸I| = 0 \Longrightarrow (a - \lambda¸)(d - \lambda) - bc = 0$$

al desarrollar

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0$$

de lo cual

$$p(\lambda) = \lambda^2 - traza(A) + |A| = 0$$

cuya solución es

$$\lambda = \frac{traza(A) \pm \sqrt{(traza(A))^2 - 4|A|}}{2}$$

en donde $traza(A) = a + d,\ |A| = ad - bc$.

A partir de lo anterior se tiene la siguiente clasificación del punto critico $(0,0)$

Definición 4.4.17 El punto crítico $(0,0)$ es:

1. punto de silla si $|A| < 0$.
2. nodo estable si $|A| > 0$, $(traza(A))^2 - 4|A| \geq 0$, y $traza(A) < 0$.
3. nodo inestable si $|A| > 0$, $(traza(A))^2 - 4|A| \geq 0$, y $traza(A) > 0$.
4. foco estable si $|A| > 0$, $(traza(A))^2 - 4|A| < 0$ y $traza(A) < 0$.
5. foco inestable si $|A| > 0$, $(traza(A))^2 - 4|A| < 0$ y $traza(A) > 0$.
6. centro si $|A| > 0$ y $traza(A) = 0$.

El siguiente resultado resume los diferentes comportamientos de las trayectorias desde el punto de vista de la estabilidad.

Teorema 4.4.18 El punto crítico $(0,0)$ del sistema lineal autónomo es estable si y sólo los autovalores tienen parte real no positiva; si existe un autovalor con parte real positiva, entonces el punto crítico $(0,0)$ del sistema es inestable; el punto crítico $(0,0)$ del sistema lineal es asintóticamente estable si y sólo si los autovalores tienen parte real negativa.

4.4.5 Estudio caso a caso

Caso I : Valores propios reales y distintos
Sabemos que la solución general es

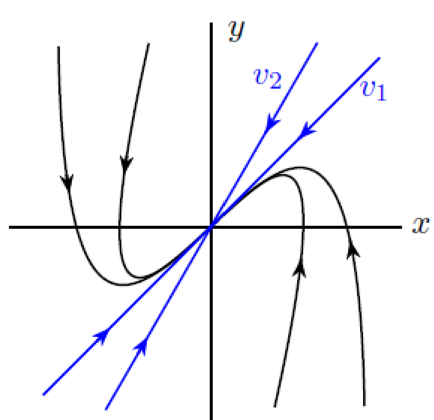
$$\vec{X}(t) = C_1\vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\vec{v}_2 e^{\lambda_2 t}$$

se presentan tres situaciones:

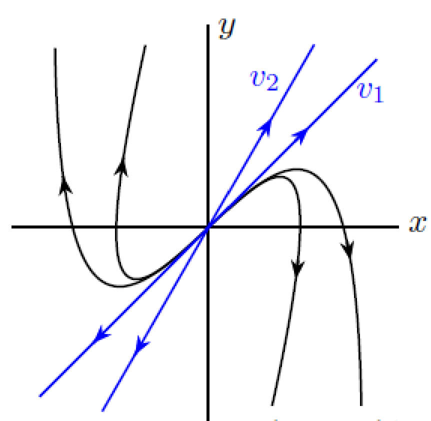
(a) Ambos valores propios son negativos (nodo estable o atractor).

Si $\lambda_1 < 0$ y $\lambda_2 < 0$, entonces

$$\lim_{t\to\infty} \vec{X}(t) = \vec{0}$$



nodo estable



nodo inestable

(b) Ambos valores propios son positivos (nodo inestable o repulsor).

Si $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 > 0$, entonces

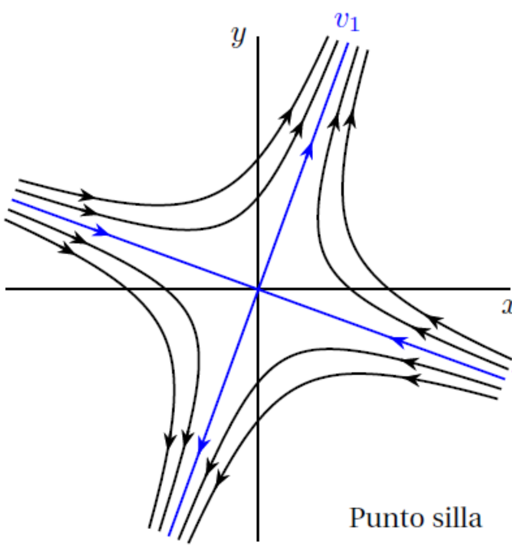
$$\lim_{t\to\infty} \vec{X}(t) = \infty$$

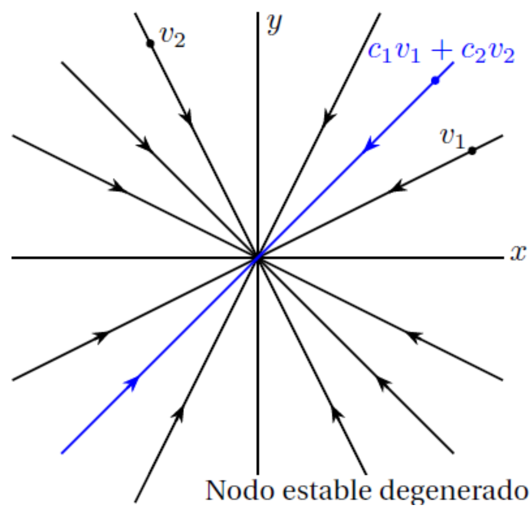
(c) Ambos valores propios tienen signos opuestos (silla).

Si $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$, entonces la solución

$$\vec{X}(t) = C_1\vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\vec{v}_2 e^{\lambda_2 t} = e^{\lambda_1 t}\left(C_1\vec{v}_1 + C_2\vec{v}_2 e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}\right)$$

Cuando $C_1 = 0$, la solución $\vec{X}(t)$ se aproxima a 0 a lo largo de la recta determinada por el vector propio $\vec{v}_2$ cuando $t \to \infty$. Si la solución no está sobre esa recta, la marcada por $\vec{v}_1$ hace de asíntota para la solución. El punto crítico es inestable.





Caso II : Valor propio real repetido

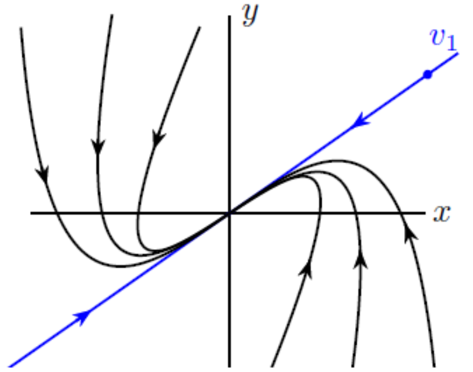
En este caso, si el único valor propio de A es $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 0$, el carácter del punto crítico $(0,0)$ depende de si la matriz A de coeficientes tiene dos vectores propios linealmente independientes $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ o no.

(a) A tiene dos vectores propios linealmente independientes.

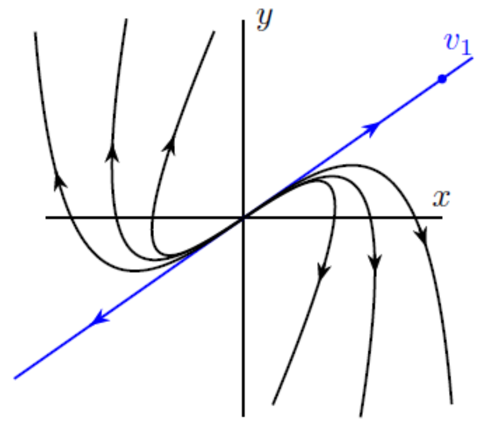
En este caso la solución general es

$$\vec{X}(t) = C_1\vec{v}_1 e^{\lambda t} + C_2\vec{v}_2 e^{\lambda t} = e^{\lambda t}(C_1\vec{v}_1 + C_2\vec{v}_2)$$

Si $\lambda < 0$, entonces $\vec{X}(t)$ tiende a $\vec{0}$ a lo largo de la recta determinada por $C_1\vec{v}_1 + C_2\vec{v}_2 = 0$ y el punto crítico $(0,0)$ se denomina nodo estable degenerado, y cuando $\lambda > 0$ se llama nodo inestable degenerado.



Nodo impropios: estable degenerado



Nodo impropios inestable degenerado

(a) A tiene sólo un vector propio linealmente independiente.
Sea $\lambda \neq 0$ el valor propio múltiple con sólo un vector propio $\vec{v}_1$ entonces existe un vector generalizado $\vec{v}_2$ tal que

$$(A - \lambda I)\vec{v}_2 = \vec{v}_1$$

con lo cual el sistema $\vec{X}\,'(t) = A\vec{X}(t)$ tiene dos soluciones linealmente independientes

$$\vec{X}_1(t) = \vec{v}_1 e^{\lambda t}, \quad \text{y} \quad \vec{X}_2(t) = (\vec{v}_1 t + \vec{v}_2)e^{\lambda t}$$

Así que, la solución general es

$$\vec{X}(t) = C_1\vec{v}_1 e^{\lambda t} + C_2\left(\vec{v}_1 t + \vec{v}_2)e^{\lambda t}\right) = t\,e^{\lambda t}\left(C_2\vec{v}_1 + \frac{C_1}{t} + \frac{C_2}{t}\vec{v}_2\right)$$

Si $\lambda < 0$, entonces $\vec{X}(t) \to \vec{0}$ cuando $t \to \pm\infty$, en una dirección determinada por el vector $\vec{v}_1$. El punto crítico $(0,0)$ se llama nodo impropio estable degenerado y si $\lambda > 0$ el punto crítico $(0,0)$ se llama nodo impropio inestable degenerado.

Caso III : Valores propios complejos.

Existen dos situaciones:

(a) A tiene raíces imaginarias puras.
Para que esto ocurra se debe tener que;

$$\text{traza}^2(A) - 4|A| < 0 \quad \text{y} \quad \text{traza}(A) = 0$$

En este caso el punto crítico $(0,0)$ se llama **centro**.
(b) A tiene parte real del complejo no nula.
Para que esto ocurra se debe tener que;

$$\text{traza}^2(A) - 4|A| < 0 \quad \text{y} \quad \text{traza}(A) \neq 0$$

Si la parte real es mayor que 0, el punto crítico es inestable y la gráfica es una espiral que se aleja del punto crítico. Si la parte real es negativa, el punto crítico es estable y la curva solución es una espiral que se aproxima al punto crítico.

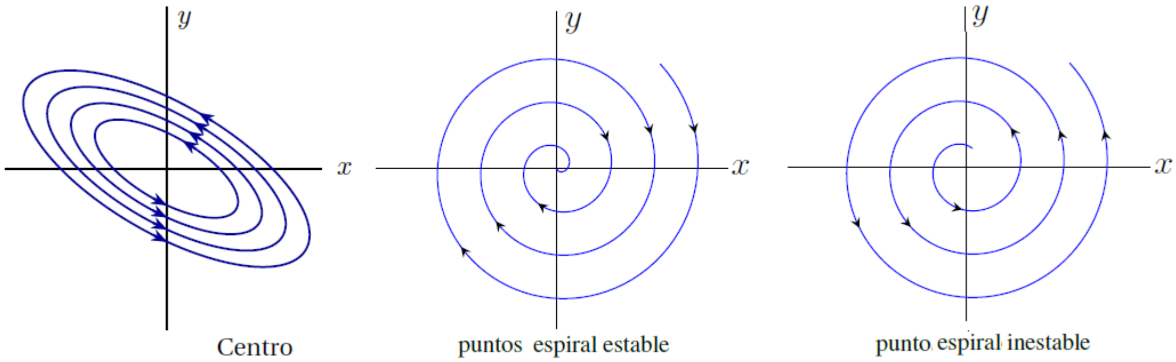


Figura 4.16: centro y espirales

Ejemplo 4.4.19 Esbozar el retrato de fase del sistema

$$\begin{cases} x' &= 4x - y \\ y' &= 2x + y \end{cases}$$

En forma matricial este sistema tiene la forma

$$\vec{X}'(t) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Los valores propios de la matriz A se determinan a partir de

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Al resolver

$$(4-\lambda)(1-\lambda) - 2(-1) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

Las raíces del polinomio característico son

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 3$$

Ahora hay que encontrar los vectores propios correspondientes a cada valor propio, para luego formar el vector solución del sistema de ecuaciones.

- Vector propio para $\lambda_1 = 2$

$$(A - 2I)\vec{v} = \vec{0} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 4-2 & -1 \\ 2 & 1-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

al simplificar

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

al reducir por filas

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nos queda la ecuación

$$2v_1 - v_2 = 0 \Longrightarrow v_2 = 2v_1$$

Al tomar $v_1 = 1$ se tiene $v_2 = 2$. Luego, el vector propio asociado es

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- Vector propio para $\lambda_2 = 3$

$$(A - 3I)\vec{v} = \vec{0} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 4-3 & -1 \\ 2 & 1-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

al simplificar

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

al reducir por filas

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nos queda la ecuación

$$v_1 - v_2 = 0 \Longrightarrow v_1 = v_2$$

Al tomar $v_1 = 1$ se tiene $v_2 = 1$. Luego, el vector propio asociado es

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Con esto, la solución general es

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-2t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t}$$

Para esbozar el diagrama de fase se da algunos valores a las constantes.

- $C_1 = 0, C_2 = 1 \Longrightarrow \begin{cases} x = e^{-3t} \\ y = e^{-3t} \end{cases} \Longrightarrow y = x$
- $C_1 = 1, C_2 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = e^{-2t} \\ y = 2e^{-2t} \end{cases} \Longrightarrow y = 2x$

A partir de esto se deduce que las rectas de valores propios son $y = x$ e $y = 2x$. Además, el único punto crítico es $(0,0)$.
Para las direcciones de los vectores velocidad se analiza el signo de x' e y' tomando puntos sobre las rectas isoclinas. Las isoclinas horizontal, vertical y las direcciones se obtienen del sistema

$$\begin{cases} x' &= 4x - y \\ y' &= 2x + y \end{cases}$$

- Isoclina horizontal

En este caso

$$2x + y = 0 \Longrightarrow y = -2x$$

Sobre esta isoclina horizontal las direcciones son:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El vector lleva dirección hacia la izquierda.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El vector lleva dirección hacia la derecha.

- Isoclina vertical

En este caso

$$4x - y = 0 \Longrightarrow y = 4x$$

Sobre esta isoclina vertical las direcciones son:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix}$$

El vector lleva dirección hacia abajo.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

El vector lleva dirección hacia arriba.

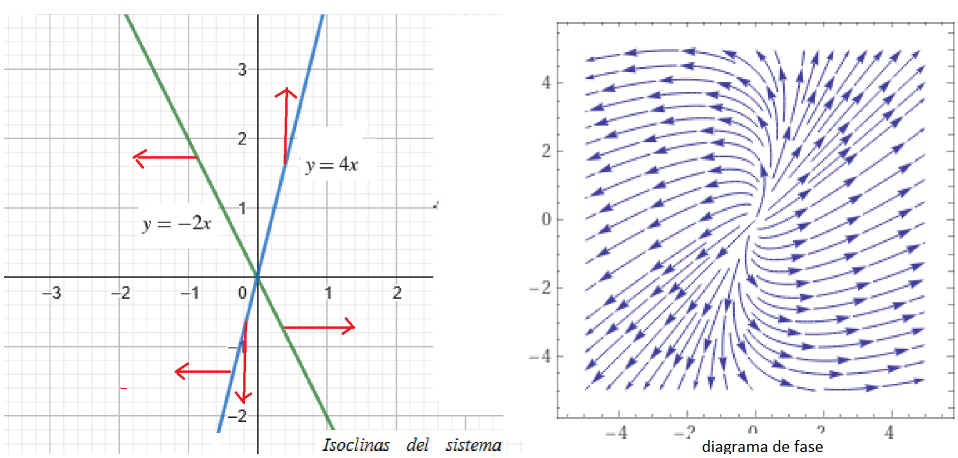
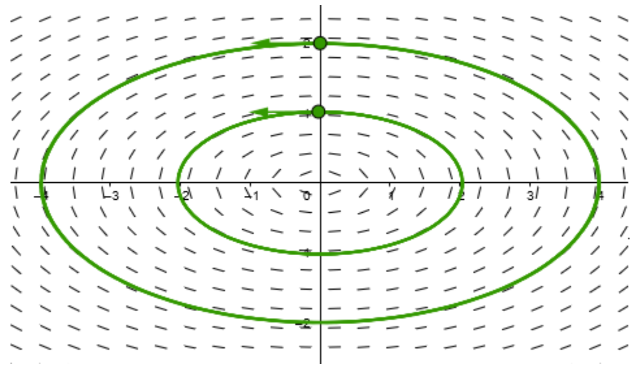


Figura 4.17: diagrama de fase

La figura 4.17 muestra las isoclinas horizontal y vertical, del cual se obtiene las direcciones de los vectores velocidad. Toda esta información permite esbozar el diagrama de fase del sistema dado y se muestra en la figura (se usó wolfram). Como los autovalores son ambos positivos se trata de un nodo inestable.

Ejemplo 4.4.20 Esbozar el retrato de fase del sistema

$$\begin{cases} x' &= -2y \\ y' &= \frac{1}{2}x \end{cases}$$



La matriz A del sistema es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

sus valores propios son $\lambda_1 = \pm i$.

Hallemos la integral primera, o las órbitas resolviendo la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x/2}{-2y} = -\frac{1}{4}\frac{x}{y}$$

al integrar

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{4}\frac{x}{y} \Longrightarrow \frac{x^2}{4} + y^2 = C$$

se trata de un centro (una familia de elipses).

Ejemplo 4.4.21 Determinar la trayectoria que seguirá una partícula que se suelta en el punto $P(2,0)$ quedando sujeta al campo de velocidad estacionario o autónomo (estable en el tiempo) $\vec{v} = (4y, -x)$.

Como el campo de velocidades es $\vec{v} = (x', y') = (4y, -x)$, establecemos el sistema

$$\begin{cases} x' &= 4y \\ y' &= -x \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

con condiciones iniciales; $x(0) = 2$, $y(0) = 0$.
Determinemos los valores propios

$$\left| \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda I_2 \right| = 0 \Longrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 4 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Al resolver, los valores propios son complejos $\lambda = \pm 2i$. Veamos sus vectores propios

Para $\lambda_1 = 2i$ se tiene.

$$\begin{pmatrix} 2i & 4 \\ -1 & 2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Al multiplicar la segunda fila por $2i$ y sumar a ésta la primera fila se halla que

$$\begin{pmatrix} 2i & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esto conlleva que

$$2iv_1 + 4v_2 = 0 \Longrightarrow iv_1 = -2v_2$$

al tomar $v_1 = 2i$, entonces $v_2 = 1$, con lo cual el vector propio es

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}^{v_1} + i\overbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}}^{v_2}$$

Se separó el vector propio en su parte real e imaginaria. Por tanto, la solución del sistema es

$$\begin{cases} x(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos 2t - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \operatorname{sen} 2t \\ y(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \operatorname{sen} 2t + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cos 2t \end{cases}$$

La solución general es

$$\vec{X}(t) = C_1 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos 2t - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \operatorname{sen} 2t \right] + C_2 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \operatorname{sen} 2t + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cos 2t \right]$$

al reducir

$$\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -2\operatorname{sen} 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2\cos 2t \\ \operatorname{sen} 2t \end{pmatrix}$$

Ahora aplicamos las condiciones iniciales $x(0) = 2$, $y(0) = 0$, que en forma vectorial es

$$\vec{X}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La aplicamos

$$\vec{X}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2C_2 \\ C_1 \end{pmatrix} \Longrightarrow C_1 = 0,\ C_2 = 1$$

Se concluye que la solución que satisface las condiciones iniciales es

$$\vec{X}(t) = \begin{cases} x(t) = 2\cos 2t \\ y(t) = \operatorname{sen} 2t \end{cases}$$

Como los valores propios son complejos, ya sabíamos que se trataba de un centro. Al eliminar el parámetro t de las curvas solución se encuentra que las órbitas son una familia de elipses. `https://aeb019.hosted.uark.edu/pplane.html`

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

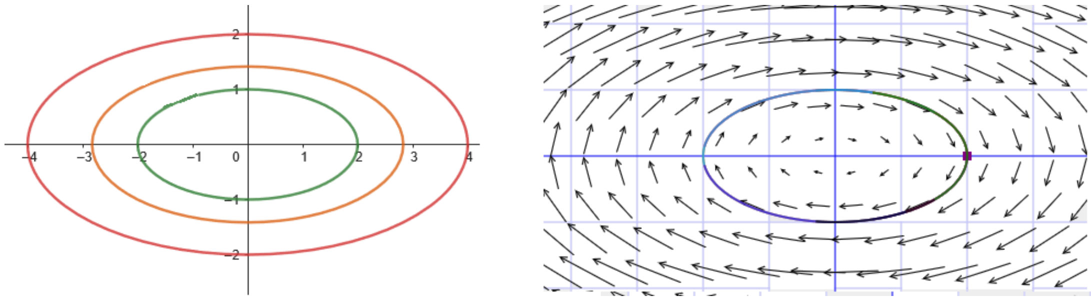


Figura 4.18: curvas integrales y plano de fase

Ejemplo 4.4.22 Bosquejar el retrato de fase para la ecuación diferencial $y'' = y - y^3$

Esta es una ecuación de órden 2. Para analizar sus soluciones es necesario transformar la ecuación diferencial en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.

$$\begin{cases} y' = x \\ x' = y - y^3 \end{cases} \iff \begin{cases} x' = y - y^3 \\ y' = x \end{cases}$$

Los puntos de equilibrio del sistema son; $(0,0)$, $(1,0)$ y $(-1,0)$. Para hallar las órbitas se resuelve la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - x^3}{y} \Longrightarrow y^2 = x^2 - \frac{x^4}{2} + C$$

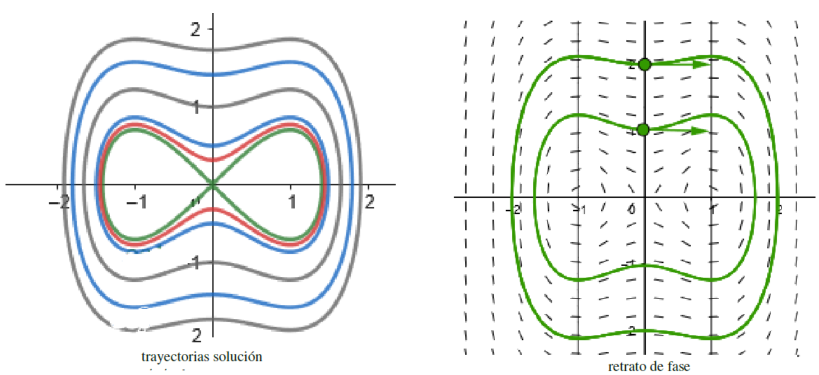


Figura 4.19: retrato de fase $y'' = x - x^3$

La trayectorias solución y un retrato de fase se hicieron en la página `https://www.geogebra.org/m/vabxytnc`

4.5 Sistemas no lineales

Los sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales generalmente no tienen solución, salvo en contadas situaciones, sin embargo, si estos sistemas son autónomos y de dimensión dos, se puede obtener propiedades de sus soluciones en base al plano de fase.

Como el sistema de ecuaciones no es lineal las isoclinas dejan de ser rectas y se convierten en curvas; eso depende de la relación que resulte de hacer $x' = 0$ e $y' = 0$. También, el diagrama de fase deja de tener relación con valores propios, ya que el sistema no lineal no tiene representación matricial.
Además de la tabulación, hay otro procedimiento para determinar el signo a cada lado de las isoclinas $x' = 0$ e $y' = 0$. Calculando el signo de $\frac{dx'}{dx}$ se determina la relación en el cruce de la isoclina x' con el eje x. Si $\frac{dx'}{dx} > 0$, entonces $x' = 0$ pasa de menos $(-)$ a más $(+)$ al aumentar x.

Ejemplo 4.5.1 Para el sistema

$$\begin{cases} x' &= y - x^2 + 3 \\ y' &= y - x + 1 \end{cases}$$

se tiene lo siguiente:

Las isoclinas, que se obtienen haciendo $x' = y' = 0$, son
- Si $x' = 0$, entonces $y = x^2 - 3$. ¡una parábola!
- Si $y' = 0$, entonces $y = x - 1$. ¡una recta!

Al igualar esta ecuaciones, los puntos de equilibrio están en $(-1,-2)$ y $(2,1)$. Observar que las isoclinas dividen al plano de fase en 5 regiones
Tabulando en $(0,0)$ se tiene que $x' = 3 > 0$ y que $y' = 1 > 0$. Luego, en la región en la cual está el $(0,0)$ hay que poner x' como y' positivos.
Los puntos críticos salen de resolver el sistema

$$\begin{cases} y &= x^2 - 3 \\ y &= x - 1 \end{cases} \Longrightarrow (x,y) = (2,1) \text{ y } (x,y) = (-1,-2)$$

En las figuras puedes ver como coincide el trabajo manual de hallar isoclinas y las direcciones con la construcción del plano fase por software.

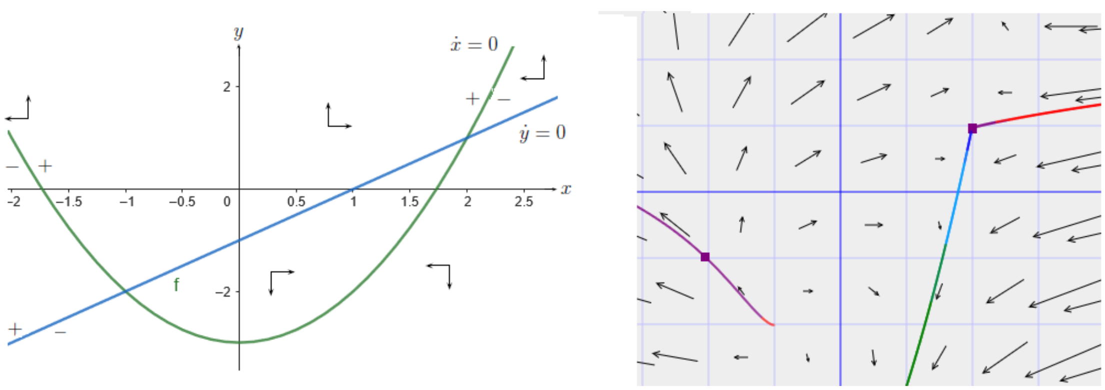


Figura 4.20: Isoclinas y plano fase

A continuación veremos un procedimiento más preciso para obtener el plano de fase.

4.5.1 Linealización

Para analizar el comportamiento de las soluciones de un sistema **no** lineal que estén cerca de los puntos de equilibrio, se debe “linealizar” este sistema en los puntos de equilibrio, puesto que con ellos es posible caracterizar el comportamiento de las soluciones de un sistema lineal.

De nuestros estudios de cálculo, una aproximación lineal local (**linealización**, de una función diferenciable f en un punto $(x_1, f(x_1))$ es la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto, esto es

$$y = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1)$$

Geométricamente, para de x cercano a x_1, los puntos sobre la gráfica de f están cerca de los puntos de la recta tangente, por lo que los valores $y(x)$ que se obtienen a partir de esta ecuación pueden utilizarse para aproximar los correspondientes valores de f en x.
Consideremos el sistema autónomo

$$\begin{cases} x' &= F(x,y) \\ y' &= G(x,y) \end{cases}$$

con punto crítico en (x_0, y_0), y las funciones $F(x,y)$ y $G(x,y)$ de clase C^1. Aproximando $F(x,y)$ y $G(x,y)$ (cerca del punto (x_0, y_0)) por sus respectivos planos tangentes en dicho punto

$$\begin{aligned} F(x,y) &\sim \frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0) \\ G(x,y) &\sim \frac{\partial G}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial G}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0) \end{aligned}$$

Se puede escribir

$$\begin{pmatrix} F(x,y) \\ G(x,y) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} f_x(x_0,y_0) & f_y(x_0,y_0) \\ g_x(x_0,y_0) & g_y(x_0,y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}, \quad (x,y) \sim (x_0,y_0)$$

La matriz

$$J(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} f_x(x_0,y_0) & f_y(x_0,y_0) \\ g_x(x_0,y_0) & g_y(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

es la matriz jacobiana del campo $(F(x,y), G(x,y))^T$ en el punto (x_0, y_0).
De esta manera, se puede pensar que el sistema lineal autónomo se encuentra próximo al sistema lineal

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x(x_0,y_0) & f_y(x_0,y_0) \\ g_x(x_0,y_0) & g_y(x_0,y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$$

cuando (x,y) está cerca de (x_0,y_0), y por consiguiente, se espera que el comportamiento de las trayectorias del sistema lineal autónomo cerca del punto crítico (x_0,y_0) sea similar al de las trayectorias del sistema linealizado.

Teorema 4.5.2 La solución $x(t) = x_0$, $y(t) = y_0$:

- es asintóticamente estable si la parte real de las soluciones de la ecuación característica de $J(x_0,y_0)$ son negativas.
- es inestable si al menos una solución de la ecuación característica de $J(x_0,y_0)$ tienen parte real positiva.

Si las soluciones de la ecuación característica de $J(x_0,y_0)$ tiene parte real cero no podemos asegurar la estabilidad. En el caso particular en que $J(x_0,y_0)$ sea una matriz de 2×2, si todos sus valores propios tienen parte real cero, entonces el punto de equilibrio es estable.

Ejemplo 4.5.3 Determinar la estabilidad del punto crítico $(0,0)$ en el sistema

$$\begin{cases} x' = -x - y - 3x^2y \\ y' = -2x - 4y + y\,\mathrm{sen}\,x \end{cases}$$

El sistema linealizado correspondiente es

$$\begin{cases} x' = -x - y \\ y' = -2x - 4y \end{cases}$$

Hallemos la traza y el determinante de la matriz de coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \Longrightarrow T = -5, \quad |A| = 2$$

con esto se tiene que el origen, para el sistema linealizado, es asintóticamente estable ($T < 0$, $|A| > 0$). Por tanto, el punto $(0,0)$ es, para el sistema no lineal, asintóticamente estable. Los diagramas de fase para ambos sistemas se muestran en las Figuras siguientes

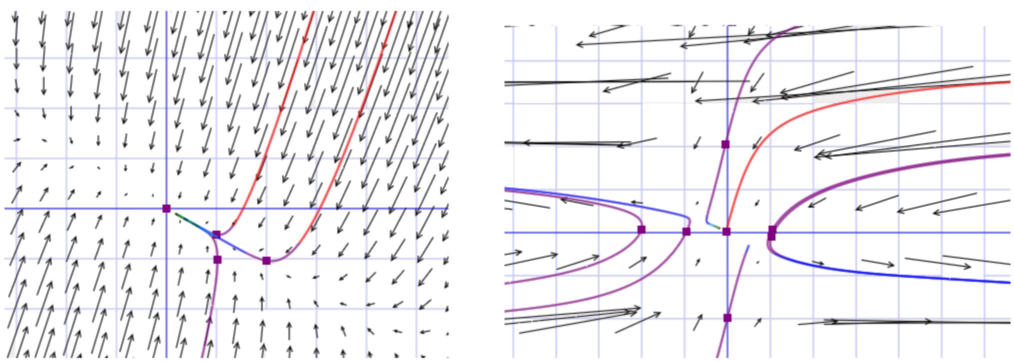


Figura 4.21: plano fase lineal y no lineal

Ejemplo 4.5.4 Determinar estabilidad de los puntos de equilibrio del sistema

$$\begin{cases} x' = f(x,y) = 1 - xy \\ y' = g(x,y) = x - y^3 \end{cases}$$

Primero los puntos de equilibrio

$$\begin{cases} 1 - xy = 0 \\ x - y^3 = 0 \end{cases}$$

se obtienen $P(1,1)$ y $Q(-1,-1)$. Vamos por la Jacobiana

$$J(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} f_x(x_0,y_0) & f_y(x_0,y_0) \\ g_x(x_0,y_0) & g_y(x_0,y_0) \end{pmatrix} \Longrightarrow J(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} -y & -x \\ 1 & -3y^2 \end{pmatrix}$$

- En el punto $P(1,1)$

La Jacobiana es

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left| \begin{pmatrix} -1-\lambda & -1 \\ 1 & -3-\lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

al resolver este determinante se encuentra que

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \Longrightarrow (\lambda+4)^2 = 0$$

de lo cual $\lambda = -2$ ¡doble! Por el teorema anterior, el punto P es asintóticamente estable.

- En el punto $Q(-1,-1)$

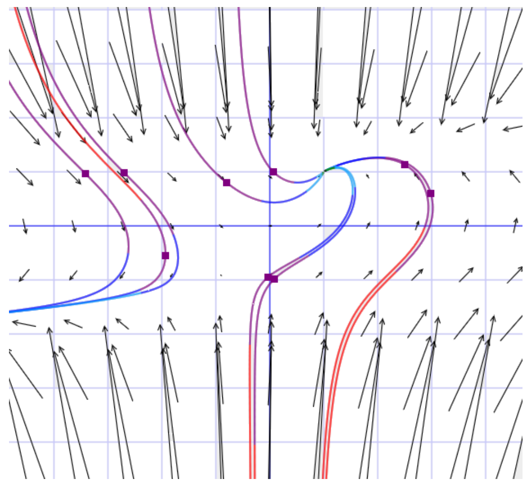
La Jacobiana es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left| \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -3-\lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

al resolver este determinante se encuentra que

$$\lambda^2 + 2\lambda - 4 = 0 \Longrightarrow \lambda = -1 \pm \sqrt{5}$$

Por el teorema anterior, el punto Q es asintóticamente inestable.



El plano de fase se obtuvo de la página `https://aeb019.hosted.uark.edu/pplane.html`

4.6 Problemas propuestos

EJERCICIO 2. Considerar la ecuación $x'(t) = \dfrac{2100-3x}{100}$

(a) Indicar los puntos de equilibrio
(b) Usa un software para graficar el campo de pendientes.
(c) Si $t \to \infty$ ¿hacia donde tienden las soluciones?
(d) Escribe la solución para que puedas comparar la situación gráfica y la analítica.

EJERCICIO 3. Se considera la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = \left(1 - \frac{P}{20}\right)^3 \left(\frac{P}{5} - 1\right) \cdot P, \quad P(0) = 8$$

(a) Indicar los puntos de equilibrio.
(b) Indica el tipo de monotonía a cada lado de los puntos críticos.
(c) Grafica una línea de fase para este problema.
(d) Con los datos anteriores haz una gráfica de la curva solución que satisface $P(0) = 8$.
(e) Si $t \to \infty$ ¿hacia donde tiende la solución?

EJERCICIO 4. Se considera la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = x - x^3$$

(a) Indicar los puntos de equilibrio.
(b) Indica si los puntos de equilibrio son es estables o inestables.
(c) Grafíca una línea de fase
(d) En geogebra haz el campo de direcciones

EJERCICIO 5. Se considera el sistema

$$\begin{cases} x'(t) = 60x - 3x^2 - 4xy \\ y'(t) = 42y - 3y^2 - 2xy \end{cases}$$

(a) Determinar los puntos críticos

EJERCICIO 6. Se considera la ecuación diferencial $y' = xy$
(a) Anota la ecuación de las isoclinas y grafícalas.
(b) Estudia la monotonía de las soluciones
(c) Estudia la concavidad de las soluciones.
(d) Verifica tus resultados con el campo de direcciones en Geogebra.

EJERCICIO 7. Se considera la ecuación diferencial $y' = x + y$
(a) Anota la ecuación de las isoclinas y grafícalas.
(b) Estudia la monotonía de las soluciones
(c) Estudia la concavidad de las soluciones.
(d) Verifica tus resultados con el campo de direcciones en Geogebra.

EJERCICIO 8. Se considera la ecuación diferencial $y' = x^2 - y$.
(a) Anota la ecuación de las isoclinas y grafícalas.
(b) Estudia la monotonía de las soluciones
(c) Estudia la concavidad de las soluciones.
(d) Verifica tus resultados con el campo de direcciones en Geogebra.

EJERCICIO 9. Dados los siguientes sistemas planos, calcular los puntos críticos de los mismos.

1. $\begin{cases} x' = 3x + 2y \\ y' = 5x - 7y \end{cases}$
2. $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = x^2 - y \end{cases}$

EJERCICIO 10. Usar integrales primeras para esbozar el diagrama de fase de los siguientes sistemas:

1. $\begin{cases} x' = xy \\ y' = x^2 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x' = y(2 - y) \\ y' = (x - 2)(y - 2) \end{cases}$

EJERCICIO 11. Esbozar los diagramas de fase de los siguientes sistemas lineales, e indicar el tipo de punto de equilibrio.

1. $\begin{cases} x' = 2x+3y \\ y' = -3x-2y \end{cases}$

2. $\begin{cases} x' = x+y \\ y' = -x+y \end{cases}$

EJERCICIO 12. Considerar el sistema

$$\begin{cases} x' &= 2x+4y \\ y' &= -x+6y \end{cases}, \quad x(0) = -1,\ y(0) = 6$$

1. Escribe la matriz asociada al sistema.
2. Determina los valores y vectores propios.
3. la solución del sistema es

$$\begin{cases} x(t) = 2C_1e^{4t} + 2C_2te^{4t} - C_2e^{4t} \\ y(t) = C_1e^{4t} + C_2te^{4t} \end{cases}$$

4. Verifica que de las condiciones iniciales es; $C_1 = 6$ y $C_2 = 13$.
5. Halla las isoclinas horizontales y verticales. Grafíca estas isoclinas.
6. En la isoclina $2x+4y = 0$ considera el punto $(2,-1)$. Indica la dirección del vector en ese punto.
7. En la isoclina $2x+4y = 0$ considera el punto $(-2,1)$. Indica la dirección del vector en ese punto.
8. En la isoclina $-x+6y = 0$ considera el punto $(6,1)$. Indica la dirección del vector en ese punto.
9. En la isoclina $-x+6y = 0$ considera el punto $(-12,-2)$. Indica la dirección del vector en ese punto.
10. Traza el retrato de fase. Identifica el tipo de punto de equilibrio.

EJERCICIO 13. En los sistemas siguientes hallar los puntos críticos, verificar los valores propios, determinar la solución general y determinar el tipo de punto de equilibrio. Dibujar el diagrama de fase:

1. $\begin{cases} x' &= -x+y \\ y' &= 3x+y \end{cases}$, valores propios $\lambda = \pm 2$, punto de silla, inestable.
2. $\begin{cases} x' &= -4x \\ y' &= -4y \end{cases}$, valor propio $\lambda = -4$ doble; nodo degenerado, punto estrella asintóticamente estable
3. $\begin{cases} x' &= 3x-4y \\ y' &= x-y \end{cases}$, valor propio $\lambda = 1$ doble, nodo degenerado iniestable.

EJERCICIO 14. Considerar el sistema

$$\begin{cases} x' &= y \\ y' &= 2y-x \end{cases}$$

1. Hallar los puntos de equilibrio del sistema
2. La solución del sistema es

$$\begin{cases} x(t) = C_1e^{-t} + C_2te^{-t} + C_2e^{-t} \\ y(t) = -C_1e^{-t} - C_2te^{-t} \end{cases}$$

3. Usa geogebra u otro software para graficar las soluciones

a) $C_1 = C_2 = 1$ *b*) $C_1 = C_2 = 2$ *c*) $C_1 = C_2 = -1$ *d*) $C_1 = C_2 = -2$

4. clasifica el punto crítico.
5. Utiliza un software para hacer el retrato de fase `https://aeb019.hosted.uark.edu/pplane.html`

EJERCICIO 15. Considerar el sistema

$$\begin{cases} x' &= 3x + y \\ y' &= 5x - y \end{cases}$$

1. Determina los valores propios y sus respectivos vectores propios.
2. Anota la solución del sistema
3. Indica el punto crítico del sistema.
4. Anota las isoclinas vertical y horizontal.
5. En la isoclina $3x + y = 0$ considera el punto $(-1,3)$. Indica la dirección del vector en ese punto.
6. En la isoclina $3x + y = 0$ considera el punto $(1,-3)$. Indica la dirección del vector en ese punto.
7. En la isoclina $5x - y = 0$ considera el punto $(-1,-5)$. Indica la dirección del vector en ese punto.
8. En la isoclina $5x - y = 0$ considera el punto $(1,5)$. Indica la dirección del vector en ese punto.
9. En el plano xy graficar las isoclinas y esbozar el retrato de fase
10. Bosquejar el retrato de fase con un software.

EJERCICIO 16. Considerar el sistema

$$\begin{cases} x' &= -3x \\ y' &= -3y \end{cases}$$

1. Escribe la matriz asociada al sistema.
2. Determina los valores y vectores propios.
3. Anota la solución del sistema.
4. Traza el retrato de fase. Identifica el tipo de punto de equilibrio.

EJERCICIO 17. Considerar el sistema

$$\begin{cases} x' &= 2x - 2y \\ y' &= 4x - 2y \end{cases}$$

1. Determina los valores propios y sus respectivos vectores propios.
2. La solución del sistema es el siguiente

$$\begin{cases} x(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \operatorname{sen} 2t \\ y(t) = (C_1 - C_2)\cos 2t + (C_1 + C_2)\operatorname{sen} 2t \end{cases}$$

3. Indica el punto crítico del sistema.
4. Anota las isoclinas vertical y horizontal.
5. En la isoclina $x - y = 0$ considera el punto $(-1,-1)$. Indica la dirección del vector en ese punto.
6. En la isoclina $x - y = 0$ considera el punto $(1,1)$. Indica la dirección del vector en ese punto.
7. En la isoclina $2x - y = 0$ considera el punto $(1,2)$. Indica la dirección del vector en ese punto.
8. En la isoclina $2x - y = 0$ considera el punto $(-1,-2)$. Indica la dirección del vector en ese punto.
9. En el plano xy graficar las isoclinas.

10. Bosquejar el retrato de fase con un software.

EJERCICIO 18. Considerar el sistema

$$\begin{cases} x' &= 10x + 14y - 100 \\ y' &= 2x - 2y + 4 \end{cases}, \quad x(0) = -1,\ y(0) = 6$$

1. Determina el punto de equilibrio.
2. Halla las isoclinas horizontales y verticales. Grafíca estas isoclinas.
3. Indica que puntos tomas en cada isoclina para tener la dirección de la trayectorias que señala el gráfico.

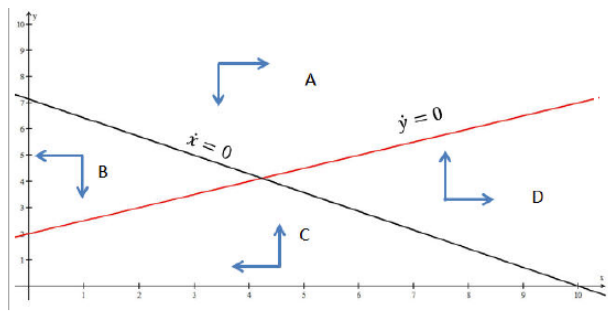


Figura 4.22: gráfica de isoclinas

4. Con un software traza el retrato de fase. Identifica el tipo de punto de equilibrio.

EJERCICIO 19. Considerar el sistema

$$\begin{cases} x' &= -x + y \\ y' &= -x - 3y \end{cases}$$

1. Determina los valores propios y sus respectivos vectores propios.
2. Anota la solución del sistema.
3. Anota y dibuja las isoclinas vertical y horizontal.
4. Bosquejar el retrato de fase con un software.

EJERCICIO 20. Determinar un valor de a para que tenga un centro el sistema

$$\begin{cases} x' &= ax + 2y \\ y' &= x + 3y \end{cases}$$

EJERCICIO 21. Considerar el sistema no lineal $\begin{cases} x' &= -2x + y + 2xy \\ y' &= x + y \end{cases}$

1. Anota la matriz del sistema lineal
2. Halla sus valores propios.
3. Verifica que el punto crítico es silla inestable.

EJERCICIO 22. En los sistemas lineales siguientes, comprobar si los valores y vectores propios son los indicados, dibujar las rectas que determinan dichos vectores. Determinar la solución general y dibujar el diagrama de fase.

1. $\begin{cases} x' &= 2x \\ y' &= x+y \end{cases}$, valores propios $\lambda = 1$, $\lambda = 2$, $\vec{v} = (0,1)^T$ y $\vec{w} = (1,1)^T$.

2. $\begin{cases} x' &= x-y \\ y' &= x+3y \end{cases}$, valor propio $\lambda = 2$ doble; $\vec{v} = (1,-1)^T$

5. Pruebas en formato

Estas son algunas pruebas y/o talleres que se han aplicado en cursos de ingeniería en las cuales he formado parte. Espero que sean un aporte a la hora de estudiar.

Universidad de la Frontera
Facultad de Ingeniería y Ciencias
Departamento de Matemática y Estadística

Taller Preparación Prueba # 1
segundo semestre 2015 *Ingenierías civiles*

Actividad 1 Resolver las siguientes dos ecuaciones diferenciales:

1. $(x^2 - y^2)\,dx + 3xy\,dy = 0$
2. $(3x^2 + 2xy^2)\,dx + (3y^2 + 2x^2y)\,dy = 0$

Actividad 2 Un tanque contiene 450 lt de líquido en el que se disuelven 30 gr de sal: Una salmuera que contiene 3 gr/lt se bombea al tanque con una intensidad de 6 lt/min, la solución adecuadamente mezclada se bombea hacia fuera con una intensidad de 8 lt/min. Encuentre el número de gramos de sal y la concentración de sal, que hay en el tanque en un instante cualquiera. Resp.

$$x(t) = 6(225 - t) - 1320\left(\frac{225 - t}{225}\right)^4, \quad C(t) = 3 - 690 \cdot \frac{(225 - t)^3}{(225)^4}$$

Actividad 3 Se sabe que un material radioactivo se desintegra con una rapidez proporcional a la cantidad presente en cualquier instante. Si inicialmente hay 100 mg de material y, después de dos años, se observa que el 5 % de la masa original se desintegró, determinar:

1. Una expresión para la masa al momento t. Resp. $M(t) = 100e^{-0{,}002564t}$
2. El tiempo necesario para que se desintegre el 10 % de la masa original. Resp. $t = 4,1076$ años

Actividad 4 Una taza de café se calienta a 200°F y luego se coloca en una habitación donde la temperatura es de 70°F. Si transcurrido un minuto, el café llega a una temperatura de 190°F, hallar el tiempo que hay que esperar para que su temperatura sea de 150°F.

Universidad de la Frontera
Facultad de Ingeniería y Ciencias
Departamento de Matemática y Estadística

Preparación Prueba # 1 : Ecuaciones Diferenciales
primer semestre 2016

Este trabajo es grupal y aporta 10 puntos al actitudinal.

Actividad 1 Un tanque de 400 galones de capacidad, contiene inicialmente 100 galones de solución salina en la que se han disuelto 8 libras de sal. Se agrega solución salina que contiene 2 libras por galón a razón de 5 galones por minuto, y la mezcla sale del tanque a razón de 3 galones por minuto. Determine cuanta sal hay en el tanque al momento que éste se empieza a desbordar. Resp $t = 150$, $x(t) = 776$

Actividad 2 El isótopo radiactivo Torio 234 se desintegra a una rapidez proporcional a la cantidad presente. Si 100 miligramos de este material se reducen a 82.04 mg. en una semana, encontrar una expresión para la cantidad presente en cualquier instante. Encuentre también el intervalo de debe transcurrir para que la masa caiga a la mitad de su valor original. Resp. $Q(t) = 100e^{-0,02828t}$mg. La mitad en 24,5 días.

Actividad 3 En un gran tanque con 1000 litros de agua pura se comienza a vaciar un solución salina con una velocidad constante de 6 litros por minuto. La solución dentro del tanque se mantiene revuelta y sale del tanque a la misma razón. Si la concentración de sal en la solución que entra en el tanque es de $0,1$ kg/l, determinar el momento en que la concentración de sal en el tanque llegue a $0,05$ Kg/L. Resp $115,52$ min.

Actividad 4 Resolver las siguientes ecuaciones:

1. $y' = \dfrac{x-y}{x-y-1}$
2. $y' - y\cos x = \frac{1}{2}y^2 \operatorname{sen} 2x$
3. $y' = \dfrac{xy^2-1}{1-x^2y}$

Actividad 5

1. Hallar un factor integrante de la forma $\mu = x^m y^n$ de la ecuación $(xy+y^2)dx - x^2dy = 0$ y resolver.
2. Considere la ecuación diferencial $(3y^k + 10xy^2)dx + (6x^{k-1}y - 2 + 10x^2y)dy = 0.$
   a) ¿Para cuáles valores de k esta ecuación es exacta?
   b) Para tales valores resuelva la ecuación diferencial

■ nothing is impossible … ■

Universidad de la Frontera
Facultad de Ingeniería y Ciencias
Departamento de Matemática y Estadística

Taller # 1 - Ecuaciones Diferenciales
primer semestre 2016
Ingenierías civiles

NO se aceptan consultas, la redacción del taller es clara y precisa. Sus respuestas deben ser bien redactadas y sin borrones. Por favor apague su **CELULAR** y déjelo fuera de su alcance, si es sorprendido con su celular conectado tiene nota 1,0.

Actividad	1	2	3	4			**Total**
Puntaje	5 + 5	5+1	3+3	5			27 puntos
Logro							

- **Resultado de Aprendizaje**: Resolver ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias
- **Competencia genérica**: Pensamiento critico

Actividad 1 Considere la ecuación diferencial

$$(x^4+y^4)dx - xy^3dy = 0$$

1. Resolver la ecuación como homogénea
2. Resolver la ecuación mediante un factor integrante

Actividad 2 Dada la ecuación diferencial

$$(x+y)dx + (3x+3y-4)dy = 0$$

1. Resolver la ecuación diferencial
2. Hallar la solución que satisface $y(0) = 1$.

Actividad 3 Considere la ecuación diferencial

$$(2x^2+3y^2-7)xdx - (3x^2+2y^2-8)ydy = 0$$

1. Use $u = x^2$ y $v = y^2$ para transformar la ecuación.
2. Transforme esta nueva ecuación a homogénea **NO RESOLVER**

Actividad 4 Resolver la ecuación diferencial

$$y' = \frac{y}{x} + x^3y^2 - x^5$$

sabiendo que $y = x$ es una solución particular.

■ nothing is impossible ... ■

Universidad de la Frontera
Facultad de Ingeniería y Ciencias
Departamento de Matemática y Estadística

Prueba # 1 - Ecuaciones Diferenciales
primer semestre 2016
Ingenierías civiles

NO se aceptan consultas, la redacción del taller es clara y precisa. Sus respuestas deben ser bien redactadas y sin borrones. Por favor apague su **CELULAR** y déjelo fuera de su alcance, si es sorprendido con su celular conectado tiene nota 1,0.

Actividad	1	2	3	4			**Total**
Puntaje	10	10	10	10	10	10	60 puntos
Logro							

- **Resultado de Aprendizaje**: Resolver ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias
- **Competencia genérica**: Pensamiento critico

Actividad 1 Indicar dos formas de resolver la ecuación $(3y^2+4x)dx+2xy\,dy=0$. Usar una de ellas para hallar la solución.

Actividad 2 Hallar la solución general de la ecuación $y' = xy^3+3y^2-\frac{1}{x^2}$ usando el cambio de variable $u = y+\frac{1}{x}$

Actividad 3 Resolver la ecuación $y\ln y\,dx + x\,dy = 0$ usando un factor integrante adecuado.

Actividad 4 Considerar la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2y-\frac{y^2}{x}}{x+2y}$$

1. Verificar que la ecuación no es exacta
2. Determinar el valor de k para que x^k sea un factor integrante de la ecuación.
3. resolver la ecuación diferencial con ese factor integrante encontrado.

Actividad 5 A un tanque que contiene inicialmente 400 litros de agua pura se le incorpora salmuera, la cual contiene 1/8 kg de sal por litro, a razón de 8 lt/min. Simultáneamente, la mezcla (que es mantenida uniforme por agitación) abandona el tanque a razón de 4 lt/min. Determine la cantidad de sal presente en el tanque cuando este contiene 500 litros de salmuera. Resp. $X(25) = 22,5$ grs

■ nothing is impossible ... ■

Universidad de la Frontera
Facultad de Ingeniería y Ciencias
Departamento de Matemática y Estadística

Preparación Prueba # 1 - Ecuaciones Diferenciales
segundo semestre 2016
Ingenierías civiles

Actividad 1

1. la ecuación $(3x^5 \operatorname{tg} y - 2y^3)dx + (x^6 \sec^2 y + 4x^3y^3 + 3xy^2)dy = 0$ no es exacta, pero tiene un factor integrante que depende solo de x. Hallar ese factor y resolver la ecuación. Resp. $\mu(x,y) = x^{-3}$
2. Reducir a homogénea la ecuación $y' = \dfrac{4x+3y+15}{2x+y+7}$. Resp. $(h,k) = (-3,-1)$
3. Identificar y resolver la ecuación $3xy' - 2y = \dfrac{x^3}{y^2}$. Resp. $y^3 = Cx^2 + x^3$
4. Identificar y resolver la ecuación $y' - 2x^2 - \dfrac{y}{x} + 2y^2 = 0$ sabiendo que $y = x$ es una solución particular. Resp. $\dfrac{x}{y-x} = \left(Ce^{2x^2} - \dfrac{1}{2}\right)$

Actividad 2 Un tanque contiene originalmente 100 galones de agua fresca. Se vierte dentro del tanque, agua que contiene $\frac{1}{2}$ libra de sal por galón a una velocidad de 2 gal/min y se permite que salga la mezcla con la misma rapidez. Después de 10 min se para el proceso y se vierte agua fresca dentro del tanque a la velocidad de 2 gal/min, dejando salir la mezcla a la misma velocidad. Encontrar la cantidad de sal en el tanque al final de los 20 min. Res. 7,37 libras

Actividad 3 Un tanque con capacidad de 500 galones contiene inicialmente 200 galones de agua con 100 lb de sal en solución. Se inyecta al tanque agua que cuya concentración de sal es de 1 lb/gal, a razón de 3 gal/min. La mezcla debidamente agitada y homogeneizada sale del tanque a razón de 2 gal/min.

1. Encuentre la cantidad de sal y la concentración de sal en el tanque para cualquier tiempo. Resp. $C = 1 - \dfrac{4\cdot(10)^6}{(200+t)^3}$
2. Determine la concentración de sal en el instante justo en que la solución alcanza el volumen total del tanque. Resp. cantidad de sal = 484 lb y concentración = 0,98 lb/gal

Universidad de la Frontera
Facultad de Ingeniería y Ciencias
Departamento de Matemática y Estadística

Taller # 1 - Ecuaciones Diferenciales
segundo semestre 2016
Ingenierías civiles

NO se aceptan consultas, la redacción del taller es clara y precisa. Sus respuestas deben ser bien redactadas y sin borrones. Por favor apague su **CELULAR** y déjelo fuera de su alcance, si es sorprendido con su celular conectado tiene nota 1,0.

Actividad	1	2	3	4			**Total**
Puntaje	10	10	10	10	10	10	60 puntos
Logro							

- **Resultado de Aprendizaje**: Resolver ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias
- **Competencia genérica**: Pensamiento critico

Actividad 1 Usando factor integrante encuentre la solución general de la ecuación

$$2[3y+2y^3+3x^4\operatorname{sen}(x)]\,dx-3x[x^2+1+2y^2]\,dy=0$$

Actividad 2 Para $x\neq 0$ considere la ecuación diferencial $x\dfrac{dy}{dx}=2-x^2+(2x+1)y-y^2$ Usar el cambio de variables $z=x-y+1$ para calcular la solución general de la ecuación.

Actividad 3 Para $y\neq 0$ considere la ecuación diferencial $2y\dfrac{dy}{dx}=5+2x-2y^2$

1. Encontrar la solución general usando factores integrantes.
2. Hallar la solución particular que pasa por el punto $(0,\sqrt{5})$.

Actividad 4 Para $x>-1$, encuentre la solución general de la ecuación

$$(x^2+y^2+1)dx-(xy+y)dy=0$$

sabiendo que tiene factor integrante de la forma $\mu(x,y)=(x+1)^{-n}$.

Actividad 5 Usando la ley de enfriamiento de Newton, determinar la temperatura exterior si un termómetro se saca de un recinto donde había 68º y marca 53º y 42º, medio minuto y un minuto después, respectivamente.

Actividad 6 Un tanque de 100 litros contiene agua pura hasta la mitad de su capacidad. Se agrega salmuera que contiene 0,1 kilogramos por litro de sal a una tasa de 4 litros por minuto. Luego la solución adecuadamente mezclada se bombea hacia afuera a una tasa de 2 litros por minuto. Hallar la cantidad y la concentración de sal en el tanque en un instante t cualquiera. ¿Cuál es el valor límite de cantidad de sal en el tanque?

Universidad de la Frontera
Facultad de Ingeniería y Ciencias
Departamento de Matemática y Estadística

Prueba # 1 - Ecuaciones Diferenciales
segundo semestre 2016
Ingenierías civiles

NO se aceptan consultas, la redacción del taller es clara y precisa. Sus respuestas deben ser bien redactadas y sin borrones. Por favor apague su **CELULAR** y déjelo fuera de su alcance, si es sorprendido con su celular conectado tiene nota 1.0.

Actividad	1	2	3	4			**Total**
Puntaje	10	10	10	10	10	10	60 puntos
Logro							

Actividad 1 Determinar k para que la siguiente EDO sea exacta y luego resolver

$$(y^3 + kxy^4 - 2x)dx + (3xy^2 + 20x^2y^3)dy = 0$$

Actividad 2 Considerar la ecuación diferencial

$$(-xy \operatorname{sen} x + 2y \cos x)\, dx + 2x \cos x\, dy = 0$$

Hallar un factor integrante del tipo $\mu(x,y) = x^n y^m$ para resolverla
Actividad 3 La difusión de una epidemia es modelada por la ecuación logística:

$$\frac{dx}{dt} = kx(m-x)$$

donde $k > 0$, la población total del pueblo es m y $x(t)$ representa la cantidad de infectados pasados t días. Para $t = 0$ un décimo de la población está infectada. Después de 5 días, un quinto de la población está infectada.

1. Hallar cantidad de la población está infectada al cabo de 10 día.
2. Hallar Para que valor de t la mitad de la población esta infectada.
3. Encontrar e interpretar lo que ocurre para tiempo infinito con la población $(\lim_{t\to\infty} x(t))$

Actividad 4 Un termómetro se saca de un recinto donde la temperatura del aire es de $70°$ y se lleva al exterior, donde la temperatura es de $10°$. Después de medio minuto, el termómetro indica $50°$.

1. Hallar la lectura del termómetro al cabo de 1 minuto.
2. Determinar cuánto tiempo se necesita para que el termómetro llegue a $15°$.

Actividad 5 Un tanque tiene 500 galones de agua pura y le entra salmuera con 2 libras de sal por galón a razón de 5 gal/min. El tanque se mezcla bien por agitación y de él sale la mezcla con la misma rapidez.

1. Determinar la cantidad $x(t)$ de libras de sal que hay en el tanque en cualquier instante t.
2. Hallar la concentración de la solución del tanque cuando $t = 5$ min.

Universidad de la Frontera
Facultad de Ingeniería y Ciencias
Departamento de Matemática y Estadística

Prueba Global: Ecuaciones Diferenciales
segundo semestre 2016
Ingenierías civiles

NO se aceptan consultas, la redacción de la prueba es clara y precisa. Sus respuestas deben ser bien redactadas y sin borrones. Por favor apague su **CELULAR** y déjelo fuera de su alcance, si es sorprendido con su celular conectado tiene nota 1,0

Actividad	1	2	3	4	5	**Total**
Puntaje	20	15	25			60 puntos
Logro						

Actividad 1 Estudios han demostrado que la rapidez de propagación del virus de la gripe es directamente proporcional no solo a la cantidad de infectados, sino también a la cantidad de no infectados. Suponga que un estudinate es portador de esa cepa de virus y regresa a su colegio de 1000 alumnos. Determinarla cantidad de estudinates infectados a los 30 días si se sabe que al cuarto día hay 50 portadores del virus. Resp. 1000

Actividad 2 Usar Transformada de Laplace para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x' &= 3x - y \\ y' &= x + y \end{cases}, \quad x(0) = 1,\ y(0) = 2$$

Resp. $x(t) = (1-t)e^{2t}, \quad y(t) = (2-t)e^{2t}$

Actividad 3 En un estanque de 144 litros ingresan 6 litros/seg de salmuera con una concentración de sal de 3 grs/litro. Desde el estanque salen 2 litros/seg de solución homogénea.

1. Si inicialmente en el estanque hay 100 litros de agua pura, determine la cantidad de sal en el estanque en el instante en que éste se llena.
2. Suponiendo que a partir del momento en que el estanque se llena, el exceso de solución (homogénea) se rebalsa, determine el valor límite de la concentración de sal en el estanque cuando t tiende a infinito.

Actividad 4 Resolver el sistema

$$\begin{cases} x' &= 3x - y - z \\ y' &= x + y - z + t \\ z' &= x - y + z + 2e^t \end{cases}$$

Los valores propios son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ doble

Universidad de la Frontera
Facultad de Ingeniería y Ciencias
Departamento de Matemática y Estadística

Prueba # 1 - Ecuaciones Diferenciales
primer semestre 2017
Ingenierías civiles

NO se aceptan consultas, la redacción de la prueba es clara y precisa. Sus respuestas deben ser bien redactadas y sin borrones. Por favor apague su **CELULAR** y déjelo fuera de su alcance, si es sorprendido con su celular conectado tiene nota 1.0.

Actividad	1	2	3	4	5		**Total**
Puntaje	12	12	12	12	12		60 puntos
Logro							

- **Resultado de Aprendizaje**:
  1. Resolver ecuaciones diferenciales ordinarias.
  2. Modelar procesos de cambio mediante ecuaciones diferenciales.
- **Competencia genérica**: Pensamiento critico

Actividad 1 Resolver la ecuación diferencial $x^2y' = 1 - x^2 + y^2 - x^2y^2$

Actividad 2 Considere la ecuación diferencial $6xy\,dx + \left(4x^2 + \dfrac{10}{x}\right) dy = 0$. Hallar:

1. la solución general, si admite un factor integrante de la forma $\mu(x,y) = y\,f(x)$
2. la solución particular $y(0) = 1$.

Actividad 3 Para $x > 0$ considere la ecuación de Ricatti

$$y' + e^{-2x}y^2 - \frac{1}{x}\left(1 + 4x + 2x^2\right) y = -\frac{e^{2x}}{x}\left(1 + x + 2x^2 + x^3\right)$$

1. Hallar una solución particular de la forma $y_1(x) = e^{2x}(Ax + B)$
2. Hallar la solución general de la ecuación de Ricatti usando la particular $y_1(x)$.

Actividad 4 Una pequeña barra de metal, cuya temperatura inicial es de 20° C, se deja caer en un recipiente de agua hirviendo (100°C)

1. Calcule el tiempo que dicha barra demorará en alcanzar los 90° C si se sabe que su temperatura aumenta 2° en 1 seg.
2. ¿Cuál será la temperatura de la barra al cabo de 45 seg?
3. ¿Cuánto demorará la barra en alcanzar los 98°C?

Actividad 5 Un tanque contiene 100 galones de salmuera. Por una llave entran al tanque 3 galones de salmuera por minuto, que contienen 2 libras de sal por galón. La mezcla que se mantiene uniforme sale a una velocidad de 2 gal/min. Si al cabo de una hora la concentración es de 1,8 lb/gal, calcular las libras de sal que había inicialmente en el tanque.

Universidad de la Frontera
Facultad de Ingeniería y Ciencias
Departamento de Matemática y Estadística

Prueba # 1 - Ecuaciones Diferenciales
segundo semestre 2017
Ingenierías civiles

NO se aceptan consultas, la redacción del taller es clara y precisa. Sus respuestas deben ser bien redactadas y sin borrones. Por favor apague su **CELULAR** y déjelo fuera de su alcance, si es sorprendido con su celular conectado tiene nota 1,0.

Actividad	1	2	3	4			**Total**
Puntaje	10	10	10	10	10	10	60 puntos
Logro							

- **Resultado de Aprendizaje**: Resolver ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias
- **Competencia genérica**: Pensamiento critico

Actividad 1 Considerar la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2y - \frac{y^2}{x}}{x+2y}$$

1. Verificar que la ecuación no es exacta
2. Determinar el valor de k para que x^k sea un factor integrante de la ecuación.
3. resolver la ecuación diferencial con ese factor integrante encontrado.

Actividad 2 Usando factor integrante encuentre la solución general de la ecuación

$$2[3y + 2y^3 + 3x^4 \operatorname{sen}(x)]\,dx - 3x[x^2 + 1 + 2y^2]\,dy = 0$$

Actividad 3 Una pileta contiene 50 litros de agua bien mezclados con 40 gramos de un contaminante. Entra a la pileta contaminante a una velocidad de 8lt/min con una concentración de 0,5 grs/lt. Si por otra llave se permite la salida de la mezcla a una velocidad de 5lt/min

1. Determinar el volumen de la pileta si esta se empieza a derramar a los 12 minutos.
2. Determinar la cantidad de contaminante y la concentración antes que se derrame la mezcla ($t \leq 12$).
3. Hallar la cantidad de contaminante en el instante $t = 20$ ($t > 12$ min)

Actividad 4 Para $x \neq 0$ considere la ecuación diferencial

$$x\frac{dy}{dx} = 2 - x^2 + (2x+1)y - y^2$$

Usar el cambio de variables $z = x - y + 1$ para calcular la solución general de la ecuación.

■ nothing is impossible … ■

Universidad de la Frontera
Facultad de Ingeniería y Ciencias
Departamento de Matemática y Estadística

Prueba Global: Ecuaciones Diferenciales
primer semestre 2017
Ingenierías civiles

NO se aceptan consultas, la redacción de la prueba es clara y precisa. Sus respuestas deben ser bien redactadas y sin borrones. Por favor apague su **CELULAR** y déjelo fuera de su alcance, si es sorprendido con su celular conectado, durante el examen, tiene nota 1,0

Actividad	1	2	3	4	5	**Total**
Puntaje	15	15	15	15		60 puntos
Logro						

- **Resultado de Aprendizaje**:
  1. Resolver ecuaciones diferenciales y sistemas.
  2. Modelar procesos de cambio mediante ecuaciones diferenciales.
- **Competencia genérica**: Pensamiento critico

Actividad 1 Considere la ecuación diferencial $x^2ydx + (y^2 + x^2p(x))dy = 0$. Hallar la función $p(x)$ para que la ecuación sea exacta y resolver luego la ecuación.

Actividad 2 Usar Transformada de Laplace para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} x' &= x - y + e^t \cos t \\ y' &= x + y + e^t \operatorname{sen} t \end{aligned} \quad , \quad x(0) = y(0) = 0$$

Actividad 3 En un estanque de 144 litros ingresan 6 litros/seg de salmuera con una concentración de sal de 3 grs/litro. Desde el estanque salen 2 litros/seg de solución homogénea.

1. Si inicialmente en el estanque hay 100 litros de agua pura, determine la cantidad de sal en el estanque en el instante en que éste se llena.
2. Suponiendo que a partir del momento en que el estanque se llena, el exceso de solución (homogénea) se rebalsa, determine el valor límite de la concentración de sal en el estanque cuando t tiende a infinito.

Actividad 4 Resolver la ecuación $y''' - y' = e^{2t} \operatorname{sen}^2 t$

■ nothing is impossible ... ■

Universidad de la Frontera
Facultad de Ingeniería y Ciencias
Departamento de Matemática y Estadística

Examen: Ecuaciones Diferenciales
primer semestre 2017
Ingenierías civiles

NO se aceptan consultas, la redacción de la prueba es clara y precisa. Sus respuestas deben ser bien redactadas y sin borrones. Por favor apague su **CELULAR** y déjelo fuera de su alcance, si es sorprendido con su celular conectado, durante el examen, tiene nota 1,0

Actividad	1	2	3	4	5	**Total**
Puntaje	12	12	12	12	12	60 puntos
Logro						

- **Resultado de Aprendizaje**:
  1. Resolver ecuaciones diferenciales y sistemas.
  2. Modelar procesos de cambio mediante ecuaciones diferenciales.
- **Competencia genérica**: Pensamiento critico

Actividad 1 Considere la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2y - \frac{y^2}{x}}{x+2y}$$

1. Determinar un valor de r de modo que $g(x) = x^r$ sea un factor integrante.
2. Resolver la ecuación exacta.

Actividad 2 Resolver la ecuación diferencial $x^2(xy'' - 3y') = x(x+5y) + 2\ln x, \quad x > 0$

Actividad 3 Resolver la ecuación $y'' + 2y' + y = e^{-x}\ln x, \quad x > 0$

Actividad 4 En un tanque hay 50 litros de agua bien mezclados con 40 grs de un contaminante. A una velocidad de 8 lt/min entra agua al tanque con una concentración de 0,5 grs/lt del contaminante. Si por una llave sale mezcla a una tasa de 5 lt/min:
1. Determinar el volumen del tanque si éste se empieza a derramar a los 12 minutos.
2. Determinar la cantidad de contaminante y la concentración antes que se derrame la mezcla.
3. Determinar la cantidad de contaminante para $t = 20$ minutos.

Actividad 5 Resolver usando valores y vectores propios el sistema

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{X}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

■ nothing is impossible ... ■

Universidad de la Frontera
Facultad de Ingeniería y Ciencias
Departamento de Matemática y Estadística

Prueba # 1: Ecuaciones Diferenciales
segundo semestre 2018
Ingenierías civiles

Actividad 1 Resolver las siguientes ecuaciones:

1. $(x + y e^{y/x})\,dx - x e^{y/x} dy = 0$, $y(1) = 0$
2. $2y' + y - xy^3 + y^3 = 0$

Actividad 2 Determinar la solución general de la ecuación diferencial

$$(2xy^2 - 2y)\,dx + (3x^2 y - 4x)\,dy = 0$$

Actividad 3 Hallar el factor integrante, que convierte en exacta la ecuación

$$(y + x^3 y + 2x^2)\,dx + (x + 4xy^4 + 8y^3)\,dy = 0$$

Actividad 4 Se tiene un estanque con capacidad de 1600 litros, en el que inicialmente se tienen 200 litros de solución salina. A dicho estanque ingresa una nueva solución salina a través de dos llaves A y B. La llave A tiene un flujo de entrada de 16 litros por minuto con una concentración de 0,5 kg/litro. Por otra parte, por la llave B ingresan 12 litros por minuto con una concentración de 0,25 kg/litros.

1. Si la concentración de mezcla al completar la capacidad del estanque es de 0,35 kg/litros, hallar la cantidad inicial de sal en el estanque.
2. En el momento de llenarse el tanque un sistema automático cierra la llave A y abre una llave C de salida por la cual se expele flujo a razón de 20 litros por minuto. Determinar la cantidad de sal en el estanque cuando el nivel de solución salina desciende a la mitad de su capacidad.

■ nothing is impossible ... ■

Universidad de la Frontera
Facultad de Ingeniería y Ciencias
Departamento de Matemática y Estadística

Prueba # 1 - Ecuaciones Diferenciales
primer semestre 2019
Ingenierías civiles

Actividad 1 Resolver los siguientes problemas:

1. $\dfrac{dy}{dx} = (-5x+y)^2 - 4.$
2. $y' + \operatorname{cotg}(t)\,y + \dfrac{1}{\operatorname{sen}(t)}y^2 = 0$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Con solución particular $y_1(t) = 0$.
3. $(2x - 2y - x^2 + 2xy)\,dx + (2x^2 - 4xy - 2x)\,dy = 0$, sabiendo que tiene un factor integrante de la forma $\mu = e^{ax+by}$

Actividad 2 Una sustancia es retirada de un horno y llevada a un área de enfriamiento que mantiene una temperatura estable de 43°, a los 15 y 30 minutos después de haberse iniciado el enfriamiento se realizaron dos registros de temperatura, que arrojaron como resultado 285° y 252°, respectivamente. Determinar:

1. La temperatura inicial de la sustancia.
2. En que instante la temperatura del cuerpo es de 80°.

Actividad 3 Un tanque de 100 galones (gal) de capacidad, se encuentra inicialmente lleno con una solución colorante al 40%. Una solución colorante al 20% fluye hacia el tanque a una tasa de 5 gal/min. La mezcla sale del tanque a la misma tasa y pasa a otro tanque de 100 gal de capacidad que se había llenado inicialmente con agua pura. La mezcla resultante sale del segundo tanque a una tasa de 5 gal/min. Obtener una expresión para la cantidad de colorante en el segundo tanque. ¿Cuál es la concentración de colorante en el segundo tanque después de 30 min?

■ nothing is impossible … ■

Universidad de la Frontera
Facultad de Ingeniería y Ciencias
Departamento de Matemática y Est.

Prueba # 1 - Ecuaciones Diferenciales
Primer semestre 2019- ICons

Escriba lo más claro posible sus respuestas y sin borrones. Puede usar calculadora que no grafique. Debe apagar celular y dejarlo lejos de su alcance. ¡Por favor, no insista!
NO HAY CONSULTAS

Pregunta	1	2	3				**Total**
Puntaje	15	15	10+10+10				60
Logro							

Actividad 1 Considerar que inicialmente hay 100 miligramos de una sustancia radiactiva. Después de 6 horas su masa disminuyó en un 3 %. Si en un instante cualquiera la rapidez de desintegración es proporcional a la cantidad de sustancia presente, determinar la cantidad que queda después de 24 horas. Resp. 88,5mg

Actividad 2 Un tanque está lleno de 100 litros de agua en los que se ha disuelto 20 kilogramos de sal. Otra mezcla que contiene 1 kilogramo de sal por litro es bombeada al tanque a razón de 7 litros por minuto. La solución mezclada es bombeada hacia el exterior a razón de 8 litros por minuto.

1. Determinar la función que da la cantidad de sal en cada instante.

   Resp. $x(t) = (100 - t) - 80\left(1 - \frac{t}{100}\right)^8$
2. El tiempo en el cual se vacía totalmente el tanque. Resp. 100 min

Actividad 3 Resolver las siguientes ecuaciones, sabiendo que una de ellas necesita un factor integrante que depende de una sola variable:

1. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy + 3x - y - 3}{xy - 2x + 4y - 8}$
2. $(x^2 + xy)dy = 2y^2dx$
3. $\left(2 + \dfrac{y}{x^2}\right)dx + \dfrac{1}{x}(1 + \ln xy)\,dy = 0$

■ nothing is impossible ... ■

Universidad de la Frontera
Facultad de Ingeniería y Ciencias
Departamento de Matemática y Estadística

Preparación Prueba # 2 : Ecuaciones Diferenciales

Actividad 1 Resolver las siguientes ecuaciones homogéneas:

1. $y''' - 4y'' + 5y' = 0$. Resp. $y = C_1 + C_2e^{2x}\operatorname{sen}x + C_3e^{2x}\cos x$
2. $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$. Resp $y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + C_3x^2e^{-x}$

Actividad 2 Resolver el problema de valor inicial

$$y''' + 12y'' + 36y' = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = -7$$

Resp. $y = c_1 + c_2e^{-6x} + c_3xe^{-6x}$ $c_1 = c_2 = \frac{5}{36},\ c_3 = \frac{1}{6}$

Actividad 3 Resolver las siguientes ecuaciones no homogéneas:

1. $y'' + y = \cos^2 x$ Resp. $y = y_h + y_p = c_1\cos x + c_2\operatorname{sen}x + 13\cos 4x + \operatorname{sen}2x - 13\operatorname{sen}4x$
2. $y'' + y' + y = x\operatorname{sen}x$ Resp. $y_p = \operatorname{sen}x + 2\cos x - x\cos x$
3. $y'' + 2y' - 8y = 2e^{-2x} - e^{-x}$ Resp. $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-4x} - 14e^{-2x} + 19e^{-x}$

Actividad 4 Resolver $x^2y'' - xy' - 3y = -\frac{\ln x}{x}$, $x > 0$ como sigue:

1. Hallar la solución de la homogénea (Euler) Resp. $y_h = C_1x^3 + C_2\frac{1}{x}$
2. Normalizar la ecuación dividiendo por x^2
3. Usar variación de parámetros con $g(x) = -\dfrac{\ln x}{x^3}$

Preparación Taller # 2 : Ecuaciones Lineales

Este trabajo es grupal y aporta 12 puntos al actitudinal.

Actividad 1 Resolver las ecuaciones:

1. $x''(t) - 6x'(t) + 9x(t) = t^2$
2. $y'' + 3y' + 2y = e^{-2x} + x^2$
3. $3y'' - 6y' + 6y = e^x\sec x$
4. $x^2y'' + xy' - 4y = 1$

Sabiendo que; $y_1(x) = x^2$ es una solución de la ecuación (4) homogénea asociada. Se sabe además que las soluciones se encuentran entre las siguientes:

- $y_p = -xe^{-2x} + \dfrac{7}{4} - \dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{2}x^2$
- $y(x) = C_1e^x\cos x + C_2e^x\operatorname{sen}x + \dfrac{1}{3}e^x\cos x\ln|\cos x| + \dfrac{1}{3}xe^x\operatorname{sen}x$
- $y(x) = C_1x^2 + C_2x^{-2} - \dfrac{1}{4}$
- $y(t) = C_1e^{3t} + C_2te^{3t} + \dfrac{4}{3}t + \dfrac{1}{9}t^2 + \dfrac{70}{81}$

■ nothing is impossible ... ■

Universidad de la Frontera
Facultad de Ingeniería y Ciencias
Departamento de Matemática y Estadística

Prueba # 2 - Ecuaciones Diferenciales
segundo semestre 2016   Ingenierías civiles

NO se aceptan consultas, la redacción del taller es clara y precisa. Sus respuestas deben ser bien redactadas y sin borrones. Por favor apague su **CELULAR** y déjelo fuera de su alcance, si es sorprendido con su celular conectado tiene nota 1,0.

Actividad	1	2	3	4			**Total**
Puntaje	15	15	15	15			60 puntos
Logro							

Actividad 1 Resolver, sabiendo que $\lambda = 1-2i$ es una solución del polinomio característico, la ecuación diferencial

$$y^{(4)} - 4y''' + 10y'' - 12y' + 5y = x^3 + x + 1$$

Actividad 2 Dada la ecuación diferencial $x^2y'' - x(x+4)y' + 2(x+3)y = x^5$:

1. Hallar $n \in \mathbb{R}$ de tal forma que $y = x^n$ sea solución de la ecuación diferencial homogénea. Resp. $n = 2$
2. Hallar la solución general de la ecuación homogénea utilizando la solución encontrada en el item anterior.
   Resp. $y_2 = x^2e^x$. $y_h = C_1x^2 + C_2x^2e^x$.
3. Hallar la solución general de la ecuación diferencial no homogénea.
   Resp. $\left(C_1 - \dfrac{x^2}{2}\right)x^2 + \left(c_2 - xe^{-x} - e^{-x}\right)x^2e^x$

Actividad 3 Resolver el problema de valor inicial

$$y'' + 2y' + 2y = \begin{cases} t+1, & 0 \le t < 1 \\ 3-t, & 1 < t < 2\,, \\ 1, & t > 2 \end{cases} \quad y(0) = y'(0) = 0$$

Actividad 4 Resolver la ecuación diferencial

$$2(t+1)^4y'' + 3(t+1)^3y' - (t+1)^2y = t, \quad t > -1$$

■ nothing is impossible ... ■

Universidad de la Frontera
Facultad de Ingeniería y Ciencias
Departamento de Matemática y Estadística

Prueba # 2 - Ecuaciones Diferenciales
primer semestre 2017 Ingenierías civiles

NO se aceptan consultas, la redacción del taller es clara y precisa. Sus respuestas deben ser bien redactadas y sin borrones. Por favor apague su **CELULAR** y déjelo fuera de su alcance, si es sorprendido con su celular conectado tiene nota 1,0.

Actividad	1	2	3	4			**Total**
Puntaje	3+3+4	2+3+5	6+7	3+3+3			42 puntos
Logro							

Actividad 1 Se sabe que $y = x$ es una solución de la ecuación homogénea asociada:

$$(x^2-1)y'' - 2xy' - ay = (x^2-1)^2$$

1. Determine el valor de la constante a.
2. Obtenga la segunda solución, y_h, de la ecuación homogénea asociada.
3. Determine la solución particular y_p de la ecuación no homogénea.

Actividad 2 Dada la ecuación diferencial $4y''' + 33y' - 37y = 0$ con $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = 3$:
1. Escribir la ecuación factorizada en operadores
2. Escribir la solución general de la ecuación homogénea.
3. Escribir la solución que satisface las condiciones indicadas.
   Resp. $\frac{8}{45}e^x - e^{-x/2}(\frac{8}{45}\cos 3x + \frac{19}{45}\operatorname{sen} 3x)$

Actividad 3
1. Si $\mathscr{L}[f(t)] = \dfrac{s^2+2s+5}{(s+3)(s+5)^2}$, hallar $f(t)$
2. Resolver usando Transformada de Laplace la ecuación $y'' + 9y = \frac{3}{2}\operatorname{sen} 2t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
   Resp $y(t) = \frac{3}{10}\operatorname{sen} 2t - \frac{1}{5}\operatorname{sen} 3t$

Actividad 4
1. Considerar la ecuación $y''' - y'' - 4y' + 4y = 2x^2 - 4x - 1 + 2x^2e^{2x} + 5xe^{2x} + e^{2x}$
   a) Hallar la solución de la homogénea y_h.
   b) Escribir el aniquilador de la parte no homogénea de la ecuación.
2. Las raíces de la ecuación característica de cierta ecuación diferencial homogénea de orden 10, con coeficientes constantes, son: $4, 4, 4, 4, 2+3i, 2-3i, 2+3i, 2-3i, 2+3i, 2-3i$. Escriba la solución general.

$y(x) = e^{4x}(C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3) + e^{2x}\cos(3x)(C_5 + C_6x + C_7x^2) + e^{2x}\operatorname{sen}(3x)(C_8 + C_9x + C_{10}x^2)$

■ nothing is impossible ... ■

Universidad de la Frontera
Facultad de Ingeniería y Ciencias
Departamento de Matemática y Estadística

Preparación Taller # 2 : Ecuaciones Diferenciales
segundo semestre 2018

Actividad 1 Resolver las siguientes ecuaciones:

1. $x^3y''' + 2x^2y'' - 4xy + 4y = 0$. Resp. $y = C_1x + C_2x^2 + C_3x^{-2}$.
2. $x^2y'' - xy' + 2y = 0$, sabiendo que $y_1 = x\,\text{sen}(\ln x)$ es una solución de la homogénea. Resp. $y = C_1x\,\text{sen}(\ln x) + C_2(x\cos(\ln x))$
3. $y'' + y' + y = x\,\text{sen}\,x$.
   Resp $y = C_1e^{-x/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2e^{-x/2}\,\text{sen}\,\frac{\sqrt{3}}{2}x - x\cos x + 2\cos x + \text{sen}\,x$
4. $y''' - y' = e^{2x}\,\text{sen}^2 x$. Resp. $y_p = e^{2x}\left(\frac{1}{12} + \frac{9}{520}\cos 2x - \frac{7}{520}\,\text{sen}\,2x\right)$

Universidad de la Frontera
Facultad de Ingeniería y Ciencias
Departamento de Matemática y Estadística

Prueba # 2 : Ecuaciones Diferenciales
segundo semestre 2018

Actividad 1 Resolver las ecuaciones diferenciales:

1. $x^3y''' + xy' - y = 0$
2. $y'' - 2y' + y = x^2 - 1$

Actividad 2 Si $\varphi_1(x) = x + 1$, es solución de la ecuación diferencial

$$\left(1 - 2x - x^2\right)y'' + 2\,(1 + x)\,y' - 2y = 0,$$

encuentre su solución general.

Actividad 3 Si $y_1 = x^{-\frac{1}{2}}\cos x$ y $y_2 = x^{-\frac{1}{2}}\,\text{sen}\,x$ forman un conjunto linealmente independiente y son soluciones de

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0$$

Hallar una solución particular para

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = x^{\frac{3}{2}}$$

Universidad de la Frontera
Facultad de Ingeniería y Ciencias
Departamento de Matemática y Estadística

Taller # 2 : Ecuaciones Diferenciales
segundo semestre 2018

Actividad 1 Hallar la solución general de la ecuación

$$y'' - y' - 2y = (2+x)e^{-x}$$

Resp. $y(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{-x} - \frac{7}{9}xe^{-x} - \frac{1}{6}x^2e^{-x}$

Actividad 2 Hallar la solución general de la ecuación

$$y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = x$$

Resp. $y(x) = C_1x^2 + C_2x + \frac{1}{2}x^3$

Actividad 3 Considerar la ecuación $(x^2-1)y'' - 2xy' - ay = (x^2-1)^2$.

1. Hallar el valor de la constante a, si $y = x$ es solución de la homogénea asociada. Resp. $a = -2$
2. Hallar la solución general de la ecuación homogénea asociada.
   Resp. $y_h = C_1x + C_2(x^2+1)$
3. Hallar la solución particular de la ecuación no homogénea.
   Resp. $y_p = \left(\frac{x^4}{6} - \frac{x^2}{2}\right)$

Universidad de la Frontera
Facultad de Ingeniería y Ciencias
Departamento de Matemática y Estadística

Prueba Global: Ecuaciones Diferenciales
segundo semestre 2018
Ingenierías civiles

NO se aceptan consultas, la redacción de la prueba es clara y precisa. Sus respuestas deben ser bien redactadas y sin borrones. Por favor apague su **CELULAR** y déjelo fuera de su alcance, si es sorprendido con su celular conectado tiene nota 1,0

Actividad	1	2	3	4	5	**Total**
Puntaje	15	15	15	15		60 puntos
Logro						

- **Resultado de Aprendizaje**:
  1. Resolver ecuaciones diferenciales y sistemas.
  2. Modelar procesos de cambio mediante ecuaciones diferenciales.
- **Competencia genérica**: Pensamiento critico

Actividad 1 Considere un estanque con 200 litros de solución salina al 5 %, y con dos llaves: Una de entrada A y una de salida B. Por la llave A ingresan 8 litros por minuto de solución salina con una concentración de 0,25 kg/litros. Al mismo tiempo, por la llave B salen fluído homogeneamente mezclado a razón de 12 litros por minuto. Hallar la concentración en el estanque 5 minutos antes que se vacíe.

Actividad 2 Considerar la ecuación $x^2y'' + 2xy' - 6y = 0$, con $x > 0$

1. Hallar una solución particular de la forma $y_p = ax^2 + bx + c$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$.
2. Usando Abel encontrar la solución general de la ecuación.

Actividad 3 Hallar la solución general de la ecuación $x^2y'' - xy' + 2y = x\ln x$

Actividad 4 Aplicando transformada de Laplace resolver el sistema

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \vec{X} + \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}, \quad \vec{X}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

■ nothing is impossible ... ■

Universidad de la Frontera
Facultad de Ingeniería y Ciencias
Departamento de Matemática y Estadística

Examen: Ecuaciones Diferenciales
segundo semestre 2018
Ingenierías civiles

NO se aceptan consultas, la redacción de la prueba es clara y precisa. Sus respuestas deben ser bien redactadas y sin borrones. Por favor apague su **CELULAR** y déjelo fuera de su alcance, si es sorprendido con su celular conectado tiene nota 1,0

Actividad	1	2	3	4	5	**Total**
Puntaje	15	15	15	15		60 puntos
Logro						

- **Resultado de Aprendizaje**:
  1. Resolver ecuaciones diferenciales y sistemas.
  2. Modelar procesos de cambio mediante ecuaciones diferenciales.
- **Competencia genérica**: Pensamiento critico

Actividad 1 Considere la ecuación diferencial

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 10\,\mathrm{sen}(\ln x), \quad x > 0$$

1. Hallar la solución general. $y(x) = C_1x + C_2x^2 + 3\cos(\ln x) + \mathrm{sen}(\ln x)$
2. Hallar la solución particular que satisface $y(1) = 3$, $y'(1) = 0$.

Actividad 2 Encontrar la solución general de la ecuación diferencial

$$x(x+1)y'' + (x+2)y' - y = 0$$

sabiendo que $y_1(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x}$ es una solución. Resp. $y = C_1\frac{(x+1)^2}{x} + C_2\frac{1}{x}$

Actividad 3 Aplicar transformada de Laplace para resolver

$$ty'' + ty' - y = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 3$$

Resp. $y(t) = 3t$

Actividad 4 Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \vec{X} + \begin{pmatrix} e^{5t} \\ 4 \end{pmatrix}$$

Resp. $\vec{X}_p(t) = \begin{pmatrix} 2e^{5t} - 1 \\ e^{5t} - 3 \end{pmatrix}$

Universidad de la Frontera
Facultad de Ingeniería y Ciencias
Departamento de Matemática y Est.

Taller Individual # 2 - Ecuaciones IC
Primer semestre 2019

Actividad 1 Resolver las siguientes ecuaciones:

1. $y'' + 5y' + 6y = e^{-2x}$
2. $4y'' + y' = 0$

Actividad 2 Resolver la ecuación de Euler

$$x^2y'' - xy' + y = \sqrt{x}$$

Actividad 3 Hallar la ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes de menor orden cuya solución general es

$$y(x) = e^{-3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \operatorname{sen} 2x) + C_3 + C_4x + 5e^{4x}$$

Puntaje: (15+15) + (15) + (15) = 60 puntos

Universidad de la Frontera
Facultad de Ingeniería y Ciencias
Departamento de Matemática y Est.

Prueba Cátedra # 2 - Ecuaciones IC
Primer semestre 2019

Actividad 1 Resolver las siguientes ecuaciones:

1. $y'' + 8y = 2e^{-x} + 5x$
2. $y''' - y' = \operatorname{sen} x$
3. $x^2y'' + 2xy' = x^{-1}$

Actividad 2 Considerar la ecuación diferencial de coeficientes constantes

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = q(x)$$

de la que se conoce una solución particular y_p y la solución de la ecuación diferencial homogénea asociada y_h

$$y_p = -\frac{3}{4}x \cos 2x$$
$$y_h = C_1 \cos 2x + C_2 \operatorname{sen} 2x$$

1. Hallar los valores de las constantes a y b
2. Hallar la función $q(x)$

Puntaje: (10+10+10) + (10) = 40 puntos

Universidad de la Frontera
Facultad de Ingeniería y Ciencias
Departamento de Matemática y Estadística

Taller # 3 : Sistemas de Ecuaciones Diferenciales
segundo semestre 2016

Actividad 1 Utilizar el método de valores y vectores propios para resolver el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Escriba la matriz fundamental.

$$\begin{cases} y' &= 2y - 9z \\ z' &= y + 8z \end{cases}$$

Resp. $z(t) = (C_1 + C_2 t)e^{5t}$

Actividad 2 Resolver el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' &= x + 2y \\ y' &= -x + 4y \end{cases}, \quad x(0) = 1,\ y(0) = -1$$

Resp. $x(t) = 4e^{2t} - 3e^{3t}, \quad y(t) = 2e^{2t} - 3e^{3t}$

Actividad 3 Usar variación de parámetros para resolver el sistema. Indicar en forma clara X_h y X_p.

$$\begin{aligned} y' + y + 2z &= \operatorname{sen} x + \cos x \\ z' + 2y + z &= \operatorname{sen} x - \cos x \end{aligned}$$

Actividad 4 Hallar la solución del sistema

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Resp. $x(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t} + \frac{7}{3}, \quad y(t) = C_1 e^{3t} - C_2 e^{-t} - \frac{8}{3}$

■ nothing is impossible ... ■

Universidad de la Frontera
Facultad de Ingeniería y Ciencias
Departamento de Matemática y Estadística

Prueba # 3 - Ecuaciones Diferenciales
segundo semestre 2016
Ingenierías civiles

NO se aceptan consultas, la redacción de la Prueba es clara y precisa. ¡¡Atención!! **DEBE** redactar sus respuestas. Use un **rectángulo** para encerrar cada parte de la respuesta que considere importante. Por favor apague su **CELULAR** y déjelo fuera de su alcance, si es sorprendido con su celular conectado, tiene nota 1,0.

Actividad	1	2	3				**Total**
Puntaje	20	20	20				60 puntos
Logro							

- **Resultado de Aprendizaje**: Resolver ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias
- **Competencia genérica**: Pensamiento critico

Actividad 1 Considere el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\vec{X}\,' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \vec{X}$$

1. Hallar el polinomio característico asociado.
2. Hallar los valores y vectores propios asociados.
3. Hallar la solución general del sistema.

Actividad 2 Usar Transformada de Laplace para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x' &= x + 2y \\ y' &= -2x + y \end{cases} \quad x(0) = 1,\ y(0) = 0$$

Resp. $x(t) = e^t \cos 2t, \quad y(t) = -e^t \operatorname{sen} 2t$

Actividad 3 Considerar el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\vec{X}\,' = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 13 \\ 5 & 3 & 7 \\ -9 & -4 & -12 \end{pmatrix} \vec{X} + \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hallar la solución general, si se sabe que el polinomio característico asociado es $p(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1$

nothing is impossible ...

Universidad de la Frontera
Facultad de Ingeniería y Ciencias
Departamento de Matemática y Estadística

Preparación Taller # 3 : Sistemas de Ecuaciones Diferenciales
segundo semestre 2018

Este trabajo es grupal y aporta 12 puntos al actitudinal.

Actividad 1 Utilizar el método por eliminación para resolver el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$\begin{cases} y' &= 2y - 9z \\ z' &= y + 8z \end{cases}$$

Resp. $z(t) = (C_1 + C_2 t)e^{5t}$

Actividad 2 Usando valores y vectores propios resolver el sistema

$$\begin{cases} x' &= y + z \\ y' &= x + z \\ z' &= x + y \end{cases}$$

Ayuda. Los vectores propios son

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Actividad 3 Utilizando la transformada de Laplace encontrar la solución particular del sistema

$$\begin{cases} y' &= 3y - z \\ z' &= y + z \end{cases}$$

que verifica que $y(0) = 1$, $z(0) = 2$. Resp. $y(t) = (1-t)e^{2t}$

Actividad 4 Usar variación de parámetros para resolver el sistema

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \vec{X} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^t \cos 2t \end{pmatrix}$$

■ nothing is impossible … ■

Universidad de la Frontera
Facultad de Ingeniería y Ciencias
Departamento de Matemática y Estadística

Taller # 3 : Sistemas de Ecuaciones Diferenciales
primer semestre 2017

Actividad 1 Utilizar el método de valores y vectores propios para resolver el sistema

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 13 \\ 5 & 3 & 7 \\ -9 & -4 & -12 \end{pmatrix} \vec{X} + \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resp. $X(t) = C_1 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + C_3 e^{t} \left[t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$

Actividad 2 Utilizando la transformada de Laplace para hallar la solución del sistema

$$\begin{cases} x'' + y' + 3x & = 15e^{-t} \\ y'' - 4x' + 3y & = 15t \end{cases}$$

que verifica que $x(0) = x'(0) = y(0) = y'(0) = 0$. Resp.

$$y(t) = 15\left(A + Bt + Ce^{-t} + D\cos t + E\,\mathrm{sen}\,t + F\cos 3t + \frac{G}{3}\,\mathrm{sen}\,3t\right)$$
$$x(t) = 15\left(A + Be^{-t} + C\cos t + D\,\mathrm{sen}\,t + E\cos 3t + \frac{F}{3}\,\mathrm{sen}\,3t\right)$$

Actividad 4 La matriz fundamental de un sistema de ecuaciones homogéneo es

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{t} & e^{5t} \\ -e^{t} & 3e^{5t} \end{pmatrix}$$

Hallar tal sistema. Resp. $\vec{X}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \vec{X}$

■ nothing is impossible ... ■

Universidad de la Frontera
Facultad de Ingeniería y Ciencias
Departamento de Matemática y Estadística

Prueba # 3 - Ecuaciones Diferenciales
primer semestre 2017
Ingenierías civiles

NO se aceptan consultas, la redacción de la Prueba es clara y precisa. ¡¡Atención!! **DEBE** redactar sus respuestas. Use un **rectángulo** para encerrar cada parte de la respuesta que considere importante. Por favor apague su **CELULAR** y déjelo fuera de su alcance, si es sorprendido con su celular conectado, durante el taller, tiene nota 1.0.

Actividad	1	2	3				**Total**
Puntaje	10	10	10				30 puntos
Logro							

- **Resultado de Aprendizaje**: Resolver ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias
- **Competencia genérica**: Pensamiento critico

Actividad 1 Resolver, por cualquier método, el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x'' + y'' = e^{2t} \\ 2x' + y'' = e^{-2t} \end{cases} \quad , \quad x(0) = y(0) = y'(0) = x'(0) = 0$$

Actividad 2 Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\vec{X}\,' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{X} + \begin{pmatrix} e^t \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Actividad 3 Resolver el sistema de cuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x' &= -3x - 4z \\ y' &= -x - y - z \\ z' &= x + z \end{cases}$$

■ nothing is impossible ... ■

Universidad de la Frontera
Facultad de Ingeniería y Ciencias
Departamento de Matemática y Estadística

Prueba # 3 - Ecuaciones Diferenciales
primer semestre 2017
Ingenierías civiles

NO se aceptan consultas, la redacción de la Prueba es clara y precisa. ¡¡Atención!! **DEBE** redactar sus respuestas. Use un **rectángulo** para encerrar cada parte de la respuesta que considere importante. Por favor apague su **CELULAR** y déjelo fuera de su alcance, si es sorprendido con su celular conectado, tiene nota 1,0.

Actividad	1	2	3				**Total**
Puntaje	12	12	12				36 puntos
Logro							

- **Resultado de Aprendizaje**: Resolver ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias
- **Competencia genérica**: Pensamiento critico

Actividad 1 Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\vec{X}\,' = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \vec{X} + \begin{pmatrix} e^{5t} \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{X}(0) = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Actividad 2 Usar Transformada de Laplace para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x' &= x - y + e^t \cos t \\ y' &= x + y + e^t \operatorname{sen} t \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 0$$

Actividad 3 Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\vec{X}\,' = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \vec{X}$$

■ nothing is impossible . . . ■

Universidad de la Frontera
Facultad de Ingeniería y Ciencias
Departamento de Matemática y Est.

Prueba # 3 - Ecuaciones Diferenciales
segundo semestre 2018

Escriba lo más claro posible sus respuestas y sin borrones. Puede usar calculadora que no grafique. Debe apagar celular y dejarlo lejos de su alcance. ¡Por favor, no insista!
NO HAY CONSULTAS

Pregunta	1	2	3				**Total**
Puntaje	20	20	20				60
Logro							

Actividad 1 Usar Transformada de Laplace para resolver

$$y'' - 6y' + 9y = t^2 e^{3t}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 6$$

Actividad 2 Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \vec{X}$$

Actividad 3 Hallar la solución general del sistema

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{X} + \begin{pmatrix} e^t \\ te^t \\ e^t \end{pmatrix}$$

■ nothing is impossible ... ■

Universidad de la Frontera
Facultad de Ingeniería y Ciencias
Departamento de Matemática y Estadística

Preparación Taller # 3- Sistemas de Ecuaciones
segundo semestre 2018

Actividad 1 Resuelva por valores propios,

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -9 & 8 \end{pmatrix} \vec{X}$$

Resp.

$$X(t) = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} t\, e^{2t}$$

Actividad 2 Resuelva por valores propios,

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \vec{X}$$

Resp.

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{(1+i)t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{(1-i)t}$$

Actividad 3 Resolver, con condiciones iniciales $y(0) = 0$, $x(0) = 0$, el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} y' = y + 2x + \cos t \\ x' = 2y + x + \operatorname{sen} t \end{cases}$$

Resp. $\begin{cases} x(t) = -\dfrac{7}{10}\cos(t) - \dfrac{1}{10}\operatorname{sen}(t) + \dfrac{1}{5}e^{3t} + \dfrac{1}{2}e^{-t} \\ y(t) = \dfrac{3}{10}\cos(t) - \dfrac{1}{10}\operatorname{sen}(t) + \dfrac{1}{5}e^{3t} - \dfrac{1}{2}e^{-t} \end{cases}$

Actividad 4 Encuentre la solución general del sistema:

$$x' = x + 3y + t^2$$
$$y' = 3x + y - 2e^{-2t}$$

Resp.

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{4t} + C_2 e^{-2t} + \dfrac{7}{64} + \dfrac{t^2}{8} - \dfrac{5t}{16} + \left(t + \dfrac{1}{6}\right) e^{-2t} \\ y(t) = C_1 e^{4t} - C_2 e^{-2t} - \dfrac{9}{64} + \dfrac{3t}{16} - \dfrac{3t^2}{8} - \left(t - \dfrac{1}{6}\right) e^{-2t} \end{cases}$$

■ nothing is impossible … ■

Universidad de la Frontera
Facultad de Ingeniería y Ciencias
Departamento de Matemática y Est.

Taller grupal # 3 - Ecuaciones Diferenciales
Primer semestre 2019

Actividad 1 Resolver, usando transformada de Laplace, la ecuación $y'' + 9y = \cos(3t)$, $y(0) = y'(0) = 0$
Resp. $\frac{1}{6}t \operatorname{sen} 3t$

Actividad 2 Utilice la transformada de Laplace para resolver el sistema

$$\begin{cases} x'' - y'' = t^2 \\ x'' + y'' = 4t \end{cases}$$

sujeto a las condiciones iniciales $x(0) = 8$, $x'(0) = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Actividad 3 El sistema lineal homogéneo de ecuaciones diferenciales

$$\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \vec{X}$$

tiene valores propios $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1 + i,\ \lambda_3 = 1 - i$

1. Hallar cada uno de los vectores propios.
2. Escribir la solución general

Universidad de la Frontera
Facultad de Ingeniería y Ciencias
Departamento de Matemática y Est.

Prueba # 3 - Ecuaciones Diferenciales
Primer semestre 2019 - Icons

Actividad 1 Resolver, usando transformada de Laplace, la ecuación $y'' - 4y' + 4y = t^3 e^{2t}$, $\quad y(0) = 0$; $y'(0) = 0$

Actividad 2 Resolver, usando valores y vectores propios, el sistema lineal homogéneo de ecuaciones diferenciales

$$\vec{X}'(t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{X}(t)$$

Actividad 3 Utilizar la transformada de Laplace para resolver el sistema con condiciones iniciales $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$.

$$\begin{cases} x'' + 10x = 4y \\ y'' - 4x = -4y \end{cases}$$

Universidad de la Frontera
Facultad de Ingeniería y Ciencias
Departamento de Matemática y Est.

Taller Individual # 3 - Ecuaciones Diferenciales
Primer semestre 2019 - Icons

Actividad 1 Resolver, usando transformada de Laplace, la ecuación $x''' + 4x'' + 5x' + 2x = 10\cos t$, si $x(0) = x'(0) = 0, x''(0) = 3$ Si existen fracciones parciales, no calcular las constantes, pero indicar la señal de entrada.

Actividad 2 Utilizar la transformada de Laplace para resolver el sistema

$$\begin{cases} x'' = 2x + y \\ y'' = 2x + 3y \end{cases}$$

con condiciones iniciales $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$. Si existen fracciones parciales, no calcular las constantes, pero expresar la señal de entrada.

Actividad 3 Resolver, usando valores y vectores propios, el sistema lineal homogéneo de ecuaciones diferenciales

$$\vec{X}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \vec{X}(t)$$

■ nothing is impossible ... ■

Universidad de la Frontera
Facultad de Ingeniería y Ciencias
Departamento de Matemática y Est.

Prueba Global - Ecuaciones Diferenciales
Primer semestre 2019 - Icons

Actividad 1 La población de una comunidad de bacterias crece a razón proporcional a su población en cualquier momento t. Al cabo de 3 horas se observa que hay 400 individuos. Pasadas 10 horas, hay 2000 bacterias. ¿Cuál era la cantidad inicial de bacterias? Resp. 200 inicialmente

Actividad 2 Resolver, usando transformada de Laplace, la ecuación diferencial $y'' + y = \cos(t),\ y(0) = 0; y'(0) = 1$ Resp. $y(t) = \operatorname{sen}(t) + \frac{t}{2}\operatorname{sen}(t)$.

Actividad 3 Resolver $y''' + 2y'' - 4y' - 8y = xe^{2x}$

Actividad 4 Resolver, usando valores y vectores propios, el sistema lineal homogéneo de ecuaciones diferenciales

$$\vec{X}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \vec{X}(t)$$

Puntos: (12) + (12) + (12) + (12) = 48 puntos

■ nothing is impossible ... ■

Universidad de la Frontera
Facultad de Ingeniería y Ciencias
Departamento de Matemática y Est.

Examen - Ecuaciones Diferenciales
Primer semestre 2019 - Icons

Actividad 1 Un termómetro se encuentra guardado en una habitación cuya temperatura es de 75°, a los 5 minutos de sacarlo de la habitación marca 65° y a los 10 minutos marca 60°. Calcular la temperatura exterior, sabiendo que ésta es constante. Resp. 55°

Actividad 2 Resolver la ecuación $y'''' - 2y'' + y = \cos(3t)$ Resp. $y_p(t) = \frac{1}{100}\cos(3t)$.

Actividad 3 Resolver, usando transformada de Laplace, el sistema

$$\begin{cases} 3x' + 2x - y & = 1 \\ 4y' + 3y + x' & = 0 \end{cases}, \quad x(0) = 0; y(0) = 0$$

Actividad 4 Resolver, usando valores y vectores propios, el sistema lineal homogéneo de ecuaciones diferenciales

$$\vec{X}'(t) = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \vec{X}(t), \quad x(0) = 3; y(0) = 1$$

Puntos: (12) + (12) + (12) + (12) = 48 puntos

Universidad de la Frontera
Facultad de Ingeniería y Ciencias
Departamento de Matemática y Est.

Prueba # 3 - Ecuaciones Diferenciales
primer semestre 2019

Actividad 1 Usar Transformada de Laplace para resolver

$$y'' + 2ty' - 4y = 1, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

Actividad 2 Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{X}, \quad \vec{X}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Actividad 3 Hallar la solución general del sistema

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \vec{X} + \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \\ e^t \end{pmatrix}$$

Puntaje: (20)+(20)+(20)=60 puntos

Universidad de la Frontera
Facultad de Ingeniería y Ciencias
Departamento de Matemática y Estadística

Pauta - Prueba 2 EDO (IME188)
Carrera: Ingenierías Civiles - primer semestre 2023

Pregunta	1	2	3	4	**puntos**
Puntaje	18	20	8	14	60

Actividad 1 Encontrar la solución general de la ecuación diferencial

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = \ln x$$

Solución

El proceso más sencillo es usar $x = e^t$. Se tiene

$$(D^2 - D - 2D + 2)[y] = t$$

que es equivalente a

$$(D^2 - 3D + 2)[y] = t \Longleftrightarrow (D-1)(D-2)[y] = t$$

La solución de la homogénea es

$$y_h = C_1e^t + C_2e^{2t}$$

Entre variación de parámetros y aniquiladores no hay donde perderse. El aniquilador de $g(t) = t$ es D^2, de manera que se obtiene

$$D^2(D-1)(D-2)[y] = 0$$

cuya solución es

$$y = \overbrace{C_1e^t + C_2e^{2t}}^{y_h} + \overbrace{C_3 + t\,C_4}^{y_p}$$

Así, nuestra candidata a solución particular es

$$y_p = C_3 + t\,C_4$$

La usamos en la ecuación que corresponde

$$(D-1)(D-2)[y_p] = t$$

Se tiene

$$\begin{aligned}(D-1)(D-2)[C_3 + t\,C_4] &= (D-1)[C_4 - 2C_3 - 2t\,C_4] \\ &= -2C_4 - C_4 + 2C_3 + 2tC_4 \\ &= -3C_4 + 2C_3 + 2tC_4\end{aligned}$$

Se iguala este resultado a $g(t) = t$ para tener un sistema

$$\begin{cases} 2C_3 - 3C_4 &= 0 \\ 2C_4 &= 1 \end{cases}$$

Se deduce que

$$C_4 = \frac{1}{2}, \quad C_3 = \frac{3}{4}$$

Se concluye que la solución general es

$$y = \overbrace{C_1 e^t + C_2 e^{2t}}^{y_h} + \overbrace{\frac{3}{4} + \frac{t}{2}}^{y_p}$$

Estamos con variable t, volviendo a la variable x la solución general es

$$y = \overbrace{C_1 x + C_2 x^2}^{y_h} + \overbrace{\frac{3}{4} + \frac{\ln x}{2}}^{y_p}$$

Actividad 2 Considerar la ecuación diferencial de coeficientes constantes

$$y'' + A\,y' + B\,y = g(t)$$

de la que se conoce una solución particular y la solución de la ecuación diferencial homogénea asociada:

- $y_p = -\dfrac{3}{4} t \cos 2t$
- $y_h = C_1 \cos 2t + C_2 \operatorname{sen} 2t$

1. Hallar los valores de las constantes A y B.
2. Encontrar la función $g(t)$

Solución

1) La solución homogénea es

$$y_h = C_1 \cos 2t + C_2 \operatorname{sen} 2t$$

Esto significa que la ecuación diferencial asociada es

$$(D^2 + 4)[y] = 0$$

Al comparar con

$$y'' + A\,y' + B\,y = g(t) \Longleftrightarrow (D^2 + AD + B)[y] = 0$$

se halla que

$$A = 0, \quad B = 4$$

2) Para hallar la función $g(t)$ tenemos que $y_p = -\frac{3}{4} t \cos 2t$, entonces

$$\begin{aligned}
(D^2+4)[y_p] &= (D^2+4)[-\frac{3}{4} t \cos 2t] \\
&= DD[-\frac{3}{4} t \cos 2t] - 3t \cos 2t \\
&= D[-\frac{3}{4} \cos 2t + \frac{3}{2} t \operatorname{sen} 2t] - 3t \cos 2t \\
&= \frac{3}{2} \operatorname{sen} 2t + \frac{3}{2} \operatorname{sen} 2t + 3t \cos 2t - 3t \cos 2t \\
&= 3 \operatorname{sen} 2t = g(t)
\end{aligned}$$

Actividad 3 Evaluar $\mathscr{L}[(t-2)^3\mu(t-2)]$

Solución

Tenemos un desplazamiento en el tiempo. Se debe hacer uso de

Desplazamiento en el tiempo Sea $a>0$ y $\mathscr{L}[f(t)] = F(s)$, entonces

$$\mathscr{L}[f(t-a)\mu(t-a)] = e^{-as}\mathscr{L}[f(t)]$$

La función y el escalón están desplazados, entonces

$$\mathscr{L}[(t-2)^3\mu(t-2)] = e^{-2s}\mathscr{L}[t^3]$$

pero esta transformada es conocida

$$\mathscr{L}[t^3] = \frac{3!}{s^4} = \frac{6}{s^4}e^{-2s}$$

Actividad 4 Resolver, usando Transformada de Laplace, la ecuación

$$y'' - 6y' + 9y = t^2e^{3t}, \quad y(0) = 2,\ y('(0) = 6$$

Solución

Se aplica la transformada a toda la ecuación

$$\mathscr{L}[y''] - 6\mathscr{L}[y'] + 9\mathscr{L}[y] = \mathscr{L}[t^2e^{3t}]$$

Se aplican las condiciones iniciales

$$s^2F(s) - sy(0) - y'(0) - 6(sF(s) - y(0)) + 9F(s) = \frac{2}{(s-3)^3}$$

Al reducir

$$(s^2 - 6s + 9)\,F(s) = \frac{2}{(s-3)^3} + 2s - 6$$

Se escribe en fracciones

$$F(s) = \frac{2}{(s-3)^5} + \frac{2(s-3)}{(s-3)^2}$$

al simplificar

$$F(s) = \frac{2}{(s-3)^5} + \frac{2}{s-3}$$

Ahora se aplica transformada inversa

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s-3)^5}\right] + \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2}{s-3}\right]$$

Se observa que existe desplazamiento en la frecuencia

$$y(t) = 2e^{3t}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^5}\right] + 2e^{3t}$$

de esto, la solución de la ecuación es

$$y(t) = 2 \cdot \frac{t^4}{4!} \cdot e^{3t} + 2 \cdot e^{3t}$$

Universidad de la Frontera
Facultad de Ingeniería y Ciencias
Departamento de Matemática y Estadística

Pauta - Examen EDO (IME188)
Carrera: Ingenierías Civiles - segundo semestre 2022

Pregunta	1	2	3		**puntos**
Puntaje	20	20	20		60

Actividad 1 Hallar la solución general de la ecuación diferencial

$$x^2y'' - xy' - 3y = x^2 + \ln x$$

Solución

La ecuación es Euler - Cauchy. El logaritmo que aparece sugiere la sustitución $x = e^t$, de la cual se halla que

$$x^2y'' - xy' - 3y = x^2 + \ln x \Longleftrightarrow (D^2 - D - D - 3)[y] = e^{2t} + t$$

Al reducir, queda la ecuación en operadores

$$(D^2 - 2D - 3)[y] = e^{2t} + t \Longleftrightarrow (D-3)(D+1)[y] = e^{2t} + t$$

La solución de la homogénea es

$$y_h(t) = C_1e^{3t} + C_2e^{-t}$$

Para hallar la solución particular usaremos aniquiladores.

$$g(t) = t + e^{2t} \Longrightarrow L = D^2(D-2) \text{ aniquilador}$$

Al aplicar este aniquilador en la ecuación

$$(D-3)(D+1)[y] = e^{2t} + t$$

se obtiene

$$D^2(D-2)(D-3)(D+1)[y] = 0$$

de la cual se halla que

$$y(t) = \overbrace{C_1e^{3t} + C_2e^{-t}}^{y_h} + \overbrace{C_3 + C_4t + C_5e^{2t}}^{y_p}$$

Ahora se aplica el operador $(D-3)(D+1)$ en la y_p. Se tiene

$$(D-3)(D+1)[y_p] = (D-3)(D+1)[C_3 + C_4t + C_5e^{2t}] = t + e^{2t}$$

Se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}(D-3)(D+1)[C_3 + C_4t + C_5e^{2t}] &= (D-3)[C_4 + C_3 + C_4t + 3C_5e^{2t}] \\ &= -2C_4 - 3C_5e^{t} - 3C_3 - 3C_4t\end{aligned}$$

Al igualar

$$\left.\begin{aligned}-2C_4 - 3C_3 &= 0 \\ -3C_4 &= 1 \\ -3C_5 &= 1\end{aligned}\right\} \Longrightarrow C_4 = -\frac{1}{3} = C_5, \quad C_3 = \frac{2}{9}$$

La solución particular es

$$y_p(t) = \frac{2}{9} - \frac{t}{3} - \frac{1}{3}e^{2t}$$

En términos de x:

$$y_p(x) = \frac{2}{9} - \frac{1}{3}\ln x - \frac{1}{3}x^2$$

La solución general es

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

Actividad 2 Aplicando transformada de Laplace determine la solución del sistema

$$\vec{X}'(t) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\vec{X} + \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix}, \quad \vec{X}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Solución

Es más amigable escribir el sistema en sus dos ecuaciones. Sea $\vec{X} = (x,y)^T$, entonces

$$\begin{cases} x' = 2x - y + e^t \\ y' = 3x + 2y - e^t \end{cases}, \quad x(0) = y(0) = 1$$

Se aplica transformada a todo el sistema.

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[x'] &= 2\mathscr{L}[x] - \mathscr{L}[y] + \mathscr{L}[e^t] \\ \mathscr{L}[y'] &= 3\mathscr{L}[x] + 2\mathscr{L}[y] - \mathscr{L}[e^t]\end{aligned}$$

Se considera que $\mathscr{L}[x] = F(s)$ y que $\mathscr{L}[y] = G(s)$. . Se aplica la transformada de la derivada y las condiciones iniciales

$$\begin{cases} sF(s) - 1 = 2F(s) - G(s) + \dfrac{1}{s-1} \\ sG(s) - 1 = 3F(s) + 2G(s) - \dfrac{1}{s-1} \end{cases}$$

Se escribe ordenando variables

$$\begin{cases} (s-2)F(s)+G(s)=\dfrac{s}{s-1} \\ -3F(s)+(s-2)G(s)=\dfrac{s-2}{s-1} \end{cases}$$

La primera ecuación se multiplica por 3 y la segunda por $s-2$

$$\begin{cases} 3(s-2)F(s)+3G(s)=\dfrac{3s}{s-1} \\ -3(s-2)F(s)+(s-2)^2G(s)=\dfrac{(s-2)^2}{s-1} \end{cases}$$

Al sumar ambas ecuaciones se obtiene

$$(s-2)^2G(s)+3G(s)=\frac{(s-2)^2}{s-1}+\frac{3s}{s-1}$$

Al factorizar y reducir

$$(s^2-4s+7)G(s)=\frac{s^2-7s+4}{s-1}\Longrightarrow G(s)=\frac{s^2-s+4}{(s-1)(s^2-4s+7)}$$

Hacemos fracciones parciales

$$G(s)=\frac{s^2-s+4}{(s-1)(s^2-4s+7)}=\frac{A}{s-1}+\frac{Bs+C}{s^2-4s+7}$$

Lo que es equivalente con

$$G(s)=\frac{A}{s-1}+\frac{Bs}{(s-2)^2+3}+\frac{C}{(s-2)^2+3}$$

Sin calcular estas constantes, aplicamos inversa de Laplace

$$\mathscr{L}^{-1}[G(s)]=A\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right]+B\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s-2)^2+3}\right]+C\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)^2+3}\right]$$

Esto es lo mismo que

$$\mathscr{L}^{-1}[G(s)]=A\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right]+B\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{(s-2)+2}{(s-2)^2+3}\right]+C\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)^2+3}\right]$$

Se tiene un desplazamiento en el tiempo

$$y(t)=Ae^t+B\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{(s-2)+2}{(s-2)^2+3}\right]+C\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)^2+3}\right]$$

La solución de $y(t)$ es

$$y(t)=Ae^t+Be^{2t}\cos t\sqrt{3}+e^{2t}\,\frac{2B}{\sqrt{3}}\operatorname{sen} t\sqrt{3}+\frac{C}{\sqrt{3}}e^{2t}\operatorname{sen} t\sqrt{3}$$

Para hallar $x(t)$ se reemplaza en la segunda ecuación

$$y'=3x+2y-e^t$$

se obtiene:

- $2y(t) = 2Ae^t + 2Be^{2t}\cos t\sqrt{3} + 2e^{2t}\,\frac{2B}{\sqrt{3}}\operatorname{sen} t\sqrt{3} + \frac{2C}{\sqrt{3}}e^{2t}\operatorname{sen} t\sqrt{3}$

$$2y(t) = 2Ae^t + 2Be^{2t}\cos t\sqrt{3} + \left(\frac{4B}{\sqrt{3}} + \frac{2C}{\sqrt{3}}\right)e^{2t}\operatorname{sen} t\sqrt{3}$$

- $y'(t) = Ae^t - B\sqrt{3}e^{2t}\operatorname{sen} t\sqrt{3} + 2Be^{2t}\cos t\sqrt{3} + e^{2t}\,\frac{4B}{\sqrt{3}}\operatorname{sen} t\sqrt{3} + 2B\,e^{2t}\cos t\sqrt{3} + C\,e^{2t}\cos t\sqrt{3} + \frac{2C}{\sqrt{3}}e^{2t}\operatorname{sen} t\sqrt{3}$

$$y' = Ae^t + \left(\frac{B+2C}{\sqrt{3}}\right)e^{2t}\operatorname{sen} t\sqrt{3} + (4B+C)e^{2t}\cos t\sqrt{3}$$

- $y' - 2y = -Ae^t - \dfrac{2B}{\sqrt{3}}e^{2t}\operatorname{sen} t\sqrt{3} + (2B+C)e^{2t}\cos t\sqrt{3}$

Se concluye que

$$3x(t) = e^t - Ae^t - \frac{2B}{\sqrt{3}}e^{2t}\operatorname{sen} t\sqrt{3} + (2B+C)e^{2t}\cos t\sqrt{3}$$

de lo cual

$$x(t) = \frac{1}{3}(1-A)e^t - \frac{2B}{3\sqrt{3}}e^{2t}\operatorname{sen} t\sqrt{3} + \frac{1}{3}(2B+C)e^{2t}\cos t\sqrt{3}$$

Actividad 3 Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales lineales

$$\vec{X}\,'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\vec{X}$$

Solución

Al resolver

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

quedan determinados los valores propios

$$(1-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1-\lambda & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Se llega a la ecuación

$$(\lambda+1)(\lambda^2+1) = 0 \Longrightarrow \lambda = -1, \quad \lambda = \pm i$$

Vector propio de $\lambda = -1$

Hay que resolver

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hacemos escalonamiento de la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de la escalonada es 2, luego tiene asociado sólo un vector propio. Se deduce, de la matriz escalonada, que $v_1 = 0$ y que

$$-v_2 - v_3 = 0 \Longrightarrow v_2 = -v_3$$

considerando $v_3 = -1$ se obtiene $v_2 = 1$, con lo cual el vector propio asociado es

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

La primera solución es

$$\vec{X}_1(t) = \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

Vector propio de $\lambda = i$

Hay que resolver

$$\begin{pmatrix} 1-i & -1 & -1 \\ 1 & -1-i & 0 \\ 1 & 0 & -1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hacemos escalonamiento de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1-i & -1 & -1 \\ 1 & -1-i & 0 \\ 1 & 0 & -1-i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1-i & 0 \\ 1 & 0 & -1-i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -i \\ 1 & 0 & -1-i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1-i \end{pmatrix}$$

La segunda fila por $-(1-i)$ se suma a la primera fila. La primera fila por i se suma a la segunda. A la segunda fila se resta la tercera. Finalmente, a la primera fila se le suma la segunda y se halla que la matriz tiene rango 2.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En términos de ecuaciones esto es

$$\begin{cases} -v_2 + v_3 = 0 \\ v_1 - (1+i)v_3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow v_2 = v_3, \quad v_1 = (1+i)v_3$$

Tomando $v_3 = 1$ es $v_2 = 1,\ v_1 = 1+i$. Así, el vector propio es

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La solución real es

$$\vec{X}_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos t - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \operatorname{sen} t$$

$$\vec{X}_3(t) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \operatorname{sen} t + \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \cos t$$

La solución del sistema es

$$\vec{X}(t) = C_1\vec{X}_1(t) + C_2\vec{X}_2(t) + C_3\vec{X}_3(t)$$

Universidad de la Frontera
Facultad de Ingeniería y Ciencias
Departamento de Matemática y Estadística

Pauta - Prueba Global EDO (IME188)
Carrera: Ingenierías Civiles - segundo semestre 2022

Pregunta	1	2	3	4	**puntos**
Puntaje	15	15	15	15	60

Actividad 1 Encuentre la solución general de la ecuación diferencial

$$y''' - 5y'' + 6y' = 8 + 2\operatorname{sen} x$$

Solución

- Solución de la homogénea

La ecuación en operadores es

$$(D^3 - 5D^2 + 6D)[y] = 0 \Longleftrightarrow D(D^2 - 5D + 6)[y] = 0 \Longleftrightarrow D(D-3)(D-2)[y] = 0$$

Se deduce que en el espacio nulo están las funciones

$$y_1 = C_1, \quad y_2 = e^{3x}, \quad y_3 = e^{2x}$$

La solución de la homogénea es

$$y_h(x) = C_1 + C_2e^{3x} + C_3e^{2x}$$

- Solución de la no homogénea

El aniquilador de $g(x) = 8 + 2\operatorname{sen} x$ es $D(D^2+1)$. Al aplicarlo en toda la ecuación se tiene

$$D(D^2+1)\,D(D-3)(D-2)[y] = 0 \Longrightarrow D^2(D^2+1)(D-3)(D-2)[y] = 0$$

La solución de esta ecuación es

$$y(x) = \overbrace{C_1 + C_2e^{3x} + C_3e^{2x}}^{y_h} + \overbrace{C_4x + C_5\cos x + C_6\operatorname{sen} x}^{y_h}$$

Ahora se aplica la candidata y_p en la ecuación original

$$D(D-3)(D-2)[y_p] = 8 + 2\operatorname{sen} x$$

Desarrollamos la parte que contiene los operadores

$$D(D-3)(D-2)[C_4x+C_5\cos x+C_6\operatorname{sen} x] = (D-3)(D-2)[C_4-C_5\operatorname{sen} x+C_6\cos x]$$

Al aplicar $D-2$ se tiene

$$(D-3)[-C_5\cos x-C_6\operatorname{sen} x-2C_4+2C_5\operatorname{sen} x-2C_6\cos x]$$

El último paso es aplicar el operador $(D-3)$. Se tiene

$$C_5\operatorname{sen} x-C_6\cos x+2C_5\cos x+2C_6\operatorname{sen} x+3C_5\cos x+3C_6\operatorname{sen} x+6C_4-6C_5\operatorname{sen} x+6C_6\cos x$$

Al reducir queda

$$-5C_5\operatorname{sen} x+5C_6\cos x+5C_5\cos x+5C_6\operatorname{sen} x+6C_4$$

Factorizando

$$(-5C_5+5C_6)\operatorname{sen} x+(5C_6+5C_5)\cos x+6C_4 = 8+2\operatorname{sen} x$$

Al igualar

$$\begin{cases} -5C_5+5C_6=2 \\ 5C_5+5C_6=0 \\ 6C_4=8 \end{cases}$$

Se deduce que

$$C_4=\frac{4}{3},\quad C_5=-\frac{1}{5},\quad C_6=\frac{1}{5}$$

La y_p ha sido encontrada

$$y_p=\frac{4}{3}x-\frac{1}{5}\cos x+\frac{1}{5}\operatorname{sen} x$$

La solución general de la ecuación es

$$y(x)=y_h+y_p$$

Actividad 2 Utilizando transformadas de Laplace, resolver:

$$t\,y''-y'=t^2,\ y(0)=0$$

Solución

Se aplica la transformada a toda la ecuación

$$\mathscr{L}[t\,y'']-\mathscr{L}[y']=\mathscr{L}[t^2]$$

La primera transformada requiere del uso de la propiedad de multiplicación por t. Es decir,

$$\mathscr{L}[t\cdot f(t)]=-\frac{d}{ds}\left(\mathscr{L}[f(t)]\right)$$

en donde $f(t)=y''$. Se tiene

$$\mathscr{L}[t\cdot y'']=-\frac{d}{ds}\left(\mathscr{L}[y'']\right)=-\frac{d}{ds}\left(s^2F(s)-sy(0)-y'(0)\right)=-\left(2sF(s)+s^2F'(s)\right)$$

Por otra parte

$$\mathscr{L}[y'] = sF(s) - 0$$

La ecuación resulta en

$$-2sF(s) - s^2F'(s) - sF(s) = \frac{2}{s^3}$$

Al reducir y adecuar

$$s^2F'(s) + 3sF(s) = -\frac{2}{s^3}$$

dividiendo por s^2

$$F'(s) + \frac{3}{s}F(s) = -\frac{2}{s^5}$$

¡Qué linda y hermosa lineal
!, $p(s) = \frac{3}{s}$, $q(s) = -2s^{-5}$. Aplicando la fórmula maravillosa

$$F(s) = e^{-\int p(s)ds}\left[e^{\int p(s)ds} \cdot q(s)ds + C\right]$$

Reemplazando

$$F(s) = e^{-\int (3/s)ds}\left[\int e^{\int (3/s)ds} \cdot (-2s^{-5})ds + C\right]$$

al integrar

$$F(s) = e^{-3\ln s}\left[\int e^{3\ln s} \cdot (-2s^{-5})ds + C\right]$$

Esto equivale a

$$F(s) = s^{-3}\left[\int -s^{-2}ds + C\right]$$

integrando lo que falta

$$F(s) = s^{-3}\left[s^{-1} + C\right]$$

que se puede escribir

$$F(s) = s^{-4} + s^{-3}C$$

Aplicando la transformada inversa

$$y(t) = \frac{t^3}{6} + \frac{t^2}{2}C$$

La constante se calcula con la condición $y(1) = 0$. Así que

$$y(1) = \frac{1}{6} + \frac{C}{2} = 0 \Longrightarrow C = -\frac{1}{3}$$

La respuesta final es

$$y(t) = \frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{6}$$

Actividad 2 Hallar la solución del sistema

$$\vec{X}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\vec{X} + \begin{pmatrix} 0 \\ e^{3t}\cos 2t \end{pmatrix}$$

Solución

- Solución del sistema homogéneo

Valores propios

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & 2 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow (3-\lambda)\cdot(-\lambda)+2=0$$

Multiplicando

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Longrightarrow (\lambda-2)(\lambda-1)=0$$

Tenemos dos valores propios, reales y distinto.

vector propio de $\lambda = 1$

Se trabaja la matriz

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz reducida tiene rango 1, por tanto, tiene asociado solo un vector propio, que se obtiene de

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esto signfica que

$$-v_1 + 2v_2 = 0 \Longrightarrow v_1 = 2v_2$$

Con $v_2 = 1$ se tiene el vector propio

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Así, una primera solución tiene la forma

$$\vec{X}_1 = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t$$

vector propio de $\lambda = 2$

Se trabaja la matriz

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz reducida tiene rango 1, por tanto, tiene asociado solo un vector propio, que se obtiene de

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esto signfica que

$$-v_1 + v_2 = 0 \Longrightarrow v_1 = v_2$$

Con $v_1 = 1$ se tiene el vector propio

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Así, una segunda solución tiene la forma

$$\vec{X}_2 = C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

Por tanto la solución de la homogénea es

$$\vec{X}_h(t) = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

Matriz Fundamental

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} 2e^t & e^{2t} \\ e^t & e^{2t} \end{pmatrix}$$

La matriz fundamental inversa es

$$\phi^{-1}(t) = \frac{1}{e^{3t}} \begin{pmatrix} e^{2t} & -e^{2t} \\ -e^t & 2e^t \end{pmatrix}$$

El producto de esta inversa con la parte no homogénea es

$$\phi^{-1}(t) \cdot \vec{F}(t) = \frac{1}{e^{3t}} \begin{pmatrix} e^{2t} & -e^{2t} \\ -e^t & 2e^t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ e^{3t}\cos 2t \end{pmatrix} = \frac{1}{e^{3t}} \begin{pmatrix} e^{2t} & -e^{2t} \\ -e^t & 2e^t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \cos 2t \end{pmatrix} \cdot e^{3t}$$

Esto se reduce a

$$\phi^{-1}(t) \cdot \vec{F}(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & -e^{2t} \\ -e^t & 2e^t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \cos 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{2t}\cos 2t \\ 2e^t \cos 2t \end{pmatrix}$$

Esto se debe integrar

$$\int \begin{pmatrix} -e^{2t}\cos 2t \\ 2e^t \cos 2t \end{pmatrix} dt$$

Hay que hacer integración por partes

- $\int -e^{2t} \cos 2t dt$

En este caso

$$u = -e^{2t} \Longrightarrow du = -2e^{2t}$$

$$dv = \cos 2t dt \Longrightarrow v = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2t$$

Con esto

$$\int -e^{2t} \cos 2t dt = -\frac{1}{2} e^{2t} \operatorname{sen} 2t + \int e^{2t} \operatorname{sen} 2t$$

Se aplica de nuevo integración por parte

$$u = e^{2t} \Longrightarrow du = 2e^{2t}$$

$$dv = \operatorname{sen} 2t dt \Longrightarrow v = -\frac{1}{2} \cos 2t$$

Nos queda

$$\int -e^{2t} \cos 2t dt = -\frac{1}{2} e^{2t} \operatorname{sen} 2t + \left[-\frac{1}{2} e^{2t} \cos 2t + \int e^{2t} \cos 2t \, dt \right]$$

La integral del primer miembro es la misma que está en el segundo miembro. Se suman

$$-2\int e^{2t}\cos 2t dt = -\frac{1}{2}e^{2t}\operatorname{sen} 2t - \frac{1}{2}e^{2t}\cos 2t$$

Al dividir por -2 se encuentra que

$$\int e^{2t}\cos 2t dt = \frac{1}{4}e^{2t}\operatorname{sen} 2t + \frac{1}{4}e^{2t}\cos 2t = \frac{1}{4}e^{2t}(\operatorname{sen} 2t + \cos 2t)$$

- Cálculo de $\int 2e^{t}\cos 2t dt$

Se tiene que

$$u = 2e^{t} \Longrightarrow du = 2e^{t}$$
$$dv = \cos 2t dt \Longrightarrow v = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t$$

Con esto

$$\int 2e^{t}\cos 2t dt = e^{t}\operatorname{sen} 2t - \int e^{t}\operatorname{sen} 2t$$

Se aplica de nuevo integración por parte

$$u = e^{t} \Longrightarrow du = e^{t}$$
$$dv = \operatorname{sen} 2t dt \Longrightarrow v = -\frac{1}{2}\cos 2t$$

Nos queda

$$\int 2e^{t}\cos 2t dt = e^{t}\operatorname{sen} 2t - \left[-\frac{1}{2}e^{t}\cos 2t + \frac{1}{2}\int e^{t}\cos 2t\, dt\right]$$

La integral del primer miembro es la misma que está en el segundo miembro. Se suman

$$\frac{5}{2}\int e^{t}\cos 2t dt = e^{t}\operatorname{sen} 2t + \frac{1}{2}e^{t}\cos 2t$$

Al multiplicar por $\frac{2}{5}$ tenemos

$$\int e^{t}\cos 2t dt = \frac{2}{5}e^{t}\left[\operatorname{sen} 2t + \frac{1}{2}\cos 2t\right]$$

Con todo la anterior se tiene

$$\int \begin{pmatrix} -e^{2t}\cos 2t \\ 2e^{t}\cos 2t \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}e^{2t}(\operatorname{sen} 2t + \cos 2t) \\ \\ \frac{2}{5}e^{t}\left[\operatorname{sen} 2t + \frac{1}{2}\cos 2t\right] \end{pmatrix}$$

La solución particular es

$$\vec{X}_p = \phi(t)\cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{4}e^{2t}(\operatorname{sen} 2t + \cos 2t) \\ \\ \frac{2}{5}e^{t}\left[\operatorname{sen} 2t + \frac{1}{2}\cos 2t\right] \end{pmatrix}$$

Esto es

$$\vec{X}_p = \begin{pmatrix} 2e^t & e^{2t} \\ e^t & e^{2t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{4}e^{2t}(\operatorname{sen}2t + \cos 2t) \\ \\ \frac{2}{5}e^t\left[\operatorname{sen}2t + \frac{1}{2}\cos 2t\right] \end{pmatrix}$$

cuyo resultado es

$$\vec{X}_p = \begin{pmatrix} \frac{9}{10}\operatorname{sen}2t + \frac{7}{10}\cos 2t \\ \\ \frac{13}{20}\operatorname{sen}2t + \frac{9}{20}\cos 2t \end{pmatrix} e^{3t}$$

La solución general es la suma de la homogénea más la particular

$$\vec{X}(t) = \vec{X}_h(t) + \vec{X}_p(t)$$

Actividad 3 Hallar la solución del sistema

$$\vec{X}\,'(t) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -4 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{X}$$

Solución

Valores propios

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 0 & -4 \\ -1 & -1-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Al resolver

$$(-3-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -1-\lambda & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Resolviendo

$$(3+\lambda)(1-\lambda^2) + 0 - 4(1+\lambda) = 0 \Longrightarrow (\lambda+1)[(3+\lambda)(1-\lambda) - 4] = 0$$

Al desarrollar

$$(\lambda+1)[3 - 3\lambda - \lambda^2 + \lambda - 4] = 0 \Longrightarrow (\lambda+1)[-\lambda^2 - 2\lambda - 1] = 0 \Longrightarrow (\lambda+1)[\lambda^2 + 2\lambda + 1] = 0$$

De lo cual se tiene la ecuación

$$(\lambda+1)^3 = 0 \Longrightarrow \lambda = -1$$

Tenemos un valor propio de multiplicidad 3. Trabajemos la matriz asociada escalonando por filas

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esto signfica que

$$v_1 = 0, \quad v_3 = 0$$

Con $v_2 = 1$ se tiene el vector propio

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Así, una primera solución tiene la forma

$$\vec{X}_1 = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t}$$

segundo vector propio de $\lambda = -1$

Se debe hallar un vector $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ tal que

$$(A - \lambda I_n)\vec{w} = \vec{v}$$

Reemplazando se tiene

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sumando la tercera fila a la segunda

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se deduce que $w_3 = 1$. Reemplazando esto en la tercera fila $w_1 = -2$. Con $w_2 = 0$ se forma el vector propio

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La segunda solución tiene la forma

$$\vec{X}_2 = C_2 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} te^{-t} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} \right]$$

tercer vector propio de $\lambda = -1$

Se debe hallar un vector $\vec{z} = (z_1, z_2, z_3)$ tal que

$$(A - \lambda I_n)\vec{z} = \vec{w}$$

Reemplazando se tiene

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se multiplicó la tercera fila por dos y se sumó a la primera. Ahora se suma la tercera fila a la segunda para tener

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es claro que $z_3 = 1$. Reemplazando esto en la tercera fila $z_1 = -2$. Con $z_2 = 1$ se forma el vector propio

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La tercera solución tiene la forma

$$\vec{X}_3 = C_3 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{t^2}{2} e^{-t} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t e^{-t} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} \right]$$

Con todo esto, la solución general tiene la forma

$$\vec{X}(t) = \vec{X}_1 + \vec{X}_2 + \vec{X}_3$$

Universidad de la Frontera
Facultad de Ingeniería y Ciencias
Departamento de Matemática y Estadística

Pauta - Prueba 2 EDO (IME188)
Carrera: Ingenierías Civiles - segundo semestre 2023

Pregunta	1	2	3	4	**puntos**
Puntaje	15	15	15	15	60

Actividad 1 Determine solución general de la ecuación $y''' - 2y'' + y' = 1 + xe^x$

Solución

En operadores la ecuación queda

$$(D^3 - 2D^2 + D)[y] = 1 + xe^x$$

al factorizar

$$D(D^2 - 2D + 1)[y] = 1 + xe^x \Longrightarrow D(D-1)^2[y] = 1 + xe^x$$

La solución de la ecuación homogénea es

$$y_h = C_1 + C_2 e^x + C_3 x e^x$$

El aniquilador de $1 + xe^x$ es $D(D-1)^2$. Al aplicarlo en la ecuación original (no homogénea) se halla

$$D^2(D-1)^4[y] = 0$$

En esta ecuación homogénea la solución es

$$y = C_1 + C_2e^x + C_3xe^x + C_4x^2e^x + C_5x^3e^x + C_6x$$

se observa que la candidata a solución particular es

$$y_p = C_4x^2e^x + C_5x^3e^x + C_6x$$

Ahora se resuelve

$$D(D-1)^2[y_p] = 1 + xe^x$$

Se tiene

$$\begin{aligned} D(D-1)(D-1)[C_4x^2e^x + C_5x^3e^x + C_6x] &= D(D-1)[2xC_4e^x + C_4x^2e^x + 3x^2C_5e^x + C_5x^3e^x - \\ &\quad C_4x^2e^x - C_5x^3e^x + C_6 - C_6x] \\ &= D(D-1)[2xC_4e^x + 3x^2C_5e^x + C_6 - C_6x] \\ &= D[2C_4e^x + 2xC_4e^x + 6xC_5e^x + 3x^2C_5e^x - 2xC_4e^x - \\ &\quad 3x^2C_5e^x - C_6 - C_6 + C_6x] \\ &= D[2C_4e^x + 6xC_5e^x - 2C_6 + C_6x] \\ &= 2C_4e^x + 6C_5e^x + 6xC_5e^x + C_6 \end{aligned}$$

Se obtiene

$$2C_4e^x + 6C_5e^x + 6xC_5e^x + C_6 = 1 + xe^x \Longrightarrow \begin{cases} C_6 & = 1 \\ 2C_4 + 12C_5 & = 0 \\ 6C_5 & = 1 \end{cases}$$

de lo cual

$$C_6 = 1, \quad C_5 = \frac{1}{6}, \qquad C_4 = -\frac{1}{2}$$

Así, la solución particular es

$$y_p = -\frac{1}{2}x^2e^x + \frac{1}{6}x^3e^x + x$$

La solución general es

$$y = y_h + y_p$$

Actividad 2 Resolver $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{e^{-2x}}{x}$

Solución

La homogénea en operadores es

$$(D^2 + 4D + 4)[y] = 0 \Longrightarrow (D+2)^2[y] = 0$$

La solución es

$$y_h = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x}$$

Como no tenemos aniquilador para el lado derecho de la no homogénea, se usa variación de parámetros. Se supone solución particular de la forma

$$y_p = C_1(x)e^{-2x} + C_2(x)xe^{-2x}$$

se resuelve el sistema

$$\begin{cases} C_1{}'(x)e^{-2x} + C_2{}'(x)xe^{-2x} = 0 \\ -2C_1{}'(x)e^{-2x} + C_2{}'(x)[e^{-2x} - 2xe^{-2x}] = \dfrac{e^{-2x}}{x} \end{cases}$$

Al multiplicar la primera ecuación por 2 y sumar a la segunda ecuación se obtiene

$$C_2{}'(x)e^{-2x} = \frac{e^{-2x}}{x}$$

de lo cual

$$C_2{}'(x) = \frac{1}{x} \Longrightarrow C_2(x) = \ln x + C_2$$

A continuación se reemplaza el $C_2{}'(x)$ en la primera ecuación

$$C_1{}'(x)e^{-2x} + e^{-2x} = 0 \Longrightarrow C_1{}'(x) - 1 = 0$$

de lo cual

$$C_1(x) = -x + C_1$$

Con esto, la solución general es

$$y(x) = (-x + C_1)e^{-2x} + (\ln x + C_2)x\,e^{-2x}$$

al desarrollar

$$y(x) = \overbrace{C_1 e^{-2x} + C_2 x\,e^{-2x}}^{y_h} + \overbrace{-xe^{-2x} + e^{-2x}x\ln x}^{y_p}$$

Actividad 3 Determine solución general de la ecuación diferencial $xy'' + y' = 16x^3$

Solución

Si se multiplica por x la ecuación es de Euler-Cauhy

$$x^2y'' + xy' = 16x^4$$

Se usa $x = e^t$ para tener

$$(D^2 - D + D)[y(t)] = 16e^{4t}$$

Se busca la solución de la homogénea

$$(D^2)[y(t)] = 0 \Longrightarrow y_h = C_1 + C_2t$$

Para hallar la particular usamos aniquilador. El aniquilador de $16e^{4t}$ es $D - 4$. Se multiplica la ecuación original por este aniquilador. Se tiene

$$D^2(D-4)[y(t)] = 0$$

cuya solución es

$$y = C_1 + C_2 t + C_3 e^{4t}$$

Así, la candidata a y_p es

$$y_p = C_3 e^{4t}$$

Ahora se aplica el operador D^2 en la y_p. Se tiene:

$$D^2[y_p] = 16e^{4t}$$

al desarrollar

$$D^2[C_3 e^{4t}] = 16e^{4t} \Longrightarrow D[4C_3 e^{4t}] = 16e^{4t}$$

Aplicando, de nuevo, el operador D

$$D[4C_3 e^{4t}] = 16e^{4t} \Longrightarrow 16C_3 e^{4t} = 16e^{4t} \Longrightarrow C_3 = 1$$

Por tanto, la solución particular es

$$y_p(t) = e^{4t}$$

Volviendo a la variable x, la particular es

$$y_p(x) = x^4$$

La solución general es

$$y(x) = C_1 + C_2 \ln x + x^4$$

Actividad 4 Aplicando transformada de Laplace resuelva el problema de valor inicial

$$y'' + 6y' + 13y = 10e^{-2t}, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -13$$

Solución

Se aplica transformada a toda la ecuación

$$\mathscr{L}[y''] + 6\mathscr{L}[y'] + 13\mathscr{L}[y] = 10\mathscr{L}[e^{-2t}]$$

se aplica la transformada de la derivada y las condiciones iniciales

$$(s^2F(s) - 3s + 13) + 6(sF(s) - 3) + 13F(s) = \frac{10}{s+2}$$

al reducir

$$(s^2 + 6s + 13)F(s) = 3s + 5 + \frac{10}{s+2}$$

de lo cual

$$F(s) = \frac{3s(s+2) + 5(s+2) + 10}{(s+2)(s^2+6s+13)} = \frac{3s^2 + 11s + 20}{(s+2)(s^2+6s+13)}$$

Por fracciones parciales

$$F(s) = \frac{A}{s+2} + \frac{Bs+C}{s^2+6s+13} = \frac{A}{s+2} + \frac{Bs}{(s+3)^2+4} + \frac{C}{(s+3)^2+4}$$

Veamos el cálculo de la inversa de cada fracción parcial

- $\dfrac{A}{s+2} \Longrightarrow \mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{A}{s+2}\right] = Ae^{-2t}$
- $\dfrac{Bs}{(s+3)^2+4} = \dfrac{B(s+3)}{(s+3)^2+4} - \dfrac{3B}{(s+3)^2+4} \Longrightarrow \mathscr{L}^{-1}[\,] = B\cos 2t\cdot e^{-3t} - \dfrac{3B}{2}\operatorname{sen} 2t\cdot e^{-3t}$
- $\dfrac{B(s+3)}{(s+3)^2+4} \Longrightarrow \mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{B(s+3)}{(s+3)^2+4}\right] = B\cos 2t\cdot e^{-3t}$

Sin determinar las constantes de la fracción parcial, la solución es

$$y(t) = Ae^{-2t} + B\cos 2t\cdot e^{-3t} - \frac{3B}{2}\operatorname{sen} 2t\cdot e^{-3t} + B\cos 2t\cdot e^{-3t}$$

Al reducir

$$y(t) = Ae^{-2t} + 2B\cos 2t\cdot e^{-3t} - \frac{3B}{2}\operatorname{sen} 2t\cdot e^{-3t}$$

Universidad de la Frontera
Facultad de Ingeniería y Ciencias
Departamento de Matemática y Estadística

Pauta - Prueba 3 EDO (IME188)

Carrera: Ingenierías Civiles - segundo semestre 2022

Pregunta	1	2	3		**puntos**
Puntaje	20	(15+5)	(9+9+2)		60

Actividad 1 Utilizando transformada de Laplace, resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x' + x + y'' &= e^t \\ 2x + y' &= 0 \end{cases} \qquad x(0) = 1, y(0) = 2, y'(0) = -2$$

Solución

Se aplica la transformada a toda la ecuación

$$\begin{cases} 2\mathscr{L}[x'] + \mathscr{L}[x] + \mathscr{L}[y''] &= \mathscr{L}[e^t] \\ 2\mathscr{L}[x] + \mathscr{L}[y'] &= 0 \end{cases}$$

Aplicando las condiciones iniciales, y considerando $\mathscr{L}[x] = F(s)$, $\mathscr{L}[y] = G(s)$, se tiene

$$\begin{cases} 2sF(s) - 2 + F(s) + s^2G(s) - 2s + 2 &= \dfrac{1}{s-1} \\ 2F(s) + sG(s) &= 2 \end{cases}$$

Al reducir

$$\begin{cases} (2s+1)F(s) + s^2G(s) &= 2s + \dfrac{1}{s-1} \\ 2F(s) + sG(s) &= 2 \end{cases}$$

Multiplicando la segunda por s y sumando a la primera se tiene

$$F(s) = \frac{1}{s-1} \Longrightarrow x(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right]$$

de lo cual

$$x(t) = e^t$$

Con este dato se puede ir a la segunda ecuación original $2x + y' = 0$, reemplazar y tener

$$y' = -2x \Longrightarrow y' = -2e^t \Longrightarrow y = -2e^t + C$$

Para hallar el valor de C se usa la condición $y(0) = 2$ para tener

$$y(0) = 2 \Longrightarrow 2 = -2 + C \Longrightarrow C = 4$$

Con esto la solución es

$$x(t) = e^t, \qquad y(t) = 4 - 2e^t$$

Actividad 2 Dado el sistema de ecuaciones diferenciales lineales:

$$\vec{X}\,'(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{X}$$

1. Encuentre los valores y vectores propios asociados a la matriz del sistema.
2. Escriba la solución del sistema en términos de la matriz fundamental.

Solución

Los valores propios se encuentran al resolver el siguiente determinante

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow (1-\lambda)^2(2-\lambda) = 0$$

Los valores propios son

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 1$$

Tenemos un valor propio simple y otro de multiplicidad 2.

Vector propio de $\lambda = 2$

Se hace reducción por filas a la matriz del sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Se debe hallar la solución de la ecuación

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

se observa que deben ser $v_2 = v_3 = 0$, y que con $v_1 = 1$ es suficiente. Por tanto el vector propio asociado y la solución son;

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{X}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t}$$

Vector propio asociado a $\lambda = 1$

Se considera la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se observa que deben ser $v_1 + v_2 = 0$, y que $v_3 = 0$. Con $v_2 = -1$, es $v_1 = 1$. Así, el vector propio, y la solución son:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{X}_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{t}$$

Vector propio de $\lambda_3 = 1$

Por tener multiplicidad 2, se debe resolver la ecuación

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Observando la ecuación, debe ser $w_3 = -\frac{1}{3}$ y $w_1 + w_2 = 1$. Si $w_1 = 0$, entonces $w_2 = 1$. El vector propio asociado es

$$\vec{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

La segunda solución (sería tercera) tiene la forma

$$\vec{X}_3(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} t\, e^{t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} e^{t}$$

Con esto, la solución general es de la forma

$$\vec{X}(t) = C_1 \vec{X}_1(t) + C_2 \vec{X}_2(t) + C_3 \vec{X}_3(t)$$

La matriz fundamental la forman las soluciones como vector columna

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} 2 & -5 & \\ 1 & -2e^{t} & (1-t)e^{t} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}e^{t} \end{pmatrix}$$

Actividad 3 Considere el siguiente sistema:

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \vec{X} + \begin{pmatrix} 4t \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Usando el método de valores y vectores propios encuentre la solución del sistema homogéne.
2. Usando el método de variación de parámetros determine la solución particular del sistema no homogéneo.
3. Escriba la solución general del sistema.

Solución

- **Valores propios**

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -5 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = \pm i$$

A partir de esto, como el imaginario es de la forma $a+ib$, es $a=0$, $b=1$. Con el valor propio $\lambda = i$ se tiene:

$$\begin{pmatrix} 2-i & -5 \\ 1 & -2-i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2-i & -5 \\ 2-i & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2-i & -5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A partir de esto

$$(2-i)v_1 = 5v_2 \Longrightarrow v_1 = 5,\ v_2 = 2-i$$

de manera que el vector propio es

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Otro vector que sirve es

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2+i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{v}_1 + i\vec{v}_2$$

Así, las soluciones son

$$\vec{X}_1(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cos t - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \operatorname{sen} t = \begin{pmatrix} 2\cos t - \operatorname{sen} t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

$$\vec{X}_2(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \operatorname{sen} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos t = \begin{pmatrix} 2\operatorname{sen} t + \cos t \\ \operatorname{sen} t \end{pmatrix}$$

Con esto la solución de la homogénea es

$$\vec{X}(t) = C_1\vec{X}_1(t) + C_2\vec{X}_2(t)$$

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cos t - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \operatorname{sen} t$$

Solución particular

La matriz fundamental es

$$\phi(t)=\begin{pmatrix}2\cos t-\operatorname{sen}t & | & 2\operatorname{sen}t+\cos t\\ \cos t & | & \operatorname{sen}t\end{pmatrix}$$

La matriz fundamental inversa

$$\phi^{-1}(t)=-\begin{pmatrix}\operatorname{sen}t & | & -2\operatorname{sen}t-\cos t\\ -\cos t & | & 2\cos t-\operatorname{sen}t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\operatorname{sen}t & | & 2\operatorname{sen}t+\cos t\\ \cos t & | & -2\cos t+\operatorname{sen}t\end{pmatrix}$$

A continuación se forma el producto

$$\phi^{-1}(t)\cdot\vec{F}(t)=\begin{pmatrix}-\operatorname{sen}t & | & 2\operatorname{sen}t+\cos t\\ \cos t & | & -2\cos t+\operatorname{sen}t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4t\\ 1\end{pmatrix}$$

cuyo resultado da

$$\phi^{-1}(t)\cdot\vec{F}(t)=\begin{pmatrix}-4t\operatorname{sen}t+2\operatorname{sen}t+\cos t\\ 4t\cos t-2\cos t+\operatorname{sen}t\end{pmatrix}$$

Esto se debe integrar

$$\int\phi^{-1}(t)\cdot\vec{F}(t)dt=\int\begin{pmatrix}-4t\operatorname{sen}t+2\operatorname{sen}t+\cos t\\ 4t\cos t-2\cos t+\operatorname{sen}t\end{pmatrix}dt$$

La primera fila necesita integración por partes

$$\begin{cases}u=-4t\Longrightarrow du=-4dt\\ dv=\operatorname{sen}t\,dt\Longrightarrow v=-\cos t\end{cases}\quad\Longrightarrow uv=4t\cos t-4\int\cos t\,dt$$

En la segunda fila hay una integración por partes

$$\begin{cases}u=4t\Longrightarrow du=4dt\\ dv=\cos t\,dt\Longrightarrow v=\operatorname{sen}t\end{cases}\quad\Longrightarrow uv=4t\operatorname{sen}t-4\int\operatorname{sen}t\,dt$$

El resto de las integrales es sencillo. La integral resulta ser

$$\begin{pmatrix}4t\cos t-4\operatorname{sen}t-2\cos t+\operatorname{sen}t\\ 4t\operatorname{sen}t+\cos t-2\operatorname{sen}t-\cos t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4t\cos t-3\operatorname{sen}t-2\cos t\\ 4t\operatorname{sen}t-2\operatorname{sen}t\end{pmatrix}$$

Ahora estamos en condiciones de hallar la solución particular

$$\vec{X}_p(t)=\begin{pmatrix}2\cos t-\operatorname{sen}t & | & 2\operatorname{sen}t+\cos t\\ \cos t & | & \operatorname{sen}t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4t\cos t-3\operatorname{sen}t-2\cos t\\ 4t\operatorname{sen}t-2\operatorname{sen}t\end{pmatrix}$$

Multiplicando ambas matrices

$$\vec{X}_p(t)=\begin{pmatrix}2\cos t-\operatorname{sen}t & | & 2\operatorname{sen}t+\cos t\\ \cos t & | & \operatorname{sen}t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4t\cos t-3\operatorname{sen}t-2\cos t\\ 4t\operatorname{sen}t-2\operatorname{sen}t\end{pmatrix}$$

El resultado, después de un arduo trabajo es

$$\vec{X}_p(t) = \begin{pmatrix} 8t - 6\,\text{sen}\,t\,\cos t - 4 + 3\,\text{sen}^2 t \\ 4t - 3\,\text{sen}\,t\cos t - 2 \end{pmatrix}$$

La solución del sistema es

$$\vec{X}(t) = C_1\vec{X}_h(t) + C_2\vec{X}_p(t)$$

Universidad de la Frontera
Facultad de Ingeniería y Ciencias
Departamento de Matemática y Estadística

Pauta - Taller 3 EDO (IME188)
Carrera: Ingenierías Civiles - segundo semestre 2022

Pregunta	1	2	3	4	**puntos**
Puntaje	15	15	15	15	60

Actividad 1 Aplicando transformada de Laplace encuentre la solución de $y'' + ty' - y = 0$ tal que $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Solución

La ecuación es de coeficientes variables. Se aplica la transformada a toda la ecuación

$$\mathscr{L}[y''] + \mathscr{L}[ty'] - \mathscr{L}[y] = 0$$

Usando propiedad

$$\mathscr{L}[t \cdot f(t)] = -\frac{d}{ds}\left(\mathscr{L}[f(t)]\right)$$

se tiene que

$$\mathscr{L}[t \cdot f(t)] = -\frac{d}{ds}\left(\mathscr{L}[f(t)]\right) = -\frac{d}{ds}\left(\mathscr{L}[y']\right) = -\frac{d}{ds}\left(sF(s) - 0\right) = -F(s) - sF'(s)$$

Así, la ecuación original

$$\mathscr{L}[y''] + \mathscr{L}[ty'] - \mathscr{L}[y] = 0$$

se reduce a

$$s^2F(s) - 1 - F(s) - sF'(s) - F(s) = 0$$

arreglando

$$sF'(s) + (s^2 - 2)F(s) = 1$$

al dividir por s se obtiene

$$F'(s) + (s - \frac{2}{s})F(s) = \frac{1}{s}$$

Una linda y hermosa ecuación lineal

$$y' + p(s)y = q(s), \quad p(s) = s - \frac{2}{s}, \quad q(s) = \frac{1}{s}$$

cuya solueción es

$$F(s)=e^{-\int p(s)ds}\left[e^{\int p(s)ds}\cdot q(s)ds+C\right]$$

en particular

$$\int p(s)ds=\int\left(s-\frac{2}{s}\right)ds=\frac{s^2}{2}-2\ln s$$

Así, la integral fuera del corhete es

$$e^{-\int p(s)ds}=e^{\frac{s^2}{2}-2\ln s}=e^{\frac{s^2}{2}}\cdot e^{-2\ln s}=e^{\frac{s^2}{2}}\cdot\frac{1}{s^2}$$

Actividad 2 Aplicando transformada de Laplace determine la solución de la ecuación

$$y''+4y=\begin{cases}0 & \text{si}\quad 0\leq t\leq 3\\ t & \text{si}\quad t>3\end{cases},\quad \text{tal que } y(0)=y'(0)=0$$

Solución

El segundo teorema de traslación establece, bajo las hipótesis apropiadas, que

$$\mathscr{L}[f(t-a)\mu(t-a)]=e^{-as}\mathscr{L}[f(t)]$$

de lo cual

$$\mathscr{L}^{-1}\left[e^{-as}\mathscr{L}[f(t)]\right]=f(t-a)\mu(t-a)$$

Usamos la ecuación escalón para escribir la expresión dada en llaves

$$y''+4y=0+t\mu(t-3)$$

Para aplicar la propiedad de desplazamiento en el tiempo se escribe

$$y''+4y=(t-3)\mu(t-3)+3\mu(t-3)$$

Ahora se aplica transformada a toda la ecuación

$$\mathscr{L}[y'']+4\mathscr{L}[y]=\mathscr{L}[(t-3)\mu(t-3)]+3\mathscr{L}[\mu(t-3)]$$

Usando la transformada de derivadas y las condiciones iniciales

$$s^2F(s)+4F(s)=\frac{1}{s^2}e^{-3s}+\frac{1}{s}e^{-3s}$$

Lo cual es equivalente a

$$(s^2+4)F(s)=\frac{1}{s^2}e^{-3s}+\frac{1}{s}e^{-3s}$$

despejando

$$F(s)=\left(\frac{1}{s^2(s^2+4)}+\frac{s}{s^2(s^2+4)}\right)e^{-3s}=\left(\frac{s+1}{s^2(s^2+4)}\right)e^{-3s}$$

Las fracciones parciales permiten separar la fracción y calcular las transformadas inversas

$$F(s)=\left(\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{Cs+D}{s^2+4}\right)e^{-3s}$$

Sin calcular las constantes las soluciones son:

- $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{A}{s}\right]=1 \Longrightarrow \mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{A}{s}\cdot e^{-3s}\right]=A\mu(t-3)$
- $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{B}{s^2}\right]=t \Longrightarrow \mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{B}{s^2}\cdot e^{-3s}\right]=B(t-3)\mu(t-3)$
- $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{Cs}{s^2+4}\right]=C\cos 2t \Longrightarrow \mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{Cs}{s^2+4}\cdot e^{-3s}\right]=C\cos 2(t-3)\cdot\mu(t-3)$
- $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{D}{s^2+4}\right]=\dfrac{C}{2}\operatorname{sen} 2t \Longrightarrow \mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{D}{s^2+4}\cdot e^{-3s}\right]=\dfrac{D}{2}\operatorname{sen} 2(t-3)\cdot\mu(t-3)$

La solución final de la ecuación es

$$y(t)=\left(A+B(t-3)+C\cos 2(t-3)+\frac{D}{2}\operatorname{sen} 2(t-3)\right)\cdot\mu(t-3)$$

Actividad 3 Aplicando transformada de Laplace resuelva el problema de valor inicial

$$y''+6y'+13y=10e^{-2t}, \quad y(0)=3, \quad y'(0)=-13$$

Solución

Se aplica transformada a toda la ecuación

$$\mathscr{L}[y'']+6\mathscr{L}[y']+13\mathscr{L}[y]=10\mathscr{L}[e^{-2t}]$$

se aplica la transformada de la derivada y las condiciones iniciales

$$(s^2F(s)-3s+13)+6(sF(s)-3)+13F(s)=\frac{10}{s+2}$$

al reducir

$$(s^2+6s+13)F(s)=3s+5+\frac{10}{s+2}$$

de lo cual

$$F(s)=\frac{3s(s+2)+5(s+2)+10}{(s+2)(s^2+6s+13)}=\frac{3s^2+11s+20}{(s+2)(s^2+6s+13)}$$

Por fracciones parciales

$$F(s)=\frac{A}{s+2}+\frac{Bs+C}{s^2+6s+13}=\frac{A}{s+2}+\frac{Bs}{(s+3)^2+4}+\frac{C}{(s+3)^2+4}$$

Veamos el cálculo de la inversa de cada fracción parcial

- $\dfrac{A}{s+2} \Longrightarrow \mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{A}{s+2}\right]=Ae^{-2t}$
- $\dfrac{Bs}{(s+3)^2+4}=\dfrac{B(s+3)}{(s+3)^2+4}-\dfrac{3B}{(s+3)^2+4} \Longrightarrow \mathscr{L}^{-1}[\,]=B\cos 2t\cdot e^{-3t}-\dfrac{3B}{2}\operatorname{sen} 2t\cdot e^{-3t}$

- $\dfrac{B(s+3)}{(s+3)^2+4} \Longrightarrow \mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{B(s+3)}{(s+3)^2+4}\right] = B\cos 2t \cdot e^{-3t}$

Sin determinar las constantes de la fracción parcial, la solución es

$$y(t) = Ae^{-2t} + B\cos 2t \cdot e^{-3t} - \frac{3B}{2}\operatorname{sen} 2t \cdot e^{-3t} + B\cos 2t \cdot e^{-3t}$$

Al reducir

$$y(t) = Ae^{-2t} + 2B\cos 2t \cdot e^{-3t} - \frac{3B}{2}\operatorname{sen} 2t \cdot e^{-3t}$$

Universidad de la Frontera
Facultad de Ingeniería y Ciencias
Departamento de Matemática y Est.

Pauta Taller 2 - EDO - Civiles
segundo semestre 2022

Escriba lo más claro posible sus respuestas y sin borrones. Favor apagar celular y dejarlo lejos de su alcance. ¡Por favor, no insista!
NO HAY CONSULTAS

Pregunta	1	2	3	4	**puntos**
Puntaje	15	15	10	20	60

Actividad 1 Inicialmente se tiene un estanque con 250 litros de agua pura, al cual se comienza a verter una solución salina a través de un ducto alimentador a razón de 4 litros por minuto, con una concentración de 0,125 kilogramos por litro. Paralelamente una bomba extractora saca del estanque la solución bien mezclada a razón de 2 litros por minuto. Sabiendo que la capacidad máxima del estanque es de 600 litros, determine la cantidad de sal y la concentración en el estanque 10 minutos antes del rebalse del mismo.

Respuesta

La tabla con los datos del problema es

C_1	v_1	v_2	C_2	V_0	$V(t)$	$x(0)$
0,125	4	2	$\dfrac{x(t)}{V(t)}$	250	$V(t) = 250 + 2t$	0

La ecuación diferencial que modela es

$$\frac{dx}{dt} = c_1 \cdot v_1 - c_2 \cdot v_2 = \frac{1}{2} - \frac{x}{250+2t} \cdot 2$$

Se escribe como lineal para hallar su solución

$$\frac{dx}{dt} + \frac{x}{125+t} = \frac{1}{2}$$

Se tiene
$$x(t) = e^{-\int \frac{dt}{125+t}} \left[\int e^{\int \frac{dt}{125+t}} \cdot \frac{1}{2}\, dt + C \right]$$
Al calcular las integrales en las exponenciales
$$x(t) = (125+t)^{-1} \left[\int (125+t) \cdot \frac{1}{2}\, dt + C \right]$$
Al calcular la integral
$$x(t) = (125+t)^{-1} \left[\frac{1}{4} \cdot (125+t)^2 + C \right]$$
Utilizando que $x(0) = 0$ se calcula la cosntante C
$$0 = (125)^{-1} \left[\frac{1}{4} \cdot (125)^2 + C \right] \Longrightarrow C = -\frac{125^2}{4} = -\frac{5^6}{4}$$
Con esto, la cantidad de soluto en el estanque en todo tiempo t es
$$x(t) = (125+t)^{-1} \left[\frac{1}{4} \cdot (125+t)^2 - \frac{5^6}{4} \right]$$
Por otra parte, el tiempo de rebalse del estanque se encuentra al resolver
$$V(t) = V_0 + 2t = 600 \Longrightarrow 250 + 2t = 600 \Longrightarrow t = 175\,\text{min}$$
Se pide 10 minutos antes del rebalse, por tanto, en $t = 165$. Se tiene
$$x(165) = 59\,\text{kg}$$
Para la concentración se tiene:
$$C(165) = \frac{x(165)}{V(165)} = \frac{59}{580} \sim 0,1$$

Actividad 2 Un termómetro se lleva desde el interior de una habitación aislada hacia el exterior, donde la temperatura es de 5°. Luego de un minuto, el termómetro marca 15°, y luego de 5 minutos marca 10°. Determine la temperatura que había al interior de la habitación.

Respuesta

De la lectura del problema se deducen los siguientes datos:

- $T(0) =$ temperatura inicial del termómetro o de la habitación
- $T_A = 5$ temperatura del medio
- $T(1) = 15$
- $T(5) = 10$

Establecemos la integral que modela el problema
$$\int \frac{dT}{T - T_A} = -k \int dt$$

poniendo los datos se tiene

$$\int_{15}^{10} \frac{dT}{T-5} = -k \int_{1}^{5} \Longrightarrow \ln(5) - \ln(10)d = -4k$$

se obtiene

$$k = \frac{1}{4} \ln 2$$

Considerando las otras hipótesis se conforma la siguiente integral

$$\int_{T}^{15} \frac{dT}{T-5} = -\frac{1}{4} \ln(2) \int_{0}^{1} dt \Longrightarrow \ln \frac{T-5}{10} = \ln 2^{1/4}$$

despejando el T

$$T - 5 = 10 \cdot 2^{1/4} \Longrightarrow T = 5 + 10 \cdot 2^{1/4} \sim 16,89$$

Actividad 3 Determine la solución general de la ecuación diferencial homogénea

$$y''' + 2y'' + 2y' = 0$$

Respuesta

Al escribirla en operadores

$$(D^3 + 2D^2 + 2D)[y] = 0 \Longrightarrow D(D^2 + 2D + 2)[y] = 0$$

La cuadrática tiene raíces complejas. Si se utiliza la expresión

$$D^2 - 2aD + a^2 + b^2$$

se halla que

$$-2a = 2 \Longrightarrow a = -1, \qquad b = 1$$

de modo que en el espacio solución de

$$D(D^2 + 2D + 2)[y] = 0$$

se encuentran: C_1 para D y $C_2 e^{-x} \operatorname{sen} x$ y $C_3 e^{-x} \cos x$ para el operador cuadrático irreductible. En consecuencia, la solución general es

$$y(x) = C_1 + C_2 e^{-x} \operatorname{sen} x + C_3 e^{-x} \cos x$$

Actividad 4 Determine la solución general de la ecuación diferencial no homogénea

$$y'' - 9y = 9x e^{-2x}$$

Respuesta

La ecuación en operadores tiene la forma

$$(D^2 - 9)[y] = 9xe^{-2x} \Longrightarrow (D-3)(D+3)[y] = 9xe^{-2x}$$

La solución de la homogénea es

$$y_h = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}$$

Por otra parte, el aniquilador de $9xe^{-2x}$ es

$$(D+2)^2$$

al aplicar este operador anulador en la ecuación no homogénea (original), ésta se transforma en una homogénea

$$(D+2)^2(D^2-9)[y]=0$$

con solución

$$y=\overbrace{C_1e^{3x}+C_2e^{-3x}}^{y_h}+\overbrace{C_3e^{-2x}+C_4xe^{-2x}}^{y_p}$$

Esta candidata y_p se trabaja en la ecuación original

$$(D^2-9)[y_p]=9xe^{-2x}$$

se tiene

$$DD[C_3e^{-2x}+C_4xe^{-2x}]-9(C_3e^{-2x}+C_4xe^{-2x})=9xe^{-2x}$$

que equivale a

$$D[-2C_3e^{-2x}+C_4e^{-2x}-2C_4xe^{-2x}]-9(C_3e^{-2x}+C_4xe^{-2x})=9xe^{-2x}$$

Derivando nuevamente

$$4C_3e^{-2x}-2C_4e^{-2x}-2C_4e^{-2x}+4C_4xe^{-2x}-9C_3e^{-2x}-9C_4xe^{-2x})=9xe^{-2x}$$

reuniendo términos semejantes

$$-5C_3e^{-2x}-4C_4e^{-2x}-5C_4xe^{-2x})=9xe^{-2x}$$

Para determinar las constantes se forma un sistema

$$\begin{aligned} -5C_3-4C_4&=0\\ -5C_4&=9 \end{aligned}$$

Los valores son

$$C_4=-\frac{9}{5}, \qquad C_3=\frac{36}{25}$$

Con esto, la solución particular es

$$y_p=\frac{36}{25}e^{-2x}-\frac{9}{5}xe^{-2x}$$

Claramente, la solución general es

$$y(x)=y_h+y_p$$

Universidad de la Frontera
Facultad de Ingeniería y Ciencias
Departamento de Matemática y Est.

Pauta - Taller 3 - EDO - Ingenierías

Primer semestre 2023

Escriba lo más claro posible sus respuestas y sin borrones. Favor apagar celular y dejarlo lejos de su alcance. ¡Por favor, no insista!

NO HAY CONSULTAS

Observación: Use el reverso de las hojas para sus cálculos

Pregunta	1	2	3	**Total**
Puntaje	18	22	20	60 puntos

Actividad 1 Considerar el sistema

$$\begin{cases} x' &= -4x + y + z \\ y' &= x + 5y - z \\ z' &= y - 3z \end{cases}$$

1. **(1 pt)** Escriba el sistema en forma matricial

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

2. **(2 + 2 pts)** Si un valor propio de A es $\lambda_1 = -3$, anote los valores propios restantes

$$\lambda_2 = -4, \quad \lambda_3 = 5$$

3. **(4+4+4 pts)** Escriba los vectores propios asociados a cada valor propio.

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. **(1 pt)** Anote la matriz fundamental del sistema

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 10e^{-4t} & e^{5t} & e^{-3t} \\ -e^{-4t} & 8e^{5t} & 0 \\ e^{-4t} & e^{5t} & e^{-3t} \end{pmatrix}$$

Actividad 2 Considerar el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x' &= -5x + y + 6e^{2t} \\ y' &= 4x - 2y - e^{2t} \end{cases}$$

1. **(1 pt)** Escriba el sistema en forma matricial

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6e^{2t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix}$$

2. **(1 pt)** Escriba el sistema homogéneo a resolver

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

3. **(2 + 2 pt)** Anote los valores propios del sistema homogéneo.

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -6$$

4. **(3+3 pt)** Escriba los vectores propios asociados

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

5. **(1 pt)** Anote la matriz fundamental

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & -6e^{-6t} \\ 4e^{-4t} & e^{-t} \end{pmatrix}$$

6. **(2 pt)** Escriba la matriz inversa de la fundamental

$$\Phi^{-1}(t) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} e^{t} & e^{t} \\ -4e^{6t} & e^{6t} \end{pmatrix}$$

7. **(2 pt)** Anote el producto $\Phi(t)^{-1} \cdot \vec{F}$

$$\Phi^{-1}(t) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} e^{t} & e^{t} \\ -4e^{6t} & e^{6t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6e^{2t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ -5e^{8t} \end{pmatrix}$$

8. **(3 pt)** Escriba el valor de $\int \Phi(t)^{-1} \cdot \vec{F}\, dt$.

$$\int \Phi(t)^{-1} \cdot \vec{F}\, dt = \begin{pmatrix} \int e^{3t} dt \\ \int -5e^{8t} dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} e^{3t} \\ -\frac{5}{8} e^{8t} \end{pmatrix}$$

9. **(2 pt)** Anota la solución particular.

$$\vec{X}_p = \Phi(t)\int \Phi(t)^{-1}\cdot \vec{F}\,dt = \begin{pmatrix} e^{-t} & -6e^{-6t} \\ 4e^{-4t} & e^{-t} \end{pmatrix}\cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3}e^{3t} \\ -\frac{5}{8}e^{8t} \end{pmatrix} = \frac{e^{2t}}{24}\begin{pmatrix} 23 \\ 17 \end{pmatrix}$$

Actividad 3 Considerar el sistema

$$\begin{cases} 2x'+y'-y &= t \\ x'+y' &= t^2 \end{cases}, \qquad x(0)=1,\ y(0)=0$$

y las notaciones; $F(s)=\mathscr{L}[x]$ y $G(s)=\mathscr{L}[y]$ o $X(s)=\mathscr{L}[x]$ y $Y(s)=\mathscr{L}[y]$. (según se le acomode más) Si aplica fracciones parciales debe calcular las constante

1. **(1 pt)** Aplique transformada de Laplace al sistema

$$\begin{cases} 2\mathscr{L}[x']+\mathscr{L}[y']-\mathscr{L}[y]=\mathscr{L}[t] \\ \mathscr{L}[x']+\mathscr{L}[y]=\mathscr{L}[t^2] \end{cases}$$

2. **(4 pt)** Escriba el sistema que queda una vez aplicadas las condiciones iniciales.

$$\begin{cases} 2sF(s)+(s-1)G(s)=2+\dfrac{1}{s^2} \\ sF(s)+sG(s)=1+\dfrac{2}{s^3} \end{cases}$$

3. **(4 pt)** Anote el valor de $F(s)$ o $X(s)$.

$$F(s) = -\frac{4}{s}+\frac{5}{s^2}-\frac{4}{s^3}+\frac{2}{s^4}+\frac{5}{s+1}$$

4. **(4 pt)** Anote el valor de $G(s)$ o $Y(s)$.

$$G(s)=\frac{4-s}{(s+1)s^3}$$

5. **(3 pt)** Escriba la inversa de $F(s)$ o $X(s)$.

$$x(t) = -4+5t+\frac{t^3}{3}-2t^2+5e^{-t}$$

6. **(3 pt)** Escriba la inversa de $G(s)$ o $Y(s)$.

$$y(t)=5-5t+2t^2-5e^{-t}$$

7. **(1 pt)** Anote la solución del sistema.

$$\boxed{\begin{cases} x(t) = -4 + 5t + \dfrac{t^3}{3} - 2t^2 + 5e^{-t} \\ y(t) = 5 - 5t + 2t^2 - 5e^{-t} \end{cases}}$$

Índice alfabético

Soluciones a los Ejercicios

Ejercicio 1(a)

$$\frac{1}{\sqrt{7}}\,\mathrm{sen}\, t\sqrt{7}$$

□

Ejercicio 1(b)

$$Ae^{-t} + Be^{t}\cos 2t + \frac{B+C}{2}e^{t}\,\mathrm{sen}\, 2t$$

□

Ejercicio 1(c)

$$-2\cos 2t + 3\,\mathrm{sen}\, 2t$$

□

Ejercicio 1(d) Fracciones parciales

$$f(t) = Ae^{-t} + Be^{-2t} + Ce^{3t}$$

□

Ejercicio 1(e) Observemos que esto significa que se pide determinar la transformada inversa de $\frac{2s+3}{s^2-4s+20}$. Esto es, $L^{-1}\left[\frac{2s+3}{s^2-4s+20}\right]$. Escribimos lo siguiente

$$\frac{2s+3}{s^2-4s+20} = \frac{2(s-2)}{(s-2)^2+16} + \frac{7}{(s-2)^2+16}$$

Con ello nos damos cuenta que aparecen las transformadas de las funciones seno y coseno, desplazadas. En consecuencia

$$L^{-1}\left[\frac{2s+3}{s^2-4s+20}\right] = 2e^{2t}\,cos\,4t + \frac{7}{4}\,e^{2t}\,sen\,4t = f(t)$$

□

Ejercicio 1(f)

$$\frac{5}{3}e^{2x} - \frac{2}{3}e^{-x}$$

□

Ejercicio 1(g) Un primer método para resolver es usando fracciones parciales:

$$\frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+1)}\right] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right]$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+1)}\right] = 1 - \cos t$$

Convolución. Para usar la convolución escribimos lo que sigue

$$\frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s^2+1} = F_1(s) \cdot F_2(s)$$

Ahora,

$$F_1(s) = \frac{1}{s} \Longrightarrow f(t) = 1$$
$$F_2(s) = \frac{1}{s^2+1} \Longrightarrow g(t) = \operatorname{sen} t$$

En consecuencia

$$\mathscr{L}[f(t) * g(t)] = \frac{1}{s(s^2+1)} \Longrightarrow f(t) * g(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+1)}\right]$$

Esto significa que la transformada inversa la podemos hallar por convolución. Tenemos.

$$\begin{aligned} L^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+1)}\right] &= \int_0^t 1 \cdot \operatorname{sen}(t-x)\, dx = \cos(t-x)\big]_0^t \\ &= 1 - \cos t \end{aligned}$$

□

Ejercicio 1(h)

$$e^{-2x}\cos 2x + e^{-2x}\operatorname{sen} 2x$$

□

Ejercicio 2(a) Al igualar a cero obtienes

$$x_1 = 700$$

el único □

Ejercicio 2(b) te recomiendo https://www.wolframalpha.com/input/?i=StreamPlot □

Ejercicio 2(c) al punto de equilibrio. □

Ejercicio 2(d) te recomiendo https://es.symbolab.com/solver/ordinary-differential-equation-calculator □

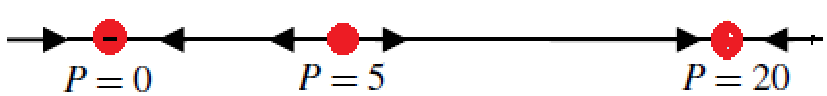
Ejercicio 3(a) Al igualar a cero aparecen tres puntos críticos o de equilibrio; $P = 20$, $P = 0$ y $P = 5$. □

Ejercicio 3(b) Se analizan tres intervalos:

- Si $0 < P < 5$, P es decreciente.
- Si $P < 0$ o si $5 < P < 20$, P es creciente.
- Si $P > 20$, P es decreciente.

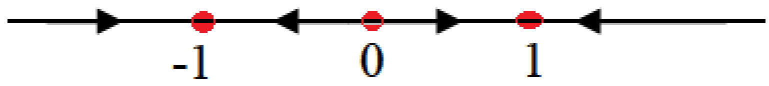
□

Ejercicio 3(c) Está hecha horizontal



$\square$

Ejercicio 3(d)



$\square$

Ejercicio 3(e) Si $t \to \infty$, P tiende hacia el punto de equilibrio, $P = 20$. $\square$

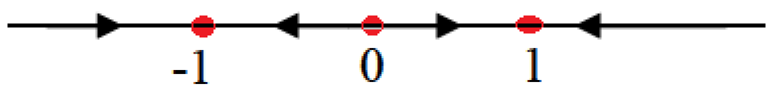
Ejercicio 4(a) Al igualar a cero aparecen tres puntos de equilibrio; $x = 0$, $x = 1$ y $x = -1$. $\square$

Ejercicio 4(b) Recuerda que la derivada de f evaluada en el punto crítico dice si es estable o inestable

$$f(x) = x - x^3 \Longrightarrow f'(x) = 1 - 3x^2 \Longrightarrow f'(0) > 0$$

se sigue que $x = 0$ es estable. Verifica que $x = 1$ y $x = -1$ son asintóticamente estables $\square$

Ejercicio 4(c) Está en forma horizontal



$\square$

Ejercicio 4(d) Mira los puntos críticos y la línea de fase $\square$

Ejercicio 5(a) Los puntos críticos son $(0,0)$, $(0,14)$, $(20,0)$ y$(12,6)$. $\square$

Ejercicio 6(a) Son hipérbolas; $y = \dfrac{m}{x}$, con $x \neq 0$ $\square$

Ejercicio 6(b)

- Las soluciones son crecientes si $y' > 0$. Esto signfica primer y tercer cuadrante.
- Son decrecientes si $y' < 0$. Esto es, segundo y cuarto cuadrante.

$\square$

Ejercicio 6(c) La concavidad tiene que ver con la derivada segunda (y'').

$$y' = xy \Longrightarrow y'' = y + xy' = y + x(xy) = y + x^2 y$$

al igualar a cero

$$y + x^2 y = 0 \Longrightarrow y(1 + x^2) = 0 \Longrightarrow y = 0$$

- Si $y > 0$ se tiene $y'' > 0$ cóncava hacia arriba.
- Si $y < 0$ se tiene $y'' < 0$ cóncava hacia abajo.

$\square$

Ejercicio 6(d) https://www.geogebra.org/ $\square$

Ejercicio 7(a) Son una familia de rectas; $y = m - x$ $\square$

Ejercicio 7(b)

- Las soluciones son crecientes si $y' > 0$ esto implica $x + y \geq 0$. Esto es $y \geq -x$.

- Son decrecientes si $y' < 0$. Esto es, $x + y \leq 0$, de donde $y \leq -x$.

$\square$

Ejercicio 7(c) La concavidad tiene que ver con la derivada segunda (y'').

$$y' = x + y \Longrightarrow y'' = 1 + y' = x + y + 1$$

al igualar a cero, $y = -1 - x$

- $y'' > 0$ si $y \geq -x - 1$ cóncava hacia arriba.
- $y'' < 0$ si $y \leq -x - 1$ cóncava hacia abajo.

$\square$

Ejercicio 7(d) https://www.geogebra.org/ $\square$

Ejercicio 8(a) Son una familia de parábolas; $y = x^2 - m$ $\square$

Ejercicio 8(b)

- Las soluciones son crecientes si $y' > 0$ esto implica $x^2 - y \geq 0$. Esto es, $y \leq x^2$.
- Son decrecientes si $y' < 0$. Esto es, $x^2 - y \leq 0$, de donde, $y \geq x^2$.

$\square$

Ejercicio 8(c) La concavidad tiene que ver con la derivada segunda (y'').

$$y' = x^2 - y \Longrightarrow y'' = 2x - y' = 2x - x^2 + y$$

al igualar a cero, $y = x^2 - 2x$

- $y'' > 0$ si $y \geq x^2 - 2x$ cóncava hacia arriba.
- $y'' < 0$ si $y \leq x^2 - 2x$ cóncava hacia abajo.

$\square$

Ejercicio 8(d) https://www.geogebra.org/ $\square$