

MATEMATICA

Cuaderno Interactivo



Cálculo Multivariable

Pedro Héctor
Valenzuela Tapia

1.1	Introducción	6
	Campo Escalar – Gráfica de un campo escalar – Trazas – Superficies y Curvas de Nivel	
1.2	Límites en campos escalares	11
	Calculando límites: La máscara – Métodos para cálculo de límites	
1.3	Polares ¡I love you!	16
	Infinitésimos	
1.4	Continuidad en un campo escalar	20
1.5	Derivadas parciales	21
	Interpretación geométrica	
1.6	Derivadas parciales de orden superior	23
	Cálculo de la derivada en un punto	
1.7	El Plano tangente	26
	Campo escalar diferenciable – Consecuencias de la diferenciabilidad – Derivada direccional no implica continuidad	
1.8	¡El Gradiente “la lleva”!	32
	Dirección de máximo crecimiento	
1.9	Algo más sobre el Plano Tangente	34
1.10	Regla de la cadena	35
1.11	Derivada de Funciones implícitas	38
1.12	Extremos en campos escalares	40
	Matriz Hessiana – Criterio de la segunda derivada – La Hessiana en $\mathbb{R}^3$	
1.13	Multiplicadores de Lagrange	44
	Extremos Absolutos	

2.1	Introducción	55
2.2	Caminando hacia la integral del volumen	55
	Integral doble iterada	
2.3	Integral doble sobre regiones más generales	59
	“Pintando” regiones	
2.4	Cálculo de áreas y volumen	61
	Volumen bajo una superficie – Cambio de variable en la integral doble	
2.5	Coordenadas polares	72
	Recintos polares	
2.6	Volumen de un sólido en el espacio	74
2.7	Integral triple	77
	Cambio de variable en la integral triple – Coordenadas cilíndricas – Coordenadas esféricas	
2.8	Masa - Momentos - Centro de masa	85

CHAPTER 3 Integral de línea Page 88

3.1	Introducción	88
	Caminos – Parametrizaciones – Parametrización canónica – Parametrizaciones trigonométricas – Parametrización de una curva que es intersección de superficies – Longitud de una curva	
3.2	Integral de línea	93
	Integral de campo escalar – Interpretación de la integral de trayectoria	
3.3	Integral de campo vectorial	95
	Trabajo – Circulación – Flujo bidimensional – Cálculo del flujo – Divergencia y Rotacional – Rotacional – Conjuntos conexos, convexos y dominios	
3.4	Campos Conservativos	103
	Cálculo del potencial – Cálculo de la integral en campo conservativo	
3.5	Teorema de Green	108
	Resumen para campos gradientes – Extensión del Teorema de Green – Area de una región según Green	
3.6	El teorema de Stokes en el plano	113
	El teorema de Gauss en el plano	

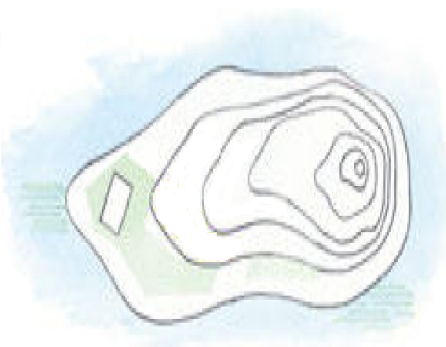
CHAPTER 4 Integrales de superficie Page 116

4.1	Introducción	116
	Descripción de un campo vectorial – Ecuación de una línea	
4.2	Integral de Superficie	117
	Parametrización de una superficie – Superficies Lisas Simples	
4.3	Area de una superficie	122
4.4	Integral de superficie de campo escalar	123
4.5	Aplicaciones de la integral de campo escalar	124
	Masa y Centro de masa – Orientación de superficies	
4.6	Integral de superficie de campo vectorial	126
4.7	Propiedades de la integral en campos	128
	Teorema de Stokes – Teorema de Gauss	
	Soluciones a los Ejercicios	136

UNIVERSIDAD DE LA FRONTERA
Departamento de Matemática y Estadística

CUADERNO INTERACTIVO

Campos Escalares



Cálculo
Multivariable

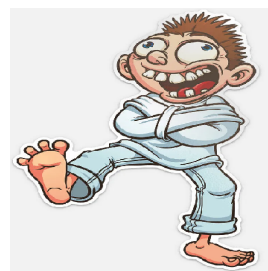
Introducción

HOLA, hola incanzable viajero(a) del infinito universo matemático. Te brindo una cordial bienvenida por llegar a este CUADERNO. De seguro te estarás preguntando ¿de qué cuaderno hablan?, y más aún dice qué ¡es interactivo!. Si sigues indagando a lo mejor te convences y lo usas como elemento de apoyo a tu aprendizaje.

Una de las tantas razones por las que nace este CUADERNO.

“el proceso de enseñanza-aprendizaje en la educación superior hoy día se dirige cada vez más a que el estudiante se convierta en un sujeto mucho más activo en su formación, lo que exige una mayor independencia, dedicación sistemática al estudio, creatividad, donde el autoaprendizaje debe ser el centro del proceso y poseer un elevado desarrollo de la capacidad de gestionar sus propios conocimientos y en el que las tecnologías de la información y las comunicaciones juegan un papel importante”.¹

El que sea un CUADERNO permite diferenciarlo de un libro, de un apunte o de notas de curso. Con ello, estimado lector(a) no puedes pedirle la rigurosidad que tiene un libro. En esta historia que comienzas a descubrir hay un personaje que me acompaña hace ya mucho tiempo, y que para preservar su identidad le he llamado SuperCrazy. Lo puedes ver en la figura mientras trata de deshacer un nudo de orate. Es “seco” para la matemática, es un poco engreído pero buena persona. Se encuentra presente en algunos Test que se deben resolver.



Como profesores necesitamos revisar permanentemente lo que hacemos y para qué lo hacemos, en ese sentido tienen un papel fundamental nuestras estrategias de enseñanza. Los objetivos a conseguir con este CUADERNO son:

- Proporcionar material para que el estudiante pueda realizar de forma autónoma una puesta al día de conceptos y habilidades matemáticas.
- Crear procesos interactivos que complementen las clases tradicionales y más atractivo el aprendizaje.
- Implementar una metodología más activa y con retroalimentación inmediata, proporcionando una experiencia de aprendizaje más rica y variada.

En el CUADERNO encontrarás; un poco de materia, algunos ejemplos, desafíos sencillos para levantar el ánimo



Desafío 1. ¿Te acuerdas del nombre de la flor nacional de Chile?

Ingresas el nombre y apretas **Ans** para saber si está correcto.

Un segundo elemento interactivo son los **Test**. En lugar de tener una “latosa” guía de ejercicios, es mejor un Test interactivo que te entrega retroalimentación al “toque”

¹esta cita es de internet, no recuerdo la página, y si no me acuerdo ...

MATHS QUIZ Pasas con 100%.

1. La capital de Chiloé es:

Puerto Mont

Ancud

Castro

Osorno

En este caso debes iniciar el test presionando **Begin Test**, luego respondes marcando tu alternativa, finalizas presionando **End Test**, de inmediato sabes si alcanzas para ser SuperCrazy.

Un tercer elemento interactivo es el espacio llamado “**Trabajo con mi profe**” que permite trabajar el problema dado y ver los pasos de ayuda que proporciona el profesor.

Trabajo con mi profe



EJERCICIO 1. Este será tu nuevo profesor de Cálculo Multivariable

(a) ¿Lo reconoces?, su nombre es ...

Este CUADERNO está estructurado en unidades a partir del programa de Cálculo Multivariable que se dicta a los estudiantes de ingeniería.

- Campos escalares.
- Integrales múltiples.
- Integrales de línea.
- Integrales de superficie.

Debieras tener presente las siguientes actitudes:

- Mantener un estilo de trabajo ordenado y metódico.
- Manifestar interés por el aprendizaje de las matemáticas.
- Creer en tus propias capacidades.
- Ser perseverante, si no sale a la primera, intenta de nuevo, busca ayuda (libros, internet, amigos, etc.)

Este CUADERNO se digitó en LATEX, una imprenta para escribir matemática, y se usó el software ACROTEX para realizar los Test, desafíos y otros elementos de apoyo.

Espero que este trabajo sea de tu agrado, es libre de distribuir, se puede copiar la parte del cuaderno que necesites. La Matemática debe ser libre de costo, con lo difícil que es, y más encima tener que pagar ¡no me simpatiza!

Pedro H. Valenzuela T.

Matemática

cuaderno de autoaprendizaje



“La Matemática es una ciencia que no se aprende pasivamente, no basta con observar al docente en el aula y en sus diferentes espacios, sino por el contrario, es necesario comprometerse con la actividad matemática en el aula y fuera de ella”.



Soy un Cuaderno

Los cuadernos de autoaprendizaje son recursos didácticos que contribuyen a desarrollar competencias, permiten desarrollar un aprendizaje autónomo en los estudiantes y establecer una interacción con otras personas. Como herramienta pedagógica debiera ser un gran acompañante a lo largo del curso y ser un aporte en cada momento que lo necesites, tanto en el aula como fuera de ella.

Se ha tratado de implementar un diseño de página que sea agradable de leer, con un lenguaje lo más simple posible, y con contenidos entregados en forma gradual.

Te brindo una cordial bienvenida y te invito a trabajar este cuaderno, cuyo objetivo es apoyar tu proceso de autoaprendizaje. En cada tema hay un pequeño resumen de los contenidos, una relación de ejercicios resueltos y un examen tipo test.

- El resumen de contenidos sirve para que tengas a mano conceptos y resultados que debes conocer para poder aplicar en las actividades.
- Los ejercicios resueltos, **Trabajo con mi profe**, permiten conocer diversas estrategias de resolución de problemas, lo que conlleva a obtener un cierto grado de autonomía y conocer herramientas para aplicar en la resolución de problemas.
- Los Test tienen como objetivo la autoevaluación de conocimientos y habilidades que has alcanzado.

Te invito a realizar todas las actividades propuestas:

- Lees los contenidos del cuaderno.
- Resuelves los **Desafíos**, que son preguntas sencillas que sirven de motivación.
- Estudias los ejercicios resueltos hasta lograr entenderlos completamente.
- Resuelves el Test, si pasas sin faltas, has comprendido la materia. Puedes continuar con tu aprendizaje.

1

¹<https://www.residencias-estudiantes.com/el-blog-del-estudiante/magazine/autoaprendizaje-el-camino-hacia-el-exito-academico-y-profesional>

1.1 Introducción



En la figura se observa un **campo** y un hermoso ejemplar de caballo. En matemática existe también la idea de campo, pero tiene otra significación.



Desafío 2. ¿Te acuerdas del nombre del caballo que acompañó a Alejandro Magno en todas de sus batallas durante más de treinta años?

1.1.1 Campo Escalar

Hasta este momento se conoce el tema de las funciones reales, esto es, aquellas funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Sin embargo, en el mundo real las cantidades físicas suelen depender de dos o más variables. En este cuaderno se trabajarán las **funciones de varias variables** o también llamadas **campos escalares**, extendiendo las ideas básicas del Cálculo Diferencial e Integral a tales funciones. Atenderemos especialmente los casos $n = 2$ y $n = 3$.



Definición 1.1.1. Un campo escalar es una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, que asocia a cada elemento $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ su imagen $z \in \mathbb{R}$. Se anota $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

• Dominio e Imagen

El **dominio** de un campo escalar es el conjunto de todos aquellos valores que producen una imagen.

La **imagen** de f es el subconjunto de $\mathbb{R}$ formado por los valores que toma la función f .

Ejemplo 1.1.2. El campo escalar $f(x, y) = 2x + 3y - 1$ es una aplicación de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, en donde, el dominio de f todo $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 1.1.3. El campo escalar $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, presenta imágenes solo para aquellos valores para los cuales $1 - x^2 - y^2 \geq 0$. Es decir, su dominio es el conjunto

$$\text{dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$$



Desafío 3.

- Si $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, calcula:
 $f(0, 0) =$
- Si $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, calcula:
 $f(1, 0) =$

Ejemplo 1.1.4. Considerar el campo escalar $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{y^2 - x^2}$

Vamos a especificar el dominio del campo para ver que imágenes podemos sacar.

$$\text{dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 \neq y^2\}$$

Esto equivale decir que; $y \neq \pm x$. Entre otras, podemos calcular las siguientes imágenes:

- $f(1, 0) = \frac{1^2 + 0^2}{0^2 - 1^2} = -1$
- $f(\sin t, \cos t) = \frac{1}{\cos(2t)}$

1.1.2 Gráfica de un campo escalar



Definición 1.1.5. Se llama gráfica de un campo escalar de dos variables al conjunto de todos aquellos puntos del espacio con coordenadas (x, y, z) tales que (x, y) está en el dominio de f , $y z = f(x, y)$. Escribimos:

$$\text{gr}(f) = \{(x, y, z) : (x, y) \in \text{dom}(f), z = f(x, y)\}$$

Así como la gráfica de una función f de una variable es una **curva** C con ecuación $y = f(x)$, la gráfica de un campo escalar f de dos variables es una **superficie** S cuya ecuación es $z = f(x, y)$. La figura 1.1 muestra la gráfica de $z = f(x, y)$, una superficie cuya proyección sobre el plano xy es D (el dominio del campo).

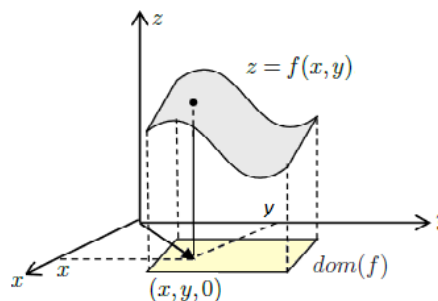


Figura 1.1

Esta es una buena página para ver la gráfica de superficies <https://www.google.com/search?client=firefox-b-d&q=calcplot3d>

Para visualizar una superficie S nos apoyaremos en dos hechos:

1.1.3 Trazas

Se denomina **traza** de la superficie S a la curva que resulta de la intersección entre la superficie y un plano. En general, estos planos se eligen paralelos a los planos coordenados.

Para describir las trazas por ecuaciones se procede de la siguiente manera:

- Si la traza resulta de la intersección de la superficie S con el plano $x = c$, siendo c una constante, entonces su ecuación es $z = f(c, y)$, y esta curva se representa en el plano $x = c$.
- Si la traza resulta de la intersección de la superficie S con el plano $y = c$, siendo c una constante, entonces su ecuación es $z = f(x, c)$, y esta curva se representa en el plano $y = c$.
- Si la traza resulta de la intersección de la superficie S con el plano $z = c$, siendo c una constante, entonces su ecuación es $c = f(x, y)$, y esta curva se representa en el plano $z = c$.

Ejemplo 1.1.6. Se considera el campo escalar dado por la ecuación $z = x^2 + y^2$.

Veamos sus trazas al intersectar esta superficie con los planos coordenados.

- $z = 0 \implies x^2 + y^2 = 0 \implies x = 0, y = 0$. El punto $(0, 0)$ en el plano xy .
- $y = 0 \implies z = x^2 \implies$ una parábola en el plano xz
- $x = 0 \implies z = y^2 \implies$ una parábola en el plano yz
- $z = 4 \implies x^2 + y^2 = 4 \implies$ una circunferencia de radio 2 en el plano $z = 4$

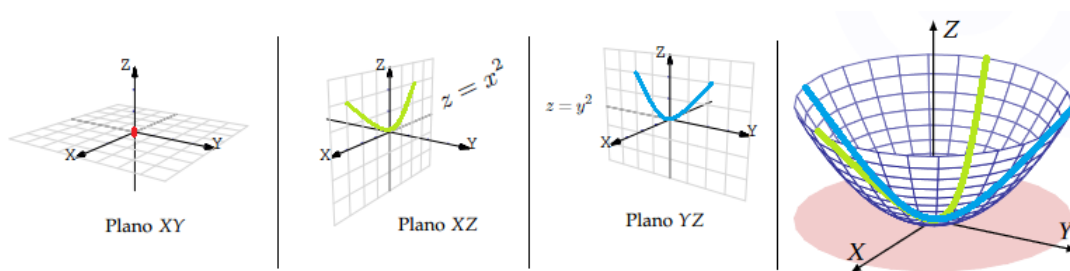


Figura 1.2

EJERCICIO 2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

- Esta superficie se representa en $\mathbb{R}^n$, con $n = \dots$
- Su gráfica corresponde a la de un $\dots$
- El dominio de este campo escalar es:
- Debes recordar la gráfica de un cono, bosqueja este en el sistema cartesiano tridimensional.



Desafío 4.

► La traza $x = 0$ de $z = x^2 - y^2$ representa una:

EJERCICIO 3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x, y) = x^{3/2}$

- El dominio de f es:
- Su gráfica se encuentra en $\mathbb{R}^n$, siendo $n = \dots$
- Para $y = 0$ dibuja la traza en el plano xz , y luego bosqueja la gráfica de esta superficie.

1.1.4 Superficies y Curvas de Nivel

Una mirada desde la topografía: son líneas que, en un mapa, unen puntos de igual altura, y permite identificar diferentes formas del terreno.

- <https://www.udocz.com/read/60650/apuntes-de-curvas-de-nivel>
- <http://www.atmosfera.cl/HTML/meteorologia/cartas1.htm>
- <https://pro.arcgis.com/es/pro-app/2.7/tool-reference/3d-analyst/how-contouring-works.htm>

Una mirada desde la matemática establece lo siguiente:



Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. La ecuación $f(\vec{x}) = k$, $k \in \mathbb{R}$, se llama **superficie de nivel**, y el conjunto formado por estas curvas se denomina **mapa de contorno**.

En particular, para un campo escalar de dos variables, en lugar de superficie de nivel se habla de **curva de nivel**.

Es importante comprender la diferencia entre la traza y la curva de nivel.

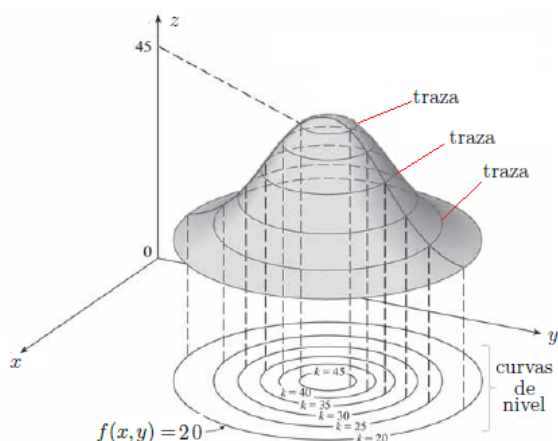


Figura 1.3

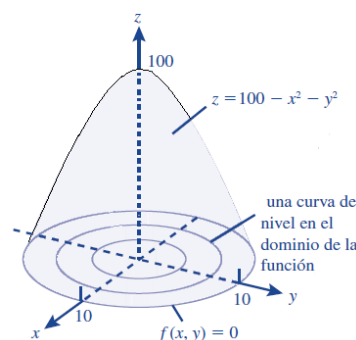
La figura 1.3 muestra la relación entre curvas de nivel y trazas horizontales. Las curvas de nivel son justamente las trazas de la gráfica de f en el plano horizontal $z = k$ proyectadas en el plano xy . Si se dibujan las curvas de nivel de una función y se interpretan como elevaciones de la superficie a la altura indicada, entonces se puede formar, mentalmente, una imagen de la gráfica.

Ejemplo 1.1.7. Se considera el campo escalar $f(x, y) = 100 - x^2 - y^2$.

El dominio de f es todo $\mathbb{R}^2$, y su rango el intervalo $(-\infty, 100]$. Las **curvas de nivel** se encuentran al considerar $f(x, y) = k$, para distintos valores de k .

- $k = 0 \implies 100 - x^2 - y^2 = 0 \implies x^2 + y^2 = 100$
- $k = 100 \implies 100 - x^2 - y^2 = 100 \implies x^2 + y^2 = 0$
- $k = 1 \implies 100 - x^2 - y^2 = 1 \implies x^2 + y^2 = 99$
- $k = -2 \implies 100 - x^2 - y^2 = -2 \implies x^2 + y^2 = 102$

Se observa que las curvas de nivel son circunferencias centradas en el origen, formando ellas el mapa de contorno.



EJERCICIO 4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x, y) = x^2 + y^2$

- (a) El dominio de f es:
- (b) Su gráfica se encuentra en:
- (c) Escribe la ecuación de las curvas de nivel:
- (d) Halla curvas de nivel para $C = 0, 1, -1, 4, 9$, y dibújalas en el plano
- (e) Cada curva de nivel corresponde a una traza en $\mathbb{R}^3$, dibújalas.
- (f) Por un proceso de continuidad, C toma todos los valores permitido, con este dato bosqueja la superficie.

EJERCICIO 5. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$, $z \geq 0$

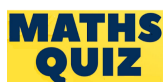
- (a) Halla el dominio de f
- (b) La gráfica de esta superficie está en
- (c) Escribe la ecuación de las curvas de nivel
- (d) Si $k > 1$, la curva de nivel es
- (e) Si $0 < k < 1$, entonces el conjunto de curvas de nivel son de radio
- (f) Si $k = 1$, el conjunto de curvas de nivel es ...
- (g) Dibuja algunas curvas de nivel en el plano, y bosqueja la gráfica de la superficie

TORPEDO 6.

- (a) Curva de indiferencia

EJERCICIO 7. La utilidad obtenida por un consumidor de x unidades de un producto e y unidades de otro producto viene dada por la función utilidad $U(x, y) = 2x^3y^2$. En este momento el consumidor posee 5 unidades del primer producto y 4 unidades del segundo.

- (a) Escribe la ecuación de las curvas de indiferencia ...
- (b) Determina el nivel actual de utilidad ...
- (c) Escribe la curva de indiferencia correspondiente al nivel actual de utilidad ...
- (d) Grafica 3 curvas de indiferencia incluyendo la anterior.



Pasas con 100%.

1. La curva de nivel de $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$ para $k = 6$ es:

$$3x + 2y = 12 \qquad 3x + 2y = 6 \qquad 3x + 2y = 0 \qquad 3x + 2y = -6$$

2. El dominio del campo $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$ es el conjunto de puntos (x, y) del plano tales que:

$$y \neq x^2 \qquad y > x^2 \qquad y < x^2 \qquad y \geq x^2$$

3. La traza vertical $x = a$ en la superficie $z = x^2 + 16y^2$ es una:

elipse parábola circunferencia recta

4. La traza horizontal $z = a > 0$ en la superficie $z = x^2 + 16y^2$ es una:

elipse parábola circunferencia recta

5. La traza vertical $x = a$ en la superficie $f(x, y) = y^2$ es una:

elipse parábola circunferencia recta

6. La traza vertical $x = -1$ en la superficie $9(x + 1)^2 + 36(y + 2)^2 - 4z^2 = 0$ es una:

recta parábola dos rectas elipse

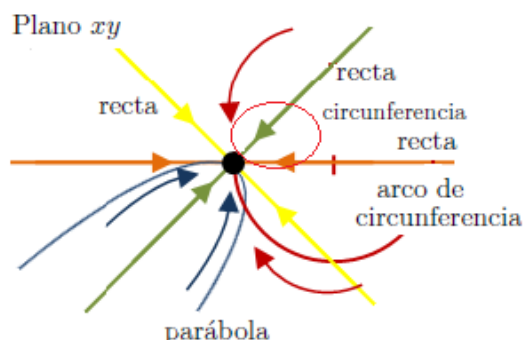
1.2 Límites en campos escalares

TORPEDO 8.

(a) Distancia, entornos y puntos de acumulación.

Para el estudio del límite de funciones de una variable independiente, el problema se reduce a observar cómo se comporta la función al acercarnos a un punto del dominio por derecha e izquierda, moviéndonos en general, sobre la recta $y = 0$.

Teniendo en cuenta que un entorno en el plano es un círculo abierto (sin la circunferencia borde), resulta que existen infinitos caminos para acercarnos al punto (a, b) .



Para que el límite doble exista, el comportamiento de la función a lo largo de todos los caminos incluidos en su dominio y en un entorno reducido de (a, b) debe ser el mismo (el camino debe contener al punto).

TORPEDO 9.

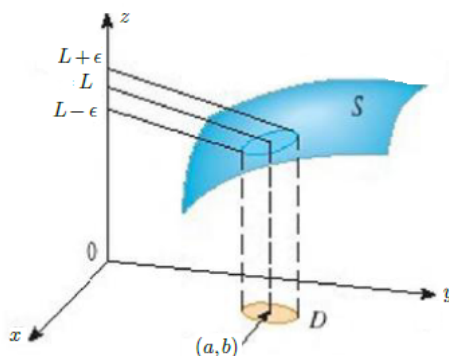
(a) La definición de límite para funciones de una variable



Definición 1.2.1. El límite del campo escalar $f(x, y)$ cuando (x, y) tiende al punto de acumulación (a, b) del dominio del campo escalar es igual al número real L , que se escribe

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L$$

si y solo si, para todo número real epsilon (ϵ) positivo, existe en correspondencia con él, otro número real delta (δ), también positivo, de tal modo que para todo punto (x, y) del dominio que pertenezca al entorno reducido del punto (a, b) de radio delta, entonces la diferencia entre el valor de la función en ese punto y el número real L , tomada en valor absoluto, es menor que epsilon.



En lenguaje simbólico

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L \iff 0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \implies |f(x, y) - L| < \epsilon$$



Para una función de dos variables, al escribir $(x, y) \rightarrow (a, b)$, se entiende que el punto (x, y) se aproxima al (a, b) en cualquier “dirección”, dentro de su entorno $E(a, b)$.

Sí el valor del $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)$ no es el mismo **para todas** las posibles formas de aproximarse a (a, b) entonces el límite no existe.

1.2.1 Calculando límites: La máscara



Llamaremos máscara en los cálculos de límites a la expresión resultante de reemplazar el valor al cual tiende la variable en la función a la que estamos sacando límite. Si el resultado de esta máscara da como resultado un número real, entonces ¡ése es el límite!. En cualquier otro caso, la máscara resultante nos dará información de como abordar el problema.

Tenemos el siguiente resultado.



Teorema 1.2.2. Sea $c \in \mathbb{R}$ una constante, y sean f y g funciones reales de dos variables tales que existen los siguientes límites

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(x,y) = M$$

Entonces se cumplen las siguientes propiedades:

- $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)[f(x,y) + g(x,y)] = L + M$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} [c f(x,y)] = c \cdot L$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} [f(x,y) \cdot g(x,y)] = L \cdot M$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{L}{M}$, siempre que $M \neq 0$

Ejemplo 1.2.3. Sea $f(x,y) = x + y$, hallemos el límite cuando $(x,y) \rightarrow (1,3)$

¡No tengas miedo! ¡saca la máscara!

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} (x + y) \sim 1 + 3 = 4 \quad \text{listo}$$

Dado que el resultado ha sido un número real

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} (x + y) = 4$$

Ejemplo 1.2.4. Estudiar $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3xy}{x^2 + y^2}$ como sigue:

- A lo largo de la recta de ecuación $x = 0$.
- A lo largo de la recta de ecuación $y = x$.
- A lo largo de la recta de ecuación $y = 2x$.
- A lo largo de la parábola de ecuación $y = x^2$.
- Concluir acerca de la existencia del límite en torno al origen.

Se observa que todos los caminos considerados contienen al $(0,0)$. Para saber que tenemos en el origen, la máscara nos entrega una primera aproximación.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3xy}{x^2 + y^2} \sim \frac{0}{0}, \quad \text{¡entramos en cuarentena!}$$

A continuación trabajamos los caminos. Se debe tener presente que el camino debe contener el punto de acumulación, en este caso, el $(0,0)$

- En el camino $x = 0$, el límite toma la forma

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3xy}{x^2 + y^2} = \lim_{(0,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3 \cdot 0 \cdot y}{0^2 + y^2}$$

Al evaluar

$$\lim_{(0,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3 \cdot 0 \cdot y}{0^2 + y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y^2} = 0$$

- En el camino $y = x$ se tiene

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3xy}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,x) \rightarrow (0,0)} \frac{3 \cdot x \cdot x}{x^2 + x^2}$$

Al evaluar

$$\lim_{(x,x) \rightarrow (0,0)} \frac{3 \cdot x \cdot x}{x^2 + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{2x^2} = \frac{3}{2}$$

- En el camino $y = 2x$, tenemos

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3xy}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,2x) \rightarrow (0,0)} \frac{3 \cdot x \cdot 2x}{x^2 + (2x)^2}$$

Al evaluar

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x^2}{x^2 + 4x^2} = \frac{6}{5}$$

- Por el camino $y = x^2$, el límite es

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3xy}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,x^2) \rightarrow (0,0)} \frac{3 \cdot x \cdot x^2}{x^2 + (x^2)^2}$$

Esto equivale a

$$\lim_{(x,x^2) \rightarrow (0,0)} \frac{3 \cdot x \cdot x^2}{x^2 + (x^2)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3}{x^2 + x^4}$$

Se tiene

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3}{x^2 + x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{1 + x^2} = \frac{0}{1} = 0$$

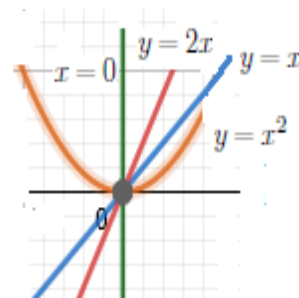
- Caminos distintos dieron como resultado límites distintos.

Conclusión: No existe el límite

EJERCICIO 10. Estudiemos el límite de $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ en $(0,0)$.

- Determina la “máscara” de este límite ...
- Te propongo la siguiente alternativa. *Trabajar por caminos.* Es claro que el punto conflictivo es ...
- Para acercarse al $(0,0)$ en el plano existen infinitos caminos. Para entender esto forma un círculo imaginario alrededor del punto y te darás cuenta que puedes construir millones de curvas que pasen por el $(0,0)$. Con una mano en el corazón ¿crees tú que la matemática nos va a dejar botados? Por supuesto que no. De todos esos intrincados caminos vamos a elegir los más fáciles, como por ejemplo, el camino

$$S_1 = \{(x, y)/x = 0\}$$



Observa bien, estamos fijando la x , es $x = 0$, la y sigue variando $y \rightarrow 0$. Con esto nos vamos a la expresión que le estamos calculando el límite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) \sim \lim_{y \rightarrow 0} f(0,y) = \dots$$

- (d) Ahora se busca otro camino, pero con la mente puesta en que el límite por este camino sea distinto del anterior, en caso contrario, el camino no sirve y ¡a buscar otro se ha dicho! ¿que te parece elegir el camino

$$S_2 = \{(x,y)/y = 0\}$$

entonces

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) \sim \lim_{x \rightarrow 0} f(x,0) = \dots\dots\dots$$

- (e) Se concluye que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$



Desafío 5.

1. El límite del campo $f(x,y) = \frac{5xy^2}{x^2 + y^4}$ por el camino $x = y^2$ es:

0 $\frac{5}{2}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{1}{2}$

2. El límite del campo $f(x,y) = \frac{5xy^2}{x^2 + y^4}$ por el camino $y = x$ es:

(a) 0 (b) $\frac{5}{2}$ (c) $\frac{3}{2}$ (d) $\frac{1}{2}$

3. El límite del campo $f(x,y) = \frac{5xy^2}{x^2 + y^4}$ existe.

(a) True (b) false

Número de preguntas respondidas correctamente:

Puntos obtenidos:

Porcentaje de éxito:

1.2.2 Métodos para cálculo de límites

Al igual que las funciones de una variable, los límites de una función de dos variables se pueden determinar sustituyendo el valor de cada una de las variables (son los menos).

• Sustitución

Ejemplo 1.2.5. Hallar $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{5xy - x^2 + y^2 + 3}{3y - 4xy + 2}$

La máscara es nuestra primera ayuda

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{5xy - x^2 + y^2 + 3}{3y - 4xy + 2} \sim \frac{3}{2}$$

Nada más que hacer ¡problema resuelto!

- **Operatoria algebraica**

Ejemplo 1.2.6. Hallar $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x - y}$

La máscara es claramente $\frac{0}{0}$. Veamos si es posible eliminar esos ceros

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x - y} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\cancel{(x-y)}(x+y)}{\cancel{x-y}} = 0$$

- **Parametrización del camino**

Entre muchas parametrizaciones de caminos, el uso de la curva parametrizada $y = mx$ es habitual para caminos que pasan por el punto $(0,0)$. Si el límite depende de m , entonces no existe

Ejemplo 1.2.7. Hallar $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{5x^2 - 7y^2}{2x^2 + 5y^2}$

La máscara del límite es $\frac{0}{0}$. Tomaremos la familia de rectas $y = mx$ que pasa por el $(0,0)$. Si $y = mx$, entonces

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{5x^2 - 7y^2}{2x^2 + 5y^2} = \lim_{(x,mx) \rightarrow (0,0)} \frac{5x^2 - 7(mx)^2}{2x^2 + 5(mx)^2}$$

Calculando

$$\lim_{(x,mx) \rightarrow (0,0)} \frac{5x^2 - 7(mx)^2}{2x^2 + 5(mx)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x^2}(5 - 7m^2)}{\cancel{x^2}(2 + 5m^2)}$$

Simplificando

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 - 7m^2}{2 + 5m^2} = \frac{5 - 7m^2}{2 + 5m^2}$$

Se observa que, como el límite depende m , No existe. En particular:

- Si $m = 0$, entonces el límite es $\frac{5}{2}$.
- Si $m = 1$, entonces el límite es $-\frac{2}{7}$



✚ **Teorema de la función acotada(TFA)**

“Si f es una función acotada y el límite de g cuando $x \rightarrow x_0$ es cero, entonces el límite del producto $f \cdot g$ cuando $x \rightarrow x_0$ es también cero”.

Ejemplo 1.2.8. Usar el TFA para demostrar que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{5x^2y}{x^2 + y^2} = 0$

El límite dado se puede escribir como

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{5x^2y}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 5y \cdot \frac{x^2}{x^2 + y^2}$$

Dado que

$$\frac{x^2}{x^2 + y^2} < 1 \quad \text{acotada}$$

y que

$$g(y) = 5y \implies \lim_{y \rightarrow 0} (5y) = 0$$

el TFA establece que el límite del producto es igual a cero. Esto es

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{5x^2y}{x^2 + y^2} = 0$$

1.3 Polares ¡I love you!

Esta forma de cálculo si que te va a gustar. Ya sabes que para viajar de coordenadas rectangulares a polares se usa

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

Entonces es posible expresar los valores de una función $f(x, y)$ como los valores de la siguiente función de las coordenadas polares (r, θ)

$$F(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

con lo cual $(x, y) \rightarrow (0, 0) \iff r \rightarrow 0$. Así, parece que el estudio de

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$$

equivale al estudio de

$$\lim_{r \rightarrow 0} F(r, \theta) \quad \text{para todos los posibles valores de } \theta$$

Para que esto suceda se debe cumplir el siguiente resultado:

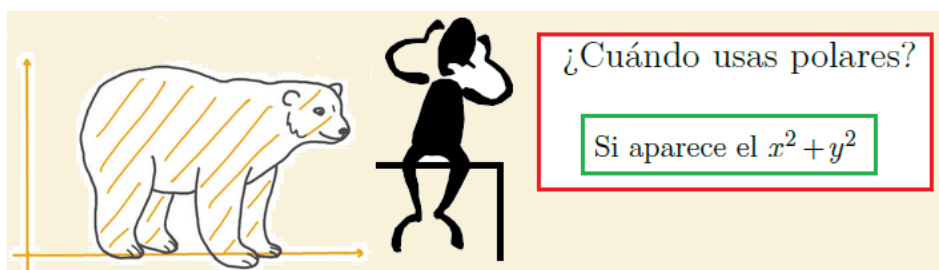


Teorema 1.3.1. Una condición necesaria y suficiente para que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = L$$

Es que exista una función real de variable real F tal que $\lim_{r \rightarrow 0} F(r) = 0$, y tal que para todo r y en todo el campo de variación de θ se cumpla que

$$|f(r \cos \theta, r \sin \theta) - L| \leq F(r)$$



Ejemplo 1.3.2. Probar, usando el teorema, que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + 2xy^2}{x^2 + y^2} = 0$$

Utilizando $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, el límite se transforma en

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^3 \cos^3 \theta + 2r \cos \theta \cdot r^2 \sin^2 \theta}{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta}$$

Ahora aplicamos el teorema. La expresión a acotar es

$$\left| \frac{r^3 \cos^3 \theta + 2r^3 \cos \theta \sin^2 \theta}{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta} - 0 \right| = |r \cos^3 \theta + 2r \cos \theta \sin^2 \theta|$$

Esta última expresión se puede acotar como sigue:

$$|r \cos^3 \theta + 2r \cos \theta \sin^2 \theta| \leq |r \cos^3 \theta| + |2r \cos \theta \sin^2 \theta| \leq 3r = F(r)$$

como $F(r) = 3r \rightarrow 0$, se sigue que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + 2xy^2}{x^2 + y^2} = 0$$

Con esto se ha demostrado que el límite dado es cero.

Ejemplo 1.3.3. *Hallar* $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + 4x^2 + 2y^2}{2x^2 + y^2}$

Usaremos polares; $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, el límite se transforma en

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + 4x^2 + 2y^2}{2x^2 + y^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^3 \cos^3 \theta + 4r^2 \cos^2 \theta + 2r^2 \sin^2 \theta}{2r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta}$$

se puede factorizar y simplificar

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2(r \cos^3 \theta + 4 \cos^2 \theta + 2 \sin^2 \theta)}{r^2(2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r \cos^3 \theta + 4 \cos^2 \theta + 2 \sin^2 \theta}{2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta}$$

al aplicar que $r \rightarrow 0$ tenemos

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{r \cos^3 \theta + 4 \cos^2 \theta + 2 \sin^2 \theta}{2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = \frac{4 \cos^2 \theta + 2 \sin^2 \theta}{2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta}$$

De nuevo una factorización

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{r \cos^3 \theta + 4 \cos^2 \theta + 2 \sin^2 \theta}{2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = \frac{2(2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}{2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = 2$$

Para probar que éste es el límite, se debe acotar la diferencia

$$\left| \frac{r \cos^3 \theta + 4 \cos^2 \theta + 2 \sin^2 \theta}{2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta} - 2 \right| = \left| \frac{r \cos^3 \theta + 4 \cos^2 \theta + 2 \sin^2 \theta}{2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta} - 2(2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \right|$$

Al reducir

$$\left| \frac{r \cos^3 \theta}{2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta} \right| = |r| \cdot \left| \frac{\cos^3 \theta}{2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta} \right|$$

Además,

$$2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \geq 2 \cos^2 \theta \implies \frac{1}{2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta} \leq \frac{1}{2 \cos^2 \theta}$$

Luego

$$\left| \frac{r \cos^3 \theta}{2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta} \right| \leq |r| \left| \frac{\cos^3 \theta}{2 \cos^2 \theta} \right| = |r| \frac{|\cos \theta|}{2}$$

como $|\cos \theta| \leq 1$, logramos

$$|f(r \cos \theta, r \sin \theta) - 2| \leq \frac{|r|}{2} = F(r) \rightarrow 0$$

Lo que prueba que el límite es 2.



Trabajo con mi profe



EJERCICIO 11. Hallemos $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$

- (a) ¿punto conflictivo? ...
- (b) ¿aparece el $x^2 + y^2$...
- (c) Haces $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ y reemplaza en la expresión

EJERCICIO 12. Sea $f(x, y) = \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$ campo escalar

- (a) Punto conflictivo ...
- (b) La máscara ...
- (c) ¿caminos o polares? ...
- (d) Escribe tus cálculos.
- (e) Concluyes que el límite ...

EJERCICIO 13. Sea $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$

- (a) Punto conflictivo ...
- (b) La máscara ...
- (c) Asegurate con polares ... (Los caminos te conducen siempre al mismo límite y no puedes decidir).

1.3.1 Infinitésimos

Al igual que en una variable, los infinitésimos se aplican en los límites de funciones de varias variables.



Definición 1.3.4.

- Se llama *infinitésimo* en un punto x_0 a una función cuyo límite en dicho punto sea cero.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$$

- Dos infinitésimos en un mismo punto se dice que son *equivalentes*, cuando el límite de su cociente es 1

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \implies f(x) \sim g(x)$$

Algunos infinitésimos en $x = 0$							
$\operatorname{sen} x$	$\operatorname{arcsen} x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{arctg} x$	$e^x - 1$	$\ln(1 + x)$	$a^x - 1$	$1 - \cos x$
$\sim x$	$\sim x$	$\sim x$	$\sim x$	$\sim x$	$\sim x$	$x \ln a$	$\frac{1}{2}x^2$

La tabla superior muestra, en la primera línea la función, y en la segunda un infinitésimo equivalente.

Si un infinitésimo está multiplicando o dividiendo se le puede sustituir por otro equivalente para simplificar los cálculos. Cuando un infinitésimo está sumando o restando, en general, no se puede sustituir por otro equivalente.

Ejemplo 1.3.5. *Hallar* $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\ln(1+x^2y^2)}{x^2+y^2}$

La máscara tiene la forma $\frac{0}{0}$. Se puede usar un infinitésimo en cero.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\ln(1+x^2y^2)}{x^2+y^2} \underset{\text{infinitésimo}}{\sim} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$$

Este límite es más sencillo de calcular. Usando polares

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\rightarrow(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} &= \lim_{r\rightarrow 0} \frac{r^4 \cos^2\theta \sin^2\theta}{r^2} \\ &= \lim_{r\rightarrow 0} r^2 \cos^2\theta \sin^2\theta = 0\end{aligned}$$



Pasas con 100%.

1. El $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 - 4y^2}{x^2 + 2y^2}$ es:

2

–2

no existe

0

- 2.** El $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(y^2 - x)^2}{x^2 + y^2}$ es:

1

no existe

0

2

- 3.** El $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{x^2+y^2} - 1}{x^2 + y^2}$ es:

1

0

$$e$$

no existe

4. El $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\ln(x^4 - y^4 + 1)}{x^2 + y^2}$ es:

1

0

no existe

 $\ln 2$



Desafío 6.

1. El valor de $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin^2(xy)}{1 - \cos(x)}$ es:

1

2

0

no existe

1.4 Continuidad en un campo escalar

Este concepto es muy similar al que estudiaste en el cálculo de una variable. El problema de la continuidad se verifica comprobando que el límite existe y que es igual al valor de la función en el punto, esto es



Definición 1.4.1. Una función f de dos variables es continua en un punto (a,b) si $f(a,b)$ es igual al límite de f cuando (x,y) tiende a (a,b) . Es decir, si

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

Observación. Sumar, restar, multiplicar y componer campos continuos da como resultado campos continuos.

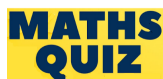
Trabajo con mi profe



EJERCICIO 14. Se considera el campo escalar $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4 + \sin y^4}{x^2 + y^2} & , si (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , si (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

- El punto conflictivo es ...
- El valor del campo en $f(0,0) = \dots\dots\dots$
- El límite, para $(x,y) \rightarrow (0,0)$ es ...
- Se concluye que el campo (es o no es) ... continuo en el origen.



Pasas con 100%.

En cada campo escalar siguiente, determinar el valor de k para continuidad

$$1. f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} \sin\left(\frac{x^2 y}{x^2 + y^2}\right) & , \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ k & , \text{ si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$k = 1$

$k = 2$

no existe

$k = 0$

$$2. f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin x^2 y^6}{x^4 + y^6} & , \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ k & , \text{ si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

0

no existe

1

sen 2

$$3. f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^2(y+1) + y^2}{2x^2 + y^2} & , \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ k & , \text{ si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

2

0

1

no existe

1.5 Derivadas parciales

La derivada parcial se utiliza para determinar la razón o velocidad de cambio de una función de varias variables respecto a una de sus variables independientes.



Definición 1.5.1. Si $z = f(x, y)$ las primeras derivadas parciales de f con respecto a las variables x e y son las funciones definidas como

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = f_y(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

siempre y cuando el límite exista.



La definición indica que para calcular $\frac{\partial f}{\partial x}$ se considera y constante.

Para calcular $\frac{\partial f}{\partial y}$ se considera x constante.

Esto permite aplicar las reglas usuales de derivación.

Ejemplo 1.5.2. Sea $f(x, y) = x^2y + xy^2$

Las derivadas parciales son:

$$\bullet \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + y^2 \qquad \bullet \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2xy$$

1.5.1 Interpretación geométrica

La interpretación geométrica de la derivada de una función de una variable es, como sabemos, la **pendiente** de la recta tangente a la gráfica de la función.

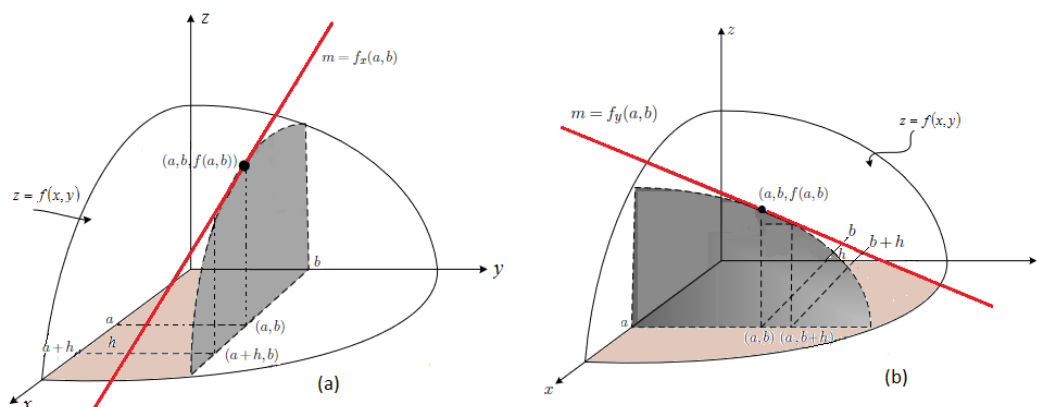


Figura 1.4

Para funciones de dos variables existe una interpretación análoga.

- Si en $z = f(x, y)$ hacemos $y = b$, entonces el conjunto $\{(x, y, z) / y = b\}$ es un plano paralelo al plano xz , y la intersección de este plano con la superficie define una **curva**, para la cual, la pendiente de la recta tangente a ella es $m = f_x(x, b)$. De esta manera, podemos decir que esta derivada parcial es la derivada de la función f en la dirección del eje x . (figura 1.4 a).
- Análogamente, si hacemos $x = a$, tenemos un plano paralelo al plano yz , entonces $f_y(a, y)$ es la derivada de la función f en la dirección del eje y (figura 1.4 b).

Ejemplo 1.5.3. Sea $f(x, y) = 4 - x^2 - 2y^2$, calcular $f_x(1, 1)$ y $f_y(1, 1)$. Interpretar estos números como pendientes.

$$\bullet f_x = -2x \implies f_x(1, 1) = -2 \qquad \bullet f_y = -4y \implies f_y(1, 1) = -4$$

En la figura 1.5 se muestran las pendientes en las direcciones pedidas.

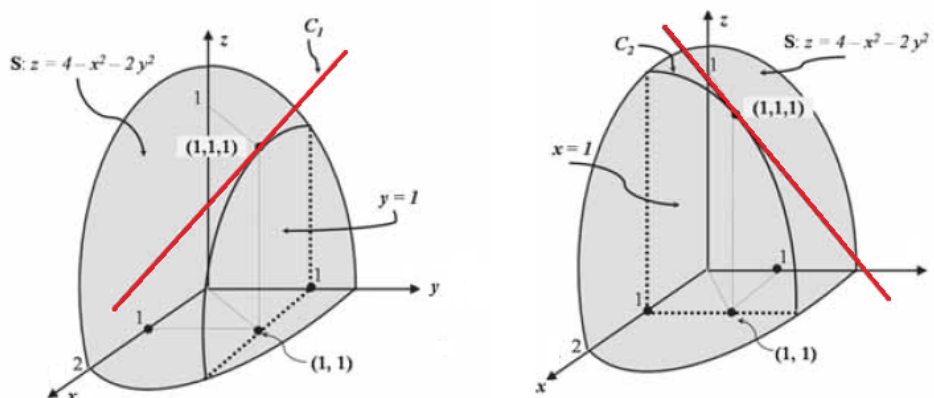


Figura 1.5

Ejemplo 1.5.4. Al intersectar el paraboloide $z = x^2 + y^2$ con el plano $x = 1$ se obtiene una parábola. Hallemos la **pendiente** de la recta tangente a la parábola en el punto $(1, 2, 5)$, y la ecuación de la recta tangente.

Una vez leído el problema, y encontrando en él la palabra **pendiente**, no cabe otra cosa que se nos venga a la memoria la **derivada**.

$$z = x^2 + y^2 \implies z_y = 2y \implies z_y(1, 2) = 4$$

Tenemos la pendiente, de modo que aplicando la ecuación de la recta

$$z - z_0 = m(y - y_0)$$

se tiene que la ecuación de la recta es

$$z - 5 = 4(y - 2)$$

O bien

$$z = 4y - 3$$



Figura 1.6

No olvides una visita a la página <https://c3d.libretexts.org/CalcPlot3D/index.html>

1.6 Derivadas parciales de orden superior

Una acotación al lenguaje: Cuando se dice que la derivada parcial f_x va en dirección del eje x , es equivalente a decir que va en dirección del vector unitario $(1, 0)$, que es la dirección que tiene el eje x . Lo mismo vale para f_y . Este hecho se indica pues, más adelante, se generaliza esta noción de derivada parcial a derivada direccional.

Como se sabe, en las funciones de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ el proceso de calcular derivadas de órdenes superiores es posible. Esto también es factible de realizar en campos escalares, conveniendo previamente las notaciones. Veamos esto.

Sea $z = f(x, y)$, las segundas derivadas parciales son:

- Derivando dos veces respecto de x

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} = D_{11}$$

- Derivando dos veces respecto de y

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy} = D_{22}$$

- Derivando primero respecto de x , y luego respecto de y

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy} = D_{12}$$

- Derivando primero respecto de y , y luego respecto de x

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx} = D_{21}$$

Es posible que las notaciones te confundan. Si es así, espero que el siguiente diagrama te haga ver la luz.

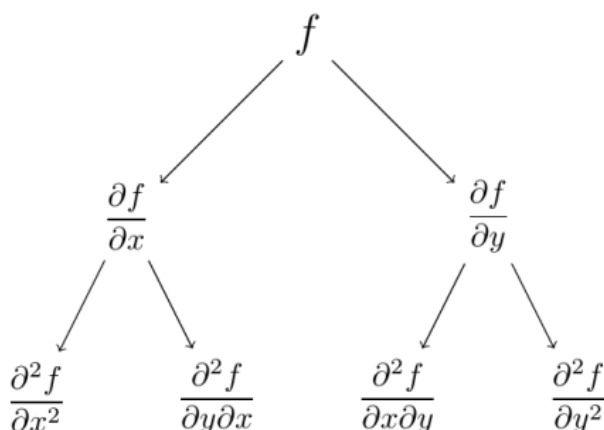


Figura 1.7



Desafío 7.

- El valor de $a \in \mathbb{R}$, de modo que la función $f(x, y) = \cos(2cx + acy)$, con $c \neq 0$, satisfaga la ecuación

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$a = 0$$

$$a = 1$$

$$a = 2$$

$$a = -1$$

- Sea $f(x, y, z) = \frac{2z}{y + \sin x}$. La derivada $f_z(x, y, z)$ es:

$$0$$

$$\frac{2}{y + \sin x}$$

$$\frac{z}{(y + \sin x)^2}$$

$$\frac{z}{y + \sin x}$$

- Sea $f(x, y, z) = \frac{2z}{y + \sin x}$. La derivada f_{zz} es 0.

true

false

Número de preguntas respondidas correctamente:

Puntos obtenidos:

Porcentaje de éxito:

Ejemplo 1.6.1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2y^2 - x^4$ campo escalar

- La derivada parcial en dirección del vector $\mathbf{u} = (1, 0)$ es

$$D_1f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2 - 4x^3$$

- La derivada en dirección del vector $\mathbf{u} = (0, 1)$ es

$$D_2f(x, y) = 2x^2y$$

- La derivada, de la derivada en dirección del vector $\mathbf{u} = (1, 0)$, en la dirección del vector $\mathbf{u} = (1, 0)$, es

$$D_1D_1f(x, y) = D_{11}f(x, y) = 2y^2 - 12x^2$$

- Las otras derivadas son:

$$D_1D_2f(\mathbf{x}) = D_{12}f(\mathbf{x}) = 4xy$$

$$D_2D_1f(\mathbf{x}) = D_{21}f(\mathbf{x}) = 4xy$$

$$D_2D_2f(\mathbf{x}) = D_{22}f(\mathbf{x}) = 2x^2$$

En general, la derivada j -ésima de la derivada i -ésima se anota

$$D_j D_i(f) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

1.6.1 Cálculo de la derivada en un punto

Cuando se quiere calcular la derivada de una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en un punto, es frecuente que, dadas las características de la función, se deba utilizar la definición y no calcular primero la derivada en cualquier punto y luego evaluar en el punto particular. En campos escalares esto también debe tenerse presente.

EJERCICIO 15. Calcula $D_{12}f(0, 0)$ y $D_{21}f(0, 0)$ si f es el campo

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2 + y^2} & , si (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , si (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

El campo viene definido para valores diferentes del $(0, 0)$ y también en $(0, 0)$. Este es un caso típico de “doble personalidad”. Se deben ver ambos casos

- (a) Para los valores $(x, y) \neq (0, 0)$ se deriva como siempre

$$D_1f(x, y) = \dots\dots\dots$$

- (b) Como la derivada en el origen es puntual, se debe usar la definición

$$D_1f(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \dots\dots\dots$$

(c) De esta manera tenemos la función primera derivada parcial $D_1f(x, y)$ definida como

$$D_1f(x, y) = \begin{cases} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

Alguien puede estar preguntando ¿por qué esto?, puedo responderle que andamos detrás de una derivada mixta, como la D_{12} , y para llegar a ella debemos primero tener la D_2 . De igual forma, para llegar a la D_{21} primero debemos establecer la D_1 . Esta derivada la calculas tú con ese desplante y personalidad que te caracteriza.

(d) Para la derivada parcial en dirección de $(0, 0)$ y para los valores $(x, y) \neq (0, 0)$ se tiene

$$D_2f(x, y) = \dots\dots\dots$$

(e) La derivada parcial $D_2f(0, 0)$ es

$$D_2f(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h+0) - f(0, 0)}{h} = \dots\dots\dots$$

(f) Tienes entonces la función $D_2f(x, y)$ definida como

$$D_2f(x, y) = \begin{cases} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

(g) Ahora vamos por las derivadas mixtas.

$$D_{12}f(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{D_2f(h, 0) - D_2f(0, 0)}{h} = \dots$$

Análogamente

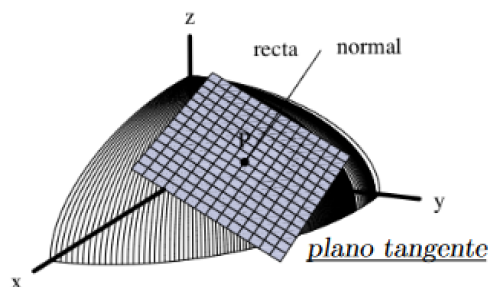
$$D_{21}f(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \dots\dots\dots = \dots$$

Te felicito, has obtenido las derivadas pedidas. Observa que $D_{12} = D_{21}$. ¿Quieres saber cuando existe igualdad? La respuesta “al tiro”

Si la función f , y las derivadas parciales D_1f , D_2f , $D_{12}f$ existen y son **continuas**, entonces la derivada parcial $D_{21}f$ existe y se tiene $D_{12} = D_{21}$

1.7 El Plano tangente

Se trata de una generalización de la noción de la **recta tangente** para funciones de una variable



Se llama plano tangente a una superficie en un punto P de la misma, al plano que contiene todas las tangentes a las curvas trazadas sobre la superficie por el punto P . La recta perpendicular a dicho plano por el punto P se llama **recta normal** a la superficie.



Definición 1.7.1. Sea S la superficie descrita por el campo escalar $z = f(x, y)$, que es diferenciable en (x_0, y_0) . La ecuación del plano tangente en el punto $(x_0, y_0, z_0 = f(x_0, y_0)) \in S$ viene dada por

$$z = f(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

<https://www.youtube.com/watch?v=BSg6HvehJLM>

<https://www.geogebra.org/m/E3VyTJNJ>

La ecuación de la recta normal es

$$\frac{x - x_0}{D_1 f(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{D_2 f(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$$

Ejemplo 1.7.2. Calcular el plano tangente a $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$ en $(1, 1)$

La coordenada que falta para el plano tangente resulta de reemplazar en la superficie el punto $(1, 1)$

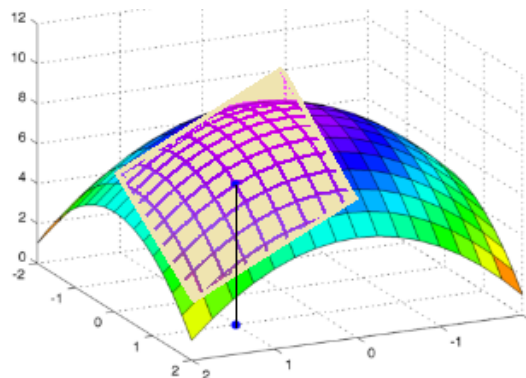
$$f(1, 1) = 9 - 1^2 - 1^2 = 7$$

se sigue que el punto en la superficie es $(1, 1, 7)$. Las derivadas parciales son

- $\frac{\partial f}{\partial x} = -2x \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = -2$
- $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = -2$

Por tanto, la ecuación del plano tangente en el punto $(1, 1)$ es:

$$z = 7 - 2(x - 1) - 2(y - 1) \Rightarrow 2x + 2y + z + 11 = 0$$



Si la superficie está definida de manera implícita por la ecuación $F(x, y, z) = 0$, entonces la ecuación del plano tangente en un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ de la superficie viene definido por la ecuación:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(P)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(P)(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(P)(z - z_0) = 0$$

Ejemplo 1.7.3. Hallar la ecuación del plano tangente, en el punto $P(1, -1, 4)$, al hiperboloide $z^2 - 2x^2 - 2y^2 - 12 = 0$.

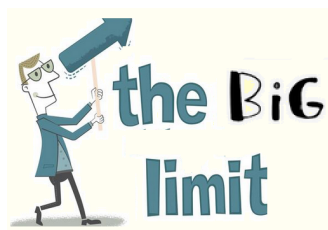
Calculamos, en primer lugar, las derivadas parciales y las evaluamos en el punto.

- $\frac{\partial f}{\partial x} = -4x \implies \frac{\partial f}{\partial x}(1, -1, 4) = -4$
- $\frac{\partial f}{\partial y} = -4y \implies \frac{\partial f}{\partial y}(1, -1, 4) = 4$
- $\frac{\partial f}{\partial z} = 2z \implies \frac{\partial f}{\partial z}(1, -1, 4) = 8$

Por tanto, la ecuación del plano tangente es

$$-4(x - 1) - 4(y + 1) + 8(z - 4) = 0 \implies x - 2y - 2z + 6 = 0$$

1.7.1 Campo escalar diferenciable



El campo $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en el punto (x_0, y_0) si $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ existen, y se satisface

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{|f(x,y) - [f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0) \cdot ((x,y) - (x_0,y_0))]|}{\|(x,y) - (x_0,y_0)\|} = 0$$

Observación. En el corchete se halla el plano tangente.

Esta definición significa que existe el plano tangente a f en (x_0, y_0) y es una buena aproximación de la superficie $z = f(x, y)$ suficientemente cerca del punto (x_0, y_0) . A veces, no es fácil el uso del gran límite, en esos casos puede resultar más simple el uso de la llamada **condición suficiente de diferenciabilidad**



Teorema 1.7.4. (Condición suficiente de diferenciabilidad). Sea $z = f(x, y)$ un campo escalar. Si las **funciones** derivadas parciales de f existen y son continuas en el punto de estudio, entonces f es diferenciable en ese punto.

Ejemplo 1.7.5. El campo escalar $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & , \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ tiene derivadas parciales en $(0, 0)$ pero no es diferenciable en dicho punto.

Las derivadas parciales en $(0, 0)$ son:

$$\bullet D_1 f(0, 0) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

$$\bullet D_2 f(0,0) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{0-0}{h} = 0$$

De esta manera, ambas derivadas parciales existen en el punto.

- Diferenciabilidad

Tenemos dos caminos: probar que una de las derivadas parciales no es continua o bien, hacer uso del “gran límite”. Vamos con este último.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{|f(x,y) - [f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0) \cdot ((x,y) - (x_0,y_0))]|}{\|(x,y) - (x_0,y_0)\|} = 0$$

Reemplazamos las derivadas parciales en $(0,0)$ y vemos que queda para calcular

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|\frac{x^2 y}{x^2 + y^2} - [0 + \nabla f(0,0) \cdot ((x,y) - (0,0))]|}{\|(x,y) - (0,0)\|}$$

El nbla son las derivadas parciales en $(0,0)$, de manera que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|\frac{x^2 y}{x^2 + y^2}|}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Las coordenadas polares están siempre atentas

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{|\frac{r^3 \cos^2 \theta \sin \theta}{r^2}|}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} (\cos^2 \theta \sin \theta)$$

Este límite NO existe, pues depende del ángulo.

En resumen, si quisiéramos estudiar la diferenciabilidad, lo que debemos hacer por regla general es:



- Si se ve que f es un campo de tipo polinómico, exponencial, trigonométrico, etc. o combinación de ellos, el campo es diferenciable.
- Si el campo no es continuo, no es diferenciable.
- Si no existe (con valor finito) alguna de las derivadas parciales (de primer orden) de f en x_0 , entonces f no es diferenciable en x_0 .

Ejemplo 1.7.6. Calcular la ecuación del plano tangente a la gráfica del campo escalar $f(x,y) = e^{xy}$ en el punto $(1,0,1)$. Utilizar este plano para hallar un valor aproximado de $f(1.1, -0.1)$.

Las derivadas parciales en el punto son:

$$\bullet \frac{\partial f}{\partial x} = y e^{xy} \implies \frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 0 \qquad \bullet \frac{\partial f}{\partial y} = x e^{xy} \implies \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 1$$

Se reemplaza en la ecuación del plano tangente

$$z = f(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Nos queda

$$z = 1 + (x - 1) \cdot 0 + (y - 0) \cdot 1 \implies z = 1 + y$$

Por tratarse de una exponencial, el campo escalar es diferenciable en $(1, 0, 1)$ (y en todo punto), por tanto, el plano tangente es una buena aproximación para valores cercanos. Se tiene

$$f(1.1, -0.1) = 1 - 0.1 = 0.9$$

En una calculadora el valor es 0.8958, ¡bastante cerca!

1.7.2 Consecuencias de la diferenciabilidad

- Si el campo escalar $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en el punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, entonces es continuo en $\mathbf{x}$.

El recíproco de este resultado es falso, el campo $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ es continuo en $(0, 0)$, pero no diferenciable en $(0, 0)$.

- Si el campo escalar $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en el punto $\vec{x}_0$, entonces la derivada direccional del campo f en cualquier dirección $\vec{u}$ existe en $\vec{x}_0$ y se tiene

$$D_{\vec{u}}f(\vec{x}_0) = Df(\vec{x}_0) \cdot \vec{u}$$

Ejemplo 1.7.7. Considera el campo escalar $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = 3x^2 - 2y^2$. Hallar la derivada direccional en el punto $(2, 3)$ en dirección del vector que une los puntos $(-1, 0)$ y $(0, 1)$.

La derivada del campo escalar la componen las derivadas parciales, esto es

$$Df(x, y) = (f_x, f_y) = (6x, -4y) \implies Df(2, 3) = (12, -12)$$

El vector unitario se obtiene restando los puntos

$$\vec{v} = (0, 1) - (-1, 0) = (1, 1) \implies \vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$$

Con estos datos la derivada direccional es

$$D_{\vec{u}}f(2, 3) = Df(2, 3) \cdot \vec{u} = (12, -12) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1) = 0$$

De esta manera, el campo no presenta cambios en dirección del vector unitario.

Trabajo con mi profe



EJERCICIO 16. Se considera el campo $f(x, y) = x^2 + y^2$

- Identifica y bosqueja esta superficie.
- Identifica las curvas de nivel y dibuja en el plano la correspondiente a $C = 2$.
- El punto $(1, 1)$ pertenece (si o no) a la curva de nivel ...
- Calcula la derivada direccional en $(1, 1)$ en dirección del punto $(2, 2)$...
- Calcula la derivada direccional en $(1, 1)$ en dirección del origen de coordenadas ...
- Encuentra la ecuación de la recta tangente a la curva de nivel $x^2 + y^2 = 2$. No olvides como se derivan las ecuaciones implícitas.
- Anota un vector director de la recta tangente y calcula la derivada direccional en esa dirección ...
- Halla un vector ortogonal a la curva de nivel en $(1, 1)$...
- Podemos barrer todas las direcciones sobre un círculo alrededor del $(1, 1)$ ¿Se te ocurre en que dirección puede ser mínima la derivada direccional, y en cuál es máxima? No importa que lo sepas a la primera, pero por lo menos ten una “sospecha”

1.7.3 Derivada direccional **no implica** continuidad

En el cálculo de las funciones de una variable se tiene que, si f tiene derivada en un punto, entonces f es continua en ese punto. El título parece sugerir que acá no se cumple, hay que estar atento al dicho que afirma, “las apariencias engañan”. Cuando algo no se cumple, con un ejemplo es suficiente. Veamos juntos esta situación.

EJERCICIO 17. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ campo escalar definido por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & , si (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , si (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

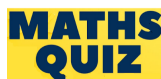
- Vamos a probar que este campo tiene derivada direccional en el origen en toda dirección, para ello elegimos $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ vector unitario, entonces

$$D_{\mathbf{u}}f(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(hu_1, hu_2) - f(0, 0)}{h} = \dots$$

- Si $u_2 = 0$, entonces el límite es ...
- Si $u_2 \neq 0$, entonces el límite es ... Veamos ahora si el campo es o no continuo en el origen
- El valor del campo en $(0, 0)$ es $f(0, 0) = \dots$
- Buscando límite tomemos el camino $S_1 = \{y = x^2\}$. Se tiene

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x^2) = \dots\dots\dots$$

Como no hay igualdad, el campo no es continuo.



Pasas con 100%.

Considerar el campo escalar $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^3}{(x^2 + y^2)^2} & , \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

1. La derivada f_x para todo $(x, y) \neq (0, 0)$ es:

$$\frac{2xy^3(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^3}$$

$$\frac{2xy^3(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{xy^3(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^3}$$

$$\frac{2xy^3(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^4}$$

2. La derivada f_y para todo $(x, y) \neq (0, 0)$ es:

$$\frac{x^2 y^2 (x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^4}$$

$$\frac{xy^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{x^2 y^2 (3x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^3}$$

$$\frac{xy^2(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^4}$$

3. Las derivadas parciales $f_x(0, 0)$ y $f_y(0, 0)$ son:

1

0

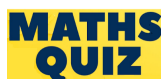
-1

no existen

4. Usando el gran límite, el campo es diferenciable en $(0, 0)$

True

False



Pasas con 100%.

Considerar el campo escalar $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^k}{x^2 + y^2} & , \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

1. Los valores de k para que el campo sea continuo en $(0, 0)$ es (son):

$k = 1$

$k < 1$

$k > 1$

$k = 0$

2. La derivada parcial $f_x(0, 0)$ es

0

1

-1

no existe

3. La derivada parcial $f_y(0, 0)$ es

1

0

-1

no existe

4. Usando el gran límite, el valor de k para que el campo sea diferenciable en $(0, 0)$ es:

$k < 2$

$k < 1$

$k > 1$

$k > 2$

1.8 ¡El Gradiente “la lleva”!

Te vas a dar cuenta que para la derivada direccional y para el plano tangente el gradiente es “ídolo”, todo lo que haga es sagrado. Te cuento, para una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definimos la derivada como

$$Df(\mathbf{x}) = (D_1 f, D_2 f, \dots, D_n f)(\mathbf{x})$$

Se llama **gradiente** del campo $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, que se denota $\nabla f(\mathbf{x})$ al campo *vectorial*

$$\nabla f(\mathbf{x}) = (D_1 f(\mathbf{x}), \dots, D_n f(\mathbf{x}))$$

Esto significa que nuestra derivada es el gradiente. Con ello tenemos que

- La derivada direccional del campo f se puede calcular mediante la expresión

$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}$$

EJERCICIO 18. Se considera el campo escalar $f(x, y) = y - x^2$

- El vector gradiente es $\nabla f(\mathbf{x}) = \dots$
- Dibuja la curva de nivel correspondiente a $k = 2$.
- Calcula y dibuja el vector gradiente en el punto $(1, 3)$ de la curva de nivel
- Encuentra la ecuación de la recta tangente a la curva de nivel para $k = 2$ en el punto $(1, 3)$
- Anota un vector director de esta recta tangente
- Calcula el producto punto entre el gradiente y el vector tangente a la curva de nivel en $(1, 2)$
- Anota un vector perpendicular a la recta tangente en $(0, 2) \dots$
- Calcula el producto punto entre el gradiente y el vector perpendicular a la curva de nivel ...
¿Qué me dices?, casualidad. Tranquilo, ya veremos esto con más calma.

1.8.1 Dirección de máximo crecimiento

Ya hemos tenido oportunidad de hacer algunos cálculos que involucran la derivada direccional y al gradiente. Vamos a probar que el vector gradiente proporciona la dirección en que f crece más rápidamente, y que esta dirección es ortogonal a las superficies de nivel de f . En efecto, tenemos que

$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}$$

y sabemos que

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (\text{comp}_{\mathbf{b}} \mathbf{a}) \|\mathbf{b}\|$$

Luego,

$$\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u} = \|\mathbf{u}\| (\text{comp}_{\mathbf{u}} \nabla f(\mathbf{x}))$$

y como el vector $\mathbf{u}$ es unitario, entonces

$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u} = (\text{comp}_{\mathbf{u}} \nabla f(\mathbf{x}))$$

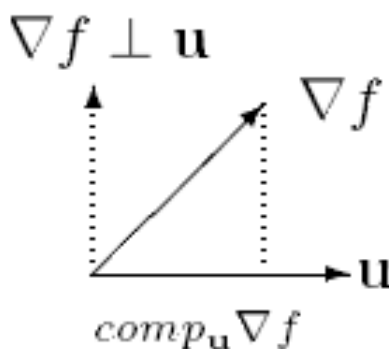
Con esto tenemos que,

la derivada direccional en la dirección del vector unitario $\mathbf{u}$ es igual a la componente del gradiente en esa dirección.

Se sigue que:

- Si $\nabla f \perp \mathbf{u}$ entonces $D_{\mathbf{u}} f = 0$
- Si $\nabla f \parallel \mathbf{u}$, entonces $D_{\mathbf{u}} f$ es **máxima**, y este máximo es $\|\nabla f\|$

Es obvio, evidente y trivial (frases típicas de los profes) que el **mínimo** se encuentra en dirección opuesta a la del máximo, y su valor es $-\|\nabla f\|$.



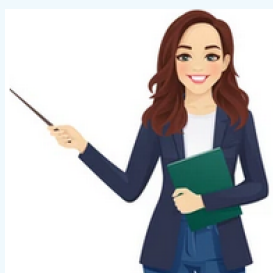
1.9 Algo más sobre el Plano Tangente

Habíamos visto plano tangente para la gráfica de un campo $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Veamos que sucede al tomar un campo $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, el cual, por supuesto no podemos graficar. Si $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una trayectoria definida sobre el dominio el campo escalar f , y si $\nabla f(\alpha(t)) \neq \mathbf{0}$, entonces el **plano tangente** tiene ecuación

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \nabla f(\mathbf{x}_0) = 0$$

Esto significa que para esta clase de campos debemos situarnos sobre una curva de nivel

Trabajo con mi profe



EJERCICIO 19. Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ campo escalar tal que $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = w = z - 2x^2 - y^2$. Una superficie de nivel de este campo para $w = 0$, es $z - 2x^2 - y^2 = 0$. Hallemos la ecuación del plano tangente en $(1, 2, 6)$ a esta superficie.

- (a) Para la ecuación del plano se necesita un vector normal, ¿qué te parece el vector gradiente? Por favor, ten la amabilidad de calcularlo en el punto.

$$\nabla f(x, y, z) = \dots \implies \nabla f(1, 2, 6) = \dots$$

- (b) El punto del plano es ...
 (c) En consecuencia, la ecuación del plano es ...
 (d) Al desarrollar y simplificar se tiene que ...

EJERCICIO 20. Hallar la dirección y magnitud de la máxima razón de cambio del campo $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ en el punto $(1, 1)$.

- (a) Si piden la máxima razón de cambio de un campo, es por que debemos ir en dirección del ...
 (b) Calcula $\nabla f(x, y) = \dots \implies \nabla f(1, 1) = \dots$
 (c) Por tanto, la dirección unitaria es $\mathbf{u} = \dots$
 (d) El máximo cambio es ...

Trabajo con mi profe



EJERCICIO 21. Sea $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ el potencial eléctrico en cualquier punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Hallar la razón de cambio del potencial en $(1, 1, 1)$ en la dirección del vector $(0, -1, 1)$.

Como aporte a la cultura, se denomina **potencial** de un campo vectorial $\mathbf{F}$ al campo escalar f que satisface que $\nabla f = \mathbf{F}$

- (a) La razón de cambio del potencial en un punto en la dirección de un vector unitario viene dado por la derivada direccional.

$$\nabla f(x, y, z) = \dots\dots\dots$$

- (b) Un vector unitario, a partir del $(1, 1, 1)$ en la dirección del vector $(0, -1, 1)$ es ...

- (c) Ahora, la derivada direccional y listo

$$D_{\mathbf{u}}f(1, 1, 1) = \dots\dots\dots$$

- (d) ¿Eres capaz de determinar en qué dirección, a partir del $(1, 1, 1)$ se produce la máxima razón de cambio y cuánto es? ...

1.10 Regla de la cadena

La regla de la cadena se utiliza para hallar la derivada de una función que es la composición de otras dos funciones. Recordemos la regla de la cadena dada para funciones reales de una variable:

Si $f(x)$ es derivable en x_0 y $g(x)$ es derivable en $f(x_0)$, entonces $(g \circ f)(x)$ es derivable en x_0 y se verifica

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

Una versión equivalente y sencilla de extender a varias variables es la siguiente:

Sean $y = f(x)$, $x = g(t)$ funciones derivable, entonces la función y es una función derivable con respecto a t y se cumple

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

Caso 1 (regla de la cadena para una variable independiente)

Si $z = f(x, y)$ es una función diferenciable de x y de y , donde $x = g(t)$ e $y = h(t)$ son funciones derivables de t , entonces z es una función derivable de t y se cumple que

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

Si manejas el siguiente esquema, nunca entrarás en pánico.

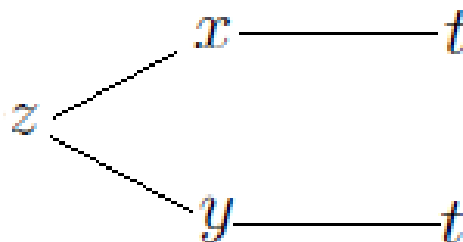


Figura 1.8

Ejemplo 1.10.1. Sea $z = x^2y - y^2$, con $x = \sin t$, $y = \cos t$. Calcular $\frac{dz}{dt}$ cuando $t = 0$.

Tenemos una variable independiente (t). Algunos datos:

$$\bullet \frac{\partial z}{\partial x} = 2xy \quad \bullet \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 - 2y \quad \bullet \frac{dx}{dt} = \cos t \quad \bullet \frac{dy}{dt} = -\sin t$$

Con estos datos

$$\frac{dz}{dt} = 2xy \cdot \cos t + (x^2 - 2y) \cdot (-\sin t)$$

Como piden en $t = 0$, y se sabe que cuando $t = 0$ es $x = 0$ e $y = 1$, reemplazamos en la última expresión para tener

$$\frac{dz}{dt}(t = 0) = 0 \cdot 1 + (0 - 2) \cdot 0 = 0$$

Caso I (generalización)

Si z es una función derivable de las n variables $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, en donde cada x_i es una función de t , entonces z es una función derivable de t y se cumple:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dt} \dots + \frac{\partial z}{\partial x_n} \cdot \frac{dx_n}{dt}$$

EJERCICIO 22. Hallar $\frac{dz}{dt}$ si se consideran:

$$z = f(x, y) = 300 - 20x^2 + 30y, \quad x = t + 2, \quad y = 4 + t^2$$

(a) El campo f va de en

(b) La función vectorial es $g(t) = \dots$, y ella va de en

(c) Calcula las siguientes derivadas.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \dots$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \dots$$

$$\frac{dx}{dt} = \dots$$

$$\frac{dy}{dt} = \dots$$

(d) Luego, $\frac{dz}{dt} = \dots$

(e) En términos de t se tiene $\frac{dz}{dt} = \dots$. Con el fin de comprobar que lo realizado está correcto te invito a:

(f) Reemplaza x e y en el campo para que te quede todo en función de t

$$f(g(t)) = \dots$$

(g) Ahora deriva f respecto de t . Tienes que $\frac{\partial f}{\partial t} = \dots$

Caso 2 : (para dos variables independientes)

Si $w = f(x, y)$, $x = g(s, t)$ e $y = h(s, t)$ son diferenciables, entonces

$$\frac{dw}{ds} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

Para recordar, el esquema que conduce al éxito.

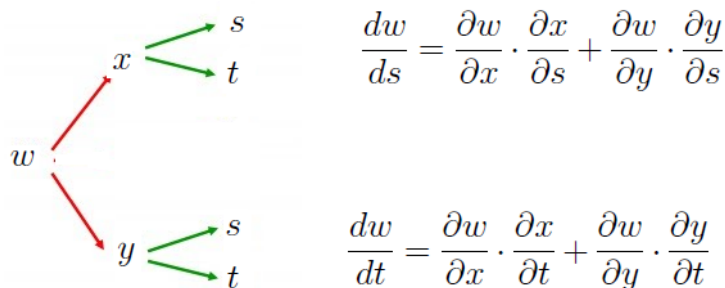


Figura 1.9

EJERCICIO 23. Sea $w = xy$, $x = s^2 + t^2$, $y = st$. Hallar $\frac{\partial w}{\partial s}$ y $\frac{\partial w}{\partial t}$.

(a) El campo w va de en

(b) El campo $g(s, t) = \dots$ va de en

(c) Luego,

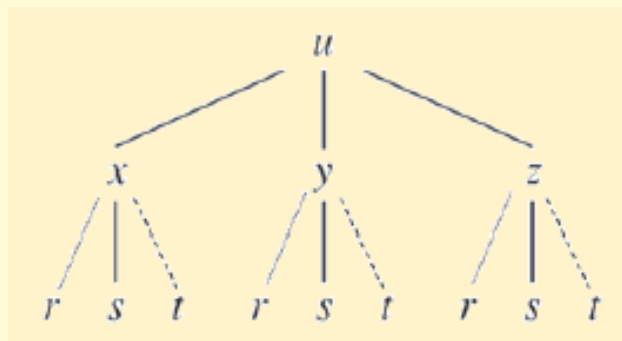
$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = \dots$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} = \dots$$



Desafío 8.

1. Si $u = x^4y + y^2z^3$, con $x = rse^t$, $y = rs^2e^{-t}$ y $z = r^2s \operatorname{sen} t$, el valor de $\frac{\partial u}{\partial s}$ cuando $r = 2$, $s = 1$ y $t = 0$ es (no olvides el esquema):



190

192

80

120

Número de preguntas respondidas correctamente:

Puntos obtenidos:

Porcentaje de éxito:

1.11 Derivada de Funciones implícitas

Una ecuación de la forma $F(x, y, z) = 0$ representa una superficie en el espacio tridimensional, que es posible considerarla como superficie de nivel de un campo escalar $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $(x, y, z) \mapsto F(x, y, z) = w$, con $w = 0$, ó bien, lo que es más interesante, como la gráfica de un campo escalar $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Al respecto, esto es posible bajo ciertas condiciones y de una forma local tal como lo asegura el teorema de la función implícita.



Teorema 1.11.1. (de la función implícita) Sea $F(x, y)$ campo escalar que satisface las condiciones:

- $F(x_0, y_0) = 0$
- F es de clase ζ^1 y $F_y \neq 0$ en $V(x_0, y_0)$.

entonces $\forall x \in V(x_0, y_0)$ **existe** una función $y = f(x)$ continua y derivable, que cumple que $F(x, f(x)) \equiv 0$, y cuya derivada viene dada por

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(x_0, y_0)} = -\frac{F_x}{F_y}(x_0, y_0)$$

Ejemplo 1.11.2. Hallar y' en $(1, 1)$ si $5y^5 - 10xy + 5x^5 = 0$.

Es claro que no es posible despejar el y para derivar en forma explícita. Aquí es donde entra a participar el teorema de la función implícita. Vamos a establecer los pasos que justifican el uso del teorema.

- Escribimos la ecuación dada como una ecuación implícita:

$$F(x, y) = 5y^5 - 10xy + 5x^5$$

- Verificamos que

$$F(1, 1) = 0$$

- El campo F es de clase ζ^1 , pues se trata de un polinomio.
- La derivada de F respecto de y es

$$F(x, y) = 5y^5 - 10xy + 5x^5 \implies F_y = 25y^4 - 10x \implies F_y(1, 1) = 15 \neq 0$$

Están todos los ingrediente para escribir el valor de la derivada

$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{25x^4 - 10y}{25y^4 - 10x} \implies y'(1, 1) = -1$$

Otra aplicación del teorema de la función implícita es el siguiente:

Ejemplo 1.11.3. Usar el teorema de la implícita para hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ si

$$3x^2z - x^2y^2 + 2z^3 + 3yz - 5 = 0$$

En primer lugar, se calculan las derivadas:

$$F_x = 6xz - 2xy^2, \quad F_y = 3z - 2x^2y, \quad F_z = 3x^2 + 6z^2 + 3y$$

Con esto es suficiente para aplicar el teorema

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{6xz - 2xy^2}{3x^2 + 6z^2 + 3y} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{3z - 2x^2y}{3x^2 + 6z^2 + 3y} \end{aligned}$$

La siguiente es una aplicación algebraica del teorema

Ejemplo 1.11.4. Probar que $xz^3 + yz + 6 = 0$ se puede resolver para z en la vecindad $V(0, 2, -3)$ y calcular las derivadas parciales z_x , z_y

Se escribe la ecuación como implícita:

$$F(x, y, z) = xz^3 + yz + 6$$

Hay que ver si están dadas las condiciones que se piden:

$$F(0, 2, -3) = 0$$

Veamos si la derivada es distinta de cero

$$F_z(x, y, z) = 3xz^2 + y \implies F_z(0, 2, -3) = 2 \neq 0$$

Para las derivadas parciales se tiene

$$\frac{\partial F}{\partial x} = z^3, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = z, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 3xz^2 + y$$

Bajo estas condiciones, $F(x, y, z)$ es de clase ζ^1 y se puede resolver para z pues se satisfacen las condiciones impuestas por el teorema. Finalmente, las derivadas pedidas son:

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{z^3}{3xz^2 + y} \implies z_x(0, 2, -3) = -\frac{27}{2}$$

$$z_y = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{z}{3xz^2 + y} \implies z_y(0, 2, -3) = -\frac{3}{2}$$

Una aplicación final tiene que ver con el plano tangente.

Ejemplo 1.11.5. Considerar la superficie $F(x, y, z) = xyz + \ln(xyz) - z = 0$. Hallar la ecuación del plano tangente en $(1, 1, 1)$.

Para ecuaciones implícitas, la ecuación del plano tangente es

$$z - z_0 = -\frac{F_x}{F_z}(P)(x - x_0) - \frac{F_y}{F_z}(P)(y - y_0)$$

O bien

$$F_x(P)(x - x_0) + F_y(P)(y - y_0) + F_z(P)(z - z_0) = 0$$

¡Manos a la obra!

- $F_x = yz + \frac{1}{x} \implies F_x(1, 1, 1) = 2$
- $F_y = xz + \frac{1}{y} \implies F_y(1, 1, 1) = 2$
- $F_z = xy + \frac{1}{z} \implies F_z(1, 1, 1) = 2$

La ecuación del plano tangente es

$$(x - 1) \cdot 2 + (y - 1) \cdot 2 + (z - 1) \cdot 2 = 0$$

Reduciendo

$$2x + 2y + 2z - 6 = 0$$

1.12 Extremos en campos escalares

Se generalizan las técnicas empleadas para hallar valores extremos para una función de una variable a un campo escalar de dos y tres variables.

Definición 1.12.1.

- ✓ Una función f de dos variables, tiene un **máximo local** en el punto $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ si existe un entorno abierto $E(p)$ tal que

$$f(x, y) \leq f(p) \text{ para todo } (x, y) \in E(p)$$

El punto $(p_1, p_2, f(p))$ se dice un **máximo local** de f y el número $f(p)$ es el **máximo** de f en el entorno $E(p)$.

- ✓ Una función f de dos variables, tiene un **mínimo local** en $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ si existe un entorno abierto $E(p)$ tal que

$$f(x, y) \geq f(p) \text{ para todo } (x, y) \in E(p)$$

El punto $(p_1, p_2, f(p))$ se dice un **mínimo local** de f y el número $f(p)$ es el **mínimo** de f en el entorno $E(p)$.

Si las desigualdades de la definición se cumplen **para todos** los puntos (x, y) en el dominio de f , entonces f tiene un **máximo absoluto**, o un **mínimo absoluto**, en (p_1, p_2) .

Definición 1.12.2.

- Todo número que sea **máximo** o **mínimo** relativo del campo f se llama **extremo** de f
- Aquellos puntos en donde **todas** las derivadas parciales son cero se llaman **puntos críticos** de f
- Un punto crítico que sea **NO** sea **máximo** ni **mínimo** se llama punto **silla**.

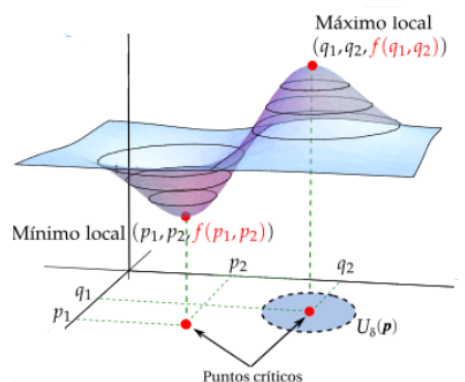


Figura 1.10

Ejemplo 1.12.3. Hallar los puntos críticos del campo $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2$

Lo primero es igualar las derivadas parciales a cero.

$$\nabla f(x, y) = (f_x, f_y) = (0, 0)$$

Se resuelve el sistema

$$\begin{cases} f_x = 2x - 2y = 0 \\ f_y = -2x + 4y = 0 \end{cases}$$

La solución es $x = 0$ e $y = 0$

1.12.1 Matriz Hessiana

La matriz hessiana de un campo escalar $f(x, y, z, \dots)$, que se anota $H(f)$, organiza todas las derivadas parciales de segundo orden en una matriz.

$$H(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} & \cdots \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} & \cdots \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} & \cdots \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} & \cdots \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix}$$

1.12.2 Criterio de la segunda derivada

Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ campo escalar con sus segundas derivadas parciales continuas sobre un abierto A de $\mathbb{R}^2$. Sea $p = (x_0, y_0) \in A$ punto crítico. La matriz Hessiana

$$H(p) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}(p)$$

afirma que

- Si $|H(p)| > 0$ y $f_{xx}(p) > 0$, el campo f tiene un mínimo local en p .
- Si $|H(p)| > 0$ y $f_{xx}(p) < 0$, el campo f tiene un máximo local en p .
- Si $|H(p)| < 0$, el campo tiene un punto de silla en p .
- Si $|H(p)| = 0$, no hay información, y se debe buscar otra forma de caracterizar al punto p .

Ejemplo 1.12.4. Hallar los puntos críticos del campo escalar $f(x, y) = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$ y determinar su naturaleza.

En primer lugar se hallan las derivadas parciales y se igualan a cero

$$\begin{cases} D_1 f(\mathbf{x}) = 8x^3 - 2x = 0 \\ D_2 f(\mathbf{x}) = 4y^3 - 4y = 0 \end{cases}$$

Se puede factorizar

$$\begin{cases} D_1 f(\mathbf{x}) = 2x(4x^2 - 1) = 0 \\ D_2 f(\mathbf{x}) = 4y(y^2 - 1) = 0 \end{cases}$$

Al resolver se hallan los siguientes puntos críticos:

$$(0, 0), (0, -1), (0, 1), \left(\frac{1}{2}, 0\right), \left(-\frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{1}{2}, 1\right), \left(\frac{1}{2}, -1\right), \left(-\frac{1}{2}, 1\right), \left(-\frac{1}{2}, -1\right)$$

Las derivadas de orden superior tienen los valores:

$$\begin{aligned} D_{11} &= 24x^2 - 2 & D_{12} &= D_1(D_2) = 0 \\ D_{22} &= 12y^2 - 4 & D_{21} &= D_2(D_1) = 0 \end{aligned}$$

Ahora hacemos uso de la Hessiana, cuya expresión es

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} 24x^2 - 2 & 0 \\ 0 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix}$$

Evaluamos la Hessiana en cada punto crítico:

$$H(0, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad |H| > 0, \quad a_{11} < 0. \text{ Máximo}$$

$$H(0, -1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}, \quad |H| = -16 < 0. \text{ Punto silla}$$

$$H(0, 1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}, \quad |H| = -16 < 0. \text{ Punto silla}$$

$$H\left(\frac{1}{2}, 0\right) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad |H| = -16 < 0. \text{ Punto silla}$$

$$H\left(-\frac{1}{2}, 0\right) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad |H| = -16 < 0. \text{ Punto silla}$$

$$H\left(\frac{1}{2}, 1\right) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}, \quad |H| = -16 < 0. \text{ M\u00ednimo}$$

$$H\left(\frac{1}{2}, -1\right) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}, \quad |H| = -16 < 0. \text{ M\u00ednimo}$$

$$H\left(-\frac{1}{2}, 1\right) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}, \quad |H| = -16 < 0. \text{ M\u00ednimo}$$

$$H\left(-\frac{1}{2}, -1\right) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}, \quad |H| = -16 < 0. \text{ M\u00ednimo}$$

Se concluye que hay 4 puntos silla, que son:

$$(0, -1), \quad (0, 1), \quad \left(\frac{1}{2}, 0\right), \quad \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$$

Hay 4 puntos de m\u00ednimo, que son:

$$\left(\frac{1}{2}, 1\right), \quad \left(\frac{1}{2}, -1\right), \quad \left(-\frac{1}{2}, 1\right), \quad \left(-\frac{1}{2}, -1\right)$$

Los valores m\u00ednimos del campo son (en todos los casos):

$$-\frac{9}{8}$$

Hay un m\u00e1ximo en el punto $(0, 0)$ y su valor es 0.

1.12.3 La Hessiana en $\mathbb{R}^3$

- El campo escalar $f(x, y, z)$ tiene un **mínimo** relativo en un punto, si la matriz Hessiana satisface:

$$0 < |H| = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{vmatrix}, \quad 0 < \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}, \quad f_{xx} > 0$$

- El campo escalar $f(x, y, z)$ tiene un **máximo** relativo en un punto, si la matriz Hessiana satisface:

$$H < 0, \quad 0 < \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}, \quad f_{xx} < 0$$

EJERCICIO 24. Hallar los extremos del campo $w = -x^3 + 3xz + 2y - y^2 - 3z^2$ y determinar su naturaleza.

- (a) Lo primero es derivar e igualar a cero las derivadas parciales de w .

$$\begin{cases} w_x = \dots\dots\dots = 0 \\ w_y = \dots\dots\dots = 0 \\ w_z = \dots\dots\dots = 0 \end{cases}$$

- (b) Al resolver este sistema obtienes los puntos críticos $\dots\dots\dots$ y $\dots\dots\dots$

- (c) Para formar la Hessiana en el punto necesitas las derivadas mixtas y de orden superior, en cada punto crítico

$$\begin{aligned} w_{xx} &= \dots\dots\dots, & w_{xy} &= \dots\dots\dots, & w_{xz} &= \dots\dots\dots \\ w_{yy} &= \dots\dots\dots, & w_{yx} &= \dots\dots\dots, & w_{yz} &= \dots\dots\dots \\ w_{zz} &= \dots\dots\dots, & w_{zx} &= \dots\dots\dots, & w_{zy} &= \dots\dots\dots \end{aligned}$$

- (d) Lista la Hessiana:

$$H(0, 1, 0) = \begin{vmatrix} \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{vmatrix} \quad H\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}\right) = \begin{vmatrix} \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{vmatrix}$$

- (e) Concluyes que hay un punto de silla, y un máximo cuyo valor es ...

1.13 Multiplicadores de Lagrange

Se utilizan para resolver problemas de optimización con restricciones de igualdad.

Veamos una actividad que muestra la versión geométrica de los multiplicadores de Lagrange

Ejemplo 1.13.1. Se considera el campo escalar $f(x, y) = xy$, de manera que sus coordenadas estén restringidas a cumplir que

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$$

Se puede suponer que la elipse corresponde a una curva de nivel del campo

$$g(x, y) = \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2}$$

Por otra parte, algunas curvas de nivel del campo escalar son:

- $z = 1 \implies xy = 1$ una hipérbola.
- $z = -1 \implies xy = -1$ una hipérbola.
- $z = 2 \implies xy = 2$ una hipérbola.
- $z = -2 \implies xy = -2$ una hipérbola.

En la gráfica ponemos estas curvas de nivel y la restricción

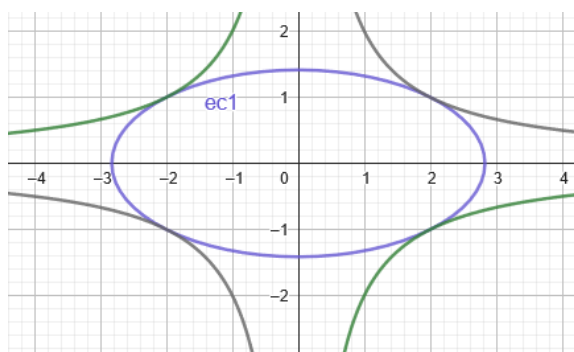


Figura 1.11

De la figura 1.11 se observa que las curvas de nivel de f intersecan en cuatro puntos a la curva restricción g . Se sabe que el gradiente es perpendicular a toda curva de nivel en todo punto, en particular en esos cuatro puntos. Así, los nablas de f y g son paralelos

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$$

Esta idea geométrica la consideró Lagrange, estableciendo que, si $\vec{x}_0$ es un punto crítico, se debe cumplir que

$$\nabla f = \lambda \nabla g \implies (f_x, f_y) = \lambda (g_x, g_y)$$

de lo cual

$$\begin{cases} f_x - \lambda g_x = 0 \\ f_y - \lambda g_y = 0 \end{cases}$$

si se agrega la restricción $g(x, y) = 0$ a estas ecuaciones, entonces

$$\begin{cases} f_x - \lambda g_x = 0 \\ f_y - \lambda g_y = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

sistema que es equivalente a la llamada **ecuación de Lagrange**

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) \pm \lambda g(x, y)$$

Volvamos a la actividad que estamos realizando. Como el campo es $f(x, y) = xy$, y la restricción a cumplir es

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$$

entonces la ecuación de Lagrange toma la forma

$$L(x, y, \lambda) = xy - \lambda \left(\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 \right)$$

A partir de esto formamos el sistema equivalente

$$\begin{cases} L_x = y - \lambda \cdot \frac{x}{4} = 0 \\ L_y = x - \lambda \cdot y = 0 \\ L_\lambda = \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0 \end{cases}$$

De la ecuación L_y se tiene que

$$x = \lambda y$$

Al reemplazar en L_x , es

$$y \left(1 - \frac{\lambda^2}{4} \right) = 0$$

obteniéndose que

$$y = 0 \quad \text{o bien} \quad \lambda = \pm 2$$

Se analizan ambos casos:

Caso $x = 0$

- Si $y = 0$, entonces $x = 0$. No satisface la tercera ecuación.

Caso $\lambda = 2$

- Se forma el sistema

$$\begin{cases} y - \frac{x}{2} = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

despejando la variable y se halla que $y = \frac{x}{2}$. Con esto vamos a la tercera ecuación

$$\frac{x^2}{8} + \frac{x^2}{8} = 1 \implies x = \pm 2$$

Se forman los siguientes puntos críticos:

- Si $x = 2$, entonces $y = 1$, con lo cual $(2, 1)$ es crítico.
- Si $x = -2$, entonces $y = -1$, con lo cual $(-2, -1)$ es crítico.

Caso $\lambda = -2$

- Se forma el sistema

$$\begin{cases} y + \frac{x}{2} = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

despejando la variable y se halla que $y = -\frac{x}{2}$. Con esto vamos a la tercera ecuación

$$\frac{x^2}{8} + \frac{x^2}{8} = 1 \implies x = \pm 2$$

se sigue que

- Si $x = 2$, entonces $y = -1$, con lo cual $(2, -1)$ es crítico.
- Si $x = -2$, entonces $y = 1$, con lo cual $(-2, 1)$ es crítico.

Los puntos críticos son

$$(2, -1), \quad (2, 1), \quad (-2, -1), \quad (-2, 1)$$

Como estamos trabajando Lagrange, reemplazamos cada punto en el campo escalar $f(x, y) = xy$. Se tiene

$$\bullet f(2, -1) = -2 \qquad \bullet f(2, 1) = 2 \qquad \bullet f(-2, -1) = 2 \qquad \bullet f(-2, 1) = -2$$

Por tanto, el máximo es 2 y está en los puntos $(2, 1)$ y $(-2, -1)$. El mínimo está en los puntos $(2, -1)$ y $(-2, 1)$, y tiene el valor -2.

Procedimiento

Sea $z = f(x, y)$ un campo escalar definido en un dominio sometido a una restricción del tipo $g(x, y) = 0$. Para determinar los extremos relativos de la función en el dominio restringido se procede de la siguiente manera:

- Se introduce un multiplicador de Lagrange $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Se construye la función auxiliar

$$L(x, y, z) = f(x, y) + \lambda \cdot g(x, y)$$

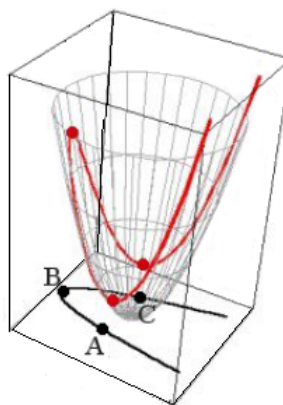
- Se resuelve el siguiente sistema con respecto a las variables x, y, λ . (condiciones de primer orden)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x} = L_x = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = L_y = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = L_\lambda = 0 \end{array} \right.$$

- Los extremos relativos (si existen) se encuentran entre los puntos del dominio dados por las soluciones de este sistema.

Otro aspecto geométrico que puede ayudar a comprender mejor el uso del multiplicador es el siguiente:

Para tener una idea de la situación a resolver, la figura muestra la superficie generada por un campo escalar $z = f(x, y)$ y una curva restricción $g(x, y) = 0$ (una parábola). El problema consiste en hallar los valores extremos en la superficie, pero solo cuando se toman valores en la parábola. Se observa en la figura que en los puntos A y C existirían mínimos relativos y en el punto B un máximo relativo.



Observación.

- Con la introducción del multiplicador de Lagrange λ en el problema de restricción, se ha transformado un problema con restricción de dos variables al problema de encontrar los puntos críticos de una función $L(x, y, \lambda)$ de una variable más. Es decir, se reduce de un problema de optimización con restricción de dos variables a un problema de optimización sin restricción en tres variables.
- Si la función posee más de una restricción se introducen tantos multiplicadores como restricciones tenga.

Ejemplo 1.13.2. Determinar los extremos de la función $f(x, y) = 3x + 4y - 3$. Si el punto (x, y) está sobre la circunferencia $(x - 1)^2 + y^2 = 25$.

Hay que formar la ecuación de Lagrange

$$L(x, y, \lambda) = 3x + 4y - 3 - \lambda \cdot (x^2 - 2x + y^2 - 24)$$

Con las derivadas parciales de L igualadas a cero se forma el sistema

$$\begin{cases} L_x = 3 - 2x\lambda + 2\lambda = 0 \implies 3 + 2\lambda(1 - x) = 0 \\ L_y = 4 - 2y\lambda = 0 \implies 2(2 - y\lambda) = 0 \\ L_\lambda = -(x^2 - 2x + y^2 - 24) = 0 \implies x^2 - 2x + y^2 - 24 = 0 \end{cases}$$

Se despeja λ en la primera y segunda ecuación

- $3 + 2\lambda(1 - x) = 0 \implies \lambda = \frac{3}{2(x - 1)}$
- $2(2 - y\lambda) = 0 \implies \lambda = \frac{2}{y}$

Al igualar estos λ se tiene

$$\frac{3}{2(x - 1)} = \frac{2}{y} \implies y = \frac{4}{3}(x - 1)$$

Este resultado se lleva a la ecuación L_λ

$$L_\lambda = x^2 - 2x + y^2 - 24 = 0 \implies x^2 - 2x + \left(\frac{4}{3}(x - 1)\right)^2 - 24 = 0$$

Al resolver para x se hallan

$$x = 4, \quad x = -2$$

con lo cual, los valores de y son

$$y = 4, \quad y = -4$$

Los puntos críticos son:

$$(4, 4) \quad \text{y} \quad (-2, -4)$$

Así, $(-2, -4)$ y $(4, 4)$ son los únicos puntos posibles para los cuales f tiene un extremo relativo. Luego, se sustituye estos puntos en la función objetivo

- $f(-2, -4) = 3(-2) + 4(-4) - 3 = -6 - 16 - 3 = -25$
- $f(4, 4) = 3(4) + 4(4) - 3 = 12 + 16 - 3 = 25$

Por tanto, el valor mínimo relativo es -25 y el valor máximo relativo es 25 .

Trabajo con mi profe



EJERCICIO 25. Hallar los puntos de la superficie $x^2 - z^2 - 1 = 0$ más próximos al origen.

- (a) ¿Te diste cuenta que hay un problema de distancia? Llama (x, y, z) el punto de la superficie que hace la distancia menor. Establece la función distancia entre ese punto y el origen (al cuadrado, ¡please!)

$$d^2(x, y, z) = \dots\dots\dots$$

- (b) Esta distancia debe ser mínima ¿Hay alguna restricción o condición que se deba cumplir? Exacto, que el punto ese pertenezca a la superficie. Esta es tu **restricción**

$$g(x, y, z) = \dots\dots\dots$$

- (c) Con la función y la restricción formas la ecuación $H(x, y, z, \lambda)$

$$L(x, y, z, \lambda) = \dots\dots\dots$$

- (d) Ahora, deriva e iguala a cero las derivadas parciales

$$L_x = \dots\dots\dots = 0$$

$$L_y = \dots\dots\dots = 0$$

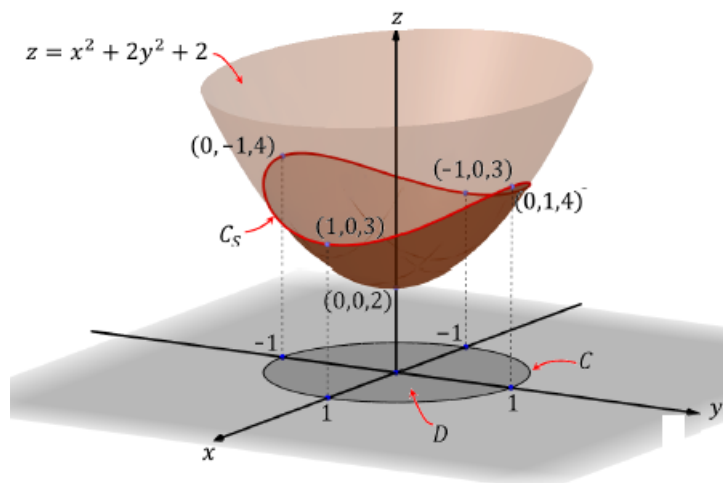
$$L_z = \dots\dots\dots = 0$$

$$L_\lambda = \dots\dots\dots = 0$$

- (e) Todo depende de tu habilidad para resolver esta clase de sistemas. Por lo general, la última ecuación recibe todas las sustituciones de las otras. De cada ecuación obtienes algo. Te dejo en absoluta libertad para trabajar.

1.13.1 Extremos Absolutos

Todo campo $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, diferenciable sobre una región cerrada y acotada, alcanza un valor máximo o mínimo en un punto extremo o en un punto en la frontera de la región. Para hallar los máximos o mínimos absolutos se deben buscar primero los relativos y luego trabajar en la frontera. El mayor es máximo absoluto y el menor mínimo absoluto.



Para tener una idea; la figura muestra un paraboloide de ecuación $z = x^2 + 2y^2 + 2$ y una restricción de sus variables al disco $D = \{(x, y) / x^2 + y^2 \leq 1\}$. La curva frontera es la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. Al proyectar el disco en dirección del eje z se obtiene un cilindro que intersecta la superficie tal como lo muestra la figura. Lo que interesa estudiar es la parte de la superficie que corresponde al interior del disco, y la curva frontera del disco (intersección del paraboloide y el cilindro).

Con solo mirar la figura se puede “conjeturar” que hay mínimo en $(0, 0)$, máximos en $(0, \pm 1)$ y otros mínimos en $(\pm 1, 0)$, pero ¿Cómo se llega a esto? Te cuento de inmediato.

Para identificar los extremos absolutos, se procede de la siguiente manera:

- Se localizan todos los candidatos a extremos, es decir, todos los
 - puntos críticos situados en el interior del dominio.
 - posibles extremos situados en la frontera del dominio.
- Evaluamos la función en cada uno de estos puntos.
- Se seleccionan los puntos donde la función alcanza sus extremos absolutos.

Ejemplo 1.13.3. Determinar los extremos absolutos de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ en el recinto $x^2 - 2x + y^2 - 3 \leq 0$.

El recinto se expresa como $(x - 1)^2 + y^2 \leq 4$, representa un círculo con centro en $(1, 0)$ y radio 2. En primer lugar hallamos los puntos críticos en el interior del recinto, igualando a cero las dos derivadas parciales.

$$\begin{cases} D_1 z = 2x = 0 \\ D_2 z = 2y = 0 \end{cases}$$

Al resolver se obtiene el $(0, 0)$ que pertenece al interior del recinto. Para determinar su naturaleza, se usa la Hessiana

- $D_{11}z = 2$, $D_{12}z = 0$, $D_{22}z = 2$

Con estos datos la Hessiana es

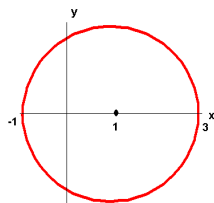
$$H(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Al evaluar esta Hessiana:

$$|H(0,0)| > 0, \quad a_{11} = 2 > 0$$

Significa que hay mínimo y es $f(0,0) = 0$.

La figura muestra el bosquejo de la frontera (en rojo) del recinto R .



Ahora veamos que sucede en la frontera de la región R . Es buena idea usar multiplicadores de Lagrange

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x^2 - 2x + y^2 - 3)$$

Se buscan los puntos críticos

$$\begin{cases} D_1 L = 2x + 2\lambda x - 2\lambda = 2x + 2\lambda(x - 1) = 0 \\ D_2 L = 2y + 2\lambda y = 2y(1 + \lambda) = 0 \\ D_3 L = x^2 - 2x + y^2 - 3 = 0 \end{cases}$$

De la segunda ecuación se halla $\lambda = -1$ o bien $y = 0$.

- Si $\lambda = -1$, en la primera ecuación queda $2x - 2x - 2 = 0$, lo que hace que $-2 = 0$. Por tanto, esta solución no es posible.
- Si $y = 0$, en la tercera ecuación se halla que $x^2 - 2x - 3 = 0$. Al resolver esta ecuación, los valores de x son:

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \implies (x - 3)(x + 1) = 0 \implies x = 3, \text{ o } x = -1$$

Se tienen así, los puntos críticos

$$(3, 0) \quad \text{y} \quad (0, -1)$$

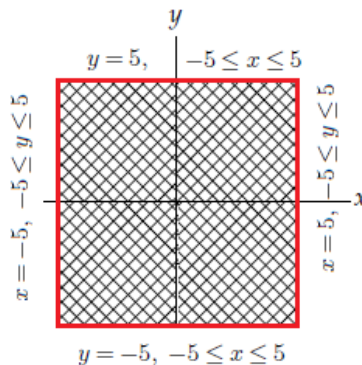
Se evalúan estos puntos en la función

- $f(3, 0) = 9$
- $f(-1, 0) = 1$

Teniendo presente que se había obtenido $f(0,0) = 0$. Se concluye que $f(3,0)$ es máximo absoluto, y que $f(0,0)$ es mínimo absoluto.

Ejemplo 1.13.4. Hallar máximos y mínimos absolutos del campo escalar $f(x, y) = x^3 + y^3 + 9xy + 27$ en el cuadrado de lado 10 centrado en el origen de coordenadas.

El cuadrado es un conjunto compacto y el campo escalar f es continuo, de modo que podemos asegurar la existencia de, al menos un mínimo absoluto y un máximo absoluto. Más aún, la función es de clase ζ^2 en el conjunto considerado. Empezaremos por estudiar los puntos interiores, es decir, los puntos de



$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -5 < x < 5, -5 < y < 5\}$$

Para hallar puntos críticos procedemos de manera habitual; derivadas igualadas a cero y luego resolver el sistema.

$$\begin{cases} 3x^2 + 9y = 0 \\ 3y^2 + 9x = 0 \end{cases}$$

se obtienen los puntos críticos $(0, 0)$ y $(-3, -3)$. Se debe tener en cuenta que: $f(0, 0) = 27$ y $f(-3, -3) = 54$.

Ahora nos restringiremos a la frontera del cuadrado, la cual está compuesta de 4 segmentos de recta:



segmento $x = 5$, $-5 \leq y \leq 5$

Tomando en consideración la restricción de la función, en este tramo se tiene que

$$f(5, y) = 152 + 45y + y^3$$

Esta función es de una variable. La derivada $f'(5, y) = 3y^2 + 45$ nunca es igual a cero, de modo que no existen puntos críticos. Se puede deducir que como $3y^2 + 45 > 0$ la función es estrictamente creciente sobre el segmento y , por tanto, no hay ningún extremo en $-5 < y < 5$.



segmento $y = 5$, $-5 \leq x \leq 5$

La función f es simétrica con respecto al cambio x por y , es decir, $f(x, y) = f(y, x)$, así que se obtiene el mismo resultado que en el caso anterior.



segmento $y = -5$, $-5 \leq x \leq 5$

En este caso, $f(x, -5) = x^3 - 45x - 98$.

A partir de $f'(x, -5) = 3x^2 - 45 = 0$ obtenemos $x = \sqrt{15}$ y $x = -\sqrt{15}$.

Por tanto, resultan $(\sqrt{15}, -5)$ y $(-\sqrt{15}, -5)$.

Si evaluamos f en estos dos puntos tenemos $f(\sqrt{15}, -5) = -98 - 30\sqrt{15}$ y $f(-\sqrt{15}, -5) = -98 + 30\sqrt{15}$.



segmento $x = -5$, $-5 \leq y \leq 5$

Como la función f es simétrica con respecto a $x = y$, es decir, $f(x, y) = f(x, -y)$, obtenemos los puntos $(-5, \sqrt{15})$ y $(-5, -\sqrt{15})$.

Observamos que $f(-5, \sqrt{15}) = -98 - 30\sqrt{15}$ y $f(-5, -\sqrt{15}) = -98 + 30\sqrt{15}$.

Por último, evaluamos la función en los vértices:

$$f(5, 5) = 502, \quad f(-5, -5) = 2, \quad f(5, -5) = f(-5, 5) = -198$$

Resumiendo:

- El campo f tiene un máximo absoluto en $(5, 5)$, que toma el valor 502.
- tiene dos mínimos absolutos; en $(\sqrt{15}, -5)$ y en $(-5, \sqrt{15})$, donde f toma el valor $-98 - 30\sqrt{15}$.

MATHS QUIZ

Pasas con 100%.

Considerar el campo escalar $f(x, y) = (1 - x)(1 - y)(x + y - 1)$

1. Los puntos críticos son:

$(1, 1), (2, 0)$

$(1, 1), (1, 0)$

$(1, 1), (1, 0), (2, 1)$

$(1, 1), (1, 0), (0, 1), (\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$

2. La Hessiana entrega un máximo relativo en:

$(1, 0)$

$(2, 0)$

$(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$

$(0, 1)$

3. El valor máximo relativo es:

1

0

-1

$\frac{1}{3}$

4. En el punto $(1, 1)$ existe un punto:

de máximo

de mínimo

silla

no determinado

5. Considerar el campo escalar $f(x, y, z) = xy + xz + yz$ con la restricción $g(x, y, z) = xyz - 8$.
El único punto crítico es:

$(1, 1, 1)$

$(2, 2, 2)$

$(0, 0, 0)$

$(1, 0, 1)$

6. El valor del multiplicador λ para ese punto crítico es:

$\lambda = -2$

$\lambda = 0$

$\lambda = -1$

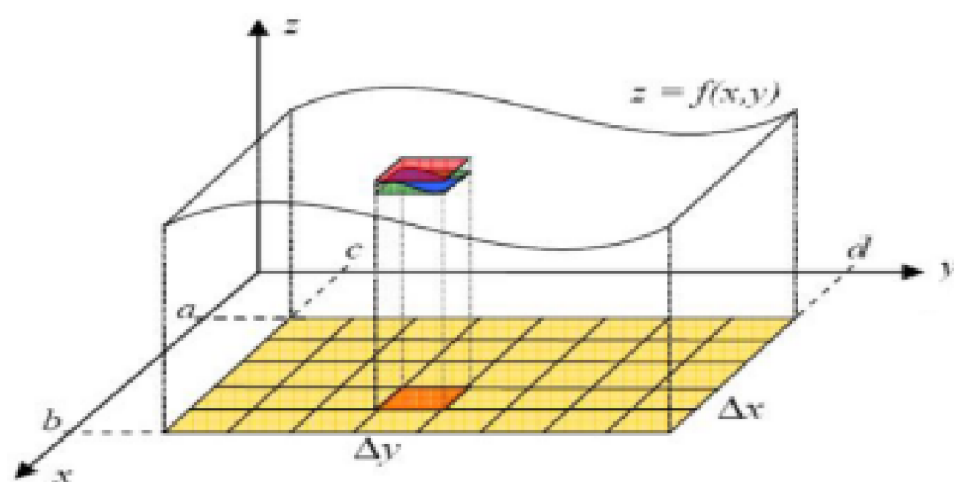
$\lambda = 1$



UNIVERSIDAD DE LA FRONTERA
Departamento de Matemática y Estadística

CUADERNO INTERACTIVO

Integrales Múltiples



*Cálculo
Multivariable*

2.1 Introducción

Es conocido que gran parte de los problemas que surgen en la ingeniería vienen modelizados por funciones de más de una variable. En este sentido corresponde ahora generalizar el concepto de integral definida de funciones de una variable a funciones de varias variables (campos escalares) $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Veremos los casos $n = 2$ y $n = 3$, los cuales dan origen a las integrales dobles y triples.

Para empezar te recuerdo que, el cálculo del área de un recinto plano acotado por las rectas $x = a$, $x = b$, una función acotada $y = f(x)$ definida sobre $[a, b]$ y el eje x , fue lo que condujo al concepto de integral simple (figura 2.1).

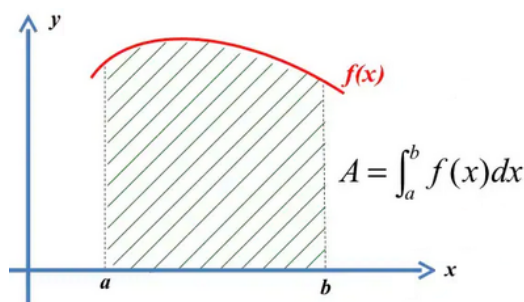


Figura 2.1

La integral definida para funciones de una variable se obtuvo como

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i \right]$$

El punto $\bar{x}_i$ es simplemente un punto dentro del intervalo (x_{i-1}, x_i) . Si el límite anterior existe se dice que la función es **integrable**.

También sabemos que, si F es una primitiva de la función f , es decir, $F'(x) = f(x)$, la integral definida se calcular como:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

[QUIERO VER 25.](#)

- (a) Te invito a recordar.
- (b) En esta página tienes más información

2.2 Caminando hacia la integral del volumen

El cálculo del volumen de un cuerpo acotado por los planos $z = 0$, $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$, y la gráfica de la función $z = f(x, y)$ acotada sobre el intervalo $[a, b] \times [c, d]$, nos llevará al concepto de integral doble (figura 2.2).

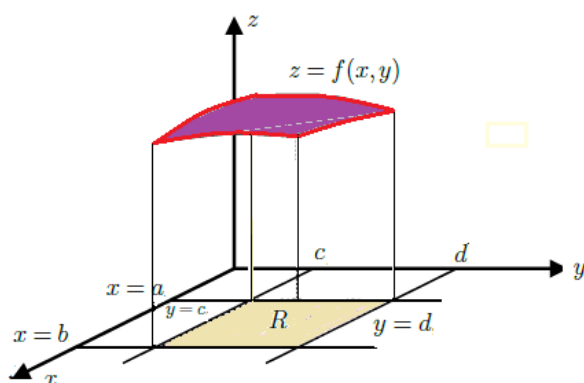


Figura 2.2

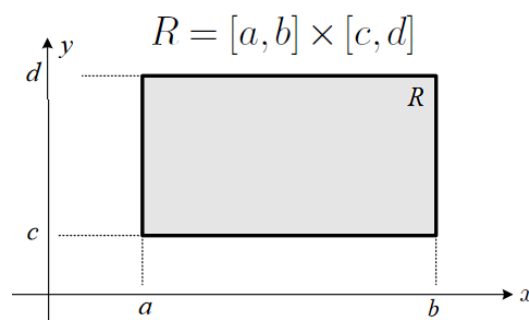


Figura 2.3

Precisemos algunos datos:

- Un rectángulo R puede ser descrito en términos de dos intervalos cerrados $[a, b]$ y $[c, d]$, que representan a sus lados a lo largo de los ejes x e y , respectivamente. Esto es,

$$R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

- Se considera una función de dos variables $f : R \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, cuyo dominio es un rectángulo cerrado R con lados paralelos a los ejes coordenados.
- Si $f \geq 0$ en $\mathbb{R}$, su gráfica es una superficie en $\mathbb{R}^3$ que ubicamos arriba del rectángulo R . Sea S la región sólida de $\mathbb{R}^3$, limitada por el rectángulo R (como “piso”), los cuatro planos verticales $x = a$, $x = b$, $y = c$ e $y = d$ (como “paredes”), la superficie de la gráfica de f (como “techo”). Con estos datos se puede hallar el volumen del sólido S que muestra la figura 2.



para llegar al volumen

Paso 1 ■ ■ ■ ■

Se divide el rectángulo R en subrectángulos, como sigue:

- Se divide $[a, b]$ en n subintervalos, numerados con $i = 1, 2, \dots, n$ de igual ancho $\Delta x = \frac{b-a}{n}$
- Se divide $[c, d]$ en m subintervalos, numerados con $j = 1, 2, \dots, m$ de igual ancho $\Delta y = \frac{d-c}{m}$

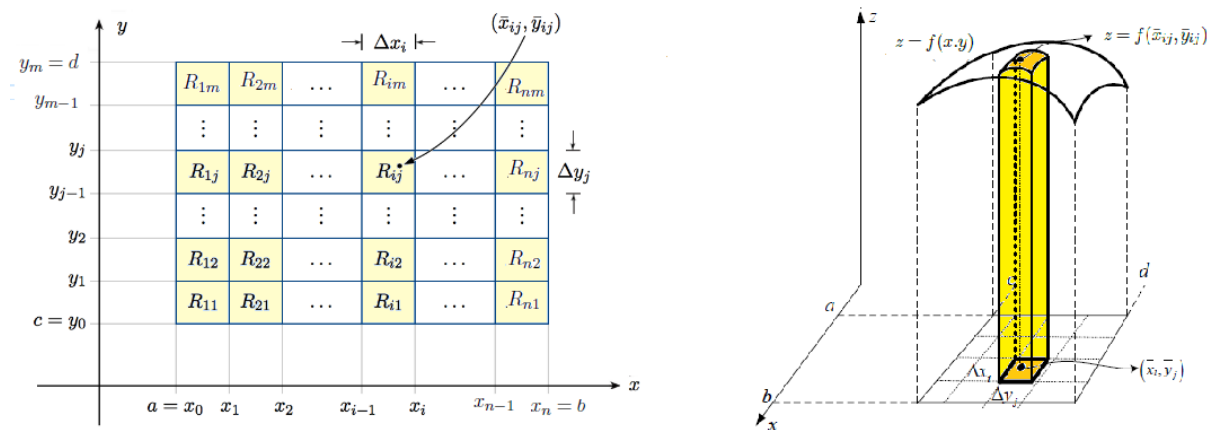


Figura 2.4

- El rectángulo R queda dividido en $n \cdot m$ subrectángulos, que denotamos por R_{ij} .

Paso 2 ■ ■ ■ ■

- En cada subrectángulo R_{ij} se elige un punto cualquiera de “muestra”, que llamamos $(\bar{x}_{ij}, \bar{y}_{ij})$.
- En cada subrectángulo R_{ij} se construye un paralelepípedo de base R_{ij} y altura $f(\bar{x}_{ij}, \bar{y}_{ij})$.

- El volumen de este paralelepípedo está dado por

$$V(S_{ij}) = A(R_{ij}) \cdot f(\bar{x}_{ij}, \bar{y}_{ij})$$

- Si realizamos esta acción de aproximación para los $n \cdot m$ subrectángulos y se suman los volúmenes de todos los paralelepípedos se obtiene una aproximación del volumen total del sólido S :

$$V = V(S_{nm}) = \lim_{n,m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m A(R_{ij}) \cdot f(\bar{x}_{ij}, \bar{y}_{ij})$$

Definición 2.2.1. Si $f : R \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función definida sobre un rectángulo R del plano, entonces la integral doble de f sobre R se define como:

$$\iint_R f(x, y) dA = \lim_{n,m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m A(R_{ij}) \cdot f(\bar{x}_{ij}, \bar{y}_{ij})$$

siempre y cuando este límite exista. Si existe, decimos que f es **integrable** sobre R .



- https://www.youtube.com/watch?v=Hg_u4uBakzw
- caso general
<https://www.youtube.com/watch?v=mb1Mn6W-wbY>

EJERCICIO 26. Considera el rectángulo $R = [2, 5] \times [1, 3]$

- Grafica el intervalo $[2, 5] \times [1, 3]$
- Si $P_1 = \{2, 3, 4, 5\}$ es partición de $[2, 5]$ y $P_2 = \{1, 2, 3\}$ es partición de $[1, 3]$, anota $P_1 \times P_2$
- Ilustra el rectángulo con su partición en el plano cartesiano.
- ¿Cuántos puntos tiene $P_1 \times P_2$?
- ¿En cuántos subrectángulos se subdividió el rectángulo $[2, 5] \times [1, 3]$?

EJERCICIO 27. Aproximar el volumen que acota la superficie definida por la función $f(x, y) = 16 - x^2 - y^2$ sobre el rectángulo $[0, 2] \times [-1, 1]$ del plano xy como sigue:

- Divide el rectángulo en **cuatro** subrectángulos iguales. Anota la división de $[0, 2]$ y de $[-1, 1]$
- En el plano cartesiano grafica el recinto $[0, 2] \times [-1, 1]$ y los puntos de la división.
- Elije como punto de “muestra” la esquina superior derecha de cada R_{ij} . Anota estos puntos
- Evalúa el valor de la función en cada punto de “muestra”
- Voy a cooperar. Te anoto la aproximación al volumen que quiero calcules:

$$\begin{aligned} S_{22} &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 f(\bar{x}_{ij}, \bar{y}_{ij}) A(R_{ij}) \\ &= f(1, 0) \cdot 1 + f(1, 1) \cdot 1 + f(2, 0) \cdot 1 + f(2, 1) \cdot 1 \end{aligned}$$

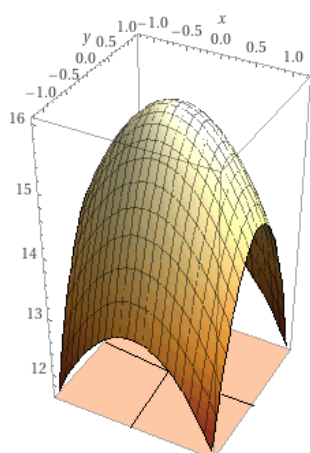


Figura 2.5

2.2.1 Integral doble iterada

El proceso de calcular integrales mediante sumas de Riemann es poco práctico. Una forma más simple para calcular integrales dobles, se debe a Fubini, y es mediante las llamadas **integrales iteradas**.

Teorema 2.2.2. (Fubini) Sea f una función de dos variables definida en la región plana

$$R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) / a \leq x \leq b \quad \wedge \quad c \leq y \leq d\}$$

Si f es continua en R , entonces:

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

Estos dos geniales resultados facilitan enormemente los cálculos. Sólo falta saber ¿Cómo se calculan estas integrales? Tan sencillo como la tabla del uno. Hay que hacerle caso a los profes de matemática, como siempre, ¡primero los paréntesis!, luego el resultado se integra respecto de la variable que falta. ¡¡Vamos al grano, dijo el dermatólogo!!

Ejemplo 2.2.3. Hallar $\iint_R (16 - x^2 - y^2) dA$ sobre el rectángulo $R = [0, 2] \times [-1, 1]$

Por el teorema de Fubini

$$\iint_R (16 - x^2 - y^2) dA = \int_0^2 \left[\int_{-1}^1 (16 - x^2 - y^2) dy \right] dx$$

Se calcula primero la integral interior

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (16 - x^2 - y^2) dy &= \left(16y - x^2y - \frac{y^3}{3} \right)_{-1}^1 \\ &= 16 - x^2 - \frac{1}{3} - \left(-16 + x^2 + \frac{1}{3} \right) = 32 - 2x^2 - \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Ahora, este resultado se integra respecto de la variable x

$$\begin{aligned} \int_0^2 \left[\int_{-1}^1 (16 - x^2 - y^2) dy \right] dx &= \int_0^2 \left[32 - 2x^2 - \frac{2}{3} \right] dx \\ &= \left[32x - \frac{2x^3}{3} - \frac{2}{3}x \right]_0^2 \\ &= 64 - \frac{16}{3} - \frac{4}{3} \\ &= 64 - \frac{20}{3} = \frac{172}{3} = 66 \end{aligned}$$

EJERCICIO 28. Calcular $\iint_R (4 - x^2) dx dy$ sobre el rectángulo $R = [0, 2] \times [1, 4]$.

Seguro te habrás dado cuenta que esta integral lleva $dx dy$, y que no existe un paréntesis. Cuando esto ocurre, significa que se opera, con la integral, desde adentro hacia afuera.

(a) Escribe los límites de integración

$$\iint_R (4 - x^2) dx dy =$$

(b) Calcula primero la integral $\int_0^2 (4 - x^2) dx$

(c) Ahora calcula $\int_1^4 \frac{16}{3} dy$.



Desafío 9.

1. $\int_0^3 \left(\int_l^2 x^2 y dy \right) dx =$

Respuesta Correcta:

2.3 Integral doble sobre regiones más generales

Hasta ahora hemos visto integrales dobles sobre rectángulos, vamos a ver a continuación la integral doble sobre una región E más general.

Sea E un conjunto acotado de $\mathbb{R}^2$. Esto significa que podemos hallar un rectángulo R que lo contenga completamente. Supongamos entonces que $E \subset R = [a, b] \times [c, d]$. Se considera luego una función f acotada sobre E , y se define la llamada **función asociada** al conjunto E

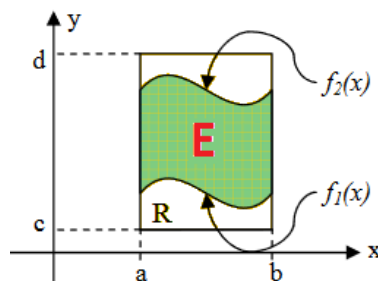


Figura 2.6

$$f_E(x) = \begin{cases} f(x, y) & , si (x, y) \in E \\ 0 & , si (x, y) \in R - E \end{cases}$$

Esta función f_E es la que permite, en forma sencilla, extender la integral doble a cualquier conjunto acotado E . Tenemos:

Teorema Sea $E \subset R$ conjunto acotado. Si la integral de f_E sobre R existe, entonces la integral de f sobre E existe y se tiene

$$\iint_E f(x, y) dA = \iint_R f_E(x, y) dA$$

Se debe tener presente que la segunda integral está definida sobre un rectángulo, hecho que ya sabemos calcular. Por otra parte, esta definición es razonable ya que $f_E(x, y) = 0$ cuando (x, y) se encuentra fuera de E y por lo tanto **no aporta nada** a la integral. Nótese que no importa el rectángulo R que se considere, el único requisito es que R contenga a E .

Por otra parte, si $f(x, y) \geq 0$, la integral doble $\iint_E f(x, y) dA$ representa el volumen del sólido que se encuentra arriba de E y debajo de la gráfica de f



Falta, ahora, descubrir cómo se calculan estas integrales. Para ello dos resultados, nacidos del genio de **Fubini**.

Teorema - Fubini - Recintos R_x

- Si f es continua sobre un recinto de la forma

$$R_x = \{a_1 \leq x \leq b_1, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

entonces

$$\iint_{R_x} f(x, y) dy dx = \int_{a_1}^{b_1} \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx$$

Teorema - Fubini - Recintos R_y

- Si f es continua sobre un recinto de la forma

$$R_y = \{(x, y)/a \leq y \leq b, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

entonces

$$\iint_{R_y} f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy$$

La demostración es sencilla (si te interesa, está en el libro guía)

2.3.1 “Pintando” regiones

Para entender mejor como colocar los límites de integración en los recintos previamente definidos, podemos pensar en que tenemos que pintar la región, para ello debemos tener un rodillo muy flexible que esté sujeto en la o las curvas que son frontera de la región, y que tenga la capacidad de contraerse o expandirse según la curva:

- Si el recinto es del tipo R_x , el rodillo se coloca vertical y pintará la región de izquierda a derecha.

- Si el recinto es del tipo R_y , el rodillo se coloca horizontal y pintará la región de abajo hacia arriba.

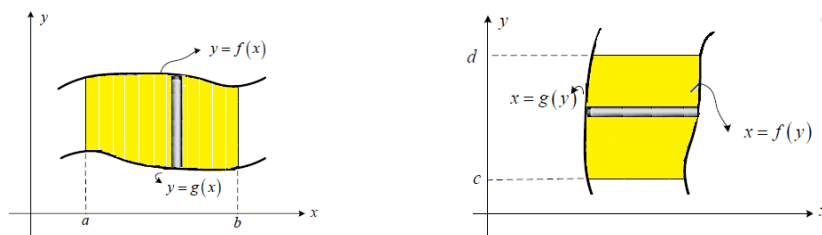


Figura 2.7

Ejemplo 2.3.1. Considerar la región acotada por las curvas $y = 4 - x^2$, e $y = x^2 - 4$.

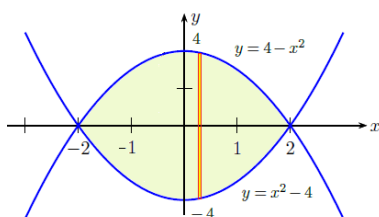


Figura 2.8

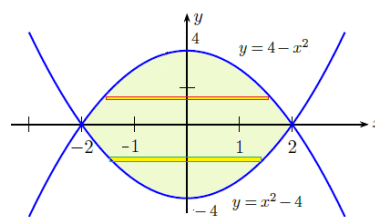


Figura 2.9

- Para establecer la región como R_x tomamos en cuenta la figura 2.9. Trazamos un rectángulo genérico vertical. Para que pinte la región lo debemos mover desde $x = -2$ hasta $x = 2$. Además, la parte inferior del rectángulo se encuentra en la curva $y = x^2 - 4$, y la parte superior está en la curva $y = 4 - x^2$. Por tanto, la región como recinto R_x es

$$R_x = \{-2 \leq x \leq 2, \quad x^2 - 4 \leq y \leq 4 - x^2\}$$

- Para establecer la región como R_y tomamos en cuenta la figura 2.10. Trazamos dos rectángulos genéricos horizontales. Para pintar la región los rectángulos se deben mover por separado. El que se encuentra entre el tercer y cuarto cuadrante se debe mover desde abajo hacia arriba, esto es, desde $y = -4$ hasta $y = 0$. Este rectángulo está fijo, en su extremo izquierdo, en la curva $x = -\sqrt{y+4}$, y su extremo derecho en la curva $x = \sqrt{y+4}$. Por tanto, esa parte de la región como recinto R_y queda escrito

$$R_y = \{-4 \leq y \leq 0, \quad -\sqrt{y+4} \leq x \leq \sqrt{y+4}\}$$

De manera análoga, la parte de la región que queda entre el primer y segundo cuadrante se escribe

$$R_y = \{0 \leq y \leq 4, \quad -\sqrt{4-y} \leq x \leq \sqrt{4-y}\}$$

La unión de ambos recintos establece la región como recinto R_y .

2.4 Cálculo de áreas y volumen

Si se considera una función continua no negativa $f(x, y) \geq 0$ definida en un recinto acotado R , entonces la integral doble

$$\iint_R f(x, y) dx dy$$

representa el **volumen** del sólido formado por el recinto R como base, paredes laterales verticales y como superficie superior la gráfica de $f(x, y)$.

A partir de este resultado, si se integra la función constante $f(x, y) = 1$ sobre el recinto acotado R , entonces se obtiene el área de dicho recinto, esto es

$$A(R) = \iint_R dx dy = \iint_R dy dx = \iint_R dA$$

Ejemplo 2.4.1. Calcular el área comprendida por la gráfica de las funciones $y = x$, $y = 0$ e $y = (2 - x)^2$.

Como siempre, un esquema de la región ayuda a elegir el tipo de recinto y establecer los límites de integración. De la figura 2.10 se observa que se necesitan dos rectángulos genéricos para hacer un barrido vertical de la región, en cambio, si lo hacemos horizontal, sólo se requiere de un rectángulo genérico. De este modo, el recinto a integrar es

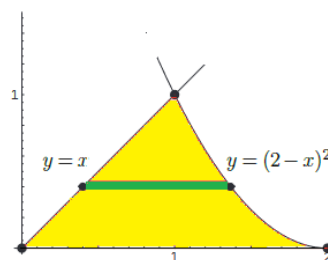


Figura 2.10

$$R_y = \{0 \leq y \leq 1, \quad y \leq x \leq 2 - \sqrt{y}\}$$

La integral que entrega el área del recinto es

$$A = \int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} dx dy = \int_0^1 [(1 - \sqrt{y} - y)] dy = \left[y - \frac{2}{3} y^{3/2} - \frac{y^2}{2} \right]_0^1 = \frac{5}{6}$$



Pasas con 100%.

1. La integral iterada $\int_0^1 \int_{1-y}^1 e^y dx dy$ tiene el valor

- (a) 1 (b) e (c) 0 (d) -1

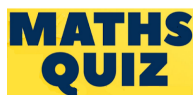
2. Al cambiar el orden de integración en $I = \int_0^3 \int_1^{\sqrt{4-y}} dx dy$ se obtiene:

- (a) $I = \int_0^2 \int_0^{4-x^2} dy dx$ (b) $I = \int_1^3 \int_0^{4-x^2} dy dx$
 (c) $I = \int_1^2 \int_0^{4-x^2} dy dx$ (d) $I = \int_0^1 \int_0^{4-x^2} dy dx$

3. Para el recinto acotado por $y = x + 2$, $y = 0$, $x = -1$ y $x = 3$. La integral iterada que proporciona el área de este recinto es:

- (a) $A = \int_{-1}^3 \int_0^{y+2} dx dy$ (b) $A = \int_0^3 \int_0^{x+2} dy dx$
 (c) $A = \int_{-1}^3 \int_0^{x+2} dx dy$ (d) $A = \int_{-1}^3 \int_0^{x+2} dy dx$

ScoreField PointsField



Pasas con 100%.

1. El valor de la integral doble $\iint_R (1 + 6xy^2) dA$, con $R = [0, 2] \times [-1, 1]$ es:

- (a) 6 (b) 0 (c) 10 (d) 12

2. El valor de $\iint_R y \sin(xy) dA$, con $R = \{1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \pi\}$ es:

- (a) 6 (b) 0 (c) 8 (d) 4

3. Para el recinto acotado por $y = x$, $y = 0$, $x + y = 2$, su área es:

- (a) $A = \frac{2}{3}$ (b) $A = \frac{1}{3}$ (c) $A = \frac{3}{5}$ (d) $A = 4$

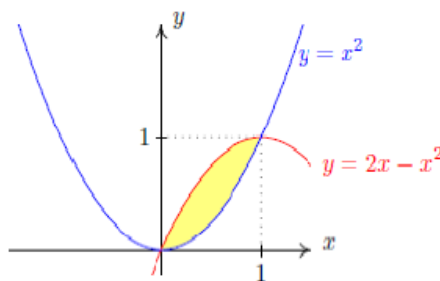
4. Para el recinto acotado por $y = x$, $y = 0$, $x = 2$ e $y = \frac{1}{x}$, su área es:

- (a) $A = 2 + \ln 2$ (b) $A = 1 + \ln 2$
(c) $A = \ln 2$ (d) $A = \frac{1}{2} + \ln 2$

ScoreField PointsField

Área de un recinto

1. Hallar la integral que proporciona el área.



(a) $\int_0^1 \left(\int_0^{x^2} dy \right) dx,$

(b) $\int_0^1 \left(\int_0^{2x-x^2} dy \right) dx,$

(c) $\int_0^1 \left(\int_{2x-x^2}^{x^2} dy \right) dx,$

(d) $\int_0^1 \left(\int_{x^2}^{2x-x^2} dy \right) dx.$

ScoreField PointsField

2.4.1 Volumen bajo una superficie

Ejemplo 2.4.2. Sea R la región triangular de vértices, $(0,0)$, $(4,0)$ y $(2,2)$ (figura 2.11). La función $z = 16 - x^2$ es continua sobre la región triangular. Hallemos el volumen de la función sobre el recinto (figura 2.12).

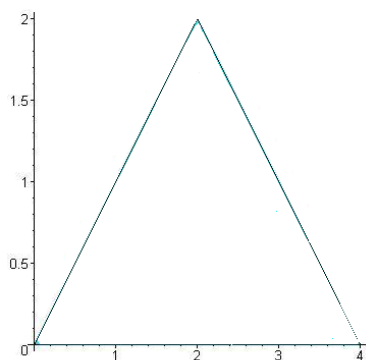


Figura 2.11

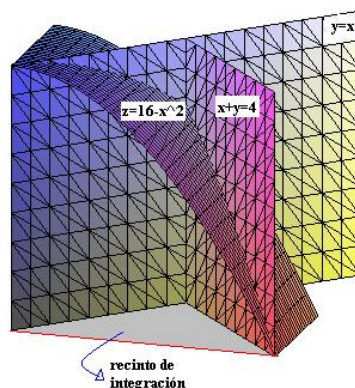


Figura 2.12

Las ecuaciones de las curvas frontera son:

★ $y = 0$

★ $y = x$

★ $y = 4 - x$

Por comodidad se considera un recinto R_y

$$R_y = \{0 \leq y \leq 2, y \leq x \leq 4 - y\}$$

Ahora se establece la integral del volumen, y se calcula.

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 \int_y^{4-y} (16 - x^2) dx dy = \int_0^2 \left(16x - \frac{x^3}{3} \right)_y^{4-y} dx dy \\ &= \int_0^2 \left(16(4-y) - \frac{(4-y)^3}{3} - 16y + \frac{y^3}{3} \right) dy \\ &= \int_0^2 \left(64 - 32y - \frac{(4-y)^3}{3} + \frac{y^3}{3} \right) dy = \frac{152}{3} \end{aligned}$$

Ejemplo 2.4.3. Calcular el volumen acotado por la región R del plano delimitado por las curvas $y = x^2$, $x = y^2$, y altura dada por la función $f(x, y) = x^2 + y^2$.

El gráfico del recinto del plano (que establece los límites de integración) es

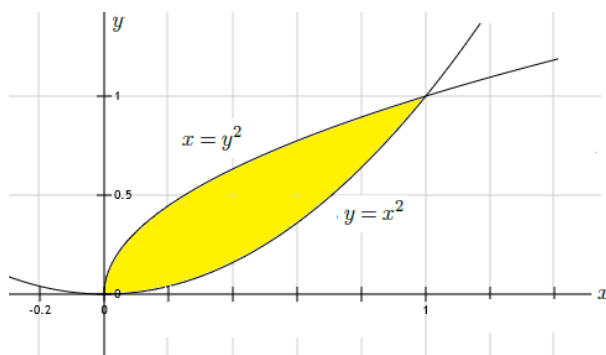


Figura 2.13

La elección del recinto de integración requiere sólo de un rectángulo genérico. Hacemos uso de un recinto R_x .

$$R_x = \{0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$$

Como la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ (sobre la región) sirve de techo al volumen, entonces

$$V = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2 + y^2) dy dx$$

al integrar

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2 + y^2) dy dx = \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{1}{3} y^3 \right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx \\ &= \int_0^1 \left[\left(x^2 \cdot \sqrt{x} + \frac{1}{3} x^{\frac{3}{2}} \right) - \left(x^2 \cdot x^2 + \frac{1}{3} x^6 \right) \right] dx \\ &= \int_0^1 \left[x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{3} x^{\frac{3}{2}} - x^4 - \frac{1}{3} x^6 \right] dx \\ &= \left[\frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} + \frac{2}{15} x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{5} x^5 - \frac{1}{21} x^7 \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{7} + \frac{2}{15} - \frac{1}{5} - \frac{1}{21} = \frac{6}{35} \end{aligned}$$

2.4.2 Cambio de variable en la integral doble

Haciendo memoria, en el cálculo integral de una variable, una de las técnicas que nos sacaba de muchos problemas era la del cambio de variables. La idea ahora es mostrarte la generalización a dos variables. A lo mejor no se ve muy sencillo, porque en este caso hay que cambiar **dos** variables en lugar de una.

El problema que trataremos de resolver es

la integral sobre el recinto xy es complicada

¿Cómo se resuelve este problema?

cambiando de recinto de integración

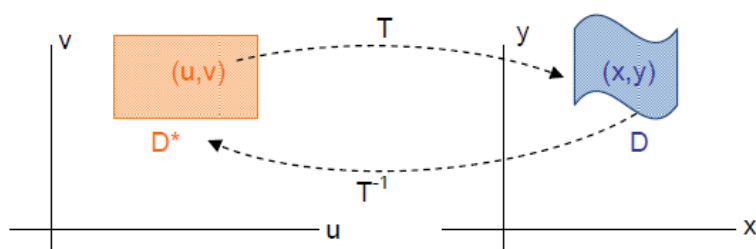


Figura 2.14

El medio por el cual llegaremos a la fórmula del cambio de variables es a través del proceso denominado “transformación de coordenadas”. En primer lugar, establecemos dos sistemas de coordenadas, uno que llamamos “plano uv ”, y el otro “plano xy ”, y en lugar de pensar en dos ecuaciones de transformación de coordenadas, ponemos una función T llamada *transformación de coordenadas* tal que

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow T(A) \subset \mathbb{R}^2$$

$$(u, v) \mapsto T(u, v) = (x, y)$$

La figura 2.14 muestra un esquema del proceso a seguir. El requisito de la transformación T , es que sea de clase ζ^1 (primera derivada continua).

Ejemplo 2.4.4. El recinto R del plano xy está acotado por las rectas $y = x + 1$, $y = x - 1$, $y = 1 - x$, $y = 2 - x$.

La gráfica, en el plano xy , del recinto R es

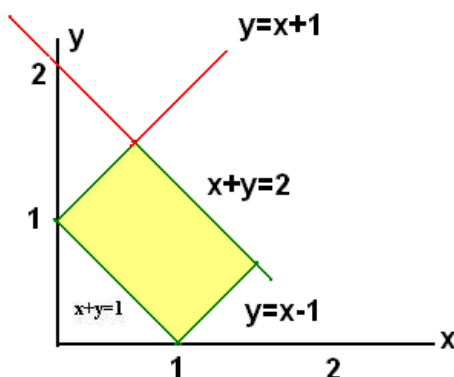


Figura 2.15

- Si hubiera que hacer integración sobre este recinto, se necesitan tres recintos R_x , o bien, 3 recintos R_y , lo que no es nada sencillo. Veamos una alternativa.
- Se ordena, listando hacia abajo, las ecuaciones de las rectas, dejándolas igualadas a la constante. ¿Te das cuenta que tomadas de a dos tienen un gran parecido. Bien, eso es lo que da la pauta de la transformación.

- ◇ $x + y = 1$
- ◇ $x + y = 2$
- ◇ $y - x = 1$
- ◇ $y - x = -1$

Si miras con atención, conviene hacer:

$$x + y = u, \quad y - x = v$$

- Algo que debes tener claro es saber desde que plano a que plano va la transformación. En este caso, si usas R_{xy} y R_{uv} para identificar recintos R en cada plano, entonces

$$T : R_{xy} \rightarrow R_{uv}$$

- La transformación es

$$T(x, y) = (x + y, y - x) = (u, v)$$

- Esta transformación te permite **graficar** la imagen del recinto que se encuentra en el plano xy en el plano uv ¿Cómo? Te cuento:

- ★ $x + y = 1 \implies u = 1$
- ★ $x + y = 2 \implies u = 2$
- ★ $y - x = 1 \implies v = 1$
- ★ $y - x = -1 \implies v = -1$

Se trata de rectas, las que dan origen a un lindo y hermoso rectángulo R^* de lados paralelos a los ejes, tal como esto

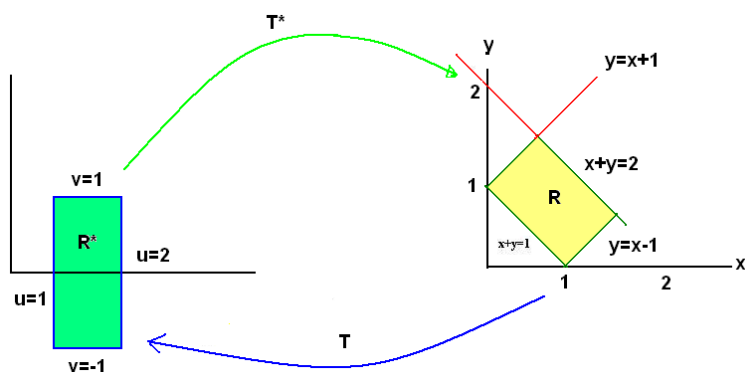


Figura 2.16

- Veamos que sucede con las áreas de cada región. Se tiene

$$A(R) = 1, \quad A(R^*) = 2$$

Los resultados son distintos ¿es posible igualarlos? Te cuento que la respuesta es afirmativa, no se si te acuerdas del

JACOBIANO

de una transformación. Da lo mismo, te lo defino de nuevo. Si $T(u, v) = (x, y)$, entonces

$$J(T) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Pero eso no es todo, un resultado interesante es el que afirma que $J(T^*)$ (el Jacobiano de la inversa) es el recíproco de $J(T)$, es decir

$$J(T^*) = \frac{1}{J(T)}$$

¿ Qué más se puede pedir ?

El jacobiano de $T(x, y) = (x + y, y - x)$ es

$$J(T) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

- La pregunta se cae de madura, ¿y de qué me sirve este Jacobiano? Muy simple, él es el factor, en valor absoluto, que **igual**a las áreas en una transformación. Mira la verificación de la actividad que estamos desarrollando

$$A(R) = 1 \implies A(R) \cdot |J(T)| = 1 \cdot 2 = 2 = A(R^*)$$

y lo mismo pasa si se toma $J(T^*)$. Mira

$$A(R^*) = 2 \implies A(R^*) \cdot |J(T^*)| = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 = A(R)$$

La transformación que hemos visto es lineal

¿Qué pasa cuando la transformación no es lineal?

La matemática siempre tiene respuestas, en ese caso hay que

parametrizar.

Pero esa es otra historia, que te cuento ya.



Ejemplo 2.4.5. La transformación $T(u, v) = (4u - u^2, v)$ aplicada al cuadrado H de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ y $(0, 1)$ del plano uv da como resultado cierta región R en el plano xy . Vamos a hallar $T(H) = R$, a determinar el área de ambos recintos, y calcular el Jacobiano de la transformación.

- Se dibujan ambos planos.

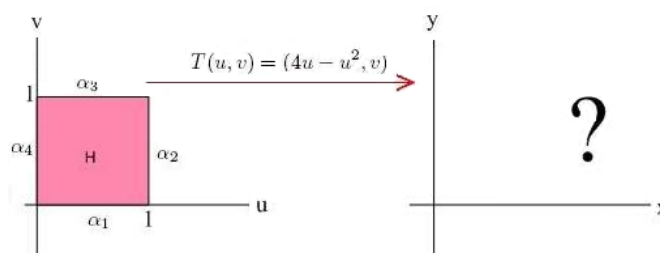


Figura 2.17

- La transformación va del plano uv al plano xy
- Vamos a considerar los vértices del cuadrado para determinar su imagen. Se completa la tabla

(u, v)	$(0, 0)$	$(1, 0)$	$(1, 1)$	$(0, 1)$
$T(u, v) = (x, y)$	$(0, 0)$	$(3, 0)$	$(0, 1)$	$(3, 1)$

- Un esquema de esta situación

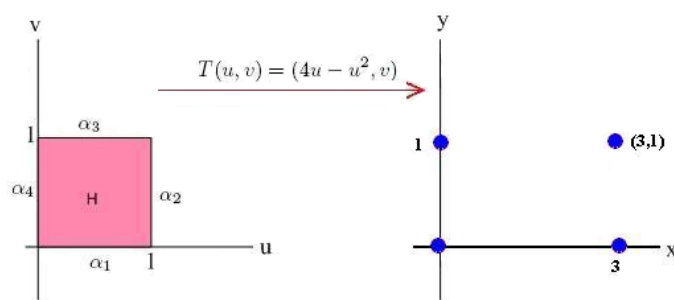


Figura 2.18

- Ahora viene lo bueno ¿cómo unir los puntos?

Parametrizo el segmento de recta que une los puntos $(0,0)$ con $(1,0)$ en el plano uv y determino su imagen en el plano xy .

$$\begin{aligned}\alpha_1(t) &= (t, 0) \implies T(\alpha_1(t)) = T(t, 0) = (4t - t^2, 0) \\ &\implies x = 4t - t^2, y = 0\end{aligned}$$

El parámetro t es tal que $0 \leq t \leq 1$. Dado que $x = 4t - t^2$, se deduce que éste es un simple segmento de recta, $0 \leq x \leq 3$, y como $y = 0$, entonces la transformación llevó un segmento de recta del plano uv en otro segmento de recta en el plano xy .

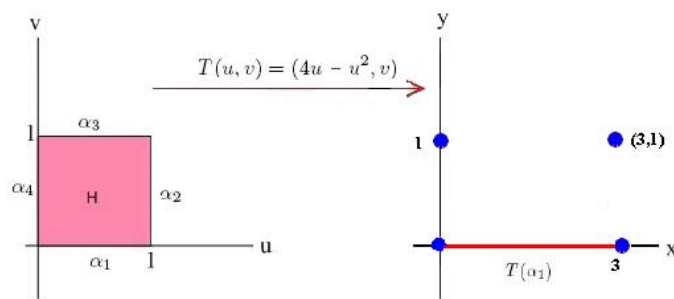


Figura 2.19

- Estas son las parametrizaciones restantes:
 - $\alpha_2(t) = (1, t) \implies T(1, t) = (3, t) = (x, y)$
 - $\alpha_3(t) = (t, 1) \implies T(t, 1) = (4t - t^2, 1) = (x, y)$
 - $\alpha_4(t) = (0, t) \implies T(0, t) = (0, t) = (x, y)$
- Para hallar las curvas resultantes se elimina el parámetro t , de modo que queden ecuaciones sólo en las variables x e y .

$$- \begin{cases} x = 3 \\ y = t \end{cases} \implies x = 3, 0 \leq y \leq 1 \quad \text{¡segmento!}$$

$$- \begin{cases} x &= 4t - t^2 \\ y &= 1 \end{cases} \implies 0 \leq x \leq 3, y = 1 \quad \text{¡segmento!}$$

$$- \begin{cases} x &= 0 \\ y &= t \end{cases} \implies x = 0, 0 \leq y \leq 1 \quad \text{¡segmento!}$$

- Ahora se grafican estas curvas para descubrir el recinto resultante.

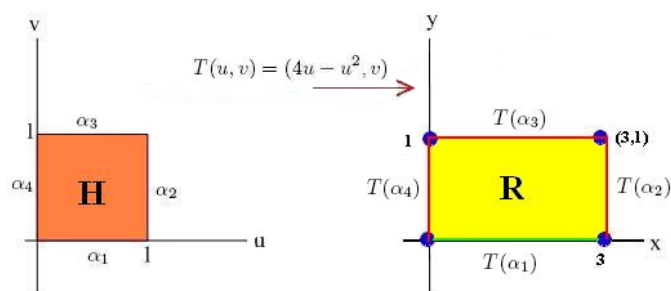


Figura 2.20

- Mira lo que pasa con las áreas de ambos recintos.

- El área de H es **1**
- El área de R es **3**

!! No son iguales !!

- Observa el cálculo del Jacobiano

$$J(T) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = |4 - 2u|$$

- Hago el siguiente cálculo para luego entregarte una muy buena conclusión

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 |4 - 2u| \, du \, dv &= \int_0^1 \int_0^1 (4 - 2u) \, du \, dv = \int_0^1 \left(4u - u^2\right)_0^1 \, dv \\ &= \int_0^1 3 \, dv = 3 \end{aligned}$$

Hemos hallado que

El área del **rectángulo** del plano xy es igual al área del **cuadrado** del plano uv **multiplicado** por el **Jacobiano** de la transformación.

Trabajo con mi profe



EJERCICIO 29. Sean $T(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy) = (u, v)$ transformación, $R = [0, 2] \times [0, 2]$ recinto del plano xy . Hallar $T(R)$, el área de R y de $T(R)$, y el Jacobiano de T .

- Lo primero es lo primero, la situación gráfica del problema. Establece tus planos uv y xy , y la gráfica del recinto R . Por supuesto que todo ello ¡ please!
- La transformación va del plano
- Me gusta verte bien despierto(a). Igual sirve tener a mano los vértices del rectángulo para pasar primero esos puntos para el otro lado. Completa la tabla

(x, y)	(0, 0)	(2, 0)	(2, 2)	(0, 2)
$T(x, y) = (u, v)$				

- Con esto tienes 4 puntos en el plano uv . Describe la situación gráfica. Parametrizo yo una curva frontera y tu te encargas del resto. Parametrizo el segmento de recta que une los puntos (0, 0) con (2, 0) en el plano xy y determino su imagen en el plano uv .

$$\alpha_1(t) = (t, 0) \implies T(\alpha_1(t)) = T(t, 0) = (t^2, 0) \implies u = t^2, v = 0$$

El parámetro t es tal que $0 \leq t \leq 2$. Dado que $u = t^2$ en el plano uv , se deduce que este es un simple segmento de recta, $0 \leq u \leq 4$, y como $v = 0$, entonces la transformación llevó un segmento de recta del plano xy en otro segmento de recta en el plano uv .

- Espero que puedas graficarlo.
- Haz las parametrizaciones restantes.
- Ahora descubres que tipo de curvas han resultado. Para ello eliminas el parámetro t , de modo que te queden ecuaciones sólo en las variables u y v . Anota tus respuestas:
- Ahora graficas estas curvas para ver que recinto resultó en el plano uv . Espero tu respuesta

Te muestro lo que pasa con las áreas de ambos recintos.

- El área de R es 4

$$2. \text{ El área de } R^* \text{ es } A(R^*) = \int_0^4 2\sqrt{4-x} dx = \frac{32}{3}$$

- Calcula el Jacobiano: Te puedo asegurar que

$$\int_0^8 \int_{\frac{y^2}{16}-4}^{4-\frac{y^2}{16}} (4x^2 + 4y^2) dx dy = \frac{32}{3}$$

y representa, tal como lo ven tus “asombrados” ojos, el área de R^* .

2.5 Coordenadas polares

Si hay una transformación importante y de uso habitual en el cálculo de las integrales dobles, esa es la de [coordenadas polares](#). Te recuerdo que para ubicar un punto en ese sistema se usan r , el radio, que mide la distancia del punto al origen, y θ , el ángulo que forma el radio vector del punto con la parte positiva del eje x .

La transformación T dada por

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

es inyectiva si consideramos $r > 0$, y el ángulo θ variando en un intervalo de la forma $0 < \theta \leq 2\pi$, $\vee \quad 0 \leq \theta < 2\pi$. En tal caso, el Jacobiano de la transformación es

$$J(T) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r$$

En términos geométricos las curvas r son rectas por el origen y las curvas θ son círculos concéntricos con el origen, siendo la imagen de un rectángulo en el plano $r\theta$ un “paralelogramo” en el plano de las xy , limitado por dos radios y dos arcos de círculo (figura 2.21).

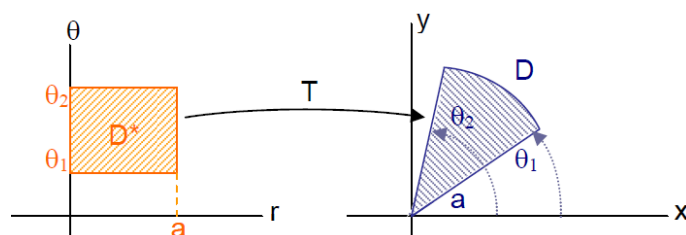


Figura 2.21

Veamos como resulta esto en la práctica.

Ejemplo 2.5.1. Considera, en el primer cuadrante, el recinto

$$R = \{(x, y) / 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

Un gráfico es siempre de gran ayuda

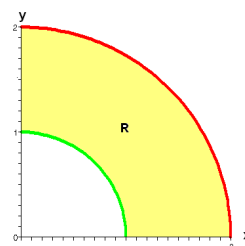


Figura 2.22

- Se escribe este recinto como R_x

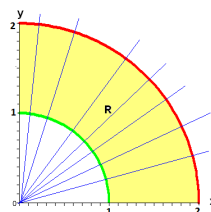
$$\{0 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\} \cup \{1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\}$$

- Se escribe este recinto como R_y

$$\{0 \leq y \leq 1, -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{4-y^2}\} \cup \{1 \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq \sqrt{4-y^2}\}$$

¡¡Si preguntan por mi, ... a polares me fui!!

En polares se sabe que $x^2 + y^2 = r^2$, por tanto, puedes de inmediato decirme cual es el movimiento que tiene que hacer el radio para “barrer” todo el recinto. Mi ayuda es que mires el gráfico siguiente, en el cual aparecen algunos radios “barriendo” la región.



- El movimiento del radio es

$$1 \leq r \leq 2$$

- Esto lo debes siempre en cuenta; “el ángulo a encontrar nace siempre del origen de coordenadas”, y su movimiento es tal que toda la región debe ser “barrida” por él. Al mirar la figura anterior me dices como va el ángulo.

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

- Ahora se dibuja el recinto en el plano $r\theta$.

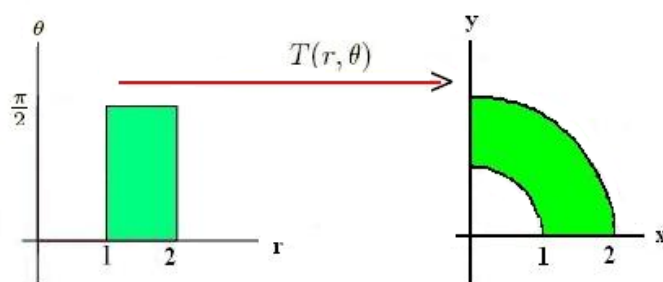


Figura 2.23

Lo bueno es que, en toda transformación polar ocurre lo mismo. Por esta razón, el mejor truco, para hallar r y θ es “sobreponer” un plano sobre otro y ver allí las zonas que limitan r y θ .

2.5.1 Recintos polares

Tal como en coordenadas cartesianas, en coordenadas polares tenemos dos tipos de recintos (figura 2.24)

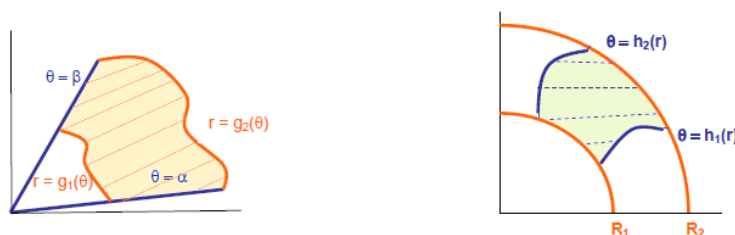


Figura 2.24

1. Las **regiones r - simples**: son aquellas para las cuales la variable θ tiene como límites valores constantes, y el radio r dependen del ángulo.
2. Las **regiones θ - simples**: son aquellas para las que el radio tiene límite constantes, y los límites del ángulo θ depende del radio r .

Cambio de Variables

Teorema 2.5.2. Sea $f : E \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Sea $T : E^* \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow E \subset \mathbb{R}^2$ una transformación inyectiva, de clase ζ^1 , y con jacobiano $J(T)$ no nulo en todo punto de E^* , de tal modo que $T(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$, entonces la fórmula del cambio de variables para la integral doble es

$$\iint_E f(x, y) dx dy = \iint_{E^*} f(x(u, v), y(u, v)) |J(T)| du dv$$

Ejemplo 2.5.3. Hallar $\iint_R dx dy$, siendo R el recinto

$$R = \{(x, y) / 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$$

- Ya sabes que el recinto, como R_x se descompone en dos recintos (para R_y es lo mismo). El cálculo es una “lata”. Este es uno de los casos en los cuales conviene cambiarse de espacio, es decir, hacer un cambio de variables. Como aparece el $x^2 + y^2$, entonces las polares son las adecuadas. Ya sabes que $1 \leq r \leq 2$, y que $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Lo que falta, ¡¡**mirando el teorema!!** es el

JACOBIANO

que siempre en polares es r . La integral en polares es

$$\iint_R dx dy = \int_1^2 \int_0^{\pi/2} r d\theta dr$$

- ¿Te das cuenta? algo que era complicado se ha transformado en algo muy sencillo. Un pequeño cálculo permite decir que el valor de la integral es

$$\frac{3\pi}{4}$$

2.6 Volumen de un sólido en el espacio

Sea f y g funciones de dos variables definidas y continuas en una región plana R tales que $f(x, y) \leq g(x, y)$ para todo $(x, y) \in R$. Sea V el volumen del sólido acotado superiormente por la gráfica de la función g y acotado interiormente por la gráfica de la función f , entonces:

$$V = \iint_R [g(x, y) - f(x, y)] dA$$

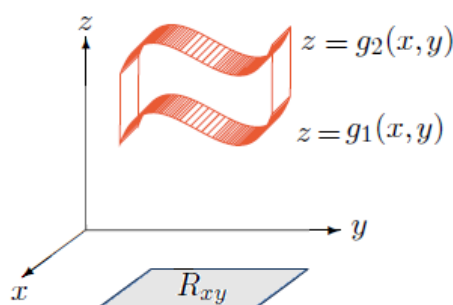


Figura 2.25

Ejemplo 2.6.1. Hallar el volumen del sólido acotado inferiormente por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, y superiormente por la semi-esfera $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 4$, y que muestra la figura 2.26.

Se trata del volumen de un sólido acotado por dos superficies, una de ellas es el “techo” (la semi-esfera) y la otra (el “piso”) que es el cono. El paso siguiente es encontrar la curva de intersección de ambas superficies, pues ella nos entrega el recinto de integración.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 4 \\ z = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$

Al reemplazar $x^2 + y^2 = z^2$ en la ecuación de la esfera, y después de resolver, se halla que $z = 2$ (se descarta $z = 0$). Con esto, la curva de intersección es una circunferencia

$$x^2 + y^2 = 4$$

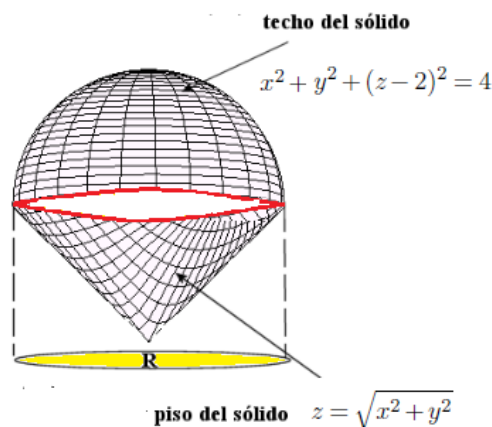


Figura 2.26

En coordenadas cartesianas

$$V = \iint_R \overbrace{[2 + \sqrt{4 - x^2 - y^2} - \sqrt{x^2 + y^2}]}^{\text{techo}} dA$$

En coordenadas polares, la región que encierra esta circunferencia, corresponde a

$$0 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

con lo cual el volumen está dado por

$$V = \int_0^2 \int_0^{2\pi} [2 + \sqrt{4 - r^2} - r] r d\theta dr$$

La integral que corresponde a los límites del ángulo tiene el valor 2π , con lo cual

$$V = 2\pi \int_0^2 [2r + r\sqrt{4 - r^2} - r^2] dr$$

Estas integrales son inmediatas

$$V = \left[r^2 - \frac{1}{3}(4 - r^2)^{3/2} - \frac{r^3}{3} \right]_0^2$$

Al evaluar se halla que

$$V = 8\pi$$

Ejemplo 2.6.2. Calcular el volumen del sólido que se encuentra dentro el cilindro $x^2 + y^2 = 9$, bajo el paraboloides $z = x^2 + y^2$ y sobre el plano xy .

Un esquema de ambas superficies y el sólido encerrado se muestra en la figura 2.27.

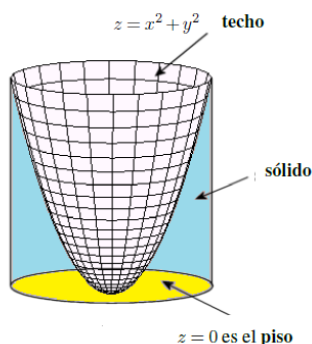


Figura 2.27

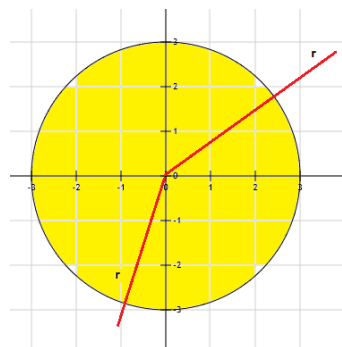


Figura 2.28

No hay ningún misterio, el recinto de integración es el círculo de ecuación $x^2 + y^2 = 9$ (figura 2.28). Es claro que las coordenadas polares nos ayudan a simplificar los cálculos. En la figura traza un par de radios, ello te permite ver que

$$0 \leq r \leq 3, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Con esto, el volumen se expresa

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^3 r^2 \cdot r \, dr \, d\theta$$

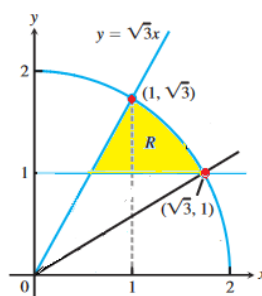
La integral respecto del ángulo es 2π , por tanto,

$$V = 2\pi \int_0^3 r^3 \, dr = 2\pi \cdot \frac{r^4}{4} \Big|_0^3 = \frac{81\pi}{2}$$



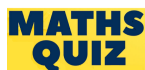
Pasas con 100%.

- Considerar la región R en el plano xy encerrada en la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$, la recta $y = 1$, y la recta $y = x\sqrt{3}$. El ángulo θ , en coordenadas polares tiene el comportamiento:



1. (a) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$ (b) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ (c) $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ (d) $\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$
2. El ángulo θ , de coordenadas polares, de la región $R = \{x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\}$ satisface:
- (a) $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ (b) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ (c) $\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ (d) $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$

ScoreField PointsField



Pasas con 100%.

- La integral $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} y \, dx \, dy$ en coordenadas polares equivale a:
 - $\int_0^{2\pi} \int_0^a r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta$
 - $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta$
 - $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a r \sin \theta \, dr \, d\theta$
 - $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta$
- La región R del plano xy está acotada por las rectas $x + y = 6$, $x - y = 2$ e $y = 0$. Al utilizar la transformación $x = u + v$, $y = u - v$. El Jacobiano de la transformación es:
 - 1
 - 1
 - 2
 - 2
- La región R del plano xy está acotada por las curvas $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = b^2$, $x = 0$, $y = 0$, con $0 < a < b$, en el primer cuadrante. Con la transformación $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, el Jacobiano de la transformación es:
 - $\sin v$
 - $u + v$
 - u
 - v

ScoreField PointsField

2.7 Integral triple

La integral triple puede emplearse para calcular volúmenes, masas, centros de gravedad, momentos de inercia, y otros conceptos físicos.

No vamos a repetir el mismo cuento de las particiones y todo eso. Vamos a establecer que, la **integral triple** de la función $f : E \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, en donde $E = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$, y que se denota

$$\iiint_E f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

corresponde a una triple sumatoria, y se calcula mediante una integral **triple iterada**. Esto es,

$$\iiint_E f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_a^b \int_c^d \left(\int_e^f f(x, y, z) \, dz \right) dx \, dy$$

Observación. Si $f(x, y, z) = 1$, la integral triple representa el volumen de la región.

Una vez más, el orden de integración, en el caso de un intervalo cerrado como E no es relevante. Si una de las 6 integrales triples iteradas existe, las otras también, y tienen el mismo valor.

Si E es un conjunto acotado del espacio tridimensional, entonces lo podemos caracterizar como uno de los siguientes tipos:

$$R_{xy} = \{a \leq x \leq b, f_1(x) \leq y \leq f_2(x), g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y)\}$$

$$R_{yx} = \{a \leq y \leq b, f_1(y) \leq x \leq f_2(y), g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y)\}$$

$$R_{xz} = \{a \leq x \leq b, f_1(x) \leq z \leq f_2(x), g_1(x, z) \leq y \leq g_2(x, z)\}$$

$$R_{zx} = \{a \leq z \leq b, f_1(z) \leq x \leq f_2(z), g_1(z, x) \leq y \leq g_2(z, x)\}$$

$$R_{yz} = \{a \leq y \leq b, f_1(y) \leq z \leq f_2(y), g_1(y, z) \leq x \leq g_2(y, z)\}$$

$$R_{zy} = \{a \leq z \leq b, f_1(z) \leq y \leq f_2(z), g_1(z, y) \leq x \leq g_2(z, y)\}$$

Puedes ver, que cada una de estas regiones de $\mathbb{R}^3$ están relacionadas con las de la integral doble en $\mathbb{R}^2$. Por ejemplo, la región R_{xy} en el plano cartesiano de las xy corresponde a una región R_x .

Respecto del proceso de integración en $\mathbb{R}^3$ debe tenerse muy clara la forma en que las regiones definen los límites de integración en la integral triple iterada. Por ejemplo, si ya tenemos definida la región en la forma R_{xy} entonces **lateralmente** debe acotar la variable x , **frontal** y **posteriormente** debe hacerlo la variable y , y **superior e inferiormente** la variable z .

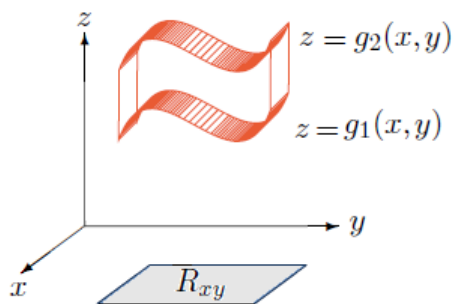


Figura 2.29

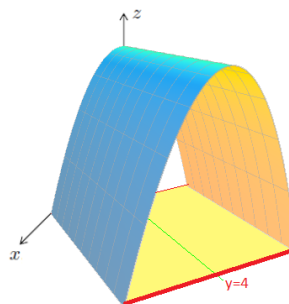


Figura 2.30

Ejemplo 2.7.1. Considerar el recinto R tridimensional, que se encuentra en el primer octante, acotado por la superficie $z = 4 - x^2$ y el plano $y = 4$.

1. Vamos a establecer el recinto, en coordenadas cartesianas, como del tipo R_{xy} . El primer octante significa $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$. Con $z = 0$ obtenemos una de las trazas de la superficie en el plano xy . Luego, hacemos un bosquejo del recinto tridimensional para establecer sus límites.

$$z = 0 \implies 4 - x^2 = 0 \implies 0 \leq x \leq 2$$

Además, en el primer octante

$$0 \leq y \leq 4$$

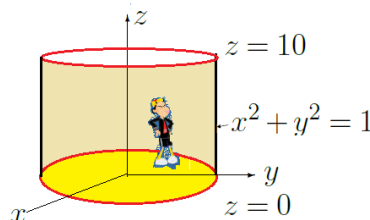
La idea es “entrar” al interior del sólido, o bien colocar dentro de él una figura. Se mira donde se ponen los pies (recinto en el plano xy) y luego levantamos la vista para saber hasta donde puede llegar la cabeza. De este modo, el recinto queda como

$$R = \{(x, y, z) / 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 4, 0 \leq z \leq 4 - x^2\}$$

Ejemplo 2.7.2. Hallar el volumen que delimitan; el cilindro de ecuación $x^2 + y^2 = 1$, y los planos $z = 0$ y $z = 10$

Para entender mejor como colocar límites de integración, suponemos que entramos a la región acotada. Los pies están sobre el plano $z = 0$, y se pueden mover en la circunferencia de radio 1. Además, la cabeza puede alcanzar hasta el plano $z = 10$. Con esto en mente se tiene:

$$\{-1 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, 0 \leq z \leq 10\}$$



De esta forma, la integral que proporciona el volumen V es

$$V = \int_{-1}^1 \int_0^{10} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy dz, dx$$

Por simetría, se puede llevar todo al primer octante y tener

$$V = 4 \int_0^1 \int_0^{10} \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy dz, dx$$

Al calcular se obtiene

$$V = 10\pi$$

2.7.1 Cambio de variable en la integral triple

La idea es muy parecida a la desarrollada en integrales dobles.

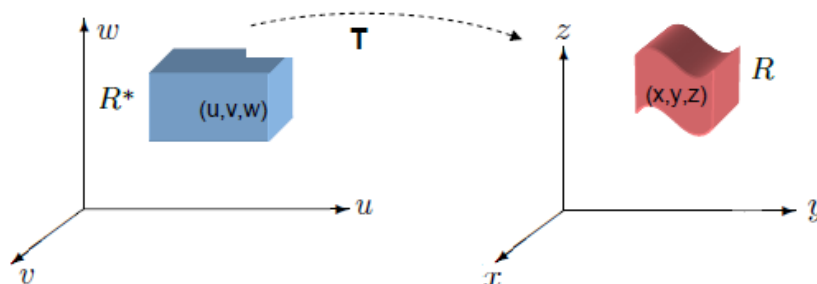


Figura 2.31

El hacer un cambio de variables simplifica, muchas veces, los cálculos. En este caso de tres variables se considera una transformación

$$T : R^* \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow R \subset \mathbb{R}^3, \quad T(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$$

Cuyo Jacobiano es

$$J(T) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

En estas condiciones, la fórmula del cambio de variables en integrales triples es

$$\iiint_R f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{R^*} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |J(T)| du dv dw$$

2.7.2 Coordenadas cilíndricas

Este cambio de variables, no es otra cosa que una generalización de las polares vistas en integrales dobles. En efecto, si $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es la aplicación

$$T(r, \theta, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z) = (x, y, z), \quad r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi$$

entonces ella es inyectiva y de clase ζ^1 , con Jacobiano

$$J(x, y, z) = \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -r \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

Esta aplicación T da origen a las denominadas **coordenadas cilíndricas**. La figura 2.32 ilustra la relación que existe entre coordenadas rectangulares (x, y, z) y las coordenadas cilíndricas de un punto P de $\mathbb{R}^3$.

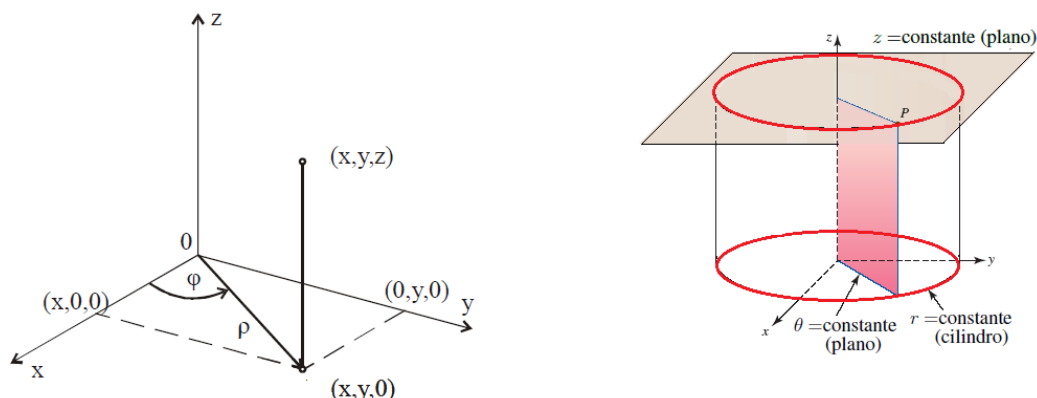


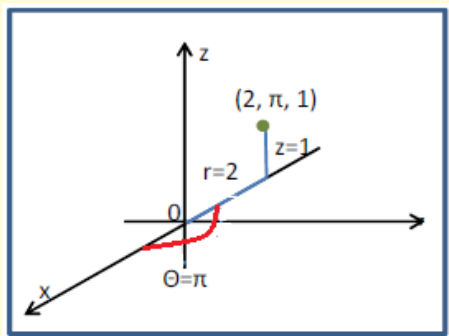
Figura 2.32

La transformación a coordenadas cilíndricas $T : R^* \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow R \subset \mathbb{R}^3$, para una función $f : R \rightarrow \mathbb{R}^3$ integrable es tal que

$$\iiint_R f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{R^*} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta dz$$



Desafío 10.



- La figura muestra el punto $(2, \pi, 1)$ en coordenadas cilíndricas. El correspondiente punto cartesiano es:

Respuesta Correcta:

Press Me!

Ejemplo 2.7.3. Hallar $\iiint_R \sqrt{x^2 + y^2} e^z \sqrt{x^2 + y^2} dV$ si

$$R = \{(x, y) / 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}\}$$

Hacemos un esquema del recinto, y escribimos, la integral triple del volumen, en coordenadas cartesianas. Se observa, por simetría, que podemos considerar el primer octante y multiplicar por 4. Esto es así, pues el piso es $z = 0$ y el techo $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Además, en el cuarto de círculo que queda en el primer octante, si la variable x se mueve entre 0 y 1, la variable y debe moverse entre 0 y la curva $y = \sqrt{1 - x^2}$.

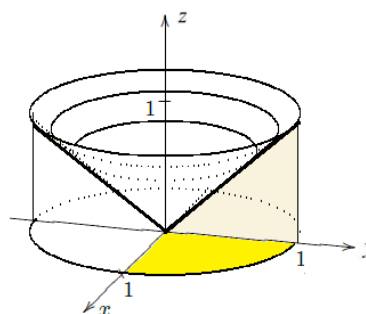


Figura 2.33

Se tiene así que

$$V = 4 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} \sqrt{x^2+y^2} e^z \sqrt{x^2+y^2} dz dy dx$$

Se ve “al tiro” que es mejor pasarse a coordenadas cilíndricas.

$$V = 4 \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \int_0^r r \cdot r \cdot e^{zr} dz d\theta dr$$

Para la integral con z se tiene:

$$\int_0^r r \cdot (r \cdot e^{zr}) dz = r \cdot e^{rz} \Big|_0^r = re^{r^2} - r$$

Ahora

$$\int_0^{\pi/2} (re^{r^2} - r) d\theta = \frac{\pi}{2} (re^{r^2} - r)$$

Finalmente

$$4 \int_0^1 \frac{\pi}{2} (re^{r^2} - r) = 2\pi \left(\frac{1}{2}e^{r^2} - \frac{r^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \pi(e - 2)$$

Trabajo con mi profe

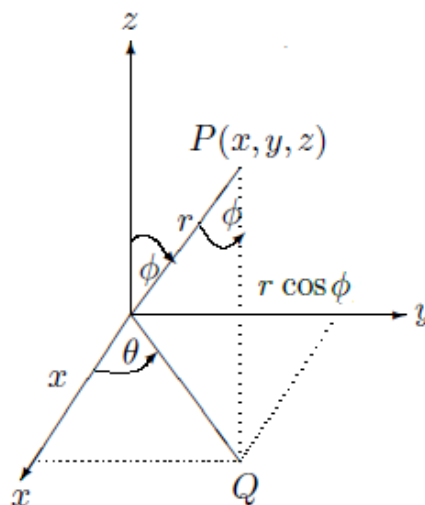


EJERCICIO 30. Calcular $\iiint_R \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy dz$ siendo R la parte superior de la región encerrada por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 10$ y el plano $z = 2$

- Por favor, indica la situación gráfica
- Usa coordenadas cilíndricas para establecer los límites de integración. No olvides ponerte dentro de la región.
- Tienes todo listo. Verifica que $\iiint_R \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy dz = 4\pi\sqrt{6}$

2.7.3 Coordenadas esféricas

La representación de las coordenadas esféricas de un punto $P(x, y, z)$ es (ρ, θ, ϕ) , donde ρ es la distancia de P al origen, θ es el ángulo polar de la proyección del punto P en el plano xy , y ϕ es la medida no negativa del ángulo menor medido desde la parte positiva del eje z a la recta que une P con el origen. Se tiene entonces, que el ángulo θ máximo es 2π y que el ángulo ϕ máximo es π . Estas coordenadas presentan un mayor grado de dificultad que las cilíndricas. Si $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una aplicación tal que



$$T(r, \theta, \phi) = (r \cos \theta \sin \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \phi)$$

con $r > 0$; $0 < \theta \leq 2\pi$; $0 \leq \phi \leq \pi$, entonces esta transformación es inyectiva y de clase ζ^1 , con Jacobiano dado por

$$J(x, y, z) = \begin{vmatrix} \cos \theta \sin \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \phi \\ -r \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & 0 \\ r \cos \theta \cos \phi & r \sin \theta \cos \phi & -r \sin \phi \end{vmatrix} = -r^2 \sin \phi$$

Respecto de la integral, una transformación en coordenadas esféricas

$$T : R^* \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow R \subset \mathbb{R}^3$$

para una función $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ integrable, satisface

$$\iiint_R f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{R^*} f(r, \theta, \phi) \cdot r^2 \sin \phi d\theta dr d\phi$$

Ejemplo 2.7.4. Calcular $\iiint_R (e^{x^2+y^2+z^2})^{3/2} dV$, siendo R la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

El integrando, como se puede apreciar, es “horroroso”. Las coordenadas esféricas nos salvan. No es necesario graficar la esfera. La transformación esférica es

$$x = \rho \cos \theta \sin \phi, \quad y = \rho \sin \theta \sin \phi, \quad z = \rho \cos \phi$$

La integral se transforma en

$$\iiint_R (e^{x^2+y^2+z^2})^{3/2} dV = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi e^{\rho^3} \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$$

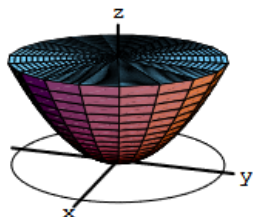
Haciendo los cálculos correctos

$$\begin{aligned} \iiint_R (e^{x^2+y^2+z^2})^{3/2} dV &= 2 \int_0^1 \int_0^{2\pi} e^{\rho^3} \rho^2 d\theta d\rho \\ &= 4\pi \int_0^1 e^{\rho^3} \rho^2 d\rho = \frac{4\pi}{3} (e - 1) \end{aligned}$$

MATHS QUIZ

Pasas con 100%.

- Considerar la región interior al paraboloide $x^2 + y^2 = 2z$ y limitada por el plano $z = 2$. En coordenadas cilíndricas esta región se describe como:

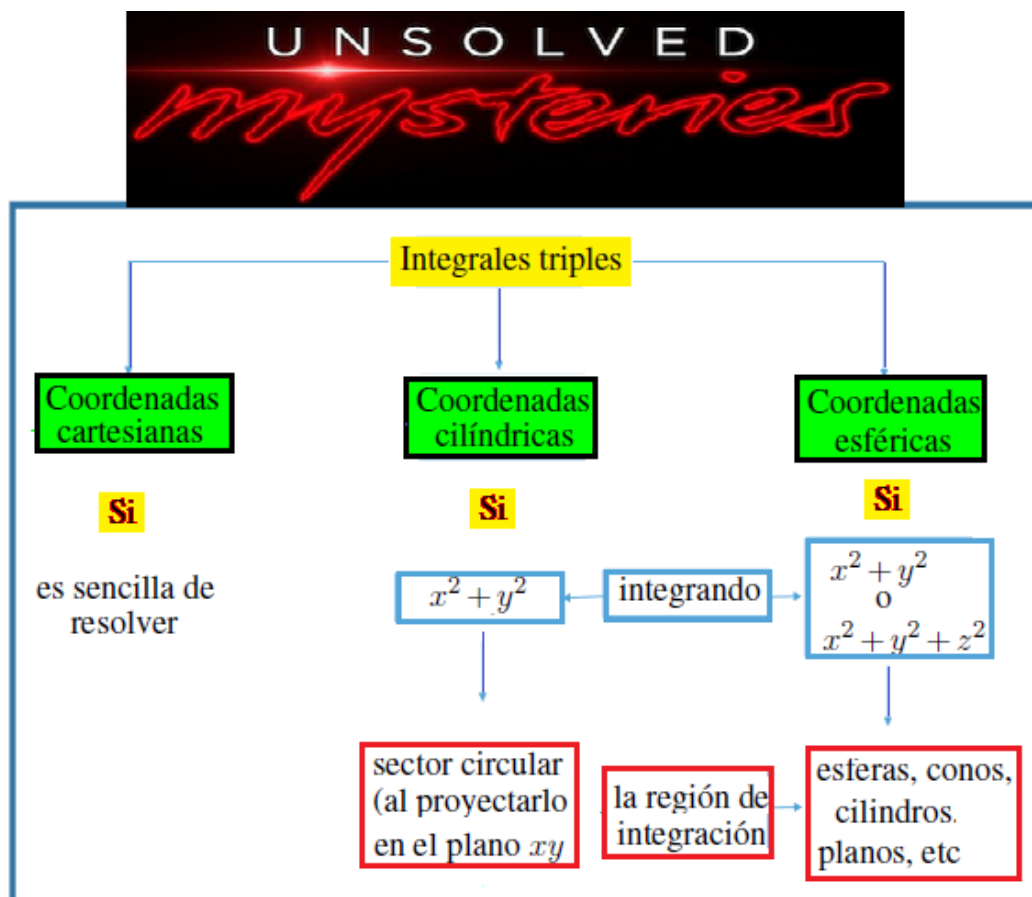


- (a) $\{0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 2, \frac{r^2}{2} \leq z \leq 2\}$ (b) $\{0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 2, 0 \leq z \leq 2\}$
 (c) $\{0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 4, \frac{r^2}{2} \leq z \leq 2\}$ (d) $\{0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 2, 0 \leq z \leq \frac{r^2}{2}\}$
2. La intersección de las superficies $z = x^2 + y^2$, $z = 10 - x^2 - 2y^2$ es la elipse $2x^2 + 3y^2 = 10$. Al usar el cambio de variables $x = r\sqrt{5} \cos \theta$, $y = \sqrt{\frac{10}{3}}r \sin \theta$, el jacobiano de esta transformación es:

- (a) r (b) $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{6}}r$ (c) $\frac{5}{\sqrt{6}}r$ (d) $\frac{10}{\sqrt{6}}r$

ScoreField PointsField

- Misterio resuelto:** Un “ayuda memoria” de cómo y cuando usar una transformación cilíndrica o esférica.



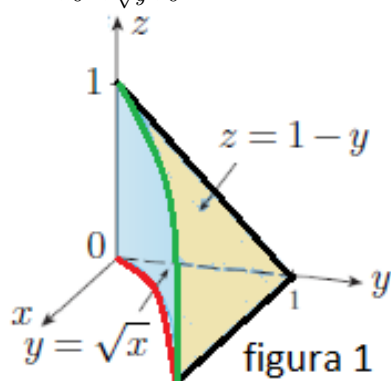


Pasas con 100%.

1. Considerar el sólido de la figura 1. La integral triple, en coordenadas cartesianas, que entrega el volumen del sólido es:

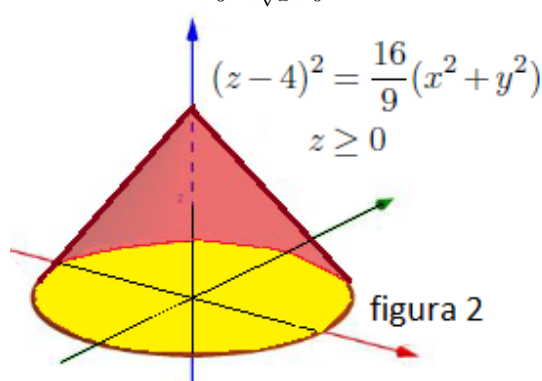
(a) $\int_0^1 \int_1^{\sqrt{x}} \int_0^{1-y} dz dy dx$

(c) $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \int_0^{1-y} dz dy dx$



(b) $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \int_0^{1-x} dz dy dx$

(d) $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \int_0^{1-y} dz dy dx$



2. Considerar el sólido de la figura 2. La integral triple, en coordenadas cilíndricas, que entrega el volumen del sólido es:

(a) $\int_0^{2\pi} \int_0^3 \int_0^{4-\frac{4}{3}r} r dz dr d\theta$

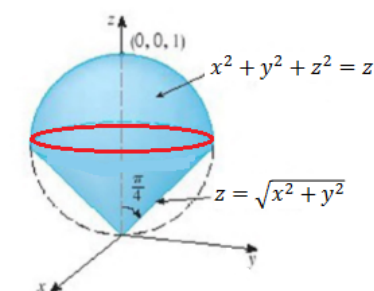
(c) $\int_0^{2\pi} \int_0^9 \int_0^{4-\frac{4}{3}r} r dz dr d\theta$

(b) $\int_0^{2\pi} \int_0^3 \int_0^{4+\frac{4}{3}r} r dz dr d\theta$

(d) $\int_0^{2\pi} \int_0^9 \int_0^{4+\frac{4}{3}r} r dz dr d\theta$

Considerar la región sobre el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y debajo de la esfera

3. $x^2 + y^2 + z^2 = z$. El recinto de integración de esta región, en coordenadas esféricas es:



(a) $\{0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq \sin \phi, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}\}$

(b) $\{0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \cos \phi, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}\}$

(c) $\{0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq \cos \phi, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}\}$

(d) $\{0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \rho \cos \phi, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}\}$

ScoreField PointsField



https://campusvirtual.ull.es/ocw/pluginfile.php/4093/mod_resource/content/0/tema1/practicas1/1-problemasR-itr-p.pdf

<https://www.dspace.espol.edu.ec/bitstream/123456789/7287/5/5-Integraci%C3%B3n%20M%C3%A9trica.pdf>

2.8 Masa - Momentos - Centro de masa

Si un sólido R tiene densidad $\rho(x, y, z)$ (masa/unidad de volumen) en cada punto, entonces:

- La **masa** se determina mediante la expresión

$$M = \iiint_R \rho(x, y, z) dx dy dz$$

- Sean P un plano en $\mathbb{R}^3$ con normal $\mathbf{n}$, $\mathbf{x}_0$ un punto fijo en el plano. El **primer momento** (M_P) y el **momento de Inercia** (I_P) de una región R en $\mathbb{R}^3$ con respecto al **plano** P se definen como:

$$M_P = \int_R \text{comp}_{\mathbf{n}}[\mathbf{x} - \mathbf{x}_0] dx dy dz \quad I_P = \int_R \text{comp}_{\mathbf{n}}^2[\mathbf{x} - \mathbf{x}_0] dx dy dz$$

Tenemos los siguientes casos particulares:

- Si P es el plano xy , se escoge el vector $\mathbf{n}$ en la dirección positiva del eje z , teniéndose que

$$\text{comp}_{\mathbf{n}}[\mathbf{x} - \mathbf{x}_0] = \mathbf{k} \cdot [\mathbf{x} - \mathbf{x}_0] = z$$

Luego,

$$M_{xy} = \iiint_R z dx dy dz, \quad I_{xy} = \iiint_R z^2 dx dy dz$$

- Si P es el plano yz , se escoge $\mathbf{n}$ en dirección positiva del eje x . Se tiene que

$$\text{comp}_{\mathbf{n}}[\mathbf{x} - \mathbf{x}_0] = \mathbf{i} \cdot [\mathbf{x} - \mathbf{x}_0] = x$$

Luego,

$$M_{yz} = \iiint_R x dx dy dz, \quad I_{yz} = \iiint_R x^2 dx dy dz$$

- Si P es el plano xz , se escoge $\mathbf{n}$ en dirección positiva del eje y . Se tiene que

$$\text{comp}_{\mathbf{n}}[\mathbf{x} - \mathbf{x}_0] = \mathbf{j} \cdot [\mathbf{x} - \mathbf{x}_0] = y$$

Luego,

$$M_{zx} = \iiint_R y dx dy dz, \quad I_{zx} = \iiint_R y^2 dx dy dz$$

- El **centro** de gravedad o centro de masa del sólido de masa M es $\mathbb{R}^3$ es el punto de coordenadas

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \frac{1}{M}(M_{yz}, M_{zx}, M_{xy})$$

- El momento de **inercia** respecto a una recta L se define como

$$I_L = \iiint_R d^2(x, y, z) \rho(x, y, z) dV$$

donde $d^2(x, y, z)$ representa la distancia de un punto genérico de R a la recta L .

- Los momentos de **inercia** respecto a los **ejes** coordenados son:

$$I_x = I_{xy} + I_{xz}, \quad I_y = I_{xy} + I_{yz}, \quad I_z = I_{xz} + I_{yz}$$

- El momento **polar** de inercia se define como

$$I_P = I_{xy} + I_{xz} + I_{yz}$$

Ejemplo 2.8.1. Calcular el momento de inercia con respecto al eje z del sólido, de densidad igual k , limitado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

La gráfica de la esfera es ampliamente conocida. Apareciendo la esfera, las coordenadas esféricas dicen “presente”

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \rho \leq 2, \quad 0 \leq \phi \leq \pi$$

Con esto, la integral a resolver es

$$\iiint k(x^2 + y^2) dV = k \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^2 \rho^4 \sin^3 \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$$

La dos primeras integrales interiores son sencillas. Por tanto,

$$\iiint k(x^2 + y^2) dV = k \cdot \frac{64\pi}{5} \int_0^\pi \sin^3 \phi \, d\phi$$

Para hallar la integral de seno cubo, se usa la identidad $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$.

$$\begin{aligned} \iiint k(x^2 + y^2) dV &= k \cdot \frac{64\pi}{5} \int_0^\pi (1 - \cos^2 \phi) \sin \phi \, d\phi \\ &= k \cdot \frac{64\pi}{5} \left(-\cos \phi + \frac{\cos^3 \phi}{3} \right) \Big|_0^\pi \\ &= k \cdot \frac{64\pi}{5} \cdot \frac{4}{3} = \frac{256\pi}{15} \end{aligned}$$

Trabajo con mi profe



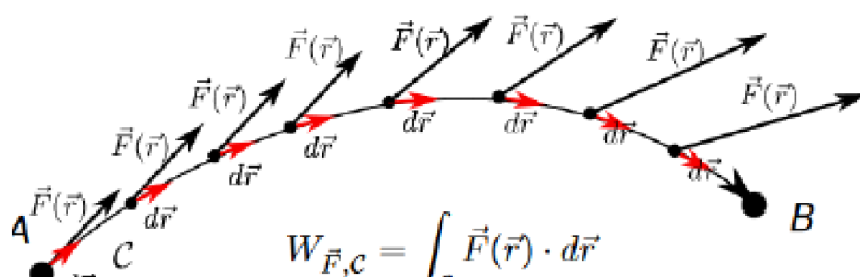
EJERCICIO 31. Hallar el momento de inercia respecto del eje x de la región comprendida entre el hemisferio $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ y el plano xy , si la densidad en cualquier punto (x, y, z) es proporcional a la distancia del punto al plano xy .

- Lo primero que se deduce que la densidad es $\rho(x, y, z) = kz$. Haz el gráfico de la región
- Establece la integral del momento de inercia pedido
- Luego de hacer la integral respecto de z te debe quedar:
- Luego de hacer la integral respecto de θ te debe quedar:
- Al hacer la integral respecto de r tienes la solución final

UNIVERSIDAD DE LA FRONTERA
Departamento de Matemática

Cuaderno Interactivo

Integrales de línea



Cálculo
Multivariable

3.1 Introducción

Hemos tenido la oportunidad de estudiar como se generaliza el concepto de integral de una a varias variables. Corresponde ahora, extender el concepto de integral definida. En lo que al proceso de integración en una variable se refiere, siempre se trabajó la integral sobre un intervalo cerrado, y con ello se dió, entre otras cosas, respuesta al problema del área. En este momento, por ejemplo, no tenemos forma de calcular

el trabajo que realiza una partícula que se mueve entre dos puntos siguiendo una trayectoria dada

Si queremos dar respuesta a este problema, la matemática nos proporciona las denominadas

integrales de línea

en las cuales, cambiaremos el intervalo de integración por una trayectoria y la función a integrar por un campo escalar o vectorial.

3.1.1 Caminos

Sea α una función continua definida sobre el intervalo $[a, b]$ y con llegada en $\mathbb{R}^n$

$$\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \alpha(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)) = \vec{f}(t)$$

Esta función α se llama camino, y su recorrido $\alpha(I)$ lo denominaremos trayectoria o curva del camino, y es la que denotamos por C .

Una interpretación física es pensar que el parámetro t representa al tiempo y que $\alpha(t)$ indica la posición del plano o del espacio en que se encuentra la partícula en el instante t .

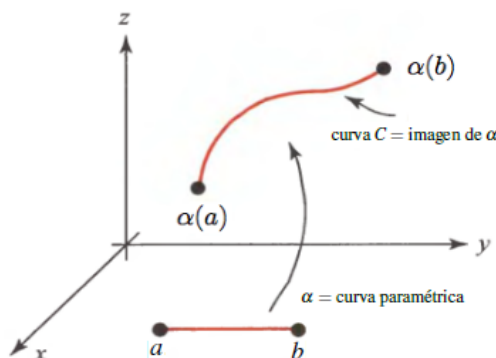


Figura 3.1

Ejemplo 3.1.1. Sea α el camino definido por $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $\alpha(t) = t + 1$ (figura 3.2a).

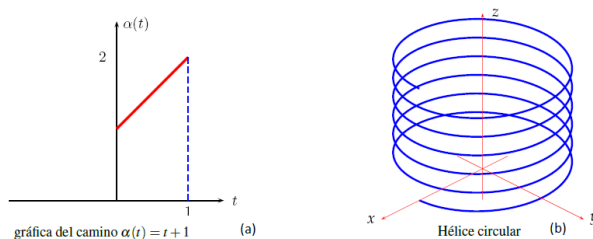


Figura 3.2

Ejemplo 3.1.2. Sea α el camino definido por la expresión

$$\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \alpha(t) = (\cos 4\pi t, \sin 4\pi t, t)$$

Se trata de una hélice (figura 3.2b) que sube por las paredes de un cilindro de radio 1.

Algunos caminos con los cuales nos podemos encontrar son los siguientes:

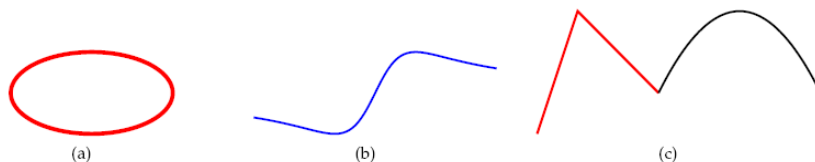


Figura 3.3

- Un camino *cerrado*, si $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$. Figura (3a)
- Un camino *regular*, si $\vec{r}$ es de clase ζ^1 sobre el intervalo $[a, b]$. Figura (3.3b)
- Un camino *regular a trozos*, si el intervalo $[a, b]$ se puede descomponer en un número finito de subintervalos en los cuales el camino es regular. Figura (3c)

3.1.2 Parametrizaciones

Orientación: Toda curva tiene dos orientaciones, que corresponden a las dos direcciones posibles del movimiento a lo largo de la curva. Así por ejemplo, se puede considerar una curva dirigida del punto P al Q o bien del punto Q al P . (figura 3.4a)

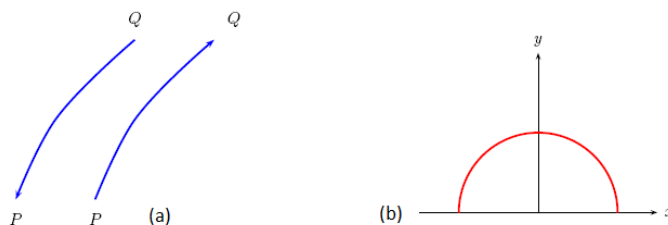


Figura 3.4

Una curva se puede parametrizar de diversas formas. Dependiendo de la trayectoria, algunas parametrizaciones se consideran mejores que otras, por ejemplo, para trayectorias como circunferencia y elipse se utilizan funciones seno y coseno.

Para ilustrar que las ecuaciones paramétricas de un lugar geométrico, **no** son únicas, consideremos la parte superior de la circunferencia de centro el origen de coordenadas y radio unitario $C = \{x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$ que muestra la figura 3.4b.

Una parametrización de esta rama superior de la circunferencia es

$$x = \cos \theta, \quad y = \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

el primer valor del parámetro, $\theta = 0$ entrega el punto $(\cos 0, \sin 0) = (1, 0)$. Ello significa que partimos de ese punto para empezar a recorrer la curva. El último valor $\theta = \pi$ produce el punto final $(\cos \pi, \sin \pi) = (-1, 0)$, con ello se deja establecido el sentido en que se recorre la curva.

Una segunda parametrización de la circunferencia es

$$x = t, \quad y = \sqrt{1 - t^2}, \quad -1 \leq t \leq 1$$

Es sencillo ver que

$$x = t, \quad y = \sqrt{1 - t^2} \implies x^2 + y^2 = 1$$

Al igual que antes, el primer valor de t produce el primer punto $(-1, 0)$ y el $t = 1$ produce el último, $(1, 0)$. Se observa que las parametrizaciones van en sentidos opuestos.

Eliminación del parámetro : Dada una curva en forma paramétrica, la ecuación cartesiana de ella se encuentra, eliminando el parámetro, mediante operaciones algebraicas, no existiendo para ello, un método particular.

EJERCICIO 32. Dada la curva paramétrica $x = 1 + t$, $y = t(t + 4)$

- (a) Elimina el parámetro para hallar la cartesiana
- (b) Esta ecuación representa una ...

EJERCICIO 33. Te dan $x = 2t$, $y = \frac{2}{t}$.

- (a) Elimina el parámetro y dame la ecuación cartesiana
- (b) Esta curva es una linda y hermosa ...

EJERCICIO 34. Te proporciono la ecuación paramétrica

$$x = 2 + 3 \operatorname{tg} \theta, \quad y = 1 + 4 \sec \theta$$

- (a) Si te pido dibujar esta curva paramétrica, así como está, te provocho un trauma emocional muy fuerte. Por lo tanto, sólo te pediré que la pases a coordenadas cartesianas eliminando el parámetro t . (eleva al cuadrado y resta una ecuación de otra)

$$\left. \begin{array}{l} x = 2 + 3 \operatorname{tg} \theta \\ y = 1 + 4 \sec \theta \end{array} \right| \implies \dots\dots\dots$$

- (b) ¿Reconoces esta ecuación? ¡Claro que sí!, es una ...

Hemos mostrado diversas parametrizaciones, pero no hemos dicho como se hacen.

3.1.3 Parametrización canónica

Dada una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ su gráfica es, como sabemos, el conjunto de puntos $\{(x, y) / y = f(x), x \in \operatorname{dom}(f)\}$, que representa una curva en el plano xy . En tal caso, podemos usar la variable x como parámetro, y tener que

$$x(t) = t, \quad y(t) = f(t)$$

Con lo cual, $\alpha(t) = (t, f(t))$ parametriza la curva que es gráfica de la función f . Este tipo de parametrización se denomina trivial o **canónica**.

Ejemplo 3.1.3. Para describir la curva $y = 1 + x^2$, usamos la variable x como parámetro, es decir

$$x(t) = t, \quad y(t) = 1 + t^2$$

De esta forma, la función $\alpha(t) = (t, 1 + t^2)$ con $t \in \mathbb{R}$, genera la curva correspondiente a la gráfica de la función $f(x) = 1 + x^2$.

EJERCICIO 35. Parametrizar el triángulo que forma la recta $x + y = 4$ con los ejes coordenados, en el primer cuadrante, partiendo en el origen de coordenadas, de aquí al punto $(0, 4)$, luego al $(4, 0)$ y de este punto se vuelve al origen.

No olvides que para un triángulo necesitas parametrizar con tres funciones, α_1 , α_2 y α_3 .

(a) Parametriza el triángulo con orientación positiva.



Si $\alpha : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ es una parametrización de la curva C , entonces $\alpha(a + b - t)$ parametriza la misma curva, pero con orientación opuesta a la de α .

(b) Parametriza el triángulo con orientación negativa.

3.1.4 Parametrizaciones trigonométricas

La parametrización, de curvas tales como; elipses, cicloides, circunferencias, hipocicloides y otras, se realiza en términos de funciones **seno** y **coseno**.

Ejemplo 3.1.4. Te muestro algunos ejemplos.

1. La circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, se parametriza:

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

2. El arco superior de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, se parametriza

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad 0 \leq t \leq \pi$$

3. La hipocicloide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, se parametriza

$$x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

4. La elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, se parametriza

$$x = 2 \cos t, \quad y = 3 \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$



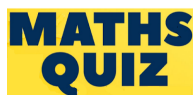
Desafío 11.

Usa corchetes $\langle \rangle$, con las comas respectivas, para tu respuesta.

1. La parametrización de la recta que pasa por $(3, 1, 2)$ y con vector director $\vec{d} = (0, 2, 1)$ es:

$$\alpha(t) =$$

Answers:



Pasas con 100%.

1. La curva paramétrica $x = -1 + 3 \cos t$, $y = 2 + 3 \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$ es una circunferencia de radio $r =$:

(a) $r = 9$ (b) $r = 3$ (c) $r = 1$ (d) $r = 6$

2. La parametrización $\alpha(t) = (a \cos 2t, a \sin 2t, 0)$, $t \in [0, \pi)$ representa una circunferencia que se recorre:

(a) una vez (b) tres veces (c) dos veces (d) cuatro veces

3. Un segmento entre dos puntos A y B del plano o del espacio es una curva, que se puede parametrizar por:

(a) $\alpha(t) = tA + (1 - t)B$, $0 \leq t \leq 1$ (b) $\alpha(t) = tA - (1 - t)B$, $0 \leq t \leq 1$

(c) $\alpha(t) = tB + (1 - t)A$, $0 \leq t \leq 1$ (d) $\alpha(t) = tB + (1 - t)A$, $0 \leq t \leq 1$

4. La curva definida por las ecuaciones paramétricas

$$x = t^2, \quad y = t + 1, \quad -\infty < t < \infty$$

es una:

(a) recta (b) parábola (c) elipse (d) circunferencia

ScoreField PointsField

3.1.5 Parametrización de una curva que es intersección de superficies

Ilustramos esta clase de parametrizaciones.

Ejemplo 3.1.5. Sea C la curva determinada por la intersección entre la superficie $x^2 + y^2 = 1$ (cilindro) y la superficie $y + z - 2 = 0$. Establecer una parametrización de la curva de intersección

Al haber un cilindro (figura 5), conviene trabajar una parametrización trigonométrica.

$$x(t) = \cos t, \quad y(t) = \sin t$$

ahora, de la ecuación del plano tenemos que $z = 2 - y$, de modo que $z(t) = 2 - \sin t$. Por tanto, una parametrización de la curva de intersección es

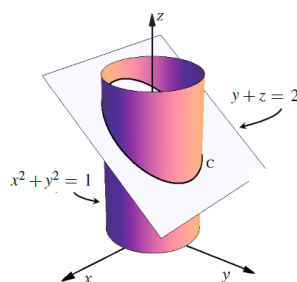


Figura 3.5

$$\alpha(t) = (\cos t, \sin t, 2 - \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

3.1.6 Longitud de una curva

Definición 3.1.6. Supongamos que $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una curva de clase C^1 . La longitud L de dicha curva viene dada por

$$L = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$$

Si se considera b variable, esto es, $b = t$, entonces al tomar diferencial se tiene que

$$L = \int_a^t \|\alpha'(t)\| dt \implies dL = \|\alpha'(t)\| dt$$

dL se conoce como la **diferencial** de arco.

3.2 Integral de línea

La integral de línea corresponde a una generalización del concepto de integral de un campo escalar f sobre un intervalo $[a, b]$ a un campo escalar f definido sobre una curva α . Este proceso de integración puede ser de uno de los siguientes tipos:

1. $\int_{\alpha} f dL$, f es un campo escalar, dL el elemento de longitud de arco.
2. $\int_{\alpha} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{L}$, $\mathbf{F}$ es un campo vectorial, $d\mathbf{L}$ como antes.

Vamos a separar su estudio, para referirnos a las integrales de línea de campo escalar y a las de campo vectorial.

3.2.1 Integral de campo escalar

Es comun que esta integral reciba el nombre de integral de trayectoria o integral de línea de campo escalar.

Sean $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ trayectoria de clase ζ^1 , $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ campo escalar continuo definido sobre la trayectoria α . Se define la integral de línea del campo escalar f sobre α como

$$\int_{\alpha} f dL = \int_a^b f(\alpha(t)) \|\alpha'(t)\| dt$$

Para satisfacer a esos espíritus inquietos y que se lo preguntan y cuestionan todo, les puedo decir, que el esquema seguido es el siguiente

$$\begin{array}{ccccc} [a, b] & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ & & f \circ \alpha & & \uparrow \end{array}$$

Se pueden demostrar las siguientes propiedades:



La integral de línea de una función escalar no depende de la parametrización utilizada para la curva, siempre que ésta sea recorrida una sola vez.



La integral de línea de una función escalar a lo largo de una curva formada por dos tramos, es igual a la suma de las integrales de línea de dicha función a lo largo de cada tramo. Simbólicamente,

$$\int_{C_1 \cup C_2} f dL = \int_{C_1} f dL + \int_{C_2} f dL$$



La integral de línea de una función escalar es independiente del sentido de recorrido de la curva. Simbólicamente,

$$\int_C f dL = \int_{C^-} f dL$$

3.2.2 Interpretación de la integral de trayectoria

- Cuando el campo escalar $f(x, y, z) = 1$ sobre la curva recorrida, la integral de línea coincide con la **longitud** del camino.
- Si sobre cada punto (x, y, z) de la curva α se levanta una altura $f(x, y, z)$, la integral de trayectoria sobre α de f sería el **área** de la “valla” formada por la curva y su imagen $f(\alpha)$.

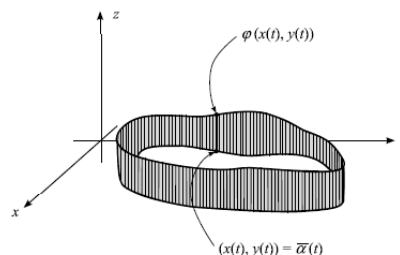


Figura 3.6

- Si la densidad de un alambre se expresa mediante un campo escalar f , siendo f la **masa por unidad de longitud** del alambre delgado con la forma de la curva, entonces:

1. La **masa total** del alambre es $M = \int_{\alpha} f dL$.

2. El centro de masa de un alambre en el plano está dado por:

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \int_{\alpha} x \rho(x, y) dL, \quad \bar{y} = \frac{1}{M} \int_{\alpha} y \rho(x, y) dL$$

3. En $\mathbb{R}^3$ las coordenadas del centro de masa son:

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{M}, \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M}$$

en donde:

$$M_{yz} = \int_{\alpha} x \rho dL \text{ es el momento respecto del plano } yz$$

$$M_{xz} = \int_{\alpha} y \rho dL \text{ es el momento respecto del plano } xz$$

$$M_{xy} = \int_{\alpha} z \rho dL \text{ es el momento respecto del plano } xy$$

Estas interpretaciones físicas sólo son correctas cuando el camino se recorre solo una vez.

EJERCICIO 36. Considera la trayectoria del segmento de recta $y = 2x - 1$ comprendido entre $(1, 1)$ y $(3, 5)$. Sea $f(x, y) = x^2 + 5xy$ campo escalar.

- (a) Haz el gráfico de esta trayectoria
- (b) Parametriza el segmento dado.
- (c) Halla el valor que toma el campo sobre la trayectoria
- (d) Anota la norma de $\alpha' = \dots$
- (e) Escribe la integral de línea, y aprovecha de calcularla ($\frac{236}{3}\sqrt{5}$)

Trabajo con mi profe



EJERCICIO 37. Calcula $\int_{\alpha} f \, dL$ si α es el triángulo curvilíneo conformado por $y = x^2$, $y = 1$, $x = 2$ recorrido en sentido positivo. El campo es $f(x, y) = 6xy$.

- (a) Grafica y parametriza el contorno
- (b) Halla el valor que toma el campo sobre cada subtrayectoria
- (c) Anota las normas de cada trayectoria derivada
- (d) Escribes las integrales de línea, y las calculas

EJERCICIO 38. Calcula $\int_{\alpha} f \, dL$ si α es la hélice $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = at$ en $[0, 2\pi]$, y el campo escalar es $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

- (a) Aunque no es tan necesario, grafica esta trayectoria
- (b) Halla el valor que toma el campo sobre la trayectoria
- (c) Anota la norma de la trayectoria derivada
- (d) Escribe la integral de línea, y la calculas ($\sim 126a^3$)

EJERCICIO 39. Calcula la longitud, masa y centro de masa de la curva representada por $y = x^2$, $x \in [0, 1]$. La densidad en cada punto es $\rho(x, y) = x$.

- (a) Grafica y parametriza esta trayectoria
- (b) Anda primero a buscar la longitud L de la curva
- (c) Ahora vemos la masa
- (d) La coordenada $\bar{x}$ del centro de masa es
- (e) La otra coordenada la calculas en tu casa, miras “tele”, “pololeas” un rato y luego sigues. ¡bye!

3.3 Integral de campo vectorial

Lo primero es recordar que es un campo vectorial

Definición 3.3.1. *Un campo vectorial es una función vectorial de varias variables en la que a cada punto de su dominio se le asigna el vector correspondiente a una determinada magnitud vectorial*

$$\vec{F} : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad n > 1$$

Ejemplos de campos vectoriales son: Campos de fuerzas (campos eléctricos, campos gravitatorios), Campos de velocidades (movimiento del viento, corrientes marinas, velocidad de un fluido), campos de flujo (flujo de calor)

La mejor manera de representar un campo vectorial es dibujar la flecha que representa al vector $\vec{F}(x, y)$. De esta forma podemos conseguir una representación razonable de $\vec{F}$.

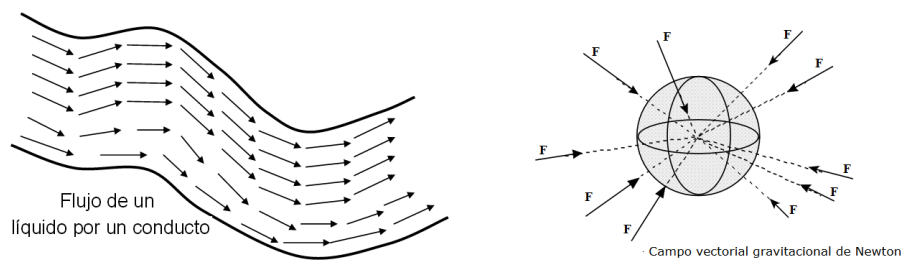


Figura 3.7

Ejemplo 3.3.2. Un campo vectorial sobre $\mathbb{R}^2$ está definido por $\vec{F}(x, y) = (y, -x)$. Describir $\vec{F}$ trazando algunos de sus vectores.



Puedes ir a mirar estas dos páginas “amigas”

<https://calculo21.com/campos-vectoriales/>

<https://openstax.org/books/c%C3%A1lculo-volumen-3/pages/6-1-campos-vectoriales>

Definición 3.3.3. Sea $\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial continuo, con $\vec{F}(x) = (F_1(x), F_2(x), F_3(x))$, y sea C una curva, definida en Ω , dada parametricamente por la función vectorial $\alpha : [a, b] \rightarrow \Omega$ tal que $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$, entonces la integral de línea del campo vectorial $\vec{F}$ sobre C es igual a

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{L} = \int_a^b \vec{F}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt$$

El esquema seguido es

$$\begin{array}{ccccc} [a, b] & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\mathbf{F}} & \mathbb{R} \\ & & \mathbf{F} \circ \alpha & & \uparrow \end{array}$$

Esta integral también es común representarla en la denominada forma cartesiana de la siguiente manera:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{L} = \int_C (F_1, F_2, F_3) \cdot \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) dt = \int_C F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$$

¡Propiedad inmortal!

Sea C la curva definida parametricamente por α . Si se denota por C^- a la misma curva pero recorrida en sentido contrario, entonces

$$\int_{\overrightarrow{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{L} = - \int_{\overleftarrow{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{L}$$

Como se ve, un simple **cambio de signo** permite calcular integrales de línea de campo vectorial en sentido opuesto.

Cuando la curva C es una curva cerrada, y ésta se recorre de tal manera que si una persona camina sobre la trayectoria definida por C , la región encerrada por esta queda a la izquierda de la persona, se dice que el sentido de recorrido es positivo, la integral de línea del campo vectorial $\vec{F}$ sobre la curva cerrada C se denota por

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{L}$$

Ejemplo 3.3.4. Sean $\vec{F}(x, y) = (x + y, 3x - y)$ y C la curva cartesiana dada por $y = (x + 1)^2$. Calcular la integral de $\vec{F}$ sobre la curva C en el sentido que une el punto $(-1, 0)$ con $(1, 4)$.

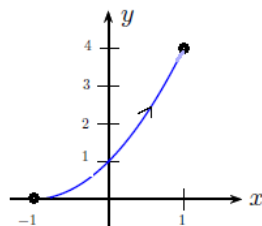


Figura 3.8

Una parametrización es $\alpha(t) = (t, (t + 1)^2)$, $-1 \leq t \leq 1$, de la cual $\alpha'(t) = (1, 2(t + 1))$. El valor del campo en la parametrización es

$$\vec{F}(\alpha(t)) = \vec{F}(t, (t + 1)^2) = (t + (t + 1)^2, 3t - (t + 1)^2)$$

Ahora,

$$\vec{F}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) = t + (t + 1)^2 + 2(t + 1)[3t - (t + 1)^2] = -2t^3 + t^2 + 3t - 1$$

Esta expresión entrega el integrando, de manera que

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{L} = \int_{-1}^1 (-2t^3 + t^2 + 3t - 1) dt = -\frac{4}{3}$$

Si se considera la orientación contraria en la curva C , entonces la integral del campo $\vec{F}$ sobre C sería igual a $\frac{4}{3}$.

Observación. Cuando la integral de línea es negativa, significa que el campo se opone al movimiento a lo largo de la curva. En otras palabras, el campo circula en dirección contraria a la orientación elegida para la curva C .

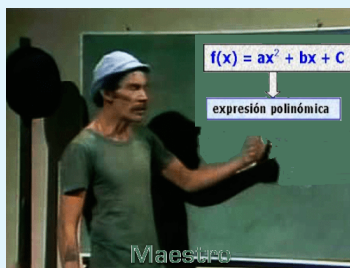
EJERCICIO 40. Dado el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = (x + y, 3xy)$, y la curva C cuya ecuación es $y = 2x - 1$. Calcula la integral de línea entre los puntos $(1, 1)$ y $(3, 5)$.

- Grafica y parametriza esta trayectoria
- Vamos a calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{L}$. Anota el valor que toma el campo sobre la trayectoria
- Anota el vector diferencial de arco
- Haces el producto punto entre las dos expresiones anteriores y formas la integral a calcular
- Calcula tu integral (90)

EJERCICIO 41. Dado el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = (2x^2 - 4xy, 5xy)$, y la curva C de ecuación $y = x^2 + 1$. Calcula la integral de línea entre los puntos $(0, 1)$ y $(2, 5)$.

- Grafica y parametriza la trayectoria
- Vamos a calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{L}$. Anota el valor que toma el campo sobre la trayectoria
- Anota el vector diferencial de arco
- Haces el producto punto entre las dos expresiones anteriores y escribes la integral.
- Calcula tu integral (72)

Trabajo con mi profe



EJERCICIO 42. Dado el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (yz, xz, xy)$, y la curva C de intersección de las superficies $x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2$ y $x^2 + y^2 = a^2$. Calcula la integral de línea sobre C .

- Debes encontrar la curva de intersección y parametrizarla. Te recomiendo que hagas la figura, y te acuerdes de la trigonometría.
- Ahora que tienes la curva parametrizada, anota el valor que toma el campo sobre la trayectoria
- Anota el vector diferencial de arco $d\mathbf{L} = \alpha dt = \dots$
- Haces el producto punto entre las dos expresiones anteriores y formas tu integral.
- Calcula tu integral

Press Me!



Desafío 12.

- Sea $\vec{F}(x, y, z) = (y, 2x, y)$, y C la trayectoria definida por $\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$, $0 \leq t \leq 1$.

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{L} =$$
- Sea $\vec{F}(x, y, z) = (y^3 + 2xy, x^2)$, C el perímetro del cuadrado unidad con vértices en los puntos $(-1, -1)$, $(1, -1)$, $(1, 1)$ y $(-1, 1)$, recorrida en sentido positivo.

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{L} =$$

Respuestas Correctas:

3.3.1 Trabajo

En el campo de la Física, si se tiene una fuerza $\vec{F}$ constante y el movimiento es en línea recta, el trabajo que realiza la fuerza para mover un objeto de un punto a otro del espacio es el producto punto entre la fuerza y el desplazamiento $\vec{d}$ del objeto. Esto es

$$T = \vec{F} \cdot \vec{d}$$

En el caso general de un campo de fuerzas variable, cuando el objeto se mueve siguiendo una trayectoria arbitraria, la noción de integral de línea de un campo vectorial a lo largo de una curva es la herramienta que resuelve esta situación

Sea $\vec{F}$ un campo vectorial continuo, y sea C una curva suave sobre la cual una partícula se mueve a mientras actúa sobre ella la fuerza $\vec{F}$. Sea $\alpha(t)$ con $t \in [a, b]$ una parametrización de C . El **Trabajo** T que realiza el campo para mover la partícula sobre C es

$$T = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{L} = \int_C \vec{F}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt$$

Ejemplo 3.3.5. Hallar el trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$, para mover una partícula desde el punto $(1, 0)$ al $(2, 2)$ a lo largo de la curva $y = x^2 - x$.

La parametrización de la curva es $\alpha(t) = (t, t^2 - t)$ con $1 \leq t \leq 2$. Su vector derivada $\alpha'(t) = (1, 2t - 1)$. El campo en la trayectoria es

$$\vec{F}(\alpha(t)) = \vec{F}(t, t^2 - t) = (t^2 - (t^2 - t)^2, 2t(t^2 - t))$$

Con estos datos, el integrando tiene la forma

$$\vec{F}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) = t^2 - (t^2 - t)^2 + 2t(t^2 - t)(2t - 1) = 3t^4 - 4t^3 + 2t^2$$

En consecuencia, la integral que proporciona el trabajo es

$$\int_1^2 (3t^4 - 4t^3 + 2t^2) dt = \frac{124}{15}$$

EJERCICIO 43. Considera el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = (x + y, y)$, y la trayectoria α que corresponde a la curva $y = x^2$ entre los puntos $(0, 0)$ y $(1, 1)$

- Haz la gráfica esta trayectoria y aprovecha de parametrizarla
- Calcula la integral de línea que proporciona el trabajo que realiza el campo para llevar una partícula del origen al $(1, 1)$ sobre la trayectoria (si sacas $\frac{4}{3}$ vas por el “buen camino”)

3.3.2 Circulación

Si la función vectorial $\vec{F}$ es un **campo de velocidades** de un fluido, el significado que tiene la integral de línea $\int_C \vec{F} \cdot \vec{T} dL$ es la cantidad de fluido que circula a lo largo de la curva C por unidad de tiempo, en la dirección del vector tangente unitario $\vec{T}$. Si la curva C es una curva cerrada, la integral de $\vec{F}$ sobre esta curva se escribe $\oint_C \vec{F} \cdot \vec{T} dL$ y se le denomina integral de **circulación** de $\vec{F}$ alrededor de la curva C .

Observación. Si el campo $\vec{F}$ representa un campo de velocidades de un fluido, la integral de línea $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{L}$, donde C es una curva suave o parcialmente suave, cerrada y recorrida en forma positiva, se puede interpretar como la cantidad neta de giro del fluido en el sentido de recorrido de la curva C . Se puede aquí observar lo siguiente:

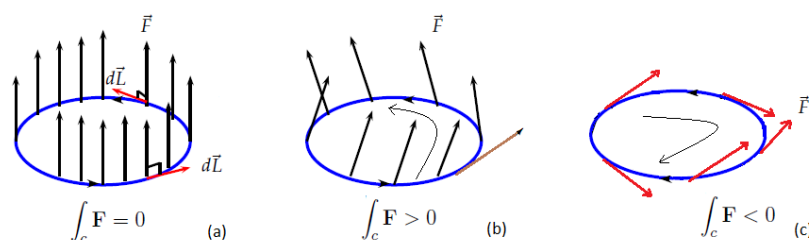


Figura 3.9

- si $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{L} > 0$, entonces las partículas del fluido se desplazan en el sentido de recorrido de la curva. (figura 3.9b)
- Si $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{L} < 0$, entonces las partículas del fluido se desplazan en el sentido contrario al del recorrido de la curva C (figura 3.9c),y
- Si $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{L} = 0$, entonces el campo vectorial $\vec{F}$ es perpendicular a la curva C , las partículas no giran. En este caso el fluido se dice que es **irrotacional** (figura 3.9a).

Ejemplo 3.3.6. Dado el campo de velocidades $\vec{F}(x, y) = (x + y, xy)$, calcular su circulación a lo largo de la recta $y = x + 1$, desde el punto $(0, 1)$ a $(1, 2)$.

Como siempre, primero va la parametrización de la curva $\alpha(t) = (t, t + 1)$ con $0 \leq t \leq 1$. El vector velocidad de la curva es $\alpha'(t) = (1, 1)$. El campo en la trayectoria tiene la forma

$$\vec{F}(\alpha(t)) = \vec{F}(t, t + 1) = (2t + 1, t(t + 1))$$

De esta forma, el integrando es

$$\vec{F}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) = (2t + 1, t(t + 1)) \cdot (1, 1) = t^2 + 3t + 1$$

Luego, la circulación es

$$\int_0^1 (t^2 + 3t + 1) dt = \frac{t^3}{3} + 3\frac{t^2}{2} + t \Big|_0^1 = \frac{17}{6}$$

EJERCICIO 44. Considera el campo vectorial de velocidades $\mathbf{F}(x, y) = (1, kx)$, en donde k es una constante. Sea α la trayectoria que corresponde a la curva $(x - a)^2 + (y - b)^2 = 1$.

- Parametriza la trayectoria.
- Grafica la trayectoria.
- Calcula la circulación del campo $\mathbf{F}$ alrededor de α
- A la luz de este resultado puedes decir que la integral depende de $\dots$
- ¿Qué te parece que me digas el efecto del signo de k sobre un “corcho” que pones sobre la corriente?

3.3.3 Flujo bidimensional

El flujo es una operación matemática que se define para un campo vectorial y se realiza sobre una superficie de contorno determinado. Por tanto la información necesaria es conocer, el campo vectorial $\vec{F}$, la ecuación de la superficie y los límites de la misma C .

Vamos a encontrar la integral que proporciona el flujo, en el plano, posteriormente cuando se estudien integrales de superficie se vuelve a estudiar el flujo en el espacio tridimensional

Sea R una región del plano encerrada por una curva C . Si $\vec{F}(x, y)$ representa el flujo de un fluido, se puede medir la razón a la cual el fluido abandona la región (si se supone que tiene densidad 1) con una integral de línea. Se debe tener presente que, en general, la curva no es necesariamente cerrada.

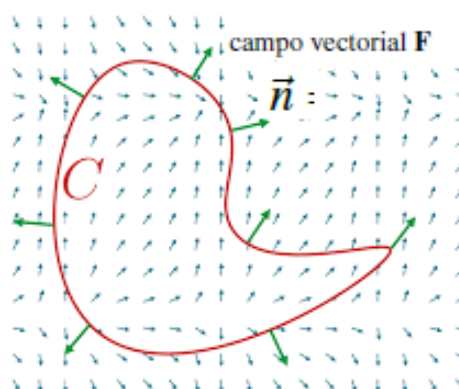


Figura 3.10

3.3.4 Cálculo del flujo

Sea $\mathbf{F} = (P, Q)$ campo vectorial en el plano. Sean $\mathbf{T}$ y $\mathbf{N}$ los vectores tangente unitario y normal unitario, respectivamente. Si $\alpha(t)$ es la parametrización de la trayectoria, entonces $\alpha'(t)$ tiene la misma dirección que el vector tangente unitario $\mathbf{T} = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$. El vector normal unitario obtenido a partir de $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$ tiene la forma

$$\mathbf{N} = \frac{(-y'(t), x'(t))}{\|\alpha'(t)\|}$$

Si el campo $\mathbf{F}$ es un campo de velocidad de fluido, entonces la integral

$$\int_{\alpha} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dL$$

es conocida como la integral de flujo sobre α . Esta integral entrega la tasa neta en que el fluido cruza α , hacia el lado de la normal $\mathbf{N}$, en unidades de área por unidad de tiempo.

Ejemplo 3.3.7. Considerar el campo $\vec{F}(x, y) = (x^2, y)$ y la curva cerrada C definida por la ecuación $x^2 + y^2 = 9$. Determinar el flujo que atraviesa la curva.

La parametrización de la circunferencia es $\alpha(t) = (3 \cos t, 3 \sin t)$ con $0 \leq t \leq 2\pi$. El vector tangente $\alpha'(t) = (-3 \sin t, 3 \cos t)$. A partir de este vector tangente se deduce que un vector normal es $\vec{n} = (3 \cos t, 3 \sin t)$ (producto punto es cero). El campo en la trayectoria tiene el valor

$$\vec{F}(\alpha(t)) = \vec{F}(3 \cos t, 3 \sin t) = (9 \cos^2 t, 3 \sin t)$$

De esta forma, el integrando, desarrollado, es

$$\vec{F}(\alpha(t)) \cdot \vec{n} = (9 \cos^2 t, 3 \sin t) \cdot (3 \cos t, 3 \sin t) = 27 \cos^3 t + 9 \sin^2 t$$

La integral de flujo es

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} (27 \cos^3 t + 9 \sin^2 t) dt &= 27 \int_0^{2\pi} ((1 - \sin^2 t) \cos t) dt + \frac{9}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2t) dt \\ &= 0 + \frac{9}{2} \cdot 2\pi \\ &= 9\pi \end{aligned}$$

El signo positivo indica que sale flujo de la región encerrada por la curva.

EJERCICIO 45. Considera el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = (-x, -y)$. Sea α la trayectoria triangular conformada por $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$.

- Grafica la trayectoria, y dibuja algunos vectores del campo para saber como pasan respecto de la frontera del recinto.
- Parametriza la trayectoria completa
- No olvides que ahora necesitas normal exterior unitaria, te ayudo con la primera integral

$$\int_{\alpha_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \|\alpha'(t)\| dt = \int_0^1 (-t, 0) \cdot (0, -1) \|(1, 0)\| dt = 0$$

Las otras dos se hacen igual. El resultado final es -1.

En el caso que un campo vectorial continuo $\vec{F}$ represente un campo magnético, la integral de línea $\oint_C \vec{F} \cdot \vec{N} d\vec{L}$ representa la cantidad de corriente que atraviesa la región R acotada por la curva cerrada C .

Si la función vectorial $\vec{F}$ es un campo eléctrico continuo sobre alguna región R , entonces la integral de línea de $\oint_C \vec{F} \cdot \vec{N} d\vec{L}$, se interpreta como el **flujo** del campo eléctrico a través de la región R .

3.3.5 Divergencia y Rotacional

Divergencia

El concepto de divergencia se define para cada punto y es una cantidad escalar con signo. Su significado físico es:

- Si la divergencia de un campo vectorial en un punto es positiva, quiere decir que en dicho punto el campo radia hacia el exterior. Se dice que en ese punto el campo vectorial posee un **manantial**.
- Si la divergencia es negativa, el campo converge hacia dicho punto; se dice que el campo posee un **sumidero**.
- Si la divergencia es nula en un punto el campo carece de fuentes escalares en dicho punto, y se dice que el campo es **solenoidal**.

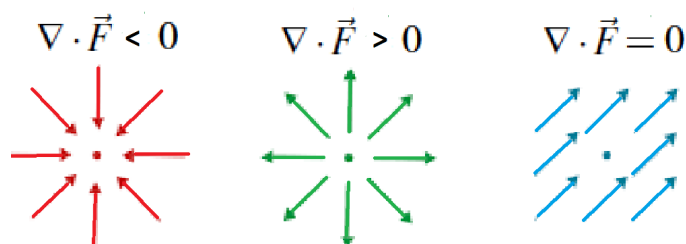
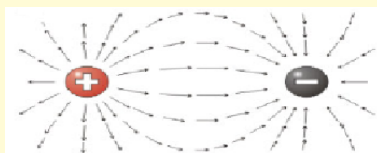


Figura 3.11

Los manantiales y los sumideros, constituyen las fuentes escalares de un campo vectorial.



Desafío 13. La figura muestra el campo eléctrico con un protón y un electrón



1. Un punto sumidero, en la figura, es protón o electrón? (usa acentos)
2. Un punto fuente o manantial, en la figura, es protón o electrón? (usa acentos)

Puntos obtenidos:

Definición 3.3.8. Sea $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ un campo vectorial definido y derivable en cada uno de los puntos (x, y, z) de una cierta región del espacio. La **divergencia** de $\vec{F}$, representada por $\text{div}\vec{F}$ o bien $\nabla \cdot \vec{F}$, viene dada, en coordenadas cartesianas, por la expresión:

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

Ejemplo 3.3.9. Hallar divergencia del campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (xy^2, -x, y^3z)$

3.3.6 Rotacional

Definición 3.3.10. Sea $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ campo vectorial derivable en $\mathbb{R}^3$, el **rotacional** de $\vec{F}$, representado por $\text{rot}\vec{F}$ o bien $\nabla \times \vec{F}$, viene dado, en coordenadas cartesianas, por la expresión

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

Si $\vec{F}(x, y, z)$ representa el flujo de un fluido, el rotacional es una medida de la tendencia del fluido a rotar alrededor de dicho punto.

Si $\vec{F}(x, y, z)$ representa el flujo de un fluido y $\nabla \times \vec{F} = 0$ para todos los puntos, el campo $\vec{F}$ se llama **irrotacional**. El valor del rotacional de un campo vectorial entrega las “fuentes vectoriales” del campo en cada punto.

Ejemplo 3.3.11. Hallar el rotacional del campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (xy^2, -x, y^3z)$

3.3.7 Conjuntos conexos, convexos y dominios

Un conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ se llama **conexo** si todo par de puntos de Ω se pueden unir mediante una curva suave a trozos contenida en Ω . En caso contrario, Ω se dice no conexo.

Se dice que el conjunto Ω **convexo** si el segmento que une a cualquier par de puntos de Ω está contenido en Ω . Evidentemente, si Ω es convexo entonces Ω es conexo.

Un conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y conexo se llama **dominio**.

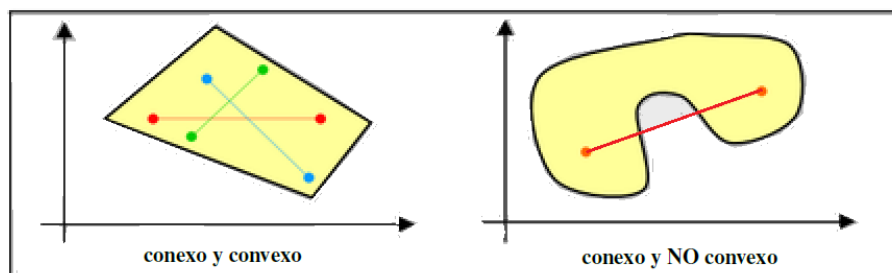


Figura 3.12

3.4 Campos Conservativos

El término **conservativo** proviene de la física, donde se usa para referirse a los campos vectoriales que cumplen el principio de conservación de la energía. Esto es equivalente a determinar bajo

qué circunstancias la integral de línea de un campo vectorial no depende del camino a lo largo del que se integra, sino sólo de los puntos inicial y final de su trayectoria.

Un campo vectorial $\mathbf{F}$ se llama **campo gradiente** (conservativo si $\vec{F}$ es campo de fuerzas), si existe un campo escalar f tal que $\nabla f = \mathbf{F}$

Existen las siguientes condiciones equivalentes para establecer cuando un campo vectorial es conservativo:

- **Independencia de la trayectoria**

Sea $\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial continuo en un conjunto abierto conexo Ω . Se dice que $\vec{F}$ es conservativo en Ω si para todo par de puntos $A, B \in \Omega$ las integrales de línea a lo largo de **todos** los caminos contenidos en Ω que tienen a A como punto inicial y a B como punto final dan el mismo resultado. En ese caso puede escribirse:

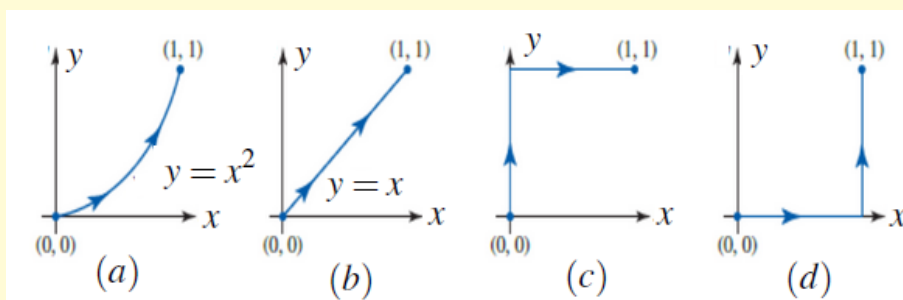
$$\int_{\alpha} \vec{F} \cdot d\vec{L} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{L}$$

Si esto ocurre para cualesquiera A, B en Ω se dice que la integral de línea de $\vec{F}$ es **independiente** de la trayectoria en Ω .



Desafío 14.

1. la integral $\int_C ydx + xdy$ tiene el mismo valor en cada trayectoria C entre $(0,0)$ y $(1,1)$ para las figuras indicadas



$$\int_C ydx + xdy =$$

Respuesta Correcta:

- **Trayectoria cerrada**

Sea $\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial continuo en un conjunto abierto conexo Ω . Se dice que $\vec{F}$ es conservativo en Ω si **para todo** camino cerrado C contenido en Ω ocurre que

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{L} = 0$$

Este resultado es **imposible** de lograr. Las curvas cerradas a encontrar son infinitas

- **condición necesaria y suficiente**

Sea $\mathbf{F} : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{F} = (F_1, F_2, \dots, F_n)$ campo de clase ζ^k , $k \geq 1$, definido sobre el conjunto simplemente conexo A . Una condición necesaria y suficiente para que $\mathbf{F}$ sea gradiente es que

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}), \quad 1 \leq i < j \leq n$$

- **Existencia del potencial**

Sea $\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial **continuo** en un conjunto abierto conexo Ω . Se dice que $\vec{F}$ deriva de un potencial en Ω si existe un campo escalar $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 y tal que $\nabla f = \vec{F}$. Este campo f se llama **potencial escalar** del campo $\vec{F}$.

- **El rotacional**

Si $\vec{F}$ es un campo vectorial con primeras derivadas parciales continuas en un abierto Ω de $\mathbb{R}^3$, entonces $\vec{F}$ es conservativo si y sólo si $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$.

3.4.1 Cálculo del potencial

Una vez que se ha probado que el campo es conservativo, la función potencial se puede hallar como sigue:

Usando el primer **Teorema Fundamental**

Sea $\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial continuo en un conjunto abierto conexo Ω . Si $\vec{F}$ es conservativo en Ω , entonces $\vec{F}$ deriva de un potencial en Ω y además el campo

$$f(\vec{x}) = \int_A^{\vec{x}} \vec{F} \cdot d\vec{L}$$

es una función potencial de $\vec{F}$ en Ω . El punto inicial A en Ω debe ser punto de continuidad.

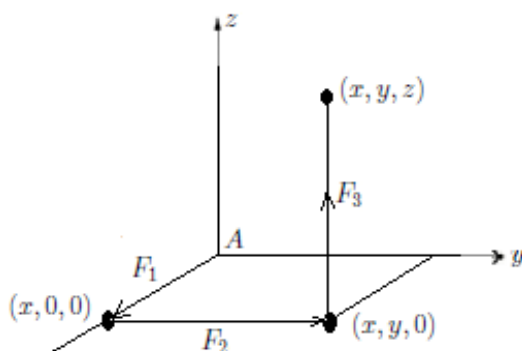


Figura 3.13

Considerando el campo escrito en componentes, $\vec{F}(x, y, z) = (F_1, F_2, F_3)$, entonces un potencial para $\vec{F}$ se puede hallar a partir de

$$f(x, y, z) = \int_0^x F_1(t, 0, 0) dt + \int_0^y F_2(x, t, 0) dt + \int_0^z F_3(x, y, t) dt$$

en donde se ha considerado $A = (0, 0, 0)$ como punto inicial.

Ejemplo 3.4.1. Sea $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ el campo vectorial $\vec{F}(x, y) = (y + e^x, x + 2y)$. Probar que es un campo gradiente y hallar su función potencial.

El campo $\vec{F}$ está definido en todo $\mathbb{R}^2$, que es un conjunto abierto simplemente conexo y además, es de clase C^1 . Usando el rotacional tenemos lo siguiente:

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y + e^x & x + 2y & 0 \end{vmatrix} = \vec{0}$$

De modo que $\vec{F}$ es un campo gradiente (conservativo si $\vec{F}$ fuera de fuerzas). Así, la función potencial existe y la calculamos usando el primer teorema fundamental. Para ello consideremos el $(0, 0)$ como punto inicial y (x, y) punto final. Como $\vec{F}(x, y) = (F_1, F_2)(x, y) = (y + e^x, x + 2y)$, el potencial lo calculamos usando la expresión

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_0^x F_1(t, 0) dt + \int_0^y F_2(x, t) dt \\ &= \int_0^x (0 + e^t) dt + \int_0^y (x + 2t) dt \\ &= e^t \Big|_0^x + (xt + t^2) \Big|_0^y = e^x - 1 + xy + y^2 \end{aligned}$$

EJERCICIO 46. Sea $\mathbf{F} = (P, Q)$ campo vectorial tal que $P(x, y) = 2xy$, $Q(x, y) = x^2$. Calcular la integral de línea del campo, entre los puntos $(1, 1)$ y $(2, 4)$ sobre las trayectorias:

1. $y = 3x - 2$

2. $x = 2, y = 1$.

- Grafica y calcula la primera integral.
- Grafica la segunda trayectoria y calcula la integral de línea.
- Tienes el mismo resultado, 15 ¿es ello motivo suficiente para afirmar que la integral evaluada sobre cualquier curva que une esos dos puntos tiene siempre el valor 15?
- Confirma tu respuesta con el rotor
- Ahora sí, dame tu conclusión sobre si la integral es ¿independiente o no del camino de integración?

EJERCICIO 47. Sea $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ campo vectorial tal que $P(x, y, z) = 3x^2z$, $Q(x, y, z) = 4y^3z^2$, $R(x, y, z) = x^3 + 2y^4z$. Determinar si la integral de línea del campo, entre los puntos $(1, 3, 2)$ y $(2, 0, 1)$, es independiente del camino. Si lo es, hallar su valor.

- Lo primero es que indentiques el campo vectorial $\vec{F} = \dots$
- La matemática es muy “democrática”, tienes dos alternativas para ver si la integral es independiente del camino. Haz uso de la que te sea más sencilla.

EJERCICIO 48. Verifica que el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = (x + y^2, 2xy)$ es gradiente, y halla la función potencial.

- Usa las derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2xy) = \dots, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x + y^2) = \dots$$

- Calcula el potencial

Trabajo con mi profe



EJERCICIO 49. Verifica que el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (3y^2z + ye^x, 6xyz + e^x, 3xy^2)$ es gradiente, y halla la función potencial.

- (a) Ahora estamos en tres variables. Es más sencillo que veas el rotor
- (b) Calcula el potencial usando la fórmula de las integrales



Desafío 15.

1. La función potencial del campo $\vec{F} = (y^2 + 2xz^2 - 1, 2xy, 2x^2z + z^3)$ es:

$$f(x, y, z) = -x + xy^2 + x^2z^2 + \frac{z^4}{2}$$

$$f(x, y, z) = -x + xy^2 + x^2z^2 + \frac{z^4}{4}$$

$$f(x, y, z) = x + xy^2 + x^2z^2 + \frac{z^4}{4}$$

$$f(x, y, z) = -x + xy^2 - x^2z^2 + \frac{z^4}{4}$$

Número de preguntas respondidas correctamente:

Puntos obtenidos:

Porcentaje de éxito:

3.4.2 Cálculo de la integral en campo conservativo

Estando en un campo conservativo, una de las mejores formas de hallar el valor de una integral de línea de campo vectorial es mediante el denominado **segundo** teorema fundamental.

Teorema 3.4.2. Sea $\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial continuo en un conjunto abierto conexo Ω . Si $\vec{F}$ es conservativo en Ω , entonces

$$\int_{\alpha} \vec{F} \cdot d\vec{L} = \int_{\alpha} \nabla f \cdot d\vec{L} = f(\alpha(b)) - f(\alpha(a)) = f(B) - f(A)$$

Se observa que la integral será calculada, utilizando el valor del potencial en el punto final menos el valor del potencial en el punto inicial.

Ejemplo 3.4.3. Calcular la circulación del campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (6xy, 3x^2, 2)$ desde el punto $(0, 0, 0)$ hasta el punto $(1, 1, 1)$ a lo largo de la curva parametrizada (t, t^2, t^3) .

Antes de todo, veamos si el campo es gradiente

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 6xy & 3x^2 & 2 \end{vmatrix} = (0, 0, 6x - 6x) = (0, 0, 0)$$

¡Bien! es gradiente. Hallaremos el potencial

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \int_0^x F_1(t, 0, 0) dt + \int_0^y F_2(x, t, 0) dt + \int_0^z F_3(x, y, t) dt \\ &= \int_0^x 0 dt + \int_0^y 3x^2 dt + \int_0^z 2 dt = 0 + 3x^2 t \Big|_0^y + 2t \Big|_0^z = 3x^2 y + 2z \end{aligned}$$

Después de evaluar, la función potencial es

$$f(x, y, z) = 3x^2 y + 2z + k$$

Ahora, la integral pedida es

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{L} = f(1, 1, 1) - f(0, 0, 0) = 5$$

EJERCICIO 50. Considera el campo $\mathbf{F}(x, y) = (2xy + 1, x^2 + 4y)$

- (a) ¿Cuál es su dominio? ... ¿es un conjunto simplemente conexo? ...
- (b) ¿Es $\mathbf{F}$ campo de clase ζ^1 sobre $\mathbb{R}^2$?
- (c) ¡Vamos bien!. Verifica la igualdad de las derivadas parciales

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \dots \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \dots$$

- (d) Tenemos todo bajo control. Es un campo gradiente y ¡la función potencial existe!. Usa la fórmula

3.5 Teorema de Green

Si C es una curva cerrada simple que encierra una región R simplemente conexa, en la cual las funciones $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $\frac{\partial P}{\partial y}$ y $\frac{\partial Q}{\partial x}$ son de clase ζ^1 , entonces

$$\oint_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dy dx$$

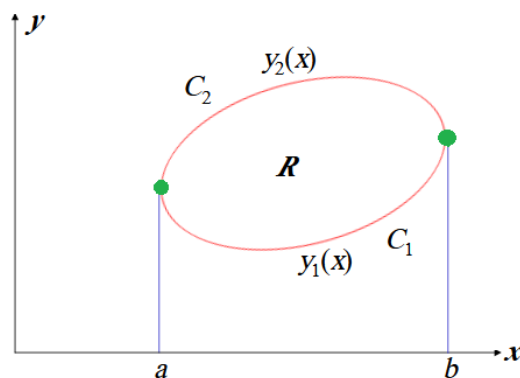


Figura 3.14

El Teorema de Green relaciona una integral de línea a lo largo de una curva cerrada en el plano, con una integral doble sobre la región encerrada por dicha curva.

El circulito en la integral se usa para indicar que el camino es cerrado

Siempre es importante que algunos resultados sean demostrados. Para asegurarme que has alcanzado el grado de madurez matemática necesario y suficiente, te invito a ser parte de esta demostración. (si te interesa pincha [quiero ver](#))

QuieroVer.

Más adelante generalizamos este teorema y veremos que es válido para cualquier curva cerrada (no sólo simplemente conexa).

EJERCICIO 51. Sea $\vec{F} = (P, Q)$ campo vectorial tal que $P(x, y) = x + 4y$, $Q(x, y) = 3xy^2$. Sea C la trayectoria cerrada conformada por las curvas $y = x^2$ e $y = x$. Me vas a ayudar en verificar el teorema de Green (calculando ambas partes de la ecuación que establece el teorema).

- (a) Grafica y parametriza la trayectoria
- (b) Ahora calculas la integral de línea $\oint_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \dots$
- (c) Ahora vamos por la integral doble. Halla las derivadas parciales, estableces la integral y calculas, por supuesto, que todo te lo pido por favor, me imagino que de otra forma puedo herir tu “sensibilidad”

EJERCICIO 52. Sea $\vec{F} = (P, Q)$ campo vectorial tal que $P(x, y) = 2xy$, $Q(x, y) = x^2$. Sea C la trayectoria cerrada conformada por las curvas $y = x^2$ e $x = 0$ e $y = 4$. Calcular la integral de línea del campo sobre la curva.

Lo primero que resalta de la lectura del problema es que la curva es **cerrada**, por tanto, tu tiene que parar las antenas y pensar que, a lo mejor, te ahorras “pega” si “chequeas” si existe independencia del camino. Te cuento ya, que **la integral sobre curvas cerradas es cero sólo en campos gradientes**.

- (a) Grafica la trayectoria
- (b) Calcula $\frac{\partial P}{\partial y} = \dots$ y $\frac{\partial Q}{\partial x} = \dots$
- (c) Esto te muestra que

$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dy dx = \dots$$

- (d) Por esta vez, te pido calcules la integral de línea, con el fin de verificar el resultado

$$\int_C P dx + Q dy$$

EJERCICIO 53. Te dan el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = (x + y, y)$. Te piden calcular la integral de línea del campo sobre las curvas $\alpha_1 = (t, t^2)$ y $\alpha_2 = (t, t^3)$ entre los puntos $(0, 0)$ y $(1, 1)$.

- (a) Calcula ambas integrales
- (b) Quiero una conclusión $\dots$

EJERCICIO 54. Te dan el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = (x + 4y, ax + y)$.

- (a) Te piden determinar a para que el campo sea gradiente. Una vez que encuentres a me das el valor de la integral sobre la curva α de ecuación $|x| + |y| = 1$. ¡Otra cosa!, me parecería altamente interesante que graficaras la curva, sólo por curiosidad.

Trabajo con mi profe



EJERCICIO 55. Te dan el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = (x + y^2, 2xy)$ y la curva α tal que $x^4 + y^4 = x + y$. Te piden hallar la integral de línea del campo sobre la curva α entre los puntos $(0, 0)$ y $(1, 1)$. ¿En qué piensas?

- Estoy de acuerdo contigo, ¡chis, la curvita! Pero ahora viene lo bueno, chequea si la curva dada efectivamente los puntos que se indican ...
- Justo en este momento piensas ¡y si fuera un **campo gradiente**!. Eso está muy bien, trata de verlo
- Con tu respuesta en la mano tienes el 50% del problema resuelto. Anota tu función potencial
- Con el potencial, estás listo para calcular la integral

EJERCICIO 56. Te dan el campo vectorial $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

Mirando como viene definido el campo, puede que te de un poco de “shusto”, pero, tranquilo(a). Quiero que calcules la integral del campo sobre la curva de ecuación $x^2 + y^2 = r^2$, como dijo el gringo, “un hermoso circunferencio”.

- Parametriza la circunferencia
- Evalúa el campo sobre la circunferencia
- La diferencial $d\mathbf{L} = (x'(t), y'(t)) dt = \dots$
- Establece y calcula la integral de línea
- Quiero conocer tu conclusión ...

Lo que sucede es que en medio del camino nos topamos con el $(0, 0)$, lo que significa que el conjunto encerrado por la circunferencia no es simplemente conexo, por tanto, el campo no satisface las condiciones para ser gradiente. De todas maneras, hay que ser cuidadoso, porque un campo puede ser gradiente “localmente”, es decir, encontrar un conjunto simplemente conexo más pequeño en el cual si se cumplan las condiciones para que el campo sea gradiente. No es que quiera complicarte la existencia, no, nada más lejos de mi ánimo. Haremos una “averiguación”.

EJERCICIO 57. Considera el campo vectorial $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$, con

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right) = (P, Q)$$

- Verifica si se cumple la propiedad de las derivadas parciales.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \dots \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \dots$$

- (b) Tienes que son iguales, pero el campo no es gradiente ¿qué falla?
- (c) Veamos que pasa si se elige otro conjunto simplemente conexo, uno que no contenga al $(0, 0)$, por ejemplo, el que encierra la curva α de ecuación $(x - 2)^2 + y^2 = 1$. Dibuja la trayectoria
- (d) Dame el valor de la integral sobre la curva $(x - 2)^2 + y^2 = 1$.
- (e) Calcula ahora la integral de línea sobre el arco superior de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. Al dibujar la trayectoria te darás cuenta que el $(0, 0)$ no provoca problemas.

3.5.1 Resumen para campos gradientes

Mencionamos las condiciones para campos de $\mathbb{R}^3$, que para $\mathbb{R}^2$ siguen siendo válidas, con los alcances correspondientes.

Sea $\mathbf{F}$ campo vectorial de clase ζ^1 definido sobre un conjunto simplemente conexo de $\mathbb{R}^3$, excepto quizás en un número finito de puntos. Las siguientes condiciones para $\mathbf{F}$ son equivalentes:

1. Para toda curva cerrada α simple y orientada $\int_{\alpha} \mathbf{F} = 0$
2. $\mathbf{F} = \nabla \phi$. Es decir, $\mathbf{F}$ es gradiente de alguna función ϕ .
3. Para dos curvas simples orientadas α_1 y α_2 con los mismos extremos

$$\int_{\alpha_1} \mathbf{F} = \int_{\alpha_2} \mathbf{F}$$

esta es la independencia del camino de integración

4. $\nabla \times \mathbf{F} = 0$.
5. $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}), \quad 1 \leq i < j \leq n$

EJERCICIO 58. Considera el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (z^2 + 1, 2z, 2xz + 2y)$.

- (a) ¿Están dadas todas las condiciones para que $\mathbf{F}$ sea campo gradiente? Si eres tan amable, por favor anótalas.
- (b) Ya que estás tan seguro(a), utiliza esta última expresión integral para hallar el potencial del campo

3.5.2 Extensión del Teorema de Green

Para denotar la orientación positiva de la curva C usamos C^+ . La validez de este teorema queremos extenderla más allá de regiones elementales del tipo R_x o bien R_y , a regiones simplemente conexas y a regiones múltiplemente conexas.

Para extender el teorema de Green a regiones que sean combinaciones de regiones R_x y R_y , figura (a), sólo se necesita hacer el o los “cortes” adecuados. La figura muestra una región R descompuesta en dos regiones R_1 y R_2 , mediante el “corte” AC .

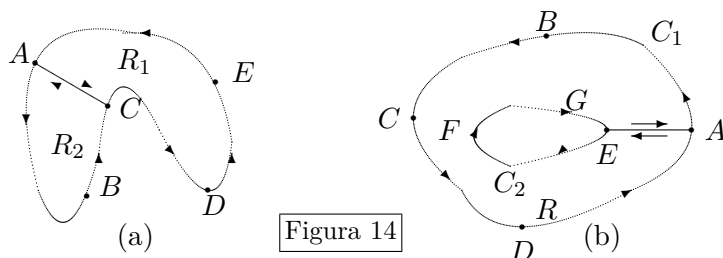


Figura 14

En este caso se tiene que:

$$\begin{aligned}\int_{ACDEA} P dx + Q dy &= \int \int_{R_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \\ \int_{ABCA} P dx + Q dy &= \int \int_{R_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy\end{aligned}$$

La suma de ambas expresiones, omitiendo integrandos, es

$$\int_{ACDEA} + \int_{ABCA} = \int_{AC} + \int_{CDEA} + \int_{ABC} + \int_{CA} = \int_{CDEA} + \int_{ABC} = \int_{CDEABC}$$

Por lo tanto

$$\int_{CDEABC} P dx + Q dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

La figura (b) muestra una región múltiplemente conexa. El Teorema de Green se generaliza a esta clase de regiones como sigue: La frontera de R está formada por las curvas C_1 y C_2 , ambas recorridas positivamente. Esto es, cualquier persona que recorra en ese sentido debe tener la región a su izquierda. El “corte” AE transforma la región múltiplemente conexa en simplemente conexa, siendo así, le es aplicable el teorema de Green. Se tiene

$$\int_{ABCDEAEFGA} P dx + Q dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

la integral de línea se descompone, omitiendo integrandos, en

$$\int_{ABCDEAEFGA} = \int_{ABCD} + \int_{AE} + \int_{EFGE} + \int_{EA} = \int_{ABCD} + \int_{EFGE}$$

Esto es

$$\int_{C_2^+} + \int_{C_1^-} = \int_{Fr(R)}$$

De donde se concluye que

$$\int_{Fr(R)} P dx + Q dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

EJERCICIO 59. Considera el campo $\vec{F}(x, y) = (y, 2x)$ y las regiones

$$R_1 = \{(x, y) / x^2 + y^2 \leq 16\}, \quad R_2 = \{(x, y) / (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1\}$$

- Con la rapidez habitual graficas estas regiones en un mismo plano y orientas las curvas en sentido positivo, haciendo el corte respectivo.
- Vamos a verificar el teorema de Green para regiones múltiplemente conexas. Parametriza ambas curvas
- Calcula la integral de línea sobre $C^+ = Fr(R_1) \cup Fr(R_2)$, ambas fronteras recorridas positivamente como lo pide Green.
- ¡Si! Green es ¡grande!, al calcular la integral doble tiene que dar el mismo resultado. Vamos, te doy la pauta

$$S = R_1 - \text{interior de } R_2$$

3.5.3 Área de una región según Green

Sea C^+ curva cerrada simple que es frontera de una región a la cual le es aplicable el teorema de Green, entonces el área de la región R acotada por C^+ es

$$A(R) = \frac{1}{2} \int_{C^+} (x dy - y dx)$$

La demostración es súper sencilla. ¡Por eso la hago!

$$P = -y \implies \frac{\partial P}{\partial y} = -1, \quad Q = x \implies \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{2} \int_{C^+} (x dy - y dx) = \frac{1}{2} \int \int_R 2 dx dy = \int \int_R dx dy = A(R)$$

3.6 El teorema de Stokes en el plano

Hasta lo podría jurar de “guata”, si Stokes hubiera sido chileno, habría sido ¡hincha del Colo!, con ese apellido no hay por donde perderse. Volvamos a la seriedad habitual del profesor de matemática.

Teorema 3.6.1. (*Stokes*)

Sean R región de $\mathbb{R}^2$ en el plano tridimensional de tipo elemental, $\mathbf{F} = (P, Q)$ campo de clase ζ^1 definido en R , entonces

$$\int_{C^+} P dx + Q dy = \int \int_R (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} dA$$

La prueba de este hecho es también “relajada”.

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = \left(-\frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

Luego

$$(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

En consecuencia

$$\int_{C^+} P dx + Q dy = \int \int_R (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} dA = \int \int_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

Al mirar ambas expresiones de esta ecuación te puedes dar cuenta que este teorema no es otra cosa que el teorema de Green con otra notación. El teorema de Stokes en $\mathbb{R}^3$ es más “pulento”.

3.6.1 El teorema de Gauss en el plano

Sea R región del plano y C^+ su frontera recorrida positivamente. Si $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$ es la parametrización de C^+ , entonces $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$ es un vector **tangente** a C^+ , y

$$\mathbf{n} = \frac{(y'(t), -x'(t))}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}} = \frac{(y', -x')}{\|\alpha'\|}$$

es un vector unitario **normal** a C^+ . Si el campo $\mathbf{F} = (P, Q)$ es de clase ζ^1 sobre R y su frontera, entonces

Teorema 3.6.2. (Gauss)

$$\int_{C^+} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) dL = \iint_R \nabla \cdot \mathbf{F} dA$$

Mira que sencilla es la demostración de este hecho.

$$\begin{aligned} \int_{C^+} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) dL &= \int_a^b \mathbf{F}(\alpha(t)) \cdot \mathbf{n} \|\alpha'(t)\| dt \\ &= \int_a^b [P(x(t), y(t)), Q(x(t), y(t))] \cdot [y'(t), -x'(t)] dt \\ &= \int_a^b (P y'(t) - Q x'(t)) dt \\ &= \int_a^b \left(P \frac{dy}{dt} - Q \frac{dx}{dt} \right) dt = \int_a^b P dy - Q dx \\ &= \iint_R \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dA = \iint_R \nabla \cdot \mathbf{F} dA \end{aligned}$$

Como se trabajó con normal unitario, una de las aplicaciones de este resultado, es que permite el cálculo el **flujo** a través de un recinto, con una facilidad increíble.

EJERCICIO 60. Se considera el rectángulo $[1, 3] \times [1, 2]$ y el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = (0, y^3)$. Hallar el flujo del campo a través de los lados del rectángulo.

- (a) Bosqueja el rectángulo y algunos vectores del campo allí para ver como van pasando.
- (b) Usas el teorema de la divergencia para hallar el flujo. Te darás cuenta del trabajo que se ahorra. Por favor, calcula la divergencia.
- (c) Como

$$\text{Flujo} = \int_C (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) dL = \iint_R (\nabla \cdot \mathbf{F}) dA$$

al calcular la integral de la divergencia tienes la respuesta

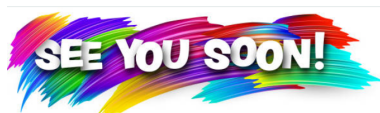
EJERCICIO 61. Se considera el recinto R acotado por el cuadrado de vértices $(-1, 1)$, $(-1, -1)$, $(1, 1)$, $(1, -1)$. Si $\mathbf{F}(x, y) = (0, y^3)$, hallar $\int_{Fr(R)} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) dL$.

- (a) Bosqueja el rectángulo y algunos vectores del campo allí para ver como van pasando.
- (b) Ahora observas con detención la integral que te piden calcular, te pasas las manos por los ojos para ver si es verdad lo que ves. De tanto ver películas exclamas ¡Oh my God!, *esta integral de línea es de componente normal sobre una trayectoria cerrada*. Esto significa que el problema pide determinar **flujo** del campo vectorial a través de la frontera del recinto. Como el **flujo** es algo que va con la divergencia. Listo, lo tienes.

$$\int_{Fr(R)} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) dL = \iint_R (\nabla \cdot \mathbf{F}) dA$$

Calcula entonces esta integral doble de la divergencia y tienes la respuesta

- (c) ¡Atención!, esto no significa que el flujo sea 4 en cada cara, sino que el **flujo total** a través de las caras es 4. Para convencerte calculas la cantidad de flujo que atraviesa cara cara.



UNIVERSIDAD DE LA FRONTERA
Departamento de Matemática y Estadística

CUADERNO INTERACTIVO

Campos Vectoriales

$$\underbrace{\iiint_V \nabla \cdot \vec{F} dV}_{\text{Suma los pedacitos de flujo hacia afuera de } V} = \underbrace{\int_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS}_{\text{Integral de flujo}} = \underbrace{\int_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS}_{\text{Mide todo el flujo hacia afuera a través de la frontera de } V}$$



Cálculo
Multivariable

4.1 Introducción

Estudiaremos campos vectoriales definidos en regiones del plano y en regiones del espacio. Veamos definiciones, ejemplos y la forma de representarlos gráficamente.

Definición 4.1.1. Un campo vectorial es una función $\vec{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que a cada punto $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ le asigna un único vector $\vec{F}(\vec{x}) \in \mathbb{R}^n$

Podemos ilustrar gráficamente el campo $\vec{F}$ colocando en cada punto del campo un vector

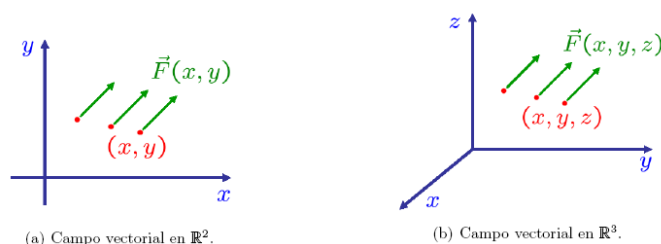


Figura 4.1

En particular;

- Si $n = 2$, el campo vectorial, en función de las coordenadas del punto (x, y) , se anota

$$\mathbf{F}(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$$

- Si $n = 3$, el campo vectorial, en función de las coordenadas del punto (x, y, z) , se anota

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$$

en donde los F_i son *campos escalares*, que reciben el nombre de *componentes* del campo vectorial $\mathbf{F}$.

La importancia de las componentes queda reflejada en todo lo concerniente al cálculo diferencial e integral en campos vectoriales. Para denotar un campo vectorial usaremos $\mathbf{F}$ o bien $\vec{F}$, dejando claramente establecido su dominio y rango.

4.1.1 Descripción de un campo vectorial

Para visualizar la “forma” de un campo vectorial se emplean las denominadas **líneas de campo**. Se trata de la construcción de líneas continuas, cuya orientación en cada punto sea la dirección del campo vectorial.

Este procedimiento es como sigue: En un punto P_0 se dibuja un segmento de recta pequeño cuya dirección es la del campo en P_0 . El extremo final de este segmento es el punto P_1 , el cual es cercano a P_0 . En el punto P_1 se dibuja otro segmento de recta cuya dirección es la del campo en P_1 . Continuando este proceso se construye la curva o línea en la región que interesa (figura 4.2).

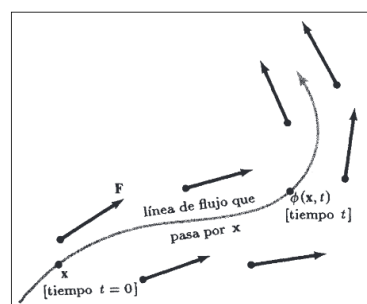


Figura 4.2

Estas líneas o curvas reciben el nombre de **líneas del campo**, de flujo, o de corriente, dependiendo ello de la cantidad vectorial de que se trate. Esta línea del campo vectorial $\mathbf{F}$ es cualquier curva cuya tangente en cada punto es **paralela** al campo.

Ejemplo 4.1.2. Supongamos un fluido moviéndose a través de una tubería. Si en cada punto colocamos la velocidad del fluido, se obtiene el campo de velocidad del fluido. La longitud de las flechas (rapidez) y la dirección del flujo pueden cambiar de un punto a otro (figura 4.3).



Figura 4.3

Dos líneas de campo nunca se pueden cruzar porque en el punto de corte habría dos tangentes y entonces el campo tendría dos valores distintos. No obstante, pueden existir puntos de donde divergen las líneas de campo (**fuentes**) o en los que convergen (**sumideros**). En dichos puntos el campo no está definido; existe en ellos una singularidad.

4.1.2 Ecuación de una línea

Si $\mathbf{r} = (x, y, z)$ es el vector de posición en cualquier punto de una línea de campo, entonces el vector desplazamiento diferencial $d\mathbf{r} = (dx, dy, dz)$ y el campo vectorial $\mathbf{F}$ son paralelos, es decir, $d\mathbf{r} \parallel \mathbf{F}$, y por tanto sus componentes serán proporcionales. Esto es,

$$d\mathbf{r} = (dx, dy, dz), \quad \mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3) \implies \frac{dx}{F_1} = \frac{dy}{F_2} = \frac{dz}{F_3}$$

Integrando estas igualdades obtenemos la ecuación de las líneas de campo.

EJERCICIO 62. Bosquejar las líneas del campo $\mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{4}(x, -y)$.

(a) Como el campo es bidimensional tienes que

$$\frac{dx}{F_1} = \frac{dy}{F_2} \implies \dots\dots\dots$$

(b) De esta forma, las líneas del campo son ...

(c) Calcula $\|\mathbf{F}\| = \dots$

(d) Representa el campo vectorial en el plano cartesiano.

4.2 Integral de Superficie

Las integrales de superficie a estudiar son de la forma

$$\int_S f dS, \quad \int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

en donde f es un campo escalar, $\mathbf{F}$ un campo vectorial, dS la diferencial de superficie, $d\mathbf{S} = \mathbf{n}dS$ con $\mathbf{n}$ vector normal exterior unitario a la superficie S .

En primer lugar hacemos algunas consideraciones geométricas sobre las superficies restringidas a $\mathbb{R}^3$.

Análiticamente, una superficie puede expresarse mediante la llamada representación **implícita**, lo cual significa que se considera una superficie como un conjunto de puntos (x, y, z) que satisfacen una ecuación de la forma $F(x, y, z) = 0$, o bien mediante la representación **explícita**, que se obtiene a partir de la implícita cuando se puede despejar una de las variables en función de las dos restantes. Por ejemplo, z en función de x e y , obteniendo $z = f(x, y)$.

4.2.1 Parametrización de una superficie

Una definición amplia de superficie, que incluya los casos de una esfera, un cubo, un toro, sólo puede darse mediante la llamada **parametrización** de una superficie.

Definición 4.2.1.

Una superficie **parametrizada** es una función $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, tal que

$$\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

Si la función φ que define la superficie es de clase ζ^1 , o diferenciable, entonces la superficie se dice de clase ζ^1 o diferenciable. De hecho, las superficies que interesan son aquellas que no presentan aristas

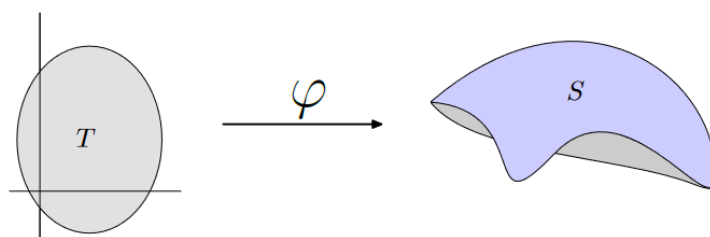


Figura 4.4

La definición de superficie mediante una parametrización está motivada por el hecho de que no toda superficie es la gráfica de alguna función de $\mathbb{R}^2$, así por ejemplo, la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, no es la gráfica de ninguna función $z = f(x, y)$, pues ello significa que para cada $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ debe haber sólo un z_0 tal que $(x_0, y_0, z_0) \in S$, siendo claro que esta condición no se cumple, por ejemplo, para $(1, 1)$, ya que $(1, 1, 1) \in S$ y $(1, 1, -1) \in S$.

¿Cómo se parametriza una superficie?

Si se mira con atención la definición, se observa que se está considerando una superficie como un objeto “bidimensional”, pues tiene por dominio un subconjunto A de $\mathbb{R}^2$, y las funciones coordenadas de φ tienen la misión de “meter” $f(A)$ en el espacio y dejar trazada, con sus imágenes, la superficie $\varphi(A) = S$.

EJERCICIO 63. Te invito a que estudiemos el efecto que tiene sobre el recinto $A = \{(u, v) / 1 \leq u \leq 2, 2 \leq v \leq 4\}$ aplicar la función

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \varphi(u, v) = (u, v, u + v + 1)$$

- Grafica el recinto del plano uv
- Si el buen ojo y la memoria no te engañan, la transformación es lineal, y por tanto, lleva rectas en ...
- ¡Muy bien!, así que, sacando las imágenes de los vértices del recinto y luego uniéndoles por rectas sabremos que superficie tenemos en $\mathbb{R}^3$. ¡Qué esperas, vamos, grafica la imagen en $\mathbb{R}^3$. Tienes un lindo y hermoso **plano**

Te voy a hacer una pregunta doméstica ¿Alguna vez, has tendido tu cama, conoces una sábana? En los tiempos que corren, los hijos de su “mamita” cada vez son menos y de seguro lo hiciste. Esta actividad da para pensar, y puede ser, que una superficie es como la sábana que va “volando” cuando tiendes la cama. Al principio la sábana estaba sobre la cama (espacio bidimensional) y

luego, al levantarla cobra vida (espacio tridimensional). Otra analogía es tener un globo sin aire tendido en el espacio bidimensional, al inflarlo cobra vida y pasa a ser un objeto de $\mathbb{R}^3$.

Te voy a explicar, y tu vas a prestar mucha atención a cómo podemos parametrizar superficies. Cualquier duda, por favor, de inmediato.

EJERCICIO 64. Parametrizar la parte del plano $x + y + z = 1$ que queda en el primer octante.

- (a) El proceso más simple es pensar que el plano uv forma parte del espacio tridimensional xyz , ya sea como xy , como yz o bien xz . Grafica entonces en el espacio tridimensional la superficie que te piden parametrizar, sólo lo pedido, no le pongas nada más.
- (b) En este caso la parametrización es:
- (c) Dame a conocer las parametrizaciones desde los otros dos planos

Espero que te des cuenta que no es tan complicado esto de parametrizar superficies.

EJERCICIO 65. Parametriza la superficie de ecuación $x^2 + y^2 - 1 + z = 0$.

- (a) Es necesario que la dibujes, pero ya sabes que se trata de un ...
- (b) Seguro que sabes donde tienes que poner los pies para tener la función que hace la parametrización. Desde el plano ...
- (c) Igual que en los casos anteriores, mantienes las variables de partida y ubicas la tercera

4.2.2 Superficies Lisas Simples

La idea es trabajar sobre superficies que no presenten aristas ni puntas y que no se “autointersecten”.

Superficie lisa simple

Sea D un conjunto abierto y conexo, la superficie $\varphi(D) = S$ definida por

$$\varphi : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (u, v) \mapsto \varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

se llama **Lisa simple** si:

- φ es inyectiva sobre D .
- $\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right)$, $\frac{\partial \varphi}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right)$ existen y son linealmente independientes en D .

Cosas de interés

- El producto vectorial $\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}$ se llama **fundamental**
- Si el producto fundamental es no nulo la superficie se dice **suave**.
- Si $\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \neq 0$, los vectores $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$ y $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$ son linealmente independientes.
- La continuidad de las derivadas parciales evita la presencia de aristas o puntas en S y garantiza la existencia del plano tangente.

- El producto fundamental $\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \neq 0$ evita los casos degenerados. Esto es, evita que S pueda degenerar en punto o en una curva.
- La inyectividad evita que la superficie se autointersecte.

EJERCICIO 66. Observa la superficie parametrizada

$$\varphi(x, y) = (x, y, 1 - x^2 - y^2), \quad 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1$$

- (a) Haz un esquema de esta superficie e identifícala
 (b) Vamos a ver si se trata de una superficie simple. Con solo mirarla te das cuenta que es inyectiva (puntos distintos van a puntos distintos). Anota los vectores

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \dots\dots\dots, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \dots\dots\dots$$

- (c) Ahora haces el producto cruz de estos vectores
 (d) De esta forma, has probado que la superficie es simple.

EJERCICIO 67. Sea $\varphi : [0, 2\pi] \times [0, h] \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$\varphi(u, v) = (v \cos u, v \sin u, v)$$

- (a) Halla su ecuación cartesiana para que me digas que se trata de un
 (b) Para ver que φ no es inyectiva, se tiene

$$(0, v) \neq (2\pi, v) \implies \varphi(0, v) = \dots = \varphi(2\pi, v)$$

- (c) Más aún, los puntos $(u, 0)$ son mandados al ... de $\mathbb{R}^3$, justo el vértice del cono.
 (d) Veamos que sucede con las derivadas parciales. Completa:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \dots\dots\dots, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \dots\dots\dots$$

- (e) Obtén el producto fundamental para saber si son linealmente independientes (tienes que ver si hay puntos (u, v) donde se anule el fundamental).

Este producto cruz vale cero en varios puntos, en ellos no es Linealmente independiente.





Desafío 16.

1. El paraboloide $z = x^2 + y^2 + 2$ limitado por el plano $z = 6$ se puede parametrizar de las siguientes dos maneras:

- $\phi_1(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, r^2 + 2)$, con $D = [0, 2] \times [0, 2\pi]$
- $\phi_2(x, y) = (x, y, x^2 + y^2 + 2)$, con $D = \{(x, y) : 0 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

True

False

2. El vector fundamental en la parametrización trigonométrica es

$$\phi(r, \theta) = (-2r^2 \cos \theta, -2r^2 \sin \theta, r)$$

True

False

3. El vector fundamental en la parametrización cartesiana es

$$\phi(x, y) = (2x, -2y, 1)$$

True

False

Puntos:

% de éxito:

MATHS QUIZ

Pasas con 100%.

1. La parametrización $\phi(\theta, z) = (3 \cos \theta, 3 \sin \theta, z)$, con $D = [0, 2\pi] \times [-1, 2]$ corresponde a:

$$x^2 - y^2 = 9$$

$$x^2 + y^2 = 9$$

$$3x^2 + 3y^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

2. La intersección del plano $2x + 2y + z = 4$ con el paraboloide $z = x^2 + y^2$ es:

$$x^2 + y^2 = 2$$

$$(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$$

$$(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 2$$

$$(x + 1)^2 + y^2 = 2$$

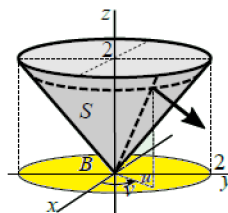
3. El cono $z^2 = x^2 + y^2$ para $0 < z < 2$ se parametriza

$$\phi(x, y) = (x, y, \sqrt{x^2 + y^2})$$

con dominio D un círculo de radio 2. El vector fundamental es:

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1 \right)$$

$$\left(-\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -1 \right)$$



$$\left(-\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1 \right)$$

$$\left(-\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1 \right)$$

4.3 Área de una superficie

Se ha tenido la oportunidad de calcular el volumen que encierra una superficie, ahora veremos como se hace para hallar el área de una superficie simple. Sea D región en el plano uv , $\varphi : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow s \subset \mathbb{R}^3$ superficie parametrizada. Si P es una partición de D , entonces un pequeño rectángulo de área $du dv$ en D es transformado por φ en parte de la superficie S (parche amarillo) el que podemos aproximar por el paralelogramo determinado por los vectores $\frac{\partial \varphi}{\partial u} du$ y $\frac{\partial \varphi}{\partial v} dv$. El área de este paralelogramo es

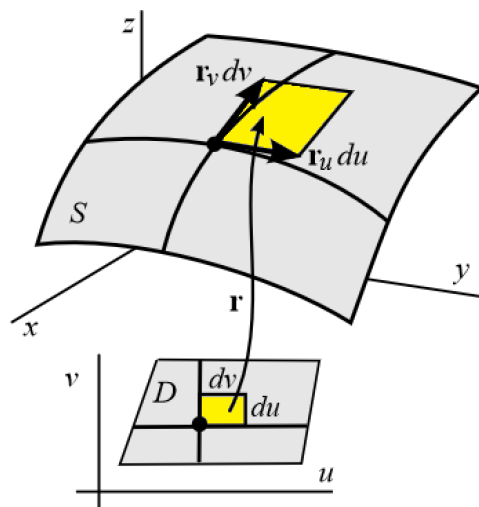


Figura 4.5

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} du \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv \right\| = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| du dv$$

En consecuencia, se puede considerar al producto fundamental como factor de proporcionalidad de las áreas. Como $du dv$ es el área de un pequeño rectángulo, y $\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| du dv$ es el área de su imagen, entonces la suma de todas las áreas en D es proporcional con la suma de las áreas en S , en el límite se tiene lo siguiente:

El área A de una superficie simple $S = \varphi(D)$ se define como

$$A = \iint_D \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| du dv$$

EJERCICIO 68. Hallar el área de la superficie parametrizada como

$$\varphi(x, y) = (x, y, x^2 + y^2), \quad x^2 + y^2 \leq 1$$

- De seguro que conoces esta superficie. Ella es un ...
- Lo graficas en el sistema cartesiano.
- Ya sabes que es inyectiva. Halla el vector fundamental
- Interesa la longitud o norma de este vector
- Escribe la integral que entrega el área de la superficie y la calculas. No olvides que las polares sirven para tapar el frío.

Para tener el reconocimiento de tu profe y la admiración de tus compañeros y compañeras tendrías que sacar $\frac{\pi}{6}(\sqrt[3]{5} - 1)$.

EJERCICIO 69. Hallar el área de la porción del plano $x + y + z = 1$ en el primer octante.

- A veces soy generoso, te doy la gráfica en el sistema cartesiano.
- Parametriza la superficie desde el plano xy
- Tienes claro el dominio de la parametrización
- Halla el vector fundamental
- Ahora hallas la norma de este vector
- Escribe la integral que entrega el área de la superficie y la calculas.

Trabajo con mi profe

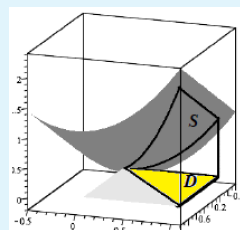


**MATHS
QUIZ**

Pasas con 100%.

Sea S la porción de la superficie $z = x + y^2$ sobre el triángulo D dado por

$$D = \{0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y\}$$



- Una parametrización cartesiana es:

$$\phi(x, y) = (x, y, x^2)$$

$$\phi(x, y) = (x, y, x + y^2)$$

$$\phi(x, y) = (x, y, y + x^2)$$

$$\phi(x, y) = (x, y, z^2)$$

- El vector fundamental es:

$$\vec{n} = (-1, -2y, 1)$$

$$\vec{n} = (1, -2y, 1)$$

$$\vec{n} = (-1, 2y, 1)$$

$$\vec{n} = (-1, 2y, -1)$$

- La norma del vector fundamental es:

$$\sqrt{4y^2 + 1}$$

$$\sqrt{2y^2 + 2}$$

$$\sqrt{4y^2 + 2}$$

$$\sqrt{y^2 + 2}$$

- El área de la superficie considerada es:

$$\frac{1}{2}\sqrt{6} + \frac{1}{6}\sqrt{2}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{6} - \frac{1}{6}\sqrt{2}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{6} - \frac{1}{3}\sqrt{2}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{6} + \frac{1}{3}\sqrt{2}$$

4.4 Integral de superficie de campo escalar

Corresponde ahora estudiar la integral de superficie para un campo escalar f definido y acotado sobre una superficie S parametrizada por una función φ .

Definición 4.4.1. Sean $S = \varphi(D)$ una superficie parametrizada, f campo escalar definido y acotado sobre S . La integral del campo f sobre la superficie S , que se representa por $\int_S f \, dS$, se define mediante la expresión

$$\int_S f \, dS = \iint_D f(\varphi(u, v)) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| du \, dv$$

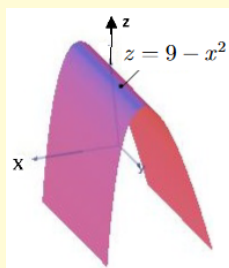
EJERCICIO 70. Dado el campo escalar $f(x, y, z) = x^2$, hallar la integral de f sobre la superficie $x + y + z = 1$ ubicada en el primer octante.

- La grafica de la superficie, ¡please!
- Parametrizar la superficie
- Calcula el vector fundamental.
- Su norma es ...
- Falta saber el valor del campo en la superficie, por favor, a continuación
- Tienes lista tu integral, anótala y calcula su valor



Desafío 17.

Considerar la superficie del cilindro $S = \{z = 9 - x^2\}$, $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq x$. Se va a calcular $\int_S xy \, dS$.



- La parametrización de la superficie es:

$$\phi(x, y) = (x, y, 9 - x^2)$$

$$\phi(x, y) = (x, z, 9 - x^2)$$

$$\phi(x, y) = (x, y, x^2)$$

$$\phi(x, y) = (x, y, 3 - x^2)$$

- El vector normal a la superficie es:

$$\vec{n} = (-2x, 0, 2)$$

$$\vec{n} = (2x, 0, 1)$$

$$\vec{n} = (x, 0, 1)$$

$$\vec{n} = (2x, 1, 0)$$

- Al usar coordenadas polares, el valor de la integral es:

$$\frac{1 + 291\sqrt{17}}{240}$$

$$\frac{1 + 191\sqrt{17}}{240}$$

$$\frac{1 + 391\sqrt{7}}{240}$$

$$\frac{1 + 391\sqrt{17}}{240}$$

Puntos:

% de éxito:

4.5 Aplicaciones de la integral de campo escalar

La primera de las aplicaciones, y que ya se ha visto, corresponde al área de la superficie. En efecto, si el campo escalar $f = 1$, entonces en la expresión que define la integral de superficie

tenemos

$$\int_S f \, dS = \iint_D \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| \, du \, dv$$

que corresponde al área de S . Esta es la razón por la cual a dS se le denomina “*elemento de área de superficie*”.

4.5.1 Masa y Centro de masa

- Si el campo escalar f se interpreta como **densidad** (masa por unidad de área) de una lámina delgada adherida a la superficie S , entonces la **masa total** M de S viene dada por

$$M = \int_S f \, dS$$

- Al conocer la masa de la superficie S , su centro de masa es el punto $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ solución de la ecuación

$$M \cdot \bar{x}_i = \int_S x_i f \, dS, \quad i = 1, 2, 3$$

EJERCICIO 71. Hallar la masa de la superficie $z = 1 - x^2$, para $x \in [0, 1]$, $y \in [0, 1]$, si la densidad en cada punto es $\rho(x, y) = x$.

(a) Haz una grafica de la porción de superficie dada.

(b) Parametriza la superficie desde el plano xy .

(c) Calcula:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \quad , \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} =$$

(d) Tu vector fundamental es

(e) Su norma es

(f) La densidad es el campo escalar. Halla $\rho(\varphi(x, y, z)) = \dots$

(g) Calcula tu integral

EJERCICIO 72. Hallar el centro de masa de la superficie $z = 1 - x^2$, para $x \in [0, \frac{1}{2}]$, $y \in [0, 1]$, si la densidad en cada punto es $\rho(x, y) = 1$.

Te recuerdo que para calcular las coordenadas del centro de masa tienes que usar

$$M \cdot \bar{x}_i = \int_S x_i f \, dS, \quad i = 1, 2, 3$$

(a) Para la coordenada x tu integral es

$$M \cdot \bar{x} = \int_S x f \, dS =$$

(b) Para la coordenada y tu integral es

$$M \cdot \bar{y} = \int_S y f \, dS =$$

(c) Para la coordenada z tu integral es

$$M \cdot \bar{z} = \int_S z f \, dS =$$

4.5.2 Orientación de superficies

Las integrales de superficies para un campo vectorial se definen sobre superficies orientadas. Geométricamente, una superficie es orientada si se puede definir un vector normal unitario $\mathbf{n}$ en todo punto de la superficie que no pertenezca a la frontera, de forma tal que los vectores normales varían de forma continua sobre la superficie S .

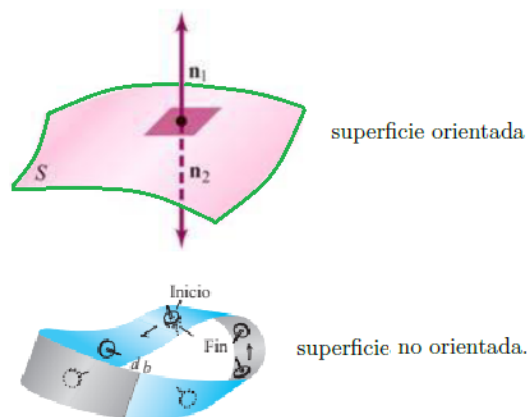


Figura 4.6

Dicho de otra forma, si la superficie posee en cada punto dos vectores normales unitarios $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$ tales que $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2$. La figura muestra una superficie orientada y otra no orientada.

4.6 Integral de superficie de campo vectorial

Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial definido sobre la superficie $\varphi(D) = S$. La integral de superficie de $\mathbf{F}$ sobre S que se denota $\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ se define como

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{F}(\varphi(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) du dv$$

Si se interpreta el campo vectorial $\mathbf{F}$ como el campo de velocidades de un fluido, y si $\mathbf{u}_n$ representa un vector unitario normal a la superficie dada por el vector fundamental, entonces podemos escribir

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_n = \mathbf{F} \cdot \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\|} = \text{comp}_{\mathbf{u}_n} \mathbf{F}$$

Esto significa que $\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_n$ es la componente de la velocidad $\mathbf{F}$ en la dirección de la normal unitaria $\mathbf{u}_n$ a la superficie en el punto $\varphi(u, v)$. De esta forma, $\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ mide la cantidad total de flujo a través de la superficie.

Ejemplo 4.6.1. Sea S la superficie $z = x^2 + y^2$ definida sobre el conjunto $x^2 + y^2 \leq 1$, orientada con normal exterior. Sea $T(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ la temperatura sobre S . Vamos a encontrar el flujo de calor a través de la superficie S .

La gráfica de la superficie se muestra en la figura 4.7

Es posible que te encuentres dubitativo(o), y que tu “yo interior” se esté preguntando ¿Y dónde está el campo vectorial? Buena pregunta. Aquí va mi ayuda. Asociada a la temperatura se encuentra el campo vectorial gradiente de la temperatura

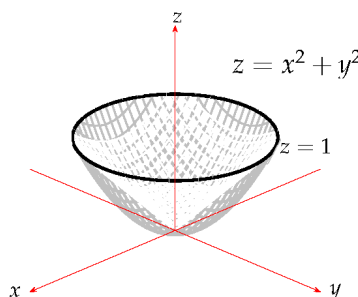


Figura 4.7

$$\nabla T = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right)$$

de forma que $\mathbf{F} = -k\nabla T$ es el campo vectorial asociado a la temperatura. Por simplicidad puedes tomar $k = 1$. No tienes porqué darme las gracias, es mi deber conducirte por el “buen camino”.

- El gradiente de la temperatura, ¡tu campo vectorial! es

$$\vec{F}(x, y, z) = \nabla T = (2x, 2y, 2z)$$

- Se parametriza la superficie

$$\varphi(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$$

- Se calcula el vector fundamental

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = (1, 0, 2x), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = (0, 1, 2y) \implies \frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} = (-2x, -2y, 1)$$

- Para que sea flujo se pide normal exterior.

La figura 4.8 muestra como debe ser un vector normal exterior en la figura. Para verificar que el vector fundamental apunta para afuera de la superficie se toman algún punto del dominio, por ejemplo, $x = y = 1$ queda el vector $(-2, -2, 1)$, que apunta para adentro. ¡qué mala suerte!

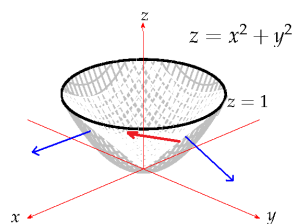


Figura 4.8

- Se ¡cambia! signo al vector y estamos al otro lado!

$$\vec{n} = (2x, 2y, -1)$$

- Ahora hay que evaluar el campo en la parametrización

$$\nabla T(\varphi) = (2x, 2y, 2(x^2 + y^2))$$

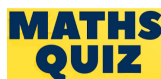
- Finalmente se calcula la integral de flujo

$$\text{Flujo} = \int_S (2x, 2y, 2x^2 + 2y^2) \cdot (2x, 2y, -1) dA$$

$$= \int_S (4x^2 + 4y^2 - 2x^2 - 2y^2) dA$$

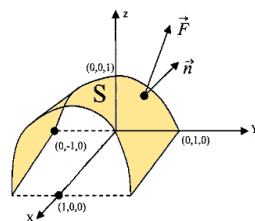
$$= 2 \int_S (x^2 + y^2) dA = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 dr d\theta$$

$$= \frac{\pi}{2}$$



Pasas con 100%.

Se considera el campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (0, yz, z^2)$, y la superficie S formada por el cilindro $y^2 + z^2 = 1$, cortada por los planos $x = 0, x = 1, z = 0$.



1. Una parametrización cartesiana de la superficie es:

$$\phi(x, y) = (x, y, z^2)$$

$$\phi(x, y) = (x, y, 1 - y^2)$$

$$\phi(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - y^2})$$

$$\phi(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - z^2})$$

2. El vector fundamental es:

$$(0, \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}, 1)$$

$$(0, y, z^2)$$

$$(1, y, \sqrt{1 - y^2})$$

$$(y, 0, \sqrt{1 - y^2})$$

3. El campo en la parametrización es:

$$(0, y\sqrt{1 - y^2}, 1)$$

$$(0, y, 1 - y^2)$$

$$(0, \sqrt{1 - y^2}, 1 - y^2)$$

$$(0, y\sqrt{1 - y^2}, 1 - y^2)$$

4. El valor de $\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$ es:

$$0$$

$$2$$

$$1$$

$$\sqrt{2}$$

4.7 Propiedades de la integral en campos

Estudiamos ahora las transformaciones de integrales de superficie en integrales de línea y la transformación de integrales de volumen a integrales de superficie. El medio que se utiliza son los teoremas de Green, Gauss y Stokes, en la forma siguiente:



Integral de **línea** en Integral **doble**

Green



Integral de **superficie** en Integral de **línea**

Stokes



Integral de **superficie** en Integral de **volumen**

Gauss

4.7.1 Teorema de Stokes

Lo primero es indicar que para una superficie en $\mathbb{R}^3$ se considera la dirección positiva como aquella en la cual un observador recorriendo la frontera de la superficie, encuentra siempre esta superficie a su izquierda. El teorema de Stokes relaciona la integral de línea de un campo vectorial a lo largo de una curva cerrada simple C recorrida en dirección positiva en $\mathbb{R}^3$ con una integral sobre una superficie cuya frontera es C .

Teorema 4.7.1. (Teorema de Stokes)

Sea S superficie orientada definida por una función $z = f(x, y)$ de clase ζ^2 , y tal que $(x, y) \in D$. Sea $\vec{F}$ un campo vectorial de clase ζ^1 definido sobre S . Si ∂S es la frontera orientada de S , entonces

$$\int_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{L}$$



George Gabriel Stokes

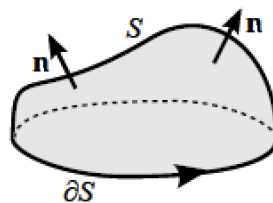


Figura 4.9

Se observa que el teorema de Stokes establece que “la integral de superficie de la componente **normal** del rotacional de un campo vectorial $\mathbf{F}$ sobre la superficie S , es igual a la integral de línea de la componente **tangencial** de $\mathbf{F}$ a lo largo de la frontera de S ”. La figura ilustra esta situación

Observación. Para aplicar Stokes se debe tener una superficie S **abierta**

Ejemplo 4.7.2. **Verificar** el teorema de Stokes sobre la superficie del plano $x + y + z = 1$, en el primer octante, para el campo $\mathbf{F} = (xy, 2xz, 3yz)$.

Cuando se pide “verificar”, hay que calcular una integral de superficie y otra de línea. Estos resultados deben coincidir. Para tener una idea de lo que haremos, se grafica la superficie, primero para identificarla, y luego recorrer su frontera positivamente.

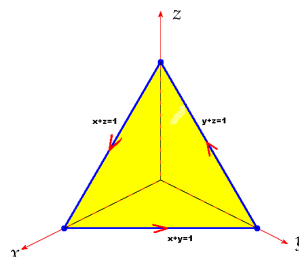


Figura 4.10

- Se parametriza la frontera de la superficie

$$\alpha_1(t) = (1-t, t, 0), \quad 0 \leq t < 1, \quad \alpha_2(t) = (0, 1-t, t), \quad 0 \leq t < 1, \quad \alpha_3(t) = (t, 0, 1-t), \quad 0 \leq t < 1$$

- Se calcula cada integral. Según los entendidos, sacar $\frac{1}{3}$ es quedar en paz consigo mismo.

$$\int_{\alpha_1} \vec{F} \cdot d\vec{L} = \int_0^1 (t - t^2, 0, 0) \cdot (-1, 1, 0) dt = -\frac{1}{6}$$

$$\int_{\alpha_2} \vec{F} \cdot d\vec{L} = \int_0^1 (0, 0, 3t - 3t^2) \cdot (0, -1, 1) dt = \frac{1}{2}$$

$$\int_{\alpha_3} \vec{F} \cdot d\vec{L} = \int_0^1 (0, 2t - 2t^2, 0) \cdot (1, 0, -1) dt = 0$$

Al sumar se tiene que

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{L} = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{3}$$

Ahora se debe resolver la otra parte de Stokes, [la integral del rotor](#). Para evitar confusiones, a este campo vectorial le denotamos por $\vec{G}$.

- El rotor del campo es

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & 2xz & 3yz \end{pmatrix} = (3z - 2x, 0, 2z - x) = \vec{G}$$

- La parametrización de la superficie es

$$\varphi(x, y) = (x, y, 1 - x - y)$$

- El vector fundamental es

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = (1, 0, -1), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = (0, 1, -1)$$

de donde

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} = (1, 1, 1)$$

- ¡Falta poco, resiste!. Se evalúa el campo sobre la superficie

$$\vec{G}(\varphi(x, y)) = (3 - 5x - 3y, 0, 2 - 3x - 2y)$$

- El integrando de la integral a resolver es

$$\vec{G}(\varphi) \cdot \vec{n} = 5 - 8x - 5y$$

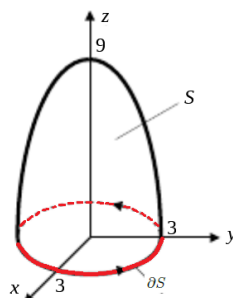
- Al poner esto en la integral y calcular se tiene

$$\int_S \nabla \times \vec{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^1 \int_0^{1-x} (5 - 8x - 5y) dy dx = \frac{1}{3}$$



MATHS QUIZ Pasas con 100%.

Considerar el campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (3y, 4z, -6x)$ y la superficie **abierta** del paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$ cortada por el plano $z = 0$, con normal orientada hacia arriba. Hay que comprobar Stokes.



1. La parametrización de la frontera de la superficie:

$$\alpha(t) = (3 \cos t, 3 \sin t, 1)$$

$$\alpha(t) = (\cos t, \sin t, 0)$$

$$\alpha(t) = (3 \cos t, 3 \sin t, 0)$$

$$\alpha(t) = (9 \cos t, 9 \sin t, 0)$$

2. El vector velocidad $\alpha'(t)$ es:

$$\alpha'(t) = (-3 \sin t, 3 \cos t, 0)$$

$$\alpha'(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$$

$$\alpha'(t) = (-9 \sin t, 9 \cos t, 0)$$

$$\alpha'(t) = (9 \sin t, -9 \cos t, 0)$$

3. El campo en la parametrización, $\vec{F}(\alpha(t))$ es:

$$(9 \sin t, -18 \cos t, 0)$$

$$(9 \sin t, 0, 18 \cos t)$$

$$(9 \sin t, 0, -18 \cos t)$$

$$(9 \sin t, 0, -9 \cos t)$$

4. El valor de la integral de línea $\int_{\partial S} \vec{F}(\alpha(t)) \cdot d\vec{L}$ es:

$$\pi$$

$$0$$

$$27\pi$$

$$-27\pi$$

5. El rotacional del campo $\vec{F}$ es:

$$(4, 6, -3)$$

$$(-4, 6, -3)$$

$$(-4, 6, 3)$$

$$(4, -6, -3)$$

6. La parametrización de la superficie es:

$$\varphi(r, \theta) = (r \sin \theta, r \cos \theta, 9 - r^2)$$

$$\varphi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, 3 - r^2)$$

$$\varphi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, 9 - r^2)$$

$$\varphi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, 1 - r^2)$$

7. El vector normal (fundamental) es:

$$(2r^2 \cos \theta, 2r^2 \sin \theta, r)$$

$$(2r \cos \theta, 2r \sin \theta, r)$$

$$(2r^2 \cos \theta, 2r^2 \sin \theta, r^2)$$

$$(r^2 \cos \theta, r^2 \sin \theta, r)$$

8. El valor de $\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$ es:

$$\pi$$

$$27\pi$$

$$0$$

$$-27\pi$$

Puntos:

4.7.2 Teorema de Gauss

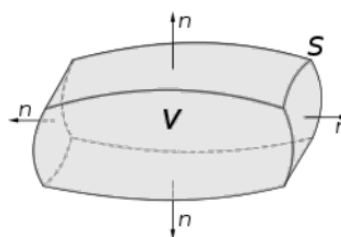
El Teorema de la Divergencia, también llamado Teorema de Gauss, relaciona el flujo de un campo vectorial a través de una superficie cerrada con la integral de su divergencia en el volumen encerrado por dicha superficie.

Teorema 4.7.3. (Gauss) Sea V región ¡*cerrada*! y orientada con frontera S , sea $\vec{F}$ campo vectorial de clase ζ^1 definido sobre S , entonces

$$\int_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint_V \nabla \cdot \vec{F} dV$$



Johann Carl Friedrich Gauss



EJERCICIO 73. Verificar el teorema de Gauss para el campo vectorial $\mathbf{F} = (xy, 2xz, 3yz)$, si S es la superficie, en el primer octante, acotada por los planos coordenados y el plano $x + y + z = 1$

- Graficas la superficie y sobre sus caras pones un vector normal exterior. Tienes que tener en cuenta que la superficie es **cerrada**.
- El flujo total a través de las caras lo proporciona la integral de superficie del campo escalar. Tu tarea es parametrizar cada una de las cuatro caras.
- Calculas el valor del campo en cada parametrización
- Cada cara tiene su propio vector fundamental. Hay espacio para ello:
- Está todo listo para calcular las cuatro integrales de superficie
- Concluyes que el flujo total es ...
- Salió largo el trabajito ¿o no? ¿Te sientes desamparado(a) por la matemática en este momento? ¡Ni lo pienses!, jamás se te puede ocurrir tal cosa, lo que sucede es que hay que usar el teorema de Gauss (divergencia) y todo vuelve a la normalidad. Veamos que pasa con eso. Saca la divergencia del campo $\vec{F} = (xy, 2xz, 3yz)$
- Mira la figura y piensa en una integral triple. ¿Cuáles son los límites de integración? Por favor, a continuación:
- Establece la integral triple de la divergencia
- Ahora la calculas y obtienes el mismo resultado que la integral por caras.

Ejemplo 4.7.4. Calcular el flujo del campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (xz, -y^2, xz)$ a través de la superficie cerrada que limita el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ con $0 \leq z \leq 3$.

La figura 4.12 muestra la superficie. Como la superficie es cerrada, el teorema de Gauss es la mejor opción. Se tiene

$$\text{div}(\vec{F}) = z - 2y + x$$

Debemos calcular la integral triple de esta divergencia en el cilindro, para ello usamos coordenadas cilíndricas

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z$$

con $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq a$, $0 \leq z \leq 3$

La integral queda como sigue:

$$\text{Flujo} = \int_0^a \int_0^3 \int_0^{2\pi} (z - 2r \sin \theta + r \cos \theta) r \, d\theta \, dz \, dr$$

Las integrales del $\sin \theta$ y $\cos \theta$ se hacen cero al evaluar entre 0 y 2π . Luego, queda por calcular

$$\text{Flujo} = 2\pi \int_0^a \int_0^3 zr \, dz \, dr = 2\pi \cdot \left(\frac{z^2}{2}\right)_0^3 \int_0^a r \, dr$$

Que es equivalente a

$$\text{Flujo} = 2\pi \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{r^2}{2} \Big|_0^a = \frac{9}{2}a^2$$

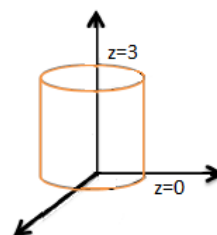


Figura 4.11

Trabajo con mi profe

EJERCICIO 74.

Considere la superficie cerrada S correspondiente al cilindro $y^2 + z^2 = 1$ cortado por los planos $x = 0$ y $x = 1$, $z = 0$.



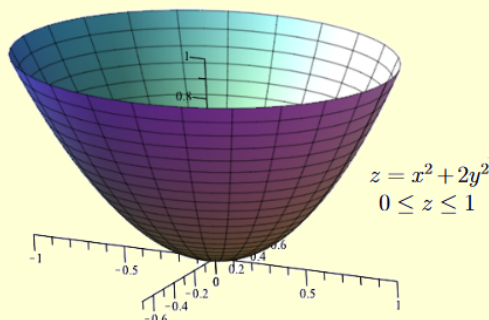
- Haga un bosquejo de la superficie.
- Determine el flujo del campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (0, yz, z^2)$, sobre toda la superficie (considere normal exterior).
- Calcule el flujo del campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (0, yz, z^2)$, sobre el manto del cilindro. (considere normal exterior).
- Considerar la intersección del cilindro con el plano $x = 1$. Determine la circulación a través de esa curva.



Desafío 18.

Considerar la superficie **abierto** del manto del paraboloide elíptico $z = x^2 + 2y^2$, $0 \leq z < 1$ orientado positivamente mediante la normal hacia afuera. Calcular el flujo del campo vectorial

$$\vec{F}(x, y, z) = (x^3 + ye^z, x^4 \sqrt{z^3 + 1} + 2y^3, x + y)$$



1. Se “cierra” la superficie con el plano $z = 1$. La divergencia del campo es

$$\nabla \cdot \vec{F} = x^2 + 6y^2$$

$$\nabla \cdot \vec{F} = 3x^2 + y^2$$

$$\nabla \cdot \vec{F} = 6x^2 + 3y^2$$

$$\nabla \cdot \vec{F} = 3x^2 + 6y^2$$

2. Los límites integración de $\iiint \nabla \cdot \vec{F} dV$, en coordenadas cilíndricas son:

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 2, r^2 \leq z \leq 1$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1, 0 \leq z \leq 1$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1, 1 \leq z \leq r^2$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1, r^2 \leq z \leq 1$$

3. El valor de $\iiint \nabla \cdot \vec{F} dV$ es:

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{6\sqrt{2}}$$

$$\frac{2\pi}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

4. Se debe calcular el flujo por el plano $z = 1$. La normal es $\vec{k}$. La parametrización del disco elíptico, en polares, es:

$$\varphi(r, \theta) = (r \cos \theta, r\sqrt{2} \sin \theta, 1)$$

$$\varphi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, 1)$$

$$\varphi(r, \theta) = (r \cos \theta, \frac{r}{\sqrt{2}} \sin \theta, 1)$$

$$\varphi(r, \theta) = (\frac{r}{\sqrt{2}} \cos \theta, \frac{r}{\sqrt{2}} \sin \theta, 1)$$

5. El campo evaluado en esta parametrización es

$$\vec{F}(\varphi(x, y)) = \left(r^3 \cos^3 \theta + \frac{e r}{\sqrt{2}} \sin \theta, r^4 \sqrt{2} \cos^4 \theta + \frac{r^3}{\sqrt{2}} \sin^3 \theta, r \cos \theta + \frac{r}{\sqrt{2}} \sin \theta \right)$$

con lo cual, $\int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(\cos \theta + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta \right) \frac{r^2}{2} dr d\theta$ tiene el valor:

$$1$$

$$0$$

$$\pi$$

$$2\pi$$

6. En consecuencia, el flujo total del campo por la superficie es:

$$\frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{2\pi}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

$$\frac{\pi}{2}$$

Puntos:

Teorema 4.7.5. (*Ley de Gauss*) Sea R región elemental en $\mathbb{R}^3$ y sea ∂R la frontera de R orientada con sus normales apuntando hacia el exterior. Se supone que $(0,0,0) \notin \partial R$. Sea $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ campo vectorial tal que

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \frac{1}{\| (x, y, z) \|^3} (x, y, z)$$

Entonces el flujo de $\mathbf{F}$ a través de ∂R es

$$\int_{\partial R} \mathbf{r} \cdot \frac{\mathbf{n}}{r^3} dS = \begin{cases} 4\pi, & \text{si } (0,0,0) \in R \\ 0, & \text{si } (0,0,0) \notin R \end{cases}$$

La demostración de esta propiedad está en el libro de materia.

EJERCICIO 75. Considerar el campo vectorial $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r}}{r^3}$. Hallar:

- (a) el flujo del campo a través de la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, usando normal exterior
- (b) el flujo del campo a través de la superficie $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 1$, usando normal exterior



Figura 4.12

Soluciones a los Ejercicios

Ejercicio 1(a)

Brat Pitt

☐

Ejercicio 2(a)

En este caso $n = 3$

☐

Ejercicio 2(b)

Es un cono

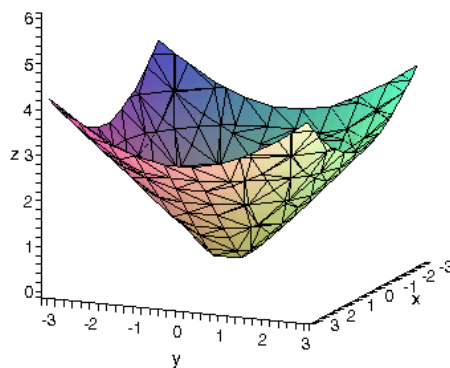
☐

Ejercicio 2(c)

$\mathbb{R}^2$

☐

Ejercicio 2(d)

☐

Ejercicio 3(a)

$x \geq 0$

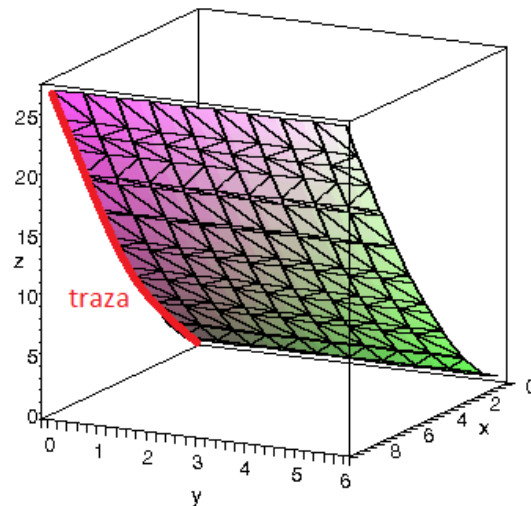
☐

Ejercicio 3(b)

$\mathbb{R}^3$

☐

Ejercicio 3(c) La traza se muestra en color rojo.


☐

Ejercicio 4(a)

$$\mathbb{R}^2$$

☐

Ejercicio 4(b) La gráfica de este campo escalar se halla en el espacio tridimensional. Mira el aplet https://campus.fi.uba.ar/pluginfile.php/230590/mod_page/content/28/DERIV-DIRECC.html

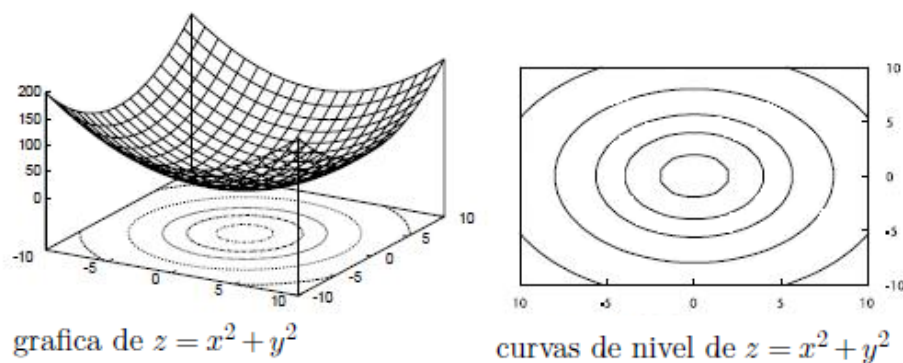
☐

Ejercicio 4(c)

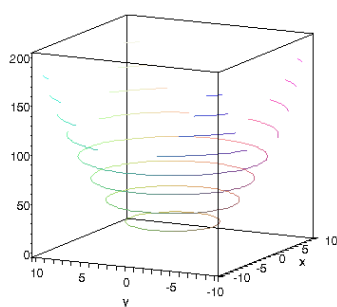
$$x^2 + y^2 = C$$

☐

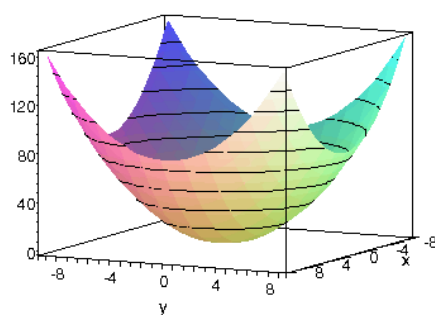
Ejercicio 4(d)


☐

Ejercicio 4(e)


☐

Ejercicio 4(f)


☐

Ejercicio 5(a)

$$\mathbb{R}^2$$

☐

Ejercicio 5(b)

$$\mathbb{R}^3$$

☐

Ejercicio 5(c)

$$C = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$$

☐

Ejercicio 5(d)

el conjunto vacío

☐

Ejercicio 5(e)

circunferencias de radio $0 < r < 1$

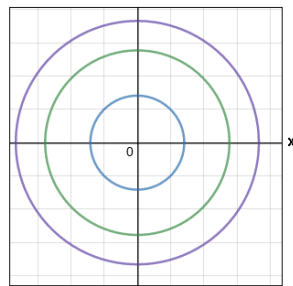
☐

Ejercicio 5(f)

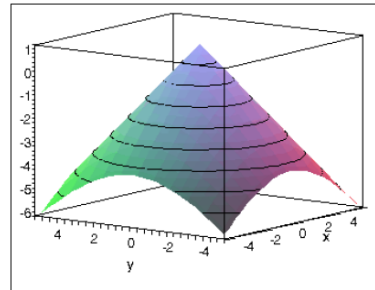
un punto

□

Ejercicio 5(g) La figura muestra lo pedido



curvas en el plano



curvas en el espacio

□

Torpedo 6(a) La curva de indiferencia es la representación gráfica de la preferencia que tiene el consumidor frente a dos productos o servicios según su grado de satisfacción (aquí no cuenta la calidad del bien o su precio) y que lo llevan a elegir cualquiera de ellos indistintamente, ya que ambos cumplen con la misma utilidad y resultados. Algunos sitios complementarios

<https://www.elblogsalmon.com/conceptos-de-economia/que-son-las-curvas-de-indiferencia>

<http://academica.uaslp.mx/preferencias/definicin.html>

□

Ejercicio 7(a)

$$k = 2x^3 y^2$$

□

Ejercicio 7(b) Se reemplazan los valores $x = 5$ e $y = 4$ en la ecuación de utilidad

$$k = 2 \cdot 5^3 \cdot 4^2 = 4000$$

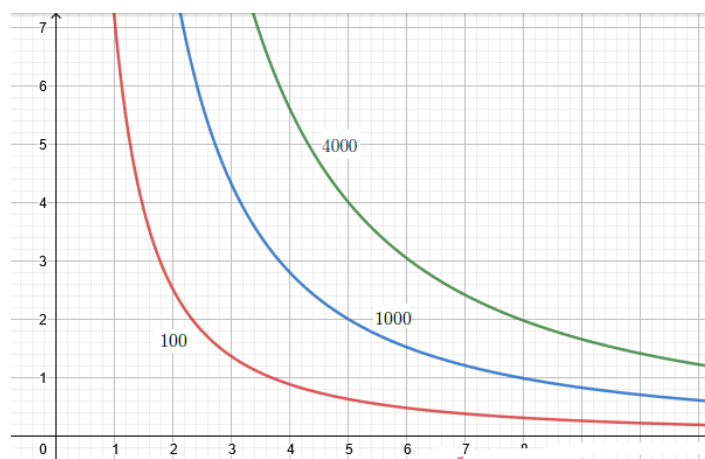
□

Ejercicio 7(c)

$$4000 = 2x^3 y^2$$

□

Ejercicio 7(d)



□

Torpedo 8(a)

- Distancia, entornos y puntos de acumulación

Siguiendo con la generalización de las ideas del cálculo de una variable, corresponde ahora estudiar el concepto de límite de una función de varias variables y algunas técnicas para su cálculo. Luego, tomando como base este concepto, se establece la definición de continuidad. Lo primero es extender estas ideas a un campo escalar de dos dimensiones, considerando elementos importantes como son; **distancia**, **entorno** y **punto de acumulación**.

En la recta real la función **valor absoluto** permite medir la distancia entre dos puntos $x, y \in \mathbb{R}$, definiendo

$$d(x, y) = |x - y|$$

Para medir la distancia entre dos puntos $\vec{x}$ y $\vec{y}$ de $\mathbb{R}^n$ se necesita el concepto de norma de un vector.

Definición 4.7.6. (Norma euclídea en $\mathbb{R}^n$)

Se llama **norma euclídea** de un vector $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ al número real

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

Observación.

- En el caso particular $n = 1$, la norma euclídea es el valor absoluto, pues

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2} = |x_1|$$

- Un vector $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ se llama **unitario** si $\|\vec{x}\| = 1$.

La norma euclídea en $\mathbb{R}^n$ permite definir la distancia entre dos puntos de $\mathbb{R}^n$



□

Definición 4.7.7. Sean $\vec{x}$ e $\vec{y}$ elementos de $\mathbb{R}^n$. La distancia entre $\vec{x}$ e $\vec{y}$ la establece la función $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|$$

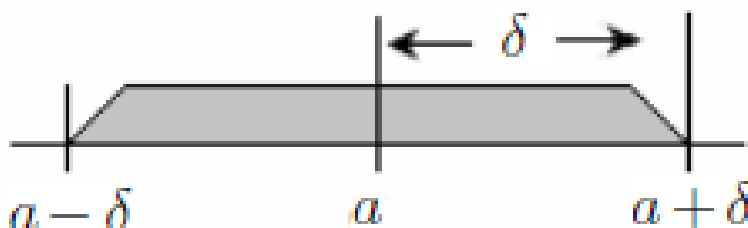


□

Definición 4.7.8. Dado $a \in \mathbb{R}$ se define **entorno** de centro a y radio δ (delta), al conjunto de los $x \in \mathbb{R}$ situados entre $a - \delta$ y $a + \delta$, es decir, al conjunto

$$E(a, \delta) = \{x \in \mathbb{R} / a - \delta < x < a + \delta\} = \{x \in \mathbb{R} / |x - a| < \delta\}$$

Es decir, un entorno de centro a y radio δ es el conjunto de números reales cuya distancia al número a es menor que δ .



Ejemplo 4.7.9. Determinar el intervalo correspondiente al entorno $E(3, 2)$ en $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} E(3, 2) &= \{x \in \mathbb{R} / d(x, 3) < 2\} = \{x \in \mathbb{R} / |x - 3| < 2\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / -2 < x - 3 < 2\} = (1, 5) \end{aligned}$$

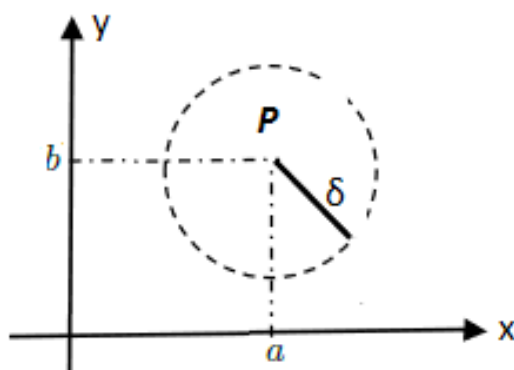
En el caso del plano bidimensional



Definición 4.7.10. El entorno de un punto $P = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ es el conjunto de todos puntos $Q = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ cuya distancia a él, es menor que un valor δ , es decir:

$$E(P, \delta) = \{Q \in \mathbb{R}^2 / d(P, Q) < \delta\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < \delta\}$$

Será **entorno reducido**, cuando el punto no pertenezca al entorno.



En el plano los entornos abiertos de un punto (a, b) de radio δ , son los círculos de radio δ sin la circunferencia.

Test.

1. Cuál de los siguientes es un entorno del intervalo $I = (-3, 5)$ de números reales:

- (a) $E(2, 4)$ (b) $E(0, 2)$ (c) $E(1, 4)$ (d) $E(-1, 5)$

2. El entorno de $(2, 2)$ y radio 1 contiene al punto $(1, 1)$.

- (a) True (b) False

• Punto de acumulación

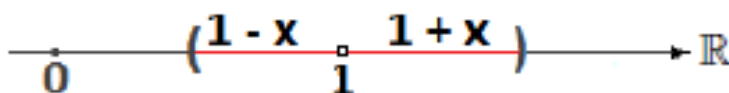


Figura 4.13

Si se considera el conjunto $A = [0, 1)$, es claro que el 1 no pertenece a él, pero, tiene la característica de que cualquier entorno del 1, que tiene la forma $(1 - x, 1 + x)$ con $x > 0$, contiene puntos del conjunto A . ¡De hecho cualquier punto de $(1 - x, 1)$ pertenece a A !

De acuerdo a lo anterior, un punto que perteneciendo o no perteneciendo al conjunto en cuestión, cumple que cualquier entorno de él tiene algún punto perteneciente al conjunto se llama de **acumulación**.

Definición 4.7.11. (Puntos Aislados, Puntos de Acumulación)

- Decimos que un punto p (no necesariamente en A) es un punto de acumulación de A , si solo si, cada entorno del punto contiene al menos un punto de A diferente del punto p . Esto es,

$$E(p) \cap (A - \{p\}) \neq \emptyset$$

- Sea $A \subset \mathbb{R}^n$, un punto p es un punto aislado de A , si y solo si existe un entorno del punto que **no contiene** otro punto de A .

Ejemplo 4.7.12. Hallar puntos de acumulación de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

- Si $A = (-1, 1)$, su conjunto de puntos de acumulación es $[-1, 1]$
- Si $A = \mathbb{Z}$, su conjunto de puntos de acumulación es $\emptyset$ (el conjunto vacío)
- Si $A = [0, 3] \cup \{5\}$, su conjunto de puntos de acumulación es $[0, 3]$.



Si el punto al que tiende un límite no fuera punto de acumulación, existiría algún entorno de dicho punto donde la función no toma valores, esto implica que **NO** podría ser el límite.

Otro hecho interesante y que se puede mencionar es que

“El límite depende únicamente del comportamiento de la función en las proximidades de a , no de cual sea el valor de la función en el punto a ; de hecho, a puede no pertenecer al dominio de definición de la función. Lo que si es necesario es que a sea punto de **acumulación** del dominio de definición de la función”.

Ahora damos el paso a $\mathbb{R}^2$. Se considera la siguiente figura

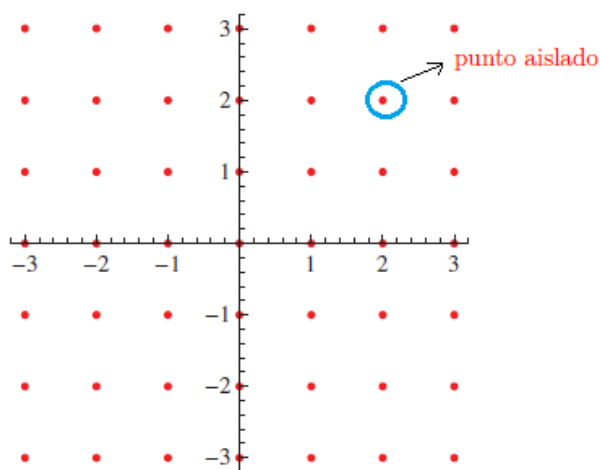
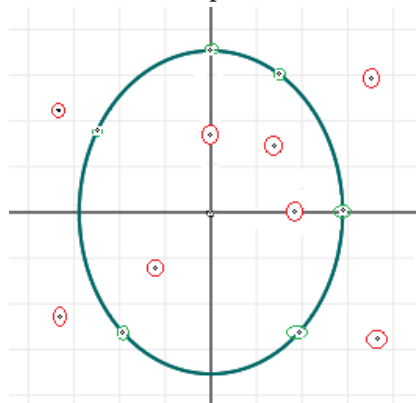


Figura 4.14

Los puntos en rojo representan el conjunto $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$, esto es, el conjunto de las coordenadas enteras del plano. De acuerdo a lo establecido, si existe un entorno de x que no contiene puntos diferentes de x mismo, se trata de un **punto aislado**. Por tanto, cada uno de los puntos de $\mathbb{Z}^2$ en $\mathbb{R}^2$ es un punto aislado.

Ejemplo 4.7.13. Considerar el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 3x^2 + 2y^2 = 1\}$

Hallaremos sus puntos de acumulación usando la gráfica del conjunto.



Los entornos marcados con rojo, claramente, no son puntos de acumulación de la elipse, pues tienen intersección vacía. En cambio, si se toma un punto sobre la elipse, al hacer un entorno de este punto, ¡siempre! este entorno interseca puntos de la elipse, por tanto, cada punto sobre la elipse es punto de acumulación. Es decir,

$$A' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 3x^2 + 2y^2 = 1\}$$

Test.

1. El conjunto de puntos de acumulación de $A = (1, 2) \times (1, 3) \cup \{(0, 0)\}$ es:

- (a) A (b) $A - \{(0, 0)\}$
 (c) $A = [1, 2] \times \{(0, 0)\}$ (d) $A = [1, 2] \times [1, 3]$

□

Torpedo 9(a)

Definición 4.7.14. Dadas una función f , y los números reales a y L , se dice que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es L , si para todo número positivo ϵ y tan pequeño como se quiera, existe un número positivo δ tal que:

$$0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

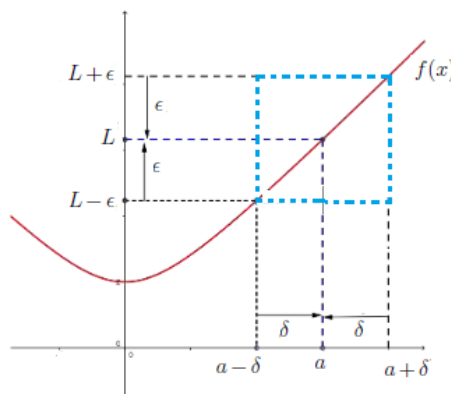
Notación

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \iff 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

Esta definición, en términos de entornos es equivalente con

Definición 4.7.15. Se dice que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, si para cualquier entorno de L que tomemos con radio epsilon, $E(L, \epsilon) = (L - \epsilon, L + \epsilon)$, podemos encontrar un entorno de a con radio delta, $E(a, \delta) = (a - \delta, a + \delta)$, cuyos elementos tienen su imagen en el entorno de L , sin importar lo que ocurra en a (punto de acumulación).

Una representación gráfica es la que muestra la figura



□

Ejercicio 10(a)

$$\frac{0}{0}$$

□

Ejercicio 10(b)

$$(0, 0)$$



Ejercicio 10(c)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) \sim \lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = -1$$



Ejercicio 10(d)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) \sim \lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = 1$$



Ejercicio 10(e)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) \quad \text{No existe}$$



Ejercicio 11(a)

$$(0, 0)$$



Ejercicio 11(b)

yes



Ejercicio 11(c)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

$$= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2 \sin \theta \cos \theta}{r^2}$$

$$= \sin \theta \cos \theta$$

Debes recordar que, si el límite existe entonces es único. En este caso, si el ángulo varía, el límite también cambia y deja de ser único. En consecuencia, **no hay** límite. ☐

Ejercicio 12(a)

$$(0, 0)$$



Ejercicio 12(b)

$$\frac{0}{0}$$



Ejercicio 12(c)

polares

☐

Ejercicio 12(d)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\text{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(r^2)}{r^2} = 1$$

☐

Ejercicio 12(e)

existe

☐

Ejercicio 13(a)

(0, 0)

☐

Ejercicio 13(b)

$\frac{0}{0}$

☐

Ejercicio 13(c)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{r^3 \cos^2 \theta \text{sen } \theta}{r^2} = \lim_{r \rightarrow 0} r \cos^2 \theta \text{sen } \theta = 0$$

Observa que se tiene un límite de la forma $0 \cdot \text{acotado}$ que es cero.

¡Listo!, el $\delta = \epsilon$. Has probado que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$

☐

Ejercicio 14(a)

(0, 0)

☐

Ejercicio 14(b)

0

☐

Ejercicio 14(c) Por caminos:

$$x = 0 \implies \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\text{sen } y^4}{y^4} \cdot y^2 = 0$$

ojo que es, “acotado por cero = cero”

$$y = 0 \implies \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$$

Esto nos dice que “puede ser” que el límite sea cero, pero no se ha probado. Cambiemos de estrategia. Usemos equivalencia por cociente. Se sabe que cerca el cero es válida la igualdad siguiente

$$\text{sen } z \sim z$$

Luego,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 + \operatorname{sen} y^4}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}$$

Y ahora “matamos” con polares

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 + \operatorname{sen} y^4}{x^2 + y^2} = \lim_{r \rightarrow 0} r^2 (\cos^4 \theta + \operatorname{sen}^4 \theta) = 0$$

□

Ejercicio 14(d)

es continuo

□

Ejercicio 15(a)

$$\begin{aligned} D_1 f(x, y) &= \frac{2xy^2(x^2 + y^2) - 2x(x^2 y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{2x^3 y^2 + 2xy^4 - 2x^3 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{2xy^4}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

□

Ejercicio 15(b)

$$D_1 f(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \frac{0}{h} = 0$$

□

Ejercicio 15(c)

$$D_1 f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy^4}{(x^2 + y^2)^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

□

Ejercicio 15(d)

$$\begin{aligned} D_2 f(x, y) &= \frac{2x^2 y(x^2 + y^2) - 2y(x^2 y^3)}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{2x^4 y}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

□

Ejercicio 15(e)

$$D_2 f(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h + 0) - f(0, 0)}{h} = \frac{0}{h} = 0$$

□

Ejercicio 15(f)

$$D_2 f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^4 y}{(x^2 + y^2)^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

□

Ejercicio 15(g)

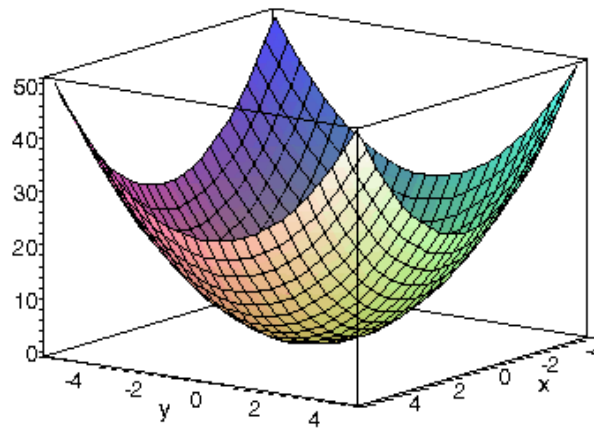
$$D_{12} f(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{D_2 f(h, 0) - D_2 f(0, 0)}{h} = 0$$

□

$$D_{21} f(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{D_1 f(0, h) - D_1 f(0, 0)}{h} = 0$$

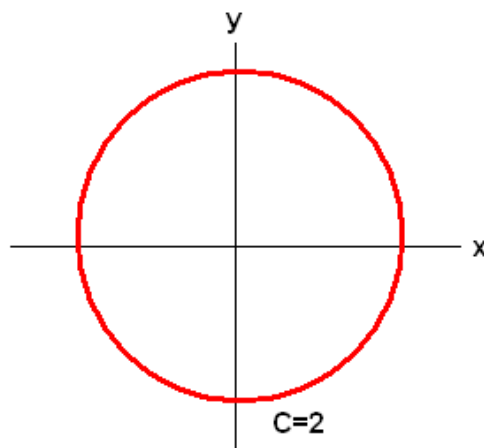
□

Ejercicio 16(a)



□

Ejercicio 16(b) Las curvas de nivel tienen ecuación $x^2 + y^2 = C$ y son circunferencias centradas en el origen.



□

Ejercicio 16(c)

por supuesto: $1^2 + 1^2 = 2$

□

Ejercicio 16(d) Dan como referencia el punto $(2, 2)$, pero se necesita un vector unitario. Luego hay que construirlo a partir de los datos:

$$\mathbf{u} = \frac{(2, 2) - (1, 1)}{\|(2, 2) - (1, 1)\|} = \frac{(1, 1)}{\sqrt{2}}$$

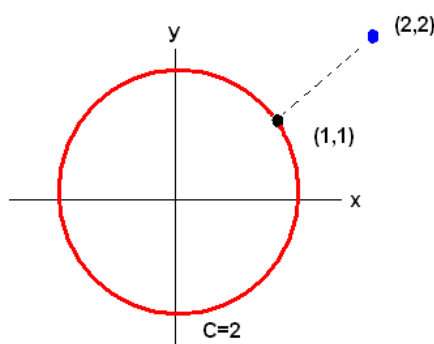
Ahora hallemos las derivadas parciales en el punto $(1, 1)$.

$$f_x = 2x \implies f_x(1, 1) = 2$$

$$f_y = 2y \implies f_y(1, 1) = 2$$

Finalmente, la derivada direccional es

$$D_{\mathbf{u}} = \nabla(1, 1) \cdot \mathbf{u} = (2, 2) \cdot \frac{(1, 1)}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$



□

Ejercicio 16(e) Dan como referencia el punto $(2, 2)$, pero se necesita un vector unitario. Luego hay que construirlo a partir de los datos:

$$\mathbf{v} = \frac{(0, 0) - (1, 1)}{\|(0, 0) - (1, 1)\|} = -\frac{(1, 1)}{\sqrt{2}}$$

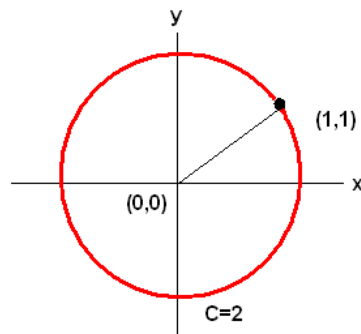
Las derivadas parciales en el punto $(1, 1)$ son:

$$f_x = 2x \implies f_x(1, 1) = 2$$

$$f_y = 2y \implies f_y(1, 1) = 2$$

En consecuencia

$$D_{\mathbf{v}} = \nabla(1, 1) \cdot \mathbf{v} = -(2, 2) \cdot \frac{(1, 1)}{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2}$$



□

Ejercicio 16(f)

$$x^2 + y^2 = 2 \implies 2x + 2y y' = 0 \implies y' = -\frac{x}{y}$$

Se sigue que

$$y - 1 = -1(x - 1)$$

O bien

$$x + y - 2 = 0$$

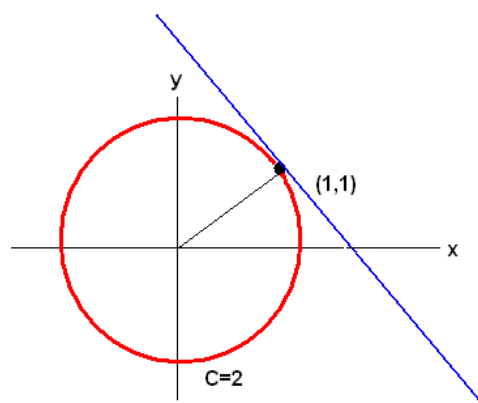
□

Ejercicio 16(g)

$$x = t \implies y = 2 - t$$

De esta ecuación paramétrica de la recta se sigue que $\mathbf{d} = (1, -1)$ es un vector director. La derivada direccional es.

$$D_{\mathbf{u}}(1, 1) = (2, 2) \cdot \frac{(1, -1)}{\sqrt{2}} = 0$$



□

Ejercicio 16(h) Si la recta tangente tiene director $\mathbf{d} = (1, -1)$, entonces con el normal, en producto punto, debe dar como resultado cero. Luego, $\mathbf{n} = (1, 1)$

El normal lo puedes sacar también de la ecuación de la recta $1x + 1y - 2 = 0$ ya que los acompañantes de x e y , que son en ambos casos 1, entregan que $(1, 1)$ es el normal. ☐

Ejercicio 16(i) El gradiente es el culpable de todo esto, ya lo verás más adelante. ☐

Ejercicio 17(a)

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}f(0,0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(hu_1, hu_2) - f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 u_1^2 u_2 - 0}{h(h^4 u_1^4 + h^2 u_2^2)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u_1^2 u_2}{h^2 u_1^4 + u_2^2} \end{aligned}$$

☐

Ejercicio 17(b)

el límite es 0

☐

Ejercicio 17(c)

$$\frac{u_1^2}{u_2}$$

De esta forma, $D_{\mathbf{u}}f(0,0)$ existe en cualquier dirección.

☐

Ejercicio 17(d)

$$f(0,0) = 0$$

☐

Ejercicio 17(e)

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x^2) = \frac{1}{2}$$

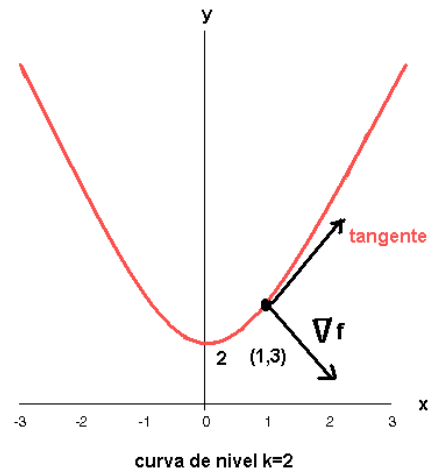
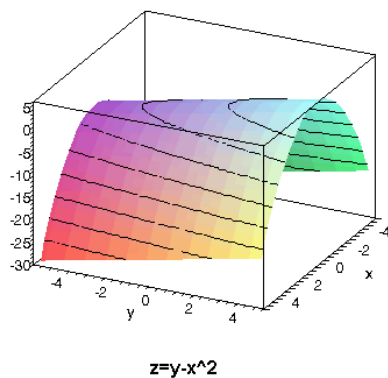
☐

Ejercicio 18(a)

$$\nabla f(\mathbf{x}) = (-2x, 1)$$

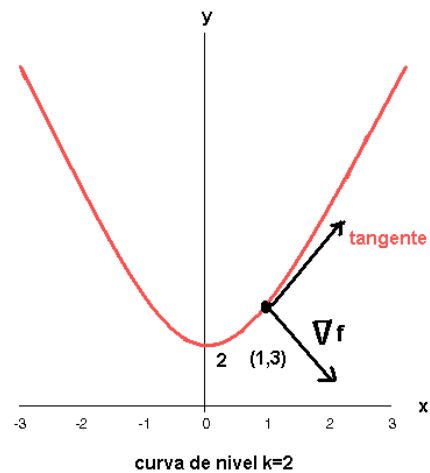
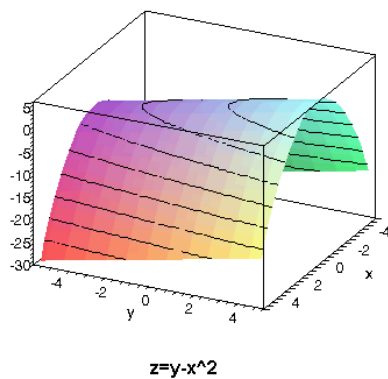
☐

Ejercicio 18(b)



□

Ejercicio 18(c)



□

Ejercicio 18(d) La ecuación de la recta es

$$y - 3 = m(x - 1)$$

La pendiente se saca de la derivada

$$y = x^2 + 2 \implies y' = 2x \implies y'(1, 3) = 2$$

En consecuencia, la ecuación de la recta tangente es

$$y - 3 = 2(x - 1)$$

O bien,

$$y - 2x - 1 = 0$$

□

Ejercicio 18(e)

$$x = t, \quad y = 1 + 2t \implies \mathbf{d} = (1, 2)$$

☐

Ejercicio 18(f)

$$\nabla f(1, 2) \cdot (1, 2) \implies (-2, 1) \cdot (1, 2) = 0$$

☐

Ejercicio 18(g) La recta tangente en $(0, 2)$ es

$$y - 2 = m(x - 0) \implies y - 2 = 0 \cdot x = 0 \implies y = 2$$

☐

Ejercicio 18(h) La recta $y = 2$ tiene vector director $\mathbf{d} = (1, 0)$ y

$$\nabla f(x, y) = (-2x, 1) \implies \nabla f(0, 2) = (0, 1)$$

De esto,

$$(0, 1) \cdot (1, 0) = 0$$

☐

Ejercicio 19(a)

$$\nabla f(x, y, z) = (-4x, -2y, 1) \implies \nabla f(1, 2, 6) = (-4, -4, 1)$$

☐

Ejercicio 19(b)

$$(1, 2, 6)$$

☐

Ejercicio 19(c)

$$(x - 1, y - 2, z - 6) \cdot (-4, -4, 1) = 0$$

☐

Ejercicio 19(d)

$$4x + 4y - z + 9 = 0$$

☐

Ejercicio 20(a)

En dirección del **gradiente**

☐

Ejercicio 20(b)

$$\nabla f(x, y) = (2x, 2y) \implies \nabla f(1, 1) = (2, 2)$$

☐

Ejercicio 20(c)

$$\mathbf{u} = \frac{(2, 2)}{2\sqrt{2}} = \frac{(1, 1)}{\sqrt{2}}$$

☐

Ejercicio 20(d)

$$\|\nabla f(2, 2)\| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

□

Ejercicio 21(a)

$$\nabla f(x, y, z) = \left(-\frac{x}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}, -\frac{y}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}, -\frac{z}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \right)$$

Queda más bonito en la forma

$$\nabla f(x, y, z) = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}(x, y, z)$$

□

Ejercicio 21(b)

$$\mathbf{u} = (0, 1, 1) - (1, 1, 1) = (-1, -2, 0)$$

□

Ejercicio 21(c)

$$D_{\mathbf{u}}f(1, 1, 1) = -\frac{1}{2}(3)^{-3/2}(1, 1, 1) \cdot (-1, -2, 0) = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

□

Ejercicio 21(d) La máxima razón de cambio es siempre en dirección del $\nabla(1, 1, 1)$ y su valor es $\|\nabla f(1, 1, 1)\|$. Esto es,

$$\|\nabla(x, y, z)\| = \left\| -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}(x, y, z) \right\| = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}\|(x, y, z)\|$$

lo que equivale a

$$\|\nabla(x, y, z)\| = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \cdot (x^2 + y^2 + z^2) = \frac{1}{2(x^2 + y^2 + z^2)}$$

concluyéndose que

$$\|\nabla(1, 1, 1)\| = \frac{1}{6}$$

□

Ejercicio 22(a)

de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$

□

Ejercicio 22(b)

$$g(t) = (t + 2, 4 + t^2), \text{ y ella va de } \mathbb{R} \text{ en } \mathbb{R}^2$$

□

Ejercicio 22(c)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -40x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 30$$

$$\frac{dx}{dt} = 1$$

$$\frac{dy}{dt} = 2t$$

☐

Ejercicio 22(d)

$$\frac{dz}{dt} = -40x \cdot 1 + 30 \cdot 2t$$

☐

Ejercicio 22(e)

$$\frac{dz}{dt} = -40t - 80 + 60t = 20t - 80$$

☐

Ejercicio 22(f)

$$f(g(t)) = 300 - 20(t+2)^2 + 30(4+t^2) = 10t^2 - 80t + 340$$

☐

Ejercicio 22(g)

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 20t - 80$$

☐

Ejercicio 23(a) w va de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$

☐

Ejercicio 23(b) $g(s, t) = (s^2 + t^2, st)$ va de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$

☐

Ejercicio 23(c)

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = y \cdot 2t + xs = s^3 + 3st^2$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} = y \cdot 2s + xt = t^3 + 3s^2t$$

☐

Ejercicio 24(a)

$$\begin{cases} w_x &= -3x^2 + 3z = 0 \\ w_y &= 2 - 2y = 0 \\ w_z &= 3x - 6z = 0 \end{cases}$$

☐

Ejercicio 24(b)

los puntos críticos son $(0, 1, 0)$ y $(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4})$

☐

Ejercicio 24(c)

$$w_{xx} = 6x, \quad w_{xy} = 0, \quad w_{xz} = 3$$

$$w_{yy} = -2, \quad w_{yx} = 0, \quad w_{yz} = 0$$

$$w_{zz} = -6, \quad w_{zx} = 3, \quad w_{zy} = 0$$

☐

Ejercicio 24(d)

$$H(0, 1, 0) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -6 \end{vmatrix} \Rightarrow a_{11} = 0, |H| < 0. \text{ silla}$$

$$H\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}\right) = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -6 \end{vmatrix} \Rightarrow a_{11} < 0, |H| > 0. \text{ Máximo}$$

□

Ejercicio 24(e)

En $(0, 1, 0)$ hay un punto de silla, y en $(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4})$ hay un máximo, cuyo valor es $\frac{17}{16}$

□

Ejercicio 25(a)

$$d^2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

□

Ejercicio 25(b)

$$g(x, y, z) = x^2 - z^2 - 1$$

□

Ejercicio 25(c)

$$L(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x^2 - z^2 - 1)$$

□

Ejercicio 25(d)

$$L_x = 2x + 2\lambda x = 0$$

$$L_y = 2y = 0$$

$$L_z = 2z - 2\lambda z = 0$$

$$L_\lambda = x^2 - z^2 - 1 = 0$$

□

Ejercicio 25(e)

$$\begin{cases} L_x = 2x(1 + \lambda) = 0 \\ L_y = 2y = 0 \\ L_z = 2z(1 - \lambda) = 0 \\ L_\lambda = x^2 - z^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

El $x = 0$ no puede ser cero pues con ello z no tiene valor. El $y = 0$ fijo. Con $\lambda = -1$ se tiene que

$$x^2 - 1 = 0$$

de donde $x = \pm 1$. Como $z = 0$, entonces hay dos puntos criticos: $(1, 0, 0)$ y $(-1, 0, 0)$. La distancia mínima es, en ambos casos:

$$d[(\pm 1, 0, 0); (0, 0, 0)] = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = 1$$

□

QuieroVer 25(a)

Ejemplo 4.7.16. Te presento el intervalo $[1, 5]$ de la recta real



1. Hay que hacer una partición de $[1, 5]$ en 4 subintervalos, de modo que cada uno de ellos tenga la misma longitud. ¿Te atreves a decirme cuál es esta partición? Por supuesto, es

$$\{1, 2, 3, 4, 5\} \quad \checkmark$$

2. Si la partición de $[1, 5]$ necesita de 8 subintervalos de la misma longitud, entonces los puntos de la partición son:

$$\{1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4, \frac{9}{2}, 5\} \quad \checkmark$$

3. Vamos por el caso general. Hay que hacer una partición de $[1, 5]$ en n subintervalos tales que cada uno de ellos tenga la misma longitud. Dime cual es la longitud de cada subintervalo. La longitud de cada subintervalo es

$$\frac{b-a}{n} = \frac{5-1}{n} = \frac{4}{n} \quad \checkmark$$

4. El intervalo $[1, 5]$ está dividido en n subintervalos de igual longitud. Si el primer punto de la partición es $x_0 = 1$, ¿cuál es la fórmula del punto x_i y que valores toma el i para ir de 0 a 5?

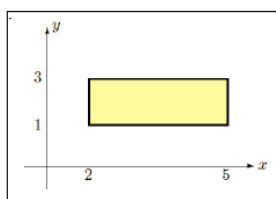
$$\{x_0 = 1, \quad \dots, x_i = 1 + \frac{4i}{n}\}, \quad 0 \leq i \leq n \quad \checkmark$$

□

QuieroVer 25(b) <https://es.khanacademy.org/math/ap-calculus-ab/ab-integration-new/ab-6-3/a/definite-integral-as-the-limit-of-a-riemann-sum>

□

Ejercicio 26(a)



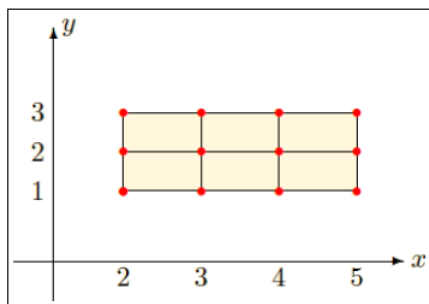
☐

Ejercicio 26(b)

$$P_1 \times P_2 = \{(2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 3)\}$$

☐

Ejercicio 26(c)


☐

Ejercicio 26(d) 12 ✓

☐

Ejercicio 26(e) 6 ✓

☐

Ejercicio 27(a)

- La división de $[0, 2]$ considera los puntos $\{0, 1, 2\}$
- La división de $[-1, 1]$ considera los puntos $\{-1, 0, 1\}$
- La partición del rectángulo es

$$P = \{(0, -1), (0, 0), (0, 1), (1, -1), (1, 0), (1, 1), (2, -1), (2, 0), (2, 1)\}$$

☐

Ejercicio 27(b) La figura muestra el recinto y los puntos de división

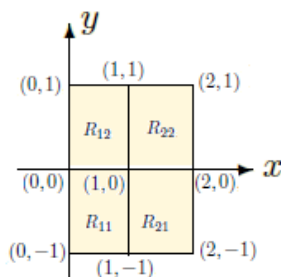


Figura 4.15

☐

Ejercicio 27(c)

$$\{(1, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 1)\} \quad \checkmark$$

☐

Ejercicio 27(d) Las imágenes son:

$$f(1,0) = 15, f(1,1) = 14, f(2,0) = 12, f(2,1) = 11$$

☐

Ejercicio 27(e)

$$S_{22} = 52$$

☐

Ejercicio 28(a) $\iint_R (4 - x^2) dx dy = \int_1^4 \int_0^2 (4 - x^2) dx dy$

☐

Ejercicio 28(b)

$$\int_0^2 (4 - x^2) dx = \int_0^2 \left(4x - \frac{x^3}{3} \right)_0^2 = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$$

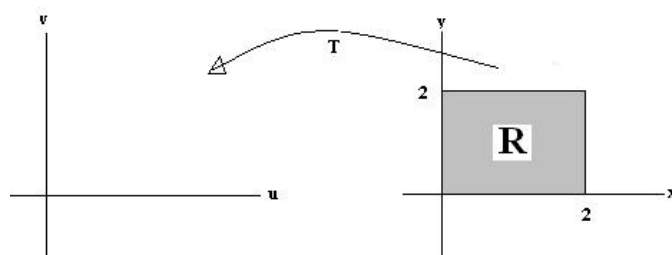
☐

Ejercicio 28(c)

$$\iint_R (4 - x^2) dx dy = 16$$

☐

Ejercicio 29(a)


☐

Ejercicio 29(b)

xy al plano uv

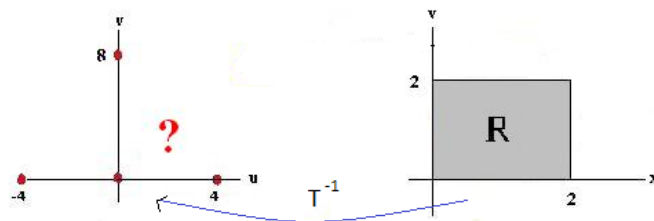
☐

Ejercicio 29(c)

(x, y)	(0,0)	(2,0)	(2,2)	(0,2)
$T(x, y) = (u, v)$	(0,0)	(2,0)	(0,8)	(-4,0)

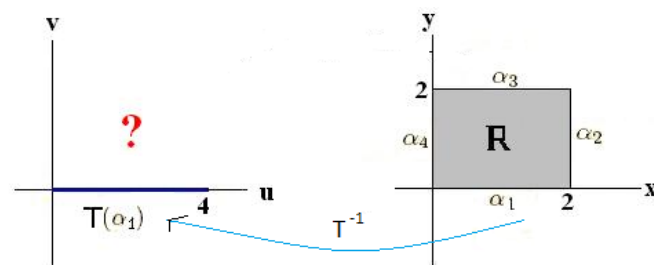
☐

Ejercicio 29(d)



□

Ejercicio 29(e)



□

Ejercicio 29(f)

1. $\alpha_2(t) = (2, t) \implies T(2, t) = (4 - t^2, 4t) = (u, v)$
2. $\alpha_3(t) = (t, 2) \implies T(t, 2) = (t^2 - 4, 4t) = (u, v)$
3. $\alpha_4(t) = (0, t) \implies T(0, t) = (-t^2, 0) = (u, v)$

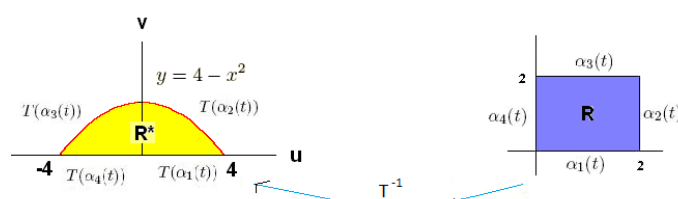
□

Ejercicio 29(g)

- $\begin{cases} u = 4 - t^2 \\ v = 4t \end{cases} \implies u = 4 - \left(\frac{v}{4}\right)^2 \quad \text{¡parábola!}$
- $\begin{cases} u = t^2 - 4 \\ v = 4t \end{cases} \implies u = \left(\frac{v}{4}\right)^2 - 4 \quad \text{¡parábola!}$
- $u = -t^2, v = 0, \quad \text{¡segmento de recta! } -4 \leq u \leq 0$

□

Ejercicio 29(h)



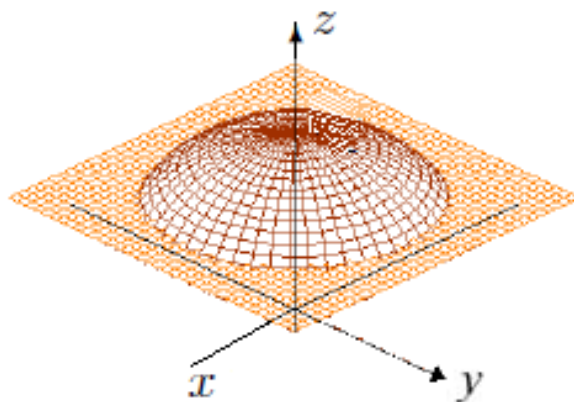
□

Ejercicio 29(i)

$$J(T) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = 4x^2 + 4y^2$$

□

Ejercicio 30(a)



□

Ejercicio 30(b) Se observa que el ángulo θ se mueve entre 0 y 2π (la “guatita completa”), el radio lo proporciona la intersección de la esfera con el plano $z = 2$, que resulta ser la circunferencia $x^2 + y^2 = 6$, luego, $0 \leq r \leq \sqrt{6}$. Los límites en z , son, el piso $z = 2$, y el techo, la esfera $z^2 + r^2 = 10$.

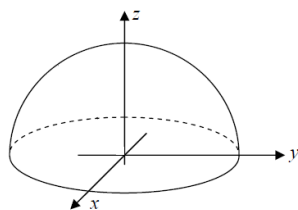
□

Ejercicio 30(c)

$$\begin{aligned} \iiint_r \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy dz &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{6}} \int_2^{\sqrt{10-r^2}} \textcolor{red}{r} \cdot \frac{z}{r} dz dr d\theta \\ &= 2\pi \int_0^{\sqrt{6}} \int_2^{\sqrt{10-r^2}} z dz dr d\theta \\ &= 2\pi \int_0^{\sqrt{6}} \left. \frac{z^2}{2} \right|_2^{\sqrt{10-r^2}} dr \\ &= \pi \int_0^{\sqrt{6}} [(10 - r^2) - 4] dr = \pi \int_0^{\sqrt{6}} (6 - r^2) dr \\ &= \pi \left(6r - \frac{r^3}{3} \right) \Big|_0^{\sqrt{6}} \\ &= \pi (6\sqrt{6} - 2\sqrt{6}) = 4\pi\sqrt{6} \end{aligned}$$

□

Ejercicio 31(a)


☐

Ejercicio 31(b) Usamos coordenadas cilíndricas

$$I_x = \iiint_R (y^2 + z^2) k z \, dV = k \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{4-x^2}} r(r^2 \sin^2 \theta + z^2) dz \, d\theta \, dr$$

☐

Ejercicio 31(c)

$$I_x = \frac{k}{2} \int_0^2 \int_0^{2\pi} r \left[r^2(4 - r^2) \sin^2 \theta + \frac{(4 - r^2)^2}{2} \right] d\theta \, dr$$

☐

Ejercicio 31(d)

$$I_x = \frac{k\pi}{2} \int_0^2 r^3(4 - r^2) \, dr + \frac{k\pi}{2} \int_0^2 (16r + r^5 - 8r^3) \, dr$$

☐

Ejercicio 31(e) Esto debes sacar

$$I_x = 8k\pi$$

☐

Ejercicio 32(a)

$$t = x - 1 \implies y = (x - 1)(x + 3) \implies y = x^2 + 2x - 3$$

☐

Ejercicio 32(b)

parábola

☐

Ejercicio 33(a)

$$t = \frac{x}{2} \implies y = \frac{4}{x}$$

☐

Ejercicio 33(b)

hipérbola equilátera

☐

Ejercicio 34(a)

$$\left. \begin{array}{l} x = 2 + 3 \operatorname{tg} \theta \\ y = 1 + 4 \sec \theta \end{array} \right| \implies \left(\frac{x-2}{3} \right)^2 = \operatorname{tg}^2 \theta$$

$$\left(\frac{y-1}{4} \right)^2 = \sec^2 \theta$$

Al restar, la segunda ecuación de la primera, se tiene que

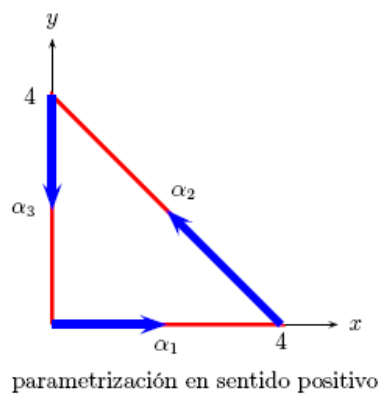
$$\frac{(y-1)^2}{16} - \frac{(x-2)^2}{9} = 1$$

□

Ejercicio 34(b)

Hipérbola

□



Ejercicio 35(a)

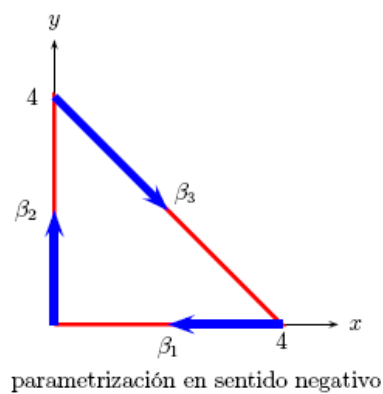
$$\alpha_1(t) = (t, 0) \quad , \quad 0 \leq t \leq 4$$

$$\alpha_2(t) = (4-t, t) \quad , \quad 0 \leq t \leq 4$$

$$\alpha_3(t) = (0, 4-t) \quad , \quad 0 \leq t \leq 4$$

□

Ejercicio 35(b)



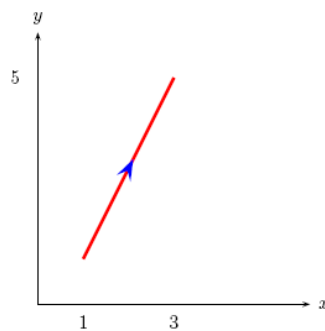
$$\beta_1(t) = (4-t, 0) \quad , \quad 0 \leq t \leq 4$$

$$\beta_2(t) = (0, t) \quad , \quad 0 \leq t \leq 4$$

$$\beta_3(t) = (t, 4-t) \quad , \quad 0 \leq t \leq 4$$

□

Ejercicio 36(a)



□

Ejercicio 36(b)

$$\alpha(t) = (t, 2t-1), \quad 1 \leq t \leq 3$$

□

Ejercicio 36(c)

$$f \circ \alpha = f(\alpha(t)) = t^2 + 5t(2t-1)$$

□

Ejercicio 36(d)

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{5}$$

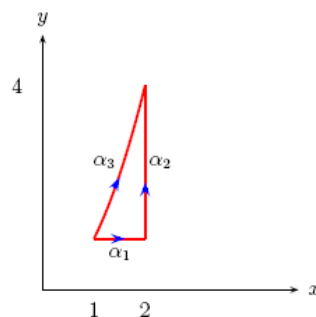
□

Ejercicio 36(e)

$$\int_{\alpha} f(\alpha(t)) dL = \sqrt{5} \int_1^3 (11t^2 - 5t) dt = \frac{226}{3} \sqrt{5}$$

□

Ejercicio 37(a)



$$\alpha_1(t) = (t, 1), \quad 1 \leq t \leq 2$$

$$\alpha_2(t) = (2, t), \quad 1 \leq t \leq 4$$

$$\alpha_3(t) = (t, t^2), \quad 1 \leq t \leq 2$$

□

Ejercicio 37(b)

$$f \circ \alpha_1 = 6t$$

$$f \circ \alpha_2 = 12t$$

$$f \circ \alpha_3 = 6t^3$$

□

Ejercicio 37(c)

$$\|\alpha_1'\| = 1, \quad \|\alpha_2'\| = 1, \quad \|\alpha_3'\| = \sqrt{1+4t^2}$$

□

Ejercicio 37(d)

$$\begin{aligned} \int_{\alpha_1} f(\alpha_1(t)) dL &= \int_1^2 6t dt = 9 \\ \int_{\alpha_2} f(\alpha_2(t)) dL &= \int_1^4 12t dt = 90 \\ \int_{\alpha_3} f(\alpha_3(t)) dL &= \int_1^2 6t^3 \sqrt{1+4t^2} dt = \frac{2109}{25} \sqrt{17} - \sqrt{5} \end{aligned}$$

La última integral es por partes:

$$u = t^2, \quad du = 2t dt, \quad dv = t\sqrt{1+4t^2} dt, \quad v = \frac{1}{8}(1+4t^2)^{3/2} \cdot \frac{2}{3}$$

con lo cual

$$\int 6t^3 \sqrt{1+4t^2} dt = \frac{1}{12} t^2 (1+4t^2)^{3/2} - \frac{1}{6} \int t(1+4t^2)^{3/2} dt$$

Esta última integral es directa, por tanto,

$$\int 6t^3 \sqrt{1+4t^2} dt = \frac{1}{12} t^2 (1+4t^2)^{3/2} - \frac{1}{48} (1+4t^2)^{5/2} \cdot \frac{2}{5}$$

Al evaluar:

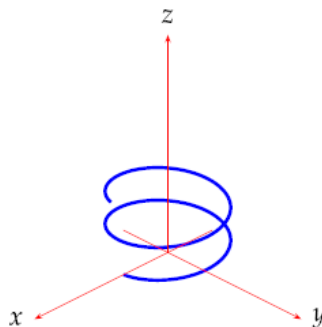
$$\begin{aligned} \int_1^2 6t^3 \sqrt{1+4t^2} dt &= 6 \left[\frac{9}{12} (37)^{3/2} - \frac{1}{12} 5^{3/2} - \frac{1}{100} (37)^{5/2} + \frac{1}{100} 5^{5/2} \right] \\ &= \frac{2109}{25} \sqrt{17} - \sqrt{5} \end{aligned}$$

Sumando todas las integrales se llega a que

$$\int_{\alpha} = 99 + \frac{2109}{25}\sqrt{17} - \sqrt{5}$$

□

Ejercicio 38(a)



□

Ejercicio 38(b)

$$f \circ \alpha = a^2 + a^2 t$$

□

Ejercicio 38(c)

$$\|\alpha'\| = \|(a \cos t, a \sin t, at)\| = a\sqrt{2}$$

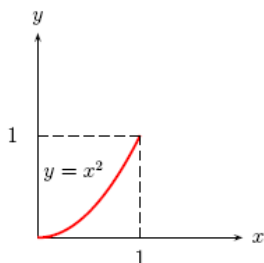
□

Ejercicio 38(d)

$$\begin{aligned} \int_{\alpha} f &= a^3 \sqrt{2} \int_0^{2\pi} (1 + t^2) dt = a^3 \sqrt{2} \left(t + \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{2}{3} \pi a^3 \sqrt{2} (3 + 4\pi a^2) \sim 126a^3 \end{aligned}$$

□

Ejercicio 39(a)



La parametrización es

$$\alpha(t) = (t, t^2) \implies \alpha'(t) = (1, 2t)$$

□

Ejercicio 39(b)

$$L = \int_{\alpha} \|\alpha'(t)\| dL = \int_0^1 \sqrt{1+4t^2} dt = \frac{1}{2} \ln(2 + \sqrt{5}) + \sqrt{5}$$

La sustitución adecuada es $\operatorname{tg} z = 2t$

□

Ejercicio 39(c)

$$M = \int_{\alpha} x dL = \int_0^1 t \sqrt{1+4t^2} dt = \frac{1}{12} (5\sqrt{5} - 1) \sim 0,84$$

□

Ejercicio 39(d)

$$M \bar{x} = \int_{\alpha} x \rho dL = \int_0^1 t^2 \sqrt{1+4t^2} dt$$

$$= \frac{9}{32} \sqrt{5} + \frac{1}{64} \ln(\sqrt{5} - 2)$$

$$\sim 0,6063$$

se sigue que

$$\bar{x} = \frac{0,603}{0,84} = 0,72$$

□

Ejercicio 39(e)

$$M \bar{y} = \int_{\alpha} y \rho dL = \int_0^1 t^3 \sqrt{1+4t^2} dt$$

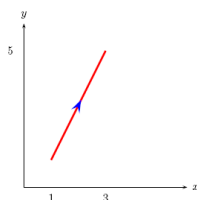
$$= \frac{5}{24} \sqrt{5} + \frac{1}{120} \sim 0,4741$$

se sigue que

$$\bar{y} = \frac{0,4741}{0,84} = 0,56$$

□

Ejercicio 40(a)



La parametrización es

$$\alpha(t) = (t, 2t - 1), \quad 1 \leq t \leq 3$$

□

Ejercicio 40(b)

$$\mathbf{F}(\alpha)(t) = (3t - 1, 3t(2t - 1))$$

☐

Ejercicio 40(c)

$$d\mathbf{L} = \alpha \, dt = (1, 2) \, dt$$

☐

Ejercicio 40(d)

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{L} = \int_1^3 (3t - 1 + 6t(2t - 1)) \, dt$$

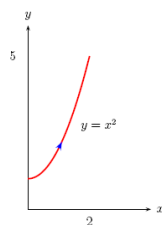
☐

Ejercicio 40(e)

$$\int_1^3 (3t - 1 + 6t(2t - 1)) \, dt = \left(\frac{3}{2}t^2 - t + 4t^3 - 3t^2 \right)_1^3 = 90$$

☐

Ejercicio 41(a)



La parametrización es

$$\alpha(t) = (t, t^2 + 1), \quad 0 \leq t \leq 2$$

☐

Ejercicio 41(b)

$$\mathbf{F}(\alpha(t)) = (2t^2 - 4t(t^2 + 1), 5t(t^2 + 1))$$

☐

Ejercicio 41(c)

$$d\mathbf{L} = (1, 2t) \, dt$$

☐

Ejercicio 41(d)

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{L} = \int_0^2 (2t^2 - 4t^3 - 4t + 10t^4 + 10t^2) \, dt$$

☐

Ejercicio 41(e)

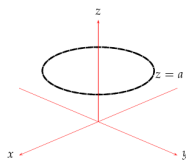
$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{L} = \int_0^2 (2t^2 - 4t^3 - 4t + 10t^4 + 10t^2) \, dt$$

$$= \left(2t^5 - t^4 + 4t^3 - 2t^2 \right)_0^2$$

$$= 72$$

☐

Ejercicio 42(a)



La parametrización es

$$\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, a), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

☐

Ejercicio 42(b)

$$\mathbf{F}(\alpha)(t) = (a^2 \sin t, a^2 \cos t, a^2 \sin t \cos t)$$

☐

Ejercicio 42(c)

$$d\mathbf{L} = (-a \sin t, a \cos t, 0)$$

☐

Ejercicio 42(d)

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{L} = \int_0^{2\pi} (-a^3 \sin^2 t + a^3 \cos^2 t) dt$$

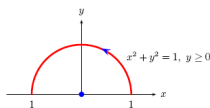
☐

Ejercicio 42(e)

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{L} &= \int_0^{2\pi} (-a^3 \sin^2 t + a^3 \cos^2 t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} a^3 \cos 2t dt = \frac{a^3}{2} \sin 2t \Big|_0^{2\pi} = 0 \end{aligned}$$

☐

Ejercicio 43(a)



La parametrización es

$$\alpha(t) = (t, t^2), \quad 0 \leq t \leq 1$$

☐

Ejercicio 43(b)

$$\alpha(t) = (t, t^2) \implies \alpha'(t) = (1, 2t)$$

$$\vec{F}(\alpha(t)) = (t + t^2, t^2)$$

$$\vec{F}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) = t + t^2 + 2t^3$$

Se sigue que

$$T = \int_{\alpha} = \int_0^1 (t + t^2 + 2t^3) dt = \frac{4}{3}$$

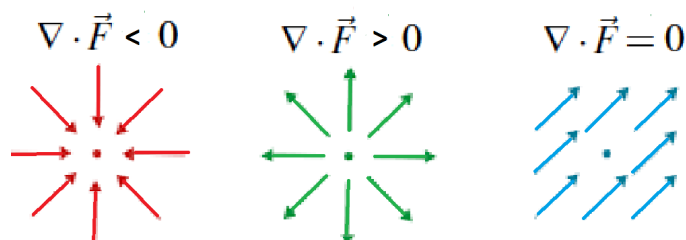
□

Ejercicio 44(a)

$$\alpha(t) = (a + \cos t, b + \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

□

Ejercicio 44(b)



□

Ejercicio 44(c)

$$C = \int_0^{2\pi} (1, k(a + \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt$$

$$= \cos t + ka \sin t + \frac{k}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{2\pi}$$

$$= 1 + k\pi - 1 = k$$

□

Ejercicio 44(d) Es obvio, evidente y claro que depende de k

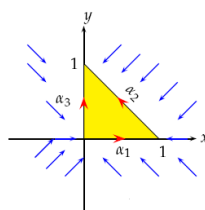
□

Ejercicio 44(e)

- Si $k = 0$, la integral vale 0 y el corcho (gira o no gira) **no gira**.
- Si $k > 0$, la integral es **mayor que cero** y el corcho (gira o no gira) **gira**, y si gira, ¿en qué sentido sobre su eje? (horario o antihorario) **antihorario**.
- Si $k < 0$, la integral es **es menor que cero** y el corcho (gira o no gira) **gira**, y si gira, ¿en qué sentido sobre su eje? (horario o antihorario) **horario**.

□

Ejercicio 45(a)



□

Ejercicio 45(b)

$$\alpha_1(t) = (t, 0), \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\alpha_2(t) = (t, 1 - t), \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\alpha_3(t) = (0, t), \quad 0 \leq t \leq 1$$

□

Ejercicio 45(c)

$$\int_{\alpha_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \|\alpha'(t)\| dt = \int_0^1 (-t, t - 1) \cdot \frac{(1, 1)}{\sqrt{2}} \sqrt{2} dt = - \int_0^1 dt = -1$$

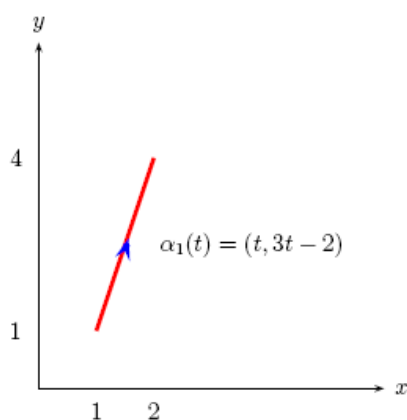
$$\int_{\alpha_3} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \|\alpha'(t)\| dt = \int_0^1 (0, -t) \cdot (-1, 0) dt = 0$$

Se concluye que

$$\int_{\alpha} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \|\alpha'(t)\| dt = 0 - 1 + 0 = -1$$

□

Ejercicio 46(a)



Es claro que $\vec{F}(x, y) = (2xy, x^2)$. Además, la parametrización de la curva es $\alpha_1(t) = (t, 3t - 2)$ y su vector derivada es $\alpha'_1(t) = (1, 3)$. El campo en la parametrización tiene el valor $\vec{F}(\alpha'_1(t)) = (2t(3t - 2), t^2)$, por tanto

$$\int_{\alpha_1} = \int_1^2 (2t(3t - 2), t^2) \cdot (1, 3) dt = 15$$

□

Ejercicio 46(b)

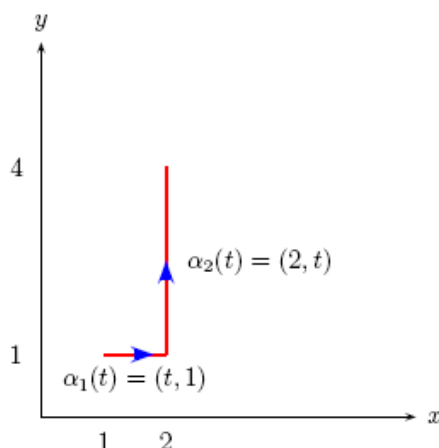


Figura 4.16

El campo vectorial es $\vec{F}(x, y) = (2xy, x^2)$. Además, la curva se parametriza con dos funciones

$$\alpha_1(t) = (t, 1), \quad 1 \leq t \leq 2, \quad \alpha_2(t) = (2, t), \quad 1 \leq t \leq 4$$

los vectores derivada son $\alpha_1'(t) = (1, 0)$ y $\alpha_2'(t) = (0, 1)$, respectivamente. El campo en cada parametrización tiene el siguiente valor:

$$\vec{F}(\alpha_1'(t)) = (2t, t^2) \quad \text{y} \quad \vec{F}(\alpha_2'(t)) = (4t, 4)$$

Por tanto, la integral de línea es

$$\begin{aligned} \int_{\alpha} &= \int_{\alpha_1} + \int_{\alpha_2} \\ &= \int_1^2 (2t, t^2) \cdot (1, 0) dt + \int_1^4 (4t, 4) \cdot (0, 1) dt \\ &= 3 + 12 = 15 \end{aligned}$$

□

Ejercicio 46(c) NO. Aquí es válido el dicho de que “una golondrina no hace verano”, o para ser más preciso dos. Puedes sacar 15 por veintemil caminos y tampoco puedes asegurar que siempre será así. ¡Recuerda, sólo si has probado que el [campo es gradiente](#), entonces la integral de línea sobre cualquier camino que una dos puntos tiene siempre el mismo valor!

□

Ejercicio 46(d)

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy & x^2 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 2x - 2x) = (0, 0, 0)$$

□

Ejercicio 46(e) Bajo esta condición la respuesta es que el campo es independiente de la trayectoria. Luego, cualquier curva que una el (1, 1) con el (2, 4) tendrá como valor 15.

□

Ejercicio 47(a)

$$\vec{F}(x, y, z) = (3x^2z, 4y^3z^2, x^3 + 2y^4z)$$

□

Ejercicio 47(b) La mejor es el rotor

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3x^2z & 4y^3z^2 & x^3 + 2y^4z \end{vmatrix} = (0, 0, 0)$$

□

Ejercicio 48(a)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2xy) = 2y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x + y^2) = 2y$$

Por tanto, el campo es gradiente.

□

Ejercicio 48(b)

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_0^x F_1(t, y) dt + \int_0^y F_2(x, t) dt = \int_0^x (t + y^2) dt + \int_0^y 2xt dt \\ &= \left(\frac{t^2}{2} + ty^2 \right) \Big|_0^x + xt^2 \Big|_0^y \\ &= \frac{x^2}{2} + xy^2 + xy^2 = \frac{x^2}{2} + xy^2 \end{aligned}$$

$$f(x, y) = \frac{x^2}{2} + xy^2 + k$$

Observar que xy^2 está repetido, y se considera sólo una vez. La constante k indica que cualquier potencial solo difiere en una constante.

□

Ejercicio 49(a)

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3y^2z + ye^x & 6xyz + e^x & 3xy^2 \end{vmatrix} = (6xy - 6xy, 3y^2 - 3y^2, 6yz - +e^x - 6yz - e^x) = (0, 0, 0)$$

Luego, este campo es gradiente.

□

Ejercicio 49(b)

$$\begin{aligned}
 f(x, y, z) &= \int_0^x F_1(t, 0, 0) dt + \int_0^y F_2(x, t, 0) dt + \int_0^z F_3(x, y, t) dt \\
 &= \int_0^x 0 \cdot e^t dt + \int_0^y 6xy \cdot 0 + e^x dt + \int_0^z 3xy^2 dt \\
 &= 0 + te^x \Big|_0^y + 3xy^2t \Big|_0^z \\
 &= ye^x + 3xy^2z
 \end{aligned}$$

En consecuencia, la función potencial es

$$f(x, y, z) = 3xy^2z + ye^x + k$$

□

Ejercicio 50(a) Su dominio es $\mathbb{R}^2$ y éste es un conjunto conexo

□

Ejercicio 50(b) por supuesto, sus componentes son polinomios y todo polinomio es continuo y derivable las veces que uno quiera.

□

Ejercicio 50(c)

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial Q}{\partial x} &= 2x \\
 \frac{\partial P}{\partial y} &= 2x
 \end{aligned}$$

□

Ejercicio 50(d)

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= \int_0^x F_1(t, 0) dt + \int_0^y F_2(x, t) dt = \int_0^x 1 dt + \int_0^y (x^2 + 4t) dt \\
 &= t \Big|_0^x + (x^2t + 2t^2) \Big|_0^y = x + x^2y + 2y^2
 \end{aligned}$$

En consecuencia, la función potencial es

$$f(x, y) = x + x^2y + 2y^2 + k$$

□

QuieroVer Hint: Sea C una curva cerrada simple (una recta paralela a los ejes la corta en sólo 2 puntos). ¿Qué te parece echarle una miradita a la figura?

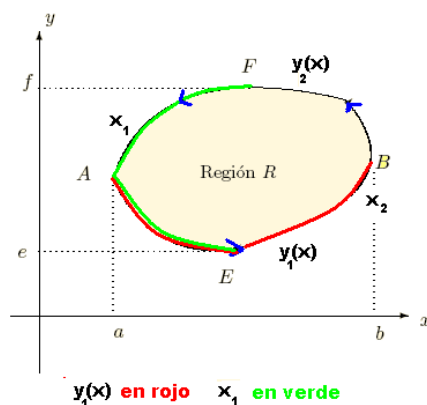


Figura 4.17

Tomando los puntos extremos de la curva; A , E , B , F , suponemos que las ecuaciones de las curvas AFB y AEB son, $y_2(x)$ e $y_1(x)$, respectivamente. Además, la región R encerrada es simplemente conexa

1. Corresponde poner los límites de integración

$$\iint_R \frac{\partial P}{\partial y} dy dx = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy dx$$

2. Evaluar, respecto de y , esta integral

$$\iint_R \frac{\partial P}{\partial y} dy dx = \int_a^b (P(x, y_2) - P(x, y_1)) dx$$

3. Separamos en dos esta integral. Cambiamos la dirección sobre la curva (Usando la propiedad inmortal)

$$\begin{aligned} \iint_R \frac{\partial P}{\partial y} dy dx &= \int_a^b P(x, y_2) dx - \int_a^b P(x, y_1) dx \\ &= - \int P(\alpha_2(t)) dt - \int_P P(\alpha_2(t)) dt \\ &= \oint_C P dx \end{aligned}$$

De manera análoga se prueba la parte que falta. Mira a continuación Sean $x_1(y)$ y $x_2(y)$ las ecuaciones de las curvas EAF y EBF , respectivamente

1. Ponemos los límites de integración

$$\iint_R \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \int_e^f \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy$$

2. Evaluamos, respecto de x , esta integral

$$\iint_R \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \int_e^f (Q(x_2, y) - Q(x_1, y)) dy$$

3. Separamos en dos esta integral.

$$\begin{aligned} \iint_R \frac{\partial Q}{\partial x} dy dx &= \int_e^f Q(x_2, y) dy - \int_e^f Q(x_1, y) dy \\ &= \int Q(\alpha_2(t)) dt + \int Q(\alpha_1(t)) dt \\ &= \oint_C Q dy \end{aligned}$$

Al sumar ambos resultados se tiene que

$$\oint_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dy dx$$

Ejercicio 51(a)

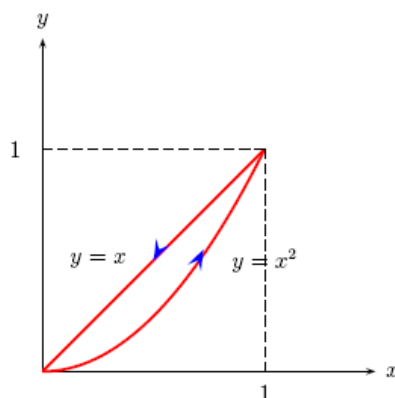


Figura 4.18

La parametrización es:

$$\alpha_1(t) = (t, t^2) \quad \text{y} \quad \alpha_2(t) = (t, t), \quad 0 \leq t \leq 1$$

La parametrización α_2 va en sentido contrario por tanto, habrá que cambiar el sentido en la integral. ☐

Ejercicio 51(b)

$$\oint_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{\alpha_1} (t + 4t^2 + 6t^6) dt - \int_{\alpha_2} (5t + 3t^3) dt = -\frac{47}{84}$$

☐

Ejercicio 51(c)

$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dy dx = \int_0^1 \int_{x^2}^x (3y^2 - 4) dy dx = -\frac{47}{84}$$

Por supuesto que sacaste lo mismo. ¡felicitaciones! ☐

Ejercicio 52(a)

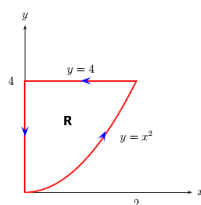


Figura 4.19

☐

Ejercicio 52(b)

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x \quad \text{y} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$$

☐

Ejercicio 52(c)

$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dy dx = 0$$

□

Ejercicio 52(d) Dado que el campo vectorial es $\vec{F}(x, y) = (2xy, x^2)$ y las parametrizaciones son:

$$\alpha_1(t) = (t, t^2), \quad 0 \leq t \leq 2 \implies \alpha_1'(t) = (1, 2t)$$

$$\alpha_2(t) = (t, 4), \quad 0 \leq t \leq 2 \implies \alpha_2'(t) = (1, 0)$$

$$\alpha_3(t) = (0, t), \quad 0 \leq t \leq 4 \implies \alpha_3'(t) = (0, 1)$$

Las dos últimas están parametrizadas en sentido contrario, luego se cambiarán de signo sus integrales. Ahora se calcula el valor del campo en cada parametrización

$$\vec{F}(\alpha_1) = (2t^3, t^2) \implies \vec{F}(\alpha_1) \cdot \alpha_1' = 4t^3$$

$$\vec{F}(\alpha_2) = (8t, t^2) \implies \vec{F}(\alpha_2) \cdot \alpha_2' = 8t$$

$$\vec{F}(\alpha_3) = (0, 0) \implies \vec{F}(\alpha_3) \cdot \alpha_3' = 0$$

Con esto se tiene:

$$\int_{\alpha} \vec{F} = \int_0^2 (4t^3 - 8t) dt = \left(t^4 - 4t \right)_0^2 = 0$$

□

Ejercicio 53(a)

$$\int_{\alpha_1} \vec{F} = \int_0^1 (t + t^2, t^2) \cdot (1, 2t) dt = \frac{5}{6}$$

$$\int_{\alpha_2} \vec{F} = \int_0^1 (t + t^3, t^3) \cdot (1, 3t^2) dt = \frac{27}{20}$$

□

Ejercicio 53(b)

La integral no es independiente del camino

o bien

El campo no es gradiente

□

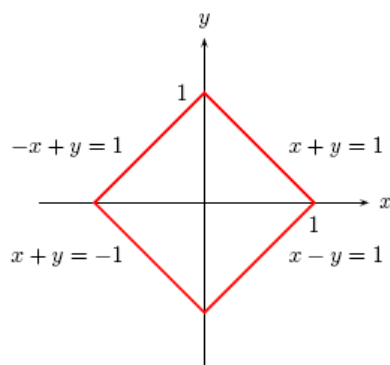
Ejercicio 54(a) Para que sea gradiente debe cumplir que $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$. En este caso $P = x + 4y$ y $Q = ax + y$. Por tanto,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = a = 4 = \frac{\partial P}{\partial y}$$

Como el campo es gradiente, entonces

$$\int_C \vec{F} = 0$$

La grafica de la curva es


☐

Ejercicio 55(a)

YES

☐

Ejercicio 55(b) Como el plano es bidimensional, es más simple verificar igualdad de derivadas parciales

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 2y = \frac{\partial M}{\partial y}$$

en donde $M = x + y^2$, $N = 2xy$. Luego, el campo es gradiente.

☐

Ejercicio 55(c)

$$f(x, y) = \frac{x^2}{2} + xy^2$$

☐

Ejercicio 55(d)

$$\int_C \vec{F} = f(1, 1) - f(0, 0) = \frac{3}{2}$$

☐

Ejercicio 56(a)

$$\alpha(t) = (r \cos t, r \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

☐

Ejercicio 56(b)

$$\mathbf{F}(\alpha(t)) = \left(-\frac{\sin t}{r}, \frac{\cos t}{r} \right)$$

☐

Ejercicio 56(c)

$$d\mathbf{L} = (x'(t), y'(t)) dt = (-r \sin t, r \cos t) dt$$

☐

Ejercicio 56(d)

$$\oint_{\alpha} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{L} = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = 2\pi$$

☐

Ejercicio 56(e) No es campo gradiente. La razón, integramos sobre una curva cerrada y es distinto de cero.

☐

Ejercicio 57(a)

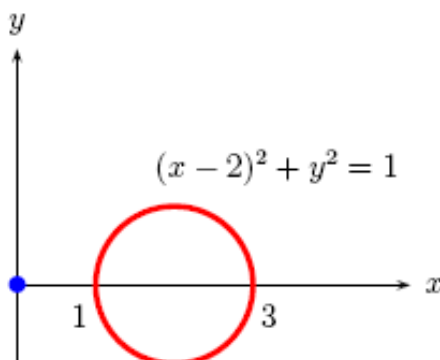
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

□

Ejercicio 57(b) Que el campo sea de clase ζ^1 sobre un simplemente conexo. El conjunto $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, no lo es. □

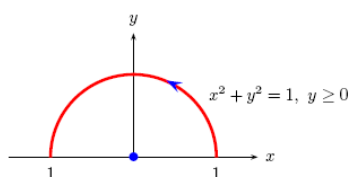
Ejercicio 57(c)



Se observa que el $(0, 0)$ queda fuera de la curva que se debe recorrer, y que ahora el campo vectorial es de clase ζ^1 sobre y dentro de la curva a recorrer. □

Ejercicio 57(d) Obviamente que es cero. Ahora el campo es gradiente, el $(0, 0)$ no tiene pito que tocar. □

Ejercicio 57(e)



No olvidar que seguimos en un campo gradiente, con lo cual la integral de línea es independiente de la trayectoria. Ojo que no puede ir del $(1, 0)$ al $(-1, 0)$ en línea recta, pues por allí aparece el $(0, 0)$. Podemos hallar el potencial o parametrizar, hacemos esto último

$$\beta(t) = (\cos t, \sin t) \implies \beta'(t) = (-\sin t, \cos t)$$

Por otra parte, el campo en la parametrización tiene el valor

$$\vec{F}(\beta(t)) = \left(-\frac{\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t}, \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \right) = (-\sin t, \cos t)$$

Se sigue que

$$\int_{\beta} \vec{F} = \int_0^{\pi} (-\sin t, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt = \int_0^{\pi} dt = \pi$$

□

Ejercicio 58(a) Lo que es claro es que $\vec{F}$ es de clase ζ^1 sobre todo $\mathbb{R}^3$. El rotor nos dirá si estamos en presencia de un campo gradiente.

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z^2 + 1 & 2z & 2xz + 2y \end{vmatrix} = (2 - 2, -2z + 2z, 0) = (0, 0, 0)$$

¡Es gradiente !

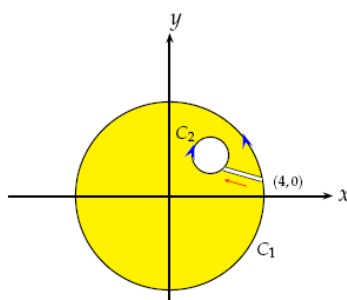
□

Ejercicio 58(b)

$$f(x, y, z) = \int_0^x dt + \int_0^y 0 dt + \int_0^z (2xt + 2y) dt = x + xz^2 + 2yz$$

□

Ejercicio 59(a)



□

Ejercicio 59(b)

$$\alpha_1(t) = (4 \cos t, 4 \sin t) \quad \text{y} \quad \alpha_2(t) = (\cos t, \sin t)$$

□

Ejercicio 59(c)

$$\begin{aligned} \int_{\alpha_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{L} &= \int_0^{2\pi} (4 \cos t, 8 \sin t) \cdot (-4 \sin t, 4 \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-16 \sin^2 t + 32 \cos^2 t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (16 \cos 2t + 16 \sin^2 t) dt = 16\pi \end{aligned}$$

Para la otra integral se tiene

$$\begin{aligned} \int_{\alpha_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{L} &= \int_0^{2\pi} (1 + \sin t, 2 + 2 \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sin t - 1 + 3 \cos^2 t + 2 \cos t) dt = \pi \end{aligned}$$

Como esta integral se parametrizó en sentido opuesto, se cambia el signo para tener que

$$\int_{\alpha_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{L} = -\pi$$

Al sumar se llega a que

$$\int_{\alpha_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{L} + \int_{\alpha_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{L} = 16\pi - \pi = 15\pi$$

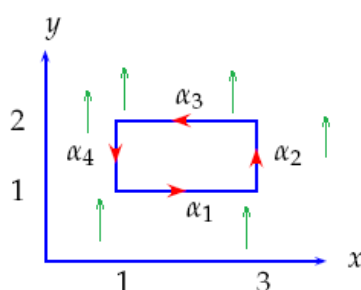
□

Ejercicio 59(d)

$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \pi r_2^2 - \pi r_1^2 = 15\pi$$

□

Ejercicio 60(a)



□

Ejercicio 60(b)

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = 0 + 3y^2$$

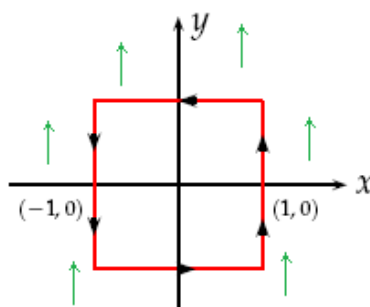
□

Ejercicio 60(c)

$$\text{Flujo} = \int_1^3 \int_1^2 3y^2 dy dx = 14$$

□

Ejercicio 61(a)



□

Ejercicio 61(b)

$$\text{Flujo} = \iint_R (\nabla \cdot \mathbf{F}) dA = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 3y^2 dy dx = 4$$

☐

Ejercicio 61(c)

$$\int_{\alpha_1} \vec{F} \cdot \vec{n} dL = \int_{-1}^1 (0, t^3)(1, 0) dt = 0$$

$$\int_{\alpha_3} \vec{F} \cdot \vec{n} dL = \int_{-1}^1 (0, t^3)(-1, 0) dt = 0$$

$$\int_{\alpha_2} \vec{F} \cdot \vec{n} dL = \int_{-1}^1 (0, 1^3)(0, 1) dt = 2$$

$$\int_{\alpha_4} \vec{F} \cdot \vec{n} dL = \int_{-1}^1 (0, -1)(0, -1) dt = 2$$

Al sumar se tiene el flujo total.

OJo α_1 es la cara de $x = 1$, α_3 es $x = -1$, la α_2 es la cara superior y α_4 la inferior.

☐

Ejercicio 62(a)

$$\frac{dx}{F_1} = \frac{dy}{F_2} \implies \frac{dx}{x/4} = -\frac{dy}{y/4} \implies \frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y}$$

Integrando se halla

$$\ln(xy) = \ln(C) \implies xy = C$$

☐

Ejercicio 62(b) Hipérbolas

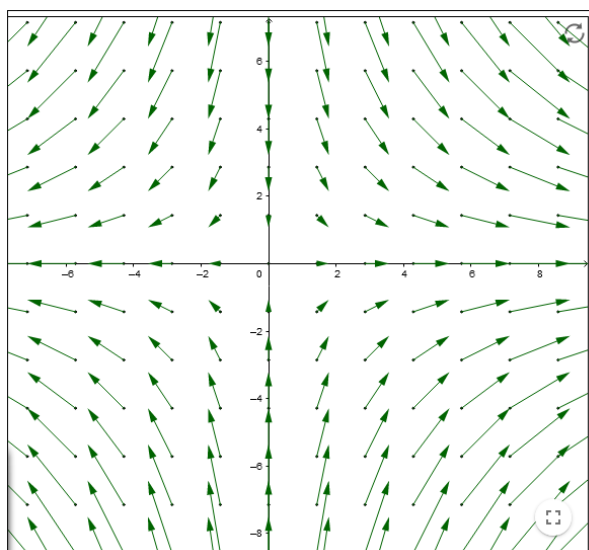
☐

Ejercicio 62(c)

$$\|\mathbf{F}\| = \frac{1}{4}\sqrt{x^2 + y^2}$$

☐

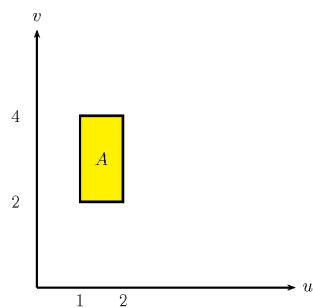
Ejercicio 62(d)



Es claro que las líneas son hipérbolas. Si tienes tiempo visita la página <https://www.geogebra.org/m/V9Afznt5>

☐

Ejercicio 63(a)



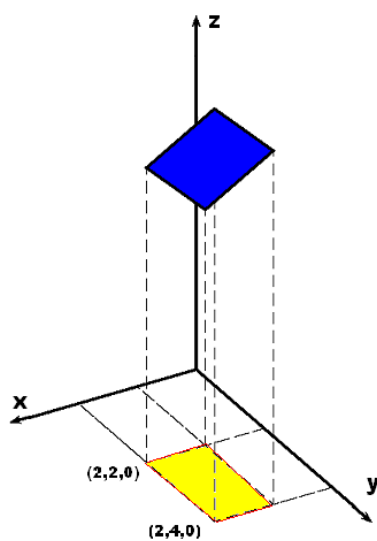
□

Ejercicio 63(b)

rectas

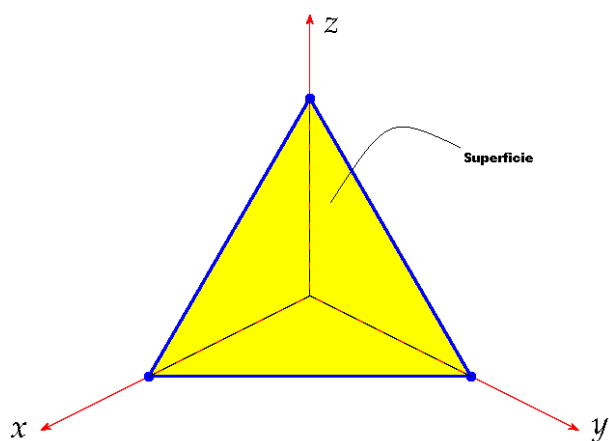
□

Ejercicio 63(c)



□

Ejercicio 64(a)



La idea ahora es tener la **función** que “hace” la superficie. Te puedo adelantar que la puedes hallar en el plano xy , en el xz o en yz . Te cuento como. Te haces la idea de que estás instalado con tus pies en el plano xy , una vez allí miras que en cada lugar en que pongas los pies puedas levantar una perpendicular que corte en un sólo punto a la superficie, si no es así no hay función. Si el punto en tus pies es (x, y) , el de arriba sigue siendo (x, y) más una tercera coordenada que proviene de la ecuación del plano al despejar z . $\square$

Ejercicio 64(b)

$$\varphi(x, y) = (x, y, 1 - x - y), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 - x$$

$\square$

Ejercicio 64(c)

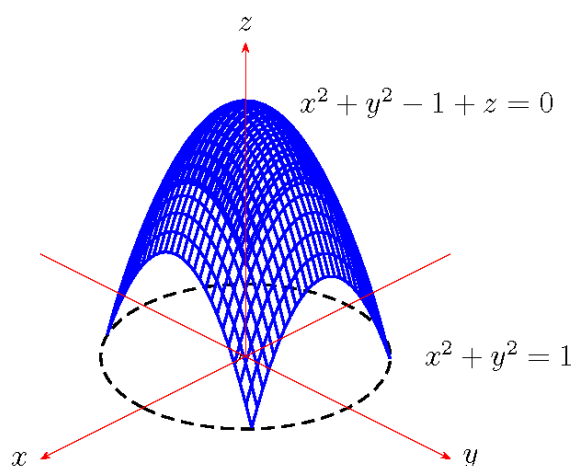
$$\varphi(x, z) = (x, 1 - x - z, z), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1 - x$$

$$\varphi(y, z) = (1 - y - z, y, z), \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1 - y$$

$\square$

Ejercicio 65(a)

Paraboloide



$\square$

Ejercicio 65(b)

$$xy$$

$\square$

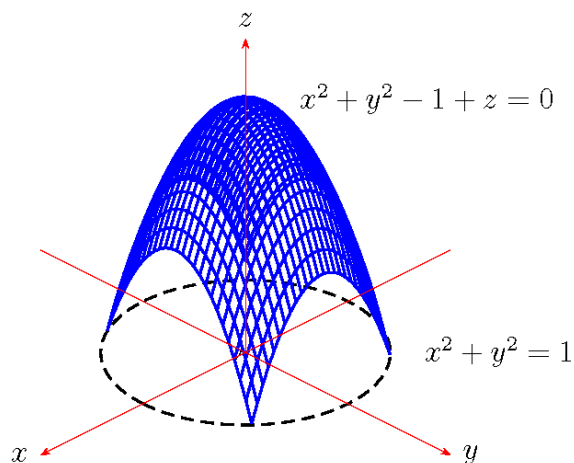
Ejercicio 65(c)

$$\varphi(x, y) = (x, y, 1 - x^2 - y^2) \quad D = \{(x, y) / x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$\square$

Ejercicio 66(a)

Paraboloide


☐

Ejercicio 66(b)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = (1, 0, -2x), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = (0, 1, -2y)$$

☐

Ejercicio 66(c)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -2x \\ 0 & 1 & -2y \end{pmatrix} = (-2x, 2y, 1) \neq \vec{0}$$

☐

Ejercicio 66(d)

El producto cruz es diferente de cero

☐

Ejercicio 67(a)

Cono

$$x = v \cos u, y = v \sin u, z = v \implies x^2 + y^2 = v^2 = z^2$$

☐

Ejercicio 67(b)

$$(0, v) \neq (2\pi, v) \implies \varphi(0, v) = (v, 0, v) = \varphi(2\pi, v)$$

☐

Ejercicio 67(c)

$$(0, 0, 0)$$

☐

Ejercicio 67(d)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = (-v \sin u, v \cos u, 0), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = (\cos u, \sin u, 1)$$

☐

Ejercicio 67(e)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -v \operatorname{sen} u & v \cos u & 0 \\ \cos u & \operatorname{sen} u & 1 \end{pmatrix} = (\operatorname{sen} u, v \operatorname{sen} u, -v)$$

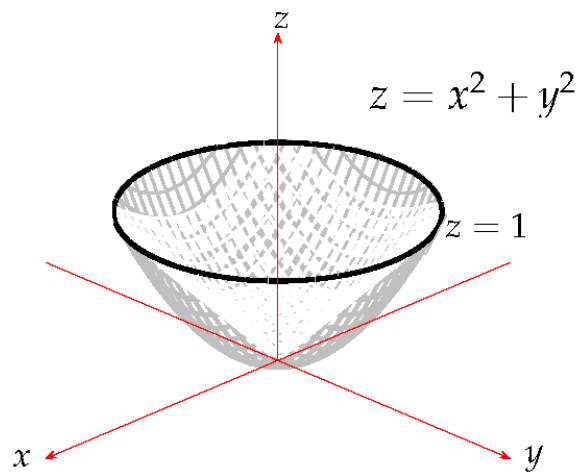
☐

Ejercicio 68(a)

paraboloide

☐

Ejercicio 68(b)


☐

Ejercicio 68(c)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = (1, 0, 2x) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = (0, 1, 2y)$$

de esto tienes que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \end{pmatrix} = (2x, -2y, 1)$$

☐

Ejercicio 68(d)

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\| = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}$$

☐

Ejercicio 68(e)

$$\begin{aligned}\iint_D &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \sqrt{1+4r^2} \, dr \, d\theta \\ &= 2\pi \cdot \frac{1}{8} (1+4r^2)^{3/2} \cdot \frac{2}{3} \Big|_0^1 \\ &= \frac{\pi}{6} \left[5^{3/2} - 1 \right]\end{aligned}$$

□

Ejercicio 69(a)

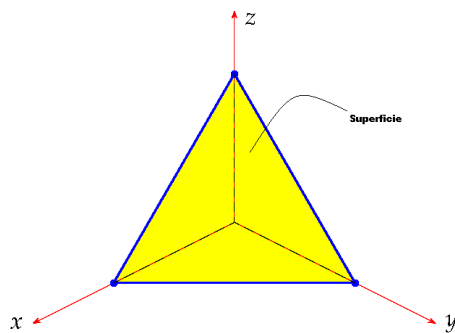


Figura 4.20

□

Ejercicio 69(b)

$$\varphi(x, y) = (x, y, 1 - x - y)$$

□

Ejercicio 69(c)

$$D = \{0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 - x\}$$

□

Ejercicio 69(d)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = (1, 0, -1) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = (0, 1, -1)$$

para tener el vector fundamental

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = (-1, 1, 1)$$

□

Ejercicio 69(e)

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\| = \sqrt{3}$$

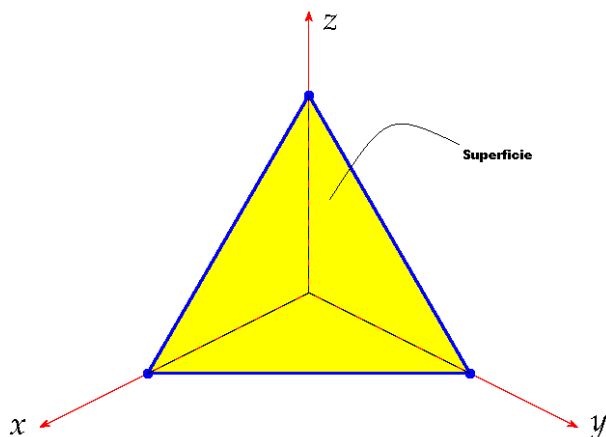
□

Ejercicio 69(f)

$$\iint_D = \int_0^1 \int_0^{1-x} \sqrt{3} \, dy \, dx = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

□

Ejercicio 70(a)



□

Ejercicio 70(b)

$$\varphi(x, y) = (x, y, 1 - x - y)$$

□

Ejercicio 70(c)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = (1, 0, -1), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = (0, 1, -1)$$

De esto,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} = (-1, 1, 1)$$

□

Ejercicio 70(d)

$$\|\vec{n}\| = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| = \sqrt{3}$$

□

Ejercicio 70(e)

$$f(\varphi(x, y)) = f(x, y, 1 - x - y) = x^2$$

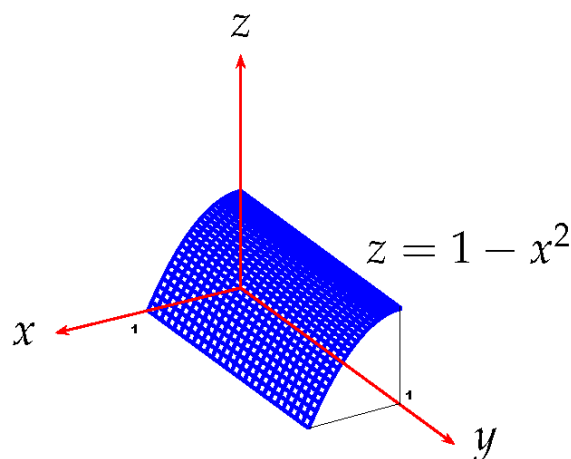
□

Ejercicio 70(f)

$$\int_S x^2 \, dS = \int_0^1 \int_0^{1-x} \sqrt{3} x^2 \, dy \, dx = \frac{\sqrt{3}}{12}$$

□

Ejercicio 71(a)


☐

Ejercicio 71(b)

$$\varphi(x, y) = (x, y, 1 - x^2)$$

☐

Ejercicio 71(c)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = (1, 0, -2x) \quad , \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = (0, 1, 0)$$

☐

Ejercicio 71(d)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} = (-2x, 0, 1)$$

☐

Ejercicio 71(e)

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\| = \sqrt{1 + 4x^2}$$

☐

Ejercicio 71(f)

$$\rho(\varphi(x, y, z)) = \rho(x, y, 1 - x^2) = x$$

☐

Ejercicio 71(g)

$$\int_S x \, dS = \int_0^1 \int_0^1 x \sqrt{1 + 4x^2} \, dy \, dx = \frac{1}{12} (5^{3/2} - 1)$$

☐

Ejercicio 72(a)

$$M \cdot \bar{x} = \int_S x f \, dS = \int_0^{1/2} \int_0^1 x \sqrt{1 + 4x^2} \, dy \, dx = \frac{1}{12} (2^{3/2} - 1)$$

☐

Ejercicio 72(b)

$$M \cdot \bar{y} = \int_S y f \, dS = \int_0^{1/2} \int_0^1 y \sqrt{1 + 4x^2} \, dy \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{1/2} \sqrt{1 + 4x^2} \, dx$$

Esta integral se resuelve con $2x = \operatorname{tg} t$, de lo cual $dx = \frac{1}{2} \sec^2 t \, dt$. Al reemplazar tenemos

$$M \cdot \bar{y} = \int_0^{1/2} \sqrt{1+4x^2} dx = \frac{1}{4} \int_0^{\pi/4} \sec^3 t = \frac{1}{8} \ln(\sec t + \operatorname{tg} t) + \frac{1}{8} \operatorname{tg} t \sec t \Big|_0^{\pi/4}$$

Después de evaluar se halla que

$$M \cdot \bar{y} = \frac{1}{8} \ln(\sqrt{2} + 1) + \frac{1}{8} \sqrt{2}$$

□

Ejercicio 72(c)

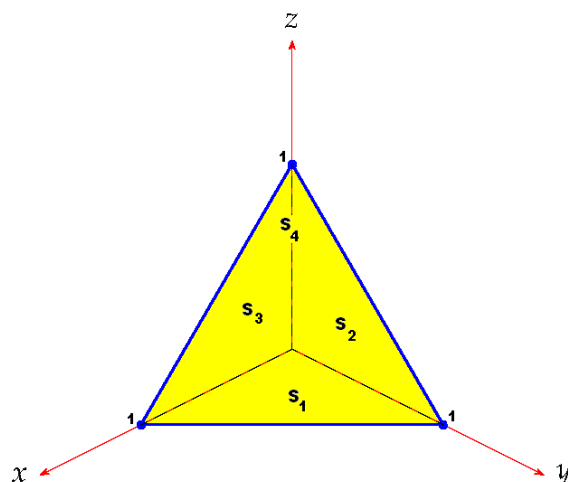
$$M \cdot \bar{z} = \int_S z f \, dS = \int_0^{1/2} \int_0^1 (1-x^2) \sqrt{1-4x^2} \, dy \, dx$$

Para cada una de éstas se tiene:

- $\int_0^{1/2} \int_0^1 \sqrt{1-4x^2} \, dy \, dx = \frac{1}{4} \ln(\sqrt{2} + 1) + \frac{1}{4} \sqrt{2}$
- $\int_0^{1/2} \int_0^1 x^2 \sqrt{1-4x^2} \, dy \, dx = \frac{1}{8} \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^2 t \sec^3 t \, dt$

□

Ejercicio 73(a)



□

Ejercicio 73(b)

$$\varphi_1(x, y) = (x, y, 0), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1-x$$

$$\varphi_2(y, z) = (0, y, z), \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1-y$$

$$\varphi_3(x, z) = (x, 0, z), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1-x$$

$$\varphi_4(x, y) = (x, y, 1-x-y), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1-x$$

□

Ejercicio 73(c)

$$\mathbf{F}(\varphi_1(x, y, 0)) = (xy, 0, 0)$$

$$\mathbf{F}(\varphi_2(0, y, z)) = (0, 0, 3yz)$$

$$\mathbf{F}(\varphi_3(x, 0, z)) = (0, 2xz, 0)$$

$$\mathbf{F}(\varphi_4(x, y, 1 - x - y)) = (xy, 2x(1 - x - y), 3y(1 - x - y))$$

□

Ejercicio 73(d)

$$\vec{n}_1 = (0, 0, -1), \quad \vec{n}_2 = (-1, 0, 0), \quad \vec{n}_3 = (0, -1, 0), \quad \vec{n}_4 = (1, 1, 1)$$

□

Ejercicio 73(e)

$$\vec{F} \cdot \vec{n}_1 = (x, y, 0) \cdot (0, 0, -1) = 0$$

$$\vec{F} \cdot \vec{n}_2 = (0, 0, 3yz) \cdot (-1, 0, 0) = 0$$

$$\vec{F} \cdot \vec{n}_3 = (0, 2xz, 0) \cdot (0, -1, 0) = -2xz$$

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot \vec{n}_4 &= (xy, 2x(1 - x - y), 3y(1 - x - y)) \cdot (1, 1, 1) \\ &= 2x - 2x^2 + 3y - 3xy - 3y^2 \end{aligned}$$

Ahora vamos por las integrales

$$\int_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\int_{S_3} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_0^1 \int_0^{1-x} (-2xz) dz dx = -\frac{1}{12}$$

$$\int_{S_4} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_0^1 \int_0^{1-x} (2x - 2x^2 + 3y - 3xy - 3y^2) dy dx = A$$

□

Ejercicio 73(f) Al sumar se tiene que

$$\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{6}$$

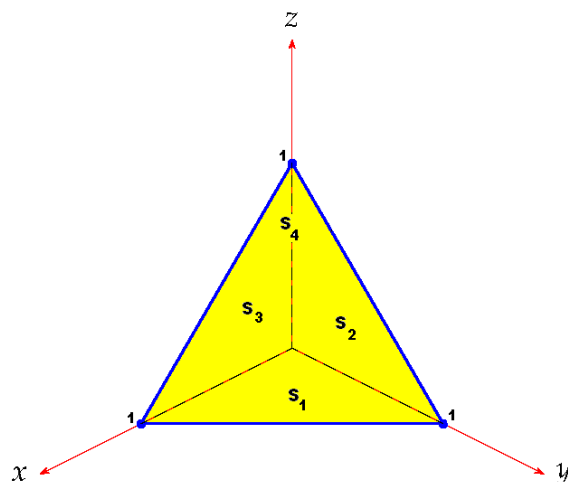
□

Ejercicio 73(g)

$$\operatorname{div} \vec{F} = y + 3y = 4y$$

□

Ejercicio 73(h)



$$\{(x, y, z) / 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 - x, \quad 0 \leq z \leq 1 - x - y\}$$

□

Ejercicio 73(i)

$$\iiint (\operatorname{div} \mathbf{F}) \, dx \, dy \, dz = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} 4y \, dz \, dy \, dx$$

□

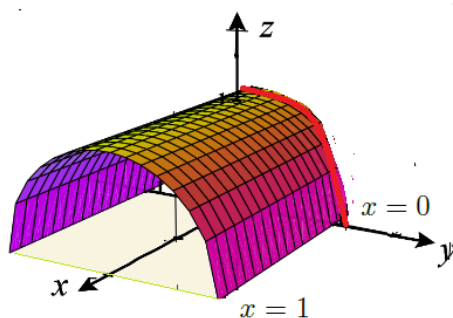
Ejercicio 73(j)

$$\iiint (\operatorname{div} \mathbf{F}) \, dx \, dy \, dz = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} 4y \, dz \, dy \, dx = \frac{1}{6}$$

El mismo resultado que el cara a cara

□

Ejercicio 74(a) La figura muestra la superficie



□

Ejercicio 74(b) Como la superficie es cerrada y el campo es de clase c^1 , el teorema de la divergencia se aplica

$$\text{flujo} = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_{V(S)} \nabla \cdot \vec{F} \, dV$$

La divergencia del campo es

$$\nabla \cdot \vec{F}(x, y, z) = 3z$$

Los límites de integración para el volumen son

$$0 \leq x \leq 1, \quad -1 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq z \leq \sqrt{1-y^2}$$

Así,

$$\begin{aligned} \text{flujo} &= \int_0^1 \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} 3z \, dz \, dy \, dx = \frac{3}{2} \int_0^1 \int_{-1}^1 (1-y^2) \, dy \, dx \\ &= \frac{3}{2} \int_0^1 \frac{4}{3} \, dx = 2 \end{aligned}$$

□

Ejercicio 74(c) El manto del cilindro se parametriza

$$\Phi(x, y) = (x, y, \sqrt{1-y^2}), \quad (x, y), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad -1 \leq y \leq 1$$

$$\Phi_x = (1, 0, 0)$$

$$\Phi_y = \left(0, 1, -\frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \right)$$

de lo cual

$$\vec{n} = \Phi_x \times \Phi_y = \left(0, \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}, 1 \right)$$

El campo en la parametrización

$$\vec{F}(\Phi(x, y)) = (0, y\sqrt{1-y^2}, 1-y^2)$$

El producto punto entre el campo evaluado en la parametrización y el vector normal es

$$\vec{F}(\phi(x, y)) \cdot \vec{n} = y^2 + 1 - y^2 = 1$$

De esta manera, el flujo es

$$\text{flujo} = \iint_D dA = \int_0^1 \int_{-1}^1 dA$$

El área del rectángulo es 2, por tanto,

$$\text{flujo} = 2$$

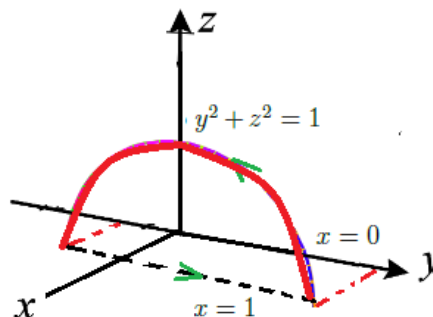
□

Ejercicio 74(d) En este problema la intersección es la que muestra la figura.

El cálculo se hace en forma directa, o también, cerrar la cuerva con la recta $x = 1, z = 0$ para $-1 \leq y \leq 1$ y aplicar Stokes, y finalmente restar la recta con la que cerró. Veamos Stokes. La parametrización de la superficie que encierra la curva y la recta de cierre es

$$\Phi(y, z) = (1, y, z); \quad -1 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq z \leq \sqrt{1-y^2}$$

El normal exterior es $\vec{n} = (1, 0, 0)$. Veamos el rotor



$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & yz & z^2 \end{vmatrix} = (-y, 0, 0)$$

Ahora, el rotor en la parametrización

$$\nabla \times \vec{F}(\Phi(y, z)) = (-y, 0, 0)$$

El producto punto

$$\nabla \times \vec{F}(\Phi(y, z)) \cdot \vec{n} = -y$$

Por tanto, la circulación que tiene la forma

$$\text{circulación} = \int_{C^+} \vec{F} \cdot d\vec{L} = \iint_D (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} dA$$

resulta ser

$$\text{circulación} = - \int_0^1 \int_0^\pi r^2 \sin \theta d\theta dr = -\frac{2}{3}$$

Ahora se resta la integral de línea sobre recta de cierre

- La parametrización de la recta es $\alpha(t) = (1, t, 0)$ con $-1 \leq t \leq 1$
- El vector velocidad es $\alpha'(t) = (0, 1, 0)$
- $\vec{F}(\alpha(t)) = (0, 0, 0)$
- $\vec{F}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) = 0$

Se concluye que

$$\int_\alpha \vec{F} \cdot d\vec{L} = \int_\alpha \vec{F}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt = 0$$

Conclusión. La integral pedida tiene el valor

$$\int_\alpha \vec{F} \cdot d\vec{L} = -\frac{2}{3}$$

□

Ejercicio 75(a) La superficie es una esfera de centro el origen del sistema. Es obvio que el $(0, 0, 0)$ se encuentra en su interior. Por tanto, según Ley de Gauss, su valor es 4π . Esto es,

$$\text{Flujo} = \int_S \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \mathbf{n} dS = 4\pi$$

□

Ejercicio 75(b) La superficie es una esfera, pero ahora, su centro es el $(0, 0, 2)$. Es evidente que el $(0, 0, 0)$ se encuentra **fuera** de la superficie. Por tanto, según Ley de Gauss, su valor es 0. Esto es,

$$\text{Flujo} = \int_S \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

□