



Universidad de La Frontera
Facultad de Ingeniería y Ciencias
Departamento de Matemática y Estadística

Matemática 2

Apuntes de curso

Temuco - Chile

Edición

Angélica Mansilla Torres
José Pablo Salamanca Ávalos

Diseño de portada

José Labrín Parra

Edición 2023

Índice general

Introducción	VII
1. Razones y funciones trigonométricas	1
1.1. Primeros conceptos	1
1.2. Razones trigonométricas en el plano cartesiano	2
1.3. Identidades y Ecuaciones trigonométricas	5
1.3.1. Identidades básicas	5
1.3.2. Otras identidades	9
1.3.3. Ecuaciones trigonométricas	11
1.4. Aplicaciones	13
1.4.1. Aplicaciones en el triángulo rectángulo	13
1.4.2. Teoremas del seno y coseno	14
1.5. Funciones trigonométricas	17
1.5.1. Gráficas de funciones trigonométricas	20
1.6. Ejercicios resueltos	22
2. Límite y continuidad	31
2.1. Límite	31
2.1.1. Definiciones previas	31
2.1.2. Límite de una función en un punto	32
2.2. Propiedades aritméticas de los límites	37
2.2.1. Forma indeterminada $\frac{0}{0}$	44
2.3. Límites laterales	45
2.4. Límites trigonométricos	50
2.5. Límites infinitos	53

2.5.1.	Forma indeterminada $\infty - \infty$.	57
2.6.	Límites al infinito	57
2.6.1.	Límites de la forma $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)}$	62
2.7.	Continuidad	65
2.7.1.	Propiedades de las funciones continuas	68
2.7.2.	Teoremas importantes de continuidad	71
2.8.	Ejercicios Resueltos	73
3.	Números complejos	79
3.1.	Primeros conceptos	79
3.1.1.	Estructura Algebraica de $\mathbb{C}$	80
3.2.	Forma polar o trigonométrica	86
3.2.1.	Potencias de un complejo	87
3.2.2.	Raíces de un número complejo	89
3.3.	Ejercicios Resueltos	91
4.	Polinomios reales en una variable	95
4.1.	Primeros conceptos	95
4.1.1.	Suma y producto de polinomios	96
4.2.	Álgebra de polinomios	98
4.3.	Divisibilidad y raíces	100
4.3.1.	Raíces de un polinomio	102
4.4.	División sintética	105
4.5.	Teorema fundamental del álgebra	109
4.6.	Ejercicios Resueltos	113
5.	Vectores, rectas y planos	117
5.1.	Primeros conceptos	117
5.1.1.	El espacio tridimensional	117
5.2.	Vectores en el espacio	120
5.2.1.	Operaciones con vectores	121
5.2.2.	Producto escalar o producto punto.	123
5.2.3.	Producto cruz	126
5.3.	Rectas y planos en el espacio	127
5.3.1.	Rectas en $\mathbb{R}^3$	127
5.3.2.	Planos	131
5.4.	Aplicaciones físicas de los vectores	134
5.4.1.	Trabajo	135
5.5.	Ejercicios Resueltos	136
6.	Matrices	141
6.1.	Primeros conceptos	141
6.2.	Operaciones con matrices	144
6.2.1.	Suma de matrices	144

6.2.2.	Ponderación de una matriz por un escalar	145
6.2.3.	Producto de matrices	147
6.2.4.	Potencias de una matriz	150
6.3.	Matrices especiales	151
6.3.1.	Matriz Transpuesta	153
6.4.	Matriz inversa	154
6.4.1.	Propiedades de la matriz inversa	156
6.5.	Ecuaciones matriciales	157
6.6.	Transformaciones elementales	158
6.7.	Matriz escalonada	159
6.7.1.	Otra forma de hallar la matriz inversa	161
6.8.	Ejercicios Resueltos	163
7.	Sistemas de ecuaciones lineales	167
7.1.	Primeros conceptos	167
7.2.	Forma matricial de un sistema	168
7.3.	Resolución de sistemas de ecuaciones lineales	169
7.3.1.	Método de reducción Gaussiana	169
7.3.2.	Método de reducción de Gauss-Jordan	170
7.4.	Tipos de sistemas, según la cantidad de soluciones	173
7.4.1.	Sistemas sin solución	173
7.4.2.	Sistemas con solución	174
7.5.	Sistemas homogéneos	177
7.6.	Ejercicios Resueltos	179

Introducción

El Departamento de Matemática y Estadística tiene una larga tradición preparando textos de apoyo para sus distintas asignaturas. El primer apunte de curso con contenidos básicos fue preparado por docentes del departamento en el año 1989. Desde entonces, distintos equipos han preparado, revisado y actualizado el material, según las necesidades y ajustes curriculares.

Es así como este nuevo texto, el tercero de la serie 2023, recoge en buena medida el material entregado en las versiones anteriores, y tiene como objetivo principal acompañarte en la revisión de los contenidos de las asignaturas correspondientes al segundo bimestre que cursarás al iniciar tus estudios en alguno de los programas de ingeniería civil de nuestra institución.

Los contenidos que en este texto desarrollamos son los correspondientes a las asignaturas de **Álgebra** y **Precálculo II**. En cada tema encontrarás ejercicios resueltos. De seguro será una fuente de consulta a la que podrás acceder rápidamente cuando tengas alguna duda o al preparar tus asignaturas de matemática del segundo bimestre.

Estimada y estimado estudiante ponemos este texto a tu disposición con la íntima esperanza de que te sea de ayuda y orientación en tu formación inicial.

Te deseamos mucho éxito en esta nueva etapa de tu vida, pero también te recordamos que solo se logra el éxito si hay trabajo, esfuerzo y dedicación.

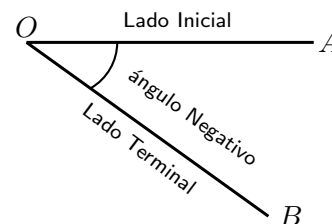
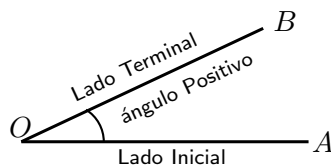
Hernán Burgos V.
Director Académico CAMVIT

Elena Olivos H.
Directora Departamento
Matemática y Estadística

Razones y funciones trigonométricas

1.1 Primeros conceptos

Un ángulo se define, generalmente, como la abertura que hay entre dos semirectas que parten de un punto en común llamado **vértice**. La medida del ángulo corresponde a la magnitud de la rotación necesaria para llevar una de las semirectas a la otra. Esta medida puede ser positiva o negativa, dependiendo del sentido de la rotación. Si el sentido es antihorario, el ángulo se considera positivo. Si el sentido es horario, el ángulo se considera negativo.

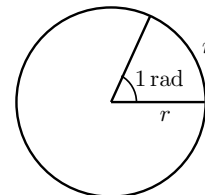


Podemos medir la distancia que hay a lo largo de una línea recta con diferentes unidades de longitud (centímetros, pulgadas, pie, etc). De la misma forma existen varias maneras de medir los ángulos, los más comunes son grados sexagesimales y radianes.

La medición de los ángulos en grados es la más conocida, método heredado de los Babilonios, quienes utilizaron un sistema de numeración basado en grupos de 60, dividiendo el círculo en 360 partes iguales y a cada una de ellas la llamaron grado.

Definición 1.1.1 (Radián)

Un radián (rad) es la medida de un ángulo del centro de un círculo cuyos lados intersectan un arco de circunferencia de longitud igual al radio.



Como la longitud de la circunferencia es $L = 2\pi r$, si $r = 1$ tenemos que 2π rad equivale a 360° , de donde $1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi}$ y $1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$.

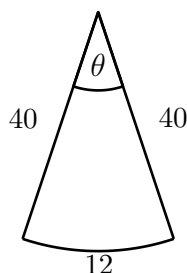
El lector demostrará sin dificultad que si s es un arco de circunferencia y α representa la medida en radianes del ángulo del centro, entonces $s = \alpha r$.

Ejemplo 1.1.2

El extremo de un péndulo de 40 cm. describe un arco de 12 cm. En qué ángulo oscila el péndulo?.

Solución

En el diagrama vemos la oscilación del péndulo.



Como $r = 40$ y $s = 12$, se tiene que

$$12 = \theta \cdot 40$$

$$\theta = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}$$

Por lo tanto, el péndulo oscila con un ángulo de $\frac{3}{10}$ rad.

1.2 Razones trigonométricas en el plano cartesiano

Consideremos la circunferencia de radio 1 centrada en el origen, cuya ecuación está dada por $x^2 + y^2 = 1$, como se muestra en la figura 1.1.

Diremos que el ángulo AOP está en **posición canónica**, si su lado inicial OA coincide con el eje X positivo y su vértice está en el origen.

Designaremos con α el ángulo AOP medido en radianes.

Entonces, se tiene que $s = \alpha$.

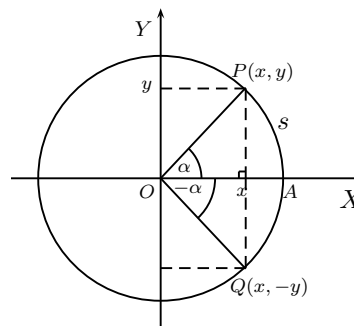


Figura 1.1: Circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.

Para cualquier valor de α definimos la razón trigonométrica **seno de α** como la segunda coordenada del punto $P(x, y)$ y la razón trigonométrica **coseno de α** como la primera coordenada del punto.

Así,

$$\text{sen } \alpha = y \quad \text{y} \quad \text{cos } \alpha = x$$

Existen otras cuatro razones trigonométricas, llamadas **tangente**, **cotangente**, **secante** y **cosecante**, definidas como:

$$1. \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$$

$$3. \operatorname{sec} \alpha = \frac{1}{x} = \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$2. \operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y} = \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}$$

$$4. \operatorname{csc} \alpha = \frac{1}{y} = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}$$

Como el punto P se mueve sobre la circunferencia y $2\pi \text{ rad}$ es la medida del ángulo completo, entonces:

$$\operatorname{sen}(\alpha + 2\pi) = \operatorname{sen}(\alpha + 2k\pi) = \operatorname{sen} \alpha, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Lo mismo ocurre para las otras razones trigonométricas.

Además, al observar el punto Q en la figura 1.1, se puede deducir que:

$$\operatorname{sen}(-\alpha) = -y = -\operatorname{sen} \alpha \quad \text{y} \quad \cos(-\alpha) = x = \cos \alpha$$

Así, es fácil ver que las otras razones trigonométricas, satisfacen:

$$1. \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

$$3. \operatorname{sec}(-\alpha) = \operatorname{sec} \alpha$$

$$2. \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$$

$$4. \operatorname{csc}(-\alpha) = -\operatorname{csc} \alpha$$

En la figura 1.2 consideramos una circunferencia unitaria y además, los triángulos OQP y OAB semejantes¹,

así

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{QP}}{\overline{OP}} \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \frac{y}{1} \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}}$$

y

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} \Rightarrow \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{x}{1} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}$$

Esto prueba que las razones trigonométricas dependen solo del tamaño del ángulo y no del tamaño del triángulo.

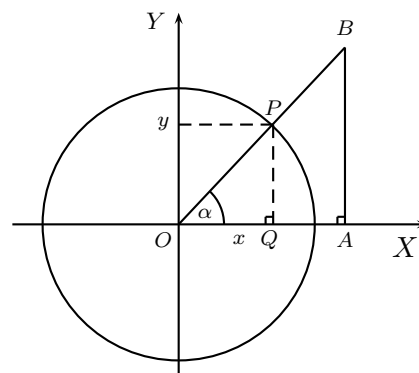


Figura 1.2: Triángulos semejantes

Si consideramos el triángulo rectángulo OAB y α el ángulo agudo de dicho triángulo de la figura 1.2, podemos definir las **razones trigonométricas** como el **cuociente entre las longitudes de los lados** del triángulo:

¹Los lados correspondientes de triángulos semejantes son proporcionales

1. **Seno del ángulo α ,**

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Hipotenusa}}.$$

2. **Coseno del ángulo α ,**

$$\operatorname{cos} \alpha = \frac{\text{Cateto Adyacente}}{\text{Hipotenusa}}.$$

3. **Tangente del ángulo α ,**

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Cateto Adyacente}}.$$

4. **Cotangente del ángulo α ,**

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\text{Cateto Adyacente}}{\text{Cateto Opuesto}}.$$

5. **Secante del ángulo α ,**

$$\operatorname{sec} \alpha = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto Adyacente}}.$$

6. **Cosecante del ángulo α ,**

$$\operatorname{csc} \alpha = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto Opuesto}}.$$

Ejemplo 1.2.1

El triángulo ABC es rectángulo en C . Determinar $\operatorname{sen} \beta$ si $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{2}$.

Solución

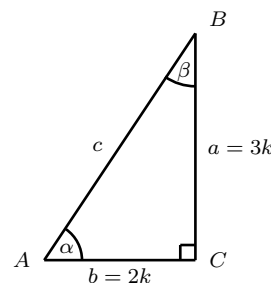
Como $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{2}$, podemos decir que el cateto opuesto y el cateto adyacente al ángulo α miden $3k$ y $2k$, donde $k \in \mathbb{R}$, respectivamente.

Para calcular $\operatorname{sen} \beta$, necesitamos conocer la hipotenusa del triángulo rectángulo, para lo cual podemos utilizar el teorema de Pitágoras.

$$c^2 = 9k^2 + 4k^2 \Rightarrow c = \sqrt{13}k$$

así,

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{2k}{\sqrt{13}k} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$$



De la definición de las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo, podemos conocer las razones trigonométricas de algunos ángulos especiales.

Si consideramos un triángulo equilátero de lado $2a$ (o simplemente 2, ya que todos los triángulos equiláteros son semejantes) y se traza la altura desde uno de sus vértices podemos calcular el valor de las razones trigonométricas de $\frac{\pi}{6}$ y $\frac{\pi}{3}$ radianes². De igual forma, con un triángulo isósceles rectángulo con catetos de longitud a determinamos el valor de las razones trigonométricas de $\frac{\pi}{4}$ radianes.

²La altura trazada desde un vértice C en un triángulo equilátero dimidia al lado opuesto y bisecta al ángulo que se encuentra en el vértice C

Por otra parte, utilizando la circunferencia unitaria encontramos los valores de las razones trigonométricas para 0 , $\frac{\pi}{2}$, π y $\frac{3\pi}{2}$. Todo esto se resume en la siguiente tabla:

Razón \ ángulo	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$	0	$\nexists$
$\cot \alpha$	$\nexists$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\nexists$	0
$\sec \alpha$	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	$\nexists$	-1	$\nexists$
$\csc \alpha$	$\nexists$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1	0	1

1.3 Identidades y Ecuaciones trigonométricas

Una igualdad donde intervengan razones trigonométricas puede ser verdadera para todo valor del ángulo o sólo para algunos. En el primer caso tenemos una **identidad trigonométrica** la que debe ser demostrada y en el segundo caso una **ecuación trigonométrica** que debe ser resuelta, es decir, encontrar todos los valores del ángulo que la satisfacen.

1.3.1 Identidades básicas

De la definición de razones trigonométricas se deducen las siguientes identidades fundamentales:

(a) $\sin \alpha \cdot \csc \alpha = 1$.

(d) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

(b) $\cos \alpha \cdot \sec \alpha = 1$.

(e) $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$.

(c) $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$.

(f) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

La expresión (a) indica que $\sin \alpha$ y $\csc \alpha$ son razones recíprocas, lo mismo ocurre con las parejas $\cos \alpha$, $\sec \alpha$ y $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$. De todo esto se deduce que basta con conocer el $\sin \alpha$ y $\cos \alpha$ para tener el valor de las restantes razones trigonométricas.

Si la identidad (f) se divide por $\cos^2 \alpha \neq 0$, obtenemos

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha$$

y nuevamente dividiendo la identidad (f) por $\sin^2 \alpha \neq 0$, resulta

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \csc^2 \alpha.$$

Observación 1.3.1

Para demostrar una identidad trigonométrica, se transforma uno de los miembros de la igualdad (cualquiera de los dos) en el otro, utilizando propiedades algebraicas y las identidades básicas dadas anteriormente. Generalmente, es más fácil comenzar por el lado más complicado.

Ejemplo 1.3.2

Demostrar que $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sec \alpha - 1} + \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sec \alpha + 1} = 2 \operatorname{ctg} \alpha \sec \alpha$.

Solución

En efecto

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sec \alpha - 1} + \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sec \alpha + 1} &= \operatorname{tg} \alpha \left[\frac{1}{\sec \alpha - 1} + \frac{1}{\sec \alpha + 1} \right] \\ &= \operatorname{tg} \alpha \left[\frac{\sec \alpha + 1 + \sec \alpha - 1}{\sec^2 \alpha - 1} \right] \\ &= 2 \operatorname{tg} \alpha \left[\frac{\sec \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha} \right] \\ &= 2 \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \cdot \sec \alpha \\ &= 2 \operatorname{ctg} \alpha \sec \alpha. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.3.3

Demostrar que $\sec^2 \phi \csc^2 \phi = (\operatorname{tg} \phi + \operatorname{ctg} \phi)^2$.

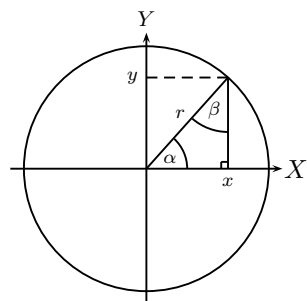
Solución

En efecto

$$\begin{aligned} (\operatorname{tg} \phi + \operatorname{ctg} \phi)^2 &= \operatorname{tg}^2 \phi + 2 \operatorname{tg} \phi \operatorname{ctg} \phi + \operatorname{ctg}^2 \phi \\ &= \operatorname{tg}^2 \phi + 2 + \operatorname{ctg}^2 \phi \\ &= \operatorname{tg}^2 \phi + 1 + 1 + \operatorname{ctg}^2 \phi \\ &= \sec^2 \phi + \csc^2 \phi \\ &= \frac{1}{\cos^2 \phi} + \frac{1}{\sin^2 \phi} \\ &= \frac{\sin^2 \phi + \cos^2 \phi}{\cos^2 \phi \sin^2 \phi} \\ &= \frac{1}{\cos^2 \phi \sin^2 \phi} \\ &= \sec^2 \phi \csc^2 \phi \end{aligned}$$

De la figura adjunta, se tiene que $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, de donde $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, lo que satisface las siguientes igualdades conocidas como **cofunciones**³.

- (a) $\sin \alpha = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)$ (d) $\cotg \alpha = \tg \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)$
(b) $\cos \alpha = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)$ (e) $\sec \alpha = \csc \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)$
(c) $\tg \alpha = \cotg \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)$ (f) $\csc \alpha = \sec \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)$



De la definición de razón trigonométrica, no es difícil ver que los signos de las razones trigonométricas varían dependiendo del cuadrante en que se encuentre el lado terminal del ángulo considerado, en su posición canónica.

En la siguiente tabla se resume lo anterior.

Cuadrante Razón	I	II	III	IV
Seno	+	+	−	−
Coseno	+	−	−	+
Tangente	+	−	+	−
Cotangente	+	−	+	−
Secante	+	−	−	+
Cosecante	+	+	−	−

Ejemplo 1.3.4

Si $\sin \alpha = \frac{12}{13}$ y $\tg \alpha < 0$, determine los valores de las razones trigonométricas restantes.

Solución

Como $\sin \alpha > 0$ y $\tg \alpha < 0 \Rightarrow \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi \right)$. Usando la identidad: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ tenemos:

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{12}{13} \right)^2} = \pm \sqrt{\frac{169 - 144}{13^2}} = \pm \frac{5}{13},$$

pero la razón coseno es negativa en el segundo cuadrante, por lo cual, $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$.

³Esto se debe a que a las razones trigonométricas también se les considera como funciones trigonométricas

Por otro lado, sabemos que $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{12}{5}$. Ahora las razones recíprocas:

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = -\frac{13}{5}, \quad \csc \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{13}{12}, \quad \operatorname{ctg}(\alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = -\frac{5}{12}.$$

Es posible conocer el valor de las razones trigonométrica de ciertos ángulos escritos como suma o resta de ciertos ángulos conocidos. Este proceso se llama **reducción** y se resumen en la siguiente proposición.

Proposición 1.3.5

1. Las razones trigonométricas de $\frac{\pi}{2}$ y $\frac{3\pi}{2}$ más o menos un ángulo agudo son iguales a la cofunción del ángulo agudo, con el signo que le corresponde a la razón trigonométrica en el cuadrante al que pertenece el ángulo original.
2. Las razones trigonométricas de π y 2π más o menos un ángulo agudo son iguales a la misma razón del ángulo agudo, con el signo que le corresponde a la razón en el cuadrante al que pertenece el ángulo original.

El siguiente ejemplo ilustra como calcular razones trigonométricas usando la proposición anterior.

Ejemplo 1.3.6

Calcular el valor de $\operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{3} \right)$, $\operatorname{tg} \left(\frac{4\pi}{3} \right)$, $\cos \left(\frac{7\pi}{6} \right)$, $\operatorname{ctg} \left(\frac{7\pi}{4} \right)$

Solución

- Usando la parte 1 de la proposición 1.3.5, se tiene

$$\operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{3} \right) = \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \right) = + \cos \left(\frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Por otro lado, si usamos la parte 2 de la proposición 1.3.5, tenemos

$$\operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{3} \right) = \operatorname{sen} \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) = \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{3} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

- $\operatorname{tg} \left(\frac{4\pi}{3} \right) = \operatorname{tg} \left(\pi + \frac{\pi}{3} \right) = + \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{3} \right) = \sqrt{3}.$
- $\cos \left(\frac{7\pi}{6} \right) = \cos \left(\pi + \frac{\pi}{6} \right) = - \cos \left(\frac{\pi}{6} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$
- $\operatorname{ctg} \left(\frac{7\pi}{4} \right) = \operatorname{ctg} \left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = - \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} \right) = -1.$

1.3.2 Otras identidades

Como ya conocemos las identidades básicas, en la proposición siguiente presentamos un listado de otras identidades que son de uso frecuente en varias áreas de la matemática.

Proposición 1.3.7

Tenemos las siguientes identidades trigonométricas,

$$1. \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha.$$

$$2. \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \beta \sin \alpha.$$

$$3. \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}.$$

$$4. \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha.$$

$$5. \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \beta \sin \alpha.$$

$$6. \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}.$$

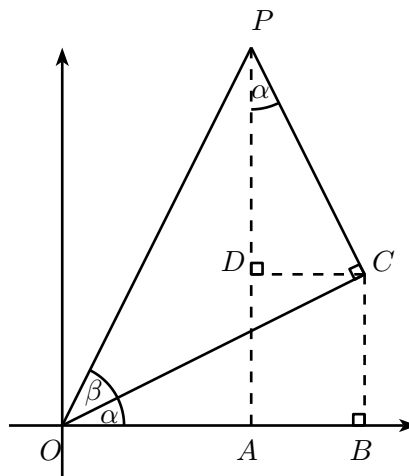
DEMOSTRACIÓN.

Demostraremos solo para el caso $0 < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$. Si $\alpha + \beta > \frac{\pi}{2}$, se necesitan algunas herramientas adicionales para la demostración, las que se verán más adelante.

De la figura se puede ver fácilmente que los triángulos OBC y PDC son semejantes. Luego, utilizando los lados de los triángulos rectángulos, se obtiene

$$\begin{aligned} 1. \sin(\alpha + \beta) &= \frac{\overline{AP}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{AD} + \overline{DP}}{\overline{OP}} \\ &= \frac{\overline{BC}}{\overline{OP}} + \frac{\overline{DP}}{\overline{OP}} \\ &= \frac{\overline{BC}}{\overline{OC}} \cdot \frac{\overline{OC}}{\overline{OP}} + \frac{\overline{DP}}{\overline{CP}} \cdot \frac{\overline{CP}}{\overline{OP}} \\ &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \cos(\alpha + \beta) &= \frac{\overline{OA}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OB} - \overline{AB}}{\overline{OP}} \\ &= \frac{\overline{OB}}{\overline{OP}} - \frac{\overline{DC}}{\overline{OP}} \\ &= \frac{\overline{OB}}{\overline{OC}} \cdot \frac{\overline{OC}}{\overline{OP}} - \frac{\overline{DC}}{\overline{CP}} \cdot \frac{\overline{CP}}{\overline{OP}} \\ &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 3. \operatorname{tg}(\alpha + \beta) &= \frac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta} \cdot \frac{\frac{1}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{1}{\cos \alpha \cos \beta}} \\
 &= \frac{\frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\cos \alpha \operatorname{sen} \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} - \frac{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} \\
 &= \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}
 \end{aligned}$$

Para demostrar las identidades 4, 5 y 6 escribimos $\alpha - \beta$ como $\alpha + (-\beta)$ y usamos las identidades 1, 2 y 3, según corresponda. ■

Si en la proposición 1.3.7 reemplazamos β por α , obtenemos las siguientes identidades:

Proposición 1.3.8

1. $\operatorname{sen}(2\alpha) = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha.$
2. $\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1.$
3. $\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}.$

Ejemplo 1.3.9

Demostrar que

$$\operatorname{sen}(4\alpha) \cos(\alpha) - \operatorname{sen}(3\alpha) \cos(2\alpha) = \operatorname{sen} \alpha \cos(2\alpha).$$

Solución

En efecto, observemos que:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{sen}(4\alpha) \cos(\alpha) &= \operatorname{sen}(3\alpha + \alpha) \cos(\alpha) \\
 &= [\operatorname{sen}(3\alpha) \cos(\alpha) + \cos(3\alpha) \operatorname{sen}(\alpha)] \cos(\alpha) \\
 &= \operatorname{sen}(3\alpha) \cos^2(\alpha) + \cos(3\alpha) \operatorname{sen}(\alpha) \cos(\alpha).
 \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
 \operatorname{sen}(3\alpha) \cos(2\alpha) &= \operatorname{sen}(3\alpha) [\cos^2(\alpha) - \operatorname{sen}^2(\alpha)] \\
 &= \operatorname{sen}(3\alpha) \cos^2(\alpha) - \operatorname{sen}(3\alpha) \operatorname{sen}^2(\alpha).
 \end{aligned}$$

Reemplazando en la identidad tenemos:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{sen}(4\alpha) \cos(\alpha) - \operatorname{sen}(3\alpha) \cos(2\alpha) &= \operatorname{sen}(3\alpha) \cos^2(\alpha) + \cos(3\alpha) \operatorname{sen}(\alpha) \cos(\alpha) \\
 &\quad - [\operatorname{sen}(3\alpha) \cos^2(\alpha) - \operatorname{sen}(3\alpha) \operatorname{sen}^2(\alpha)] \\
 &= [\cos(3\alpha) \cos \alpha + \operatorname{sen}(3\alpha) \operatorname{sen}(\alpha)] \operatorname{sen}(\alpha) \\
 &= \cos(3\alpha - \alpha) \operatorname{sen}(\alpha) = \cos(2\alpha) \operatorname{sen}(\alpha).
 \end{aligned}$$

1.3.3 Ecuaciones trigonométricas

Para resolver una ecuación trigonométrica no existe un método general, pero siempre es conveniente expresar la igualdad en términos de una misma razón trigonométrica y un solo tipo de ángulo, si es posible. Dependiendo de la ecuación será necesario factorizar, extraer raíz o elevar a alguna potencia, por lo cual, siempre debe verificarse las soluciones encontradas.

Ejemplo 1.3.10

En el intervalo $[0, 2\pi)$ resolver la ecuación $\cos x - \cos 2x = 0$.

Solución.

Escribiendo la ecuación en ángulos simples y en términos del coseno tenemos:

$$\begin{aligned} 2 \cos^2 x - \cos x - 1 &= 0 \\ (2 \cos x + 1)(\cos x - 1) &= 0 \\ \cos x &= \frac{-1}{2} \quad \text{ó} \quad \cos x = 1 \end{aligned}$$

luego,

$$\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \qquad \cos x = 1 \Rightarrow x = 0, 2\pi$$

Tenemos el conjunto solución: $S = \left\{0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$.

Ejemplo 1.3.11

En el intervalo $[0, 2\pi)$ resolver $2 \cos^2 x + \sin x = 1$.

Solución.

Usando identidades trigonométricas tenemos que:

$$2(1 - \sin^2 x) + \sin x = 1 \Rightarrow 2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0.$$

Usando el cambio de variables $y = \sin x$ obtenemos la ecuación cuadrática $2y^2 - y - 1 = 0$, con lo cual tenemos dos posibilidades que $y = 1$ o $y = -\frac{1}{2}$.

Luego,

$$\begin{aligned} \sin x = 1 &\Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \\ \sin x = -\frac{1}{2} &\Rightarrow x = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}. \end{aligned}$$

Es decir, tenemos por conjunto solución: $S = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$.

Ejemplo 1.3.12

Encontrar todos los valores de $x \in [0, 2\pi)$ para los cuales:

$$4 \operatorname{sen}^2 x \cos x - 3 = 3 \cos x - 4 \operatorname{sen}^2 x.$$

Solución

Notamos que

$$4 \operatorname{sen}^2 x \cos x - 3 = 3 \cos x - 4 \operatorname{sen}^2 x, \quad x \in [0, 2\pi),$$

es equivalente a

$$4 \operatorname{sen}^2 x \cos x + 4 \operatorname{sen}^2 x - 3 - 3 \cos x = 0, \quad x \in [0, 2\pi).$$

Factorizando obtenemos que

$$4 \operatorname{sen}^2 x (\cos x + 1) - 3(1 + \cos x) = 0, \quad x \in [0, 2\pi).$$

Volviendo a factorizar, obtenemos

$$(4 \operatorname{sen}^2 x - 3)(\cos x + 1) = 0, \quad x \in [0, 2\pi).$$

Por lo tanto

$$4 \operatorname{sen}^2 x - 3 = 0, \quad \vee \quad \cos x + 1 = 0, \quad x \in [0, 2\pi)$$

Por una parte, tenemos:

$$4 \operatorname{sen}^2 x - 3 = 0$$

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{3}{4}$$

Esto implica que

$$\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \vee \quad \operatorname{sen} x = \frac{-\sqrt{3}}{2}, \quad x \in [0, 2\pi)$$

Nuevamente resolveremos cada ecuación por separado, para luego unir las soluciones

$$\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \quad \vee \quad x = \frac{2\pi}{3}.$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \frac{4\pi}{3} \quad \vee \quad x = \frac{5\pi}{3}.$$

Por otra parte,

$$\cos x + 1 = 0$$

$$\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi.$$

El conjunto solución de la ecuación original es $S = \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right\}$

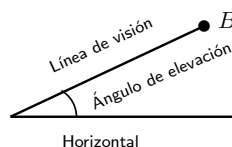
1.4 Aplicaciones

Para resolver problemas relacionados con trigonometría debemos leer cuidadosamente e interpretar los datos de manera adecuada, realizando una figura que concuerde con la información dada.

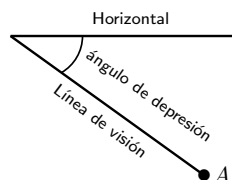
1.4.1 Aplicaciones en el triángulo rectángulo

Dentro de las aplicaciones importantes en un triángulo rectángulo, están aquellas que tienen que ver con el ángulo de elevación y el ángulo de depresión.

El **ángulo de elevación** está formado por la horizontal y la línea de visión a un objeto ubicado en el punto B sobre la horizontal.



El **ángulo de depresión** está determinado por la recta horizontal y la línea de visión a un objeto ubicado en el punto A que está por debajo de la horizontal.



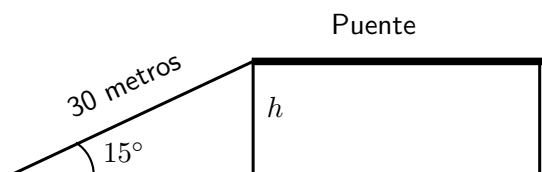
Ejemplo 1.4.1

El ángulo de elevación de una rampa de 30 metros que lleva a un puente sobre una autopista es de 15 grados. Determinar la altura del puente a la autopista.

Solución

Llamaremos h a la medida de la altura del puente a la autopista. Como se forma un triángulo rectángulo cuya hipotenusa conocemos, se tiene que

$$\text{sen } 15^\circ = \frac{h}{30} \Rightarrow h = 30 \text{ sen } 15^\circ \approx 7,76$$



Luego la altura es aproximadamente 7,8 metros.

Ejemplo 1.4.2

Desde la parte más alta de un edificio de 10 mt de altura, se observan dos autos estacionados en una misma calle, con ángulos de depresión de $\frac{\pi}{6}$ y $\frac{\pi}{3}$. Hallar la distancia entre los autos.

Solución

Sean x : la distancia entre los dos autos e y : la distancia de la base del edificio al auto más cercano.

Del diagrama obtenemos que:

$$\tan \frac{\pi}{6} = \frac{10}{x+y} \Rightarrow x+y = 10\sqrt{3}$$

Además,

$$\tan \frac{\pi}{3} = \frac{10}{y} \Rightarrow y = \frac{10}{\sqrt{3}}$$

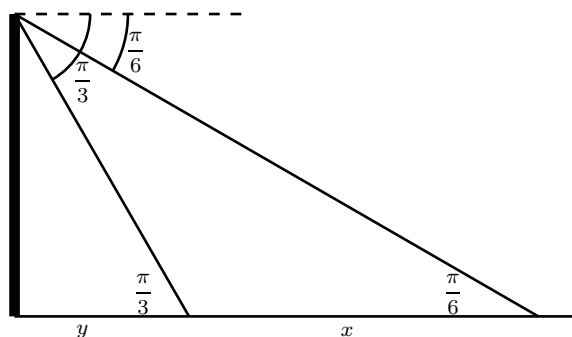
Reemplazando el valor de y , se tiene

$$x = 10\sqrt{3} - \frac{10}{\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{20}{\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{20\sqrt{3}}{3}$$

Por lo tanto, la distancia entre los autos es $\frac{20\sqrt{3}}{3}$ metros.



1.4.2 Teoremas del seno y coseno

Para los siguientes resultados consideremos un triángulo ABC cualquiera de lados $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ y $\overline{BC} = a$:

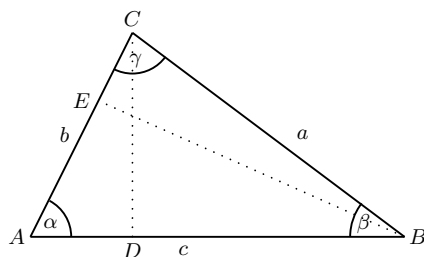


Figura 1.3: Triángulo ABC cualquiera.

Teorema 1.4.3: Ley de los senos

En todo triángulo los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos. Es decir,

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

DEMOSTRACIÓN.

En la Figura 1.3 sean $\overline{CD}$ y $\overline{BE}$ alturas correspondientes a los vértices C y B respectivamente. Luego, tenemos:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\overline{CD}}{b} \Rightarrow \overline{CD} = b \operatorname{sen} \alpha,$$

y

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{\overline{CD}}{a} \Rightarrow \overline{CD} = a \operatorname{sen} \beta,$$

de donde concluimos:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen} \beta}.$$

Razonando de igual forma con la altura $\overline{BE}$ y los ángulos α y γ obtenemos:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{c}{\operatorname{sen} \gamma},$$

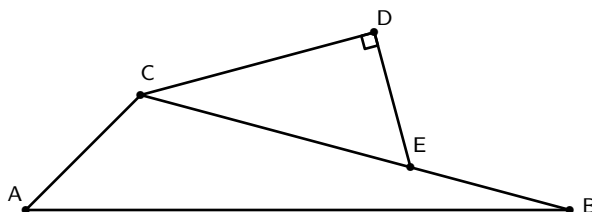
y por tanto, se concluye la afirmación del teorema. ■

Ejemplo 1.4.4

De acuerdo a la figura y sabiendo que $\angle ABC = 15^\circ$, $\angle BAC = 45^\circ$, $\angle ECD = 30^\circ$, $\overline{AB} = 9$ y que $\overline{CD} = 4$.

1. Calcule $\overline{BC}$.

2. Calcule $\overline{BE}$.

**Solución**

1. Sabiendo que $\angle ACB = 120$ usamos el teorema del seno:

$$\begin{aligned} \frac{9}{\operatorname{sen}(120^\circ)} &= \frac{\overline{BC}}{\operatorname{sen}(45^\circ)} \\ \frac{9}{\frac{\sqrt{3}}{2}} &= \frac{\overline{BC}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \end{aligned}$$

Despejando $\overline{BC}$ se obtiene que $\overline{BC} = 3\sqrt{6}$

2. Sabiendo que $\angle ECD = 30$ y que el triángulo ECD es rectángulo, se tiene que:

$$\cos(30^\circ) = \frac{\overline{CD}}{\overline{CE}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4}{\overline{EC}}$$

Despejando $\overline{EC}$ se obtiene que $\overline{EC} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$ Finalmente

$$\overline{BE} = \overline{BC} - \overline{EC} = 3\sqrt{6} - \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

Teorema 1.4.5: Ley de los cosenos

En todo triángulo el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos menos el doble producto de éstos por el coseno del ángulo comprendido por ellos. Es decir,

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha, \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta, \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma. \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN.

Mostremos la primera de las afirmaciones. De la Figura 1.3 tenemos que:

$$\begin{aligned} a^2 &= \overline{CD}^2 + \overline{BD}^2 \\ b^2 &= \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2. \end{aligned}$$

Restando estas igualdades obtenemos:

$$a^2 - b^2 = \overline{DB}^2 - \overline{AD}^2.$$

Pero, $\overline{BD} = c - \overline{AD}$, además, del $\triangle ADC$ tenemos que $\overline{AD} = b \cos \alpha$ lo que sustituido en la igualdad anterior resulta:

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= c^2 - 2c \cdot \overline{AD} \\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \end{aligned}$$

■

Ejemplo 1.4.6

Dos automóviles A y B salen de la ciudad FMC al mismo tiempo y circulan por carreteras rectas que difieren $\frac{2\pi}{3}$ radianes en dirección. Si viajan a 88 y 72 kilómetros por hora respectivamente. ¿Cuál es la distancia aproximada entre los automóviles A y B al cabo de 45 minutos?

Solución

Sea x la distancia en kilómetro entre los automóviles A y B .

Si el automóvil A viaja a 88 kilómetros por hora, entonces en 45 minutos ha recorrido 66 kilómetros y si el automóvil B viaja a 72 kilómetros por hora, entonces en 45 minutos ha recorrido 54 kilómetros.

Usando el teorema del coseno tenemos que

$$\begin{aligned}
 x^2 &= 66^2 + 54^2 - 2 \cdot 66 \cdot 54 \cos \frac{2\pi}{3} \\
 &= 6^2(11^2 + 9^2) - 2 \cdot 66 \cdot 54 \cdot \frac{-1}{2} \\
 &= 36 \cdot 202 + 66 \cdot 54 \\
 &= 36(202 + 99) \\
 &= 36 \cdot 301 \\
 &= 10836
 \end{aligned}$$

Luego, la distancia entre los vehículos A y B es $6\sqrt{301} \approx 103,8$ kilómetros.

1.5 Funciones trigonométricas

Función seno

Esta función está definida por $f(x) = \sin x$. Su dominio es $\mathbb{R}$ y su recorrido el intervalo $[-1, 1]$, por tanto es una función acotada. Es periódica con período 2π , es decir, $\forall k \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}$ se tiene que $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$. Sus puntos máximos se obtienen con $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ y sus puntos mínimos para $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Tiene sus ceros en $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Su gráfica es:

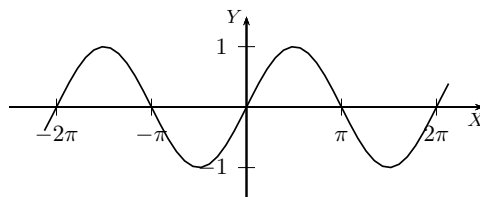


Figura 1.4: Gráfico de $f(x) = \sin x$.

En el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ la función seno es biyectiva, por tanto, invertible. Su inversa es,

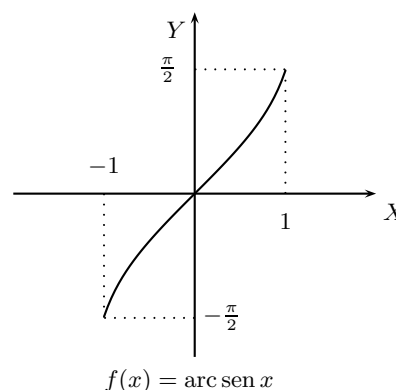
$$\begin{aligned}
 \text{arc sen} : [-1, 1] &\rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\
 x &\mapsto y = \text{arc sen } x \Leftrightarrow \sin y = x.
 \end{aligned}$$

Es evidente que,

$$\arcsen(\sen x) = x, \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\sen(\arcsen y) = y, \forall y \in [-1, 1].$$

La gráfica de la función arcoseno se muestra en la figura adjunta.



Función coseno

La función coseno se define por $f(x) = \cos x$, su dominio es todo $\mathbb{R}$ y su recorrido el intervalo $[-1, 1]$. Además es 2π -periódica, es decir, $\forall k \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}$ tenemos $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$. Sus puntos máximos están en $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ y sus puntos mínimos en $x = (2k + 1)\pi, k \in \mathbb{Z}$. Tiene sus ceros en $x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Su gráfica es:

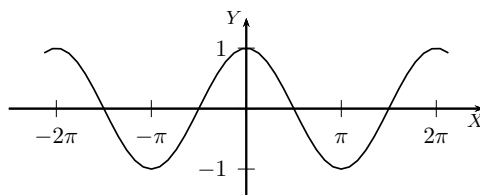


Figura 1.5: Gráfico de $f(x) = \cos x$.

En el intervalo $[0, \pi]$ la función coseno es biyectiva, su inversa es,

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

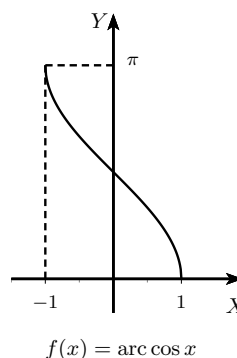
$$x \mapsto y = \arccos x \Leftrightarrow \cos y = x.$$

Es evidente que,

$$\arccos(\cos x) = x, \forall x \in [0, \pi]$$

$$\cos(\arccos y) = y, \forall y \in [-1, 1].$$

La gráfica de la función arcocoseno se muestra en la figura adjunta.



Función tangente

La función tangente se define por $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x}$, cuyo dominio es $\mathbb{R} \setminus \{(2n-1)\frac{\pi}{2} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ y su recorrido es $\mathbb{R}$. Esta función tiene período π , es decir,

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}(x + k\pi) = \operatorname{tg} x.$$

La función no es acotada, por tanto, no tiene máximos ni mínimos. Tiene asíntotas verticales en $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. Sus ceros están en $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Es siempre creciente en cada subintervalo comprendido entre las asíntotas.

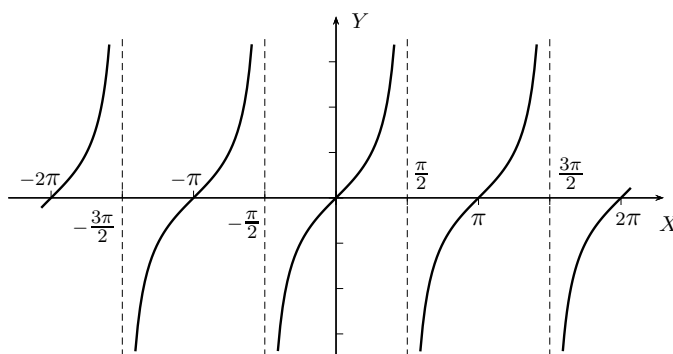


Figura 1.6: Gráfico de $f(x) = \operatorname{tg} x$.

En el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ la función tangente es biyectiva, con inversa

$$\begin{aligned} \operatorname{arc} \operatorname{tg} : \mathbb{R} &\rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ x &\mapsto y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \Leftrightarrow \operatorname{tg} y = x. \end{aligned}$$

Es evidente que, $\operatorname{arc} \operatorname{tg}(\operatorname{tg} x) = x, \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ $\operatorname{tg}(\operatorname{arc} \operatorname{tg} y) = y, \forall y \in \mathbb{R}$.

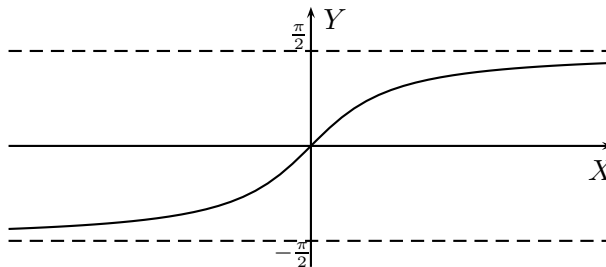


Figura 1.7: Gráfico de $f(x) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$.

Función cotangente

Esta función se define por $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$, su dominio es $\mathbb{R} \setminus \{n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$ y su recorrido es $\mathbb{R}$.

Esta función es π -periódica, es decir, $\forall k \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}$ tenemos $\operatorname{ctg}(x + k\pi) = \operatorname{ctg} x$, no es acotada, por tanto, no tiene máximos ni mínimos. Tiene asíntotas verticales en $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Sus ceros están en $x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. Es siempre decreciente en cada subintervalo comprendido entre las asíntotas.

Función secante

Esta función se define por $\sec x = \frac{1}{\cos x}$, su dominio es $\mathbb{R} \setminus \{(2n - 1)\frac{\pi}{2} \mid n \in \mathbb{Z}\}$, su recorrido es $\mathbb{R} -] - 1, 1[$.

Esta función es 2π -periódica, luego $\forall k \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}$ tenemos $\sec(x + 2k\pi) = \sec x$, no es acotada, por tanto, no tiene máximos ni mínimos en su dominio. Tiene asíntotas verticales en $x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. Es creciente y decreciente en cada subintervalo comprendido entre las asíntotas.

Función cosecante

Esta función se define por $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$, su dominio es $\mathbb{R} \setminus \{n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$ y su recorrido es $\mathbb{R} -] - 1, 1[$.

Esta función es 2π -periódica, es decir, $\forall k \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}$ tenemos $\operatorname{cosec}(x + 2k\pi) = \operatorname{cosec} x$, no es acotada, por tanto, no tiene máximos ni mínimos. Tiene asíntotas verticales en $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Es creciente y decreciente en cada subintervalo comprendido entre las asíntotas.

Para definir las funciones inversas de estas tres últimas funciones trigonométricas, debemos restringir el dominio en cada una de ellas, para que estas sean biyectivas.

1.5.1 Gráficas de funciones trigonométricas

En esta sección consideraremos gráficas de las funciones de la forma

$$y = a \operatorname{sen}(bx + c) \quad \text{e} \quad y = a \cos(bx + c) \quad \text{con } a, b, c \in \mathbb{R}$$

Lo que queremos es trazar las gráficas sin localizar muchos puntos. Para ello utilizaremos los datos relativos a las gráficas de las funciones seno y coseno que estudiamos anteriormente.

Existen tres elementos indispensables para poder interpretar los fenómenos que pueden ser modelados a través de las funciones seno y coseno.

- La **amplitud** corresponde a la máxima coordenada y , es decir, la mitad de la distancia entre el valor máximo y el valor mínimo. Se determina como $|a|$.
- El **período** T es la longitud necesaria para que la función describa un ciclo (período) completo. En este caso corresponde $T = \frac{2\pi}{|b|}$.

- El **ángulo de fase** o **desfase** D es el desplazamiento horizontal de la función y está dado por $D = -\frac{c}{b}$.

Observación 1.5.1

Se puede encontrar un intervalo que contenga exactamente un ciclo resolviendo la desigualdad

$$0 \leq bx + c \leq 2\pi$$

El punto máximo, la intersección con el eje horizontal y el punto mínimo de la función $y = a \sin(bx + c)$, donde a y b son un números reales positivo, se obtienen por

$$x_1 = -\frac{\pi - 2c}{2b}, \quad x_2 = \frac{\pi - c}{2b} \quad \text{y} \quad x_3 = \frac{3\pi - 2c}{2b}$$

respectivamente. En el caso de la función $y = a \cos(bx + c)$ los puntos x_1 , x_3 y x_2 corresponden a las intersecciones con el eje horizontal y el punto mínimo.

Observación 1.5.2

1. Si a es negativo entonces la gráfica de la función se invierte.
2. Si b es negativo se puede factorizar por -1 el argumento y utilizar la paridad o imparidad de las funciones.

Ejemplo 1.5.3

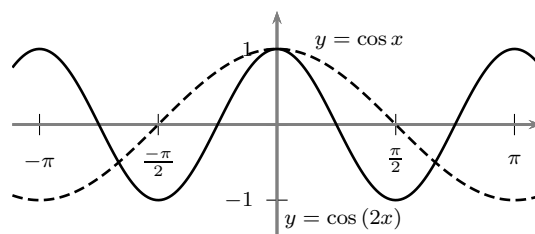
Hallar la amplitud, período y desfase de la función $y = 3 \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$. Esboce la gráfica.

Solución

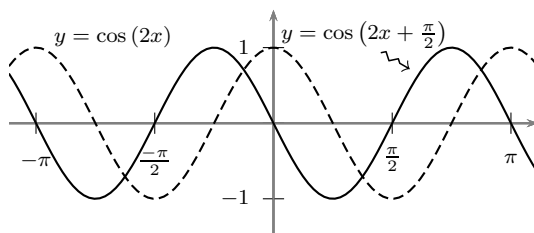
La amplitud es 3, el período $T = \pi$ y el desfase $D = -\frac{\pi}{4}$.

Graficando las funciones a partir de $y = \cos x$, se tiene:

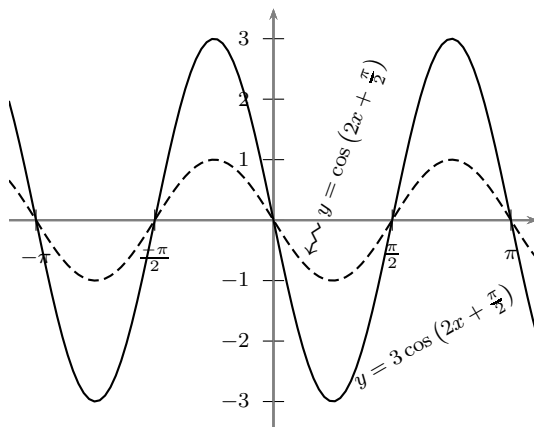
El gráfico de $y = \cos(2x)$ es una compresión de la función $y = \cos x$.



El gráfico de $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ es una traslación de la función $y = \cos(2x)$.



El gráfico de $y = 3 \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ es un alargamiento de la función $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$.



1.6 Ejercicios resueltos

1. Si $\sin x = a > 0$ y $\frac{\pi}{2} < x < \pi$. Determinar el valor de

$$\frac{\sin\left(\frac{7\pi}{2} - x\right)}{4 \operatorname{tg}(6\pi + x) + 4 \csc\left(x - \frac{5\pi}{2}\right)}$$

Solución

Usando las cofunciones, se tiene que

$$\sin\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) = -\cos x, \quad \operatorname{tg}(6\pi + x) = \operatorname{tg} x, \quad \csc\left(x - \frac{5\pi}{2}\right) = -\sec x$$

Reemplazando en la expresión, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\sin\left(\frac{7\pi}{2} - x\right)}{4 \operatorname{tg}(6\pi + x) + 4 \csc\left(x - \frac{5\pi}{2}\right)} &= \frac{-\cos x}{4 \operatorname{tg} x - 4 \sec x} \\ &= \frac{-\cos^2 x}{4 \sin x - 4} \\ &= \frac{\sin^2 x - 1}{4(a - 1)} \\ &= \frac{a^2 - 1}{4(a - 1)} \\ &= \frac{a + 1}{4} \end{aligned}$$

2. Sea α un ángulo en intervalo $[0, \pi]$ tal que $\sin(\alpha) = \frac{5}{6}$. Calcule el valor de

$$\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$$

Solución

Usando la identidad de suma de ángulos, tenemos que

$$\cos(\alpha + \pi/3) = \cos(\alpha) \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin(\alpha) \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \cos(\alpha) - \sin(\alpha) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Como sabemos que $\sin(\alpha) = \frac{5}{6}$, se tiene que

$$\frac{25}{36} + \cos^2(\alpha) = 1 \Rightarrow \cos^2(\alpha) = \frac{11}{36}.$$

a) Si α está en el primer cuadrante, entonces $\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{11}}{6}$ y por tanto

$$\cos(\alpha + \pi/3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{11}}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{5}{6} = \frac{\sqrt{11} - 5\sqrt{3}}{12}$$

b) Si α está en el segundo cuadrante, entonces $\cos(\alpha) = -\frac{\sqrt{11}}{6}$ y por tanto

$$\cos(\alpha + \pi/3) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{11}}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{5}{6} = \frac{-\sqrt{11} - 5\sqrt{3}}{12}$$

3. Demostrar que

$$1 - 4\sin^4 x - 2\sin^2 x \cdot \cos 2x = \cos 2x$$

Solución

$$\begin{aligned} 1 - 4\sin^4 x - 2\sin^2 x \cdot \cos 2x &= 1 - 4\sin^4 x - 2\sin^2 x \cdot (1 - 2\sin^2 x) \\ &= 1 - 4\sin^4 x - 2\sin^2 x + 4\sin^4 x \\ &= 1 - 2\sin^2 x \\ &= \cos 2x \end{aligned}$$

4. Demostrar que: $\cos^2(2\alpha) = 4\sin^4 \alpha - 4\sin^2 \alpha + 1$.

Solución

$$\begin{aligned} 4\sin^4 \alpha - 4\sin^2 \alpha + 1 &= (2\sin^2 \alpha - 1)^2 \\ &= (-\cos(2\alpha))^2 \\ &= \cos^2(2\alpha) \end{aligned}$$

5. Resolver la ecuación: $\cos^2(2\alpha) + 4\sin^3(\alpha) = 2\sin(\alpha) - 2\sin^2(\alpha) + 1$ para $\alpha \in [0, 2\pi)$

Solución

Utilizando la igualdad demostrada anteriormente se obtiene la siguiente ecuación:

$$4\sin^4(\alpha) - 4\sin^2(\alpha) + 1 + 4\sin^3(\alpha) - 2\sin(\alpha) + 2\sin^2(\alpha) - 1 = 0$$

$$4\sin^4(\alpha) - 2\sin^2(\alpha) + 4\sin^3(\alpha) - 2\sin(\alpha) = 0$$

$$2\sin^4(\alpha) - \sin^2(\alpha) + 2\sin^3(\alpha) - \sin(\alpha) = 0$$

$$\sin^2(\alpha)(2\sin^2(\alpha) - 1) + \sin(\alpha)(2\sin^2(\alpha) - 1) = 0$$

$$(2\sin^2(\alpha) - 1) \cdot (\sin^2(\alpha) + \sin(\alpha)) = 0$$

$$\sin(\alpha) \cdot (2\sin^2(\alpha) - 1) \cdot (\sin(\alpha) + 1) = 0$$

Luego:

$$\blacksquare \sin(\alpha) = 0 \rightarrow \alpha = 0, \frac{\pi}{2}$$

$$\blacksquare \sin(\alpha) = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$

$$\blacksquare \sin(\alpha) = -1 \rightarrow \alpha = \frac{3\pi}{2}$$

Finalmente las soluciones son $\left\{0, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}\right\}$.

6. Demostrar

$$(\sec \alpha - 1)^2 - (\operatorname{tg} \alpha - \sin \alpha)^2 = (1 - \cos \alpha)^2$$

Solución

$$\begin{aligned}(\sec \alpha - 1)^2 - (\operatorname{tg} \alpha - \sin \alpha)^2 &= \sec^2 \alpha - 2\sec \alpha + 1 - \operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha + 2\operatorname{tg} \alpha \sin \alpha \\&= 1 + \cos^2 \alpha - 2\sec \alpha + 2\operatorname{tg} \alpha \sin \alpha \\&= 1 + \cos^2 \alpha - 2\left(\frac{1 - \sin^2 \alpha}{\cos \alpha}\right) \\&= 1 + \cos^2 \alpha - 2\frac{\cos^2 \alpha}{\cos \alpha} \\&= 1 + \cos^2 \alpha - 2\cos \alpha \\&= (1 - \cos \alpha)^2\end{aligned}$$

7. Resolver en $[0, 2\pi)$ la ecuación

$$2\operatorname{tg} x \sin x - 2\sqrt{3}\sin x + \operatorname{tg} x - \sqrt{3} = 0$$

Solución

$$\begin{aligned}
2 \operatorname{tg} x \operatorname{sen} x - 2\sqrt{3} \operatorname{sen} x + \operatorname{tg} x - \sqrt{3} &= 0 \\
2 \operatorname{sen} x (\operatorname{tg} x - \sqrt{3}) + \operatorname{tg} x - \sqrt{3} &= 0 \\
(\operatorname{tg} x - \sqrt{3})(2 \operatorname{sen} x + 1) &= 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ o $2 \operatorname{sen} x = -1$.

- Si $\operatorname{tg} x = \sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}$.
- Si $2 \operatorname{sen} x = -1 \Rightarrow \operatorname{sen} x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}$.

Por lo tanto las soluciones en $[0, 2\pi)$ son $\left\{ \frac{\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}; \frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6} \right\}$.

8. Encontrar las soluciones entre $[0, 2\pi)$ de la ecuación

$$\operatorname{sen} 4\alpha + \sqrt{3} \operatorname{sen} 2\alpha = 0$$

Solución

Usaremos las identidades de ángulo doble.

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} 4\alpha + \sqrt{3} \operatorname{sen} 2\alpha &= 0 \\
2 \operatorname{sen} 2\alpha \cos 2\alpha + \sqrt{3} \operatorname{sen} 2\alpha &= 0 \\
\operatorname{sen} 2\alpha (2 \cos 2\alpha + \sqrt{3}) &= 0
\end{aligned}$$

- $\operatorname{sen} 2\alpha = 0 \Rightarrow 2\alpha = 0 + 2k\pi$ o bien, $2\alpha = \pi + 2k\pi$

- $2\alpha = 0 + 2k\pi \Rightarrow \alpha = k\pi \Rightarrow \alpha = 0, \pi$
- $2\alpha = \pi + 2k\pi \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

- $2 \cos 2\alpha + \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \cos 2\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

- $2\alpha = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow \alpha = \frac{5\pi}{12} + k\pi \Rightarrow \alpha = \frac{5\pi}{12}, \frac{14\pi}{12}$
- $2\alpha = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow \alpha = \frac{7\pi}{12} + k\pi \Rightarrow \alpha = \frac{7\pi}{12}, \frac{19\pi}{12}$

9. Resolver en $x \in [0, 2\pi)$ la ecuación trigonométrica:

$$4 \operatorname{sen}^2(x) \tan(x) - \tan(x) = 0.$$

Solución

Factorizando por $\tan(x)$ se tiene:

$$4\sin^2(x)\tan(x) - \tan(x) = 0 \Leftrightarrow \tan(x)(4\sin^2(x) - 1) = 0.$$

De esta última igualdad se tiene que $\tan x = 0$ o $\sin^2 x = \frac{1}{4}$.

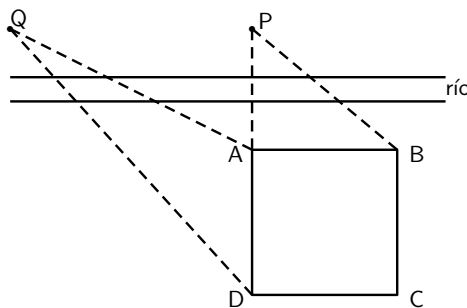
$$\blacksquare \tan(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ o } x = \pi.$$

$$\blacksquare \sin(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} \quad x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}.$$

$$\blacksquare \sin(x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} \quad x = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$$

Solución final general: $S = \left\{0, \pi, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}.$

10. Una construcción de base cuadrada $ABCD$, tiene los lados AB y CD paralelos a una ribera de un río. Un observador que está en el punto P de la ribera contraria a la construcción y en la recta que contiene al segmento de $\overline{AD}$, observa que el lado AB subtiende un ángulo de $\frac{\pi}{6}$. Después de caminar de manera paralela al río y alejándose de la construcción, llega al punto Q y observa que la distancia al punto A es de 15 metros y la distancia al punto D es de $\sqrt{512}$ metros, además seno del ángulo AQD es $\frac{1}{3}$. Encuentre la longitud de los lados de la construcción y la distancia PA .

**Solución**

Sean: x la longitud de los lados de la construcción e y la distancia de P a A .
Usando teorema del coseno se tiene:

$$x^2 = 15^2 + 512 - 30\sqrt{512}\cos\alpha$$

Como $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ entonces

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Reemplazando en lo anterior

$$\begin{aligned}x^2 &= 15^2 + 512 - 30\sqrt{512} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} \\&= 225 + 512 - 640 \\&= 97\end{aligned}$$

Luego la construcción tiene lados de $x = \sqrt{97}$ metros.

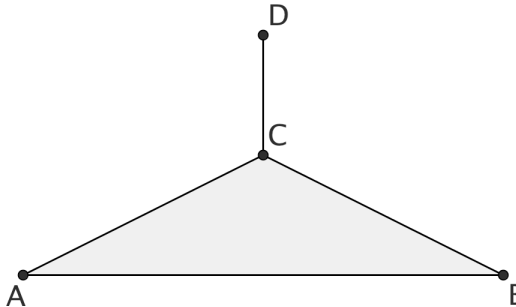
Por otro lado

$$\tan \frac{\pi}{6} = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{97}}{y} \Rightarrow y = \sqrt{291}$$

Por lo tanto la distancia $PA = \sqrt{291}$ metros.

11. Un árbol de 2 metros de altura está situado en la cima de una montaña; la ladera de la montaña tiene una inclinación de 15 grados con la horizontal. Desde la base de la montaña, la parte superior de árbol se observa con un ángulo de elevación de 30 grados. Determine la cantidad de metros que se tienen que recorrer ladera arriba, para observar la parte más alta del árbol con un ángulo de elevación de 45 grados.

Observación: En la figura siguiente el árbol es el segmento DC , la montaña es el triángulo ABC , la ladera es el segmento AC y la base de la montaña es el segmento AB .



Solución

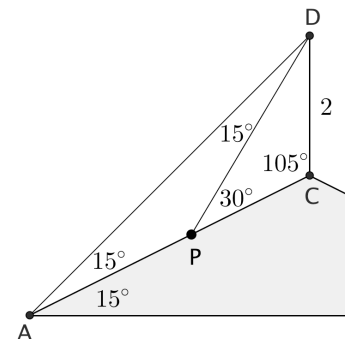
Sea P un punto en la ladera de la montaña. Como el triángulo APD es isósceles, se tiene que $x = AP$ es igual a PD .

Aplicamos el teorema del seno al triángulo PDC y se obtiene que

$$\frac{\sin(105^\circ)}{x} = \frac{\sin(30^\circ)}{2}$$

Como $\sin(30^\circ) = \frac{1}{2}$, entonces

$$x = 4 \sin(105^\circ) = 4 \sin(60^\circ + 45^\circ)$$



Aplicando la identidad de suma de ángulo tenemos que $x = \sqrt{6} + \sqrt{2}$

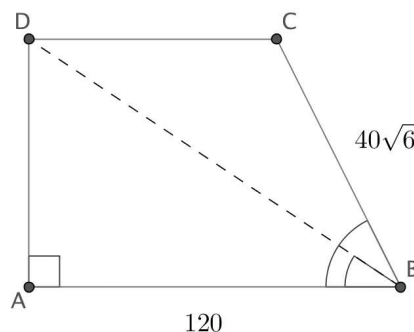
Entonces hay que recorrer $\sqrt{6} + \sqrt{2}$ metros ladera arriba para observar la parte más alta del árbol con un ángulo de elevación de 45 grados.

12. Juan desea construir un canopy entre los árboles C y D separados por un río. Juan no puede llegar al árbol D , por lo que a partir del árbol C camina $40\sqrt{6}$ metros al punto B y 120 metros desde el punto B hasta el punto A midiendo los ángulos: $\angle DAB = 90^\circ$, $\angle ABD = 30^\circ$ y $\angle ABC = 75^\circ$. Calcular la distancia CD .

Solución

En el triángulo ABD rectángulo en A se tiene que $\cos 30 = \frac{120}{BD}$, obteniendo que BD es $80\sqrt{3}$.

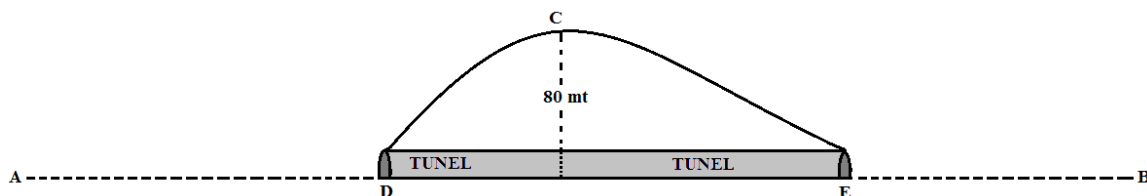
Usando el teorema del coseno en el triángulo BCD se tiene que:



$$CD^2 = 9600 + 19200 - 2 \cdot 40\sqrt{6} \cdot 80\sqrt{3} \cos 45.$$

Obteniendo que $CD = 40\sqrt{6}$.

13. Se construye un túnel bajo un cerro de 80 mt de altura, como muestra la figura



Para calcular el largo que tendrá el túnel, un ingeniero mide la distancia $\overline{AD}$ y $\overline{EB}$ obteniendo 60 metros y 45 metros respectivamente. Además, desde A el ángulo de elevación a la cima C del cerro es de 45° , desde B es de 15° . ¿Cuál es el largo del túnel?

Solución

Sabemos que:

$$\blacksquare \quad \sin(45^\circ) = \frac{80}{\overline{AC}}, \quad \text{luego } \overline{AC} = \frac{80}{\sin(45^\circ)} = \frac{80}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 80\sqrt{2}.$$

$$\blacksquare \quad \sin(15^\circ) = \frac{80}{\overline{BC}}, \quad \text{luego } \overline{BC} = \frac{80}{\sin(15^\circ)} = \frac{80}{\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}} = 80\sqrt{2}(\sqrt{3}+1).$$

Para calcular $\sin(15^\circ)$ hemos usado la fórmula del seno de la suma de ángulos:

$$\sin(15^\circ) = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \right).$$

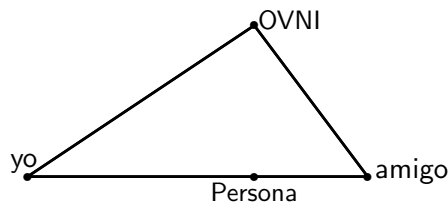
Usando el teorema del coseno tenemos que

$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 &= (80\sqrt{2})^2 + (80\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1))^2 - 2 \cdot (80\sqrt{2}) \cdot 80\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1) \cos(60^\circ) \\ &= 12800(4 + \sqrt{3}). \end{aligned}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{12800(4 + \sqrt{3})} = 80\sqrt{8 + 2\sqrt{3}} \approx 270,8$$

El túnel mide aproximadamente 165.8 metros.

14. Mi amigo y yo, estábamos en los extremos opuestos de un puente. Observamos un OVNI a una altura h , justo sobre el puente abduciendo una persona, formando un triángulo como lo muestra la figura.



Mi amigo vio al OVNI con un ángulo de elevación de $\frac{\pi}{4}$, y yo con $\frac{\pi}{6}$, de curiosidad me acerqué 15 metros y vi el OVNI con un ángulo de elevación de $\frac{\pi}{3}$, mi amigo se quedó paralizado del susto y no se movió.

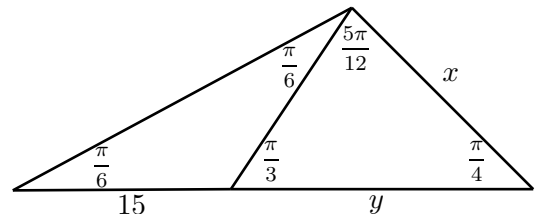
a) ¿Cuál es la distancia entre el OVNI y mi amigo?

b) ¿Cuál es el largo del puente?

Solución

De la información podemos realizar el siguiente diagrama.

Siendo y la distancia que falta para completar el puente y x la distancia entre el OVNI y mi amigo.



a) Por una parte, para calcular x usaremos el teorema del seno

$$\frac{\sin \frac{\pi}{3}}{x} = \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{15} \Rightarrow \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{x} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{15}$$

Despejando x , se tiene $x = \frac{15\sqrt{6}}{2}$

La distancia entre el OVNI y mi amigo es $\frac{15\sqrt{6}}{2}$ metros.

- b) Para calcular la longitud del puente debemos encontrar $15 + y$. Usamos el teorema del seno nuevamente

Sabemos que:

$$\begin{aligned}\frac{\sin \frac{5\pi}{12}}{y} &= \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{15} \\ \sin \frac{5\pi}{12} &= \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1)\end{aligned}$$

Luego, reemplazando

$$\begin{aligned}\frac{\sin \frac{5\pi}{12}}{y} &= \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{15} \\ \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1)}{y} &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{15} \\ \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)}{4y} &= \frac{\sqrt{2}}{30} \\ y &= \frac{15(\sqrt{3} + 1)}{2}\end{aligned}$$

La longitud del puente es $15 + \frac{15(\sqrt{3} + 1)}{2}$ metros

Límite y continuidad

Este capítulo trata sobre el concepto central del Cálculo: el límite de una función real. En esencia, aprenderemos a estimar el comportamiento de una función en torno a un punto fijo, y principalmente, algunas técnicas que nos permitan hacer estos cálculos de manera más simple. El capítulo termina con una aplicación de los límites que conocemos como continuidad, que en términos coloquiales podríamos explicar como la posibilidad de que una función se pueda dibujar a mano alzada en un solo trazo o no.

2.1 Límite

2.1.1 Definiciones previas

Definición 2.1.1

Sean $a \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$. Se llama **vecindad de a de radio ϵ** al siguiente intervalo abierto que contiene al punto a :

$$V(a; \epsilon) = (a - \epsilon, a + \epsilon) = \{x \in \mathbb{R} : a - \epsilon < x < a + \epsilon\}$$

$$1. V\left(1; \frac{1}{5}\right) = \left(\frac{4}{5}, \frac{6}{5}\right). \quad 2. V(0; \epsilon) = (-\epsilon, \epsilon). \quad 3. V(-1; 1) = (-2, 0).$$

Definición 2.1.2

Sea $D \subseteq \mathbb{R}$. Se dice que a es un **punto de acumulación** de D si y solo si toda vecindad de a contiene al menos un punto de D diferente de a .

Notación 2.1.3

Se denota por D' al conjunto de puntos de acumulación del conjunto D . Es decir:

$$a \in D' \text{ si y solo si } \forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ (V(a; \epsilon) \cap (D \setminus \{a\}) \neq \emptyset)$$

1. $D = \mathbb{N}$ no tiene puntos de acumulación, por lo tanto $D' = \emptyset$.
2. $D = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}^+ \right\}$ tiene solo al 0 como punto de acumulación, $D' = \{0\}$.
3. Los intervalos de la forma $D = (a, b)$, $D = (a, b]$, $D = [a, b)$ o $D = [a, b]$ tienen todos el mismo conjunto de puntos de acumulación, $D' = [a, b]$.

Ejemplo 2.1.4

Determinar el conjunto de los puntos de acumulación de los dominios de las funciones reales definidas por:

$$1. f(x) = \frac{2x^2 - 2}{x - 1} \quad 2. g(x) = \frac{2x^2 - 5x + 2}{5x^2 - 8x - 4} \quad 3. h(x) = \frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2}.$$

Solución

1. $\text{Dom } f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, luego su conjunto de puntos de acumulación es $\mathbb{R}$.
2. $\text{Dom } g = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{5}, 2\}$ y el conjunto de puntos de acumulación es $\mathbb{R}$.
3. $\text{Dom } h = [0, \infty) \setminus \{4\}$ y el conjunto de puntos de acumulación es el intervalo $[0, \infty)$.

2.1.2 Límite de una función en un punto

Imaginemos un mundo sin computadoras y sin programas como Geogebra para ayudarnos a conocer la gráfica de una función real.

¿Cómo lograr una gráfica aceptable de una función como $f(x) = \frac{\text{sen}(\arctan(x))}{\arctan(x)}$? Geogebra nos entrega la respuesta en menos de un segundo, pero para llegar a esa rapidez, fue necesario desarrollar muchísima matemática previa.

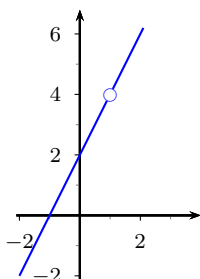
Consideremos la función real f definida por $f(x) = \frac{2x^2 - 2}{x - 1}$, cuyo dominio es $\text{Dom } f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

¿Cómo se comporta la función f cerca del 1? Es decir, si x está en una vecindad de 1, ¿estarán sus imágenes $f(x)$ en la vecindad de algún número real L ?

Nos interesa entonces el comportamiento de la función f en puntos del dominio “suficientemente próximos” a 1.

Podemos especular calculando las imágenes de algunos valores cercanos a 1, por ejemplo:

x	0	0,5	0,9	0,99	0,999	1,001	1,01	1,1	1,5	2
$f(x)$	2	3	3,8	3,98	3,998	4,002	4,02	4,2	5	6



En la gráfica observamos que si x está próximo a 1, resulta que $f(x)$ está próximo a 4.

Por otro lado si $x \neq 1$,

$$f(x) = \frac{2x^2 - 2}{x - 1} = \frac{2(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = 2(x + 1).$$

Luego, considerando la función lineal g dada por $g(x) = 2(x + 1)$, se tiene que

$$\forall x \neq 1, g(x) = f(x),$$

y además, cuando x está cercano a 1, las imágenes $f(x)$ están cercanas a $g(1) = 4$.

En este caso, decimos que el límite de f en $x = 1$ es 4 y escribimos

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 4.$$

Ejemplo 2.1.5

Encontrar $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$, donde g es la función real definida por

$$g(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x - 2}.$$

Solución

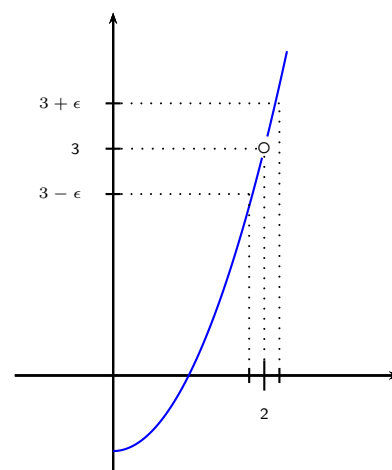
Claramente, $\text{Dom } g = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, luego 2 es un punto de acumulación de $\text{Dom } g$. Como para $x \neq 2$ se tiene

$$g(x) = \frac{(x - 2)(x^2 - 1)}{x - 2} = x^2 - 1,$$

entonces si x está próximo a 2, sus imágenes $g(x)$ se aproximan a 3.

Luego

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x - 2} = 3.$$



Definición 2.1.6 (Límite de una función en un punto)

Sea f una función con dominio D y sea $a \in D'$. Decimos que $f(x)$ tiende al límite L cuando x tiende al punto a , y escribimos $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, si dado cualquier número real positivo ϵ existe un correspondiente número real positivo δ tal que si $x \neq a$ y $x \in V(a; \delta)$, entonces $f(x) \in V(L; \epsilon)$. En símbolos:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \text{ si y solo si } \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon).$$

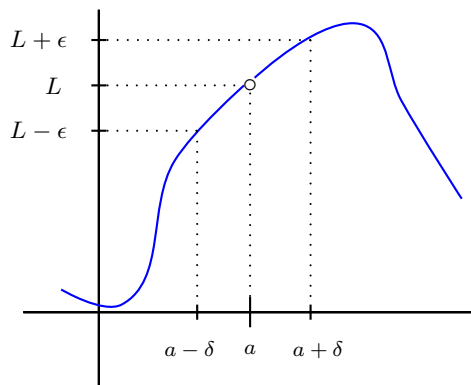


Figura 2.1: Representación gráfica de la definición de límite

Observación 2.1.7

La definición nos permite determinar límites solo sobre puntos de acumulación del dominio de la función, para que en sus vecindades existan infinitos elementos del dominio. Usualmente el dominio de una función real es un intervalo, o unión de intervalos, así cada uno de sus puntos es un punto de acumulación.

Ejemplo 2.1.8

Demostrar por definición que $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{2}(5x - 6) = 7$.

Solución

Sea f la función dada por $f(x) = \frac{1}{2}(5x - 6)$, consideremos $a = 4$ y $L = 7$.

Debemos demostrar que para cualquier $\epsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } x \neq 4 \text{ y } |x - 4| < \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{2}(5x - 6) - 7 \right| < \epsilon.$$

Para hallar el número real δ trabajamos hacia atrás a partir de la desigualdad en que interviene ϵ

$$\left| \frac{1}{2}(5x - 6) - 7 \right| < \epsilon \Leftrightarrow \frac{5}{2}|x - 4| < \epsilon \Leftrightarrow |x - 4| < \frac{2}{5}\epsilon.$$

Por lo tanto, podemos elegir $\delta = \frac{2}{5}\epsilon$ y así se verifica que

$$0 < |x - 4| < \delta = \frac{2}{5}\epsilon \Rightarrow \left| \frac{1}{2}(5x - 6) - 7 \right| < \epsilon.$$

Notemos que el valor de δ obtenido no es único, ya que cualquier valor menor al encontrado también satisface la desigualdad.

Ejemplo 2.1.9

Sea $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$. ¿Existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$?

Solución

Como $\text{Dom } f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, sabemos que 0 es un punto de acumulación de $\text{Dom } f$.

Evaluemos la función para valores cercanos a 0:

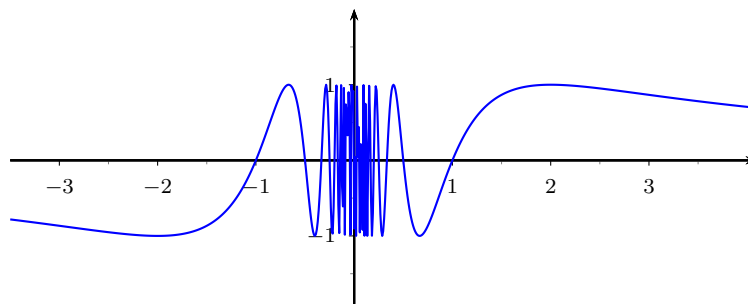
$$f(1) = \sin \pi = 0, f\left(\frac{1}{3}\right) = \sin 3\pi = 0, f\left(\frac{1}{10}\right) = \sin(10\pi) = 0.$$

Con estos resultados podríamos pensar que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, sin embargo observemos que si tomamos

$$x_n = \frac{2}{1 + 4n} \text{ con } n \in \mathbb{Z}, \text{ entonces}$$

$$f(x_n) = \sin\left(\frac{\pi}{\frac{2}{1 + 4n}}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}(1 + 4n)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1.$$

Veamos la gráfica de la función f :



Como los valores de $f(x)$ no tienden a un número fijo, concluimos que no existe el límite de la función f cuando x se aproxima a cero.

Ejemplo 2.1.10

Demostrar por definición que $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{5x - 3}{2x + 6} = -2$.

Solución

Dado $\epsilon > 0$, debemos determinar $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x + 1| < \delta \Rightarrow \left| \frac{5x - 3}{2x + 6} + 2 \right| < \epsilon.$$

Trabajamos la expresión del lado derecho, para obtener el valor de δ :

$$\left| \frac{5x - 3}{2x + 6} + 2 \right| = \left| \frac{5x - 3 + 4x + 12}{2x + 6} \right| = \left| \frac{9x + 9}{2x + 6} \right| = \frac{9}{2} \frac{|x + 1|}{|x + 3|}. \quad (2.1)$$

Observemos que en (2.1) aparece $|x + 1|$, que es parte de lo que necesitamos, pero también aparece $\frac{1}{|x + 3|}$, que debemos acotar. Para esto consideraremos los números reales x que están en una vecindad de -1 , digamos $x \in V(-1; 1)$. Así

$$-1 < x + 1 < 1 \Leftrightarrow 1 < x + 3 < 3 \Leftrightarrow \frac{1}{3} < \frac{1}{x + 3} < 1 \Rightarrow \frac{1}{|x + 3|} < 1.$$

Usando esta desigualdad en (2.1), tendremos que $\left| \frac{5x - 3}{2x + 6} + 2 \right| < \epsilon$ si $\frac{9}{2}|x + 1| < \epsilon$.

Por lo tanto, eligiendo δ como el más pequeño entre 1 y $\frac{2\epsilon}{9}$, es decir, $\delta = \min \left\{ 1, \frac{2\epsilon}{9} \right\}$, se verifica que:

$$0 < |x + 1| < \delta \Rightarrow \left| \frac{5x - 3}{2x + 6} + 2 \right| < \epsilon.$$

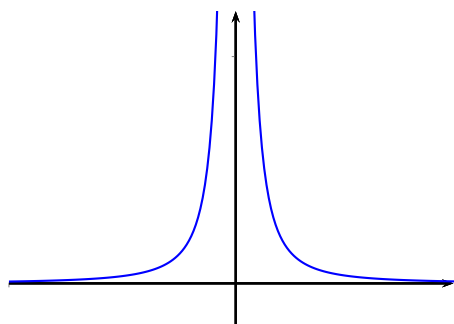
Ejemplo 2.1.11

Estudiar la existencia de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$.

Solución

Si x está en una vecindad de 0 se observa que sus imágenes crecen sin límite.

x	$f(x)$
± 1	1
$\pm 0,5$	4
$\pm 0,01$	10000
$\pm 0,001$	1000000
$\pm \frac{1}{10^n}$	10^{2n}



Por lo tanto no existe $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$.

2.2 Propiedades aritméticas de los límites

Los siguientes teoremas nos permitirán calcular límites de funciones, usando ciertas propiedades algebraicas, sin tener que recurrir a la demostración por definición cada vez.

Proposición 2.2.1

Sean a y C constantes reales. Se tiene:

$$1. \lim_{x \rightarrow a} x = a,$$

$$2. \lim_{x \rightarrow a} C = C.$$

DEMOSTRACIÓN.

1) Basta elegir $\delta = \epsilon$.

2) Como para $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = C$, entonces $f(x) - C = 0 < \epsilon$, independiente del valor de δ .

■

Teorema 2.2.2

Si el límite de una función real existe, este es **único**.

DEMOSTRACIÓN.

La demostración la haremos por contradicción. Supongamos que f tiene dos límites distintos en $x = a$, digamos L_1 y L_2 .

Sea $\epsilon > 0$. Como $L_1 = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, existe $\delta_1(\epsilon) > 0$ tal que $|f(x) - L_1| < \epsilon$ para todo $x \neq a$ en la vecindad $V(a, \delta_1(\epsilon))$.

Análogamente, existe $\delta_2(\epsilon) > 0$ tal que $|f(x) - L_2| < \epsilon$ para todo $x \neq a$ en la vecindad $V(a, \delta_2(\epsilon))$.

Sea $\delta(\epsilon) = \min\{\delta_1(\epsilon), \delta_2(\epsilon)\}$.

Así si $0 < |x - a| < \delta(\epsilon)$, entonces $|f(x) - L_1| < \epsilon$ y $|f(x) - L_2| < \epsilon$.

Como esto es cierto para cualquier ϵ , tomemos $\epsilon = \frac{|L_1 - L_2|}{3}$ y $x \in V(a, \delta(\epsilon))$.

Luego

$$3\epsilon = |L_1 - L_2| = |L_1 - f(x) + f(x) - L_2| \leq |f(x) - L_1| + |f(x) - L_2| < 2\epsilon,$$

es decir, $3\epsilon < 2\epsilon$, como $\epsilon > 0$ se obtiene $3 < 2$, una contradicción.

Así, nuestra suposición es falsa y la función tiene límite único en el punto. ■

Teorema 2.2.3

Si el límite de una función f existe en a , entonces f está acotada en alguna vecindad de a .

DEMOSTRACIÓN.

Como la función tiene límite en a , digamos L , entonces dado $\epsilon > 0$, existe un número positivo que depende de ϵ , el que llamaremos $\delta(\epsilon)$ tal que si $0 < |x - a| < \delta(\epsilon)$, entonces $|f(x) - L| < \epsilon$. Tomemos $\epsilon = 1$, existe $\delta(1)$ tal que si $0 < |x - a| < \delta(1)$ entonces $|f(x) - L| < 1$, es decir

$$L - 1 < f(x) < L + 1.$$

Luego, todos los valores de f en la vecindad $V(a; \delta(1))$ se encuentran en el intervalo

$$(L - 1, L + 1)$$

excepto, posiblemente el valor de $f(a)$, por lo tanto en el intervalo $(L - 1, L + 1)$ la función f está acotada, a saber

$$\min\{f(a), L - 1\} \leq f(x) \leq \max\{f(a), L + 1\}.$$

Teorema 2.2.4

Sean f y g funciones reales, y sea a un punto de acumulación del dominio de f y del dominio de g (cuando corresponda), sea además $C \in \mathbb{R}$ una constante cualquiera.

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$, donde L y M son números reales, entonces

1. $\lim_{x \rightarrow a} Cf(x) = CL$.
2. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = L \pm M$.
3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = LM$.
4. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$, siempre que $M \neq 0$.
5. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^n = L^n$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

DEMOSTRACIÓN.

Probaremos las afirmaciones usando la definición de límite.

1. La demostración es directa, la dejamos como ejercicio.
2. Demostraremos primero la propiedad para $f(x) + g(x)$.
Sea $\epsilon > 0$. Debemos probar que existe un número real positivo δ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) + g(x) - L - M| < \epsilon.$$

Ahora, por hipótesis, existen δ_1, δ_2 números reales positivos tales que

- i) $0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{\epsilon}{2},$
- ii) $0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - M| < \frac{\epsilon}{2}.$

Por lo tanto, si elegimos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, tenemos que se cumple i) y ii). Luego,

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) + g(x) - L - M| \leq |f(x) - L| + |g(x) - M| < \epsilon.$$

Para probar la afirmación para $f(x) - g(x)$, basta usar 1) con $C = -1$ y después el resultado para la suma usando $f(x) + (-1)g(x)$.

3. Sea $\epsilon > 0$. Debemos probar que existe un número real positivo δ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)g(x) - LM| < \epsilon.$$

Primero escribiremos la expresión $f(x)g(x) - LM$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - LM| &= |f(x)g(x) - f(x)M + f(x)M - LM| \\ &= |f(x)(g(x) - M) + (f(x) - L)M| \\ &\leq |f(x)||g(x) - M| + |f(x) - L||M| \end{aligned} \quad (2.2)$$

Queremos encontrar δ que acote (2.2) por ϵ . Para esto acotaremos cada uno de los sumandos por separado.

Acotemos primero $|f(x)||g(x) - M|$. Por el Teorema 2.2.3, existe δ_1 tal que f es acotada en $V(a; \delta_1)$, digamos $|f(x)| < K$ para $x \in V(a; \delta_1)$ y como $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$, luego existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - M| < \frac{\epsilon}{2K}.$$

Por otro lado, como $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, existe $\delta_3 > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta_3 \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{\epsilon}{2|M|}.$$

Por lo tanto, si elegimos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, entonces obtenemos en (2.2)

$$|f(x)g(x) - LM| \leq K \frac{\epsilon}{2K} + \frac{\epsilon}{2|M|} |M| = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

4. Basta probar que si $M \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{M}$, ya que $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \frac{1}{g(x)}$ y entonces aplicamos 3).

Podemos suponer $M > 0$ (si $M < 0$ multiplicamos por -1 y aplicamos la propiedad 1).

Dado $\epsilon > 0$, debemos encontrar un número positivo δ tal que si $0 < |x - a| < \delta$, entonces

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M} \right| < \epsilon.$$

Ahora

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M} \right| = \frac{|M - g(x)|}{|g(x)M|} = \frac{|g(x) - M|}{|g(x)| |M|} \quad (2.3)$$

Por lo tanto, debemos acotar $|g(x) - M|$ y $\frac{1}{|g(x)|}$.

Como $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |g(x) - M| < 2\epsilon.$$

Por otro lado, tomando $\epsilon_1 = \frac{M}{2}$, existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - M| < \frac{M}{2},$$

es decir, $\frac{M}{2} < g(x) < \frac{3M}{2}$, por lo que $0 < \frac{2}{3M} < \frac{1}{g(x)} < \frac{2}{M}$.

Eligiendo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ tenemos que si $0 < |x - a| < \delta$ entonces

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M} \right| = \frac{|M - g(x)|}{|g(x)||M|} < \frac{2\epsilon}{\frac{2}{M}M} = \epsilon$$

como queríamos demostrar.

5. La demostración se hace por inducción y la dejamos como ejercicio.

■

Observación 2.2.5

El caso 2 del teorema 2.2.4 se puede generalizar a n funciones, es decir,

$$\lim_{x \rightarrow a} (f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) + \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) + \cdots + \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$$

Corolario 2.2.6

Si f es una función polinomial o racional y $a \in \text{Dom } f$. Entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Ejemplo 2.2.7

Calcular los siguientes límites aplicando las propiedades:

$$1. \lim_{x \rightarrow -2} (3x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 4)$$

$$4. \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2 + 1}{2z - 8}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 6x + 5}{3x + 1}$$

$$5. \lim_{w \rightarrow 0} \frac{1}{(2w^4 - 2w + 3)^3}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 2x + 4}{x^2 + 5}$$

$$6. \lim_{w \rightarrow 1} \frac{(w^3 + 1)^2}{(w^4 - 2w + 3)^3}$$

Solución

$$1. \lim_{x \rightarrow -2} (3x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 4) = 3(-2)^4 + 2(-2)^3 - 5(-2)^2 + 4 = 16.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 6x + 5}{3x + 1} = \frac{2 \cdot 9 - 6 \cdot 3 + 5}{3 \cdot 3 + 1} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 2x + 4}{x^2 + 5} = \frac{8 + 4 + 4}{4 + 5} = \frac{16}{9}.$$

$$4. \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2 + 1}{2z - 8} = \frac{0 + 1}{0 - 8} = -\frac{1}{8}.$$

$$5. \lim_{w \rightarrow 0} \frac{1}{(2w^4 - 2w + 3)^3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}.$$

$$6. \lim_{w \rightarrow 1} \frac{(w^3 + 1)^2}{(w^4 - 2w + 3)^3} = \frac{2^2}{2^3} = \frac{1}{2}.$$

Teorema 2.2.8

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ y g es una función acotada en una vecindad de a , entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0$$

DEMOSTRACIÓN.

Dado $\epsilon > 0$, debemos encontrar $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$ entonces $|f(x)g(x)| < \epsilon$.

Como la función g es acotada en una vecindad de a , entonces existen $M > 0$ y $\delta_1 > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |g(x)| < M.$$

Sabemos que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, entonces existe $\delta_2 > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta_2$, entonces $|f(x)| < \frac{\epsilon}{M}$.

Así, escogiendo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, se cumple que $|f(x)g(x)| < \frac{\epsilon}{M}M = \epsilon$ siempre que

$$0 < |x - a| < \delta.$$

■

Ejemplo 2.2.9

Determinar $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$.

Solución

Sabemos que la función seno está acotada por 1, y que $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$, entonces por el teorema anterior

tenemos que $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$.

Teorema 2.2.10

Sean $c \in \mathbb{R}$, f y g funciones reales y V una vecindad de c con $V \setminus \{c\} \subset \operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g$.

Supongamos que para cada $x \in V \setminus \{c\}$, se tiene $f(x) \leq g(x)$.

Si $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ y $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = M$, entonces $L \leq M$.

DEMOSTRACIÓN.

La demostración la haremos por contradicción. Supongamos que $L > M$.

Recordemos que por Teorema 2.2.4, se tiene que $\lim_{x \rightarrow c} (g(x) - f(x)) = M - L$. Usando la definición de límite y escogiendo $\epsilon = L - M$ (que es positivo por hipótesis), existe $\delta > 0$ tal que si

$$0 < |x - c| < \delta \text{ entonces } |g(x) - f(x) - (M - L)| < \epsilon.$$

Así, si $0 < |x - c| < \delta$, entonces $-L + M < g(x) - f(x) - M + L < L - M$, con lo cual $g(x) - f(x) < 0$. Por lo tanto, $g(x) < f(x)$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, la hipótesis de que $L > M$ es falsa, es decir $L \leq M$.

■

Teorema 2.2.11: Teorema de la compresión o Teorema del Sandwich

Sea $c \in \mathbb{R}$ y sean f , g y h funciones reales y V una vecindad de c con

$$V \setminus \{c\} \subset (\text{Dom } f \cap \text{Dom } g \cap \text{Dom } h).$$

Supongamos que para cada $x \in V \setminus \{c\}$, se tiene $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \text{ y } \lim_{x \rightarrow c} h(x) = L, \text{ Entonces } \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L$$

DEMOSTRACIÓN.

Notemos que el teorema asegura la existencia del límite de la función h en $x = c$. La demostración es una aplicación directa del teorema anterior.

$$L = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow c} g(x) \leq \lim_{x \rightarrow c} h(x) = L.$$

■

Ejemplo 2.2.12

Hallar $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$, si g es una función tal que para $x \in \text{Dom } g \setminus \{0\}$ se cumple que

$$1 - \frac{x^2}{4} \leq g(x) \leq 1 + \frac{x^2}{4}.$$

Solución

Se tiene que $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) = 1$ y $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x^2}{4}\right) = 1$, luego $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$.

Ejemplo 2.2.13

Mostrar que $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

Solución

Como para $x \neq 0$, se tiene $-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$, multiplicando por x^2 se obtiene

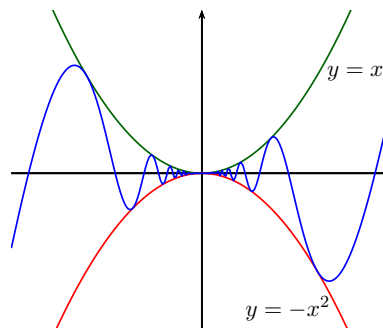
$$-x^2 \leq x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2.$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = \lim_{x \rightarrow 0} -x^2 = 0$, entonces usando el teorema 2.2.11, se tiene

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

La gráfica de estas tres funciones nos ayuda a visualizar la utilidad del Teorema del Sandwich.

$$\begin{aligned} y &= x^2 \\ y &= -x^2 \\ y &= x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$



Otra forma de resolver el ejemplo anterior es usar el teorema 2.2.8.

Como

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 \quad \text{y} \quad \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq 1$$

entonces

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

2.2.1 Forma indeterminada $\frac{0}{0}$.

Consideremos una función racional definida por $\frac{f(x)}{g(x)}$ con f y g polinomios.

Si tanto $f(a)$ como $g(a)$ son cero, decimos que la función racional tiene la forma $\frac{0}{0}$ en ese punto, y no podemos evaluar directamente en a para encontrar $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Recordemos que si un polinomio se anula en a , entonces se factoriza por $x - a$. Por lo tanto en este caso tendremos que tanto f como g se factorizan por $x - a$, luego simplificando por $x - a$, podremos dilucidar $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Más adelante veremos límites del tipo $\frac{0}{0}$, donde las funciones que aparecen no son necesariamente polinomios.

Ejemplo 2.2.14

Calcular los siguientes límites:

$$1. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x + 2}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 3x + 2}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-2x - 4}{x^3 + 2x^2}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 4x + 4}{x^3 + 2x^2}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 + 4x + 4}.$$

Solución

$$1. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 4)(x + 2) = 32.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x + 2)(x^2 - 2x + 4)}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - 2x + 4) = 12.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 2)}{(x - 1)(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 2)}{(x - 2)} = -3.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-2x - 4}{x^3 + 2x^2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-2(x + 2)}{x^2(x + 2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-2}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 4x + 4}{x^3 + 2x^2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x + 2)^2}{x^2(x + 2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + 2}{x^2} = 0.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 + 4x + 4} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2(x + 2)}{(x + 2)^2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2}{x + 2}.$$

En este caso, nos encontramos con el problema de que al evaluar esta expresión para $x = -2$, el numerador es 4, pero el denominador es 0. Notemos que una función así crece arbitrariamente en valores cercanos mayores a -2 y decrece para valores cercanos menores a -2 . Concluimos que no existe un número real al cual se acerquen los valores de $f(x)$, es decir, en este caso, el límite no existe. Más adelante estudiaremos este tipo de comportamiento de una función.

2.3 Límites laterales

Queremos ampliar el concepto de límite a puntos en los cuales no podemos aplicar de definición de límite, como por ejemplo si el dominio de la función contempla solo los números mayores (o menores) al punto en cuestión.

Definición 2.3.1

Hablaremos de **límite lateral izquierdo** si nos aproximamos por los números menores a a y **límite lateral derecho** si nos aproximamos por los números mayores a a .

Denotamos $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ al **límite lateral izquierdo** y $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ al **límite lateral derecho**.

Ejemplo 2.3.2

Estudiar la existencia de los siguientes límites laterales:

1. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{x}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{x}$

2. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x}$

4. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x}$.

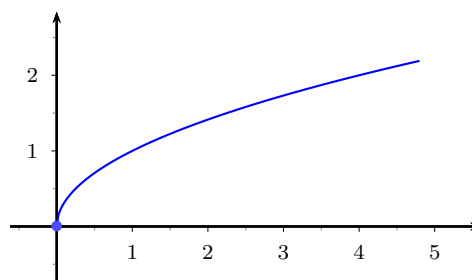
Solución

1. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{x} = 1,$

2. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x} = 1,$

3. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{x}$, no existe,

4. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0.$



Notar que no podemos obtener el límite lateral izquierdo $\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{x}$, ya que el dominio de la función raíz cuadrada es $[0, \infty)$.

Ejemplo 2.3.3

Considerar la función parte entera. Determinar los límites laterales:

1. $\lim_{x \rightarrow 0^-} [x]$

3. $\lim_{x \rightarrow 1^-} [x]$

5. $\lim_{x \rightarrow 1,5^-} [x]$

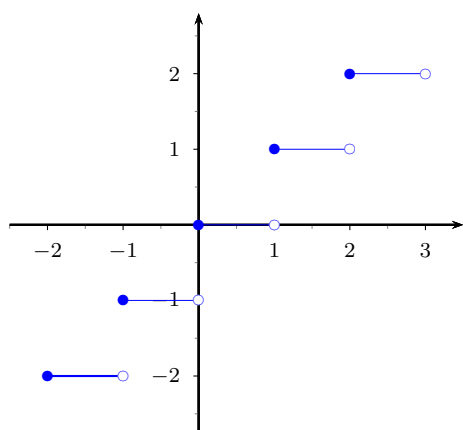
2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} [x]$

4. $\lim_{x \rightarrow 1^+} [x]$

6. $\lim_{x \rightarrow 1,5^+} [x].$

Solución

Graficaremos la función parte entera, para visualizar mejor los límites



1. $\lim_{x \rightarrow 0^-} [x] = -1$

4. $\lim_{x \rightarrow 1^+} [x] = 1$

2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} [x] = 1$

5. $\lim_{x \rightarrow 1,5^-} [x] = 1$

3. $\lim_{x \rightarrow 1^-} [x] = 0$

6. $\lim_{x \rightarrow 1,5^+} [x] = 1.$

Definición 2.3.4

Sea f una función con dominio D y sea a un punto de acumulación de D . Decimos que el **límite lateral izquierdo** de f cuando x tiende a a es L , y escribimos

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L,$$

si dado cualquier número real positivo ϵ , existe un correspondiente número real positivo δ tal que si $a - \delta < x < a$, entonces $f(x) \in V(L; \epsilon)$.

En símbolos:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 (a - \delta < x < a, \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon).$$

Del mismo modo definimos el **límite lateral derecho**:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 (a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon).$$

Teorema 2.3.5

Una función f tiene límite cuando x tiende al punto de acumulación a si y solo si tiene límites por la derecha y por la izquierda en ese punto y estos son iguales.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \text{ si y solo si } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L \text{ y } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

Corolario 2.3.6

Sea f una función y a un punto de acumulación de su dominio.

Si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ entonces no existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Observación 2.3.7

Las propiedades de los límites son también ciertas para los límites laterales, en particular es válido el Teorema de Sandwich.

Ejemplo 2.3.8

Sea f la función definida por $f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{si } x < 1, \\ x^2 + 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$

Encontrar $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$.

Solución

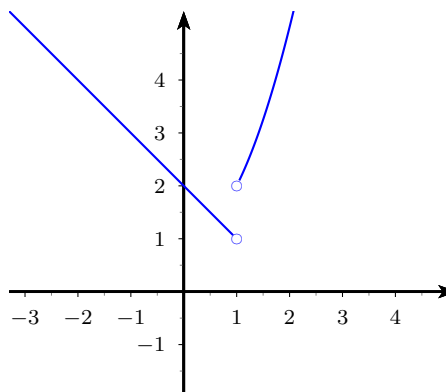
Usando la definición de f se tiene:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2 - x) = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + 1) = 2.$$

Con esto tenemos por el Corolario anterior que no existe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

Esto lo podemos apreciar observando la gráfica de la función f .

**Ejemplo 2.3.9**

Encontrar los límites laterales $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x)$, donde la función g está dada por:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 2 \\ 4 & \text{si } x = 2 \\ x + 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

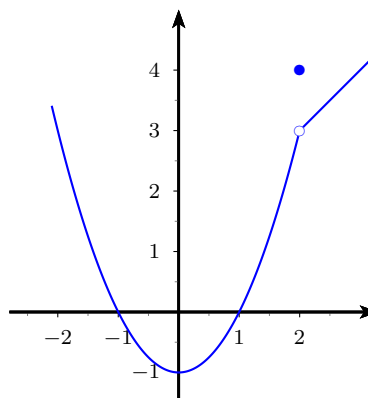
Solución

Usando la definición de g se tiene:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 1) = 3$$

y

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x + 1) = 3.$$



Esto lo podemos observar en el gráfico de g .

Ejemplo 2.3.10

Encontrar los límites laterales en $-1, 0$ y 1 , donde la función f está dada por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq -1, \\ x^2 & \text{si } -1 < x < 0, \\ -1 & \text{si } x = 0, \\ -x^2 + 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Solución

Se tiene:

1. $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} x = -1$
2. $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} x^2 = 1$
3. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 = 0$
4. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x^2 + 1) = 1$
5. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-x^2 + 1) = 0$
6. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-x^2 + 1) = 0.$

De acuerdo al teorema anterior podemos decir que el límite de la función f en $x = -1$ y $x = 0$ no existen. Por otro lado, el límite de la función f en $x = 0$ existe y vale 0.

2.4 Límites trigonométricos

El cálculo de límites trigonométricos está basado fundamentalmente en el siguiente teorema:

Teorema 2.4.1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

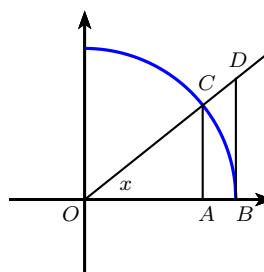
DEMOSTRACIÓN.

Para hacer la demostración usaremos límites laterales y el Teorema del Sandwich.

Consideremos la circunferencia unitaria, es decir, centrada en el origen y con radio 1.

Sea x un ángulo tal que $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Comparemos las áreas de los triángulos $\triangle OAC$, $\triangle OBD$ y del sector circular OCB .



Usando las definiciones de las funciones trigonométricas y considerando que el área del sector circular es $\mathcal{A} = \frac{r^2 x}{2}$, se tiene:

$$\text{área } \triangle OAC \leq \text{área del sector circular } OCB \leq \text{área } \triangle OBD,$$

es decir,

$$\frac{1}{2} \operatorname{sen} x \cos x \leq \frac{x}{2} \leq \frac{1}{2} \tan x.$$

Como estamos considerando x positivo, dividiendo por $\operatorname{sen} x$, obtenemos

$$\cos x \leq \frac{x}{\operatorname{sen} x} \leq \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \cos x \leq \frac{\operatorname{sen} x}{x} \leq \frac{1}{\cos x}$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ podemos usar el Teorema del Sandwich, así $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.

Ahora, recordemos que las función seno y la función identidad son impares, por lo que la función h dada por $h(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ es par, es decir, simétrica respecto al eje Y .

Concluimos que el límite lateral izquierdo $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ es igual al límite lateral derecho.

■

Corolario 2.4.2

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

DEMOSTRACIÓN.

Esto es claro, ya que:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x}{x} \right) \left(\frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x(1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \frac{x}{1 + \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 + \cos x} \\ &= 1 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Del mismo modo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos x} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

■

Ejemplo 2.4.3

Calcular los siguientes límites:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{3x} \quad 3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin 7x} \quad 4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 1}{x^2}$$

Solución

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 3 \left(\frac{\sin 3x}{3x} \right).$$

Haciendo la sustitución $u = 3x$, se tiene que si $x \rightarrow 0$ entonces $u \rightarrow 0$. Esta técnica se denomina **cambio de variable** y la justificaremos cuando estudiemos continuidad.

Así,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = 3 \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 3.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5}{3} \left(\frac{\sin 5x}{5x} \right) = \frac{5}{3} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = \frac{5}{3}.$$

Notar que, al igual que el ejercicio anterior, se hizo el cambio de variable $u = 5x$.

3. En este caso debemos multiplicar por 1 adecuado para poder usar el teorema correspondiente.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin 7x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{4 \sin 4x}{4x}}{\frac{7 \sin 7x}{7x}} = \frac{4}{7} \cdot \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{4x}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{7x}} = \frac{4}{7} \cdot \frac{\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u}}{\lim_{v \rightarrow 0} \frac{\sin v}{v}} = \frac{4}{7}$$

Notar que se hizo el cambio de variable $u = 4x$ y $v = 7x$.

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 4 \left(\frac{\cos 2x - 1}{(2x)^2} \right) = -4 \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1 - \cos u}{u^2} = -4 \cdot \frac{1}{2} = -2.$$

Notar que se hizo el cambio de variable $u = 2x$.

Ejemplo 2.4.4

Determinar, si existe $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsen 2x}{|x|}$. Justifique.

Solución

En este caso debemos calcular límites laterales. Para ambos casos utilizaremos el siguiente cambio de variable:

$$z = \arcsen 2x \Rightarrow \sin z = 2x \Rightarrow x = \frac{1}{2} \sin z$$

luego, si

$$x \rightarrow 0^+ \Rightarrow z \rightarrow 0^+ \quad \text{y} \quad x \rightarrow 0^- \Rightarrow z \rightarrow 0^-$$

entonces

$$i) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arcsen 2x}{x} = \lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{z}{\frac{1}{2} \sin z} = \lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{2}{\frac{\sin z}{z}} = 2$$

$$ii) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\arcsen 2x}{-x} = \lim_{z \rightarrow 0^-} \frac{z}{-\frac{1}{2} \sin z} = \lim_{z \rightarrow 0^-} \frac{-2}{\frac{\sin z}{z}} = -2$$

Luego, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsen 2x}{|x|}$ no existe.

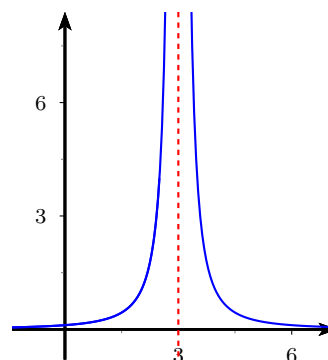
2.5 Límites infinitos

Sea f la función real definida por $f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$, cuyo dominio es $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Si x se acerca a 3 (con $x \neq 3$) los valores de $f(x)$ son cada vez más grandes, como lo muestra la gráfica.

x	2,9	2,99	2,999
$f(x)$	100	10000	10^6

x	3,1	3,01	3,001
$f(x)$	100	10000	10^6



Notación 2.5.1

Para este tipo de comportamiento usamos la notación

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty.$$

Con esto indicamos que los valores de $f(x)$ se vuelven cada vez más grandes cuando x tiende al punto a . Cuidado, esto no significa que el límite de la función exista, de hecho, no existe.

Definición 2.5.2

Sea f una función definida en una vecindad de a , excepto quizás en el mismo a .

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > M)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall R < 0, \exists \delta > 0, \forall x (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < R)$$

Se pueden dar definiciones análogas para los límites laterales infinitos:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$

Observación 2.5.3

Si n es un entero positivo par, entonces $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(x-a)^n} = \infty$.

Si n es un entero positivo impar, entonces

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{1}{(x-a)^n} = -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{(x-a)^n} = \infty. \end{cases}$$

Definición 2.5.4

La recta $x = a$ es una **asíntota vertical** de la función f , si

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{o} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty.$$

Ejemplo 2.5.5

Calcule $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$, con g dada por $g(x) = \frac{1}{(x-3)^3}$.

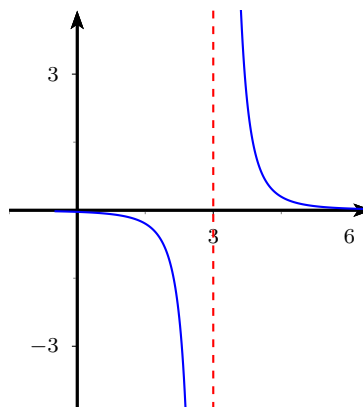
De acuerdo a la gráfica tenemos:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{(x-3)^3} = -\infty$$

y

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{(x-3)^3} = \infty$$

Con esto la recta $x = 3$ es una asíntota vertical de la función g .

**Ejemplo 2.5.6**

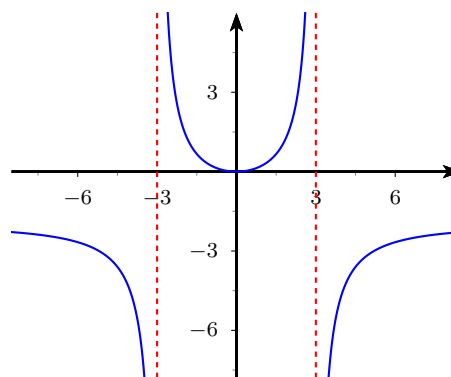
Sea f la función definida por $f(x) = \frac{2x^2}{9-x^2}$. Determinar las asíntotas verticales de la función.

Solución

Como para cada $x \in \mathbb{R}$ se tiene $2x^2 \geq 0$ y además $f(x) = \frac{2x^2}{(3-x)(3+x)}$, tenemos $f(x) \geq 0$ para $x \in (-3, 3)$ y $f(x) < 0$ en otro caso.

Con esto se tiene

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) &= -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) &= \infty, \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= \infty, \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= -\infty.\end{aligned}$$



Con esto las rectas $x = -3$ y $x = 3$ son asíntotas verticales, tal como se aprecia en el gráfico de la función.

Observación 2.5.7

Las funciones racionales se comportan de forma distinta en los ceros del denominador, tal como vimos en los ejemplos 2.2.1.

Ejemplo 2.5.8

Para las funciones f , g , h y t determinar los límites laterales en -2 y 2 . Escribir la ecuación de la asíntota vertical si corresponde.

$$1. f(x) = \frac{(x-2)^2}{4-x^2}$$

$$3. h(x) = \frac{2x-x^2}{(x+2)(x-2)^3}$$

$$2. g(x) = \frac{(x-2)}{4-x^2}$$

$$4. t(x) = \frac{x-4}{4-x^2}.$$

Solución

$$1. \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{(x-2)^2}{4-x^2} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{(x-2)^2}{(2-x)(2+x)} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2-x}{2+x} = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{(x-2)^2}{4-x^2} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{(x-2)^2}{(2-x)(2+x)} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{2-x}{2+x} = \infty.$$

La recta $x = -2$ es asíntota vertical de la función f .

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2}{4-x^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2}{(2-x)(2+x)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2}{(2-x)(2+x)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-x}{2+x} = 0.$$

No hay asíntota vertical en $x = 2$ para f .

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x-2}{4-x^2} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x-2}{4-x^2} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x-2}{(2-x)(2+x)} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{-1}{2+x} = \infty.$$
$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x-2}{4-x^2} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x-2}{4-x^2} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x-2}{(2-x)(2+x)} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{-1}{2+x} = -\infty.$$

La recta $x = -2$ es asíntota vertical de la función g .

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-2}{4-x^2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-2}{(2-x)(2+x)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-1}{2+x} = -\frac{1}{4}.$$
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{4-x^2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{(2-x)(2+x)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-1}{2+x} = -\frac{1}{4}.$$

Luego, no hay asíntota vertical en $x = 2$ para g .

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2x-x^2}{(x+2)(x-2)^3} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{2x-x^2}{(x+2)(x-2)^3} = \infty.$$

La recta $x = -2$ es asíntota vertical para h .

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x-x^2}{(x-2)^3} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x(2-x)}{(x-2)^3} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x}{(x-2)^2} = -\infty.$$
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x-x^2}{(x-2)^3} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x(2-x)}{(x-2)^3} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-x}{(x-2)^2} = -\infty.$$

Luego, la recta $x = 2$ es asíntota vertical de la función h .

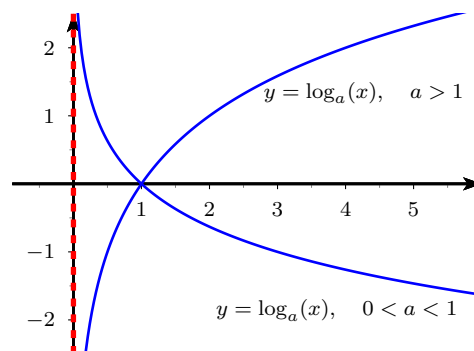
$$4. \quad \text{Notar que } t(x) = \frac{x-4}{4-x^2} = \frac{x-4}{(2-x)(2+x)}, \text{ por lo tanto}$$
$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x-4}{4-x^2} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x-4}{4-x^2} = -\infty.$$
$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-4}{4-x^2} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-4}{4-x^2} = \infty.$$

Las asíntotas verticales de t son $x = -2$ y $x = 2$.

Observación 2.5.9

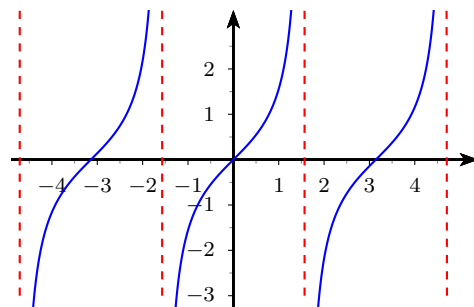
Hay asíntotas verticales para funciones no polinomiales, por ejemplo:

1. La recta $x = 0$ (eje y) es una asíntota vertical de las funciones f_a dadas por $f_a(x) = \log_a x$ ($a > 0$). En particular $x = 0$ es asíntota vertical para la función logaritmo natural, ya que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$.



2. Las rectas $x = a$, donde $a = \frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$, son asíntotas verticales de la función tangente, pues

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \operatorname{tg} x = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} \operatorname{tg} x = -\infty.$$



2.5.1 Forma indeterminada $\infty - \infty$.

Observación 2.5.10

A veces nos encontramos con una sustracción en que ambas componentes tienden a ∞ , por lo que no podemos restar los límites. Es necesario realizar primero las operaciones algebraicas de manera de eliminar la ambigüedad como en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.5.11

Encontrar $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right)$.

Solución

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)-2}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}.$$

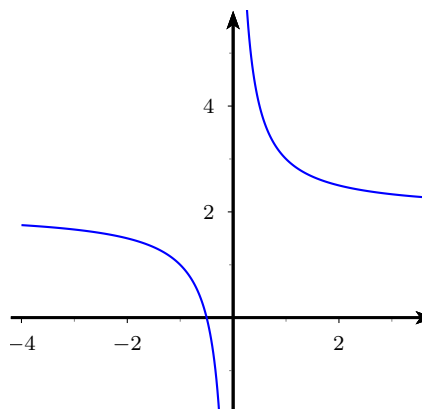
2.6 Límites al infinito

Analizaremos ahora funciones cuyos valores se “estabilizan” cuando x se hace muy grande, como también aquellas que pueden tomar valores muy grandes en una vecindad de un punto.

Consideremos la función f definida por $f(x) = \frac{2x+1}{x}$.

Claramente $\text{Dom } f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Estudiaremos el comportamiento de f cuando x se hace arbitrariamente grande.

x	$f(x)$
2	$\frac{5}{2}$
10	2,1
100	2,01
1000	2,001
10000	2,0001



Observamos que los valores de $f(x)$ se acercan a 2 cuando x es grande, conjeturamos que $|f(x) - 2|$ es arbitrariamente pequeño si se escoge x suficientemente grande.

Si es así escribimos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$$

y diremos que el límite de f cuando x tiende a infinito es 2.

En general, anotamos $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ para indicar que los valores de $f(x)$ tienden a L cuando x se hace más y más grande.

Para la función de nuestro ejemplo, también podemos analizar su comportamiento cuando x toma valores negativos cada vez más pequeños.

x	-2	-10	-100	-1000	-10000
$f(x)$	$\frac{3}{2}$	1,9	1,99	1,999	1,9999

Conjeturamos que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2.$$

Definición 2.6.1

Sea f una función real.

1. Si f está definida en algún intervalo de la forma (a, ∞) , entonces

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists M > 0, \forall x (x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon)$$

2. Si f está definida en algún intervalo de la forma $(-\infty, a)$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N < 0, \forall x (x < N \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon).$$

Observación 2.6.2

Los teoremas de límites dados para $x \rightarrow a$ en Teorema 2.2.4 siguen siendo válidos al reemplazar por $x \rightarrow -\infty$ o $x \rightarrow \infty$.

Algunas propiedades adicionales.

- a) Si n es cualquier entero positivo, se tiene que: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$,
- b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(-x)$,
- c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f\left(\frac{1}{x}\right) = L$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = L$.

Observación 2.6.3

Se debe tener presente que los símbolos $-\infty$ e ∞ no representan números reales y no se puede usar la aritmética de la forma usual. Los símbolos $x \rightarrow -\infty$ o $x \rightarrow \infty$ solamente indican el comportamiento de la variable x .

Ejemplo 2.6.4

Evaluar los siguientes límites de funciones racionales:

1. Numerador y denominador del mismo grado.

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - x + 4}{x^2 + 2}$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - x^3}{1 + 2x^3}$.

2. El grado del numerador es menor que el grado del denominador.

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{2x^2 + 5x + 1}$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x^2 - 3x + 2}{1 + 2x^3}$.

Solución

1. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - x + 4}{x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left(3 - \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{2}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2}}{1 + \frac{2}{x^2}} = 3$,

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - x^3}{1 + 2x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 \left(\frac{1}{x^3} - 1\right)}{x^3 \left(\frac{1}{x^3} + 2\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x^3} - 1}{\frac{1}{x^3} + 2} = -\frac{1}{2}$.

2. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{2x^2 + 5x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left(\frac{4}{x}\right)}{x^2 \left(2 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4}{x}}{2 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{0}{2} = 0$,

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x^2 - 3x + 2}{1 + 2x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 \left(\frac{6}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right)}{x^3 \left(\frac{1}{x^3} + 2\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{6}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}}{\frac{1}{x^3} + 2} = 0$.

Observación 2.6.5

Sean f y g dos funciones polinomiales.

1. Si $\text{grado}(f) = \text{grado}(g) = n$, entonces $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_n}{b_n}$.

2. Si $\text{grado}(f) < \text{grado}(g)$, entonces $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Definición 2.6.6

Diremos que f tiene como **asíntota horizontal** a la recta $y = L$, si

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \quad \text{o} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

Ejemplo 2.6.7

Estudiar la existencia de asíntotas horizontales de las funciones dadas por:

1. $f_1(x) = \frac{1}{2(x+1)}$

3. $h_1(x) = \frac{x^4 + 1}{x^2}$

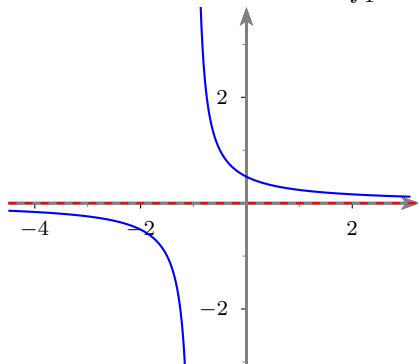
2. $g_1(x) = \frac{2x+3}{2-x}$

4. $f_2(x) = \frac{3x^2}{x^2 - 1}$

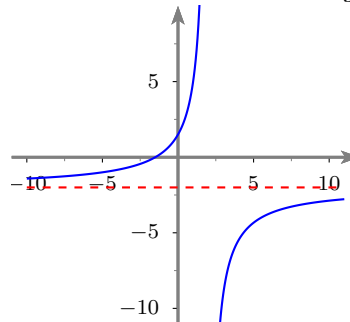
Solución

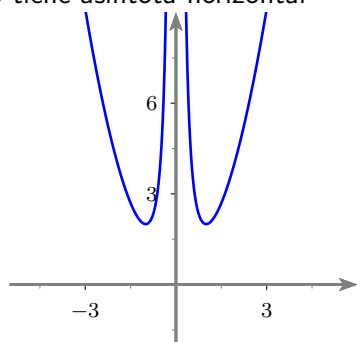
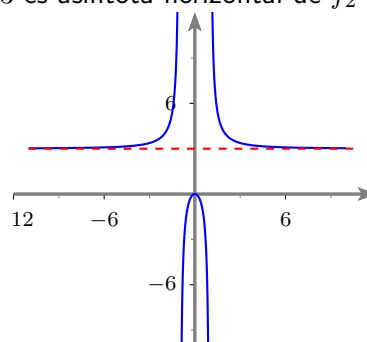
Considerando $\lim_{x \rightarrow \infty}$ (o $\lim_{x \rightarrow -\infty}$) tenemos en cada caso:

1) $y = 0$ es asíntota horizontal de f_1



2) $y = -2$ es asíntota horizontal de g_1



3) h_1 no tiene asíntota horizontal4) $y = 3$ es asíntota horizontal de f_2 **Notación 2.6.8**

La notación $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ se usa para indicar que los valores $f(x)$ crecen indefinidamente cuando x tiende a infinito.

Se asocian significados análogos a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty \quad y \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty,$$

EJEMPLO.

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty,$
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty,$
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - 2x) = \infty,$
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x}{4 - x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 2}{\frac{4}{x} - 1} = -\infty,$
5. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4 - 3x^2 + 2x}{5x^3 + 2x} = -\infty,$
6. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4 - 3x^2 + 2x}{5x^2 + 2x} = \infty.$

Observación 2.6.9

Sean f y g dos funciones polinomiales.

Si $\text{grado}(f) > \text{grado}(g)$, entonces $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$ dependiendo de la paridad de la diferencia de los grados y de los coeficientes principales de f y de g .

2.6.1 Límites de la forma $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)}$

Proposición 2.6.10

Sean f y g funciones reales.

1. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ con $L, M \in \mathbb{R}$. Si $L^M \in \mathbb{R}$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = L^M.$$

2. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$, se tiene que

a) si $|L| < 1$ entonces $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = 0$,

b) si $|L| > 1$ entonces $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = \infty$.

Observación 2.6.11

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L < -1$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ entonces $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)}$ no existe,

ya que $L^{2n} > L^2 > 0$ y $L^{2n+1} < L < 0$.

La siguiente proposición es fundamental en lo que sigue, su demostración requiere de herramientas más avanzadas, por lo que la aceptaremos y utilizaremos sin ella.

Proposición 2.6.12

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

2. Si $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = +\infty$, donde $u(x) \neq 0$ para todo $x \neq a$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(1 + \frac{1}{u(x)}\right)^{u(x)} = e.$$

3. Si $f(x) = 1 + u(x)$ donde $u(x) \rightarrow 0$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) u(x)}.$$

Ejemplo 2.6.13

Calcular los siguientes límites:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{\frac{1}{x^2}}$

2. $\lim_{x \rightarrow 1} (1 + \sqrt[3]{x-1})^{\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{sen} 2x}{x} \right)^{x-1} = 2^{-1}$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{2x-3} \right)^{x^2+1}$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+2}{x+1} \right)^{5x+2}$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x} \right)^{x-1}$

7. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+9}{2x+5} \right)^{x+3}$

8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 + x + 3} \right)^{2x+1}$

Solución

1. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{\frac{1}{x^2}} = e,$

2. $\lim_{x \rightarrow 1} (1 + \sqrt[3]{x-1})^{\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}} = e,$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{sen} 2x}{x} \right)^{x-1} = 2^{-1},$ pues $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{x} = 2$ y $\lim_{x \rightarrow 0} x - 1 = -1,$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{2x-3} \right)^{x^2+1} = 0,$ pues $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{2x-3} \right) = \frac{1}{2} < 1$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 + 1 = \infty,$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+2}{x+1} \right)^{5x+2} = \infty,$ pues $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+2}{x+1} \right) = 3$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} 5x + 2 = \infty,$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x} \right)^{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{3}{x} \right)^{\frac{x}{3}} \right)^{\frac{(x-1)3}{x}} = e^3,$

7. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+9}{2x+5} \right)^{x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2x+9}{2x+5} - 1 \right)^{x+3}$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{4}{2x+5} \right)^{\frac{2x+5}{4}} \right)^{\frac{4(x+3)}{2x+5}} = e^2,$

8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 + x + 3} \right)^{2x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \left(\frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 + x + 3} - 1 \right) \right)^{2x+1}$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{-3x+1}{x^2+x+3} \right)^{\frac{x^2+x+3}{-3x+1}} \right)^{\frac{(2x+1)(-3x+1)}{x^2+x+3}} = e^{-6}.$

Ejemplo 2.6.14

Sean α y β números reales que satisfacen la relación $5\alpha + 2\beta = 7$. Determine α y β tal que se cumple que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1} \right)^{2\alpha x + \beta x} = \lim_{x \rightarrow 1} e^{\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}}$$

Solución

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1} \right)^{2\alpha x + \beta x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2x+1}{2x-1} - 1 \right)^{(2\alpha+\beta)x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{2x-1} \right)^{(2\alpha+\beta)x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{2x-1}{2}} \right)^{\frac{2x-1}{2}} \right]^{\frac{2}{2x-1} \cdot (2\alpha+\beta)x} \\ &= e^{(2\alpha+\beta)} \end{aligned}$$

Ahora calcularemos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} e^{\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}} &= e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}} \stackrel{(*)}{=} e^{\frac{1}{2}} \\ (*) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} e^{2\alpha+\beta} &= e^{\frac{1}{2}} \\ 2\alpha + \beta &= \frac{1}{2} \\ 4\alpha + 2\beta &= 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{cases} 5\alpha + 2\beta = 7 \\ 4\alpha + 2\beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 6 \Rightarrow 24 + 2\beta = 1 \Rightarrow \beta = -\frac{23}{2}$$

2.7 Continuidad

En la definición de $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ consideramos siempre $x \neq a$. Hemos visto a través de los ejemplos que este límite puede existir aunque f no esté definida en a ; en otros casos, $a \in \text{Dom } f$ y puede ocurrir que el límite sea distinto a $f(a)$ o que sea igual a $f(a)$. En este último caso estamos frente a una función que se dice continua en a .

Definición 2.7.1

Diremos que una función f es **continua** en $a \in \text{Dom } f$, si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

En caso contrario, se dice que f es discontinua en a o que f tiene una discontinuidad en a .

Observación 2.7.2

Notemos que la continuidad de f en a requiere de 3 condiciones:

- i) f está definida en a , es decir $a \in \text{Dom } f$
- ii) existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$
- iii) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Si no se cumple una de estas condiciones la función f tiene una discontinuidad en a .

Analizaremos continuidad para distintas funciones:

- Recordemos que la función valor absoluto está definida por tramos, a saber:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Claramente la función es continua para $x < 0$ y para $x > 0$, ya que son funciones lineales. Por otro lado:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} |x| &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} |x| &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = 0 \end{aligned}$$

Como $|0| = 0$, se tiene que la función valor absoluto es continua en 0. Por lo tanto la función es continua para cada $x \in \mathbb{R}$.

- La función dada por $g_1(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$ es discontinua en 1.

Notemos que $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x - 2) = -1$, pero $1 \notin \text{Dom } f$.

3. La función h_1 dada por $h_1(x) = \begin{cases} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3} & \text{si } x \geq 0, x \neq 9 \\ 6 & \text{si } x = 9 \end{cases}$

es continua en $x = 9$, ya que $\lim_{x \rightarrow 9} h_1(x) = 6$ y $h_1(9) = 6$.

4. La función f_2 dada por $f_2(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} & \text{si } x \neq 1, \\ 0 & \text{si } x = 1, \end{cases}$

es discontinua en $x = 1$, ya que $\lim_{x \rightarrow 1} f_2(x) = -1$ y $f(1) = 0$.

5. La función g_2 dada por $g_2(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$ es discontinua en -1 , ya que:

$$\lim_{x \rightarrow -1} g_2(x) = \infty.$$

6. La función h_2 dada por $h_2(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x \leq -1, \\ x^2 + 1 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

es discontinua en -1 . Notemos que

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} h_2(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (2x + 3) = 1 = h_2(-1),$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} h_2(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x^2 + 1) = 2.$$

Observación 2.7.3

Hemos visto en los ejemplos anteriores que hay distintos tipos de situaciones respecto a la discontinuidad de una función:

Continuidad: Las funciones del ejemplo 1) y del ejemplo 3) son continuas en todo número real.

Discontinuidad: En el ejemplo 2) y ejemplo 4), el límite existe en a , sin embargo, $a \notin \text{Dom } f$ o este límite es distinto a $f(a)$. En el caso 5) el límite es infinito, y en 6), los límites laterales son distintos.

Definición 2.7.4

i) Se dice que f tiene una **discontinuidad evitable o removible** en a , si es discontinua en a , pero existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.

Notar que en este caso si se redefine la función asignando a $f(a)$ el valor del límite L , se obtiene una función continua en a , llamada la *prolongación continua* de f .

ii) Se dice que f tiene una **discontinuidad (esencial) infinita** en a si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ (o $-\infty$) o si alguno de sus límites laterales es infinito.

iii) Se dice que f tiene una **discontinuidad (esencial) por salto** en a , si los límites laterales de f en a existen, pero son distintos. La diferencia entre los límites laterales se llama *salto* de f en a .

Definición 2.7.5

Diremos que f es continua por la derecha en a , si

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a).$$

Del mismo modo diremos que f es continua por la izquierda en a si

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a).$$

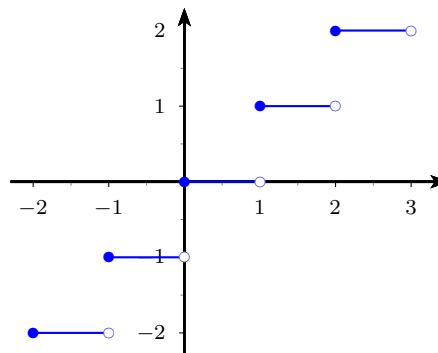
Una función f es continua en un intervalo, si lo es en cada punto del intervalo.

Si un intervalo incluye un extremo se tendrá continuidad por la derecha o continuidad por la izquierda según corresponda.

Consideremos la función parte entera, $f(x) = [x]$.

Tenemos que para cada entero n , f es continua por la derecha, y es discontinua por la izquierda, pues

- i) $\lim_{x \rightarrow n^+} f(x) = f(n) = n$,
- ii) $\lim_{x \rightarrow n^-} f(x) = n - 1 \neq f(n)$.

**Ejemplo 2.7.6**

Probar que la función f dada por $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$, es continua en su dominio.

Solución

La función f es continua en su dominio, $[-3, 3]$, pues

- i) si $a \in (-3, 3)$ entonces $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \sqrt{9 - a^2} = f(a)$,
- ii) $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = 0 = f(-3)$,
- iii) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 0 = f(3)$.

Ejemplo 2.7.7

Determinar los intervalos de continuidad de la función g definida por

$$g(x) = \frac{1 - \sqrt{x^2 - 1}}{2 - x}.$$

Solución

Tenemos que el $\text{Dom } g = (-\infty, -1] \cup [1, 2) \cup (2, \infty)$ y la función es continua en estos intervalos.

2.7.1 Propiedades de las funciones continuas**Teorema 2.7.8**

Si las funciones f y g son continuas en a y C es una constante, entonces las siguientes funciones son continuas en a :

$$f + g, f - g, Cf, f \cdot g \text{ y } \frac{f}{g} \text{ si } g(a) \neq 0.$$

Observación 2.7.9

Considerando las propiedades algebraicas de los límites, se verifica que las siguientes funciones son continuas en todos los puntos de su dominio:

- Funciones algebraicas
- Funciones exponenciales
- Funciones logarítmicas
- Funciones trigonométricas
- Funciones trigonométricas inversas

El siguiente teorema justifica el cambio de variables para el cálculo de límites:

Teorema 2.7.10

Si f es continua en b y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} g(x)\right) = f(b)$$

DEMOSTRACIÓN.

Como f es continua en b , se cumple que, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que si $|x - b| < \delta_1$ entonces

$$|f(x) - f(b)| < \epsilon$$

Por otro lado, como $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$, dado este δ_1 , existe δ_2 tal que si $|x - a| < \delta_2$ entonces

$$|g(x) - b| < \delta_1$$

Por lo tanto, si $|x - a| < \delta_2$ entonces $|g(x) - b| < \delta_1$, y así $|f(g(x)) - f(b)| < \epsilon$. ■

Ejemplo 2.7.11

Calcular $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a^h - 1)}{h}$

Solución

Para calcular $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a^h - 1)}{h}$, haremos la sustitución

$$a^h - 1 = p \Rightarrow a^h = 1 + p,$$

entonces

$$h \ln a = \ln(p + 1) \Rightarrow h = \frac{\ln(p + 1)}{\ln a}.$$

Así,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a^h - 1)}{h} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p \ln a}{\ln(p + 1)} = \frac{\ln a}{\lim_{p \rightarrow 0} \ln(p + 1)^{\frac{1}{p}}} = \frac{\ln a}{\ln \lim_{p \rightarrow 0} (p + 1)^{\frac{1}{p}}} = \ln a.$$

Ejemplo 2.7.12

Hallar los siguientes límites:

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} e^{x^2 - x} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 2} \ln \left(\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} \right) \quad 3. \lim_{x \rightarrow 1} \arcsen \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x}.$$

Solución

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} e^{x^2 - x} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} x^2 - x} = e^0 = 1.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 2} \ln \left(\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} \right) = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x - 1)}{x - 2} \right) = \ln 1 = 0.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 1} \arcsen \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x} = \arcsen \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x} = \arcsen \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}.$$

Ejemplo 2.7.13

Encontrar los valores de las constantes a y b para que la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a(x^3 - x)}{3(x+1)} & \text{si } x < -1 \\ 2ax + b & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{(1 - \cos x) \operatorname{sen} 4x}{x^2 \operatorname{sen} x} & \text{si } 0 < x < \pi \end{cases}$$

sea continua en $(-\infty, \pi)$.

Solución

Primero calcularemos el límite cuando x se aproxima a -1

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{a(x^3 - x)}{3(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{ax(x-1)(x+1)}{3(x+1)} = \frac{2a}{3}$$

Además, $\lim_{x \rightarrow -1^+} (2ax + b) = -2a + b$

Luego,

$$-2a + b = \frac{2a}{3} \Rightarrow -6a + 3b = 2a \Rightarrow a = \frac{3b}{8}$$

Por otro lado, cuando x se aproxima a 0 , tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} 2ax + b = b$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 - \cos x) \operatorname{sen} 4x}{x^2 \operatorname{sen} x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 - \cos x)}{x^2} \cdot \frac{\frac{4 \operatorname{sen} 4x}{\operatorname{sen} x}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} \cdot \frac{\frac{4 \operatorname{sen} 4x}{\operatorname{sen} x}}{x} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Así, $b = 2$ y como $a = \frac{3b}{8}$, entonces $a = \frac{3}{4}$

2.7.2 Teoremas importantes de continuidad

A continuación se enunciarán algunos teoremas referentes a la continuidad, la demostración se escapa de los contenidos de este libro, por lo que se ha omitido.

Teorema 2.7.14

Si f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f alcanza su valor máximo y su valor mínimo en puntos del intervalo, es decir:

$$\exists \alpha \in [a, b] \text{ tal que } \forall x \in [a, b], f(\alpha) = m \leq f(x).$$

$$\exists \beta \in [a, b] \text{ tal que } \forall x \in [a, b], f(x) \leq f(\beta) = M.$$

Los siguientes ejemplos ilustran el teorema anterior.

1. La función $f : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 2x - x^2$ es continua. Entonces tenemos que $m = f(-1) = -3$ y $M = f(1) = 1$.

2. La función g con dominio $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ dada por $g(x) = \frac{1}{1-x^2}$ es continua en su dominio (intervalo abierto) $(-1, 1)$.

Posee valor mínimo $m = f(0) = 1$, pero no posee un valor máximo en el intervalo $(-1, 1)$.

3. La función $h : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1 \\ 1 - x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

no es continua en 1, y la función no alcanza su valor máximo en el intervalo.

Teorema 2.7.15: Teorema de Bolzano

Si f es continua en $[a, b]$ y si además $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, entonces existe por lo menos un punto $x_0 \in]a, b[$ tal que $f(x_0) = 0$.

Observación 2.7.16

Este teorema nos da una herramienta para identificar intervalos en los cuales se encuentran las soluciones de una ecuación dada.

Ejemplo 2.7.17

1. Mostrar que: $f(x) = x^3 + 2x - 1$ tiene un cero en $[0, 1]$.
2. Mostrar que la ecuación $\sqrt[3]{x-1} + \sqrt{x+1} = \frac{3}{x(x+1)}$ tiene una raíz real.

Solución

1. Como f es un polinomio, es una función continua en $\mathbb{R}$ y como

$$f(0) = -1 \quad \text{y} \quad f(1) = 2$$

son de signos distintos, el teorema de Bolzano nos dice que existe $c \in (0, 1)$ tal que $f(c) = 0$.

2. Sea f la función definida por

$$f(x) = \sqrt[3]{x-1} + \sqrt{x+1} - \frac{3}{x(x+1)}.$$

Es claro que esta función es continua en $[1, 2]$ ya que los números donde podríamos tener discontinuidad son $x = -1$ y $x = 0$, ambos menores a 1.

Notemos que $f(1) = 0 + \sqrt{2} - \frac{3}{2} < 0$ y $f(2) = 1 + \sqrt{3} - \frac{1}{2} > 0$.

Como f es continua en $[1, 2]$ y $f(1) < 0 < f(2)$, por el teorema de Bolzano existe $c \in [1, 2]$ tal que $f(c) = 0$.

Luego $\sqrt[3]{c-1} + \sqrt{c+1} - \frac{3}{c(c+1)} = 0$, por lo tanto

$$\sqrt[3]{c-1} + \sqrt{c+1} = \frac{3}{c(c+1)},$$

de donde se tiene que c es una solución real de la ecuación, esta solución se encuentra entre 1 y 2.

Teorema 2.7.18: Teorema del Valor Intermedio

Si f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y K es cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = K$.

Es decir, si f es una función continua en $[a, b]$, entonces si x varía entre a y b , la función toma todos los valores entre $f(a)$ y $f(b)$.

Ejemplo 2.7.19

Verifique el Teorema del Valor Intermedio para $f(x) = \sqrt{2x-1}$ en el intervalo $[1, 5]$ con $K = 2$.

Solución

f es continua en $[1, 5]$, pues $[1, 5] \subseteq \text{Dom } f = [\frac{1}{2}, \infty)$.

Como $1 = f(1) < 2 < f(5) = 3$, existe $c \in (1, 5)$ tal que $f(c) = 2$.

En efecto $\sqrt{2c-1} = 2 \Leftrightarrow 2c-1 = 4 \Leftrightarrow c = \frac{5}{2}$.

2.8 Ejercicios Resueltos

1. Calcule los siguientes lmites si ellos existen:

$$a) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt[3]{2x}}{\sqrt{x} - 2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(2x^2 + 3x + 1)}{x}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(3x)}{1 - 2\cos(x)}$$

Solución

a) Multiplicamos la expresión por un 1 conveniente.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt[3]{2x}}{\sqrt{x} - 2} &\cdot \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 2} \cdot \frac{4 + 2\sqrt[3]{2x} + \sqrt[3]{4x^2}}{4 + 2\sqrt[3]{2x} + \sqrt[3]{4x^2}} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(8 - 2x) \cdot (\sqrt{x} + 2)}{(x - 4)(4 + 2\sqrt[3]{2x} + \sqrt[3]{4x^2})} \\ &= -2 \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x - 4) \cdot (\sqrt{x} + 2)}{(x - 4)(4 + 2\sqrt[3]{2x} + \sqrt[3]{4x^2})} \\ &= -2 \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x} + 2)}{(4 + 2\sqrt[3]{2x} + \sqrt[3]{4x^2})} \\ &= -2 \cdot \frac{4}{12} \\ &= -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

b) Escribiremos el cociente como un producto.

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(2x^2 + 3x + 1)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \cdot \ln(2x^2 + 3x + 1) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(2x^2 + 3x + 1)^{\frac{1}{x}} \\
 &= \ln \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} (2x^2 + 3x + 1)^{\frac{1}{x}} \right) \\
 &= \ln \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + (2x^2 + 3x))^{\frac{(2x^2 + 3x)}{(2x^2 + 3x) \cdot x}} \right) \\
 &= \ln \left(\left[\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + (2x^2 + 3x))^{\frac{1}{(2x^2 + 3x)}} \right]^{\lim_{x \rightarrow 0^+} (2x + 3)} \right) \\
 &= \ln(e^3) = 3
 \end{aligned}$$

c) Realizamos el cambio de variable $a = x - \frac{\pi}{3} \Rightarrow$ cuando $x \rightarrow \frac{\pi}{3}$, $a \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}
 \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\sin(3(a + \frac{\pi}{3}))}{1 - 2 \cos(a + \frac{\pi}{3})} &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\sin(3a + \pi)}{1 - 2 \cos(a + \frac{\pi}{3})} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\sin(3a) \cos(\pi) + \sin(\pi) \cos(3a)}{1 - 2(\cos(\frac{\pi}{3}) \cos(a) - \sin(\frac{\pi}{3}) \sin(a))} \\
 &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{-\sin(3a)}{1 - 2(\frac{\cos(a)}{2} - \frac{\sqrt{3} \sin(a)}{2})} \\
 &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{-\sin(3a)}{1 - \cos(a) + \sqrt{3} \sin(a)} \cdot \frac{\frac{3}{3a}}{\frac{1}{a}} \\
 &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{-\frac{3 \sin(3a)}{3a}}{\frac{1 - \cos(a)}{a} + \frac{\sqrt{3} \sin(a)}{a}} \\
 &= \frac{-3}{0 + \sqrt{3}} = -\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

2. Encuentre el(los) valor(es) de $c \in \mathbb{R}$ de manera que el siguiente límite sea finito.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{cx^2 - 4}{5 - \sqrt{3x^2 + 13}}$$

Calcule los respectivos límites para dichos valores de c .

Solución

Nótese que

$$5 - \sqrt{3(2)^2 + 13} = 0$$

Por lo tanto para que el límite pueda ser finito necesitamos que

$$4c - 4 = 0$$

$$4(c - 1) = 0$$

Por lo tanto los posibles $c \in \mathbb{R}$ que buscamos que para el límite sea finito es solo $c = 1$.

Si $c = 1$, calculemos

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{5 - \sqrt{3x^2 + 13}}$$

Multiplicar por la expresión conjugada de $5 - \sqrt{3x^2 + 13}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{5 - \sqrt{3x^2 + 13}} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 4)}{(5 - \sqrt{3x^2 + 13})} \frac{(5 + \sqrt{3x^2 + 13})}{(5 + \sqrt{3x^2 + 13})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)(5 + \sqrt{3x^2 + 13})}{25 - 3x^2 - 13} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)(5 + \sqrt{3x^2 + 13})}{3(2 - x)(2 + x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(5 + \sqrt{3x^2 + 13})}{3} \\ &= -\frac{10}{3} \end{aligned}$$

3. Calcule el siguiente límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + x \operatorname{sen}(x)}{x^3 + 3 \operatorname{sen}^2(2x) + x^2}$$

Solución

Notemos que

$$\frac{3x^2 + x \operatorname{sen}(x)}{x^3 + 3 \operatorname{sen}^2(2x) + x^2} = \frac{x^2 \left(3 + \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \right)}{x^2 \left(x + \frac{3 \operatorname{sen}^2(2x)}{x^2} + 1 \right)}, \quad x \neq 0$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + x \operatorname{sen}(x)}{x^3 + 3 \operatorname{sen}^2(2x) + x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \left(3 + \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \right)}{x^2 \left(x + \frac{12 \operatorname{sen}^2(2x)}{4x^2} + 1 \right)} \\&= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \left(3 + \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \right)}{\lim_{x \rightarrow 0} \left(x + \frac{12 \operatorname{sen}^2(2x)}{4x^2} + 1 \right)} \\&= \frac{3 + 1}{0 + 12 + 1} = \frac{4}{13}\end{aligned}$$

4. Sea k un real distinto de 0. Encontrar el valor de k tal que el siguiente límite sea e^2 ,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-3}{x-4} \right)^{kx+k}$$

Solución

Escribiremos de una manera adecuada,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-3}{x-4} \right)^{kx+k} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x-4} \right)^{kx+k} \\&= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x-4} \right)^{x-4} \right]^{\frac{kx+k}{x-4}} \\&= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{kx+k}{x-4}}\end{aligned}$$

Como necesitamos que el valor del límites sea e^2 , entonces $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{kx+k}{x-4} = 2 \rightarrow k = 2$.

5. Calcule los valores de las constantes a y b de modo que la función sea continua en $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3x + 5, & \text{si } x < -1 \\ ax + b, & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ \operatorname{sen} \frac{(x^2 - x)\pi}{4}, & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Solución

Se debe cumplir que

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} (2x^2 - 3x + 5) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (ax + b) \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax + b) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \operatorname{sen} \frac{(x^2 - x)\pi}{4}$$

Calculamos cada límite

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1^-} (2x^2 - 3x + 5) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} (ax + b) \\ 10 &= -a + b\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2^+} \sin \frac{(x^2 - x)\pi}{4} &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax + b) \\ 1 &= 2a + b\end{aligned}$$

Finalmente, se debe resolver el sistema

$$\begin{aligned}-a + b &= 10 \\ 2a + b &= 1\end{aligned}$$

De donde

$$a = -3, \quad b = 7.$$

6. Sean f y g funciones continuas en $[a, b]$ tales que $f(a) > g(a)$ y $f(b) < g(b)$. Demuestre que existe $x_0 \in (a, b)$ tal que $f(x_0) = g(x_0)$

Solución

Sea $h(x) = f(x) - g(x)$, función continua en $[a, b]$ (diferencia de funciones continuas)

como $f(a) > g(a)$ entonces $h(a) = f(a) - g(a) > 0$

como $f(b) < g(b)$ entonces $h(b) = f(b) - g(b) < 0$

por lo tanto al ser $h(x)$ continua en $[a, b]$ y $h(a) > 0$ y $h(b) < 0$ entonces existe $x_0 \in (a, b)$ tal que $h(x_0) = 0$ y por lo tanto $f(x_0) = g(x_0)$

7. Pruebe que el polinomio

$$p(x) = x^5 - 2x^3 - 5x + 3$$

tiene al menos 2 raíces reales distintas en el intervalo $[-2, 2]$

Solución

Como la función es un polinomio, es continua en todo $\mathbb{R}$, y por lo tanto es continua en cualquier intervalo de la forma $[a, b]$.

Para resolver este problema usaremos al menos dos veces el teorema del valor intermedio en intervalos adecuados. De hecho se puede usar 3 veces.

- Teorema del valor intermedio aplicado en $[-2, 0]$. Como

$$p(-2) = -32 + 16 + 10 + 3 = -3 < 0$$

y

$$p(0) = 3 > 0$$

usando el teorema del valor intermedio en $[-2, 0]$ se concluye que existe $c_1 \in (-2, 0)$ tal que

$$p(c_1) = 0.$$

- Teorema del valor intermedio aplicado en $[0, 1]$. Como

$$p(0) = 3 > 0$$

y

$$p(1) = -3 < 0$$

usando el teorema del valor intermedio en $[0, 1]$ se concluye que existe $c_2 \in (0, 1)$ tal que

$$p(c_2) = 0.$$

- Teorema del valor intermedio aplicado en $[1, 2]$. Como

$$p(1) = -3 < 0$$

y

$$p(2) = 9 > 0$$

usando el teorema del valor intermedio en $[1, 2]$ se concluye que existe $c_3 \in (1, 2)$ tal que

$$p(c_3) = 0.$$

Las tres raíces encontradas son distintas pues pertenecen a intervalos distintos.

Números complejos

3.1 Primeros conceptos

Encontrar solución a una ecuación tan sencilla como $x^2 + 1 = 0$ nos lleva al hecho imposible en $\mathbb{R}$ de que el cuadrado de un número real sea negativo. Tal situación nos obliga a definir un nuevo conjunto numérico donde tal posibilidad tenga sentido, permitiendo encontrar soluciones a ecuaciones como la indicada anteriormente. Este nuevo conjunto numérico está definido como:

$$\mathbb{C} = \{z = (a, b) \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\},$$

denominado **conjunto de los números complejos**. La primera componente se llama parte real, denotada por $\text{Re}(z)$ y la segunda componente se denomina parte imaginaria $\text{Im}(z)$.

Geométricamente un número complejo $z = (a, b)$ se representa como un vector que comienza en el origen $(0, 0)$ del plano y termina en el punto (a, b) . El eje de las abscisas se llama eje real, denotado por Re y el de las ordenadas eje imaginario, denotado por Im , además el plano recibe el nombre plano complejo o Argand.

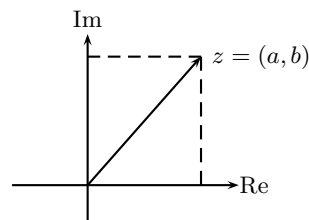


Figura 3.1: Representación geométrica de $z = (a, b)$.

Los complejos z de la forma $z = (0, b)$, $b \in \mathbb{R}$ se llaman imaginarios puros. Por su parte, los complejos z tal que $z = (a, 0)$, $a \in \mathbb{R}$ se denominan reales puros. Los reales puros se identifican con el conjunto de los número reales $\mathbb{R}$, por tanto, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Definición 3.1.1 (Igualdad de complejos)

Dos complejos $z_1 = (a, b)$ y $z_2 = (c, d)$ son iguales si y sólo si sus partes reales son iguales y sus partes imaginarias son iguales, es decir:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow a = c \wedge b = d.$$

Ejemplo 3.1.2

Encuentre $x, y \in \mathbb{R}$ tal que el complejo $z_1 = (x + 5, 13)$ sea igual a $z_2 = (20, 3 + 2y)$.

Solución

Igualando las partes reales y las partes imaginarias tenemos $x + 5 = 20$ y $3 + 2y = 13$, de donde $x = 15$ e $y = 5$.

3.1.1 Estructura Algebraica de $\mathbb{C}$

En $\mathbb{C}$ se define la suma de dos números complejos $z_1 = (a_1, b_1)$ y $z_2 = (a_2, b_2)$ como:

$$z_1 + z_2 = (a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2).$$

Por su parte, se define el producto de z_1 y z_2 como:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1).$$

Definición 3.1.3 (Forma normal o canónica)

Considerando la definición anterior, podemos decir que $(a, b) = (a, 0) + (0, b)$ y $(0, b) = (0, 1)(b, 0)$.

Luego, $(a, b) = (a, 0) + (0, 1)(b, 0) = a + bi$, donde $i = (0, 1)$.

Así, podemos definir la forma normal o canónica de un número complejo como:

$$z = (a, b) = a + bi$$

Notemos que:

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = -1.$$

Además, note que:

$$\begin{aligned} i^3 &= i \cdot i^2 = i \cdot -1 = -i \\ i^4 &= i^2 \cdot i^2 = -1 \cdot -1 = 1 \end{aligned}$$

Con esta nueva escritura tenemos que las operaciones de suma y producto quedan escritas como:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= a + bi + c + di = (a + c) + (b + d)i \\ z_1 \cdot z_2 &= (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i \end{aligned}$$

Sean $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, entonces la suma y producto de números complejos tienen las siguientes propiedades:

1. Conmutatividad:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$$
2. Asociatividad:

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$$

$$z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$$
3. Existencia de Neutros:
 - Para todo $z_1 \in \mathbb{C}$, existe $0 \in \mathbb{C}$ tal que $z_1 + 0 = 0 + z_1 = z_1$.
 - Para todo $z_1 \in \mathbb{C}$, existe $1 \in \mathbb{C}$ tal que $z_1 \cdot 1 = 1 \cdot z_1 = z_1$.
4. Existencia de inversos:
 - Para todo complejo $z = a + bi$, existe $-z = -a - bi$, tal que $z + (-z) = (-z) + z = 0$.
 - Para todo complejo $z = a + bi$ no nulo, existe $z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$, tal que $z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = 1$.
5. Distributividad del producto respecto a la suma:

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3.$$

De acuerdo a lo anterior decimos que $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ tiene estructura algebraica de cuerpo.

Proposición 3.1.4

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ es un dominio de integridad, es decir, si $z, w \in \mathbb{C}$ tales que $z \cdot w = 0$, entonces $z = 0 \vee w = 0$.

Esta proposición es especialmente útil para resolver ecuaciones

Ejemplo 3.1.5

Resuelva la ecuación $(z + i)^3 + (z - i)^3 = 0$.

Solución

Desarrollando los cubos de binomio y teniendo presente las potencias de la unidad imaginaria:

$$\begin{aligned}
 (z + i)^3 + (z - i)^3 &= 0 \\
 z^3 + 3z^2i + 3zi^2 + i^3 + z^3 - 3z^2i + 3zi^2 - i^3 &= 0 \\
 2z^3 - 6z &= 0 \\
 2z(z^2 - 3) &= 0,
 \end{aligned}$$

lo que implica $z_1 = 0$, $z_2 = \sqrt{3}$ y $z_3 = -\sqrt{3}$.

Definición 3.1.6 (Complejo conjugado)

Sea $z = a + bi \in \mathbb{C}$, el complejo conjugado de z , denotado por $\bar{z}$, es $\bar{z} = a - bi$.

Definición 3.1.7 (Módulo de un complejo)

Sea $z = a + bi \in \mathbb{C}$. Se define el módulo o valor absoluto de z , denotado por $|z|$, como

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Geoméricamente el módulo de un complejo z representa la longitud del vector asociado al complejo. Notemos que:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z) &\leq |\operatorname{Re}(z)| \leq |z|, \\ \operatorname{Im}(z) &\leq |\operatorname{Im}(z)| \leq |z|. \end{aligned}$$

Asociado a un número complejo no nulo $z = a + bi$ existen otros tres complejos que están en la circunferencia centrada en el origen y de radio $|z|$, estos son $\bar{z} = a - bi$, $-z = -a - bi$, $-\bar{z} = -a + bi$.

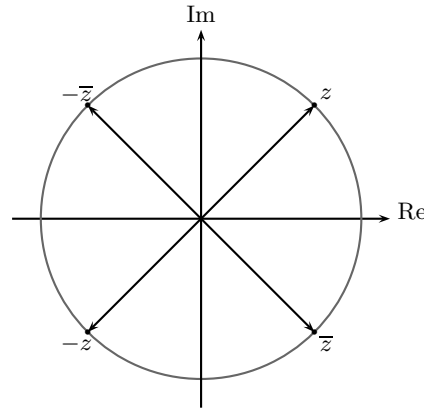


Figura 3.2: Representación geométrica de z , $\bar{z}$, $-z$ y $-\bar{z}$.

Proposición 3.1.8

Sean $z, w \in \mathbb{C}$, entonces:

- | | |
|---|---|
| 1. $\overline{\bar{z}} = z$ | 7. $ z \cdot w = z \cdot w $ |
| 2. $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z)$ | 8. $\left \frac{z}{w} \right = \frac{ z }{ w }, w \neq 0$ |
| 3. $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z)$ | 9. $z \cdot \bar{z} = z ^2$ |
| 4. $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$ | 10. $ z + w \leq z + w $ |
| 5. $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$ | 11. $ z - w \leq z - w $ |
| 6. $ z = \bar{z} $ | |

DEMOSTRACIÓN.

Demostraremos solo las propiedades 7. y 10., las restantes quedan propuestas como ejercicios al lector.

$$7. |z \cdot w|^2 = (z \cdot w)(\overline{z \cdot w}) = z \cdot w \cdot \bar{z} \cdot \bar{w} = z \cdot \bar{z} \cdot w \cdot \bar{w} = |z|^2 |w|^2 \Rightarrow |z \cdot w| = |z| \cdot |w|.$$

10. Por un lado tenemos:

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= (z + w) \cdot \overline{z + w} \\ &= (z + w) (\bar{z} + \bar{w}) \\ &= z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w} \\ &= |z|^2 + (z\bar{w} + w\bar{z}) + |w|^2 \\ &= |z|^2 + (z\bar{w} + \overline{z\bar{w}}) + |w|^2. \end{aligned}$$

Pero, $z\bar{w} + \overline{z\bar{w}} = 2 \operatorname{Re}(z\bar{w}) \leq 2|z \cdot \bar{w}| = 2|z||\bar{w}| = 2|z||w|$. Luego,

$$|z + w|^2 \leq |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2 \Rightarrow |z + w| \leq |z| + |w|.$$

■

Ejemplo 3.1.9

Considere el cuociente de números complejos: $z = \frac{2 - 3i}{-1 + 2i}$.

1. Escriba z en forma normal.
2. Determine el módulo de z .

Solución

1. Amplificando por el conjugado de $-1 + 2i$ tenemos:

$$\begin{aligned} z &= \frac{2 - 3i}{-1 + 2i} \cdot \frac{-1 - 2i}{-1 - 2i} \\ &= \frac{-2 - 6 - 4i + 3i}{(-1)^2 - (2i)^2} \\ &= -\frac{8}{5} - \frac{1}{5}i. \end{aligned}$$

$$2. |z| = \sqrt{\left(-\frac{8}{5}\right)^2 + \left(-\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{1}{5}\sqrt{65}.$$

Ejemplo 3.1.10

Resuelva la ecuación $z \cdot \bar{z} + 3(z - \bar{z}) = 4 - 3i$.

Solución

Consideremos $z = a + bi$, que reemplazado en la ecuación dada genera:

$$a^2 + b^2 + 6bi = 4 - 3i,$$

por la igualdad de números complejos, tenemos

$$a^2 + b^2 = 4 \quad (3.1)$$

$$6b = -3 \quad (3.2)$$

De (3.2) tenemos $b = -\frac{1}{2}$, lo que sustituido en (3.1) implica $a = \pm \frac{\sqrt{15}}{2}$. Por tanto, las soluciones de la ecuación son $z_1 = \frac{\sqrt{15}}{2} - \frac{1}{2}i$ y $z_2 = -\frac{\sqrt{15}}{2} - \frac{1}{2}i$.

Ejemplo 3.1.11

Demostremos que $|z + i| = |z - i| \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.

Solución

($\Leftarrow$) Si $z = a \in \mathbb{R}$, entonces $|a + i| = \sqrt{a^2 + 1} = |a - i|$.

($\Rightarrow$) Aplicando las propiedades del módulo y el conjugado tenemos:

$$\begin{aligned} |z + i| = |z - i| &\Rightarrow |z + i|^2 = |z - i|^2 \\ &\Rightarrow (z + i)(\overline{z + i}) = (z - i)(\overline{z - i}) \\ &\Rightarrow (z + i)(\bar{z} - i) = (z - i)(\bar{z} + i) \\ &\Rightarrow (z + i)(\bar{z} + i) = (z - i)(\bar{z} - i) \\ &\Rightarrow z\bar{z} + iz - i\bar{z} + 1 = z\bar{z} - iz + i\bar{z} + 1 \\ &\Rightarrow 2iz = 2i\bar{z} \\ &\Rightarrow z = \bar{z} \\ &\Rightarrow z \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.1.12

Encuentre dos números complejos que cumplen simultáneamente las siguientes condiciones:

- (i) La suma de ellos es $4 - 3i$
- (ii) La parte real de uno de ellos es 3
- (iii) El módulo del otro es $\sqrt{26}$

Solución

Sean z y w los números complejos buscados, luego por (ii), podemos decir que $z = 3 + ai$ y $w = b + ci$. Entonces, por el enunciado, se tiene

$$z + w = 4 - 3i \quad (3.3)$$

$$b^2 + c^2 = 26 \quad (3.4)$$

La ecuación (3.3) corresponde a:

$$(3 + b) + (a + c)i = 4 - 3i \Rightarrow \begin{cases} 3 + b = 4 \\ a + c = -3 \end{cases}$$

de donde, $b = 1$ y $a = -3 - c$. De (3.4) tenemos $c^2 = 26 - 1^2$, lo que implica $c = 5$ o $c = -5$.

Para $c = 5$, se tiene que $a = -8$ y para $c = -5$, se tiene que $a = 2$.

Finalmente, los complejos son $z = 3 + 2i$ y $w = 1 - 5i$, o bien $z = 3 - 8i$ y $w = 1 + 5i$.

Ejemplo 3.1.13

Sea w un número complejo no real. Encuentre el conjunto de todos los números complejos z tales que:

$$\frac{|z - w|}{|z - \overline{w}|} = 1$$

Solución

De acuerdo al enunciado tenemos:

$$\begin{aligned} |z - w| &= |z - \overline{w}| \\ (z - w)\overline{(z - w)} &= (z - \overline{w})\overline{(z - \overline{w})} \\ (z - w)(\overline{z} - \overline{\overline{w}}) &= (z - \overline{w})(\overline{z} - w) \\ z\overline{z} - z\overline{\overline{w}} - w\overline{z} + w\overline{\overline{w}} &= z\overline{z} - zw - \overline{z}\overline{w} + w\overline{w} \\ -z\overline{\overline{w}} - \overline{z}w &= -zw - \overline{z}\overline{w} \\ \overline{z}(\overline{w} - w) &= z(\overline{w} - w) \end{aligned}$$

pero como $w \neq \overline{w}$, se obtiene $\overline{z} = z$ es decir z es un número real.

3.2 Forma polar o trigonométrica

Se puede asignar, como se vio anteriormente, a cada número complejo $z = a + bi$ en el plano, un vector que conecta el punto con el origen. Este vector forma un ángulo $\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ con el eje real y tiene módulo $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Tal como se ve en la Figura 3.3.

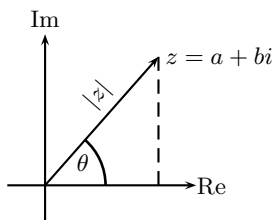


Figura 3.3: Representación geométrica del complejo $z = a + bi$.

Aplicando trigonometría¹ se puede representar el número complejo de la siguiente manera

$$a = |z| \cdot \cos \theta \qquad b = |z| \cdot \operatorname{sen} \theta$$

Definición 3.2.1

Llamaremos **forma polar o trigonométrica** de $z = a + bi$, con $a, b \in \mathbb{R}$, al número complejo escrito de la forma

$$z = |z| (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

con $|z|$ el módulo del complejo y $\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$.

Ejemplo 3.2.2

Escriba en forma polar el complejo $z = -1 + i$

Solución

Usando la definición, se tiene

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2} \qquad \theta = \arctan\left(\frac{1}{-1}\right) = \frac{3\pi}{4}$$

Por lo que z en forma polar sería

$$z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{4} \right)$$

¹ Aplique la definición de razones trigonométricas, tal como se vio en la sección 1.2

Teorema 3.2.3

Si $z_1 = |z_1|(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)$ y $z_2 = |z_2|(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)$.

Entonces

$$\text{i)} \quad z_1 \cdot z_2 = |z_1| |z_2| (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2))$$

$$\text{ii)} \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2))$$

DEMOSTRACIÓN.

Demostraremos solo i), el ítem ii) queda como ejercicio.

Usando la proposición 1.3.7 y el producto de números complejos, se tiene

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= |z_1|(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1) \cdot |z_2|(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2) \\ &= |z_1| |z_2| (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + i^2 \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 + i \cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2) \\ &= |z_1| |z_2| (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 + i(\operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2)) \\ &= |z_1| |z_2| (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)) \end{aligned}$$

■

3.2.1 Potencias de un complejo

La forma polar de un complejo resulta muy útil para calcular potencias de un número complejo.

Proposición 3.2.4: Fórmula de Moivre

Sea un número complejo $z = |z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$, entonces su n -ésima potencia está determinada por:

$$z^n = (|z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta))^n = |z|^n (\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta))$$

DEMOSTRACIÓN.

Haremos la demostración por inducción

Caso $n = 1$. Trivial

Caso $n = 2$. Se tiene que

$$\begin{aligned} (|z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta))^2 &= |z|^2 (\cos^2 \theta + 2 \cos \theta \cdot i \operatorname{sen} \theta + (i \operatorname{sen} \theta)^2) \\ &= |z|^2 (\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta + i \cdot 2 \cos \theta \operatorname{sen} \theta) \\ &= |z|^2 (\cos(2\theta) + i \operatorname{sen}(2\theta)) \end{aligned}$$

Se asume cierto $n = k \Rightarrow (|z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta))^k = |z|^k (\cos(k\theta) + i \operatorname{sen}(k\theta))$ y se demuestra para $n = k + 1$. Se tiene que:

$$\begin{aligned}
 (|z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta))^{k+1} &= |z|^{k+1} (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^k \cdot (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) \\
 &= |z|^{k+1} (\cos(k\theta) + i \operatorname{sen}(k\theta)) \cdot (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) \\
 &= |z|^{k+1} (\cos(k\theta) \cos \theta + i \operatorname{sen}(k\theta) i \operatorname{sen} \theta + \cos(k\theta) i \operatorname{sen} \theta + i \operatorname{sen}(k\theta) \cos \theta) \\
 &= |z|^{k+1} (\cos(k\theta) \cos \theta - \operatorname{sen}(k\theta) \operatorname{sen} \theta + i(\cos(k\theta) \operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen}(k\theta) \cos \theta)) \\
 &= |z|^{k+1} (\cos(k\theta + \theta) + i \operatorname{sen}(k\theta + \theta)) \\
 &= |z|^{k+1} (\cos((k+1)\theta) + i \operatorname{sen}((k+1)\theta))
 \end{aligned}$$

■

Ejemplo 3.2.5

Sea $z = \sqrt{3} - i$, calcule z^3

Solución

Primero debemos escribir el número complejo en su forma polar.

$$|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2 \qquad \theta = \arctan\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$$

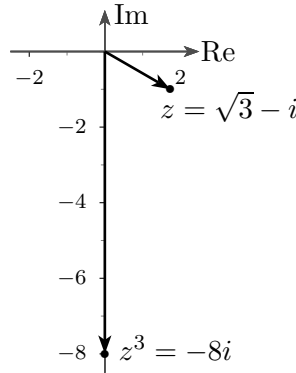
Usando la fórmula de Moivre, se tiene que:

$$\begin{aligned}
 z^3 &= 2^3 \left(\cos\left(3 \cdot \frac{11\pi}{6}\right) + i \operatorname{sen}\left(3 \cdot \frac{11\pi}{6}\right) \right) \\
 &= 8 \left(\cos\left(\frac{11\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{11\pi}{2}\right) \right) \\
 &= 8 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} \right)
 \end{aligned}$$

Sabiendo que $\cos \frac{3\pi}{2} = 0$ y que $\operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} = -1$, podemos expresar el número complejo en su forma canónica

$$z^3 = 8(0 + i \cdot (-1)) = -8i$$

Gráficamente resultaría:



3.2.2 Raíces de un número complejo

A diferencia de las potencias de un número complejo, calcular raíces de un número complejo generan más de una solución. Usted podrá recordar que en número reales, la unidad (1) tiene dos raíces cuadradas, a saber, -1 y 1 , ya que $(-1)^2 = 1^2 = 1$. De esta forma, para calcular raíces de un número complejo, se debe resolver la siguiente ecuación.

Sean $z = |z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$, $w = |w|(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$, dos números complejos expresados en su forma polar, de tal manera que $w^n = z$, para algún $n \in \mathbb{N}$.

Luego, siguiendo la fórmula de Moivre, se debe cumplir que:

$$w^n = z$$

$$w = |w|^n (\cos(n\alpha) + i \operatorname{sen}(n\alpha)) = |z| (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

Para que estos números complejos sean iguales se debe cumplir que:

$$|w| = |z|^{1/n} \quad \cos(n\alpha) = \cos \theta \quad \operatorname{sen}(n\alpha) = \operatorname{sen} \theta$$

Dada la periodicidad 2π de las razones trigonométricas seno y coseno, se debe cumplir que:

$$n\alpha = \theta + 2k\pi \quad \text{o bien} \quad \alpha = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \quad \text{para } k \in \mathbb{Z}$$

lo cual genera valores diferentes de α para $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Finalmente, podemos enunciar lo siguiente:

Definición 3.2.6 (Raíces de un número complejo)

Sea $z = |z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ y n un número natural. Entonces z tiene n raíces n -ésimas diferentes, determinadas por:

$$w_k = |z|^{1/n} \left[\cos \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right]$$

con $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$

Ejemplo 3.2.7

Calcule las raíces quintas de la unidad.

Solución

La unidad corresponde a $z = 1 + 0i$, por lo que en forma polar quedaría $z = 1(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)$. Luego, las raíces quintas de este complejo serían:

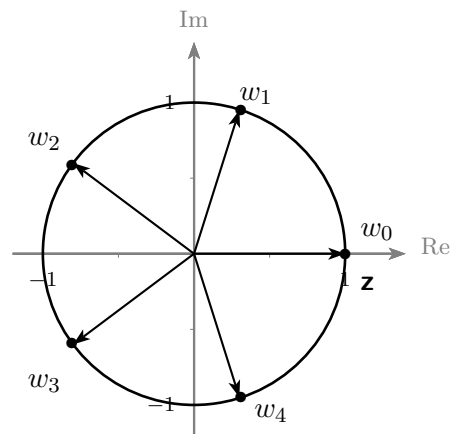
$$w_k = 1 \left[\cos \left(\frac{2k\pi}{5} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{2k\pi}{5} \right) \right]$$

para $k = 0, 1, 2, 3, 4$

Por lo tanto, las raíces quintas de la unidad son:

$$\begin{aligned} w_0 &= 1 \left[\cos 0 + i \operatorname{sen} 0 \right] \\ w_1 &= 1 \left[\cos \left(\frac{2\pi}{5} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{5} \right) \right] \\ w_2 &= 1 \left[\cos \left(\frac{4\pi}{5} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{4\pi}{5} \right) \right] \\ w_3 &= 1 \left[\cos \left(\frac{6\pi}{5} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{6\pi}{5} \right) \right] \\ w_4 &= 1 \left[\cos \left(\frac{8\pi}{5} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{8\pi}{5} \right) \right] \end{aligned}$$

Gráficamente



3.3 Ejercicios Resueltos

1. Si $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = -2 + i$ y $z_3 = -1 - i$ calcule:

a) $2z_1 + 3\overline{(z_2)} + |z_3|$

b) $\frac{z_1 + z_3}{1 + z_2}$

Solución

a) Aplicando definición y propiedades, se tiene

$$\begin{aligned} 2z_1 + 3\overline{(z_2)} + |z_3| &= 2(1 + 2i) + 3\overline{(-2 + i)} + |-1 - i| \\ &= 2 + 4i + 3(-2 - i) + \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} \\ &= 2 + 4i - 6 - 3i + \sqrt{1 + 1} \\ &= (\sqrt{2} - 4) + i \end{aligned}$$

b) Aplicando definición y propiedades, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{z_1 + z_3}{1 + z_2} &= \frac{1 + 2i - 1 - i}{1 - 2 + i} \\ &= \frac{i}{-1 + i} \\ &= \frac{i}{-1 + i} \cdot \frac{-1 - i}{-1 - i} \\ &= \frac{-i + 1}{(-1)^2 - i^2} \\ &= \frac{1 - i}{1 + 1} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \end{aligned}$$

2. Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $z = 4 \cdot (\cos(70^\circ) + i \operatorname{sen}(70^\circ))$ calcular z^3 y expréselo de la forma $a + bi$.

Solución

Usando la fórmula de Moivre, se tiene

$$\begin{aligned} z^3 &= \{4(\cos(70^\circ) + i \operatorname{sen}(70^\circ))\}^3 \\ &= 4^3(\cos(70^\circ \cdot 3) + i \operatorname{sen}(70^\circ \cdot 3)) \\ &= 64(\cos(210^\circ) + i \operatorname{sen}(210^\circ)) \\ &= 64\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) \\ &= -32\sqrt{3} - 32i \end{aligned}$$

3. Determinar el(los) valor(es) de k para que el cociente $\frac{-2 + ki}{k - i}$ sea:

- a) Un número real. ¿Qué número(s) es(son)?
- b) Un número imaginario puro. ¿Qué número(s) es(son)?

Solución

a) Amplificando por el conjugado del denominador, se tiene

$$\begin{aligned}\frac{-2 + ki}{k - i} \cdot \frac{k + i}{k + i} &= \frac{-2k - 2i + k^2i + ki^2}{k^2 - i^2} \\ &= \frac{-3k + (k^2 - 2)i}{k^2 + 1} \\ &= \frac{-3k}{k^2 + 1} + \frac{k^2 - 2}{k^2 + 1}i\end{aligned}$$

Luego es un número real si $k^2 - 2 = 0$, es decir para $k = \pm 2$.

b) El número es imaginario puro si $-3k = 0$, es decir si $k = 0$.

4. Realice las operaciones necesarias para escribir de la forma $a + bi$ la siguiente expresión:

$$\left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}\right)^8 - \left(\frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}i}{2}\right)^8$$

Solución

Transformando ambos números complejos a la forma polar, se tiene

$$\begin{aligned}\left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}\right)^8 - \left(\frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}i}{2}\right)^8 &= \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)i\right)^8 - \left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{4}\right)i\right)^8 \\ &= \left(\cos\left(\frac{16\pi}{3}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{16\pi}{3}\right)i\right) - \left(\cos(14\pi) + \operatorname{sen}(14\pi)i\right) \\ &= \left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right)i\right) - \left(\cos(0) + \operatorname{sen}(0)i\right) \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i - 1 \\ &= -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\end{aligned}$$

5. Encontrar z_1 y $z_2 \in \mathbb{C}$, tal que: $z_1 \cdot z_2 = 8$, y $z_1 + z_2 = 4$.

Solución

Despejando z_1 en la segunda condición, se obtiene $z_1 = 4 - z_2$.

Reemplazando en la primera condición, se obtiene

$$\begin{aligned}(4 - z_2)z_2 &= 8 \\ z_2^2 - 4z_2 + 8 &= 0\end{aligned}$$

De donde se obtiene que $z_2 = 2 \pm 2i$

- Si $z_2 = 2 + 2i$, entonces $z_1 = 2 - 2i$
- Si $z_2 = 2 - 2i$, entonces $z_1 = 2 + 2i$

Por lo tanto, los números complejos buscados son $2 + 2i$ y $2 - 2i$

6. Calcular usando forma polar y expresar el resultado en la forma $a + bi$,

$$\frac{(2\sqrt{3} - 2i)^8}{(-4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i)^6}$$

Solución

El numerador, queda expresado como

$$\begin{aligned}(2\sqrt{3} - 2i)^8 &= 4^8 \left(\cos\left(\frac{11\pi}{6} \cdot 8\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{11\pi}{6} \cdot 8\right) \right) \\ &= 4^8 \left(\cos\left(\frac{44\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{44\pi}{3}\right) \right) \\ &= 4^8 \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)\end{aligned}$$

Por su parte, el denominador

$$\begin{aligned}(-4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i)^6 &= 8^6 \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4} \cdot 6\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4} \cdot 6\right) \right) \\ &= 8^6 \left(\cos\left(\frac{9\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{9\pi}{2}\right) \right) \\ &= 8^6 (0 + i)\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}\frac{(2\sqrt{3} - 2i)^8}{(-4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i)^6} &= \frac{4^8 \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)}{8^6 i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{2^{16} \cdot 2^{-18} \left(-\frac{1}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)}{-1} \\ &= 2^{-2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{1}{8}i\end{aligned}$$

7. Dados los complejos $z_1 = 11\sqrt{3} - 8i$, $z_2 = 9\sqrt{3} - 6i$ y $z_3 = -4 + 4\sqrt{3}i$. Calcular los valores de a y b donde:

$$a + bi = \frac{(z_1 - z_2)^{10}}{(z_3)^8}$$

Solución

Acomodando los términos, transformando a forma polar y usando propiedades, se tiene

$$a + bi = \frac{(z_1 - z_2)^{10}}{(z_3)^8} = \frac{(11\sqrt{3} - 8i - 9\sqrt{3} + 6i)^{10}}{(-4 + 4\sqrt{3}i)^8} = \frac{(2\sqrt{3} - 2i)^{10}}{(-4 + 4\sqrt{3}i)^8}$$

De donde, $\frac{4^{10} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right)^{10}}{8^8 \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^8}.$

Así,

$$a + bi = \frac{2^{20} \left(\cos \left(\frac{11\pi}{6} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{11\pi}{6} \right) \right)^{10}}{2^{24} \left(\cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{3} \right) \right)^8} = 2^{-4} \cdot \frac{\left(\cos \left(\frac{55\pi}{3} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{55\pi}{3} \right) \right)}{\left(\cos \left(\frac{16\pi}{3} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{16\pi}{3} \right) \right)}$$

Finalmente

$$\begin{aligned} a + bi &= \frac{1}{16} \cdot \left(\cos \left(\frac{55\pi}{3} - \frac{16\pi}{3} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{55\pi}{3} - \frac{16\pi}{3} \right) \right) \\ &= \frac{1}{16} \cdot \left(\cos \left(\frac{39\pi}{3} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{39\pi}{3} \right) \right) \\ &= \frac{1}{16} \cdot (\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi) \\ &= \frac{1}{16} \end{aligned}$$

Polinomios reales en una variable

En este capítulo estudiaremos una estructura algebraica de mucha utilidad, los polinomios. Su estudio motivó la teoría de Galois,¹ con la cual se resolvieron en el siglo XIX famosos problemas sobre geometría clásica formulados por los griegos con siglos de antelación. Uno de ellos es la cuadratura del círculo². En la actualidad, sus aplicaciones son numerosas, van desde las más simples y cotidianas como el cálculo de intereses en economía, hasta otras más complejas como la codificación de mensajes para la transmisión de datos en informática. En los cursos superiores, los polinomios serán la estructura idónea para que trabajemos en cálculos numéricos y aproximando funciones. Comenzaremos definiendo algunos conceptos y resultados básicos.

4.1 Primeros conceptos

Definición 4.1.1 (Polinomio con coeficientes reales)

Se dice que $p : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ es una **función polinomial**, cuando existen números $a_0, a_1, \dots, a_n$ tales que para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$\begin{aligned} p(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n \\ &= \sum_{k=0}^n a_kx^k, \end{aligned}$$

donde n es un entero no negativo, cada coeficiente a_k es un número real.

En adelante, esta función polinomial p , definida por $p(x) = \sum_{k=0}^n a_kx^k$, la llamaremos solamente **polinomio**

¹Debe su nombre al matemático francés évariste Galois (1811-1832).

²Dada una circunferencia de radio conocido Es posible construir un cuadrado que tenga el doble del área de la circunferencia solo utilizando una regla no graduada y un compás? Ferdinand Lindeman (1852-1939), matemático alemán, demostró en 1882 que éste es un problema irresoluble.

Denotaremos por $\mathbb{R}[x]$ al conjunto de todos los polinomios con coeficientes reales y a sus elementos por $p(x)$, $f(x)$, $h(x)$, etc. El **grado** de un polinomio $p(x)$ es el natural n tal que $a_n \neq 0$ y lo denotaremos por $gr(p(x)) = n$.

El término a_n recibe el nombre de **coeficiente principal** y cuando $a_n = 1$ el polinomio se dirá **mónico**.

Si $p(x)$ es de la forma $p(x) = a_0$ para algún $a_0 \in \mathbb{R}$, entonces lo llamaremos **polinomio constante** y tiene grado cero, cuando $a_0 = 0$ diremos que $p(x)$ es el polinomio cero o **polinomio nulo**.

Definición 4.1.2 (Igualdad de polinomios)

Dos polinomios son iguales si poseen el mismo grado y si los coeficientes de los monomios de igual grado son iguales.

EJEMPLO.

los polinomios $p(x) = 1 + x + 3x^4$ y $q(x) = 1 + x + 0x^2 + 0x^3 + 3x^4$ son iguales puesto que tienen el mismo grado y sus coeficientes coinciden.

Es importante notar que dos polinomios cualesquiera $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ y $f(x) = \sum_{k=0}^m b_k x^k$ siempre pueden escribirse usando el mismo número de términos. Por ejemplo si $n > m$ entonces:

$$\begin{aligned} p(x) &= a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m + a_{m+1}x^{m+1} + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n, \\ f(x) &= b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m + 0x^{m+1} + \cdots + 0x^{n-1} + 0x^n. \end{aligned}$$

4.1.1 Suma y producto de polinomios

Como los polinomios son también funciones reales, se puede definir la **suma** y el **producto**.

Sean $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ y $q(x) = \sum_{k=0}^m b_k x^k$ dos polinomios, se define

$$\begin{aligned} p(x) + f(x) &= \sum_{k=0}^t (a_k + b_k) x^k \quad \text{con } t \leq \max\{n, m\} \\ p(x) \cdot f(x) &= \sum_{k=0}^{n+m} c_k x^k \quad \text{donde el coeficiente } c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j. \end{aligned}$$

Ejemplo 4.1.3

Encuentre la suma de $p(x) = 8x^3 - x^2 + x - 5$ y $q(x) = 3x^5 + x^4 + 5x^2 + x - 4$

Solución

Sumar los polinomios $p(x)$ y $f(x)$ se reduce a sumar los coeficientes asociados a la misma potencia de x , lo que conocemos como reducir términos semejantes.

$$\begin{aligned} p(x) + f(x) &= (0 + 3)x^5 + (0 + 1)x^4 + (8 + 0)x^3 + (-1 + 5)x^2 + (1 + 1)x + (-5 - 4) \\ &= 3x^5 + x^4 + 8x^3 + 4x^2 + 2x - 9. \end{aligned}$$

Hay casos donde la suma de polinomios es un polinomio cuyo grado es menor al de $p(x)$ y $f(x)$.

EJEMPLO.

Al sumar los polinomios $p(x) = x^3 - x^2 + 7x - 4$ y $f(x) = -x^3 + x^2 + x - 1$ obtenemos el polinomio $h(x) = 8x - 5$, que tiene grado 1

Ejemplo 4.1.4

Encuentre el producto entre $p(x) = 5x + 11$ y $f(x) = 4x^3 + 2x^2 - 3x + 1$.

Solución

$$\begin{aligned} p(x) \cdot f(x) &= (11 \cdot 1)x^0 + (11 \cdot -3 + 5 \cdot 1)x^1 + (5 \cdot -3 + 11 \cdot 2)x^2 + \dots \\ &\quad \dots + (5 \cdot 2 + 11 \cdot 4)x^3 + (5 \cdot 4)x^4 \\ &= 11 - 28x + 7x^2 + 54x^3 + 20x^4. \end{aligned}$$

Note que multiplicar dos polinomios es equivalente a realizar el producto entre cada término de $p(x)$ y cada término de $f(x)$, donde el coeficiente principal del polinomio resultante está dado por el producto entre los coeficientes principales de $p(x)$ y $f(x)$.

$$\begin{aligned} p(x) \cdot f(x) &= (5x + 11)(4x^3 + 2x^2 - 3x + 1) \\ &= 5x(4x^3 + 2x^2 - 3x + 1) + 11(4x^3 + 2x^2 - 3x + 1) \\ &= 20x^4 + 10x^3 - 15x^2 + 5x + 44x^3 + 22x^2 - 33x + 11 \\ &= 20x^4 + 54x^3 + 7x^2 - 28x + 11. \end{aligned}$$

Proposición 4.1.5

Sean $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ y $f(x) = \sum_{k=0}^m b_k x^k$ dos polinomios no nulos de grado n y m respectivamente. Entonces:

$$\begin{aligned} gr(p(x) \cdot f(x)) &= n + m, \\ gr(p(x) + f(x)) &\leq \max\{n, m\} \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN.

Como $a_n \neq 0$ y $b_m \neq 0$ el grado de $p(x) \cdot f(x)$ lo entrega el término $(a_n b_m)x^{n+m}$ y por tanto, $gr(p(x) \cdot f(x)) = n + m$ demostrando la primera afirmación.

En cuanto a la segunda, supongamos que $n \geq m$:

- Si $n > m$ entonces el grado de $p(x) + f(x)$ lo entrega el término $a_n x^n$.
- Si $n = m$ entonces el grado de $p(x) + f(x)$ lo entrega el término $(a_n + b_n)x^n$

por tanto $gr(p(x) + f(x)) \leq \max\{n, m\}$

■

4.2 Álgebra de polinomios

Sean $p(x), f(x), h(x) \in \mathbb{R}[x]$, las operaciones $+$ y $\cdot$ definidas sobre $\mathbb{R}[x]$ verifican las siguientes propiedades:

1. **Conmutatividad** de la suma y el producto:

$$\begin{aligned} p(x) + f(x) &= f(x) + p(x) \\ p(x) \cdot f(x) &= f(x) \cdot p(x). \end{aligned}$$

2. **Asociatividad** de la suma y el producto:

$$\begin{aligned} (p(x) + f(x)) + h(x) &= p(x) + (f(x) + h(x)) \\ (p(x) \cdot f(x)) \cdot h(x) &= p(x) \cdot (f(x) \cdot h(x)). \end{aligned}$$

3. **Existencia de neutros** aditivo y multiplicativo

- a) Existe el elemento $0 \in \mathbb{R}[x]$ o polinomio nulo tal que

$$p(x) + 0 = 0 + p(x) = p(x).$$

- b) Existe el elemento $1 \in \mathbb{R}[x]$ tal que $p(x) \cdot 1 = 1 \cdot p(x) = p(x)$.

4. **Existencia de inverso aditivo:** para todo $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ existe el polinomio

$$-p(x) \in \mathbb{R}[x] \text{ tal que } p(x) + (-p(x)) = (-p(x)) + p(x) = 0.$$

5. **Propiedad distributiva:** la suma distribuye con respecto al producto

$$\begin{aligned} (p(x) + f(x)) \cdot h(x) &= (p(x) \cdot h(x)) + (f(x) \cdot h(x)) \\ p(x) \cdot (f(x) + h(x)) &= (p(x) \cdot f(x)) + (p(x) \cdot h(x)). \end{aligned}$$

Como el conjunto $\mathbb{R}[x]$ con las operaciones suma y producto satisface las propiedades anteriores recibe el nombre de **anillo de polinomios**.

Observación 4.2.1

Note que debido a la existencia de inverso aditivo podemos definir la resta de polinomios como:

$$p(x) - f(x) = p(x) + (-f(x))$$

La Proposición 4.1.5 nos permite caracterizar a los polinomios que poseen inverso multiplicativo en $\mathbb{R}[x]$. En efecto, si el polinomio no nulo $p(x)$ de grado n posee un inverso multiplicativo, entonces existe un polinomio no nulo $f(x)$ de grado m tal que

$$p(x) \cdot f(x) = 1$$

luego, $gr(p(x) \cdot f(x)) = gr(1) = 0$. Además de la Proposición 4.1.5 sabemos que:

$$gr(p(x) \cdot f(x)) = n + m$$

y por tanto $n + m = 0$. Esta condición obliga a que $n = 0$ y $m = 0$, pues ambos son enteros no negativos.

Claramente si $p(x)$ es el polinomio nulo, éste no posee inverso multiplicativo pues sabemos que para todo polinomio $f(x) \in \mathbb{R}[x]$.

$$\begin{aligned} p(x) \cdot f(x) &= 0 \cdot f(x) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Concluimos que los únicos polinomios invertibles son los polinomios constantes, a excepción del polinomio nulo.

El inverso multiplicativo de $p(x) = 5$ es $f(x) = 5^{-1}$.

Proposición 4.2.2

Sean $p(x)$ y $f(x)$ dos polinomios en $\mathbb{R}[x]$, se tiene que:

$$p(x) \cdot f(x) = 0 \Leftrightarrow (p(x) = 0) \vee (f(x) = 0).$$

DEMOSTRACIÓN.

($\Rightarrow$) Demostremos la contrarecíproca. Si $p(x) \neq 0$ y $f(x) \neq 0$ entonces:

$$gr(p(x)f(x)) = gr(p(x)) + gr(f(x)) \geq 0,$$

y por tanto $p(x)q(x) \neq 0$.

($\Leftarrow$) Inmediata. ■

La siguiente definición permite asignar para cada $b \in \mathbb{R}$ un valor numérico al polinomio $p(x) \in \mathbb{R}[x]$.

Definición 4.2.3 (Valor numérico de un polinomio en un punto)

Sea $b \in \mathbb{R}$ y $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ un polinomio en $\mathbb{R}[x]$, se define la evaluación de $p(x)$ en b como:

$$p(b) = \sum_{k=0}^n a_k b^k.$$

El valor numérico de $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ en el real b consiste en reemplazar la indeterminada x por b y realizar las operaciones de la expresión resultante, obteniendo como resultado un número real.

Ejemplo 4.2.4

Considere el polinomio $p(x) = -4x^3 + 3x + 1$ y evalúe en los reales -1 , 0 y 1 .

Solución

a) $p(-1) = -4(-1)^3 + 3(-1) + 1 = 2.$

b) $p(0) = -4(0)^3 + 3(0) + 1 = 1.$

c) $p(1) = -4(1)^3 + 3(1) + 1 = 0.$

4.3 Divisibilidad y raíces

Teorema 4.3.1: División euclidiana

Si $f(x)$ y $p(x)$ son polinomios en $\mathbb{R}[x]$ con $p(x) \neq 0$, entonces existen polinomios únicos $q(x)$ y $r(x)$ en $\mathbb{R}[x]$ tales que:

$$f(x) = p(x) \cdot q(x) + r(x),$$

donde $r(x) = 0$ o el grado de $r(x)$ es menor que el grado de $p(x)$. El polinomio $q(x)$ es el **cuociente** y $r(x)$ es el **resto** en la división de $f(x)$ por $p(x)$.

El siguiente ejemplo se resolverá usando el algoritmo de división clásico.

Ejemplo 4.3.2

Calcule el cuociente entre polinomio $f(x) = 5x^3 + 7x^2 - 3$ y $p(x) = x^2 + 2x - 1$

Solución

$$\begin{array}{r}
 5x^3 + 7x^2 - 3 : x^2 + 2x - 1 = 5x - 3 \\
 \underline{-5x(x^2 + 2x - 1)} \\
 -3x^2 + 5x - 3 \\
 \underline{3(x^2 + 2x - 1)} \\
 11x - 6
 \end{array}$$

y por tanto $q(x) = 5x - 3$ y $r(x) = 11x - 6$ donde el grado de $r(x)$ es menor al de $p(x)$.

Definición 4.3.3 (Divisibilidad)

Dados $p(x)$ y $f(x)$ dos polinomios en $\mathbb{R}[x]$ con $p(x) \neq 0$, diremos que $p(x)$ divide a $f(x)$, en símbolos, $p(x) \mid f(x)$, si el resto de la división de $f(x)$ por $p(x)$ es cero.

Observación 4.3.4

Cuando $p(x)$ divide a $f(x)$ diremos que $f(x)$ es un **múltiplo** de $p(x)$, es decir, $f(x) = q(x)p(x)$ para algún $q(x) \in \mathbb{R}[x]$ o equivalentemente que $p(x)$ es un **divisor** o **factor** de $f(x)$.

EJEMPLO.

El polinomio $f(x) = x^3 - 1$ es divisible por $p(x) = x - 1$ pues $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$, equivalentemente $x^3 - 1$ es un múltiplo de $x - 1$ o $x - 1$ es un factor de $x^3 - 1$.

Definición 4.3.5 (Polinomio irreducible)

Diremos que un polinomio $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ es irreducible en $\mathbb{R}[x]$ si solo es divisible por el mismo y por constantes no nulas.

Observación 4.3.6

La noción de polinomio irreducible es equivalente a la de número primo en $\mathbb{Z}$. Es claro que los polinomios de grado 1 son irreducibles en $\mathbb{R}[x]$. Además, el polinomio $f(x)$ es **reducible** en $\mathbb{R}[x]$ si se puede expresar como un producto polinomial:

$$f(x) = p(x)q(x) \text{ con } p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x], \quad 0 < \text{gr}(p(x)) < \text{gr}(f(x)) \text{ y } 0 < \text{gr}(q(x)) < \text{gr}(f(x))$$

Ejemplo 4.3.7

Muestre que el polinomio $p(x) = x^2 + 1$ es irreducible en $\mathbb{R}[x]$.

Solución

Si $p(x)$ admitiera una factorización no trivial, ésta sería de la forma:

$$x^2 + 1 = (ax + b) \cdot (cx + d)$$

con $a, c \neq 0$. Distribuyendo el lado derecho tenemos que:

$$x^2 + 1 = acx^2 + (ad + bc)x + bd$$

donde, por igualdad de polinomios, obtenemos el sistema:

$$ac = 1 \tag{4.1}$$

$$ad + bc = 0 \tag{4.2}$$

$$bd = 1 \tag{4.3}$$

Multiplicando la ecuación (4.2) por cd obtenemos $acd^2 + abdc = 0$ y al reemplazar (4.1) y (4.3) en esta expresión obtenemos $d^2 + 1 = 0$, lo cual es imposible, pues no existe número real d que satisfaga la ecuación anterior.

Observación 4.3.8

La idea de que un polinomio sea reducible o irreducible depende del anillo al cual pertenezca. Por ejemplo, $p(x) = x^2 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ y por supuesto $a \in \mathbb{R}[x]$, pero es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$, en cambio es reducible en $\mathbb{R}[x]$.

Dadas las definiciones anteriores, podemos ampliar el teorema fundamental de la aritmética a su versión sobre el anillo de polinomios. Al igual que los números enteros se descomponen de forma única en un producto de factores primos, los polinomios también se descomponen de forma única en un producto de factores irreducibles.

Teorema 4.3.9

Todo $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ con $gr(p(x)) \geq 1$ es irreducible en $\mathbb{R}[x]$ o es producto de polinomios irreducibles en $\mathbb{R}[x]$, es decir, admite una única descomposición, salvo orden de escritura, de la forma:

$$p(x) = p_1(x) \cdot p_2(x) \cdot p_3(x) \cdots p_k(x),$$

donde $p_i(x)$ con $i = 1, 2, \dots, k$ son polinomios irreducibles.

La demostración de este teorema se escapa de los contenidos de este libro.

Análogo al teorema fundamental de la aritmética, la descomposición en polinomios irreducibles es única salvo orden de escritura y éstos pueden repetirse.

El objetivo de esta sección es determinar esta descomposición en polinomios irreducibles de $\mathbb{R}[x]$. Con este fin, entregaremos algunos conceptos y resultados que nos facilitarán el trabajo.

4.3.1 Raíces de un polinomio

Definición 4.3.10 (Raíz)

Diremos que $a \in \mathbb{R}$ es una raíz real del polinomio $p(x)$ si $p(a) = 0$, es decir, a es solución de la ecuación polinomial:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n = 0.$$

Ejemplo 4.3.11

2 y -5 son raíces del polinomio $p(x) = x^2 + 3x - 10$, pues $p(2) = 0$ y $p(-5) = 0$ mientras que 1 no es raíz ya que $p(1) = -6 \neq 0$. El polinomio $p(x)$ solo tiene dos raíces. En las próximas líneas justifiaremos esta afirmación.

Definición 4.3.12 (Raíz de multiplicidad k)

Se dirá que a es una raíz de $p(x)$ de multiplicidad k si $(x - a)^k$ divide a $p(x)$ y $(x - a)^{k+1}$ no divide a $p(x)$.

Ejemplo 4.3.13

Podemos decir que $x = 2$ es una raíz de multiplicidad 3 del polinomio $p(x) = (x - 2)^3(x + 1)$, ya que $(x - 2)^3 \mid p(x)$, pero $(x - 2)^4 \nmid p(x)$.

De la Definición 4.3.10, se ve que un polinomio de grado 1 de la forma $p(x) = a_1x + a_0$ posee una única raíz, pues sabemos que la ecuación lineal $a_1x + a_0 = 0$ tiene una única solución dada por $x = -\frac{a_0}{a_1}$. De la misma forma, un polinomio $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ de grado 2 puede tener una raíz real de multiplicidad 2, dos raíces reales distintas o no tener raíces reales debido a que éstas son la solución de la ecuación cuadrática

$$a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0.$$

Teorema 4.3.14: Teorema del Resto

Sea $a \in \mathbb{R}$, si $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ se divide por $x - a$, entonces el resto es $f(a)$.

DEMOSTRACIÓN.

Por el algoritmo de la división se tiene que

$$f(x) = (x - a) \cdot q(x) + k,$$

donde el resto k es un número real.

Evaluando el polinomio en a tenemos

$$f(a) = (a - a)q(a) + k,$$

de donde $f(a) = k$. ■

EJEMPLO.

Del teorema anterior, el resto de la división de $p(x) = 3x^5 + 2x^2 + 4x - 1$ en $x + 2$ es:

$$p(-2) = 3(-2)^5 + 2(-2)^2 + 4(-2) - 1 = -97$$

Ejemplo 4.3.15

Determine el resto de la división de $f(x) = ax^5 + bx^3 + cx - 8$ por $(x - 3)$, si se sabe que el resto al dividir $f(x)$ por $(x + 3)$ es 6

Solución

Como el resto de dividir $f(x)$ por $(x + 3)$ es 6, entonces por el teorema anterior $f(-3) = 6$, es decir,

$$\begin{aligned} a(-3)^5 + b(-3)^3 + c(-3) - 8 &= 6 \\ -243a - 27b - 3c - 8 &= 6 \\ 243a + 27b + 3c &= -14 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Además, sabemos que el resto de dividir $f(x)$ por $(x - 3)$ será $f(3)$, por tanto:

$$\begin{aligned} f(3) &= a(3)^5 + b(3)^3 + c(3) - 8 \\ f(3) &= 243a + 27b + 3c - 8. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Reemplazando (4.4) en (4.5), obtenemos que el resto de la división de $f(x)$ por $(x - 3)$ es $f(3) = -22$.

Teorema 4.3.16: Teorema del Factor

Un polinomio $f(x)$ tiene un factor $x - a$ si y solo si $f(a) = 0$.

DEMOSTRACIÓN.

Por el teorema del resto tenemos:

$$f(x) = (x - a) \cdot q(x) + f(a),$$

para algún polinomio $q(x)$.

- Si $f(a) = 0$, entonces $f(x) = (x - a) \cdot q(x)$, es decir, $x - a$ es un factor de $f(x)$.
- Si $x - a$ es un factor de $f(x)$, el resto de la división de $p(x)$ por $x - a$ debe ser 0, luego por el teorema del resto $p(a) = 0$.

■

Note que el teorema del factor además nos dice que $a \in \mathbb{R}$ es una raíz del polinomio $f(x)$ si y solo si $f(x)$ es divisible por $x - a$. Por otra parte, existen polinomios que son reducibles y que no tienen raíces en $\mathbb{R}$, un ejemplo es $p(x) = x^4 + 3x^2 + 2$ el cual admite la factorización $p(x) = (x^2 + 1)(x^2 + 2)$ y por tanto tiene como divisores no triviales a los polinomios $x^2 + 1$ y $x^2 + 2$ pero no tiene raíces reales.

Ejemplo 4.3.17

Factoricemos el polinomio $p(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.

Solución

Note que $p(1) = 0$, luego $p(x)$ es divisible por $(x - 1)$. Realizando la división euclidiana entre $p(x)$ y $(x - 1)$ obtenemos:

$$p(x) = (x - 1)(x^2 - 5x + 6) = (x - 1)q(x).$$

Ahora si $a \in \mathbb{R}$ es una raíz de $p(x)$ debe cumplir que $p(a) = 0$ y, por la igualdad anterior, esto implica que $a - 1 = 0$ o $q(a) = 0$. Luego $a = 1$ (raíz que ya tenemos) o a será la solución de la ecuación

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

Resolviendo la ecuación cuadrática obtenemos que sus soluciones son: -3 y -2 .

Por tanto $q(x) = (x + 2)(x + 3)$ y con esto las raíces de $p(x)$ son -3 , -2 y 1 y su factorización será:

$$p(x) = (x - 1)(x + 2)(x + 3).$$

4.4 División sintética

A continuación presentamos un método que permite dividir un polinomio $f(x)$ por un polinomio de grado 1 de la forma $(x - a)$ de manera abreviada. Consideremos la división entre el polinomio $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ de grado n y $p(x) = x - a$. Del algoritmo de la división sabemos que el cociente resultante de dividir $f(x)$ por $p(x)$ será el polinomio $q(x)$ de grado $(n - 1)$ y el resto será un polinomio constante $r(x) = r_0$, puesto que $gr(r(x)) < gr(p(x))$. Sean:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_nx^n + \dots + a_1x + a_0, \\ p(x) &= x - a, \\ q(x) &= q_{n-1}x^{n-1} + \dots + q_1x + q_0, \\ r(x) &= r_0. \end{aligned}$$

Al realizar la división euclidiana podemos verificar que los coeficientes del cuociente y resto serán:

$$\begin{aligned} q_{n-1} &= a_n, \\ q_i &= a_{i+1} + a q_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, n-2 \\ r_0 &= a_0 + a q_0. \end{aligned}$$

Una manera fácil y rápida de calcular los coeficientes anteriores es construir la Tabla en (4.1) mediante los pasos siguientes:

1. En la primera fila se anotan los coeficientes del polinomio $f(x)$ ordenados de mayor a menor potencia. si algún coeficiente no aparece debe completarse con cero.
2. En la segunda fila a la izquierda se ubica a , que es el coeficiente que aparece en el divisor $p(x) = x - a$.
3. Se baja el primer coeficiente a_n de la primera fila a la tercera, teniendo en cuenta que $a_n = q_{n-1}$.
4. Luego multiplicamos este coeficiente q_{n-1} por a y lo ubicamos en la segunda fila bajo a_{n-1} .
5. Sumamos $a_{n-1} + a q_{n-1}$ y ubicamos el resultado en la tercera fila, recordando que $q_{n-2} = a_{n-1} + a q_{n-1}$.
6. Repetimos el procedimiento de multiplicar por a y sumar en todas las columnas restantes.

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\dots$	a_1	a_0
a		$a q_{n-1}$	$a q_{n-2}$	$\dots$	$a q_1$	$a q_0$
	q_{n-1}	q_{n-2}	q_{n-3}	$\dots$	q_0	r_0

Cuadro 4.1: División sintética

La suma de la última columna corresponde al resto de la división $r_0 = a_0 + a q_0$ y el resto de las posiciones corresponden a los coeficientes del cuociente $q(x)$.

Esta forma simple y compacta de dividir se denomina **división sintética** o **Regla de Ruffini** debido a su creador, el italiano Paolo Ruffini.

Ejemplo 4.4.1

Dados los polinomios $p(x) = 2x^4 - 6x^3 + 9x + 8$ y $q(x) = x - 2$, calcule el cuociente y resto de la división de $p(x)$ en $q(x)$ usando la división sintética

Solución

Usando el procedimiento indicado en el cuadro 4.1, se tiene:

1. Ordenamos en la primera fila de la tabla los coeficientes de $p(x)$ de mayor a menor potencia, mientras que a la izquierda de la segunda fila colocamos a que en este caso es 2.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & -6 & 0 & 9 & 8 \\ 2 & & & & & \end{array}$$

2. Bajamos el primer coeficiente (2) a la tercera fila para luego multiplicarlo por $a = 2$ y ubicar el resultado bajo el coeficiente -6 en la siguiente columna.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & -6 & 0 & 9 & 8 \\ 2 & & 4 & & & \\ \hline & 2 & & & & \end{array}$$

3. Se suman los términos en la columna y el resultado se coloca en la tercera fila. Repetimos el procedimiento con las columnas restantes.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & -6 & 0 & 9 & 8 \\ 2 & & 4 & -4 & -8 & 2 \\ \hline & 2 & -2 & -4 & 1 & 10 \end{array}$$

4. La última fila nos entrega los coeficientes del cuociente y resto. El polinomio cuociente tendrá grado 3 será $c(x) = 2x^3 - 2x^2 - 4x + 1$ y el resto será $r(x) = 10$ por tanto:

$$2x^4 - 6x^3 + 9x + 8 = (x - 2) \cdot (2x^3 - 2x^2 - 4x + 1) + 10.$$

Cuando un polinomio es de grado 1 o 2, determinar sus raíces no presenta mayor dificultad, pero cuando su grado es mayor a 2, determinar sus raíces es equivalente a determinar si $f(x)$ posee una factorización donde aparezcan polinomios de grado 1. Como un punto de inicio en la búsqueda de raíces de un polinomio $f(x)$, el siguiente teorema nos entrega una regla que permite establecer las condiciones necesarias para que un valor sea candidato a raíz de $f(x)$.

Teorema 4.4.2: Criterio de Eisenstein

Sea

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

un polinomio donde $a_0, a_1, \dots, a_n$ son enteros. Si p y q son primos relativos y $\frac{p}{q}$ es un cero o raíz racional del polinomio f , entonces p es un factor de a_0 y q es un factor de a_n .

DEMOSTRACIÓN.

Como $\frac{p}{q}$ es un cero de f , entonces es solución de la ecuación:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n = 0,$$

por tanto,

$$a_0 + a_1 \left(\frac{p}{q}\right) + a_2 \left(\frac{p}{q}\right)^2 + \cdots + a_{n-1} \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n = 0,$$

multiplicando por q^n tenemos:

$$a_0q^n + a_1pq^{n-1} + a_2p^2q^{n-2} + \cdots + a_{n-1}p^{n-1}q + a_np^n = 0, \quad (4.6)$$

lo que es equivalente a

$$p(a_1q^{n-1} + a_2pq^{n-2} + \cdots + a_{n-1}p^{n-2}q + a_np^{n-1}) = -a_0q^n,$$

como $a_i (i = 1, 2, \dots, n)$, p y q son enteros, y la suma y el producto de números enteros son enteros, entonces la expresión dentro del paréntesis es un número entero.

Luego, se tiene que p es un factor de a_0q^n .

Debido a que p y q son primos relativos, entonces necesariamente p debe dividir a a_0 .

De (4.6) se tiene también que:

$$q(a_0q^{n-1} + a_1pq^{n-2} + a_2p^2q^{n-3} + \cdots + a_{n-1}p^{n-1}) = -a_np^n,$$

de donde q divide a a_np^n . Nuevamente como p y q son primos relativos, entonces q debe dividir a a_n ■

Ejemplo 4.4.3

Utilicemos el teorema anterior para calcular las raíces racionales de:

$$p(x) = 12x^3 + 8x^2 - 3x - 2$$

Solución

Primero calculamos los divisores del término constante y principal de $p(x)$:

- $D(2) = \{\pm 1, \pm 2\}$
- $D(12) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$

Luego las posibles raíces racionales de $p(x)$ son los elementos del conjunto:

$$\left\{ \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{1}{6}, \pm \frac{1}{12}, \pm \frac{2}{3}, \pm 1, \pm 2 \right\}.$$

Evaluando en $p(x)$ cada uno de estos candidatos obtenemos que:

$$p\left(\frac{1}{2}\right) = p\left(-\frac{1}{2}\right) = p\left(-\frac{2}{3}\right) = 0$$

y por tanto las raíces racionales del polinomio son $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$ y $-\frac{2}{3}$.

Ejemplo 4.4.4

Determinemos las raíces racionales del polinomio $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + 1$.

Solución

Como el término principal y constante son 1, entonces las posibles raíces racionales son -1 y 1 . Evaluando los candidatos en el polinomio obtenemos $p(1) = 4$ y $p(-1) = 2$. Luego el polinomio $f(x)$ no tiene raíces racionales.

4.5 Teorema fundamental del álgebra

En este punto, volvamos al Ejemplo 4.3.7. Sabemos que las raíces de $p(x) = x^2 + 1$ son las soluciones de la ecuación cuadrática $x^2 + 1 = 0$ y, por tanto, no tiene raíces en $\mathbb{R}$. También hemos aprendido, cuando estudiamos los números complejos, que las soluciones de ésta ecuación son los números complejos i y su conjugado $-i$. Note que $p(i) = 0$ y $p(-i) = 0$, lo que naturalmente nos permite extender la definición de raíz de un polinomio de coeficientes reales, considerando no solo sus raíces reales sino que también las complejas.

En lo que sigue, tengamos presente que un número complejo tiene la forma $z = a + bi$ con a y b números reales y que todo número real a puede considerarse como un número complejo con parte imaginaria nula, es decir, $a + 0i$.

Definición 4.5.1 (Raíz compleja)

Diremos que $z \in \mathbb{C}$ es una raíz compleja del polinomio de coeficientes reales $f(x)$ si $f(z) = 0$.

El teorema siguiente nos permite caracterizar los polinomios irreducibles en $\mathbb{R}[x]$.

Teorema 4.5.2

Sea $f(x)$ un polinomio con coeficientes reales y grado $n > 1$. Si z es una raíz compleja de $f(x)$, entonces el conjugado de z también es una raíz de $f(x)$.

DEMOSTRACIÓN.

Sea $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ con $a_n \neq 0$, $n > 1$ y $a_i \in \mathbb{R}$ para todo $i = 1, \dots, n$.

Si z es una raíz compleja de $f(x)$ entonces $f(z) = 0$, es decir,

$$a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n = 0.$$

Además, si dos complejos son iguales sus conjugados también lo son, por tanto:

$$\overline{a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n} = \overline{0}. \quad (4.7)$$

Por otra parte, si $u, w \in \mathbb{C}$ sabemos que:

- $\overline{u + w} = \overline{u} + \overline{w}$.
- $\overline{u \cdot w} = \overline{u} \cdot \overline{w}$, de esta propiedad podemos deducir que $\overline{w^n} = \overline{w}^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por lo anterior la ecuación en (4.7) podemos escribirla de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \overline{a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n} &= \overline{0} \\ \overline{a_0} + \overline{a_1z} + \overline{a_2z^2} + \dots + \overline{a_nz^n} &= \overline{0}. \end{aligned}$$

Como sabemos, si $a \in \mathbb{R}$ entonces $\overline{a} = a$ y con esto:

$$a_0 + a_1 \cdot \overline{z} + a_2 \cdot \overline{z}^2 + \dots + a_n \cdot \overline{z}^n = 0.$$

La ecuación anterior es equivalente a $f(\overline{z}) = 0$ y, por tanto, $\overline{z}$ también es una raíz compleja de $f(x)$. ■

Ejemplo 4.5.3

Determinemos un polinomio de segundo grado que tenga como una de sus raíces a $z = 1 + 2i$.

Solución

Del teorema anterior sabemos que $\overline{z} = 1 - 2i$ también es raíz. Podemos construir el polinomio de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} z &= 1 + 2i \\ z - 1 &= 2i \\ (z - 1)^2 &= (2i)^2 \\ z^2 - 2z + 1 &= -4 \\ z^2 - 2z + 5 &= 0, \end{aligned}$$

por tanto, un polinomio que tiene a $z = 1 + 2i$ y $\overline{z} = 1 - 2i$ como raíces es $f(x) = x^2 - 2x + 5$.

El teorema anterior nos dice que las raíces complejas siempre vienen en pares; la raíz y su conjugado. Por tanto, podemos concluir que si $f(x)$ es un polinomio de coeficientes reales de grado impar entonces necesariamente debe tener al menos una raíz real.

Ahora enunciaremos un teorema muy importante conocido como el Teorema Fundamental del álgebra. Su demostración requiere conocimientos avanzados de matemáticas de un campo llamado funciones de variable compleja, por lo que no ahondaremos en ella.

Teorema 4.5.4: Teorema fundamental del álgebra

Un polinomio $f(x)$ de grado $n \geq 1$ posee a lo menos una raíz que puede ser real o compleja.

Una consecuencia del teorema fundamental del álgebra es el siguiente teorema:

Teorema 4.5.5

Si $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ es un polinomio de grado $n \geq 1$ y coeficiente principal a , entonces existen n números complejos o eventualmente reales, $z_1, z_2 \dots z_n$ tales que

$$p(x) = a(x - z_1)(x - z_2) \cdots (x - z_n) \quad (4.8)$$

En la descomposición (4.8), $z_1, z_2 \dots, z_n$ son raíces del polinomio $p(x)$ y por tanto, el teorema anterior nos asegura que $p(x)$ **posee n raíces complejas**. Además note que dichas raíces pueden repetirse, o visto de otra manera $p(x)$ posee **a lo más n raíces complejas distintas**. De forma análoga, como todo real es un número complejo, el teorema anterior nos dice que $p(x)$ posee a lo más n raíces en $\mathbb{R}$ **no necesariamente distintas**.

Dados los teoremas anteriores, podemos caracterizar los polinomios irreducibles en $\mathbb{R}[x]$. Sabemos que los polinomios de grado 1 son irreducibles en $\mathbb{R}[x]$. Ahora veamos qué sucede para los polinomios de grado mayor a 1. Para esto, consideremos un polinomio $p(x)$ de grado $n > 1$.

El Teorema Fundamental del álgebra nos dice que $p(x)$ posee al menos una raíz compleja que denotaremos por z . Si z es un número real, entonces el polinomio $p(x)$ es reducible en $\mathbb{R}[x]$, pues $x - z \in \mathbb{R}[x]$ será un divisor de él.

Ahora bien, si z es una raíz compleja, con parte imaginaria no nula, entonces por el Teorema 4.5.2 su conjugado $\bar{z}$ también lo es. Por tanto, $(x - z)$ y $(x - \bar{z})$ son parte de la descomposición de $p(x)$. Multiplicando estos factores obtenemos:

$$(x - z)(x - \bar{z}) = x^2 - (z + \bar{z})x + (z \cdot \bar{z}),$$

que es un polinomio cuadrático con coeficientes reales, pues recuerde que $(z + \bar{z})$ y $(z \cdot \bar{z})$ son números reales. Así cada par de raíces complejas conjugadas genera un polinomio cuadrático irreducible en $\mathbb{R}[x]$.

Con esto hemos demostrado que **los polinomios irreducibles en $\mathbb{R}[x]$** son los polinomios de grado 1 y los polinomios de grado 2 que no poseen raíces reales. Utilizando el Teorema 4.3.9 podemos

concluir que todo polinomio $p(x)$ de grado mayor o igual a 1, puede ser expresado como producto de polinomios lineales y/o cuadráticos con coeficientes en $\mathbb{R}$, donde los factores cuadráticos no tienen raíces reales.

Ejemplo 4.5.6

Determinemos un polinomio $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ de menor grado, que tenga como parte de sus raíces a 1, $1 + i$ y $2i$.

Solución

Sabemos que $p(x)$ tendrá como uno de sus factores a $(x - 1)$. Además si $1 + i$ y $2i$ son raíces de $p(x)$ entonces sus conjugados $1 - i$ y $-2i$ también lo son. Las raíces $1 + i$ y $1 - i$ aportarán a la descomposición de $p(x)$ con el factor cuadrático:

$$(x - (1 + i))(x - (1 - i)) = x^2 - 2x + 2,$$

mientras que las raíces $2i$ y $-2i$ lo harán con el factor $(x - 2i)(x - (-2i)) = x^2 + 4$. Al multiplicar estos factores obtenemos el polinomio pedido:

$$\begin{aligned} p(x) &= (x - 1)(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 4) \\ p(x) &= -8 + 16x - 14x^2 + 8x^3 - 3x^4 + x^5. \end{aligned}$$

Ejemplo 4.5.7

Expresemos el polinomio $p(x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 12x - 15$ como producto de polinomios lineales y cuadráticos en $\mathbb{R}[x]$.

Solución

Primero buscamos sus raíces racionales entre los candidatos $\pm 1, \pm 3, \pm 5$ y ± 15 . Evaluando $p(x)$ obtenemos que $p(1) = p(-5) = 0$ y por tanto $p(x)$ tiene a $(x - 1)(x + 5)$ como factor. Utilizando la división sintética obtenemos que:

$$p(x) = (x^3 + 5x^2 + 3x + 15)(x - 1).$$

Dividiendo $q(x) = (x^3 + 5x^2 + 3x + 15)$ por $(x + 5)$ podemos escribir $q(x) = (x^2 + 3)(x + 5)$ y por tanto $p(x)$ puede expresarse como:

$$p(x) = (x^2 + 3)(x + 5)(x - 1),$$

donde todas las raíces del polinomio son $-5, 1, \sqrt{3}i$ y $-\sqrt{3}i$.

4.6 Ejercicios Resueltos

1. Obtenga el cociente y resto en la siguiente división de polinomios:

$$4x^4 - 3x^2 + 3x + 7 \div \left(x + \frac{1}{2}\right)$$

Solución

$$\begin{array}{r} 4x^4 - 3x^2 + 3x + 7 \div \left(x + \frac{1}{2}\right) = 4x^3 - 2x^2 - 2x + 4 \\ -(4x^4 + 2x^3) \\ \hline -2x^3 - 3x^2 + 3x + 7 \\ -(-2x^3 - x^2) \\ \hline -2x^2 + 3x + 7 \\ -(-2x^2 - x) \\ \hline 4x + 7 \\ -(4x + 2) \\ \hline 5 \end{array}$$

As el cociente es: $C(x) = 4x^3 - 2x^2 - 2x + 4$ y el resto $R(x) = 5$

2. Sean los polinomios $P(x) = 2x^3 + 2x - 20$ y $Q(x) = (x^2 + 2x + 5) \cdot (ax + b)$, ¿para qué valores de a y b se cumple que $P(x) = Q(x)$?

Solución

$$\begin{aligned} P(x) &= Q(x) \\ 2x^3 + 2x - 20 &= (x^2 + 2x + 5)(ax + b) \\ 2x^3 + 0x^2 + 2x - 20 &= ax^3 + (2a + b)x^2 + (5a + 2b)x + 5b \end{aligned}$$

De donde se tiene

$$\begin{aligned} a &= 2 \\ 2a + b &= 0 \\ 5a + 2b &= 2 \\ 5b &= -20 \end{aligned}$$

Con lo que $a = 2$ y $b = -4$

3. Resolver la ecuación $x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 2x + 3 = 0$ si $x = 1$ es una raíz de multiplicidad 2.

Solución

Como $x = 1$ es una raíz $x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 2x + 3 = 0$ es divisible por $x - 1$, obteniendo que:

$$(x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 2x + 3) \div (x - 1) = x^3 + 3x^2 - x - 3$$

Como $x = 1$ es una raíz de multiplicidad 2 $x^3 + 3x^2 - x - 3$ es divisible por $x - 1$, obteniendo que:

$$(x^3 + 3x^2 - x - 3) \div (x - 1) = x^2 + 4x + 3 = (x + 3)(x + 1)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 2x + 3 &= 0 \\(x - 1)(x - 1)(x + 3)(x + 1) &= 0\end{aligned}$$

Obteniendo las soluciones $x_1 = 1$, $x_2 = -3$, $x_3 = -1$.

4. Determinar las constantes a y b de modo que el polinomio $P(x) = 2x^3 + ax^2 + bx - 2$ sea divisible por $x + 2$ y por $2x - 1$.

Solución

Si $P(x) = 2x^3 + ax^2 + bx - 2$ es divisible por $x + 2$ se sabe que $P(-2) = 0$, es decir:

$$\begin{aligned}2 \cdot (-2)^3 + a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) - 2 &= 0 \\-16 + 4a - 2b - 2 &= 0 \\4a - 2b &= 18\end{aligned}\tag{1}$$

Si $P(x) = 2x^3 + ax^2 + bx - 2$ es divisible por $2x - 1$ se sabe que $P(\frac{1}{2}) = 0$, es decir:

$$\begin{aligned}2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + a \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + b \cdot \left(\frac{1}{2}\right) - 2 &= 0 \\\frac{1}{4} + \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b - 2 &= 0 \\1 + a + 2b - 8 &= 0 \\a + 2b &= 7\end{aligned}\tag{2}$$

Sumando las ecuaciones (1) y (2) se obtiene: $5a = 25$, luego $a = 5$.

Reemplazando a en (2) se obtiene $5 + 2b = 7$, luego $b = 1$.

5. Sea $P(x) = ax^4 + bx^3 + bx^2 - ax + b$. Encuentre los valores de a y b , si $x + 1$ divide a $P(x)$, y el resto de dividir $P(x)$ por $x + 2$ es 12.

Solución

Usando los teoremas del Factor y del Resto, se tiene

$$\begin{array}{ll}P(-1) = 0 & P(-2) = 12 \\ \text{Luego, } a - b + b + a + b = 0 & 16a - 8b + 4b + 2a + b = 12 \\ 2a + b = 0 & 18a - 3b = 12 \\ b = -2a & 6a - b = 4\end{array}$$

Reemplazando $b = -2a$ en la segunda ecuación, se tiene que $a = \frac{1}{2}$ y $b = -1$

6. Sean los polinomios $P(x) = 6x^5 + x^4 + ax^2 - 7x + b$, $Q(x) = (2x^2 + x - 3)$ y $R(x) = 10x - 5$. Calcule los valores de $a, b \in \mathbb{R}$, tal que $P(x)$ dividido por $Q(x)$ tenga resto $R(x)$.

Solución

Usando el algoritmo de la división se tiene

$$6x^5 + x^4 + ax^2 - 7x + b = (2x^2 + x - 3)S(x) + 10x - 5, \text{ con } S(x) \text{ polinomio de grado 3}$$

$$6x^5 + x^4 + ax^2 - 17x + b + 5 = (2x^2 + x - 3)S(x)$$

Por lo tanto, usando el teorema del resto, al reemplazar $x = 1$ y $x = -\frac{3}{2}$, el polinomio se anula. Luego,

Si $x = 1$

$$6 + 1 + a - 17 + b + 5 = 0$$

$$a + b = 5$$

Si $x = -\frac{3}{2}$

$$6\left(-\frac{3}{2}\right)^5 + \left(-\frac{3}{2}\right)^4 + a\left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 17\left(-\frac{3}{2}\right) + b + 5 = 0$$

$$9\frac{a}{4} + b = 10$$

Resolviendo el sistema para a y b , se obtiene que $a = 4$ y $b = 1$

7. Encuentre todas las raíces del polinomio $x^5 - 5x^3 - x^4 + 5x^2 - 4 + 4x$.

Solución

sea $P(x) = x^5 - x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 4x - 4$ el polinomio, usando el criterio de Eisenstein, las raíces racionales del polinomio pueden ser $\{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$.

Es fácilmente comprobable que $x = 1$ y $x = -1$ son raíces del polinomio.

Luego,

$$P(2) = 32 - 16 - 40 + 20 + 8 - 4 = 0$$

$$P(-2) = -32 - 16 + 40 + 20 - 8 - 4 = 0$$

Así, $x = 2$ y $x = -2$ son raíces del polinomio.

Por lo tanto, $P(x) = (x - 1)(x + 1)(x + 2)(x - 2)Q(x) = (x^4 - 5x^2 + 4)Q(x)$, para algún $Q(x)$, realizando la división correspondiente, se obtiene que $Q(x) = x - 1$.

Finalmente, las raíces del polinomio son $x = \{-2, -1, 2\}$ con multiplicidad 1 y $x = 1$ con multiplicidad 2.

Vectores, rectas y planos

5.1 Primeros conceptos

5.1.1 El espacio tridimensional

El sistema cartesiano consta de tres ejes mutuamente perpendiculares, los ejes X , Y y Z . La intersección de estos tres ejes se denomina **origen** y se denota por O . Por lo general, consideramos los ejes X e Y en el plano horizontal y al eje Z como vertical.

Cada par de ejes determina un plano llamado **plano coordenado**. Así, tenemos tres planos coordenados que denotamos XY , XZ e YZ . Estos tres planos dividen al espacio en ocho partes, llamados **octantes**.

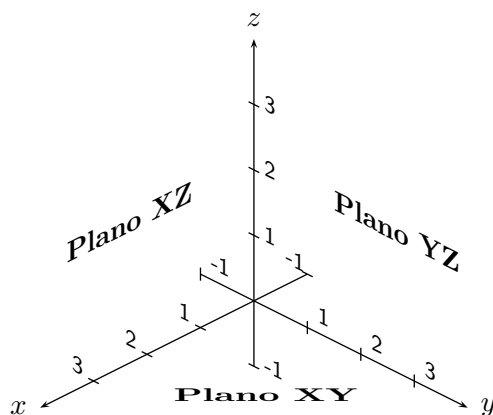


Figura 5.1: Sistema dextrógiro

En este sistema tridimensional, un punto P del espacio queda determinado por una terna ordenada (a, b, c) donde:

- a es la distancia orientada desde el plano YZ a P .
- b es la distancia orientada desde el plano XZ a P .
- c es la distancia orientada desde el plano XY a P .

Se establece así una correspondencia biunívoca entre los puntos P del espacio y las ternas (x, y, z) del espacio $\mathbb{R}^3$. Esta correspondencia recibe el nombre de sistema tridimensional de coordenadas rectangulares. Las relaciones para el espacio tridimensional son simples extensiones del espacio bidimensional. En geometría analítica, la gráfica de una ecuación en dos variables x e y corresponde a una curva en el plano, en cambio una ecuación en tres variables x , y y z representa una superficie en el espacio.

Distancia

Para determinar la distancia entre dos puntos de $\mathbb{R}^3$, construimos el paralelepípedo cuya diagonal principal tiene como extremos los dos puntos y utilizamos dos veces el teorema de Pitágoras.

Definición 5.1.1

La **distancia** entre los puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ está dada por

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Ejemplo 5.1.2

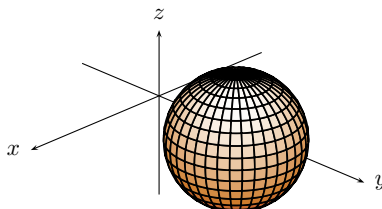
¿Qué condición deben cumplir los puntos $P(x, y, z)$ que están a 4 unidades del punto $A(-1, 2, -1)$?

Solución

La distancia entre el punto P y el punto Q debe ser 4 unidades, es decir,

$$\sqrt{(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2} = 4$$

esto significa que los puntos se encuentran sobre la esfera de centro A y radio 2.



División de un segmento

Dados dos puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ queremos determinar las coordenadas de otro punto $P(x, y, z)$ que **divida** al segmento de recta P_1P_2 en la razón dada $r = \frac{P_1P}{PP_2}$.

- Si r es positivo, entonces P_1P y PP_2 tienen el mismo sentido, luego P se encuentra en el interior del segmento P_1P_2 .
- Si r es negativo, entonces P_1P y PP_2 tienen sentidos opuestos, luego P se encuentra en la prolongación del segmento P_1P_2 .

Las coordenadas de un punto P que cumplen la relación anterior están determinadas por:

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r}, \quad y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r}, \quad z = \frac{z_1 + rz_2}{1 + r} \quad r \neq -1$$

Observación 5.1.3

Si $r = 1$, se obtiene el punto medio, es decir, sus coordenadas son

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right)$$

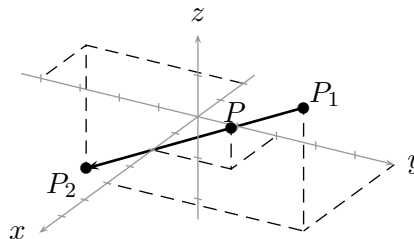
Ejemplo 5.1.4

Hallar las coordenadas del $P(x, y, z)$ que divide al segmento determinado por $P_1(4, 5, 3)$ y $P_2(-2, -4, -3)$ en la razón $r = \frac{1}{2}$

Solución

Las coordenadas del punto P son:

$$x = \frac{4 + \frac{1}{2}(-2)}{1 + \frac{1}{2}} = 2, \quad y = \frac{5 + \frac{1}{2}(-4)}{1 + \frac{1}{2}} = 2, \quad z = \frac{3 + \frac{1}{2}(-3)}{1 + \frac{1}{2}} = 1$$



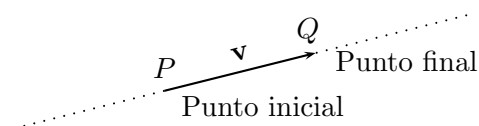
5.2 Vectores en el espacio

Los vectores tienen dos naturalezas diferentes, una geométrica y otra algebraica, para estudiar sus aplicaciones necesitamos conocer ambos aspectos. Por tener mayor aplicabilidad consideraremos principalmente vectores en el espacio. Muchas cantidades, tanto en geometría como en otras ciencias, tales como el área, el volumen, la temperatura, el tiempo y la masa, pueden caracterizarse mediante un único número real en una escala de medición apropiada a cada caso (cm^2 , cm^3 , *seg*, *gr*, etc.). Estas cantidades las conocemos como magnitudes escalares y al número real asociado a cada una de ellas se denomina escalar. Otras magnitudes, tales como fuerza y velocidad que requieren de la magnitud, de la dirección y el sentido se lo llamamos magnitudes vectoriales y su representación geométrica es usando segmentos dirigidos (o flechas) las que llamamos vectores.

Definición 5.2.1

Sea $\mathbf{v} = PQ$ un trazo dirigido. El punto P es llamado **Origen** o **punto de aplicación** de $\mathbf{v}$ y Q es llamado **punto final** o **extremo**. La distancia entre ambos puntos es conocida como la **magnitud** o **longitud**. La pendiente de la recta L que sustenta al trazo PQ se denomina **dirección** de $\mathbf{v}$, mientras que el **sentido** es de P hacia Q .

Los trazos dirigidos que satisfacen las cuatro características: magnitud, dirección, sentido y punto de aplicación se denominan vectores fijos.



Los segmentos de recta dirigidos que tienen la misma magnitud, dirección y sentido se llaman equivalentes, ellos representan al mismo vector. El segmento de recta dirigido cuyo punto inicial es el origen es el representante más conveniente de un conjunto de segmentos dirigidos equivalentes, se le llama vector posición.

Observación 5.2.2

Denotaremos los vectores mediante letras minúsculas, tales como $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \dots$ etc.; o con letras y una flecha en su parte superior tales como $\vec{u}, \vec{v}$.

Un vector en el espacio tridimensional es una terna ordenada $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ de números reales. Los números u_1, u_2 y u_3 se llaman componentes del vector $\mathbf{u}$.

Definición 5.2.3

La **magnitud** o **norma** de un vector $\mathbf{v}$ es la longitud de cualquiera de sus representaciones y se denota con el símbolo $\|\mathbf{v}\|$

La longitud del vector tridimensional $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ es $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$

El único vector de longitud 0 es el vector nulo $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ es también el único vector sin dirección específica.

5.2.1 Operaciones con vectores

Las operaciones de suma vectorial y ponderación escalar se definen por componentes.

Si $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \\ \lambda(x_1, x_2, x_3) &= (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)\end{aligned}$$

Estas operaciones satisfacen los axiomas que convierten a $\mathbb{R}^3$ en un espacio vectorial:

- $(\mathbb{R}^3, +)$ es grupo abeliano, es decir:
 - La suma es conmutativa y asociativa.
 - La terna $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ es elemento neutro para la suma.
 - Todo vector (x_1, x_2, x_3) tiene un inverso aditivo $(-x_1, -x_2, -x_3)$.
- La ponderación escalar satisface para todo $\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^3$ y todo $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$:
 - $\lambda_1(\lambda_2 \mathbf{v}) = (\lambda_1 \lambda_2) \mathbf{v}$
 - $(\lambda_1 + \lambda_2) \mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{v} + \lambda_2 \mathbf{v}$
 - $\lambda(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \lambda \mathbf{v}_1 + \lambda \mathbf{v}_2$
 - $1 \mathbf{v} = \mathbf{v}$

Por esta razón, los elementos de $\mathbb{R}^3$ se llaman vectores y la base canónica de $\mathbb{R}^3$ es

$$\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}.$$

Así, todo vector $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ se puede expresar como $\mathbf{u} = u_1 \hat{i} + u_2 \hat{j} + u_3 \hat{k}$ donde $\hat{i} = (1, 0, 0)$, $\hat{j} = (0, 1, 0)$, $\hat{k} = (0, 0, 1)$

Observación 5.2.4

Geométricamente, al escribir (a, b, c) podemos interpretarlo como el punto de coordenadas a, b y c , o el vector cuyo punto inicial es el origen y su punto final es (a, b, c) , o incluso algún otro vector paralelo (equivalente) al anterior.

Un vector se dice unitario si su norma es igual a 1. Para cualquier vector no nulo $\mathbf{v}$, el vector $\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$ es unitario, este proceso se llama normalización del vector $\mathbf{v}$.

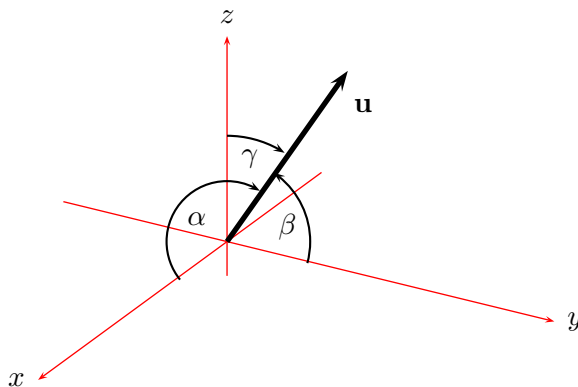
Las componentes del vector unitario en la dirección de $\mathbf{u}$ se llaman cosenos directores del vector $\mathbf{u}$.

Geométricamente, los cosenos directores de un vector corresponden a los cosenos de los ángulos que forma el vector posición con los ejes coordenados.

Si α , β y γ son los ángulos entre el vector $\mathbf{u}$ y los vectores unitarios $\hat{i}$, $\hat{j}$ y $\hat{k}$ entonces:

$$\cos \alpha = \frac{u_1}{\|\mathbf{u}\|}, \quad \cos \beta = \frac{u_2}{\|\mathbf{u}\|}, \quad \cos \gamma = \frac{u_3}{\|\mathbf{u}\|} \quad \text{y} \quad \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

Un vector de $\mathbb{R}^3$ queda únicamente determinado por su magnitud y sus ángulos directores.



Ejemplo 5.2.5

Halle los cosenos directores y los ángulos de dirección para el vector $\mathbf{v} = 2\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}$

Solución

El vector tiene longitud $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$, entonces los cosenos directores son:

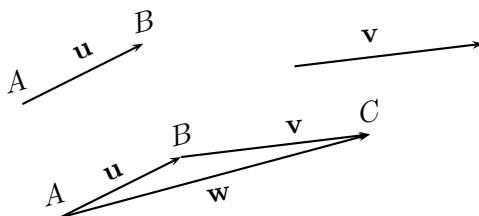
$$\cos \alpha = \frac{2}{3}, \quad \cos \beta = -\frac{1}{3} \quad \text{y} \quad \cos \gamma = -\frac{2}{3}$$

y los ángulos directores son:

$$\alpha = \arccos \frac{2}{3}, \quad \beta = \arccos \left(-\frac{1}{3}\right) \quad \text{y} \quad \gamma = \arccos \left(-\frac{2}{3}\right)$$

Interpretación geométrica de la suma y diferencia de vectores.

Consideremos dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, si fijamos un punto arbitrario A obtenemos un único punto B tal que $\mathbf{u} = AB$. Ahora transportamos el vector $\mathbf{v}$ tal que su punto inicial sea el punto B , así encontramos un único punto C tal que $\mathbf{v} = BC$, entonces el vector dado por el segmento dirigido AC es el vector suma $\mathbf{u} + \mathbf{v}$. Esto es lo que se conoce como la ley del paralelogramo.

**Observación 5.2.6**

La **diferencia** entre los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ es el tercer vector $\mathbf{w}$ determinado por $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v})$

Ejemplo 5.2.7

Considere los vectores $\mathbf{u} = (2, -1, 5)$ y $\mathbf{v} = (-2, -5, -3)$. Calcule $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ y compare su longitud con $\frac{1}{2}(\mathbf{u} + \mathbf{v})$

Solución

- $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (0, -6, 2)$ cuya longitud es $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{40}$
- $\frac{1}{2}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = (0, -3, 1)$ cuya longitud es $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{10}$

5.2.2 Producto escalar o producto punto.**Definición 5.2.8**

Si $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ dos vectores en $\mathbb{R}^3$. El producto escalar $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ entre los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ es el número real (o escalar)

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.$$

Ejemplo 5.2.9

Calcule el producto escalar de los vectores $\mathbf{u} = (-1, -3, -2)$ y $\mathbf{v} = (-2, 5, -3)$.

Solución

El producto escalar entre los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ es

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= (-1) \cdot (-2) + (-3) \cdot 5 + (-2) \cdot (-3) \\ &= 2 - 15 + 6 \\ &= -7 \end{aligned}$$

Propiedades del producto escalar

Sean $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ vectores de $\mathbb{R}^3$ y λ un escalar, entonces

- $\|\mathbf{u}\|^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$
- $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$.
- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$.
- $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} > 0$ para todo vector no nulo $\mathbf{v}$.
- $\lambda(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (\lambda\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \lambda(\mathbf{v})$.
- $\mathbf{0} \cdot \mathbf{u} = 0$.

Proposición 5.2.10

Si θ es el menor ángulo positivo entre los vectores no nulos $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, entonces

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta$$

DEMOSTRACIÓN.

Usando el Teorema del coseno, se tiene

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 &= \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta \\ (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) &= \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta \\ \|\mathbf{u}\|^2 - 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \|\mathbf{v}\|^2 &= \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta\end{aligned}$$

■

Corolario 5.2.11

Dos vectores no nulos $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son perpendiculares (u ortogonales) si y solo si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

DEMOSTRACIÓN.

La demostración es inmediata al reemplazar θ con $\frac{\pi}{2}$

■

Ejemplo 5.2.12

Determinar la medida del ángulo $\angle ABC$ si $A(1, -2, 3)$, $B(2, 4, -6)$ y $C(5, -3, 2)$.

Solución

Sea $\mathbf{u}$ el vector que une el punto B y el punto A , y $\mathbf{v}$ el vector que une el punto B y el punto C .

Luego, se tiene que
$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= (-1, -6, 9) \\ \mathbf{v} &= (3, -7, 8)\end{aligned}$$

Usando la proposición 5.2.10 se tiene:

$$\begin{aligned}(-1, -6, 9) \cdot (3, -7, 8) &= \sqrt{(-1)^2 + (-6)^2 + 9^2} \cdot \sqrt{3^2 + (-7)^2 + 8^2} \cdot \cos \theta \\ -3 + 42 + 72 &= \sqrt{118} \cdot \sqrt{122} \cdot \cos \theta \\ 111 &= \sqrt{14,396} \cdot \cos \theta \\ \cos \theta &= \frac{111}{\sqrt{14,396}} \approx 0,925 \\ \theta &\approx \arccos(0,925) \approx 22,31\end{aligned}$$

Proposición 5.2.13

Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores en $\mathbb{R}^3$, entonces:

1. $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$
2. $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$

DEMOSTRACIÓN.

1. En el caso que los vectores $\mathbf{u}$ o $\mathbf{v}$ sean nulos el resultado es evidente. Para el caso que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ sean no nulos, se tiene por la proposición anterior que:

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| |\cos \theta|$$

Como $|\cos \theta| \leq 1$, entonces

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$$

2.

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 &= (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \\ &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 + 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \|\mathbf{v}\|^2 \\ &\leq \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2 = (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2\end{aligned}$$

Al extraer raíz cuadrada obtenemos,

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$$

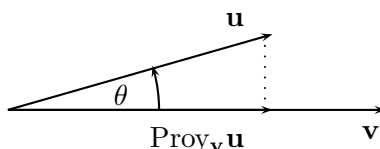
■

Definición 5.2.14

Dados dos vectores no nulos $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, definimos la **proyección** de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{v}$, $\text{Proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$ como el vector en la dirección de $\mathbf{v}$ de magnitud $\|\mathbf{u}\| \cos \theta$, es decir,

$$\text{Proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2} \mathbf{v}$$

El valor real $\|\vec{u}\| \cos \theta$ se llama la **proyección escalar** de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$.

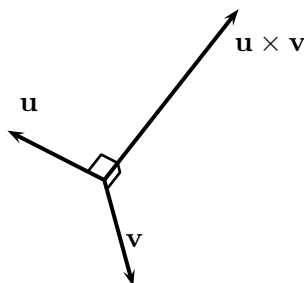
**5.2.3 Producto cruz****Definición 5.2.15**

Sean $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$. El **producto cruz** entre los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ es el vector dado por:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$$

Observación 5.2.16

El vector $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es perpendicular a los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$

**Propiedades****Proposición 5.2.17**

Si $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son vectores y k es un escalar, entonces:

1. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$
2. $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$
3. $k\mathbf{u} \times \mathbf{v} = k\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times k\mathbf{v}$
4. $\mathbf{u} \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$
5. $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$
6. $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$

Propiedades geométricas del producto vectorial

Proposición 5.2.18

Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores tridimensionales no nulos y θ es el ángulo entre ellos, entonces:

1. El vector $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es ortogonal a los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$
2. $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2$ Identidad de Lagrange
3. $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sin \theta$
4. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ si y solo si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son paralelos
5. $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$ representa la medida del área del paralelogramo formado por $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$

DEMOSTRACIÓN.

La demostración queda como ejercicio. ■

5.3 Rectas y planos en el espacio

5.3.1 Rectas en $\mathbb{R}^3$

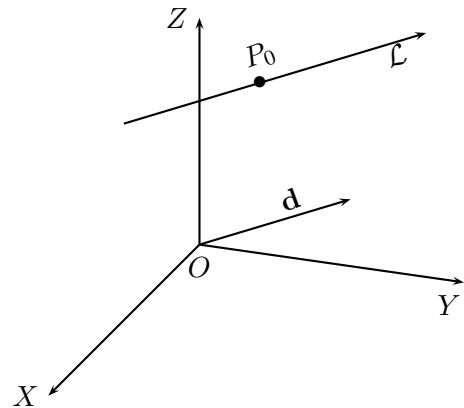
En el plano coordenado sabemos que una recta queda determinada por dos puntos (o un punto y su pendiente). En el espacio es más conveniente usar vectores para determinar la ecuación de una recta. Para ello se requieren una de las siguientes condiciones:

- un punto de ella y un vector no nulo que define su dirección
- dos puntos de la recta

Consideremos en un sistema de coordenadas de tres dimensiones una recta $\mathcal{L}$ que pasa por el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y es paralela a un vector $\mathbf{d} = (a, b, c)$, $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$

La recta $\mathcal{L}$ esta formada por todos los puntos $P(x, y, z)$ tales que el vector $\overrightarrow{P_0P}$ es paralelo al vector $\mathbf{d}$, es decir

$$\begin{aligned} P(x, y, z) \in \mathcal{L} &\Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} // \mathbf{d} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} = t\mathbf{d}, \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$



Definición 5.3.1

Dado un punto fijo $P_0(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ y un vector fijo $\mathbf{d} = (a, b, c)$, no nulo, la recta $\mathcal{L}$ que pasa por P_0 y tiene la dirección de $\mathbf{d}$ es el conjunto de puntos

$$\mathcal{L} = \{P = (x, y, z) / P = P_0 + t\mathbf{d}, t \in \mathbb{R}\}$$

Luego, la **ecuación vectorial** de la recta está dada por

$$\vec{P_0P} = t\mathbf{d}, \text{ con } t \in \mathbb{R}.$$

El vector $\mathbf{d}$ se llama vector director de $\mathcal{L}$ y los números a , b y c se llaman números directores de la recta.

Igualando componentes obtenemos las **ecuaciones paramétricas** de la recta $\mathcal{L}$:

$$\begin{aligned}x &= x_0 + at \\y &= y_0 + bt \\z &= z_0 + ct\end{aligned}$$

Si a , b , c son todos no cero, podemos despejar el parámetro t y obtener las **ecuaciones simétricas** de $\mathcal{L}$:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Ejemplo 5.3.2

Halle las ecuaciones paramétricas y simétricas de la recta $\mathcal{L}$ que pasa por el punto $(4, 2, -3)$ y es paralela al vector $\mathbf{d} = \left(\frac{1}{3}, 2, \frac{1}{2}\right)$. Determine los puntos donde la recta intersecta a los planos coordenados

Solución

Un conjunto de ecuaciones paramétricas de la recta $\mathcal{L}$ es :

$$\begin{cases}x = 4 + \frac{k}{3} \\y = 2 + 2k \\z = -3 + \frac{k}{2}\end{cases}$$

y un conjunto de ecuaciones simétricas es $3(x - 4) = \frac{y - 2}{2} = 2(z + 3)$

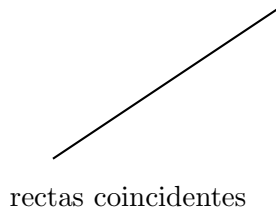
Tanto las ecuaciones paramétricas como las simétricas de una recta no son únicas. Si $k = 6$ en las ecuaciones paramétricas obtenemos el punto $Q(6, 14, 0)$.

Usando este punto y como vector director $6\mathbf{d} = (2, 12, 3)$, obtenemos las ecuaciones paramétricas siguientes:

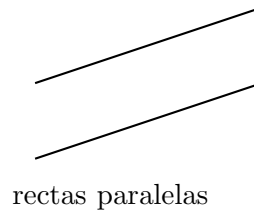
$$\begin{cases}x = 6 + 2t \\y = 14 + 12t \\z = 3t\end{cases}$$

Dadas dos rectas en el espacio, existen cuatro posiciones en las que pueden encontrarse:

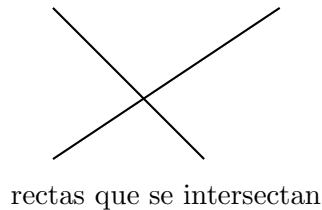
- Se cortan en un punto
- Son paralelas
- Son coincidentes
- son alabeadas u oblicuas (se cruzan pero no se intersectan)



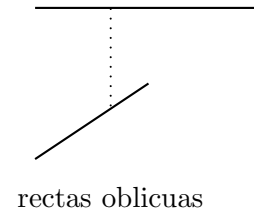
rectas coincidentes



rectas paralelas



rectas que se intersectan



rectas oblicuas

Definición 5.3.3

Sean $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ dos rectas con vectores directores $\mathbf{d}_1$ y $\mathbf{d}_2$ respectivamente.

1. Si ellas se intersectan, los ángulos entre ellas son θ y $\pi - \theta$, donde θ es el ángulo entre $\mathbf{d}_1$ y $\mathbf{d}_2$.
2. $\mathcal{L}_1 // \mathcal{L}_2 \Leftrightarrow \mathbf{d}_1 // \mathbf{d}_2 \Leftrightarrow \mathbf{d}_2 = k \mathbf{d}_1$ algún escalar k .
3. $\mathcal{L}_1 \perp \mathcal{L}_2 \Leftrightarrow \mathbf{d}_1$ y $\mathbf{d}_2$ son ortogonales $\Leftrightarrow \mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{d}_2 = 0$.

Ejemplo 5.3.4

Dadas las rectas

$$\mathcal{L}_1 : \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 5 - 4t \\ z = -1 + t \end{cases} \quad \text{y} \quad \mathcal{L}_2 : \begin{cases} x = -2 - k \\ y = 3 + 2k \\ z = -4 + 3k \end{cases}$$

Muestre que se intersectan y halle el ángulo entre ellas.

Solución

Igualando las ecuaciones para x , y y z se tiene

$$\begin{cases} -3 + 2t = -2 - k \\ 5 - 4t = 3 + 2k \\ -1 + t = -4 + 3k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = -2t + 1 \\ k = 1 - 2t \\ k = 1 + \frac{t}{3} \end{cases} \Rightarrow t = 0, \quad k = 1$$

luego el punto de intersección es $(-3, 5, -1)$.

Como los vectores directores de las rectas son $\mathbf{d}_1 = (2, -4, 1)$ y $\mathbf{d}_2 = (-1, 2, 3)$, el ángulo entre ellos verifica que: $\cos \theta = \frac{\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{d}_2}{\|\mathbf{d}_1\| \|\mathbf{d}_2\|} = \frac{-7}{7\sqrt{6}}$ luego $\theta = \arccos\left(\frac{-1}{\sqrt{6}}\right)$

Ejemplo 5.3.5

Determine si las rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son paralelas, oblicuas o se cortan. Si se cortan, encuentre el punto de intersección.

$$1. \mathcal{L}_1 : \frac{x-4}{2} = \frac{y+5}{4} = \frac{z-1}{-3}, \quad \mathcal{L}_2 : \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{2}$$

$$2. \mathcal{L}_1 : \begin{cases} x = -6t \\ y = 1 + 9t \\ z = -3t \end{cases}, \quad \mathcal{L}_2 : \begin{cases} x = 1 + 2s \\ y = 4 - 3s \\ z = s \end{cases}$$

Solución

1. Igualando las ecuaciones para x, y, z se tiene

$$\begin{cases} 4 + 2t = 2 + k \\ -5 + 4t = -1 + 3k \\ 1 - 3t = 2k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 2 + 2t \\ k = -\frac{4}{3} + \frac{4}{3}t \\ k = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}t \end{cases}$$

se tiene de aquí que $t = -5$ y $k = -8$ satisfacen las dos primeras ecuaciones, pero no la tercera ecuación, luego el sistema no tiene solución por lo cual las rectas son oblicuas.

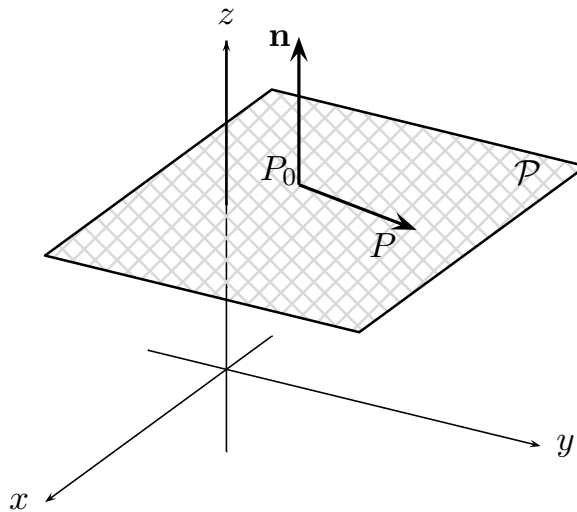
2. Como los vectores directores de las rectas son $\mathbf{a} = (-6, 9, -3)$ y $\mathbf{b} = (2, -3, 1)$ y se verifica que $\mathbf{a} = -3\mathbf{b}$, las rectas son paralelas.

5.3.2 Planos

Un plano en el espacio está determinado por un punto P_0 del plano y un vector $\mathbf{n}$ que es ortogonal al plano (vector normal).

Consideremos en un sistema de coordenadas de tres dimensiones un plano $\mathcal{P}$ que pasa por el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y tiene como vector normal $\mathbf{n} = (a, b, c)$. Este plano consta de todos los puntos $P(x, y, z)$ tales que el vector $\overrightarrow{P_0P}$ es ortogonal con $\mathbf{n}$, es decir,

$$\begin{aligned} P(x, y, z) \in \mathcal{P} &\Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} \perp \mathbf{n} \\ &\Leftrightarrow (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (a, b, c) = 0 \\ &\Leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \end{aligned}$$



De lo anterior se puede deducir las distintas formas de la ecuación del plano $\mathcal{P}$

- Forma **vectorial** de $\mathcal{P}$: $\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$
- Forma **canónica** de $\mathcal{P}$: $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$
- Forma **cartesiana** de $\mathcal{P}$: $ax + by + cz = d$

Si a, b, c y d no nulos, la ecuación cartesiana puede escribirse como:

$$\frac{x}{A} + \frac{y}{B} + \frac{z}{C} = 1$$

donde $A = \frac{d}{a}$, $B = \frac{d}{b}$ y $C = \frac{d}{c}$ representan la distancia al origen de los puntos en que el plano interseca a los ejes X , Y y Z respectivamente.

Consideremos un plano de ecuación $ax + by + cz = d$

- Si $a = 0$ la ecuación $by + cz = d$ representa un plano en el espacio perpendicular al plano coordenado YZ .
- Si $b = 0$ la ecuación $ax + cz = d$ representa un plano en el espacio perpendicular al plano coordenado XZ .
- Si $c = 0$ la ecuación $ax + by = d$ representa un plano en el espacio perpendicular al plano coordenado XY .
- Si $d = 0$ la ecuación $ax + by + cz = 0$ representa un plano en el espacio que pasa por el origen.
- Si $a = b = 0$ la ecuación $cz = d$ representa un plano en el espacio paralelo al plano coordenado XY .
- Si $a = c = 0$ la ecuación $by = d$ representa un plano en el espacio paralelo al plano coordenado XZ .
- Si $b = c = 0$ la ecuación $ax = d$ representa un plano en el espacio paralelo al plano coordenado YZ .

Ejemplo 5.3.6

Encuentre una ecuación del plano que pasa por el punto $(1, 1, 2)$ y que tenga como vector normal a $\mathbf{n} = (2, 4, 3)$. Encuentre la intersección con los ejes y trace el plano.

Solución

La ecuación canónica es $2(x - 1) + 4(y - 1) + 3(z - 2) = 0$ y por tanto la ecuación general es $2x + 4y + 3z = 12$ la que puede expresarse como $\frac{x}{6} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$

Luego las intersecciones con los ejes coordenados son: $x = 6$, $y = 3$ y $z = 4$.

Observación 5.3.7

Dos planos en el espacio tridimensional o bien son paralelos o se intersectan en una recta. Si se intersectan podemos determinar el ángulo entre ellos a partir del ángulo de sus vectores normales.

Definición 5.3.8

Si los planos $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ se intersectan y tienen vectores normales $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$, entonces el ángulo θ entre los planos es igual al ángulo entre los vectores normales, se tiene entonces que:

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{\|\mathbf{n}_1\| \|\mathbf{n}_2\|}$$

Los planos $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ son:

- perpendiculares $\Leftrightarrow \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0$
- paralelos $\Leftrightarrow \mathbf{n}_1 = k \mathbf{n}_2$, para algún escalar k .

Ejemplo 5.3.9

Determine en cada uno de los siguientes casos si los planos son , perpendiculares o ninguno de ellos. Si no son paralelos, halle el ángulo entre ellos y las ecuaciones paramétricas de su recta de intersección.

1. $x - 3y + z = 4$, $5x + 4y + 7z = 1$
2. $2x - 3y + 6z = 3$, $5x + y - z = 2$
3. $x - 5y - z = 1$, $-3x + 15y + 3z = 2$

Solución

$$1. \mathbf{n}_1 = (1, -3, 1), \mathbf{n}_2 = (5, 4, 7) \Rightarrow \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 5 - 12 + 7 = 0$$

luego los planos son perpendiculares.

Determinemos la recta de intersección resolviendo el sistema

$$\begin{array}{rcl} \left. \begin{array}{l} x - 3y + z = 4 \\ 5x + 4y + 7z = 14 \end{array} \right\} & \Rightarrow & \left. \begin{array}{l} 7x - 21y + 7z = 28 \\ 5x + 4y + 7z = 14 \end{array} \right\} \\ & & \Rightarrow 2x - 25y = 14 \Rightarrow x = 7 + \frac{25}{2}y \\ & & \Rightarrow z = -3 - \frac{19}{2}y \end{array}$$

$$\text{luego una ecuación paramétrica de la recta intersección es } \begin{cases} x = 7 + 25t \\ y = 2t \\ z = -3 - 19t \end{cases}$$

$$2. \mathbf{n}_1 = (2, -3, 6), \mathbf{n}_2 = (5, 1, -1) \Rightarrow \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 10 - 3 - 6 = 1$$

luego,

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{49}\sqrt{27}} = \frac{1}{21\sqrt{3}} \Rightarrow \theta = \arccos \frac{1}{21\sqrt{7}}$$

para determinar la recta de intersección resolvemos el sistema

$$\left| \begin{array}{rcl} 2x - 3y + 6z & = & 3 \\ 5x + y - z & = & 2 \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{rcl} 2x - 3y + 6z & = & 3 \\ 30x + 6y - 6z & = & 12 \end{array} \right|$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 32x + 3y &= 15 & \Rightarrow y &= 5 - \frac{32}{3}x \\ \Rightarrow z &= 3 - \frac{17}{3}x \end{aligned}$$

luego una ecuación paramétrica de la recta intersección es $\begin{cases} x = 3t \\ y = 5 - 32t \\ z = 3 - 17t \end{cases}$

3. $\mathbf{n}_1 = (1, -5, -1), \mathbf{n}_2 = (-3, 15, 3) \Rightarrow \mathbf{n}_2 = -3\mathbf{n}_1$

los planos son paralelos.

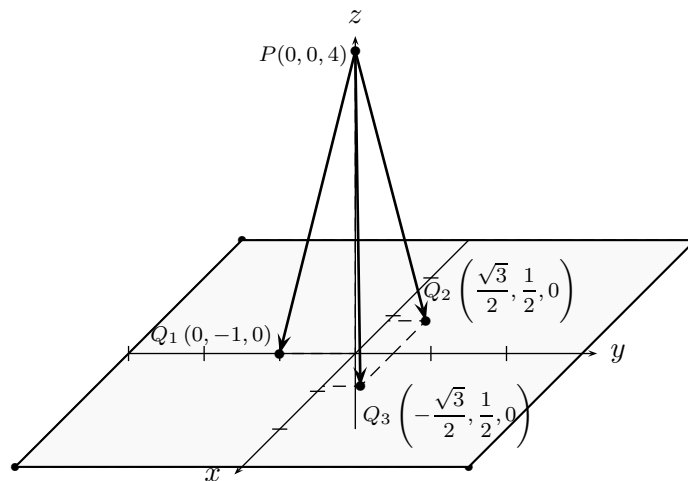
5.4 Aplicaciones físicas de los vectores

En esta sección se presentan algunos ejemplos de aplicaciones de los vectores.

Ejemplo 5.4.1: Magnitud de una fuerza

Una cámara de televisión de 24 kilogramos está colocada en un trípode, cuyos pies se encuentran en $Q_1(0, -1, 0)$, $Q_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$, $Q_3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$, cada unidad mide un metro, como se muestra en la figura. Representar la fuerza ejercida en cada pata del trípode como un vector.

Solución



Sean los vectores F_1, F_2 y F_3 las fuerzas ejercidas en las tres patas, respectivamente. A partir de la figura, se puede determinar que las direcciones de F_1, F_2 y F_3 son las siguientes:

$$\begin{aligned} F_1 &= \overrightarrow{PQ_1} = (0, -1, -4) \\ F_2 &= \overrightarrow{PQ_2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, -4 \right) \\ F_3 &= \overrightarrow{PQ_3} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, -4 \right) \end{aligned}$$

Como cada pata tiene la misma longitud, y la fuerza total se distribuye igualmente entre las tres patas, se sabe que $\|F_1\| = \|F_2\| = \|F_3\|$. Por tanto existe una constante t tal que

$$\begin{aligned} F_1 &= t(0, -1, -4) \\ F_2 &= t \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, -4 \right) \\ F_3 &= t \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -1, -4 \right) \end{aligned}$$

Sea la fuerza total ejercida por el objeto $F = -24\hat{k}$, entonces sabiendo que $F = F_1 + F_2 + F_3$ y que $\|F_1\| = \|F_2\| = \|F_3\|$, cada fuerza tiene una componente vertical de $-8\hat{k}$. Esto implica que $t \cdot (-4) = -8 \Rightarrow t = 2$.

Por tanto, las fuerzas ejercidas sobre las patas pueden representarse por:

$$\begin{aligned} F_1 &= (0, -2, -8) \\ F_2 &= (\sqrt{3}, 1, -8) \\ F_3 &= (-\sqrt{3}, -1, -8) \end{aligned}$$

5.4.1 Trabajo

El trabajo W se puede determinar matemáticamente como el producto punto entre el vector fuerza $\vec{F}$ y el vector desplazamiento $\vec{d}$. Por lo tanto,

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} = |F| \cos \theta d$$

siendo θ el ángulo entre estos dos vectores.

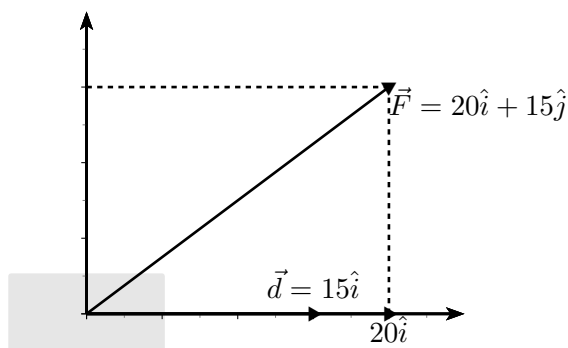
Ejemplo 5.4.2

sobre un cuerpo actúa una fuerza $\vec{F} = 20\hat{i} + 15\hat{j}$ que produce un desplazamiento $\vec{d} = 15\hat{i}$, calcule el trabajo realizado por esta fuerza

Solución

Aplicando directamente la fórmula, se obtiene:

$$\begin{aligned} W &= (20\hat{i} + 25\hat{j}) \cdot (25\hat{i} + 0\hat{j}) \\ &= 20 \cdot 25 + 25 \cdot 0 \\ &= 500 \end{aligned}$$

**5.5 Ejercicios Resueltos**

1. Dados los vectores $\vec{a} = (2, -3, k)$ y $\vec{b} = (1, 3k, 5)$
 - a) Encuentre las condiciones sobre k para que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sean perpendiculares.
 - b) Con el(los) valor(es) de k encontrado(s), calcule $\vec{a} \times \vec{b}$.

Solución

- a) Para que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sean perpendiculares, debe cumplirse que

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= 0 \\ (2, -3, k) \cdot (1, 3k, 5) &= 0 \\ 2 \cdot 1 + (-3) \cdot 3k + k \cdot 5 &= 0 \\ 2 - 9k + 5k &= 0 \\ k &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Así $\vec{a} = \left(2, -3, \frac{1}{2}\right)$ y $\vec{b} = \left(1, \frac{3}{2}, 5\right)$

- b) Aplicando la definición de producto cruz, se tiene

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \left(-3 \cdot 5 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \cdot 1 - 2 \cdot 5, 2 \cdot \frac{3}{2} - (-3) \cdot 1\right) \\ &= \left(-15 - \frac{3}{4}, \frac{1}{2} - 10, 3 + 3\right) \\ &= \left(-\frac{63}{4}, -\frac{19}{2}, 6\right) \end{aligned}$$

2. Determine la ecuación de la recta L que contiene a los puntos $(1, 2, -1)$ y $(0, 3, -3)$.

Solución

Encontremos el vector director de la recta solicitada:

$$\begin{aligned}\vec{d} &= (1, 2, -1) - (0, 3, -3) \\ &= (1, -1, 2)\end{aligned}$$

considerando cualquier de los puntos dados podemos encontrar la ecuación:

$$(x, y, z) = (1, 2, -1) + \lambda(1, -1, 2) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

3. Hallar la ecuación paramétrica de la recta L , que pasa por el origen y es perpendicular a las rectas de directores $(4, 2, 1)$ y $(-3, -2, 1)$.

Solución

Sea $\vec{d}$ el vector de la recta L , debe cumplirse que:

$$\begin{aligned}(d_1, d_2, d_3) \cdot (4, 2, 1) &= 0, \text{ es decir, } 4d_1 + 2d_2 + d_3 = 0 \\ (d_1, d_2, d_3) \cdot (-3, -2, 1) &= 0, \text{ es decir, } -3d_1 - 2d_2 + d_3 = 0\end{aligned}$$

Así sumando ambas igualdades $d_1 = -2d_3$ sustituyendo esto en la primera ecuación $d_2 = \frac{7}{2}d_3$
Por lo tanto si tomamos $d_3 = t, t \in \mathbb{R}$,

$$(d_1, d_2, d_3) = \left(-2t, \frac{7}{2}t, t\right)$$

Por lo tanto, la ecuación solicitada es:

$$(x, y, z) = t \cdot \left(-2, \frac{7}{2}, 1\right) \quad t \in \mathbb{R}$$

4. Dados los puntos $A = (0, 2, 0)$, $B = (2, 1, -4)$ y $C = (1, -1, 3)$:

- Encuentre la ecuación general del plano Π que contiene a los puntos A , B y C .
- Encuentre una recta que interseca perpendicularmente al plano Π en el punto B .

Solución

- Primero debemos generar dos vectores del plano Π : $\overrightarrow{AB} = (2, -1, -4)$ y $\overrightarrow{AC} = (1, -3, 3)$.
Ahora debemos calcular el vector normal $\vec{n}$ al plano Π :

$$\begin{aligned}\vec{n} &= \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-1 \cdot 3 - (-4) \cdot (-3), (-4) \cdot 1 - 2 \cdot 3, 2 \cdot (-3) - (-1) \cdot 1) \\ &= (-15, -10, -5)\end{aligned}$$

Luego, la ecuación general del plano será:

$$\begin{aligned}((x, y, z) - (0, 2, 0)) \cdot (-15, -10, -5) &= 0 \\(x, y - 2, z) \cdot (-15, -10, -5) &= 0 \\-15x - 10y + 20 - 5z &= 0 \\3x + 2y + z - 4 &= 0\end{aligned}$$

- b) Sabiendo que tanto $\vec{n}$ y $-\vec{n}$ son perpendiculares a Π , La recta tiene como vector director $\vec{d} = (15, 10, 5)$ y pasa por el punto $B = (2, -1, -4)$. Finalmente la ecuación de la recta L solicitada es:

$$L : (x, y, z) = (2, -1, -4) + \lambda(15, 10, 5) \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

5. a) Encontrar la ecuación de la recta L_1 , que pasa por el punto $(2, -3, -2)$ y que es paralela a la recta $\frac{x+1}{4} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-3}{5}$.
- b) Encuentre la recta L_2 , definida por la intersección de los planos $\Pi_1 : 3x + 2y + z + 2 = 0$ y $\Pi_2 : x - y + 2z - 1 = 0$.
- c) Hallar la ecuación del plano Π_3 que contiene a la recta L_1 y L_2 de los items anteriores.

Solución

- a) Las rectas al ser paralelas pueden ser escritas utilizando el mismo vector director, por lo tanto la recta solicitada tiene director: $\vec{d}_1 = (4, -1, 3)$. Así la ecuación paramétrica de L_1 será:

$$L_1 : (x, y, z) = (2, -3, -2) + t(4, -1, 3), \quad t \in \mathbb{R}$$

- b) Para encontrar la ecuación de la recta L_2 debemos resolver el siguiente sistema

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = -2 \\ x - y + 2z = 1 \end{cases} \quad / \cdot 2 \rightarrow \begin{cases} 3x + 2y + z = -2 \\ 2x - 2y + 4z = 2 \end{cases}$$

De este modo $5x + 5z = 0 \rightarrow x = -z$ (1)

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = -2 \\ x - y + 2z = 1 \end{cases} \quad / \cdot -3 \rightarrow \begin{cases} 3x + 2y + z = -2 \\ -3x + 3y - 6z = -3 \end{cases}$$

De este modo, $5y - 5z = -5 \rightarrow y = z - 1$ (2)

Sea $z = t$ en (1) y (2), se obtiene $t = \frac{x-0}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-0}{1}$. Por lo tanto,

$$L_2 : (x, y, z) = (0, -1, 0) + t(-1, 1, 1), \quad t \in \mathbb{R}$$

- c) El vector normal al plano Π_3 corresponde al producto cruz de los vectores directores $(4, -1, 3)$ y $(-1, 1, 1)$, así $\vec{n} = (-4, -7, 3)$, considerando un punto de la recta L_2 , en particular el $(0, -1, 0)$, la ecuación del plano solicitada es:

$$\Pi_3 : 4x + 7y - 3z = -7$$

6. Encuentre la ecuación del plano Π_1 que contiene a la recta $L_1 = (1, 2, 0) + t(3, -1, 1)$ y al punto $A(1, 2, 5)$. Luego encuentre el plano Π_3 que contiene el punto A y es perpendicular al plano Π_1 y al plano $\Pi_2 : x + y + z - 2 = 0$.

Solución

Para encontrar la ecuación del plano Π_1 , debemos hallar primero su vector normal. Ya tenemos el vector director de la recta $\vec{d}_1 = (3, -1, 1)$, y podemos calcular un segundo vector que va desde el punto $(1, 2, 0)$ al punto $A(1, 2, 5)$. A saber, $\vec{d}_2 = (0, 0, 5)$. Primero haremos el producto cruz en el siguiente orden

$$\begin{aligned}\vec{n} &= \vec{d}_2 \times \vec{d}_1 \\ &= (0, 0, 5) \times (3, -1, 1) \\ &= (1 \cdot 0 - (-1) \cdot 5, 3 \cdot 5 - 1 \cdot 0, (-1) \cdot 0 - 3 \cdot 0) \\ &= (5, 15, 0)\end{aligned}$$

Así, la ecuación del plano es la siguiente

$$\begin{aligned}\Pi_1 : \quad 5(x - 1) + 15(y - 2) &= 0 \\ 5x - 5 + 15y - 30 &= 0 \\ 5x + 15y - 35 &= 0 \\ \Pi_1 : \quad x + 3y - 7 &= 0\end{aligned}$$

El vector normal del plano Π_1 es $\vec{n}_1 = (1, 3, 0)$ y del plano Π_2 es $\vec{n}_2 = (1, 1, 1)$. Luego, debe cumplirse que el vector normal del plano Π_3 sea perpendicular a los otros dos vectores. Esto ocurre si y solo si:

$$\begin{aligned}(d_1, d_2, d_3) \cdot (1, 3, 0) &= 0 \quad \rightarrow \quad d_1 + 3d_2 = 0 \\ (d_1, d_2, d_3) \cdot (1, 1, 1) &= 0 \quad \rightarrow \quad d_1 + d_2 + d_3 = 0\end{aligned}$$

Restando ambas ecuaciones se obtiene $2d_2 = d_3$ y reemplazando este resultado en la segunda ecuación se obtiene que $d_1 = -3d_2$.

Así, dejando $d_2 = t \in \mathbb{R}$, se obtiene que el vector normal del plano Π_3 es $\vec{n}_3 = t(-3, 1, 2)$

Finalmente la ecuación del plano Π_3 es:

$$\begin{aligned}\Pi_3 : \quad -3(x - 1) + y - 2 + 2(z - 5) &= 0 \\ -3x + 3 + y - 2 + 2z - 10 &= 0 \\ \Pi_3 : \quad 3x - y - 2z + 9 &= 0\end{aligned}$$

Matrices

6.1 Primeros conceptos

Definición 6.1.1

Dados $a_{ij} \in K$ con $i = 1, 2, \dots, m$ y $j = 1, 2, \dots, n$ al rectángulo de $m \times n$ elementos ordenados en una tabla con m filas y n columnas de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-ésima fila}$$

$\uparrow$
 $j\text{-ésima columna}$

se les denomina matrices de orden $m \times n$

Los elementos a_{ij} de una matriz, llamados entradas, no necesariamente tienen que ser números reales, pueden ser también parámetros, números complejos, funciones, etc. Así, por ejemplo, las siguientes matrices son de distinto orden y tipo de elementos:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & -6 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} t & 2t \\ t^2 & -\frac{t}{2} \end{pmatrix}$$

Habitualmente se denotan con letras mayúsculas las matrices y con minúsculas los elementos que las constituyen. Dados que estos últimos están ordenados en filas y columnas, al elemento que en

una matriz ocupa el lugar de la fila i -ésima y la columna j -ésima en general se le notará por a_{ij} . Es decir, con el primer subíndice i se indica la fila en la que está el elemento y por j la columna. Por tanto, todos los elementos de una matriz A de orden $m \times n$ se podrán representar por $A = \begin{pmatrix} a_{ij} \end{pmatrix}$ con $i = 1, 2, \dots, m$ y $j = 1, 2, \dots, n$.

En ocasiones interesa trabajar bien con las filas o con las columnas de la matriz A , y, por ello, se introduce la siguiente notación:

- la i -ésima fila se denota por $a_{i.} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}$
- la j -ésima columna se denota por $a_{.j} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$

Cuando una matriz A tiene m filas y n columnas, se dice que su dimensión u orden es $m \times n$. Al conjunto de todas las matrices de orden $m \times n$, se les denota por $M_{m \times n}(K)$. En general, a cualquier matriz de orden $m \times 1$ o $1 \times n$ se les suele llamar vectores, siguiendo las mismas propiedades trabajadas en capítulos anteriores

Definición 6.1.2 (Matriz Cuadrada)

En particular si $m = n$, se escribe $M_n(K)$ y estas son llamadas matrices cuadradas,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Se define la **diagonal** de una matriz A como los elementos correspondientes a $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$

EJEMPLO.

Sea A la siguiente matriz cuadrada

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Los elementos de su diagonal son $a_{11} = -2$, $a_{22} = 5$ y $a_{33} = 2$

Definición 6.1.3 (Matriz diagonal, escalar e identidad)

Una matriz cuadrada cuyas entradas no diagonales sean todas cero se denomina **matriz diagonal**.

Una matriz diagonal en la cual todas sus entradas diagonales sean las mismas se conoce como **matriz escalar**.

Si el escalar de la diagonal es 1, la matriz escalar se conoce como **matriz identidad**. Representadas usualmente con I

EJEMPLO.

Dadas las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se tiene que A es una matriz diagonal, B es una matriz escalar e I es la matriz identidad de orden 3.

Definición 6.1.4 (Igualdad de matrices)

Dos matrices son iguales si tienen el mismo tamaño y si sus entradas correspondientes son iguales. De este modo, si $A = (a_{ij})_{m \times n}$ y $B = (b_{ij})_{r \times s}$, entonces $A = B$ si y solo si $m = r$, $n = s$ y $a_{ij} = b_{ij}$ para cada i, j .

EJEMPLO.

Las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 & t \\ t-3 & 1 \\ -4 & t+2 \end{pmatrix}$$

Serán iguales si y solo si $t = 3$. De este modo se cumplirían las condiciones de igualdad.

Las matrices pueden ser dadas por extensión, como se han mostrado hasta ahora, o por comprensión, definiendo las condiciones necesarias para cada elemento a_{ij} de la matriz

Ejemplo 6.1.5

Describe las entradas de la matriz $A \in M_{3 \times 4}(\mathbb{R})$ donde $a_{ij} = (-1)^{i+j} \left(\frac{i}{j}\right)$.

Solución

$$A = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \frac{1}{1} & (-1)^{1+2} \frac{1}{2} & (-1)^{1+3} \frac{1}{3} & (-1)^{1+4} \frac{1}{4} \\ (-1)^{2+1} \frac{2}{1} & (-1)^{2+2} \frac{2}{2} & (-1)^{2+3} \frac{2}{3} & (-1)^{2+4} \frac{2}{4} \\ (-1)^{3+1} \frac{3}{1} & (-1)^{3+2} \frac{3}{2} & (-1)^{3+3} \frac{3}{3} & (-1)^{3+4} \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} \\ -2 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ 3 & -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

6.2 Operaciones con matrices

6.2.1 Suma de matrices

Dadas las matrices $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_{m \times n}$ se define la suma de matrices como la matriz $C = (a_{ij} + b_{ij}) \in M_{m \times n}$, ésta es llamada la matriz suma de A y B

Ejemplo 6.2.1

Determine la suma de A y B , dadas las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Solución

$$\begin{aligned} C &= \begin{pmatrix} 1+3 & 3+2 & 0-1 \\ 1+4 & 3-1 & 1+2 \\ 2+3 & 0+0 & 3+5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ejemplo 6.2.2: Matriz de producción

Una empresa que fabrica televisores produce tres modelos con distintas características en tres tamaños diferentes. La capacidad de producción (en miles) en su planta de Santiago está dada por la matriz A

Solución

	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3
Tamaño 1 (45 pulg)	4	5	3
Tamaño 2 (50 pulg)	7	4	5
Tamaño 3 (55 pulg)	10	8	4

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 7 & 4 & 5 \\ 10 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

El valor $a_{23} = 5$ indica que la capacidad de la planta es de 5000 televisores Modelo 3 de 50 pulgadas.

La capacidad de producción en la planta de Chillán está dada por la matriz B .

$$B = \begin{array}{c} \text{Tamaño 1} \\ \text{Tamaño 2} \\ \text{Tamaño 3} \end{array} \begin{array}{ccc} \text{Modelo 1} & \text{Modelo 2} & \text{Modelo 3} \\ \left(\begin{array}{ccc} 5 & 3 & 2 \\ 6 & 6 & 4 \\ 9 & 12 & 2 \end{array} \right) \end{array}$$

La producción total de la empresa viene dada por la matriz $C = A + B$

$$C = \begin{array}{c} \text{Tamaño 1 (45 pulg)} \\ \text{Tamaño 2 (50 pulg)} \\ \text{Tamaño 3 (55 pulg)} \end{array} \begin{array}{ccc} \text{Modelo 1} & \text{Modelo 2} & \text{Modelo 3} \\ \left(\begin{array}{ccc} 9 & 8 & 5 \\ 13 & 10 & 7 \\ 19 & 20 & 6 \end{array} \right) \end{array}$$

Propiedades de la suma de matrices

Sean $A, B, C \in M_{m \times n}$. La suma de matrices tiene las siguientes propiedades:

1. **Conmutativa:** $A + B = B + A$
2. **Asociativa:** $A + (B + C) = (A + B) + C$
3. **Elemento Neutro:** Existe una matriz $O \in M_{m \times n}$ tal que $A + O = A$
4. **Elemento Opuesto:** Para cualquier $A \in M_{m \times n}$ existe $(-A) \in M_{m \times n}$ tal que $A + (-A) = O$

6.2.2 Ponderación de una matriz por un escalar

Sean $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Se define la matriz $\lambda A = (\lambda a_{ij}) \in M_{m \times n}$ como la ponderación de la matriz A por el escalar λ , vale decir, al resultado de multiplicar cada elemento de A por λ

Ejemplo 6.2.3

Pondere la matriz $A = \begin{pmatrix} p & p^3 \\ p+1 & 0 \\ \frac{1}{3} & -2p \end{pmatrix}$ por el valor $\lambda = 12$

Solución

Aplicando directamente lo anterior, se tiene la matriz

$$12A = \begin{pmatrix} 12p & 12p^3 \\ 12p+12 & 0 \\ 4 & -24p \end{pmatrix}$$

Propiedades de la ponderación de matrices

Sean $A, B \in M_{m \times n}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. La ponderación de matrices tiene las siguientes propiedades:

1. **Distributiva respecto a la suma de matrices** $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
2. **Distributiva respecto a la suma de escalares** $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
3. **Asociativa** $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$
4. **Elemento unidad** Existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha A = A$, a saber $\alpha = 1$

DEMOSTRACIÓN.

La demostración de estas propiedades es inmediata a partir de las correspondientes para el cuerpo de los números reales y las definiciones de suma y ponderación de matrices. ■

Aplicaciones de la suma y ponderación de matrices

Ejemplo 6.2.4: Ecuaciones matriciales

Determine la matriz X de modo que $2X - 4B = 3A$, dados $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Solución

En efecto, dadas las propiedades de estas operaciones, se tiene que:

$$\begin{aligned} 2X - 4B &= 3A \\ 2X &= 3A + 4B \\ X &= \frac{3}{2}A + 2B \\ X &= \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ X &= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 5 & 6 \\ 2 & 0 & -\frac{7}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

6.2.3 Producto de matrices

Iniciemos esta sección definiendo un producto de matrices en particular, los vectores.

En capítulos anteriores, se definió el producto punto o escalar entre 2 vectores (Vea la definición 5.2.8).

De este modo, definiendo los vectores de manera matricial, podemos expresarlos de la siguiente manera:

Definición 6.2.5 (Producto punto)

Sean $a = (a_{1i}) \in M_{1 \times n}$ y $b = (b_{i1}) \in M_{n \times 1}$, se define el producto punto $a \cdot b$, como el número real c que cumple:

$$c = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + \cdots + a_{1n} \cdot b_{n1} = \sum_{i=1}^n a_{1i} \cdot b_{i1}$$

Ejemplo 6.2.6

Encuentre el producto punto entre los vectores $a = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

Solución

Usando la definición anterior se tiene que:

$$\begin{aligned} a \cdot b &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= 1 \cdot 2 + 3 \cdot 5 + 0 \cdot -2 \\ &= 17 \end{aligned}$$

El producto interior facilita mucho el aprendizaje del producto de matrices.

Definición 6.2.7

Dadas las matrices $A = (a_{ij}) \in M_{m \times r}$ y $B = (b_{jk}) \in M_{r \times n}$, se define el producto de matrices AB como la matriz $C = (c_{ik}) \in M_{m \times n}$, donde c_{ik} corresponde al producto punto entre la i -ésima fila de A y la k -ésima columna de B .

De otra forma, se podría escribir como $c_{ik} = \sum_{l=1}^n a_{il} \cdot b_{lk}$

Visualmente se podría ver así:

$$\begin{array}{c}
 \text{col}_k(B) \\
 \downarrow \\
 \text{fila}_i(A) \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ir} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2k} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rk} & \cdots & b_{rn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & c_{ik} & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}
 \end{array}$$

$$\text{fila}_i(A) \cdot \text{col}_k(B) = c_{ik}$$

Ejemplo 6.2.8

Dadas las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$, encuentre AB y BA

Solución

Note que para obtener AB , debemos multiplicar cada de fila de A por cada columna de B , por lo tanto $C = AB$ será de orden 2×2 , mientras que $D = BA$ será de orden de 3×3 Usando directamente la fórmula, se tiene que:

$$C = AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \quad D = BA = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Calculando cada entrada de C , se obtiene:

$$\begin{array}{ll}
 c_{11} = 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 + 3 \cdot (-2) = -6 & c_{12} = 1 \cdot 4 + (-2) \cdot 2 + 3 \cdot 0 = 0 \\
 c_{21} = 0 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) = 0 & c_{22} = 0 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 0 = 4
 \end{array}$$

Calculando cada entrada de D , se obtiene:

$$\begin{array}{llll}
 d_{11} = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 0 = 2 & d_{12} = 2 \cdot (-2) + 4 \cdot 2 = 4 & d_{13} = 2 \cdot 3 + 4 \cdot 1 = 10 \\
 d_{21} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 1 & d_{22} = 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 2 = 2 & d_{23} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 5 \\
 d_{31} = (-2) \cdot 1 + 0 \cdot 0 = -2 & d_{32} = (-2) \cdot (-2) + 0 \cdot 2 = 4 & d_{33} = (-2) \cdot 3 + 0 \cdot 1 = -6
 \end{array}$$

Por lo tanto,

$$C = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 10 \\ 1 & 2 & 5 \\ -2 & 4 & -6 \end{bmatrix}$$

Observación 6.2.9

Note que el producto AB solo tiene sentido cuando el número de columnas de A coincide con el número de filas de B

$$\begin{array}{ccc} A & B & \\ m \times r & r \times n & \\ \uparrow & \uparrow & \\ \text{iguales} & & \\ \text{nuevo tamaño} = m \times n & & \end{array} = \begin{array}{c} AB \\ m \times n \end{array}$$

Propiedades del producto de matrices

Sean $A \in M_{m \times p}$, $B \in M_{p \times q}$, $C, D \in M_{q \times n}$. El producto de matrices tiene las siguientes propiedades

1. **No conmutativo**
2. **Asociativa** $A(BC) = (AB)C$
3. **Matriz nula** Para cualquier matriz A , existe una matriz nula $O = (o_{ij}) = 0$, de orden adecuado, de tal modo que: $AO = O$
4. **Elemento neutro** Existe la matriz identidad I_n que corresponde al neutro multiplicativo. Para cualquier matriz $A \in M_n$, se verifica que $AI_n = A$
5. **Distributividad** El producto distribuye sobre la suma. $B(C + D) = BC + BD$

Combinación lineal

Las distintas propiedades que hemos enunciado de suma, ponderación de una matriz por un escalar y de la multiplicación nos permiten combinar sin ambigüedad dichas propiedades para resolver algunos problemas.

Definición 6.2.10

Si $A_1, A_2, \dots, A_k$ son matrices del mismo tamaño y $c_1, c_2, \dots, c_k$ son escalares, entonces la matriz $C = c_1A_1 + c_2A_2 + \dots + c_kA_k$ es denominada una combinación lineal.

Ejemplo 6.2.11

Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Calcule $C = 2A - 3B$

Solución

Aplicando directamente lo anterior, se tiene

$$\begin{aligned}C &= 2A - 3B = 2 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\&= \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 8 & 0 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 3 & 15 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \\&= \begin{bmatrix} -5 & -14 \\ 5 & -15 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

6.2.4 Potencias de una matriz

Cuando A y B son dos matrices de orden n , su producto AB también será una matriz de orden n .

Un caso especial se presenta cuando $A = B$. Tiene sentido definir $A^2 = AA$ y en general, definir A^k como $A^k = AA \cdots A$ (k factores) si k es un entero positivo. De esta forma $A^1 = A$, y es conveniente definir $A^0 = I_n$.

Los análogos matriciales de las correspondientes propiedades de las potencias en $\mathbb{R}$ son: Si A es una matriz cuadrada y r, s son enteros no negativos entonces

1. $A^{r+s} = A^r A^s$

2. $(A^r)^s = A^{rs}$

EJEMPLO.

Un ejemplo particular cumple la siguiente matriz.

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, entonces $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ y $A^3 = \begin{pmatrix} 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \end{pmatrix}$.

En general se tiene que $A^k = \begin{pmatrix} 3^{k-1} & 3^{k-1} & 3^{k-1} \\ 3^{k-1} & 3^{k-1} & 3^{k-1} \\ 3^{k-1} & 3^{k-1} & 3^{k-1} \end{pmatrix}$ para todo $k \geq 1$. Lo cual se puede demostrar por inducción

6.3 Matrices especiales

Matrices particionadas

A menudo, es conveniente considerar una matriz compuesta por varias submatrices más pequeñas. Al introducir líneas verticales y/o horizontales en una matriz, podemos particionarla en bloques. Existen varias maneras de particionar una matriz, algunas serán más naturales que otras.

EJEMPLO.

la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ se puede particionar de la siguiente manera:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} I_2 & A \\ O & B \end{pmatrix}$$

Cuando las matrices se multiplican, a menudo existe una ventaja que se gana al considerarlas como matrices particionadas. Con frecuencia, ello no sólo revela estructuras subyacentes, sino que a menudo acelera el cálculo, en especial cuando las matrices son grandes y tienen muchos bloques de ceros.

Por lo tanto, la multiplicación de matrices particionadas es exactamente igual a la multiplicación de matrices ordinaria.

Supongamos que A es una matriz de orden $m \times n$ y B es de orden $n \times r$ de modo que el producto AB existe. Si particionamos B en términos de sus vectores columna, como $B = \left(b_1 \mid b_2 \mid \dots \mid b_r \right)$, entonces

$$AB = A \left(b_1 \mid b_2 \mid \dots \mid b_r \right) = \left(Ab_1 \mid Ab_2 \mid \dots \mid Ab_r \right)$$

este resultado es una consecuencia inmediata de la definición de la multiplicación matricial. La forma de la derecha se denomina representación matricial por columna del producto.

El mismo resultado se obtiene si la matriz A es particionada en términos de sus vectores fila.

Ejemplo 6.3.1

Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, calcule AB particionando la matriz B en columnas y la matriz A en filas.

Solución

Particionando la matriz B en sus vectores columnas se tiene que:

$$Ab_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 4 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \\ 0 \cdot 4 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 2 \end{bmatrix}$$
$$Ab_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 0 \\ 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto,

$$AB = \left[Ab_1 \mid Ab_2 \right] = \begin{bmatrix} 13 & 5 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Por otro lado, si la matriz A se particiona en sus vectores fila se obtiene:

$$a_1B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 4 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 5 \end{bmatrix}$$
$$a_2B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 4 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto,

$$AB = \begin{bmatrix} a_1B \\ a_2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 5 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Matriz triangular**Definición 6.3.2 (Matriz triangular superior)**

La matriz $A \in M_n$ es triangular superior si $a_{ij} = 0 \ \forall i > j$. Vale decir, A es triangular superior si las entradas de A debajo de la diagonal son todos iguales a 0.

EJEMPLO.

La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ es triangular superior

Definición 6.3.3 (Matriz triangular inferior)

La matriz $A \in M_n$ es triangular inferior si $a_{ij} = 0 \ \forall i < j$. Vale decir, A es triangular inferior si las entradas de A por sobre la diagonal son todos iguales a 0.

EJEMPLO.

La matriz $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & -6 & 0 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ es triangular inferior

Definición 6.3.4 (Matriz diagonal)

La matriz $A \in M_n$ es diagonal si $a_{ij} = 0 \ \forall i \neq j$.

EJEMPLO.

La matriz $C = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ es diagonal

6.3.1 Matriz Transpuesta

La transpuesta de una matriz $A = (a_{ij})$ de orden $m \times n$ es la matriz $A^T = (a_{ji})$ de orden $n \times m$. Esta se obtiene de intercambiar las filas de la matriz A por las columnas de A^T .

EJEMPLO.

La transpuesta de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 2 \\ 3 & 4 & 8 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ es la matriz $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 7 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & -2 \end{pmatrix}$

Definición 6.3.5 (Matriz simétrica)

Se dice que una matriz $A \in M_n$ es simétrica si $A = A^T$

EJEMPLO.

La matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -4 \\ 5 & 8 & 12 \\ -4 & 12 & 0 \end{pmatrix}$ es simétrica, pues se verifica que $a_{ij} = a_{ji} \ \forall i \neq j$

Definición 6.3.6 (Matriz antisimétrica)

Se dice que una matriz $A \in M_n$ es antisimétrica si $A = -A^T$

EJEMPLO.

La matriz $b = \begin{pmatrix} 9 & -7 & 3 \\ 7 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & -6 \end{pmatrix}$ es antisimétrica, pues se verifica que $b_{ij} = -b_{ji} \ \forall i \neq j$

6.4 Matriz inversa

Definición 6.4.1 (Matriz inversa)

Sea $A \in M_n$. Diremos que A es invertible o no singular, si existe una matriz $B \in M_n$ tal que $AB = BA = I_n$. esta matriz B es llamada la **matriz inversa** de A , ésta se denota por A^{-1} . De tal modo que: $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

Una matriz cuadrada que no tiene inversa se denomina no invertible o singular

Ejemplo 6.4.2

Verifique que $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ es la matriz inversa de $\begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Solución

Se debe comprobar que el producto de estas matrices es la matriz identidad de orden 2. Luego,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 + 7 \cdot (-1) & 2 \cdot (-7) + 7 \cdot 2 \\ 1 \cdot 4 + 4 \cdot (-1) & 1 \cdot (-7) + 4 \cdot 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \end{aligned}$$

Ejemplo 6.4.3

Encuentre la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Solución

Debemos encontrar una matriz $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ De tal modo que $AA^{-1} = I_2$.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3a + 2c & 3b + 2d \\ a + c & b + d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De aquí se obtiene que $a = -c$ y que $b = 1 - d$. Reemplazando en la primera fila, se obtiene que:

$$\begin{array}{rcl} 3(-c) + 2c = 1 & & 3(1 - d) + 2d = 0 \\ -c = 1 & & 3 - 3d + 2d = 0 \\ c = -1 & & d = 3 \\ \downarrow & & \downarrow \\ a = 1 & & b = -2 \end{array}$$

Finalmente, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

El siguiente teorema enuncia una forma más sencilla de determinar si una matriz es invertible, y como calcular la matriz inversa.

Teorema 6.4.4: Matriz inversa de orden 2

Una matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es invertible sí y solo sí $ad - bc \neq 0$, en cuyo caso:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

DEMOSTRACIÓN.

Sea la matriz $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$, la matriz inversa de A , aplicando el mismo procedimiento usado en el ejemplo 6.4.3, se tiene:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ax + bz & ay + bw \\ cx + dz & cy + dw \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Igualando matrices, se tiene:

$$\begin{cases} ax + bz = 1 \\ ay + bw = 0 \\ cx + dz = 1 \\ cy + dw = 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, sumando y factorizando de manera adecuada, se tiene:

$$\begin{cases} x = \frac{d}{ad-bc} \\ y = \frac{b}{bc-ad} \\ z = \frac{bc-ad}{ad-bc} \\ w = \frac{ad-bc}{ad-bc} \end{cases}$$

Por lo tanto, la matriz A^{-1} se puede escribir como

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{b}{bc-ad} \\ \frac{bc-ad}{ad-bc} & \frac{ad-bc}{ad-bc} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

■

6.4.1 Propiedades de la matriz inversa

1. **(Inversa del producto)** El producto de dos matrices invertibles, también es invertible. Su inversa es el producto de las inversas de los factores en orden inverso. Así, si A y B son matrices invertibles de orden n , también AB lo será y

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

2. **(Inversa de la inversa)** La inversa de una matriz invertible, también es invertible. Su inversa es la matriz original. Así, si A es invertible, también lo es A^{-1} y

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

3. **(Ponderación de la inversa)** Cualquier producto de un escalar distinto de cero por una matriz invertible es invertible. Su inversa es el producto del recíproco del escalar por la inversa de la matriz. Por consiguiente, si A es invertible y λ es un escalar distinto de cero, entonces λA es invertible y

$$(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$$

4. **Transpuesta de la inversa** La inversa de una matriz invertible transpuesta, es la transpuesta de la matriz inversa. Vale decir

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

DEMOSTRACIÓN.

Probaremos la propiedad 1.

1. La demostración de esta propiedad, permite observar porque las matrices quedan en orden inverso. Necesitamos probar que $B^{-1}A^{-1}$ es la inversa de AB

$$\begin{aligned}(AB)(B^{-1}A^{-1}) &= A(BB^{-1})A^{-1} = (AI)A^{-1} = AA^{-1} = I \\ (B^{-1}A^{-1})(AB) &= (B^{-1}(A^{-1}A))B = (B^{-1}I)B = B^{-1}B = I\end{aligned}$$

■

Teorema 6.4.5: Leyes de simplificación

Si C es invertible, entonces

1. $CA = CB \Rightarrow A = B$
2. $AC = BC \Rightarrow A = B$

DEMOSTRACIÓN.

Sin pérdida de generalidad, probaremos solo el ítem 1.

Al ser C invertible, C^{-1} existe, de tal modo que $CC^{-1} = I_n$, por lo tanto, si $CA = CB$, entonces

$$\begin{aligned}A &= I_n \cdot A \\ &= (C^{-1}C)A \\ &= C^{-1}(CA) \\ &= C^{-1}(CB) \\ &= (C^{-1}C)B \\ &= I_n B \\ &= B\end{aligned}$$

■

6.5 Ecuaciones matriciales

Las propiedades básicas de las operaciones matriciales nos permiten resolver algunas ecuaciones matriciales.

Precaución: Cuando se multiplican ambos lados de una ecuación matricial por una matriz, se debe usar la multiplicación por la izquierda o por la derecha, pero no ambas a la vez. Así

$$\begin{aligned}A = B &\Rightarrow CA = CB \\ A = B &\Rightarrow AC = BC\end{aligned}$$

Mientras que $A = B$ no implica $CA = BC$

Ejemplo 6.5.1

Resuelva la ecuación $CXA - B = 0$, para la matriz X , con A, C invertibles y con los tamaños compatibles.

Solución

Aplicando propiedades anteriores, se tiene

$$\begin{aligned} CXA - B &= 0 \\ CXA &= B \\ C^{-1}(CXA) &= C^{-1}B \\ (IXA)A^{-1} &= C^{-1}BA^{-1} \\ X &= C^{-1}BA^{-1} \end{aligned}$$

Observación 6.5.2

La expresión ABA^{-1} no se reduce a B , salvo si A y B conmutan.

6.6 Transformaciones elementales

Cualquier transformación que se efectúe sobre las filas o columnas de una matriz, sin que varíe el orden será llamada transformación elemental.

Las más usadas son las siguientes:

1. Permutar las filas i y j , que se simboliza F_{ij}
2. Multiplicar la i -ésima fila por el escalar $\lambda \neq 0$ se simboliza $F_i(\lambda)$
3. Sumar a la i -ésima fila, λ veces la j -ésima fila, que se simboliza $F_{ij}(\lambda)$

De forma análoga se definen las transformaciones elementales por columna, $C_{ij}, C_i(\lambda), C_{ij}(\lambda)$.

Definición 6.6.1 (Equivalencia de matrices)

Sean $A, B \in M_{x \times n}$, se dice que A es equivalente por filas (o columnas) con B si existe una sucesión finita de transformaciones elementales fila (o columna) que efectuadas sobre A , producen B .

EJEMPLO.

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} b & -2b & b \\ -2b & 0 & 2a \\ 0 & 2b & a \end{pmatrix}$ efectuaremos sobre ella las siguientes transformaciones elementales, para transformarla en una matriz triangular superior: $F_{21}(2), F_{32}(\frac{1}{2})$.

$F_{21}(2)$ corresponde a sumar a la segunda fila la primera fila multiplicada por 2

$F_{32}(\frac{1}{2})$ corresponde a sumar a la tercera fila la segunda fila multiplicada por $\frac{1}{2}$

$$A = \begin{pmatrix} b & -2b & b \\ -2b & 0 & 2a \\ 0 & 2b & a \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{21}(2)} \begin{pmatrix} b & -2b & b \\ 0 & -4b & 2a + 2b \\ 0 & 2b & a \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{32}(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} b & -2b & b \\ 0 & -4b & 2a + 2b \\ 0 & 0 & 3a + 2b \end{pmatrix}$$

Las 3 matrices anteriores son todas equivalentes por filas.

6.7 Matriz escalonada

Definición 6.7.1

Una matriz A se dice escalonada si cumple las siguientes condiciones:

1. La primera entrada no nula de cada fila es 1. éste se llama **pivote** o líder.
2. Los pivotes deben ir de izquierda a derecha y de arriba a abajo.

EJEMPLO.

La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es una matriz escalonada

Observación 6.7.2

Toda matriz $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ es equivalente por filas con una matriz escalonada

Ejemplo 6.7.3

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, encuentre una matriz escalonada B , equivalente por filas con A .

Solución

Aplicando transformaciones elementales, se tiene

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{21}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{21}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{12}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 6.7.4

Verifique que la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ es equivalente por filas con la matriz identidad o que su forma escalonada es I_3 .

Solución

Aplicando transformaciones elementales, se tiene

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{21}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} F_{21}(-2) \\ F_{31}(-1) \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{32}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{13}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definición 6.7.5 (Rango de una matriz)

Sea $A \in M_{m \times n}$ una matriz, se le denomina *rango de una matriz*, al número de filas no nulas de la matriz escalonada equivalente a la matriz A .

Ejemplo 6.7.6

Calcular el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 5 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Solución

Aplicando transformaciones elementales, se obtiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 5 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_{21}(2) \\ F_{31}(1)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_{32}(-1) \\ F_{42}(-1)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, el rango de la matriz A es 2.

Ejemplo 6.7.7

Calcule el valor de λ para que el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda & 3 \\ 4 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$ sea 2

Solución

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda & 3 \\ 4 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{31}(-4)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda & 3 \\ 0 & 1 & 4-\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{32}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4-\lambda \\ 0 & \lambda & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{32}(-\lambda)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4-\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^2 - 4\lambda + 3 \end{pmatrix}$$

Para que el rango de la matriz A sea 2, debe cumplirse que la ltima fila sea nula. Por lo tanto, $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$.

$$\begin{aligned} \lambda^2 - 4\lambda + 3 &= 0 \\ (\lambda - 3)(\lambda - 1) &= 0 \\ \lambda &= 3 \vee \lambda = 1 \end{aligned}$$

6.7.1 Otra forma de hallar la matriz inversa

Si $A \in M_n$ es invertible, entonces A es equivalente con la identidad I_n y para hallar su inversa podemos tomar la matriz $\left(A \mid I_n \right)$ y efectuar sobre ésta una serie de transformaciones elementales fila de tal forma que quede $\left(I_n \mid A^{-1} \right)$ Así al hacer transformaciones elementales sobre A , para que A se transforme en I_n , simultáneamente I se transforma en A^{-1}

Ejemplo 6.7.8

Encuentre la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Solución

Usando la proposición anterior, se obtiene:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & | & 1 & 0 \\ 1 & 1 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{21}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 0 & 1 \\ 3 & 2 & | & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{21}(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 0 & 1 \\ 0 & -1 & | & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{12}(1)} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 1 & -2 \\ 0 & -1 & | & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 1 & -2 \\ 0 & 1 & | & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

puede comprobar este resultado con el ejemplo 6.4.3

Este método resulta especialmente útil para matrices de orden más grande, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6.7.9

Encuentre la matriz inversa de $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solución

Usando el mismo método, se obtiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{21}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{12}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, $B^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6.8 Ejercicios Resueltos

1. a) Resolver la ecuación matricial

$$XA - B^t = XC$$

- b) Considerando $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, y $C = \begin{pmatrix} & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Encuentre el vector solución X .

Solución

- a) Para despejar X debemos tener presente que $(A - C)$ debe ser invertible y entonces

$$\begin{aligned} XA - B^t &= XC \\ XA - XC &= B^t \\ X(A - C) &= B^t \\ X &= B^t \cdot (A - C)^{-1} \end{aligned}$$

- b) Primero, observamos que:

$$B^t = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad (A - C) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Buscamos la inversa de esta matriz

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_{21} \\ F_1(-1) \\ F_3(-1)}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_{23}} \\ &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_{31}(-3)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_{12}(1) \\ F_{32}(-5)}} \\ &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 5 \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Así, } (A - C)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \text{ Finalmente,}$$

$$\begin{aligned} X &= B^t \cdot (A - C)^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 & -8 & -16 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. a) Considerando que A y B son invertibles, resuelva la ecuación :

$$BXA = (CD)^t$$

b) Para las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
y $D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Encuentre la matriz solución X .

Solución

- a) Usando propiedades, se tiene

$$\begin{aligned} BXA &= (CD)^t \\ BXA &= (D^t C^t) \\ X &= B^{-1} (D^t C^t) A^{-1} \end{aligned}$$

- b) Reemplazando las matrices, se tiene

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^t \right] \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \end{aligned}$$

Calculando las inversas correspondientes, y resolviendo las multiplicaciones de izquierda a derecha, se obtiene

$$\begin{aligned}
 X &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -6 & 12 & -6 \\ 3 & -7 & 4 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 12 & 18 & 0 \\ -8 & -1 & 1 \\ 6 & 8 & -1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

3. Determine el valor de k en la matriz $A = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$ tal que A :

a) tenga rango 3

b) tenga rango 2

c) tenga rango 1

Solución

Escalonando la matriz, se obtiene

$$\begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{31}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} F_{21}(-1) \\ F_{31}(-k) \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 0 & k-1 & 1-k \\ 0 & 1-k & 1-k^2 \end{pmatrix}$$

Note que si $k = 1$, ocurre $\begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Luego, si $k \neq 1$, podemos dividir una fila por $k-1$.

Además, se obtiene $\frac{1-k}{k-1} = -1$ y $\frac{1-k^2}{k-1} = -(1+k)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 0 & k-1 & 1-k \\ 0 & 1-k & 1-k^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} F_2(\frac{1}{k-1}) \\ F_3(\frac{1}{k-1}) \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -(1+k) \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} F_{12}(-1) \\ F_{32}(1) \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1+k \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -(2+k) \end{pmatrix}$$

Note que si $k = -2$, ocurre $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1+k \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

En caso contrario, si $k \neq -2$, se puede dividir por $k + 2$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1+k \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -(2+k) \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3(\frac{-1}{k+2})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1+k \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{13}(-(1+k)), F_{23}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

- Si $k = 1$, $\text{Rg}(A) = 1$
- Si $k = 2$, $\text{Rg}(A) = 2$
- Si $k \in \mathbb{R} - \{1, 2\}$, $\text{Rg}(A) = 3$

Sistemas de ecuaciones lineales

7.1 Primeros conceptos

Ecuaciones del tipo

$$ax + by = c$$

que relaciona la constante c en términos de las variables x e y y las constantes a y b se llaman **ecuaciones lineales en dos variables**. Estas ecuaciones reciben este nombre, dado que si se gráfica esta ecuación en el plano cartesiano se forma una línea recta.

En general, una ecuación de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \quad (7.1)$$

se denomina una ecuación lineal con constantes b y $a_1, a_2, \dots, a_n$ e incógnitas $x_1, x_2, \dots, x_n$, que satisfacen la ecuación.

Una solución de este tipo de ecuaciones es una sucesión de n números $s_1, s_2, \dots, s_n$, tal que al reemplazar $x_1 = s_1, \dots, x_n = s_n$ en la ecuación (7.1). satisfacen la igualdad.

EJEMPLO.

Los valores $x_1 = 2, x_2 = 0$ y $x_3 = 5$ son **una solución** de la ecuación

$$5x_1 - 3x_2 - 4x_3 = -10$$

ya que

$$5 \cdot 2 - 3 \cdot 0 - 4 \cdot 5 = 10 - 0 - 20 = -10$$

Este conjunto de números no es la única solución ya que $x_1 = 1, x_2 = 5, x_3 = 0$ también es solución.

Definición 7.1.1 (Sistema de ecuaciones lineales)

Una colección de m ecuaciones lineales con n incógnitas x_i , con $i = 1, 2, \dots, n$, se le denomina Sistema de ecuaciones lineales con m ecuaciones y n incógnitas, o un sistema de ecuaciones lineales de orden $m \times n$

Estas suelen representarse de la siguiente manera

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad + \quad \vdots \quad + \quad \vdots = \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Los subíndices i y j de las constantes a_{ij} indican lo siguiente, el subíndice i indica el número de ecuación a la que pertenece y la j el número de la incógnita x_j .

El conjunto solución $S = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ de un sistema de ecuaciones, satisfacen simultáneamente las m ecuaciones cuando se reemplaza $x_1 = s_1, \dots, x_n = s_n$.

Si cada elemento $b_i = 0$, el sistema se denomina **Homogéneo**.

7.2 Forma matricial de un sistema

Observe que la notación es muy similar a la de las matrices, por lo tanto, si se tiene un sistema de m ecuaciones y n incógnitas como se presenta a continuación

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad + \quad \vdots \quad + \quad \vdots = \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Se puede formar la matriz de los coeficientes a_{ij} , la matriz de las incógnitas x_i y la matriz columna b_i , tal que:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

tal que,

$$Ax = B$$

Usualmente la representación matricial se puede realizar usando la *matriz ampliada* de A y B , como se ve a continuación.

$$\left(A \mid b \right) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{array} \right)$$

EJEMPLO.

El siguiente sistema $\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ x + 3y - z = -2 \\ 3x + 4y + 3z = 0 \end{cases}$ se puede representar de forma matricial de la siguiente manera

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

con la matriz ampliada, se obtiene

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \end{array} \right)$$

7.3 Resolución de sistemas de ecuaciones lineales

Existen diversos métodos de resolver sistemas de ecuaciones lineales, en este libro se trabajarán el **método de reducción Gaussiana** y el **método de reducción de Gauss-Jordan**.

7.3.1 Método de reducción Gaussiana

Los pasos para resolver el sistema $Ax = b$ por este método son:

Paso 1 Formar la matriz ampliada $\left(A \mid b \right)$

Paso 2 Transformar la matriz ampliada $\left(A \mid b \right)$ hasta obtener una matriz escalonada por filas $\left(C \mid b \right)$ mediante transformaciones elementales por fila.

Paso 3 A partir de la última fila no nula de $\left(C \mid b \right)$ se resuelven las ecuaciones resultantes y se van sustituyendo para las filas anteriores

Ejemplo 7.3.1

Resuelva el siguiente sistema $\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ x + 3y - z = -2 \\ 3x + 4y + 3z = 0 \end{cases}$ mediante el método de reducción Gaussiana.

Solución

Paso 1 La matriz ampliada correspondiente es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \end{array} \right)$$

Paso 2 Luego, mediante transformaciones elementales, se obtiene

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \end{array} \right) &\xrightarrow{\substack{F_{21}(-1) \\ F_{31}(-3)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & -2 & -6 & -6 \end{array} \right) \xrightarrow{F_{32}(2)} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -14 & -14 \end{array} \right) &\xrightarrow{F_3(-\frac{1}{14})} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Paso 3 Finalmente,

$$\begin{array}{lll} \boxed{z = 1} & y - 4z = -4 & x + 2y + 3z = 2 \\ & y - 4 \cdot 1 = -4 & x + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 2 \\ & \boxed{y = 0} & x = 2 - 3 \\ & & \boxed{x = -1} \end{array}$$

Por lo tanto, el vector solución del sistema es $x = -1, y = 0, z = 1$, también representado como $(-1, 0, 1)$.

7.3.2 Método de reducción de Gauss-Jordan

Primero es necesario definir una matriz escalonada reducida por filas

Definición 7.3.2 (Matriz escalonada reducida)

Una matriz $A \in M_{m \times n}$ se dice escalonada reducida por filas si, además de ser una matriz escalonada, todo elemento en una columna que contenga un pivote es cero.

Los pasos para resolver el sistema $Ax = b$ por este método son:

Paso 1 Formar la matriz ampliada $\left(A \mid b \right)$

Paso 2 Transformar la matriz ampliada $\left(A \mid b \right)$ hasta obtener una matriz escalonada reducida por filas $\left(C \mid b \right)$ mediante transformaciones elementales por fila.

Paso 3 Por cada fila no nula de la matriz $\left(C \mid b \right)$ se debe resolver la ecuación correspondiente a dicha fila para su elemento pivote.

Ejemplo 7.3.3

Resuelva el siguiente sistema $\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ x + 3y - z = -2 \\ 3x + 4y + 3z = 0 \end{cases}$ mediante el método de Gauss-Jordan.

Solución

Paso 1 La matriz ampliada correspondiente es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \end{array} \right)$$

Paso 2 Luego, mediante transformaciones elementales, se obtiene

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[F_{31}(-3)]{F_{21}(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & -2 & -6 & -6 \end{array} \right) \xrightarrow[F_{32}(2)]{F_{12}(-2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 11 & 10 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -14 & -14 \end{array} \right)$$

Luego,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 11 & 10 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -14 & -14 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3(-\frac{1}{14})} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 11 & 10 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[F_{23}(4)]{F_{13}(-11)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Paso 3 Finalmente, $\begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$

Por lo tanto, el conjunto solución del sistema es $x = -1, y = 0, z = 1$, también representado como $(-1, 0, 1)$.

En ocasiones el conjunto solución de un sistema no es único, sino que depende de uno o varios parámetros. O puede ocurrir que el sistema no tenga solución. Los siguientes ejemplos permiten observar que ocurre en estos casos.

Ejemplo 7.3.4

$$\text{Resuelva el siguiente sistema } \begin{cases} x & & - 2z = 2 \\ -2x & + & y & + & 5z = -1 \\ -x & + & y & + & 3z = 1 \\ & & y & + & z = 3 \end{cases}$$

Solución

Expresando en su forma matricial y escalonando, se obtiene

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 5 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow[F_{(31)}(1)]{F_{21}(2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow[F_{(32)}(-1)]{F_{42}(-1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Las ecuaciones (3) y (4) son **ecuaciones redundantes**, vale decir, que no aportan a la solución del sistema. Luego,

$$\begin{array}{lcl} y + z = 3 & \text{y} & x - 2z = 2 \\ y = 3 - z & & x = 2 + 2z \end{array}$$

dejando $z = r$ como un parámetro. El vector solución del sistema no es único, sino que para cualquier $r \in \mathbb{R}$, se obtiene:

$$S = \begin{cases} x = 2 + 2r \\ y = 3 - r \\ z = r \end{cases} \quad \text{ó} \quad S = (2 + 2r, 3 - r, r)$$

Por ejemplo, si $r = 5$ se obtiene el siguiente vector solución $S = (12, -2, 5)$.

Ejemplo 7.3.5

$$\text{Resuelva el siguiente sistema } \begin{cases} 3x & + & 2y & - & z = 0 \\ x & & & + & z = 2 \\ -x & + & y & & = 3 \\ x & - & y & + & z = 4 \end{cases}$$

Solución

Expresando en su forma matricial y escalonando, se obtiene:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & | & 0 \\ 1 & 0 & 1 & | & 2 \\ -1 & 1 & 0 & | & 3 \\ 1 & -1 & 1 & | & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{14}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 4 \\ 1 & 0 & 1 & | & 2 \\ -1 & 1 & 0 & | & 3 \\ 3 & 2 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} F_{21}(-1) \\ F_{31}(1) \\ F_{41}(-3) \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 4 \\ 0 & 1 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 7 \\ 0 & 5 & -4 & | & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{42}(-5)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 4 \\ 0 & 1 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 7 \\ 0 & 0 & -4 & | & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{43}(4)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 4 \\ 0 & 1 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 7 \\ 0 & 0 & 0 & | & 26 \end{pmatrix}$$

La ecuación correspondiente a la fila destacada es

$$0x + 0y + 0z = 26$$

La cual es una **ecuación inconsistente** (sin solución). Por lo tanto, el sistema no tiene solución.

7.4 Tipos de sistemas, según la cantidad de soluciones

Se puede relacionar el rango de la matriz de coeficientes y la matriz ampliada para poder determinar la cantidad de soluciones que tiene un sistema de ecuaciones lineales.

7.4.1 Sistemas sin solución

Partiendo del ejemplo 7.3.5, se observa que al escalar la matriz, la matriz ampliada presenta una ecuación inconsistente. Por lo tanto, un sistema que presente ecuaciones inconsistentes es un sistema que no tiene solución. Los rangos de las matrices de coeficientes y la ampliada son diferentes, específicamente se puede notar que:

$$\text{Rg}(A) = 3 \leq 4 = \text{Rg} \left(A \mid b \right)$$

Proposición 7.4.1

En general, si A representa a la matriz de coeficientes y $\left(A \mid b \right)$ representa a la matriz ampliada, entonces

$$\text{el sistema } Ax = b \text{ no tiene solución} \iff \text{Rg}(A) < \text{Rg} \left(A \mid b \right)$$

Por ejemplo, si al escalar la forma matricial de un sistema 3×3 se obtiene una fila de la forma:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Donde $*$ representa cualquier número real, entonces, siguiendo la proposición anterior, el sistema no tiene solución.

Ejemplo 7.4.2

Verifique que el siguiente sistema presenta alguna ecuación inconsistente.

$$\begin{cases} 2x + y = 6 \\ -3x + 5y = 4 \\ -x + 6y = 10 \\ 12x - 7y = 9 \end{cases}$$

Solución

Expresando en su forma matricial y escalonando, se obtiene:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 6 & 6 \\ -3 & 5 & 4 & 4 \\ -1 & 6 & 10 & 10 \\ 12 & -7 & 9 & 9 \end{array} \right) &\xrightarrow{F_{31}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 6 & 10 & 6 \\ -3 & 5 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 6 & 6 \\ 12 & -7 & 9 & 9 \end{array} \right) &\xrightarrow{F_1(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -6 & -10 & -6 \\ -3 & 5 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 6 & 6 \\ 12 & -7 & 9 & 9 \end{array} \right) &\xrightarrow{\substack{F_{21}(3) \\ F_{31}(-2) \\ F_{42}(4)}} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -6 & -10 & -6 \\ 0 & -13 & -26 & -26 \\ 0 & 13 & 26 & 26 \\ 0 & 13 & 25 & 25 \end{array} \right) &\xrightarrow{\substack{F_{32}(1) \\ F_{42}(1)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -6 & -10 & -6 \\ 0 & -13 & -26 & -26 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

El sistema presenta una ecuación inconsistente.

7.4.2 Sistemas con solución

Siguiendo de la subsección anterior, un sistema tiene solución si y solo si no presenta ecuaciones inconsistentes, vale decir, si presenta solo ecuaciones consistentes. Esto se ve reflejado en que la matriz de coeficientes A y la matriz ampliada $\left(\begin{array}{c|c} A & b \end{array} \right)$ tengan la misma cantidad de filas no nulas.

Esto es equivalente a decir que

$$\text{Rg}(A) = \text{Rg} \left(\begin{array}{c|c} A & b \end{array} \right)$$

Por ejemplo, las siguientes matrices escalonadas presentan solo ecuaciones consistentes, por lo tanto, el sistema que representan tiene solución.

$$\begin{array}{ccc} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & * & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * \end{array} \right) & & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{array} \right) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{Rg}(A) = 3 = \text{Rg} \left(\begin{array}{c|c} A & b \end{array} \right) & & \text{Rg}(A) = 3 = \text{Rg} \left(\begin{array}{c|c} A & b \end{array} \right) \end{array}$$

Sistemas con solución única

Además de la condición anterior, para que un sistema $Ax = b$ de orden $m \times n$ tenga solución única, debe tener tantas ecuaciones no superfluas como incógnitas. Esto equivale a decir

$$\text{El sistema } Ax = b \text{ tiene solución única} \iff \text{Rg}(A) = \text{Rg} \left(\begin{array}{c|c} A & b \end{array} \right) = n$$

La forma matricial de un sistema debe escalonarse a una matriz de la siguiente forma

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & * & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & * & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Ejemplo 7.4.3

Verifique que el siguiente sistema tiene solución única $\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 4z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$

Solución

Expresando en su forma matricial y escalonando, se obtiene

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) &\xrightarrow{F_{31}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_{21}(-5) \\ F_{31}(-3)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 9 & -3 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{F_{32}} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 9 & -3 \end{array} \right) &\xrightarrow{F_{2}(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & 9 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{F_{32}(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Donde $\text{Rg}(A) = \text{Rg} \left(\begin{array}{c|c} A & b \end{array} \right) = 3$, por lo tanto, el sistema tiene solución única

Sistemas con infinitas soluciones

Un sistema $Ax = b$ tiene infinitas soluciones cuando presenta ecuaciones superfluas, vale decir, que algunas de las filas de la forma matricial del sistema se anulan. Esto equivale a decir

$$\text{El sistema } Ax = b \text{ tiene infinitas soluciones } \iff \text{Rg}(A) = \text{Rg}\left(\begin{array}{c|c} A & b \end{array}\right) < n$$

Esto significa que al escalar la matriz ampliada de un sistema, van a haber columnas que no presenten el elemento pivote.

La cantidad de este tipo de columnas corresponde al número de parámetros del conjunto solución y corresponde a $n - \text{Rg}(A)$.

Analicemos las siguientes matrices ampliadas que ya han sido escalonada a su forma reducida.

$$(1) \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \qquad (2) \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

- (1) Primero se observa que $\text{Rg}(A) = \text{Rg}\left(\begin{array}{c|c} A & b \end{array}\right) = 3 < 4$. Luego, se tiene $n - \text{Rg}(A) = 4 - 3 = 1$ parámetro.

Por lo tanto, hay una columna que no tiene el elemento pivote, que corresponde a la segunda columna, por lo que la incógnita x_2 será el parámetro.

$$\text{Planteando las ecuaciones, se tiene } \begin{cases} x_1 - 3x_2 = 0 \\ x_3 = 3 \\ x_4 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3x_2 \\ x_3 = 3 \\ x_4 = 2 \end{cases}$$

La incógnita x_2 es representada mediante un valor arbitrario $t \in \mathbb{R}$ y el conjunto solución sería $S = (3t, t, 3, 2)$.

- (2) Este sistema tiene $n - \text{Rg}(A) = 4 - 2 = 2$ parámetros.

Por lo tanto, hay dos columnas que no tienen el elemento pivote, éstas corresponden a las columnas 2 y 4, por lo que las incógnitas x_2 y x_4 serán los parámetros.

$$\text{Planteando las ecuaciones, se tiene } \begin{cases} x_1 + 3x_2 = 4 \\ x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 - 3x_2 \\ x_3 = 2 - 2x_4 \end{cases}$$

Las incógnitas x_2 y x_4 se representan por valores arbitrarios $r, s \in \mathbb{R}$, respectivamente.

Finalmente, el conjunto solución es $S = (4 - 3r, r, 2 - 2s, s)$

El siguiente teorema resume los casos ya estudiados.

Teorema 7.4.4: Teorema de Rouché-Frobenius

Sea un sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$ de orden $m \times n$, con (A) la matriz de coeficientes y $\left(\begin{array}{c|c} A & b \end{array} \right)$ la matriz ampliada, entonces se cumplirá solo uno de los siguientes enunciados.

- $\text{Rg}(A) \neq \text{Rg}\left(\begin{array}{c|c} A & b \end{array} \right) \iff$ El sistema $Ax = b$ no tiene solución.
- $\text{Rg}(A) = \text{Rg}\left(\begin{array}{c|c} A & b \end{array} \right) = n \iff$ El sistema $Ax = b$ tiene solución única.
- $\text{Rg}(A) = \text{Rg}\left(\begin{array}{c|c} A & b \end{array} \right) < n \iff$ El sistema $Ax = b$ tiene infinitas soluciones.

7.5 Sistemas homogéneos

En esta sección se estudiarán la cantidad y los tipos de soluciones que puede tener este tipo de sistemas.

Definición 7.5.1 (Sistema de ecuaciones lineales homogéneo)

En la definición 7.1.1, se puede observar que un sistema donde la columna b es completamente nula, se le denomina homogéneo. Un sistema homogéneo de orden $m \times n$ se puede representar de la siguiente manera.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad + \quad \vdots \quad + \quad \vdots \quad = \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

y de forma matricial

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & 0 \end{array} \right)$$

Sea $Ax = 0$ la representación matricial de un sistema homogéneo de orden $m \times n$. Note que siempre ocurre $\text{Rg}(A) = \text{Rg}\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \end{array} \right)$, esto es debido a que cualquier transformación elemental no va a modificar la columna nula 0. Esto indica que un sistema homogéneo no puede poseer ecuaciones inconsistentes y por lo tanto, siempre va a tener solución.

Una solución de un sistema homogéneo está determinado por $x_i = 0$ para cada $i = 1, 2, \dots, n$. A esta solución se le conoce como **solución trivial** y siempre va a ser una solución de un sistema homogéneo.

Cualquier otra solución donde algún x_i sea distinto de cero, se le denominará **solución no trivial**.

Ejemplo 7.5.2

Resuelva el siguiente sistema homogéneo
$$\begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ 2x - 5y + z = 0 \\ 5x + y + 3z = 0 \end{cases}$$

Solución

Representando en forma matricial y escalonando, se obtiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & | & 0 \\ 2 & -5 & 1 & | & 0 \\ 5 & 1 & 3 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_{21}(-2) \\ F_{31}(-5)}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & | & 0 \\ 0 & -11 & -1 & | & 0 \\ 0 & -14 & -2 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2(-\frac{1}{11})} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{11} & | & 0 \\ 0 & -14 & -2 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{32}(14)} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{11} & | & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{11} & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3(-\frac{11}{8})} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{11} & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Usando el método de reducción Gaussiana, se obtiene

$$\begin{array}{lll} z = 0 & y + \frac{1}{11}z = 0 & x + 3y + z = 0 \\ & y = 0 & x = 0 \end{array}$$

Por lo tanto, la solución del sistema es la trivial

Ejemplo 7.5.3

Resuelva el siguiente sistema homogéneo
$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ 3x - y + z = 0 \\ 4x + 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

Solución

Expresando en forma matricial y escalonando, se obtiene

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & | & 0 \\ 3 & -1 & 1 & | & 0 \\ 4 & 2 & -2 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{31}(-2)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & | & 0 \\ 3 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & | & 0 \\ 3 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{21}(-3)} \\ \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & | & 0 \\ 0 & -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2(-\frac{2}{5})} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Luego,

$$y - z = 0$$

$$y = z$$

$$x + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 0$$

$$x + \frac{z}{2} + \frac{z}{2} = 0$$

$$x = -z$$

Note que la columna 3 no contiene el elemento pivote. Por lo tanto, la incógnita z se representa por el valor arbitrario $r \in \mathbb{R}$. Por lo que el conjunto solución es $S = (-r, r, r)$

Observación 7.5.4

- En general, un sistema homogéneo siempre tiene solución, ya sea la solución única (trivial) o infinitas soluciones.
- Un sistema homogéneo de orden $m \times n$ va a tener soluciones no triviales si al reducir la matriz, alguna de las filas se anula.

7.6 Ejercicios Resueltos

$$\begin{array}{l} 1. \text{ Resuelva el sistema: } \end{array} \left| \begin{array}{rrr} 2x + 4y + 6z & = & -12 \\ 2x - 3y - 4z & = & 15 \\ 3x + 4y + 5z & = & -8 \end{array} \right|$$

Solución

Expresando en forma matricial y escalonando, se obtiene

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & -12 \\ 2 & -3 & -4 & 15 \\ 3 & 4 & 5 & -8 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1(\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -6 \\ 2 & -3 & -4 & 15 \\ 3 & 4 & 5 & -8 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} F_{21}(-2) \\ F_{31}(-3) \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -6 \\ 0 & -7 & -10 & 27 \\ 0 & -2 & -4 & 10 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{\begin{array}{l} F_3(-\frac{1}{2}) \\ F_{32} \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & -7 & -10 & 27 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} F_{12}(-2) \\ F_{32}(7) \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3(\frac{1}{4})} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{\begin{array}{l} F_{13}(1) \\ F_{23}(-2) \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Finalmente, el conjunto solución es $S = (2, -1, -2)$.

2. Resuelve utilizando transformaciones elementales el siguiente sistema:

$$\left| \begin{array}{rrr} 4x + 3y + 5z & = & 0 \\ 2x - 2y + 6z & = & -7 \\ 8x + 4y - z & = & 9 \end{array} \right|$$

Solución

Expresando en forma matricial y escalonando, se obtiene

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & -2 & 6 & -7 \\ 8 & 4 & -1 & 9 \end{array} \right) \xrightarrow[F_{12}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & -\frac{7}{2} \\ 4 & 3 & 5 & 0 \\ 8 & 4 & -1 & 9 \end{array} \right) \xrightarrow[F_{31}(-8)]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & -\frac{7}{2} \\ 0 & 7 & -7 & 14 \\ 0 & 12 & -25 & 37 \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow[F_2(1/7)]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 12 & -25 & 37 \end{array} \right) \xrightarrow[F_{31}(-12)]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -13 & 13 \end{array} \right) \xrightarrow[F_3(-1/13)]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow[F_{23}(1)]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow[F_{13}(-2)]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, los valores que resuelven el sistema son $x = \frac{1}{2}, y = 1, z = -1$

3. Los alumnos FICA deciden ayudar algunas familias durante la pandemia. La generación 2020 compró 10 frazadas, 40kg de tallarines y 50 tarros de salsa de tomate y pagó \$137.000 por dicha compra, la generación 2021 compró 15 frazadas, 20kg de tallarines y 50 tarros de salsa de tomate y pagó \$151.000 por dicha compra, finalmente la generación 2022 compró 20 zafradas, 10 kg de tallarines y 70 tarros de salsa de tomate y pagó \$191.000 por dicha compra. **Plantee el sistema de ecuaciones lineales** que permite encontrar el precio de cada producto. (Definiendo claramente las variables)

Solución

Sean:

x : precio de una frazada

y : precio de un kg de tallarines

z : precio de un tarro de salsa de tomate

El sistema sería el siguiente

$$\begin{array}{rcl}
 10x + 40y + 50z & = & 137,000 \\
 15x + 20y + 50z & = & 151,000 \\
 20x + 10y + 70z & = & 191,000
 \end{array}$$

Bibliografía

- [1] DME-UFRO, *Fundamentos de Matemática, Apuntes de curso*, Departamento de matemática y Estadística, Universidad de La Frontera, 2020.
- [2] Mansilla A., de la Maza A., Olivos E., *Cálculo de una variable, apuntes de curso*, Departamento de matemática y estadística, Universidad de La Frontera, 2020.
- [3] Kolman B., Hill D., *Álgebra lineal*, Pearson educación, Octava Edición, 2006.
- [4] Larson R., Edwards B., *Cálculo I de una variable*, Mc Graw Hill, Novena Edición, 2010.
- [5] Leithold L., *El cálculo*, Oxford University Press, Séptima Edición, 1998.
- [6] Pita C., *Cálculo de una variable*, Pearson Educación, Primera Edición, 1998.
- [7] Purcell E., Varberg D., Rigdon S., *Cálculo*, Pearson Prentice Hall, Novena Edición, 2007.
- [8] Stewart J., *Cálculo trascendentes tempranas*, Thomson Learning, Cuarta Edición, 2002.
- [9] Swokowski E., Cole J., *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*, Thomson Learning, Undécima Edición, 2006.
- [10] Thomas G., *Cálculo una variable*, Pearson Addison Wesley, Undécima Edición, 2005.