

MATEMATICA

Cuaderno Interactivo

¡Tú puedes manejar los números!



•No dejes que ellos te manejen a ti....

Reales-Funciones-Analítica

Pedro Héctor
Valenzuela Tapia

1.1	Definición axiomática de $\mathbb{R}$	8
	$\mathbb{R}$ es un Cuerpo – $\mathbb{R}$ es un Cuerpo	
	Dos nuevas operaciones	10
	Propiedades – Potencias y Raíces – Leyes de Potencias – Trabajando con polinomios	
	Evaluar polinomios	15
	Suma de polinomios	15
	Multiplicación	15
	Cociente de dos polinomios	16
	División de polinomios	16
	División larga	16
	Regla de Ruffini o división sintética	17
	Teorema del resto – Productos notables – Radicales – Suma y resta de radicales semejantes – Ecuaciones – Ecuación Cuadrática – Completando cuadrados – La fórmula de la cuadrática – Ecuaciones irracionales – Racionalización	
1.2	Logaritmos	30
	Algebra de logaritmos	31
1.3	Ecuaciones exponenciales y logarítmicas	32
1.4	La Fiesta de los Reales	33
1.5	El cuerpo ordenado $(\mathbb{R}, +, \cdot)$	35
	Axiomas de orden – Desigualdades – Intervalos – Inecuaciones – Valor absoluto – Ecuaciones con valor absoluto – Propiedades del valor absoluto – Ecuaciones e Inecuaciones con valor absoluto	
1.6	Completitud de $\mathbb{R}$	50
	Axioma del supremo	
1.7	Teorema del Binomio	52
	Factorial de un número natural – El número combinatorio – El Binomio de Newton – Cálculo del término que ocupa el lugar k	

2.1	Introducción	61
2.2	La función como una máquina	61
	La función como correspondencia	63
	Funciones Reales – El Plano cartesiano	
	Gráfico de la función	66
	La prueba de la línea vertical	66
2.3	Clasificación de función según la variable x	67
	Funciones trascendentes	68
	Construyendo la gráfica	
	Dominio de la función	69
	Recorrido o rango de la función	69
	Puntos de cortes con los ejes	69
	Gráfica de la función polinomial – Función constante – La función lineal – La función cuadrática – Gráfica de una cúbica – Funciones racionales – Características de una función a partir de su gráfica	
	Intervalos de crecimiento y decrecimiento	77
	Funciones acotadas	
	Funciones definidas a trozos	80
	Función valor absoluto	81

Función parte entera	82
Combinación de funciones	
Función compuesta	83
Funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas	
Funciones Inyectivas	86
Funciones Sobreyectivas	88
Función inversa	
La máquina de la inversa	92
La inversa desde la fórmula	92
Inversa desde la gráfica	93
2.4 Función exponencial	95
La base e	96
Modelación exponencial	
Desintegración radiactiva	97
Función Logarítmica	
Características de la función logaritmo	99
2.5 Funciones Trigonométricas	102
Elementos básicos	
Ángulo de referencia	103
El círculo unitario	104
Grados sexagimales y el radián	104
Las funciones trigonométricas – Seno y coseno de 45° – Seno y coseno de 30° – Seno y coseno de 60° – Ángulos de referencia – Evaluación de las funciones trigonométricas	
2.6 Reducción de ángulos	111
Gráfica de la función seno – Propiedades básicas de la función $y = \sin(x)$ – Gráfica de la función $y = \cos(x)$ – Propiedades básicas de la función $y = \cos(x)$	
2.7 Gráfica general de la función seno	114
Gráfica general del coseno – Funciones trigonométricas Inversas	

CHAPTER 3

Geometría Analítica

Page 127

3.1 Introducción	128
3.2 Sistema de coordenadas rectangulares	128
3.3 Abscisa y Ordenada	129
Distancia entre dos puntos	
3.4 Lugares Geométricos	130
3.5 La Recta	130
Gráfica de una recta – Rectas paralelas a los ejes – Rectas paralelas y perpendiculares	
3.6 Distancia punto - recta	136
3.7 Cónicas	139
La circunferencia	
3.8 La parábola	141
Parábola que se abre hacia arriba – Parábola hacia arriba y vértice (h, k) – Parábola que se abre hacia abajo	
Caso general	145
Parábola que se abre hacia la derecha – Parábola que se abre hacia la izquierda	

3.9 La Elipse 149

 Elementos de la elipse 150

 Elipse con eje mayor paralelo al eje x

 Generalización 151

 Elipse con eje mayor paralelo al eje y

 Generalización 153

3.10 La Hipérbola 154

3.11 Elementos de la Hipérbola 155

 Hipérbola de eje real paralelo al eje x

3.12 Hipérbola de eje real paralelo al eje y 157

 Asíntotas

 Ecuaciones de las asíntotas 158

Soluciones a los Ejercicios 161

UNIVERSIDAD DE LA FRONTERA
Departamento de Matemática y Estadística

CUADERNO INTERACTIVO

Números Reales



Matemática

cuaderno de autoaprendizaje

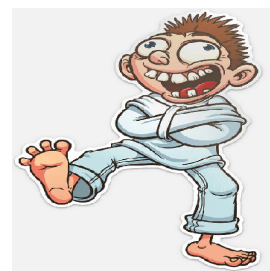
Introducción

HOLA incanzable viajero(a) del infinito universo matemático. Te brindo una cordial bienvenida por llegar a este CUADERNO. De seguro te estarás preguntando ¿de qué cuaderno hablan?, y más aún dice qué ¡es interactivo!. Si sigues indagando a lo mejor te convences y lo usas como elemento de apoyo a tu aprendizaje.

Una de las tantas razones por las que nace este CUADERNO.

“el proceso de enseñanza-aprendizaje en la educación superior hoy día se dirige cada vez más a que el estudiante se convierta en un sujeto mucho más activo en su formación, lo que exige una mayor independencia, dedicación sistemática al estudio, creatividad, donde el autoaprendizaje debe ser el centro del proceso y poseer un elevado desarrollo de la capacidad de gestionar sus propios conocimientos y en el que las tecnologías de la información y las comunicaciones juegan un papel importante”.¹

El que sea un CUADERNO permite diferenciarlo de un libro, de un apunte o de notas de curso. Con ello, estimado lector(a) no puedes pedirle la rigurosidad que tiene un libro. En esta historia que comienzas a descubrir hay un personaje que me acompaña hace ya mucho tiempo, y que para preservar su identidad le he llamado SuperCrazy. Lo puedes ver en la figura mientras trata de deshacer un nudo de orate. Es “seco” para la matemática, es un poco engreído pero buena persona. Se encuentra presente en algunos Test que se deben resolver.



Como profesores necesitamos revisar permanentemente lo que hacemos y para qué lo hacemos, en ese sentido tienen un papel fundamental nuestras estrategias de enseñanza. Los objetivos a conseguir con este CUADERNO son:

- Proporcionar material para que el estudiante pueda realizar de forma autónoma una puesta al día de conceptos y habilidades matemáticas.
- Crear procesos interactivos que complementen las clases tradicionales y más atractivo el aprendizaje.
- Implementar una metodología más activa y con retroalimentación inmediata, proporcionando una experiencia de aprendizaje más rica y variada.

En el CUADERNO encontrarás; un poco de materia, algunos ejemplos, desafíos sencillos para levantar el ánimo



Desafío 1. ¿Sabes cuál es la capital de la Región de la Araucanía?

Ingresas el nombre y apretas **Ans** para saber si está correcto.

Un segundo elemento interactivo son los **Test**. En lugar de tener una “latosa” guía de ejercicios, es mejor un Test interactivo que te entrega retroalimentación al “toque”

¹esta cita es de internet, no recuerdo la página, y si no me acuerdo ...

Begin Test **MATHS QUIZ** Pasas con 100%.

1. Chile ha sido campeón de América:

☐ nunca

☐ una vez

☐ dos veces

☐ tres veces

End Test Puntos: Correctas:

En este caso debes iniciar el test presionando **Begin Test**, luego respondes marcando tu alternativa, finalizas presionando **End Test**, de inmediato sabes si alcanzas para ser SuperCrazy.

Un tercer elemento interactivo es el espacio llamado “**Trabajo con mi profe**” que permite trabajar el problema dado y ver los pasos de ayuda que proporciona el profesor.

Trabajo con mi profe



EJERCICIO 1. Este famoso matemático es conocido como “el principe de la matemática”. Siendo niño descubrió la suma de los primeros 100 números naturales.
(a) ¿Lo reconoces?, su nombre es ...

Este CUADERNO está estructurado en unidades, como sigue:

- Números reales.
- Funciones reales.
- Geometría Analítica.

Deberías tener presente las siguientes actitudes:

- Mantener un estilo de trabajo ordenado y metódico.
- Manifestar interés por el aprendizaje de las matemáticas.
- Creer en tus propias capacidades.
- Ser perseverante, si no sale a la primera, intenta de nuevo, busca ayuda (libros, internet, amigos, etc.)

Este CUADERNO se digitó en LATEX, una imprenta para escribir matemática, y se usó el software ACROTEX para realizar los Test, desafíos y otros elementos de apoyo.

Espero que este trabajo sea de tu agrado, es libre de distribuir, se puede copiar la parte del cuaderno que necesites. La Matemática debe ser libre de costo, con lo difícil que es, y más encima tener que pagar ¡ no me simpatiza !

Pedro H. Valenzuela T.



¡Tú puedes manejar los números!

**SUPER
CRAZY**



•No dejes que ellos te manejen a ti...

Para andar en bicicleta es necesario subirse a ella y practicar. Lo mismo ocurre con la Matemática, no se aprende mirando, se debe **practicar**. Más aún, si se quiere jugar ajedrez o un deporte, se debe conocer las **reglas del juego**. En Matemática pasa exactamente lo mismo, así que te invito a “jugar” con los números reales, conociendo sus reglas y luego a practicando con ellos.

Desafío 2.

► ¿Recuerdas a qué subconjunto de números reales pertenece el número π ?

1.1 Definición axiomática de $\mathbb{R}$

Existen diversas formas de introducir los números reales. Como en este curso interesan las propiedades de los números reales y no la forma empleada para construirlos, optamos por un punto de vista axiomático.

Se supone que existe un conjunto no vacío $\mathbb{R}$, llamado conjunto de los números reales, que satisface una serie de axiomas que agruparemos en 3 categorías:

- axiomas de cuerpo (asociados a la igualdad y a las ecuaciones).
- axiomas de orden (asociados a las desigualdades e inecuaciones), y
- axioma del supremo o de completitud (marca la diferencia entre los números racionales y reales).

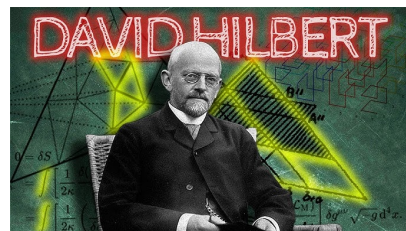
1.1.1 $\mathbb{R}$ es un Cuerpo

Sean x, y, z elementos de $\mathbb{R}$, para sumar y multiplicar números reales se debe seguir las siguientes reglas:

Axiomas para sumar

1. Conmutatividad. $x + y = y + x$
2. Asociatividad. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. Elemento Neutro. $x + 0 = 0 + x = x$
4. Elemento Inverso. $x + (-x) = 0$

Existen diferentes formas de construir el conjunto de los números reales a partir de axiomas, siendo la caracterización más común, el conocido como método directo que introduce el sistema $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$, donde los elementos de $\mathbb{R}$ se llaman números reales, $+$ y $\cdot$ son dos operaciones en $\mathbb{R}$, y $\leq$ es una relación de orden en $\mathbb{R}$.



Esta axiomatización de los números reales fue propuesta por el matemático alemán David Hilbert.

Se supone que existe un conjunto no vacío, denotado por $\mathbb{R}$, llamado conjunto de los números reales, que satisface una serie de axiomas que agruparemos en 3 categorías:

- axiomas de cuerpo (asociados a la igualdad y a las ecuaciones).
- axiomas de orden (asociados a las desigualdades e inecuaciones), y
- axioma del supremo o de completitud (marca la diferencia entre los números racionales y reales).

1.1.2 $\mathbb{R}$ es un Cuerpo

Sean x, y, z elementos de $\mathbb{R}$, para sumar y multiplicar números reales se deben seguir las siguientes reglas:

Axiomas para sumar

1. Conmutatividad. $x + y = y + x$
2. Asociatividad. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. Elemento Neutro. $x + 0 = 0 + x = x$
4. Elemento Inverso. $x + (-x) = 0$

Axiomas para multiplicar

1. Conmutatividad. $x \cdot y = y \cdot x$
2. Asociatividad. $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
3. Elemento Neutro. $1 \cdot x = x$
4. Elemento Inverso. $x \cdot x^{-1} = 1, \quad x \neq 0$
5. Distributividad. $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

Ejemplo 1.1.1. Cada una de las siguientes igualdades es verdadera en el sistema de los números reales. Indica las propiedades usadas para llegar de la parte izquierda de la igualdad a la parte derecha de ella.

1. $2 + (3 + 5) = (2 + 5) + 3$

$$3. (x + 2) \cdot y = y \cdot x + 2 \cdot y$$

2. $(x + y) + z = z + (y + x)$

4. $(4^{-1} \cdot 4) - 1 = 0$

**CUANDO DICES "NO PUEDO"
TU CEREBRO SE DETIENE.**

Desafío 3. Se considera el conjunto $A = \{2, 3, 5\}$ con las operaciones $\square$ y $\odot$ definidas como en las tablas siguientes

$\square$	2	3	5
2	5	2	3
3	2	3	5
5	3	5	2

$\odot$	2	3	5
2	3	5	2
3	5	2	3
5	2	3	5

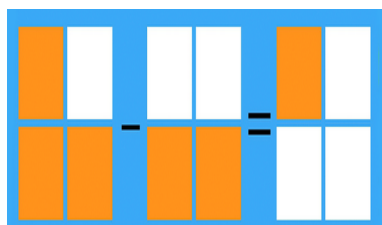
► El elemento neutro de $\square$ es: Ans

► El elemento neutro de $\odot$ es: Ans

**CUANDO DICES: "¿CÓMO LO HAGO?"
TU CEREBRO COMIENZA A TRABAJAR.**

Dos nuevas operaciones

A partir de la suma y la multiplicación se pueden definir dos nuevas operaciones:



- **Resta:** La resta de números reales x e y se define a partir de la suma y la existencia del inverso aditivo de la siguiente manera

$$x - y = x + (-y)$$

- **División:** La división de números reales x e y se define a partir del producto y la existencia del inverso multiplicativo de la siguiente manera

$$\begin{array}{r}
 57842 : 36 = 1606 \\
 \underline{- 36} \\
 218 \\
 \underline{- 216} \\
 242 \\
 \underline{216} \\
 26
 \end{array}$$

↑
cociente

← Resto

$$\frac{x}{y} = x \cdot \left(\frac{1}{y}\right) = x \cdot y^{-1}, \quad y \neq 0$$

**CUANDO DICES "NO PUEDO"
TU CEREBRO SE DETIENE.**

⚡ **Desafío 4.** Sea C un conjunto de números reales que satisface los siguientes propiedades (axiomas):

- ⚡ (A1) $2 \in C$.
- ⚡ (A2) Si $x \in C$, entonces $3x + 1 \in C$.
- ⚡ (A3) Si $x, y \in C$, entonces $x + y \in C$.
- ⚡ (A4) $3 \notin C$.

Pruebe que $9 \in C$

Regla de los signos

Si se multiplican dos números reales su resultado es:

$$1. (-a) \cdot b = -ab$$

$$2. (-a) \cdot (-b) = ab$$

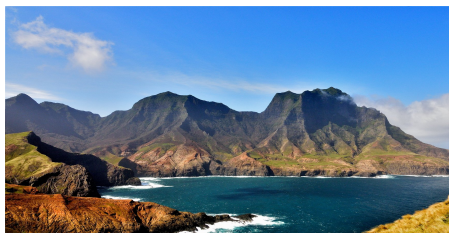
Algo genial respecto de la ley de los signos te sugiero ver la página 50 en

https://www.academia.edu/7951333/Paenza_Adrian_Matematica_estas_ahi_Episodio_3_14

Trabajo con mi profe

EJERCICIO 2.

En la isla Robinson Crusoe hay ciudadanos “buenos” a los que se les asigna el signo $+$, y ciudadanos “malos” a los que se les asigna el signo $-$. Se acuerda que: “salir” de la isla equivale al signo $-$, y “entrar” a la isla equivale al signo $+$.



- Si un ciudadano bueno $(+)$ entra $(+)$ a la isla, el resultado para la isla es positivo:

$$(+) \cdot (+) = +$$

(a) Completar la idea con las tres alternativas restantes

1.1.3 Propiedades

Un pequeño número de propiedades básicas que son necesarias para trabajar álgebra en los números reales. Una vez que las uses quedarán para siempre en tu ADN.

Reglas relativas a cancelaciones

$$1. b + x = a \implies x = a - b$$

$$4. b \cdot x = b \cdot y \implies x = y, b \neq 0$$

$$2. x + y = x + z \implies y = z$$

$$5. a \cdot b = 0 \implies a = 0 \text{ o bien } b = 0$$

$$3. b \cdot x = a \implies x = \frac{a}{b}, b \neq 0$$

Reglas relativas a fracciones

$$1. \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc$$

$$3. \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

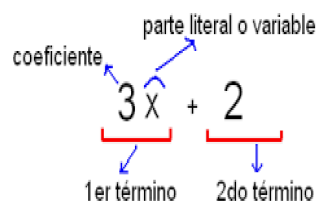
$$2. \frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$$

$$4. \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

Expresión algebraica

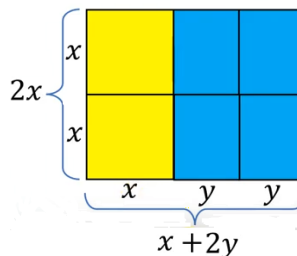
Un grupo de variables representadas por letras junto con números reales que se combinan con operaciones de suma, resta, multiplicación, división, potencia o extracción de raíces es llamada una expresión algebraica.

TERMINOLOGÍA



REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA

$$2x^2 + 4xy = 2x(x + 2y)$$



- Las expresiones con un sólo término se llaman **monomios**: $\sqrt{2x}$
- Las que tienen dos términos se las denomina **binomios**: $x^2 - 4$
- Las que tienen tres términos **trinomios**: $3x^5 - 5x^2 - 1$

Polinomio

Un polinomio es una expresión algebraica de la forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

Si $a_n \neq 0$, n es el **grado** del polinomio y a_n es el **coeficiente principal**.

Begin Test

**MATHS
QUIZ**

Pasas con 100%.

1. Simplificar la expresión $(4a - 5b) - (3a - 2b)$

☐ $a + 3b$

☐ $7a - 7b$

☐ $a - 3b$

☐ $a - 7b$

2. Simplificar la expresión algebraica $(7x + 5y) - (2x - 3y)$

☐ $5x - 8y$

☐ $5x + 8y$

☐ $5x + 2y$

☐ $9x + 2y$

3. Simplificar la expresión algebraica $3a - c + (5a - 2b - [3a - c + 2b])$

☐ $5a - 8b + 2c$

☐ $5a - 4b$

☐ $5a + 4b$

☐ $2b - 3c$

4. Simplificar la expresión algebraica $-[3y - (2x - 3y) + (3x - 2y)] + 2x$

☐ $3x - 4y$

☐ $-3x + 4y$

☐ $4x - y$

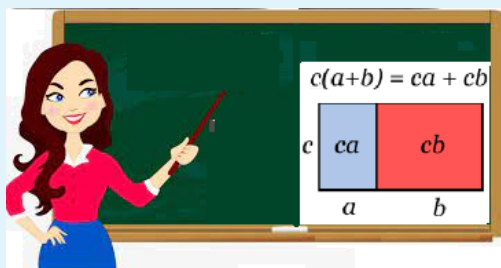
☐ $x - 4y$

End Test

Points:

Correctas

Trabajo con mi profe



EJERCICIO 3.

- (a) Si $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{3}$, hallar el valor de $x = \frac{ab - a}{a + 1}$
- (b) Simplificar la siguiente expresión para $a \neq 1$, $a \neq 0$.

$$\frac{\frac{a}{1-a} + \frac{1-a}{a}}{\frac{1-a}{a} - \frac{1}{1-a}}$$

- (c) Resolver la ecuación $\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x-2}$
- (d) Hallar el conjunto solución de $\frac{2}{x-2} = \frac{x}{x-2}$

1.1.4 Potencias y Raíces

$$\begin{array}{ccc} & \nearrow \text{EXPONENTE} & \\ & 10 & \\ \text{2} & = & 1024 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{BASE} & & \text{POTENCIA} \end{array}$$

Si x es un número real y n es un entero positivo, entonces la expresión x^n significa que x se multiplica por si mismo n veces

$$x^n = \overbrace{x \cdot x \cdot x \cdots x}^{n \text{ veces}}$$

- x se llama la **base** y n el **exponente**.
- La expresión completa se lee “ x elevado a la potencia n ”

1.1.5 Leyes de Potencias

Ley	Ejemplo	Ley	Ejemplo
$a^1 = a$	$3^1 = 3$	$a^{-1} = \frac{1}{a}$	$2^{-1} = \frac{1}{2}$
$a^0 = 1$	$5^0 = 1$	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	$\frac{2^5}{2^3} = 2^2$
$a^n \cdot b^n = (ab)^n$	$2^3 \cdot 4^3 = (2 \cdot 4)^3$	$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$	$\frac{1}{4^5} = 4^{-5}$
$a^n \cdot a^m = a^{m+n}$	$2^3 \cdot 2^5 = 2^8$	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^7 = \frac{3^7}{2^7}$
$(a^n)^m = a^{mn}$	$(2^3)^4 = 2^{12}$		

MATHS QUIZ

Begin Test

Pasas con 100%. Simplificar y anotar su resultado:

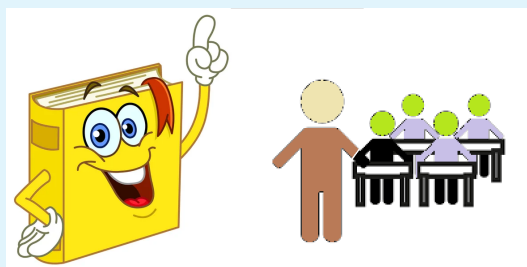
- $(3b - a)(2a + 3b) =$
☐ $6b^2 + a^2 - 3ab$ ☐ $9b^2 + 3ab - 2a^2$ ☐ $9b^2 + 9ab - 3b$ ☐ $6b^2 + 3ab - a^2$
- $(2x + 1)^2 - (x + 3)^2 =$
☐ $x^2 - 8$ ☐ $x^2 - 2x - 8$ ☐ $3x^2 - 8$ ☐ $3x^2 - 2x - 8$
- $3(x + 2)^2 - (x - 2)^2 =$
☐ $2x^2 + 16x + 8$ ☐ $2x^2 + 16$ ☐ $4x^2 + 8x + 16$ ☐ $4x^2 - 16$
- $(2x - 1)(x + 4) =$
☐ $2x^2 - 2x + 4$ ☐ $2x^2 - 7x + 4$ ☐ $2x^2 + 7x - 4$ ☐ $2x^2 + 2x - 4$
- $(2x^2 \cdot y)^2 \cdot (2^{-2} \cdot 3 \cdot x^3 \cdot y^2) =$
☐ $3x^4y^7$ ☐ $3x^7y^2$ ☐ $3x^7y^4$ ☐ $3x^5y^4$
- $\left(\frac{y^2}{x}\right)^4 \cdot \left(\frac{2x}{y^3}\right)^2 =$
☐ $\frac{y^2}{x^2}$ ☐ $\frac{4y^2}{x}$ ☐ $\frac{4y^2}{x^2}$ ☐ $\frac{4x^2}{y^2}$

End Test

Correctas

Answers:

Trabajo con mi profe



EJERCICIO 4. Remover los paréntesis de cada expresión siguiente.

- | | |
|----------------------|--|
| (a) $(x + y)^2$ | (e) $(2y + 1)(y - 3)$ |
| (b) $(x + y)(x - y)$ | (f) $2(x - 3)^2 - 3(x + 1)^2$ |
| (c) $(x + 4)(x + 5)$ | (g) $3a - c + (5a - 2b - [3a - c + 2b])$ |
| (d) $(y + 1)(y + 3)$ | (h) $-[3y - (2x - 3y) + (x - 2y)] + 2x$ |

1.1.6 Trabajando con polinomios

Vamos a considerar polinomios solo en una variable

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Podemos evaluar polinomios, sumar, restar, multiplicar y dividir.

Evaluar polinomios

1. Si $P(x) = x^4 - 3x^2 + 1$, entonces $P(1) = 1^4 - 3 \cdot 1^2 + 1 = -1$.
2. Si $P(x) = 2x^4 - 3x^2 + 1$, entonces $P(\sqrt{2}) = 2 \cdot (\sqrt{2})^4 - 3 \cdot (\sqrt{2})^2 + 1 = 3$

Suma de polinomios

La suma (resta) de dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ es otro polinomio, cuyos términos se obtienen sumando (restando) sus términos semejantes.

1. Si $P(x) = x^4 - 3x^2 + 1$, y $Q(x) = 2x^4 - 3x^2 + 1$, entonces

$$\begin{aligned} P(x) + Q(x) &= (x^4 - 3x^2 + 1) + (2x^4 - 3x^2 + 1) \\ &= (x^4 + 2x^4) + (-3x^2 - 3x^2) + (1 + 1) \\ &= 3x^4 - 6x^2 + 2 \end{aligned}$$

Para sumar y/o restar polinomios se puede usar un arreglo vertical, ordenando cada polinomio de grado mayor a menor

$$\left. \begin{array}{r} P(x) = x^4 - 3x^2 + 1 \\ Q(x) = 2x^4 - 3x^2 + 1 \end{array} \right| \Rightarrow P(x) + Q(x) = 3x^4 - 6x^2 + 2$$

Multiplicación

Para multiplicar dos polinomios se multiplica término a término cada uno de sus términos aplicando la propiedad distributiva, de manera que se multiplican los coeficientes y las variables entre sí, aplicando la regla de los signos en los números y la propiedad de la potenciación en las letras (producto de potencias de igual base).

1. Si $P(x) = x^4 - 3x^2 + 1$, y $Q(x) = 2x^4 - 3x^2 + 1$, entonces

$$P(x) \cdot Q(x) = (x^4 - 3x^2 + 1) \cdot (2x^4 - 3x^2 + 1)$$

La ley distributiva la usamos como sigue:

$$\begin{aligned} (x^4 - 3x^2 + 1) \cdot (2x^4 - 3x^2 + 1) &= x^4 \cdot (2x^4 - 3x^2 + 1) - 3x^2 \cdot (2x^4 - 3x^2 + 1) + \\ &= 1 \cdot (2x^4 - 3x^2 + 1) \end{aligned}$$

Ahora, el término que acompaña a cada paréntesis multiplica a cada sumando:

- $x^4 \cdot (2x^4 - 3x^2 + 1) = 2x^8 - 3x^6 + x^4$
- $-3x^2(2x^4 - 3x^2 + 1) = -6x^6 + 9x^4 - 3x^2$

- $1(2x^4 - 3x^2 + 1) = 2x^4 - 3x^2 + 1$

Estas tres expresiones se suman

$$\begin{array}{r} 2x^8 - 3x^6 + x^4 \\ -6x^6 + 9x^4 - 3x^2 \\ \hline 2x^8 - 9x^6 + 12x^4 - 6x^2 + 1 \end{array}$$

Se halla entonces que

$$(x^4 - 3x^2 + 1) \cdot (2x^4 - 3x^2 + 1) = 2x^8 - 9x^6 + 12x^4 - 6x^2 + 1$$

Cociente de dos polinomios

Para dividir un polinomio $P(x)$ entre otro polinomio $Q(x)$, es necesario que el grado de $P(x)$ sea mayor o igual que el grado de $Q(x)$. Si el grado de $P(x)$ es mayor o igual al de $Q(x)$, al efectuar la división de $P(x)$ entre $Q(x)$, se obtiene una expresión de la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

- $P(x)$ se llama **dividendo**.
- $Q(x)$ es el **divisor**.
- $C(x)$ es el **cociente**, y
- $R(x)$ es el **residuo** o resto.
- Si el polinomio $R(x) = 0$, se dice que la división es **exacta**.

División de polinomios

A continuación se presentan dos procedimientos para dividir polinomios.

División larga

En este procedimiento se deben seguir los siguientes pasos:

1. Se ordena el dividendo y el divisor según las potencias decrecientes de la variable.
2. Dividimos el término primero del dividendo entre el término primero del divisor, para obtener el primer término del cociente.
3. Multiplicamos el divisor por el primer término del cociente y le restamos al dividendo el resultado anterior para conseguir el primer resto parcial.
4. Se repite el procedimiento haciendo ahora de dividendo el primer resto parcial.
5. La división finaliza cuando el grado del resto es menor que el grado del divisor.

Ejemplo 1.1.2. Dividir el polinomio $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 14x + 10$ (dividendo) y $Q(x) = 2x + 3$ (divisor)

Buscas el término que multiplicado por el primer término del divisor ($2x$) te de el primer término del dividendo ($2x^3$). Hace las multiplicación y pones este resultado bajo el dividendo, a continuación le cambias el signo y los sumas, agregas una línea divisora bajo esta suma. El proceso se repite hasta que el grado de la última suma es menor que el grado del dividendo.

$$\begin{array}{r}
 2x^3 - 5x^2 - 14x + 10 : 2x + 3 = x^2 - 4x - 1 \\
 \underline{-2x^3 - 3x^2} \\
 -8x^2 - 14x + 10 \\
 \underline{+ 8x^2 + 12x} \\
 -2x + 10 \\
 \underline{+ 2x + 3} \\
 \text{Resto: } 13
 \end{array}$$

Si la explicación es poco clara, visita la página

<https://ekuat.io/como-dividir-polinomio-entre-polinomio/>

CUANDO DICES "NO PUEDO"
TU CEREBRO SE DETIENE.

Desafío 5. En la figura se muestra la división larga entre dos polinomios. Tienes que indicar quien es el dividendo, el divisor y el resto

$$\begin{array}{r}
 8x^3 - 4x^2 + 2x + 7 \quad | \quad 2x^2 + x - 1 \\
 \underline{-8x^3 - 4x^2 + 4x} \\
 -8x^2 + 6x + 7 \\
 \underline{+ 8x^2 + 4x - 4} \\
 10x + 3
 \end{array}$$

Inicio Desafío

1. El resto es
2. El dividendo es
3. El divisor es

Fin Desafío

correctas

Número de preguntas respondidas correctamente: Puntos:

Puntos obtenidos:

Regla de Ruffini o división sintética

Para dividir un polinomio $P(x)$ por un binomio de la forma $x - a$ se puede usar la **Regla de Ruffini**, también llamada **división sintética**.

Actividad 1. Dividir el polinomio $P(x) = 2x^4 + 5x^3 - 2x - 8$ entre $x + 3$.

En primer lugar, se observa que $a = -3$. Luego, se escriben los coeficientes del dividendo y del divisor en el siguiente arreglo:

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 2 & 5 & 0 & -2 & -8 \\
 -3 & & & & &
 \end{array}$$

El proceso siguiente es bajar el primer término del dividendo.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & 5 & 0 & -2 & -8 \\ -3 & & & & & \\ \hline & 2 & & & & \end{array}$$

Se multiplica el -3 por el 2, colocándolo debajo del siguiente coeficiente para luego sumar al número 5 que se encuentra en la misma columna.



$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & 5 & 0 & -2 & -8 \\ -3 & & -6 & & & \\ \hline & 2 & -1 & & & \end{array}$$

Se repite el paso anterior, ahora multiplicando el -3 por el número obtenido en la adición anterior

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & 5 & 0 & -2 & -8 \\ -3 & & -6 & 3 & & \\ \hline & 2 & -1 & 3 & & \end{array}$$

Se continúa con el proceso hasta que se hayan utilizado todos los coeficientes, obteniendo el siguiente resultado

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & 5 & 0 & -2 & -8 \\ -3 & & -6 & 3 & -9 & 33 \\ \hline & 2 & -1 & 3 & -11 & 25 \\ \hline & \underbrace{\text{coeficientes}}_{\text{del cociente}} & & & \underbrace{\text{resto}} & \end{array}$$

Como se está dividiendo un polinomio de grado 4 con respecto a uno de grado 1, el **cociente** debe ser de grado 3 con su término independiente. Si se observa el resultado, existen 5 coeficientes, pero el valor de 25 se llama **residuo**; el cual cuando es igual a cero la división es exacta, en caso contrario la división es no exacta, por lo que:

$$\frac{2x^4 + 5x^3 - 2x - 8}{x + 3} = 2x^3 - x^2 + 3x - 11 + \frac{25}{x + 3}$$

es una división **no exacta**.

1.1.7 Teorema del resto

La división sintética es importante en matemática debido al teorema del resto. El cual indica lo siguiente:

Teorema 1.1.3. (del resto)

El residuo o resto de dividir un polinomio entre $x - a$ se obtiene reemplazando en el polinomio la variable x por a .

Aplicando este teorema se puede hallar el residuo sin efectuar la división.

Ejemplo 1.1.4. El resto de la división del polinomio $2x^3 - 6x^2 + x - 5$ en $x - 2$ es

$$2 \cdot (2)^3 - 6 \cdot (2)^2 + 2 - 5 = 16 - 24 + 2 - 5 = -11$$

Teorema 1.1.5. (del factor)

Si al sustituir x por a en un polinomio en x , se obtiene 0, entonces $x - a$ es un factor del polinomio.

Ejemplo 1.1.6. Por medio del teorema del factor, se puede probar $x - 5$ es un factor del polinomio $P(x) = x^3 - 8x^2 + 19x - 20$.

En efecto;

$$P(5) = 5^3 - 8 \cdot 5^2 + 19 \cdot 5 - 20 = 125 - 200 + 95 - 20 = 0$$

Como el resto al dividir es cero (0), el polinomio tiene por factor $x - 5$

CUANDO DICES "NO PUEDO"
TU CEREBRO SE DETIENE.

Desafío 6.

Inicio Desafío

1. Para el polinomio $x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6$, determina cuáles de los binomios siguientes son factores:

(a) $x - 2$

(b) $x - 1$

(c) $x + 3$

(d) $x + 2$

Fin Desafío

correctas

Número de preguntas respondidas correctamente: Puntos:

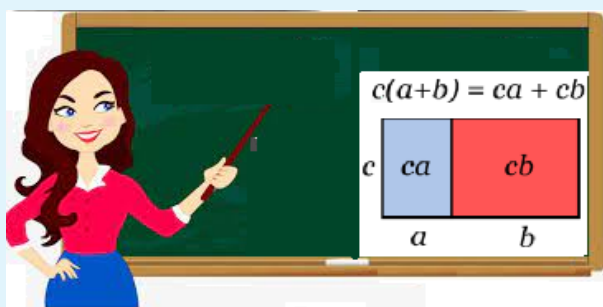
Puntos obtenidos:

Porcentaje de éxito:

Uno de los usos del teorema del factor es factorizar polinomios. Para emplear dicho teorema necesitamos números tales que al sustituir la variable por ellos, se obtenga 0. En relación con esto se tiene el siguiente resultado:

Proposición 1.1.7. En un polinomio con coeficientes enteros y con 1 como coeficiente del término de mayor grado, solamente los factores del término independiente pueden ser los números que al sustituir la variable por ellos, se obtenga 0.

Trabajo con mi profe



EJERCICIO 5.

(a) Factorizar el polinomio $z^4 - 2z^3 - z^2 - 4z - 6$.

Los siguientes resultados sirven para hallar las raíces o ceros de un polinomio o para resolver una ecuación polinómica

Teorema 1.1.8. (Teorema sobre el número de raíces o ceros de un polinomio)
Todo polinomio de grado $n \geq 1$, tiene exactamente n raíces reales o complejas.

Teorema 1.1.9. (Teorema sobre las raíces enteras)

Sea $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ polinomio de grado $n \geq 1$ con coeficientes enteros. Si el coeficiente $a_n = 1$, entonces una posible raíz entera de $P(x)$, es un divisor del término independiente a_0 .

Teorema 1.1.10. (Teorema sobre las raíces racionales)

Sea $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ polinomio de grado $n \geq 1$ con coeficientes enteros. Si el número racional $\frac{p}{q}$ es una raíz de $P(x)$, entonces p es un divisor de a_0 y q es un divisor de a_n .

Teorema 1.1.11. (Teorema sobre las raíces complejas)

Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ polinomio de grado $n \geq 1$ con coeficientes reales que admite como raíz al número complejo $a + bi$, entonces también admite como raíz al complejo conjugado $a - bi$.

MATHS QUIZ

Begin Test

Pasas con 100%.

- Los posibles ceros enteros de $P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ se hallan en:
☐ $-1, 1, 2$ ☐ $-1, 2, -2$ ☐ $1, -2, 2$ ☐ $\pm 1, \pm 2$
- Los posibles ceros racionales de $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$ se hallan en:
☐ $\pm 1, 2$ ☐ $\pm 2, 1$ ☐ $\pm 1, \pm \frac{1}{2}$ ☐ $\pm 1, \pm \frac{1}{3}$
- Los posibles ceros racionales de $P(x) = 4x^3 - 3x - 1$ se hallan en:
☐ $\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}$ ☐ $\pm 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ ☐ $\pm 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ ☐ $\pm 1, -\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}$
- Determinar los ceros del polinomio $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.
☐ $1, 2, 3$ ☐ $1, 2, -3$ ☐ $1, -2, 3$ ☐ $-1, 2, 3$
- Determinar los ceros del polinomio $x^4 - 3x^2 + 2$.
☐ $1, -1, 2, \sqrt{2}$ ☐ $1, 2, -3, 0$ ☐ $\pm 1, \pm \sqrt{2}$ ☐ $1, \sqrt{2}$
- Determinar los ceros del polinomio $P(x) = x^4 - 13x^2 - 12x$.
☐ $3, -1, 0, 4$ ☐ $-3, -1, 0, 4$ ☐ $-3, 1, 0, 4$ ☐ $3, 1, 0, 4$
- Determinar los ceros del polinomio $P(x) = 3x^3 + 12x$.
☐ $0, -2i, 2i$ ☐ $0, i, -i$ ☐ $0, -2, 2$ ☐ $0, 1, -1$

End Test

Puntos:

Correctas

1.1.8 Productos notables

Se denomina **producto notable** a un producto que puede ser obtenido sin efectuar la multiplicación. La siguiente tabla muestra estos productos

Identidad notable	Fórmula
Cuadrado de una suma	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
Cuadrado de una diferencia	$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
Suma por diferencia	$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$
Cubo de una suma	$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
Cubo de una diferencia	$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
Cuadrado de un trinomio	$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

MATHS QUIZ

Begin Test

Pasas con 100%.

Realizar la operación indicada y elegir la solución correcta entre las dadas.

1. $(a + 2m)(a - m)$

☐ $a^2 - am - 2m^2$ ☐ $a^2 + am - 2m^2$ ☐ $a^2 + 2m^2 - am$ ☐ $a^2 + 2am + 2m^2$

2. $(3b - a)(2a + 3b)$

☐ $6b^2 + a^2 - 3ab$ ☐ $9b^2 + 3ab - 2a^2$ ☐ $9b^2 + 9ab - 3b$ ☐ $6b^2 + 3ab - a^2$

3. $(2x + 1)^2 - (x + 3)^2$

☐ $x^2 - 8$ ☐ $x^2 - 2x - 8$ ☐ $3x^2 - 8$ ☐ $3x^2 - 2x - 8$

4. $3(x + 2)^2 - (x - 2)^2$

☐ $2x^2 + 16x + 8$ ☐ $2x^2 + 16$ ☐ $4x^2 + 8x + 16$ ☐ $4x^2 - 16$

5. $(2x - 1)(x + 4)$

☐ $2x^2 - 2x + 4$ ☐ $2x^2 - 7x + 4$ ☐ $2x^2 + 7x - 4$ ☐ $2x^2 + 2x - 4$

6. $2(x - 3)^2 - 3(x + 1)^2$

☐ $-x^2 + 18x + 15$ ☐ $-x^2 - 18x - 15$ ☐ $x^2 - 18x + 15$ ☐ $-x^2 - 18x + 15$

End Test

Points:

Correctas

Fracciones algebraicas

Una fracción algebraica es una expresión fraccionaria en la que numerador y denominador son polinomios.

Begin Test **MATHS QUIZ** Pasas con 100%.

1. Reducir a una expresión $\frac{2}{x} - \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$.

☐ $\frac{1-x}{x(x-1)^2}$

☐ $\frac{1-6x}{x(x-1)^2}$

☐ $\frac{2-5x}{x(x-1)^2}$

☐ $\frac{2-x}{x(x-1)^2}$

2. Simplificar $\frac{x^2-4}{x+3} \cdot \frac{3x^2+9x}{x^2-2x}$.

☐ $x+2$

☐ $3(x+2)$

☐ $3(x-2)$

☐ $\frac{3x}{x-2}$

3. Simplificar $\frac{x^3+x}{x^4-1}$.

☐ $\frac{x}{(x-1)(x+1)}$

☐ $\frac{1}{(x-1)(x+1)}$

☐ $\frac{2x}{(x-1)(x+1)}$

☐ $\frac{x^2}{(x-1)(x+1)}$

End Test Puntos: **Correctas**

Factorización de polinomios

Factorizar una expresión algebraica es hallar dos o más factores cuyo producto es igual a la expresión dada.

Begin Test **MATHS QUIZ** Pasas con 100%.

Factorizar cada expresión siguiente y elegir la solución correcta.

1. $z^2 - 6z + 8$

☐ $(z-1)(z+8)$

☐ $(z-1)(z-8)$

☐ $(z-2)(z+4)$

☐ $(z-2)(z-4)$

2. $16a - 2a^2$

☐ $a(16-2a)$

☐ $2(8-2a)$

☐ $2a(8-a)$

☐ $2a(4-2a)$

3. $z^2 - 26z + 165$

☐ $(z+11)(z+15)$

☐ $(z-11)(z-15)$

☐ $(z-55)(z-3)$

☐ $(z+55)(z-3)$

4. $x^2y + y^3 + z^2y$

☐ $x(x^2 + y^2 + z^2)$

☐ $xy(x + y + z)$

☐ $y(x^2 + y^2 + z^2)$

☐ $z(x^2 + y^2 + z)$

5. $2ax^2y - 4ax^2z$

☐ $2ax^2(y-z)$

☐ $2ax(y-2z)$

☐ $2x^2(y-2z)$

☐ $2ax^2(y-2z)$

End Test Points: **Correctas**

1.1.9 Radicales

Raíz n - ésima

La **raíz** n ésima de un número dado a es el número b , si b elevado a n es igual al número a .

$$b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{b^m}$$

Definición 1.1.12. Toda expresión radical se puede representar mediante una potencia de exponente racional (en $\mathbb{Q}$). Esto facilita las demostraciones y el álgebra de raíces.

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}, \quad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}, \quad n \neq 0$$



1.1.10 Suma y resta de radicales semejantes

Para sumar o restar radicales semejantes, se simplifican y se extraen factores fuera de los radicales respectivos. A continuación se suman o restan los coeficientes respectivos y se multiplica el resultado por el radical común (propiedad distributiva de los números reales).

- $\sqrt[3]{320} - \sqrt[3]{40} = \sqrt[3]{4^3 \cdot 5} - \sqrt[3]{2^3 \cdot 5} = 4\sqrt[3]{5} - 2\sqrt[3]{5} = 2\sqrt[3]{5}$
- $5\sqrt{27} + 6\sqrt{75} = 5\sqrt{3^2 \cdot 3} + 6\sqrt{5^2 \cdot 3} = 15\sqrt{3} + 30\sqrt{3} = 45\sqrt{3}$

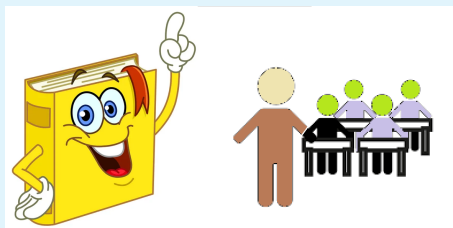
Errores comunes

$$\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$$

$$(a+b)^n \neq a^n + b^n$$



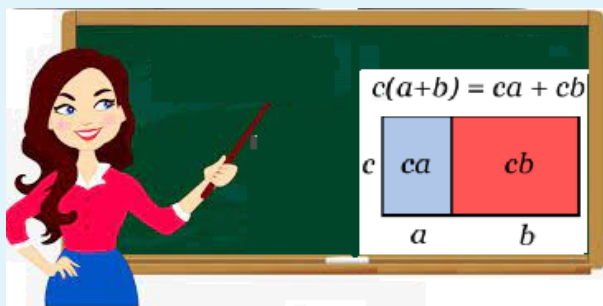
Trabajo con mi profe



EJERCICIO 6.

- Simplifica el radical: $\sqrt[15]{7^6}$
- Extraer factores en el radical $\sqrt[3]{250a^5b^7}$
- Introducir al integrando en $2\sqrt[5]{3a^2}$
- Reducir a un índice común las expresiones $\sqrt[3]{5^4}$, $\sqrt[4]{7^5}$, $\sqrt{3^5}$
- Hallar el producto de $\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt{5}$
- Escribir en solo radicando $\frac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt[6]{3}}$

Trabajo con mi profe



EJERCICIO 7. Simplificar cada expresión siguiente.

(a) $\left[(a^{-3})^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{1}{2}}$

(c) $(x^{\frac{1}{2}})^3 \times (x^{-\frac{1}{3}})^2$

(e) $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}} \times \left(\frac{b^2}{a^3}\right)^{\frac{1}{2}}$

(g) $(\sqrt[4]{b^3})^{\frac{1}{6}} \times \sqrt[9]{b^{-3}} : (\sqrt{b^{-7}})^{\frac{1}{7}}$

(i) $\sqrt{(x^2y)^3} \cdot \sqrt{y^5}$

(b) $\left[(a^{-\frac{1}{4}})^8\right]^{\frac{2}{3}}$

(d) $(\sqrt[4]{x^3})^{\frac{2}{3}} \times (\sqrt[5]{x^6})^{\frac{5}{12}}$

(f) $(\sqrt[3]{a^5})^{\frac{1}{2}} \times (\sqrt[6]{a^{-\frac{5}{6}}})$

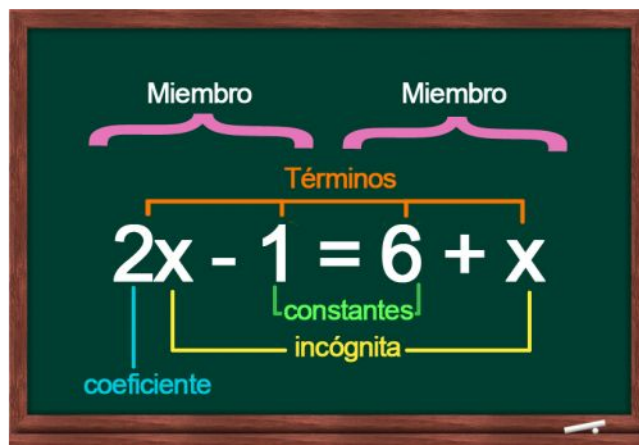
(h) $\left(\frac{a^3}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{b^3}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$

(j) $2\sqrt{18} + 5\sqrt{8} - \sqrt{50}$

1.1.11 Ecuaciones

Una **ecuación** en matemática se define como una igualdad establecida entre dos expresiones, en la cual puede haber una o más incógnitas que deben ser resueltas.

Existen dos grandes tipos de ecuaciones; algebraicas y no algebraicas (exponenciales, logarítmicas, etc).



1.1.12 Ecuación Cuadrática

Se llama ecuación cuadrática, o de segundo grado, con una incógnita a toda aquella que tiene la forma general

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ con } a \neq 0$$

Veamos como resolver ecuaciones cuadráticas.

Actividad 2. Resolver $(x + 4)(x - 3) = 0$.

Con el fin de ir reforzando el conocimiento hacemos uso de la propiedad válida en los números reales

$$a \cdot b = 0 \implies a = 0 \vee b = 0$$

En nuestra actividad

$$(x + 4)(x - 3) = 0 \implies x + 4 = 0 \vee x - 3 = 0$$

Esto nos conduce a tener que resolver:

$$\bullet \quad x + 4 = 0 \implies x = -4 \qquad \bullet \quad x - 3 = 0 \implies x = 3$$

Así, el conjunto solución está formado por $\{x = -4, x = 3\}$

Actividad 3. Resolver $5x^2 + 15x = 0$.

En este caso, la propiedad de factorización nos ayuda

$$5x^2 + 15x = 0 \implies 5x \cdot (x + 3) = 0$$

De nuevo la propiedad $a \cdot b = 0 \implies a = 0 \vee b = 0$ se aplica

$$5x \cdot (x + 3) = 0 \implies 5x = 0 \vee x + 3 = 0$$

de lo cual

$$x = 0 \text{ o bien } x = -3$$



Tipo de raíces

La naturaleza real o no de la solución dependerá del subradical $\Delta = b^2 - 4ac$, que se llama **discriminante**.

1. Si $\Delta > 0$, los valores de la solución son reales y distintos.
2. Si $\Delta = 0$, los valores de la solución son reales e iguales.
3. Si $\Delta < 0$, los valores de la solución no son reales.

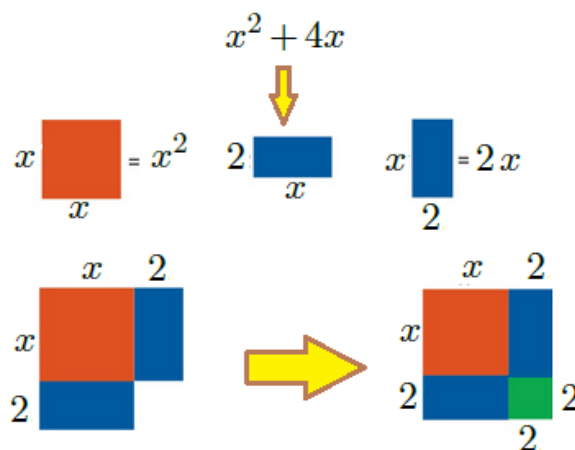


1.1.13 Completando cuadrados

Completar el cuadrado es un método para resolver ecuaciones cuadráticas que no podemos factorizar. Completar el cuadrado significa manipular la forma de la ecuación para que el lado izquierdo de la ecuación sea un trinomio cuadrado perfecto.

Actividad 4. Considera la expresión cuadrática $x^2 + 4x$

La figura muestra que x^2 lo podemos considerar como un cuadrado de lado x . Además, el término $4x$ se descompone en dos rectángulos de lados x y 2 . La idea es construir con esto un cuadrado geométrico. La figura muestra que, con los datos dados, no está completo. Se ve que falta un “cuadradito” de lado 2 .



Volviendo a la parte algebraica, te muestro como queda esto

$$x^2 + 4x = x^2 + 4x + 4 - 4$$

Recuerda que la propiedad de los reales permite escribir

$$4 + (-4) = 4 - 4 = 0$$

Asociando convenientemente

$$(x^2 + 4x + 4) - 4 = 0$$

el paréntesis es un cuadrado perfecto

$$(x + 2)^2 - 4 = 0$$

De esta manera se ha “**completado el cuadrado**”.

Para complementar las ideas te propongo visitar

<https://matematicasfacilesa.blogspot.com/2016/01/completar-el-cuadrado-geometricamente.html>

Actividad 5. Considera la ecuación cuadrática $x^2 - 4x + 5$.

Vamos a completar un cuadrado de binomio. Lo primero que hacemos es asociar las variables:

$$(x^2 - 4x) + 5$$

Ahora recuerdas el cuadrado del binomio

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

Si comparas ambas expresiones, el primer término al cuadrado ya lo tenemos. Luego viene el “doble producto del primero por el segundo”, lo que equivale a tener

$$2xy = -4x \implies y = -2$$

Por tanto, el paréntesis que asociamos tiene la forma

$$(x - 2)^2$$

como esto es lo mismo que $x^2 - 4x + 4$, entonces

$$(x^2 - 4x) + 5 = (x - 2)^2 + 1$$

con lo cual el objetivo de completar cuadrados está cumplido. A lo mejor no te diste cuenta, pero el cuadrado del binomio, en una de sus partes dice “... más el **doble producto** del primero por el segundo ...”. Por esto, **siempre** la constante que acompaña a la x se divide por 2 para obtener el término constante dentro del paréntesis que aparece elevado al cuadrado.

Ejemplo 1.1.13. Completar cuadrado en la ecuación $3x^2 + 5x + 1 = 0$

En este caso $a \neq 1$ (es 3). Lo que se debe hacer es factorizar por 3 los sumandos que contienen la variable x

$$3x^2 + 5x + 1 = 0 \implies 3\left(x^2 + \frac{5}{3}x\right) + 1 = 0$$

Ahora, recuerda que el coeficiente de x se divide por 2 para poder completar cuadrado y que se **resta** el cuadrado de ese coeficiente

$$3\left(x^2 + \frac{5}{3}x\right) + 1 = 0 \implies 3\left[\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{25}{36}\right] + 1 = 0$$

Observa que se utilizó un corchete para indicar la parte que corresponde a la factorización. A continuación se procede a multiplicar por 3.

$$3\left[\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{25}{36}\right] + 1 = 0 \implies 3\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 - 3 \cdot \frac{25}{36} + 1 = 0$$

Ecuación equivalente con

$$3\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{13}{12} = 0$$

O bien

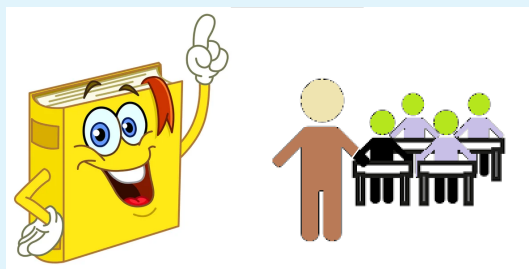
$$\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{13}{36} = 0$$

El cuadrado ha sido completado.

Más trucos encuentras en

[https://es.wikihow.com/factorizar-polinomiales-de-segundo-grado-\(ecuaciones-cuadr%](https://es.wikihow.com/factorizar-polinomiales-de-segundo-grado-(ecuaciones-cuadr%C3%A1ticas))

Trabajo con mi profe



EJERCICIO 8. Completar cuadrados en cada expresión dada

(a) $x^2 + 6x + 11$

(f) $x^2 - 5x + 6$

(k) $2x^2 + 8x + 5 = 0$

(b) $x^2 + 4x + 3$

(g) $x^2 - 6x + 5$

(l) $2x^2 - 3x + 5$

(c) $2x^2 + 8x + 4$

(h) $2z^2 + 8z + 9$

(m) $2x^2 + 16x + 49$ es:

(d) $x^2 - 2ax + a^2 + b^2$

(i) $2w^2 - 5w + 7$

(n) $x^2 - 4x + 1$ es:

(e) $x^2 + 8x + 15$

(j) $3y^2 + 2y + 2$

(o) $2x^2 + 12x - 16$ es:

1.1.14 La fórmula de la cuadrática

La siguiente fórmula la conoces, permite calcular las raíces de una ecuación cuadrática

$$ax^2 + bx + c = 0 \implies x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Si quieres ver la demostración, visita la página

<https://www.youtube.com/watch?v=2dZM7BAs6FE>

Ejemplo 1.1.14. Usar la fórmula cuadrática para resolver $x^2 + 4x - 5 = 0$.

Lo primero es identificar el valor de las constante

$$\begin{array}{ccccccc} ax^2 & + & bx & +c & = & 0 \\ x^2 & + & 4x & -5 & = & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \\ a = 1 & & b = 4 & c = -5 & & \end{array}$$

Ponemos todo esto es

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

para tener

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2 \cdot 1}$$

que equivale a

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{36}}{2}$$

Dado que la raíz de 36 es conocida se tiene

$$x = \frac{-4 \pm 6}{2}$$

Al sumar en el numerador y luego dividir se halla que

$$x = 1$$

al usar la diferencia

$$x = -5$$

De esta manera, las raíces de la ecuación son; $x = 1$ y $x = -5$

1.1.15 Ecuaciones irracionales

Se llaman irracionales a las ecuaciones en que la variable incógnita es argumento de un subradical. Para resolverlas es frecuente la necesidad de elevar a potencias la igualdad, usando el hecho de que si $a = b$ entonces $a^n = b^n$. Con este recurso lo que se provoca es que el grado de la ecuación original aumente y, eventualmente se esté creando soluciones ficticias para la ecuación de origen. Por esto es que se tendrá que verificar los valores de la variable que aparecen como solución de la ecuación.

Ejemplo 1.1.15. Resolver $\sqrt[3]{5 + \sqrt{2x + 3}} = 2$

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{5 + \sqrt{2x + 3}} = 2 &\implies \left(\sqrt[3]{5 + \sqrt{2x + 3}}\right)^3 = 2^3 \\ &\implies 5 + \sqrt{2x + 3} = 8 \implies \sqrt{2x + 3} = 3 \\ &\implies 2x + 3 = 9 \implies x = 3\end{aligned}$$

Dado que hubo elevaciones a potencia hay que verificar la solución. Al hacerlo se prueba que $x = 3$ es solución.

Trabajo con mi profe



EJERCICIO 9. Resolver las siguientes ecuaciones:

(a) $x = 2 + \sqrt{x}$

(b) $\sqrt{1 - 2x} + \sqrt{x + 5} = 4$

1.1.16 Racionalización

La racionalización consiste en eliminar los radicales del denominador. A continuación te muestro tres tipos de racionalización;

- Expresiones del tipo $\frac{a}{b\sqrt{c}}$

Ejemplo 1.1.16. Racionalizar $\frac{2}{3\sqrt{5}}$

Como se debe racionalizar, en el denominador debe “desaparecer” la raíz. Es suficiente multiplicar numerador y denominador por $\sqrt{5}$

$$\frac{2}{3\sqrt{5}} = \frac{2}{3\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2 \cdot \sqrt{5}}{3\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{2 \cdot \sqrt{5}}{15}$$

- Expresiones del tipo $\frac{a}{b\sqrt[n]{c^m}}$

Hay que multiplicar numerador y denominador por la raíz n-ésima con el radicando elevado a la diferencia entre el índice de la raíz y su exponente. Esto es

$$\frac{a}{b\sqrt[n]{c^m}} = \frac{a}{b\sqrt[n]{c^m}} \cdot \frac{\sqrt[n]{c^{n-m}}}{\sqrt[n]{c^{n-m}}} = \frac{a\sqrt[n]{c^{n-m}}}{b\sqrt[n]{c^m} \cdot \sqrt[n]{c^{n-m}}} = \frac{a\sqrt[n]{c^{n-m}}}{bc}$$

Ejemplo 1.1.17. Racionalizar $\frac{2}{3\sqrt[5]{2^2}}$

En primer lugar podemos ver que $n = 5$ y $m = 2$, de modo que $n - m = 3$. Se tiene

$$\frac{2}{3\sqrt[5]{2^2}} = \frac{2}{3\sqrt[5]{2^2}} \cdot \frac{\sqrt[5]{2^3}}{\sqrt[5]{2^3}} = \frac{2\sqrt[5]{2^3}}{3\sqrt[5]{2^2} \cdot \sqrt[5]{2^3}} = \frac{2\sqrt[5]{2^3}}{3 \cdot 2} = \frac{\sqrt[5]{2^3}}{3}$$

Como alternativa se tiene el cambiar las raíces por potencias racionales y trabajar así.

- Expresiones de la forma $\frac{a}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}$

En estos casos multiplicamos numerador y denominador por la diferencia de los radicales. Recordar que el profe muchas veces dijo “multiplicar por el conjugado”

Ejemplo 1.1.18. Racionalizar $\frac{3}{\sqrt{2} + \sqrt{5}}$

El conjugado de $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ es $\sqrt{2} - \sqrt{5}$. Luego

$$\frac{3}{\sqrt{2} + \sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{2} + \sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{2} - \sqrt{5}}{\sqrt{2} - \sqrt{5}} = \frac{3(\sqrt{2} - \sqrt{5})}{(\sqrt{2} + \sqrt{5})(\sqrt{2} - \sqrt{5})} = \frac{3(\sqrt{2} - \sqrt{5})}{2 - 5}$$

Al simplificar

$$\frac{3}{\sqrt{2} + \sqrt{5}} = \sqrt{5} - \sqrt{2}$$



Begin Test

Pasas con 100%.

1. Una solución de $(x - 3)^2 = 8$ es:

- (a) $2 + \sqrt{3}$ (b) $-3 - \sqrt{8}$ (c) $-2 + \sqrt{3}$ (d) $3 - 2\sqrt{2}$

2. $\frac{\sqrt{x} + \sqrt{a}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$ es igual a:

- (a) $\frac{x + a}{x - a}$ (b) $\frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a}$

- (c) $\frac{x + 2\sqrt{ax} + a}{x - a}$ (d) $\frac{x - a}{x + a}$

3. Al simplificar $\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2} + 4\sqrt{(x+2)^3}}$ se obtiene:

- (a) $\frac{1}{4x - 7}$ (b) $\frac{1}{4x + 9}$ (c) $\frac{x + 2}{4x - 7}$ (d) $\frac{x + 2}{4x + 9}$

End Test

Puntos:

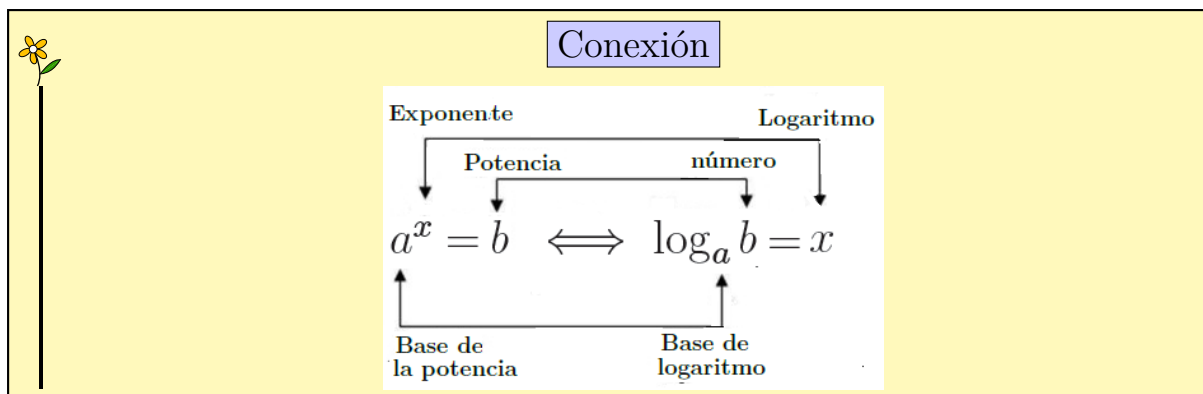
Correctas

1.2 Logaritmos

Logaritmos

Definición 1.2.1. Sea $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ y consideremos la ecuación $a^x = b$. A la solución real x se le llama el **logaritmo** de b en la base a , y se le anotará: $x = \log_a b$. De otro modo:

$$x = \log_a b \iff a^x = b$$



Las siguientes propiedades son esenciales en todo proceso que involucre logaritmos

Algebra de logaritmos

- $a^{\log_a b} = b$
- $\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$
- $\log_a(b^k) = k \log_a b$
- $b = c \iff \log_a b = \log_a c$
- $\log_a a = 1$
- $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$
- $\log_a 1 = 0$

Ejemplo 1.2.2.

1. $\log_4 64 = 3$ pues $4^3 = 64$

2. $\log_2\left(\frac{1}{8}\right) = -3$

Cambio de base

$$\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$$

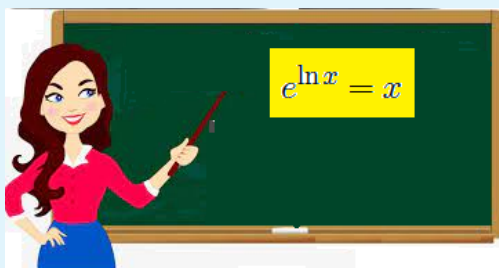
Esta expresión permite reescribir un número logarítmico en una nueva base cualquiera, surge el recurso de reducir todo logaritmo a una misma base escogida convenientemente. La historia nos muestra que se ha convenido en usar dos bases, la base **decimal** o de **briggs**, que usa al 10 como base logarítmica (se anota log) y la base **natural** o de **Nepper** que usa al número trascendental e como base logarítmica (se anota ln).

Actividad 6. Hallar el valor de $\frac{\log_6 8}{\log_6 2}$

Las bases de los logaritmos en el numerador y denominador son las mismas. Tenemos:

$$\frac{\log_6 8}{\log_6 2} = \frac{\log_6 2^3}{\log_6 2} = 3 \frac{\log_6 2}{\log_6 2} = 3$$

Trabajo con mi profe



EJERCICIO 10. Calcular los siguientes valores:

(a) $\log_2 16$

(b) $\log_3 81$

(c) $\log_9 3$

(d) $\log_3 \frac{1}{3}$

(e) $\log_3 27$

(f) $\log_5 125$

(g) $\log_2 \left(\frac{1}{4}\right)$

(h) $2 = \log_x(16)$

(i) $3 = \log_2 x$

(j) $\log_6 4 + \log_6 9$

(k) $\log_5 20 + \log_5 \left(\frac{1}{4}\right)$

(l) $16^{\log_4(8)}$

MATHS QUIZ

Begin Test

Pasas con 100%.

1. Determinar cuál de los siguientes números es la simplificación de $\log_2 12 - \log_2 \left(\frac{3}{4}\right)$

☐ 0

☐ 1

☐ 2

☐ 4

2. Si $\log_3 5 = 1,465$, entonces $\log_3 0,04$ es:

☐ -2.930

☐ -1.465

☐ -3.465

☐ 2.930

3. Hallar x si $\log_c(10 + x) - \log_c x = \log_c 5$

☐ 2.5

☐ 4.5

☐ 5.5

☐ 7.5

End Test

Puntos:

Correctas

1.3 Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

Son aquéllas en las cuales la incógnita forma parte del argumento de un logaritmo (cantidad a la que se le aplica un logaritmo) o del exponente de una potencia. Para resolverlas, se busca uno o ambos de los siguientes propósitos :

1. Lograr una igualdad de logaritmos o de potencias con igual base para luego aplicar la definición que corresponda.
2. Lograr expresar los términos de ambos miembros de la igualdad en función de una idéntica expresión logarítmica o exponencial que pase a ser una variable auxiliar que nos lleve a una ecuación lineal o cuadrática.

Una vez obtenidos los valores de la incógnita en el proceso de despeje, se verifica si satisfacen a la ecuación original respetando la definición de logaritmos y exponenciales.

Ejemplo 1.3.1. Resolver $2 \cdot 10^{x-1} = 3$

Se aplica logaritmo a ambos lados de la ecuación

$$\begin{aligned} 2 \cdot 10^{x-1} = 3 &\implies \log(2 \cdot 10^{x-1}) = \log(3) \\ &\implies \log(2) + \log(10^{x-1}) = \log(3) \\ &\implies x - 1 = \log(3) - \log(2) \\ &\implies x = \log(3) - \log(2) + 1 \\ &\implies x = \log(3) - \log(2) + \log(10) \\ &\implies x = \log 15 \end{aligned}$$

Ejemplo 1.3.2. Resolver $e^{2x} - 2e^x - 3 = 0$

La primera mirada al problema es importante. Si ves una cuadrática ¡en hora buena!. Si hacemos $z = e^x$, entonces

$$\begin{aligned} e^{2x} - 2e^x - 3 = 0 &\implies z^2 - 2z - 3 = 0 \\ &\implies (z + 1)(z - 3) = 0 \end{aligned}$$

A partir de $z + 1 = 0$, que equivale a $e^x = -1$, se sigue que no existe solución. De igual forma, de $z - 3 = 0$ que equivale a $e^x = 3$, se sigue que $x = \ln 3$. En consecuencia, esta última es la única solución.

Ejemplo 1.3.3. Resolver $\ln 12 + \ln(x - 1) = \ln(x - 2)$

Como los logaritmos están en una misma base, es sencillo agruparlos

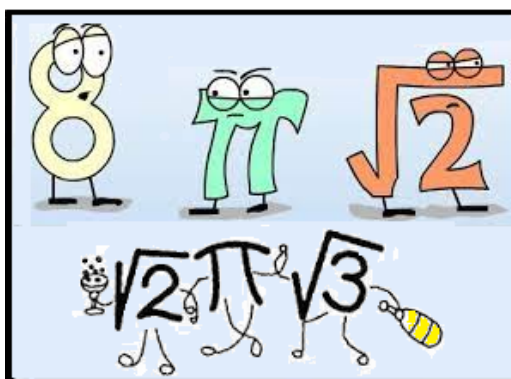
$$\ln 12 + \ln(x - 1) = \ln(x - 2) \implies \ln 12 = \ln \frac{x - 2}{x - 1}$$

Eliminando logaritmos se tiene que

$$\frac{x - 2}{x - 1} = 12 \implies x = \frac{10}{11}$$

1.4 La Fiesta de los Reales

¡Hoy estamos de fiesta!, quiero invitar a las potencias, raíces y fracciones a compartir un agradable momento con el común denominador, el factor común, la suma, la resta, la multiplicación y la división. Tú puedes participar ordenando y distribuyendo a estos invitados, asignando labores que deben cumplir, etc. Como se trata de una fiesta de seguro que te traerá más de algún recuerdo.



EJERCICIO 11. Los siguientes invitados entraron “disfrazados”. Tu tarea es descubrir quienes son:

- (a) Un número cualquiera
- (b) El cuadrado de la resta de dos números
- (c) El producto de x y 10 disminuído en 20
- (d) La suma del cuadrado de dos números
- (e) El cuadrado de la suma de dos números
- (f) El inverso multiplicativo de un número
- (g) El recíproco de la suma de dos números
- (h) El número dos elevado a un número
- (i) la raíz cuadrada de la suma de dos números
- (j) Un número mayor o igual que 20
- (k) El cuadrado del triple de un número
- (l) El triple del cuadrado de un número.

EJERCICIO 12. En un momento de la fiesta entran un montón de invitados. Te corresponde identificarlos por separado, desarrollando:

- (a) $(p + 5n)^2 = \dots\dots\dots$
- (b) $(2a + 3b)^2 = \dots\dots\dots$
- (c) $(a - 7b)^2 = \dots\dots\dots$
- (d) $(2a + b)(2a - b) = \dots\dots\dots$
- (e) $(x - y + 2)^2 = \dots\dots\dots$
- (f) $(x + 5)(x + 3) = \dots\dots\dots$
- (g) $(x + 5)^3 = \dots\dots\dots$

EJERCICIO 13. Cuando la fiesta estaba en lo mejor la orquesta llamó a un concurso de baile por parejas. Identifica las parejas que se juntaron, factorizando:

- (a) $8xz + 12xw = \dots\dots\dots$
- (b) $12ab + 18ac - 30ad = \dots\dots\dots$
- (c) $9x^2 - 16y^2 = \dots\dots\dots$
- (d) $a^2b^4 - w^2 = \dots\dots\dots$
- (e) $ax + ay - x - y = \dots\dots\dots$
- (f) $x^2 + 4y^2 + 4xy + x + 2y = \dots\dots\dots$

EJERCICIO 14. En un momento algunos invitados se ponen “revoltosos”. El único remedio es que tú los **reduzcas** por la fuerza. Te los presento para que pongas orden:

- (a) $\frac{ax - ay - x + y}{ax + ay - x - y} =$
- (b) $\frac{(a - b)^2 - c^2}{a^2 - (b + c)^2} =$
- (c) $\frac{1 - \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}}{\frac{x - y}{x + y} - \frac{x + y}{x - y}} =$

EJERCICIO 15. Por lo general, las orquestas son super revoltosas. En otro momento pidieron que se juntaran tres “compadres” para formar un cuadrado perfecto. Adivina quienes se juntaron:

- (a) $y^2 - 18y + \dots = \dots$
- (b) $a^2 + \dots + 64b^2 = \dots$
- (c) $\dots - 30y + 25 = \dots$

EJERCICIO 16. En un rincón se juntaron un “lote” de irracionales y empezaron a hacer desorden. Trata de **reducirlos** al máximo

- (a) $\sqrt{xy} \left(\sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}} \right) =$
- (b) $\sqrt{\frac{2(a^2 + b^2)^2}{c^2} - \frac{2(a^2 - b^2)^2}{c^2}} =$

$$(c) \quad \left(\sqrt{\frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{y}} \right) \left(\sqrt{\frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{y}} \right) =$$

EJERCICIO 17. Tal como ocurre en toda fiesta, llegó el momento de hacer un “trencito”. Encuentra a los “desordenados” x que comandaban el lote.

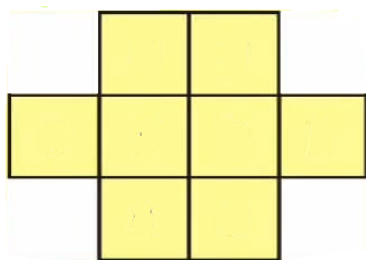
$$(a) \quad \frac{7}{2x} - \frac{8}{3x} + \frac{9}{4x} - \frac{1}{3} = \frac{31 - 7x}{6x} \Rightarrow$$

$$(b) \quad (2x - 9)^2 + (3x - 14)^2 = (x - 1)^2 \Rightarrow$$

$$(c) \quad \sqrt{1 + 4\sqrt{x}} = 1 + \sqrt{x} \Rightarrow$$

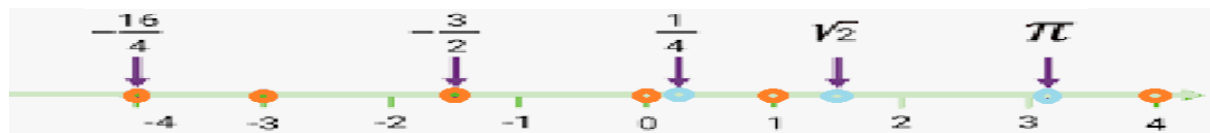
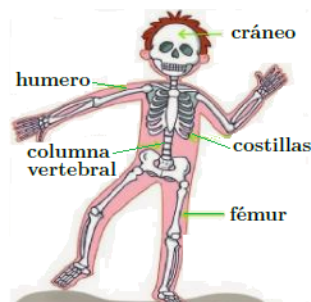
EJERCICIO 18. Al terminar la fiesta, el locutor da a conocer una adivinanza, quien le acierte tendrá entrada liberada en la próxima.

- (a) Acomodar los números del 1 al 8 en la cuadrícula, de modo que NO queden números consecutivos juntos en forma horizontal, vertical o diagonal.



1.5 El cuerpo ordenado $(\mathbb{R}, +, \cdot)$

A lo ya conocido de los números reales agregamos el hecho de que es posible ordenarlos mediante la relación de orden $\leq$, y que nos permitirá representar a estos números sobre una recta geométrica, asociando a cada punto de ella un único número real.



La figura muestra algunos números reales situados en la recta numérica

Menor que

Definición 1.5.1. Para todo $a, b \in \mathbb{R}$ se define la relación “ser menor que” como

$$a \text{ es menor que } b \text{ si y sólo si } b - a \in \mathbb{R}^+$$

Observación. “ a es menor que b ” se anota $a < b$.

Además se definen:

1. $a \leq b$ como equivalente a decir $a < b$ o $a = b$.
2. $a > b$ como equivalente a decir $b < a$.
3. $a \geq b$ como equivalente a decir $a > b$ o $a = b$.

y se leen respectivamente, “ a es menor o igual que b ”, “ a es mayor que b ”, “ a es mayor o igual que b ”.

1.5.1 Axiomas de orden

La relación “<” en $\mathbb{R}$ cumple los axiomas de:

1. **Tricotomía:** Para todo $a, b \in \mathbb{R}$ se cumple sólo una de las siguientes alternativas:

- $a < b$
- $a = b$
- $a > b$

Así, los números reales son **totalmente ordenados** y se pueden representar sobre una recta de modo que a cada punto corresponda un real y viceversa.

2. **Adición:** Para todo $a, b \in \mathbb{R}$, si $a > 0$ y $b > 0$, entonces $a + b > 0$.

3. **Multiplicación:** Para todo $a, b \in \mathbb{R}$, si $a > 0$ y $b > 0$, entonces $a \cdot b > 0$.

Begin Test

**MATHS
QUIZ**

Solo una alternativa es correcta. Pasas con 100%.

1. Si $3 < 4$ entonces es cierto que:

☐ $3^{-1} < 4^{-1}$ ☐ $2 \cdot 3 > 2 \cdot 4$ ☐ $(3 - 4)^2 > 0$ ☐ $(3 - 4)^3 > 0$

2. Si $-3 < -2$, entonces es cierto que:

☐ $(-3)^{-1} < (-2)^{-1}$ ☐ $(-3)^{-1} > (-2)^{-1}$ ☐ $(-3 - (-2))^2 < 0$ ☐ $-3 \cdot (-3) < -3 \cdot (-2)$

3. Si $-3 < 2$, entonces es cierto que:

☐ $(-3)^2 < (2)^2$ ☐ $(-3)^{-1} > (2)^{-1}$ ☐ $(-3 - 2)^2 < 0$ ☐ $-4 \cdot (-3) > -4 \cdot (2)$

4. Si $-2 > -4$, entonces es cierto que:

☐ $\frac{1}{2} \cdot (-2) < \frac{1}{2} \cdot (-4)$ ☐ $\frac{1}{2} \cdot (-2) > \frac{1}{2} \cdot (-4)$
☐ $-\frac{1}{2} \cdot (-2) > -\frac{1}{2} \cdot (-4)$ ☐ $(-2)^2 > (-4)^2$

5. Si $0 < a < 1$, entonces es cierto que:

☐ $\frac{1}{a} < 1$ ☐ $a^2 < a$ ☐ $(a - 1)^2 > 1$ ☐ $2a < 1$

6. Si $a > b$, $c > 0$ entonces es cierto que:

☐ $a \cdot c < b \cdot c$ ☐ $a > b \cdot c$ ☐ $a \cdot c > b$ ☐ $a \cdot c > b \cdot c$

7. Si $\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$, entonces es correcto afirmar que:

☐ $\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} < \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$ ☐ $\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} > \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$

☐ $\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)^2 < 0$ ☐ $(-2) \cdot \frac{1}{4} < (-2) \cdot \frac{1}{2}$

8. Si $a < b$ entonces es cierto que:

☐ $a^{-1} < b^{-1}$ ☐ $2 \cdot a > 2 \cdot b$ ☐ $(b - a)^2 > 0$ ☐ $a^2 < b^2$

9. Si $a < 0$, entonces es cierto que:

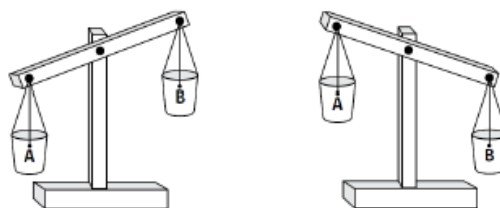
☐ $a + 1 > 0$ ☐ $\frac{1}{a} > 0$ ☐ $-3 \cdot a > 0$ ☐ $a + 3 < 0$

End Test

Correctas

1.5.2 Desigualdades

Desigualdad matemática es una proposición de relación de orden existente entre dos expresiones algebraicas conectadas a través de los signos: mayor que $>$, menor que $<$, menor o igual que $\leq$, y mayor o igual que $\geq$.



Las siguientes propiedades son de uso habitual en la resolución de desigualdades. Para todo $a, b, c, d \in \mathbb{R}$:

1. Si $a < b$ entonces $a + c < b + c$.
2. Si $a < b$ y $c > 0$ entonces $ac < bc$.
3. Si $a < b$ y $c < 0$ entonces $ac > bc$.
4. Si $a < b$ y $c < d$ entonces $a + c < b + d$.
5. $\forall a \in \mathbb{R}, a^2 \geq 0$
6. $\forall a, b \in \mathbb{R}^+, a < b \implies a^2 < b^2$
7. $\forall a, b \in \mathbb{R}^+, a < b \implies \sqrt{a} < \sqrt{b}$

1.5.3 Intervalos

Un subconjunto de la recta real se llama **intervalo**, y contiene a todos los números reales que están comprendidos entre dos cualesquiera de sus elementos. Geométricamente los intervalos corresponden a segmentos de recta, semirrectas o la misma recta real. La siguiente es una lista de ellos

NOMBRE		REPRESENTACIÓN
Intervalo abierto	■ $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$	
Intervalo cerrado	■ $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$	
Intervalo semiabierto	■ $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$	
	■ $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$	
Semirrecta	■ $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} / x \geq a\}$	
	■ $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} / x > a\}$	
	■ $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} / x \leq a\}$	
	■ $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} / x < a\}$	

Observación.

1. $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$

2. $(a, a) = \emptyset$

3. $[a, a] = \{a\}$

1.5.4 Inecuaciones

Inecuación

Es una comparación por $<, \leq, >, \geq$ entre expresiones algebraicas que contienen una o más variables incógnitas y que resulta verdadera sólo para algunos valores reales de las variables. Al conjunto de estos valores se le llama **conjunto solución** de la inecuación.

Para resolver una inecuación utilizamos el siguiente resultado:

Método de los puntos críticos



- Realizar las operaciones necesarias para que toda la expresión quede a un lado de la inecuación y cero en el otro lado.
- Factorizar al máximo numerador y denominador (si este último existe).
- Igualando cada factor a cero y resolviendo se hallan los puntos críticos.

- Se agregan estos puntos críticos en la recta numérica, guardando su relación de orden.
- Se forman así intervalos, en cada uno de los cuales se toma un valor numérico, se reemplaza en la expresión dada y se determina su signo.
- Si la desigualdad a resolver es positiva, la unión de todos los intervalos positivos es el conjunto solución. Si la desigualdad a resolver es negativa la unión de todos los intervalos negativos es el conjunto solución.

Ejemplo 1.5.2. Hallar el conjunto solución de $3x - 5 \leq \frac{x}{4} + \frac{1-x}{4}$

Solución:

Paso 1: Pasar todo a un lado de la desigualdad. Mira como queda

$$3x - 5 - \frac{x}{4} - \frac{1-x}{4} \leq 0$$

Paso 2: Reducir toda la expresión e igualarla a cero, con esto descubriremos los puntos críticos

$$3x - 5 - \frac{x}{4} - \frac{1}{4} + \frac{x}{4} = 0 \implies 3x - \frac{21}{4} = 0$$

Se llega a la ecuación

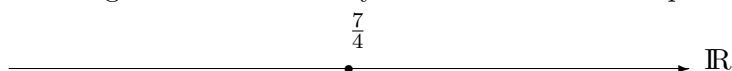
$$\frac{12x - 21}{4} = 0$$

Se trata de una fracción que tiene una constante en el denominador, por tanto, allí no hay punto crítico. Sin embargo, al igualar a cero el numerador se tiene

$$12x - 21 = 0 \implies x = \frac{7}{4}$$

Este es el único punto crítico encontrado.

Paso 3: Se grafica la recta real y se coloca sobre ella el punto crítico.



Paso 4: Se averigua el signo en cada subintervalo. Para ello es suficiente con tomar un valor arbitrario de ese intervalo y evaluar.

- Por ejemplo, en el intervalo $(-\infty, \frac{7}{4})$ se puede tomar el $x = 0$, o cualquier valor a la izquierda de $\frac{7}{4}$. Al reemplazar en

$$3x - 5 - \frac{x}{4} - \frac{1-x}{4}$$

se halla que

$$3 \cdot 0 - 5 - \frac{0}{4} - \frac{1-0}{4} = -5 - \frac{1}{4} < 0$$

¡Eureka!, este intervalo es de solución.

- Veamos que pasa en el otro intervalo, para ello se puede tomar $x = 2$

$$3 \cdot 2 - 5 - \frac{2}{4} - \frac{1-2}{4} = \frac{3}{4} \not< 0$$

Con los datos obtenidos, el conjunto solución es ...

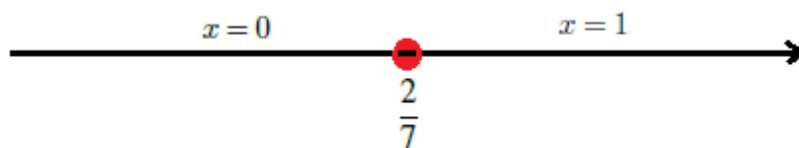
$$S_x = (-\infty, \frac{7}{4}]$$

Actividad 7. Resolver la inecuación $3(x-1) + (x+2)^2 < (x+1)(x-1) + 4$

No vamos a anotar los pasos, la haremos simple, en lugar de trabajar la desigualdad, lo hacemos tomando la igualdad

$$3(x-1) + (x+2)^2 = (x+1)(x-1) + 4 \implies 3x - 3 + x^2 + 4x + 4 = x^2 - 1 + 4 \\ \implies 7x = 2$$

Así, tenemos un **punto crítico**, $x = \frac{2}{7}$, en el cual se produce la igualdad. A partir de éste encontraremos el conjunto solución de la desigualdad. Ponemos este punto en la recta numérica



Ahora se elige un punto en cada intervalo:

- En $(-\infty, \frac{2}{7})$ se puede tomar $x = 0$. Este valor se reemplaza en la ecuación original

$$3(x-1) + (x+2)^2 < (x+1)(x-1) + 4 \implies 3(0-1) + (0+2)^2 < (0+1)(0-1) + 4$$

Haciendo los cálculos se halla que

$$-3 + 4 < -1 + 3 \implies 1 < 2 \quad \text{Verdadero}$$

- En $(\frac{2}{7}, \infty)$ se puede tomar $x = 1$. Este valor se reemplaza en la ecuación original

$$3(x-1) + (x+2)^2 < (x+1)(x-1) + 4 \implies 3(1-1) + (1+2)^2 < (1+1)(1-1) + 4$$

Haciendo los cálculos se halla que

$$0 + 9 < 0 + 4 \quad \textbf{Falso}$$

Se concluye que el conjunto solución es

$$S = (-\infty, \frac{2}{7})$$

Actividad 8. Resolver $(2x-1)^2 \geq 6x-3$

Se desarrolla el cuadrado de binomio

$$\begin{aligned} (2x-1)^2 &\geq 6x-3 \implies 4x^2 - 4x + 1 \geq 6x - 3 \\ &\implies 4x^2 - 10x + 4 \geq 0 \\ &\implies 2x^2 - 5x + 2 \geq 0 \end{aligned}$$

Ahora resolvemos $2x^2 - 5x + 2 = 0$, teniendo presente que las raíces de esta ecuación forman parte del conjunto solución (es mayor o igual). Se tiene

$$2x^2 - 5x + 2 = 0 \implies x_1 = 2, \quad x_2 = \frac{1}{2}$$

Para una mejor comprensión utilizaremos la recta real, poniendo sobre ella las raíces encontradas.



Verifiquemos que pasa en cada subintervalo considerando un valor arbitrario.

- En el intervalo $(-\infty, \frac{1}{2})$ elegimos $x = 0$ y lo reemplazamos en $(2x-1)^2 \geq 6x-3$, con lo cual

$$(2 \cdot 0 - 1)^2 \geq 6 \cdot 0 - 3 \Rightarrow 1 \geq -3$$

lo que resulta ser **verdadero**!. Esto significa que este intervalo forma parte del conjunto solución. Veamos que sucede en los restantes intervalos.

- En $(\frac{1}{2}, 2)$ elegimos $x = 1$, con lo cual

$$(2 \cdot 1 - 1)^2 \geq 6 \cdot 1 - 3 \Rightarrow 1 \geq 3$$

lo que es **falso**. Por tanto en este intervalo no existe solución.

- En el intervalo $(2, \infty)$ elegimos $x = 3$, con lo cual

$$(2 \cdot 3 - 1)^2 \geq 6 \cdot 3 - 3 \Rightarrow 25 \geq 15$$

lo que es **verdadero**.

En consecuencia el conjunto solución de la desigualdad es

$$S = (-\infty, \frac{1}{2}] \cup [2, \infty)$$

Ejemplo 1.5.3. Resolver $\frac{x}{x-2} \geq \frac{x}{x+3}$

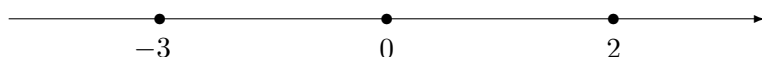
Trasladamos para tener sólo una expresión a la izquierda

$$\frac{x}{x-2} - \frac{x}{x+3} \geq 0$$

lo que equivale a tener

$$\frac{5x}{(x-2)(x+3)} \geq 0$$

El numerador se hace cero en $x = 0$ y el denominador en $x = 2$ y $x = -3$. Colocamos estos valores en la recta real teniendo presente que $x = 0$ forma parte de la solución y que $x = 2$ y $x = -3$ no lo son.



Analicemos lo que sucede en cada subintervalo.

En $(-\infty, -3)$ elegimos $x = -4$. Al reemplazar en $\frac{5x}{(x-2)(x+3)}$ tenemos

$$\frac{5 \cdot (-4)}{(-4-2)(-4+3)} = -\frac{10}{3} \not\geq 0$$

Luego, en este intervalo no hay solución.

En $(-3, 0)$ elegimos $x = -1$ para tener que

$$\frac{5 \cdot (-1)}{(-1-2)(-1+3)} = \frac{5}{6} \geq 0$$

de modo que aquí tenemos solución.

En $(0, 2)$ elegimos $x = 1$, con lo cual,

$$\frac{5 \cdot (1)}{(1-2)(1+3)} = -\frac{5}{4} \not\geq 0$$

de manera que acá no hay solución. Finalmente

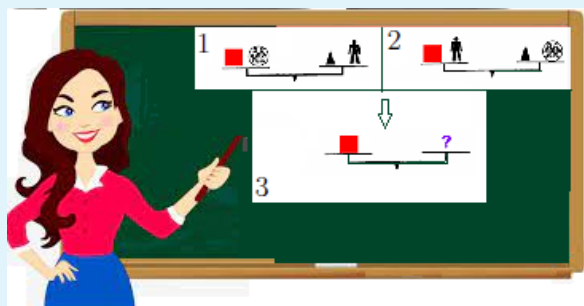
En $(2, \infty)$ elegimos $x = 3$ para tener que

$$\frac{5 \cdot (3)}{(3-2)(3+3)} = \frac{15}{9} \geq 0$$

Así que aquí hay solución. En consecuencia, el conjunto solución es

$$S = (-3, 0] \cup (2, \infty)$$

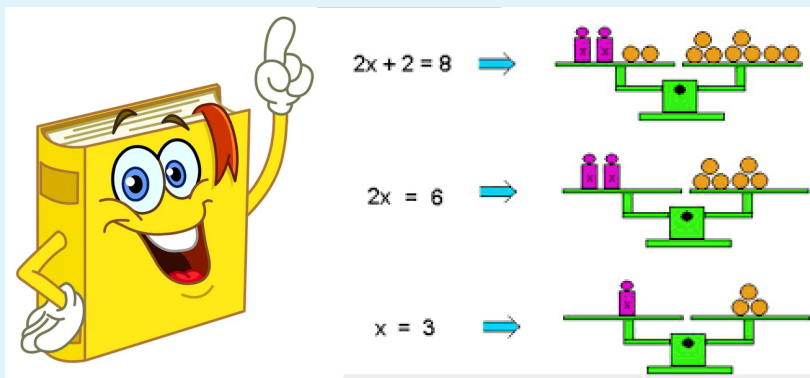
Trabajo con mi profe



EJERCICIO 19. Hallar el conjunto solución de $(x - 1)(x + 2) < 4$

- Pasa todo a un lado de la desigualdad
- Esta expresión se llama $A(x)$
- Desarrolla y reduce términos semejantes
- Escribe esto como producto de factores e igualalo a cero
- Para que esto sea igual a cero se debe tener que
- Pones estos valores sobre la recta real.
- ¿En cuántos subintervalos dividen estos valores a la recta real?
- Estudia el signo de $A(x)$ en cada subintervalo
- Pones sobre la recta real si el $A(x)$ es positivo o negativo
- Escribes tu conclusión

Trabajo con mi profe



EJERCICIO 20. Resolver las inecuaciones:

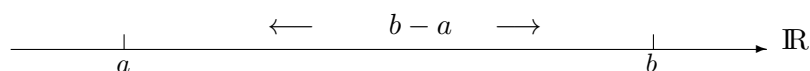
- | | |
|-------------------------------|---------------------------------|
| (a) $x^2 - 7x + 6 < 0$ | (f) $\frac{2x + 2}{x} > 0$ |
| (b) $x^2 - 12x + 35 > 0$ | (g) $\frac{2x + 1}{3x - 2} > 0$ |
| (c) $-2x^2 - 3x + 1 \geq 5$ | (h) $\frac{4x - 1}{x + 1} < 1$ |
| (d) $(x - 2)(3x - 1) < 0$ | |
| (e) $\frac{x - 1}{2 - x} > 3$ | |

1.5.5 Valor absoluto

Definición

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq b$. Se llama **distancia** entre a y b , al número no negativo

$$d(a, b) = b - a$$



Actividad 9. Mira las siguientes distancias:

- La distancia entre 1 y 4 es $d(1, 4) = 4 - 1 = 3$
- La distancia entre -2 y 3 es $d(-2, 3) = 3 - (-2) = 5$
- La distancia entre -7 y -3 es $d(-7, -3) = -3 - (-7) = 4$

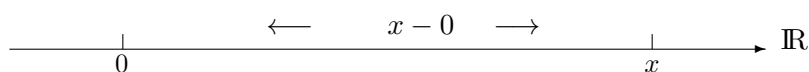
A la distancia entre 0 y un número real x cualquiera la denotaremos por $|x|$ y la llamaremos **valor absoluto** de x .

En general, sea $x \in \mathbb{R}$

1. Si $x > 0$, tenemos

$$|x| = x - 0 = x$$

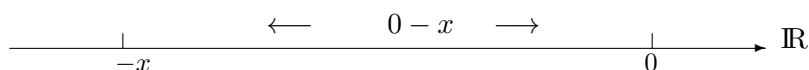
Es decir si $x > 0$, entonces $|x| = x$



2. Si $x < 0$, tenemos

$$|x| = 0 - x = -x$$

Es decir, si $x < 0$, entonces $|x| = -x$



3. Si $x = 0$, tenemos

$$|x| = 0 - 0 = 0$$

Es decir $|0| = 0$

Definición

El **valor absoluto** del número real x , que se anota $|x|$ es

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Trabajo con mi profe



EJERCICIO 21. Calcular:

- | | |
|-------------------------------|-------------------------------------|
| (a) $ 4 - 6 - 8 =$ | (d) $ 4 - 6 - 8 = \dots$ |
| (b) $ 4 - 6 - 8 = \dots$ | (e) $ -4 + 6 \cdot -8 = \dots$ |
| (c) $ 4 \cdot -8 = \dots$ | (f) $ -1 \cdot -2 = \dots$ |

EJERCICIO 22. Aquellos valores que anulan el valor absoluto los llamaremos “puntos de quiebre”. Anotar los puntos de quiebre en cada problema siguiente

- | | |
|--|--|
| (a) $ x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$ | (c) $ 3x + 12 = 0 \Rightarrow x = \dots$ |
| (b) $ 4x - 1 = 0 \Rightarrow x = \dots$ | (d) $ 4x + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x = \dots$ |

EJERCICIO 23. Anota los valores de x que hacen positiva la cantidad que está en valor absoluto

- | | |
|--|---|
| (a) $ x - 5 > 0 \Rightarrow x > 5$ | (c) $ x + 2 > 0 \Rightarrow x > \dots$ |
| (b) $ 4x - 1 > 0 \Rightarrow x > \dots$ | (d) $ 4x + 12 > 0 \Rightarrow x > \dots$ |

EJERCICIO 24. Anota los valores de x que hacen negativa la cantidad que está en valor absoluto

- | | |
|--|---|
| (a) $ x - 6 < 0 \Rightarrow x < 6$ | (c) $ 2x + 4 < 0 \Rightarrow x < \dots$ |
| (b) $ 3x - 2 < 0 \Rightarrow x < \dots$ | (d) $ 3x + 12 < 0 \Rightarrow x < \dots$ |

EJERCICIO 25. Escribir sin valor absoluto (te muestro el camino):

- (a) $|x - 2| = \begin{cases} x - 2, & \text{si } x - 2 > 0 \text{ o bien } x > 2 \\ 0, & \text{si } x = 2 \\ -(x - 2), & \text{si } x - 2 < 0 \text{ o bien } x < 2 \end{cases}$
- (b) $|3x - 2| = \begin{cases} \dots, & \text{si } \dots \\ \dots, & \text{si } \dots \\ \dots, & \text{si } \dots \end{cases}$
- (c) $|2x - 4| = \begin{cases} \dots, & \text{si } \dots \\ \dots, & \text{si } \dots \\ \dots, & \text{si } \dots \end{cases}$
- (d) $\left| \frac{x + 2}{x - 3} \right| = \begin{cases} \dots, & \text{si } \dots \\ 0, & \text{si } \dots \\ \dots, & \text{si } \dots \end{cases}$

**CUANDO DICES "NO PUEDO"
TU CEREBRO SE DETIENE.**

Desafío 7.

► La afirmación $|x| = |-x|$ es V o F

► La afirmación $|x + y| = |x| + |y|$ es V o F

► La afirmación $|x - y| = |x| - |y|$ es V o F

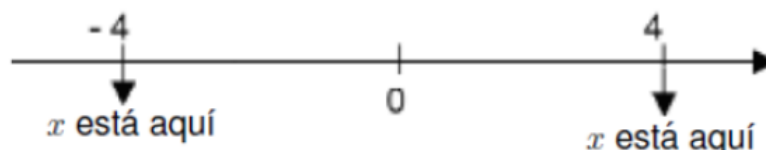
► La afirmación $|x \cdot y| = |x| |y|$ es V o F

1.5.6 Ecuaciones con valor absoluto

Un par de ejemplos de como resolver ecuaciones que contienen valor absoluto.

Ejemplo 1.5.4. Resolvemos la ecuación $|x| = 4$.

Recordemos que $|x|$ es la distancia desde x hasta 0 en la recta numérica. De este modo, $|x| = 4$, significa que x está a cuatro unidades de 0 en la recta numérica. En la figura siguiente se puede ver las dos respuestas probables:



$x = 4$ o bien $x = -4$, ya que esos dos números están a 4 unidades del 0.

Ejemplo 1.5.5. Resolvemos la ecuación $|3x - 5| = 8$

De acuerdo con la interpretación geométrica $|3x - 5|$ debe estar a 8 unidades del 0 sobre la recta numérica.



Por lo tanto, debemos resolver dos ecuaciones:

$$3x - 5 = 8 \quad \text{y} \quad 3x - 5 = -8$$

Al resolver se halla $x = \frac{13}{3}$ y $x = -1$.

**CUANDO DICES "NO PUEDO"
TU CEREBRO SE DETIENE.**

Desafío 8. Usa / para la división y separa por comas la respuesta

► Resolver $|3x + 2| = 5 - x$

► Resolver $|x + 2| = |x - 2|$

1.5.7 Propiedades del valor absoluto

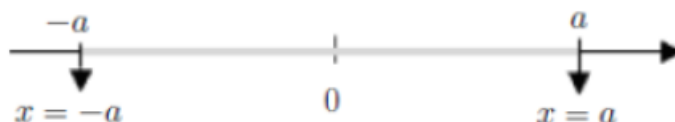
Tres propiedades que tienen aplicación en la resolución de desigualdades son:

Propiedad 1

Sean x, y números reales arbitrarios, y sea $a \in \mathbb{R}^+$

$$|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$$

La figura muestra, en la recta real, la solución de la desigualdad $|x| \leq a$.



Se observa que esta solución corresponde a todos los puntos del intervalo $[a, b]$, es decir, al conjunto

$$\{x \in \mathbb{R} / -a \leq x \leq a\}$$

Esto nos lleva a establecer la propiedad

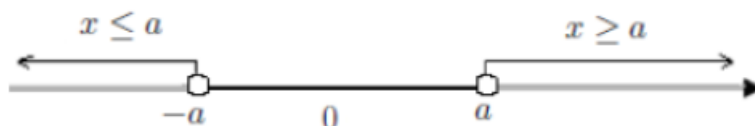
$$|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$$

Propiedad 2

Sean x, y números reales arbitrarios, y sea $a \in \mathbb{R}^+$

$$|x| \geq a \iff x \geq a \vee x \leq -a$$

La figura ilustra, en la recta real, la desigualdad



Se observa que esta solución corresponde a todos los puntos del intervalo $(-\infty, -a] \cup [a, \infty)$, es decir, al conjunto

$$\{x \in \mathbb{R} / x \leq -a \text{ o } x \geq a\}$$

Esto nos lleva a establecer la propiedad

$$|x| \geq a \iff x \geq a \vee x \leq -a$$

Propiedad 3

$$\bullet \sqrt{x^2} = |x| \implies |x|^2 = x^2 \implies |x^2| = x^2$$

1.5.8 Ecuaciones e Inecuaciones con valor absoluto

Ejemplo 1.5.6. Resolver $|2x - 3| = 1$

Existe más de una forma de resolver esta igualdad. Podemos usar la definición de valor absoluto o una propiedad. En el caso de la definición

$$|2x - 3| = \begin{cases} 2x - 3, & \text{si } 2x - 3 > 0 \\ 0, & \text{si } 2x - 3 = 0 \\ -(2x - 3), & \text{si } 2x - 3 < 0 \end{cases}$$

- Para el caso positivo, $|2x - 3| = 2x - 3 = 1 \implies x = 2$.
- En el caso negativo, $|2x - 3| = -(2x - 3) \implies -2x + 3 = 1 \implies x = 1$.

Por tanto, el conjunto solución es

$$S = \{1, 2\}$$

Otra alternativa de desarrollo es el uso de la propiedad $|a|^2 = a^2$. Se tiene

$$|2x - 3| = 1 \implies |2x - 3|^2 = 1 \implies (2x - 3)^2 = 1 \implies 4x^2 - 12x + 8 = 0$$

Al resolver la cuadrática se obtiene el mismo resultado.

Ejemplo 1.5.7. Resolver $|x - 3| = |2x - 5|$

El uso de la definición conlleva dos alternativas. El empleo de la propiedad es más directo.

$$|x - 3| = |2x - 5| \implies (x - 3)^2 = (2x - 5)^2 \implies x^2 - 6x + 9 = 4x^2 - 20x + 25$$

de donde, se obtiene la ecuación $3x^2 - 14x + 16 = 0$ que tiene raíces 2 y $\frac{8}{3}$. Luego, el conjunto solución es

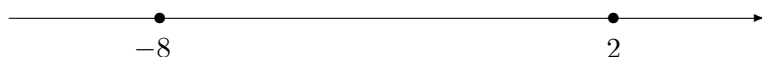
$$S = \{2, \frac{8}{3}\}$$

Ejemplo 1.5.8. Resolver $|x + 3| \leq 5$

Hacemos uso de la propiedad

$$|x + 3|^2 \leq 5^2 \implies (x + 3)^2 = 25 \implies x^2 + 6x - 16 = 0$$

con soluciones $x_1 = -8$ y $x_2 = 2$. De esto se pasa a la recta real.



Eliendo, en el intervalo $(-\infty, -8)$, $x = -9$ se tiene, en $|x + 3| \leq 5$, que

$$|-9 + 3| = 6 \not\leq 5$$

no hay solución en este intervalo. En $(-8, 2)$, con $x = 0$ se tiene

$$|0 + 3| = 3 \leq 5$$

de modo que hay solución. Finalmente, en $(2, \infty)$, con $x = 3$ resulta

$$|3 + 3| = 6 \not\leq 5$$

Se concluye que el conjunto solución es

$$S = [-8, 2]$$

Ejemplo 1.5.9. Resolver $\left| \frac{3-2x}{x+2} \right| < 4$

Pones atención al siguiente esquema de desarrollo: Buscamos los valores de x para los cuales se produce la **igualdad**, es decir, donde

$$\left| \frac{3-2x}{x+2} \right| = 4$$

Esto significa hallar los x que satisfacen:

$$\bullet \frac{3-2x}{x+2} = 4 \quad \text{y} \quad \bullet \frac{3-2x}{x+2} = -4$$

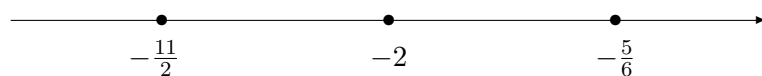
Para el primero de ellos

$$\frac{3-2x}{x+2} = 4 \Rightarrow 3-2x = 4(x+2) \Rightarrow 6x = -5 \Rightarrow x = -\frac{5}{6}$$

En el segundo caso,

$$\frac{3-2x}{x+2} = -4 \Rightarrow 3-2x = -4(x+2) \Rightarrow 2x = -11 \Rightarrow x = -\frac{11}{2}$$

Como sólo en esos puntos existe igualdad, en los restantes la expresión que estamos analizando es mayor o menor que 4, salvo en $x = -2$ donde no está definida. Ponemos estos tres puntos sobre la recta real y analizamos en cada subintervalo.



En $(-\infty, -\frac{11}{2})$ se elige $x = -6$ para tener que

$$\left| \frac{3-2(-6)}{-6+2} \right| = \frac{15}{4} < 4$$

En $(-\frac{11}{2}, -2)$ se elige $x = -4$ para tener que

$$\left| \frac{3-2(-4)}{-4+2} \right| = \frac{11}{2} \not< 4$$

En $(-2, -\frac{5}{6})$ se elige $x = -1$ para tener que

$$\left| \frac{3-2(-1)}{-1+2} \right| = \frac{5}{1} \not< 4$$

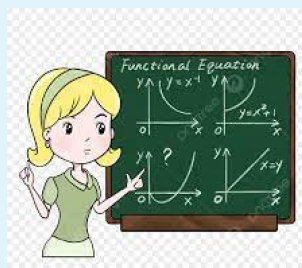
En $(-\frac{5}{6}, \infty)$ se elige $x = 0$ para tener que

$$\left| \frac{3-2(0)}{0+2} \right| = \frac{3}{2} < 4$$

En consecuencia, el conjunto solución es

$$S = (-\infty, -\frac{11}{2}) \cup (-\frac{5}{6}, \infty)$$

Trabajo con mi profe



EJERCICIO 26.

(a) Resolver la desigualdad $|x + 1| + |x - 1| < 3$

EJERCICIO 27.

(a) Resolver $\left| \frac{x}{x+2} \right| \leq 1$

(b) Resolver $\left| \frac{x}{6} + \frac{1}{2} \right| > \frac{5}{6}$

MATHS QUIZ

Begin Test

Pasas con 100%.

1. El conjunto solución de $|3x - 2| \leq 4$ es:

☐ $\left[-\frac{2}{3}, 2\right]$

☐ $\left[\frac{2}{3}, 2\right]$

☐ $\left(-\frac{2}{3}, 2\right]$

☐ $\left[-\frac{2}{3}, 2\right)$

2. La solución de la igualdad $|x + 8| = |2x - 3|$ es:

☐ $x > 8$

☐ $x > 0$

☐ $x = 11$ y $x = -\frac{5}{3}$

☐ $x = \frac{3}{2}$

3. La solución de la desigualdad $|x - 6| - |x + 3| < 1$ es:

☐ $x > -1$

☐ $x < \frac{3}{2}$

☐ $(-1, 1)$

☐ $x > 1$

4. La solución de la inecuación $|3x - 5| \leq 4$ es

☐ $\left[\frac{1}{3}, \infty\right)$

☐ $(-\infty, 3]$

☐ $\left[\frac{1}{3}, 3\right]$

☐ $\left[\frac{1}{3}, 2\right)$

5. La solución de la inecuación $\left|\frac{2}{3} - \frac{3}{4}x\right| < \frac{5}{2}$ es

☐ $\left[\frac{22}{9}, \frac{32}{9}\right)$

☐ $\left(-\frac{22}{9}, \frac{32}{9}\right)$

☐ $\left(\frac{22}{9}, \frac{38}{9}\right]$

☐ $\left(-\frac{22}{9}, \frac{38}{9}\right)$

6. La solución de la inecuación $\left|\frac{5}{3}x + \frac{3}{4}\right| > \frac{2}{5}$ es

☐ $\left[\frac{22}{9}, \frac{32}{9}\right)$

☐ $\left(\frac{22}{9}, \frac{32}{9}\right)$

☐ $\left(\frac{22}{9}, \frac{32}{9}\right]$

☐ $\left(-\frac{22}{9}, \frac{32}{9}\right)$

7. La solución de la desigualdad $|3 - 2x| > 9$ es

☐ $(-\infty, -3) \cup (6, \infty)$

☐ $(-\infty, 6) \cup (6, \infty)$

☐ $(-\infty, \infty)$

☐ $(-\infty, -3) \cup (3, \infty)$

8. La solución de la inecuación $\left|\frac{5}{3}x + \frac{3}{4}\right| > \frac{2}{5}$ es

☐ $\left[\frac{22}{9}, \frac{32}{9}\right)$

☐ $\left(\frac{22}{9}, \frac{32}{9}\right)$

☐ $\left(\frac{22}{9}, \frac{32}{9}\right]$

☐ $\left(-\frac{22}{9}, \frac{32}{9}\right)$

End Test

Points:

Correctas

1.6 Completitud de $\mathbb{R}$

Es muy posible que hayas escuchado el término “acotado”. Por ejemplo, la atención a público en los bancos está acotada, es entre las 9 a.m. y las 14 p.m. Igual sucede con el día, se cuenta desde las 0 horas hasta las 24 horas. En la sala de clases, el profesor tiene un cierto rango de tiempo para su clase, entre 0 y 45 minutos. Así como estos hay otros ejemplos tanto o más ilustrativos del término *acotado*. En Matemática la idea se mantiene. Te invito a descubrir como funciona esto.

Ejemplo 1.6.1. Consideremos el siguiente subconjunto de $\mathbb{R}$

$$A = \{x \in \mathbb{Z} / 4 < x^2 < 64\}$$

Lo primero a observar es que se trata solo de números enteros. Por extensión, este conjunto toma la forma

$$A = \{\pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6, \pm 7\}$$

Colocamos los elementos de menor a mayor

$$A = \{-7, -6, -5, -4, -3, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

Hemos encontrado 10 elementos, de los cuales -7 es el menor elemento del conjunto, y 7 es el mayor.

Cotas

► Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$. Se dice que $M \in \mathbb{R}$ es una **cota superior** de A (o que A está acotado superiormente) si para todo $x \in A$ es

$$x \leq M$$

► Se dice que $m \in \mathbb{R}$ es una cota inferior de A (o que A está acotado inferiormente) si para todo $x \in A$ se tiene que

$$m \leq x$$

► Si A tiene una cota superior y una cota inferior, se dice que A está **acotado**.

Máximo y Mínimo

► Si el supremo de S pertenece al conjunto S , entonces recibe el nombre de **máximo** de S y se anota $\max S$

► Si el ínfimo de S es elemento de S , entonces se llama **mínimo** de S y se anota $\min S$

Ejemplo 1.6.2. El intervalo $(-20, 40)$ está acotado. El intervalo $(50, \infty)$ no está acotado superiormente. El conjunto $(-\infty, 1) \cup \{6\}$ está acotado superiormente por el 6.

Ejemplo 1.6.3. $S = \{x \in \mathbb{R} / x = \frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N}_0\}$, entonces $\sup S = 1$, $\inf S = 0$, $\min S = 0$, $\max S$ no existe pues $1 \notin S$.

1.6.1 Axioma del supremo

La propiedad que caracteriza los subconjuntos acotados de $\mathbb{R}$ es el contenido del siguiente axioma.

Todo conjunto no vacío A de $\mathbb{R}$ que tenga cota superior (cota inferior), tiene un supremo (un ínfimo) en $\mathbb{R}$.

Observación.

- El axioma del supremo también se conoce como axioma de completitud o de continuidad porque garantiza que los números reales “llenan” la recta.
- Además permite distinguir entre $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$, porque $\mathbb{Q}$ no satisface el axioma del supremo. Por ejemplo el conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{Q}^+ / x^2 < 2\}$$

está acotado superiormente en $\mathbb{Q}$ pero no tiene supremo en $\mathbb{Q}$, puesto que $\sqrt{2}$ no es racional.

Begin Test

**MATHS
QUIZ**

Pasas con 100%.

1. Si $A = \left\{ \frac{n+1}{n+2} / n \in \mathbb{N} \right\}$, entonces es correcto que:

☐ $\sup(A) = 1, \max(A) = 1$

☐ $\sup(A) = 1, \min(A) = \frac{2}{3}$

☐ $\max(A) = 1, \min(A) = \frac{2}{3}$

☐ $\max(A) = 1, \inf(A) = \frac{2}{3}$

2. Si $A = \left\{ \frac{n}{n^2+1} / n \in \mathbb{N} \right\}$, entonces es correcto que:

☐ $\sup(A) = \frac{1}{2}, \min(A) = 1$

☐ $\inf(A) = 0, \max(A) = \frac{1}{2}$

☐ $\inf(A) = 0, \min(A) = 0$

☐ $\sup(A) = \frac{1}{2}, \inf(A) = 0$

3. Si $B = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 5x + 6 < 0\}$, entonces es correcto que:

☐ $\sup(B) = 3, \max(A) = 3$

☐ $\min(A) = 2, \inf(A) = 2$

☐ $\sup(A) = 3, \inf(A) = 2$

☐ $\max(A) = 3, \min(A) = 2$

End Test

Points:

Correctas

Begin Test

**MATHS
QUIZ**

Pasas con 100%.

1. Si $C = \{x \in \mathbb{R} / 28 + 3x - x^2 < 0\}$, entonces es correcto que:

☐ $\sup(B) = 7, \max(A) = 7$

☐ $\min(A) = -4, \inf(A) = -4$

☐ $\sup(A) = 7, \min(A) = -4$

☐ $\sup(A) = 7, \inf(A) = -4$

2. Si $D = \{x \in \mathbb{R} / |x - 2| < 5\}$, entonces es correcto:

☐ $\sup(D) = 7, \max(D) = 7$

☐ $\inf(D) = -3, \min(A) = -3$

☐ $\sup(D) = 7, \inf(D) = -3$

☐ $\sup(D) = 7, \min(D) = -3$

End Test

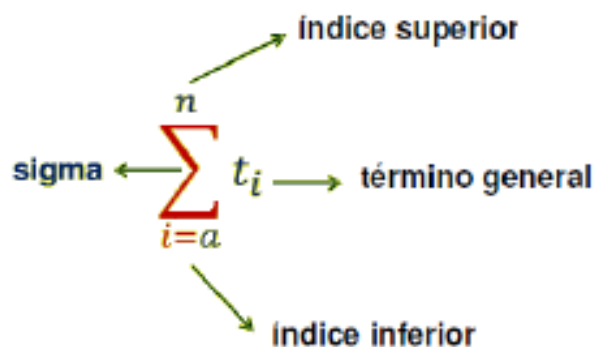
Points:

Correctas

1.7 Teorema del Binomio

El primer elemento necesario para trabajar esta idea es el de sumatoria

El sumatorio (o sumatoria) es un operador matemático, representado por la letra griega sigma mayúscula (Σ) que permite representar de manera abreviada sumas con muchos sumandos o incluso con infinitos sumandos.



Esta expresión se lee: “sumatoria de t sub- i , desde i igual a hasta i igual n .”

En general,

$$\sum_{i=1}^{i=n} x_i = \sum_{i=1}^n x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n$$

representa la suma de los primeros n valores de la variable x .

Ejemplo 1.7.1.

$$\sum_{i=1}^3 (i + 1) = (1 + 1) + (2 + 1) + (3 + 1) = 9$$

El índice de la sumatoria puede tomar cualquier conjunto de números enteros, es decir, no tiene porqué empezar necesariamente con el 1. La única condición que se tiene que cumplir es que el primer valor del índice, el que aparece abajo, sea menor o igual que el último valor del índice, el que aparece arriba. Es decir, en la suma

$$\sum_{i=k}^n x_i$$

el valor de k tiene que ser menor o igual que n para que la suma tenga sentido.

Propiedades

Dado que la sumatoria es simplemente una manera abreviada de representar una suma, entonces cumple todas las propiedades de la suma, a saber conmutativa, asociativa, distributiva, y también la llamada propiedad transitiva

$$\sum_{i=1}^h a_i + \sum_{i=h+1}^n a_i = \sum_{i=1}^n a_i$$

y la denominada

• Propiedad Telescópica

Esta propiedad de la sumatoria es útil en algunas ocasiones, pues facilita el cálculo de la misma. Para utilizarla, debe venir dentro del argumento de la sumatoria la diferencia de dos términos consecutivos de una misma sucesión.

Definición 1.7.2. Sea (x_n) , $n \in \mathbb{N}$ una sucesión arbitraria de números reales. Si $0 \leq p \leq n$, entonces

$$\sum_{i=p}^n (x_{i+1} - x_i) = x_{n+1} - x_p$$

O también

$$\sum_{i=p}^n (x_i - x_{i+1}) = x_p - x_{n+1}$$

Ejemplo 1.7.3. Hallar el valor de $\sum_{i=0}^7 (2^{i+1} - 2^i)$

Lo primero que se debe observar es que, en el paréntesis, existe una diferencia de dos términos consecutivos. Por tanto, se puede usar la propiedad telescópica

$$\sum_{i=0}^7 (2^{i+1} - 2^i) = 2^{7+1} - 2^0 = 2^8 - 1 = 255$$

Si no estás seguro, veamos la suma en forma tradicional

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^7 (2^{i+1} - 2^i) &= (\color{red}{2^1} - \color{red}{2^0}) + (\color{blue}{2^2} - \color{red}{2^1}) + (\color{brown}{2^3} - \color{blue}{2^2}) + (\color{red}{2^4} - \color{brown}{2^3}) + (\color{blue}{2^5} - \color{red}{2^4}) + \\ &\quad (\color{green}{2^6} - \color{blue}{2^5}) + (\color{blue}{2^7} - \color{green}{2^6}) + (\color{blue}{2^8} - \color{blue}{2^7}) = 2^8 - 2^0 = 255 \end{aligned}$$

Número de términos

Sea $0 \leq p \leq n$, el número términos de $\sum_{i=p}^n a_i$ es $\boxed{n - p + 1}$.

Ejemplo 1.7.4. Escribir usando sumatoria la suma de todos los números pares desde 1 hasta 100.

Los pares tienen la forma $2n$ con n natural. Por tanto;

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 100 = \sum_{k=1}^{50} 2k$$

Ejemplo 1.7.5. La suma de todos los números impares desde 1 hasta 100.

Los pares tienen la forma $2n - 1$ con n natural. Por tanto;

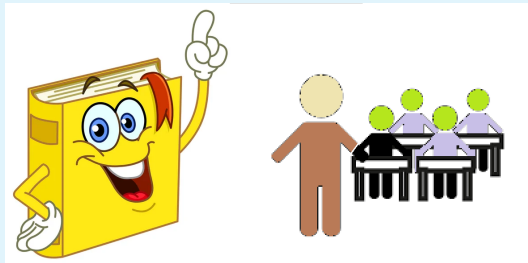
$$1 + 3 + 5 + \cdots + 99 = \sum_{k=1}^{50} (2k - 1)$$

Ejemplo 1.7.6. La suma de los 1000 primeros números naturales

En este caso se tiene

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + 1000 = \sum_{k=1}^{1000} k$$

Trabajo con mi profe



EJERCICIO 28. Calcular las siguientes sumas:

(a) $\sum_{i=1}^5 k(k+1) =$

(b) $\sum_{n=0}^3 2^n =$

(c) $\sum_{h=-2}^3 (6h-1) =$

(d) $\sum_{i=3}^7 i(3-2i) =$

(e) $\sum_{i=1}^{20} \frac{1}{i+2} - \frac{1}{i+1} =$

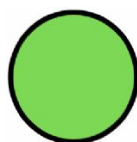
(f) $\sum_{i=p}^{n+1} \frac{1}{2i-1} - \frac{1}{2i+1} =$

1.7.1 Factorial de un número natural

Dado un conjunto de m objetos, se llama **permutación** del mismo a cada una de las distintas formas de ordenar sus elementos.

EJERCICIO 29.

- (a) Para el conjunto formado por los tres símbolos que muestra la figura, determinar de cuántas maneras los puedes ordenar



círculo



corazón



triángulo

- (b) Para el conjunto de 4 elementos: $B = \{1, 2, 3, 4\}$ ¿de cuántas formas se pueden ordenar sus elementos?

Factorial

Definición 1.7.7. Se llama *factorial de un número natural n* al producto de los n primeros números naturales. Se representa por $n!$.

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$$

Así por ejemplo,

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

Una propiedad interesante es que

$$(n+1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \cdot (n+1) = n! \cdot (n+1)$$

A partir de esta propiedad podemos obtener lo siguiente:

$$(n + 1)! = n! (n + 1)$$

$$(0 + 1)! = 0! (0 + 1)$$

$$1! = 0!$$

CUANDO DICES "NO PUEDO"
TU CEREBRO SE DETIENE.

Desafío 9. Hallar el valor de n que satisface la ecuación

Inicio Desafío

1. $\frac{(n+2)!}{n!} = \frac{3!}{3}$

Fin Desafío

correctas

Preguntas correctas: Puntos:

Puntos obtenidos:

1.7.2 El número combinatorio

El número **combinatorio**, es el resultado de hallar las combinaciones de n elementos, tomados de k en k ($n \geq k$). Dicho de otra forma, es el número de maneras en que se pueden agrupar los n elementos en grupos de k elementos, de tal manera que cada grupo se diferencie, por lo menos, en un elemento, sin interesar el orden de sus elementos.

Ejemplo 1.7.8. Hallar de cuántas maneras se pueden agrupar las letras $\{a, b, c, d, e, f\}$ tomadas de dos en dos.

Partiendo con la letra a , luego la b , y así hasta terminar con la f se tienen las agrupaciones:

- $ab, ac, ad, ae, af = 5$ maneras
- $bc, bd, be, bf = 4$ maneras
- $cd, ce, cf = 3$ maneras
- $de, df = 2$ maneras
- $ef = 1$ manera

Al sumar, se halla que son 15 las formas posibles

Los cálculos de este tipo se realizan utilizando lo siguiente:

Número combinatorio

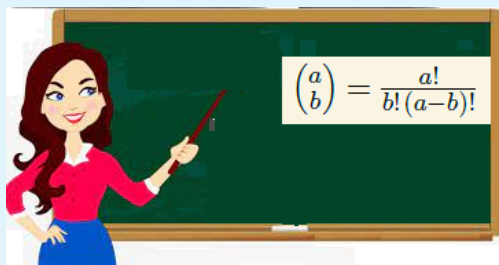
Sean $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n$. Se llama número combinatorio m sobre n a la expresión:

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n! (m-n)!}$$

En el caso del ejemplo se puede escribir

$$C_2^6 = \binom{6}{2} = \frac{6!}{2!4!} = \frac{4! \cdot 5 \cdot 6}{2 \cdot 4!} = 15$$

Trabajo con mi profe



EJERCICIO 30. Verificar los siguientes números combinatorios:

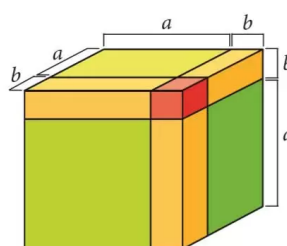
$$\begin{array}{llll} \text{(a)} \binom{10}{3} = 120 & \text{(b)} \binom{10}{7} = 120 & \text{(c)} \binom{100}{98} = 4950 & \text{(d)} \binom{100}{2} = 4950 \\ \text{(e)} \binom{m}{0} = 1 & \text{(f)} \binom{m}{1} = m & \text{(g)} \binom{m}{m} = 1 & \text{(h)} \binom{0}{0} = 1 \end{array}$$

1.7.3 El Binomio de Newton

Esta es una fórmula que se utiliza para desarrollar un binomio elevado a una potencia cualquiera de exponente natural. Es decir, se trata de una fórmula para desarrollar la expresión:

$$(a + b)^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

Cubo de Binomio



$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Si es de tu interés, en la página

<https://matematicasdesdecero.com/algebra/cubo-de-binomio-definicion-demostracion-formula-ej> hay una visualización geométrica del Cubo de un Binomio.

Te muestro el desarrollo de algunas potencias de $a + b$:

- $(a + b)^0 = 1$
- $(a + b)^1 = a + b$
- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a + b)^4 = (a + b)^3(a + b) = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
- $(a + b)^5 = (a + b)^4(a + b) = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

$$\bullet (a+b)^6 = (a+b)^5(a+b) = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

Se puede apreciar que

- El desarrollo de $(a+b)^n$ tiene $n+1$ términos.
- Las potencias de a empiezan con n en el primer término y van disminuyendo en cada término, hasta cero en el último.
- Las potencias de b empiezan con exponente cero en el primer término y van aumentando en uno con cada término, hasta n en el último.
- Para cada término la suma de los exponentes de a y b es n .
- El coeficiente del primer término es uno y el del segundo es n .
- Los términos que equidistan de los extremos tienen coeficientes iguales.

Para hallar potencias naturales de un binomio se usa la siguiente fórmula:

Teorema 1.7.9. *(del binomio de Newton)*

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n}a^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}a^{n-k}b^k\end{aligned}$$

1.7.4 Cálculo del término que ocupa el lugar k

En ciertas ocasiones se necesita hallar un término específico en la expansión de $(a+b)^n$. Para ello se puede usar una fórmula como la siguiente

$$T_k = \binom{n}{k-1}a^{n-k+1}b^{k-1}$$

Ejemplo 1.7.10. Hallar el quinto término de $(3x-4)^{12}$.

Si ponemos atención a la fórmula del T_k se observa que $n=12$. Dado que nos piden el quinto término, entonces

$$T_5 = \binom{12}{4}a^{12-5+1}b^{5-1} = \binom{12}{4}a^8b^4$$

El número combinatorio tiene el valor

$$\binom{12}{4} = \frac{12!}{8! \cdot 4!} = \frac{8! \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{8! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

Al simplificar

$$\binom{12}{4} = \frac{9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 9 \cdot 5 \cdot 11 = 495$$

En consecuencia

$$T_5 = 495(3x)^8 \cdot (-4)^4 = 495(3x)^8 \cdot 4^4$$

En general, los problemas que vamos a resolver son:

- Hallar el término central
- Hallar el término que no contiene la variable
- Hallar el coeficiente de cierto término.
- Hallar el término que ocupa el lugar k .

Ejemplo 1.7.11. En el desarrollo del binomio $\left(2\sqrt{x} + \frac{y^2}{3}\right)^8$ hallar:

1. el séptimo término
2. el término que contiene a x^3y^4

Para hallar el séptimo término, el T_k no falla

$$T_7 = \binom{8}{6} a^{8-7+1} b^{7-1} = \binom{8}{6} a^2 b^6$$

Veamos el cálculo del número combinatorio

$$\binom{8}{6} = \frac{8!}{3! \cdot 6!} = \frac{7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{28}{3}$$

En consecuencia

$$T_7 = \frac{28}{3} (2\sqrt{x})^2 \cdot \left(\frac{y^2}{3}\right)^6 = \frac{112}{3} x \cdot \left(\frac{y^2}{3}\right)^6$$

Para responder la segunda interrogante, de nuevo el T_k proporciona la respuesta. Sabemos que

$$T_k = \binom{n}{k-1} a^{n-k+1} b^{k-1}$$

reemplazando los valores del problema

$$T_k = \binom{8}{k-1} a^{8-k+1} b^{k-1} = \binom{8}{k-1} (2\sqrt{x})^{9-k} \cdot \left(\frac{y^2}{3}\right)^{k-1}$$

se debe hallar el valor de k para que se obtenga x^3y^4

Interesa entonces hallar las potencias de x y las potencias de y (no interesan las constantes).

- $(\sqrt{x})^{9-k} = x^3 \implies \frac{9-k}{2} = 3 \implies k = 3$
- $(y^2)^{k-1} = y^4 \implies 2k - 2 = 4 \implies k = 3$

Se concluye que el T_3 contiene x^3y^4 .

Begin Test



Pasas con 100%.

- El coeficiente de x^5 en el desarrollo de $(3x^2 + 2x)^4$ es:
☐ 62 ☐ 96 ☐ 97 ☐ 100
- El término independiente de x en el desarrollo de $(2x^2 - \frac{1}{x})^{12}$ es:
☐ 6 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 9
- El término que ocupa el lugar 103 en el desarrollo de $(x^3 - \sqrt[3]{y})^{104}$ es:
☐ $5336x^6y^{34}$ ☐ $5346x^6y^{34}$ ☐ $5356x^6y^{34}$ ☐ $5653x^6y^{34}$
- El valor de n para que el término T_{25} del desarrollo de $(\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{\sqrt{x}})^{5n+2}$ es:
☐ 12 ☐ 6 ☐ 5 ☐ 10
- El valor de la constante a para que el coeficiente de x^6 en el desarrollo de $(x + a)^9$ sea igual a 672 es:
☐ 1 ☐ 2 ☐ -1 ☐ -2
- El cuarto término del desarrollo de $(x + 2)^n$ es igual a $80x^m$. El valor de $m + n$ es:
☐ 5 ☐ 2 ☐ 7 ☐ 4

End Test

Puntos:

Correctas

Trabajo con mi profe

¡Venga, un último
esfuerzo!

¡Tú puedes!



EJERCICIO 31.

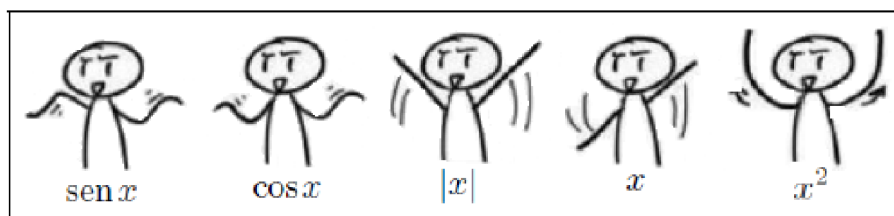
- Hallar el desarrollo de $(x + y)^4$
- El quinto término del desarrollo de $(x + 2y)^5$
- El término de grado 8 en el desarrollo de $(3x^2 + \frac{1}{x})^7$
- El término central de $(x^2 + a)^6$
- El término central en $(x^2 + a^3)^7$
- El término independiente de x en $(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3x})^9$

UNIVERSIDAD DE LA FRONTERA
Departamento de Matemática

CUADERNO INTERACTIVO
Profesores en acción con herramientas
e-léctricas

Las Funciones Reales

y su extensa prole



Matemática

cuaderno de autoaprendizaje

“La Matemática es una ciencia que no se aprende pasivamente, no basta con observar al docente en el aula y en sus diferentes espacios, sino por el contrario, es necesario comprometerse con la actividad matemática en el aula y fuera de ella”.



Este es un cuaderno de auto aprendizaje, presenta un resumen de los contenidos del programa de la asignatura, y establece una ruta para el desarrollo de estos contenidos.

2.1 Introducción

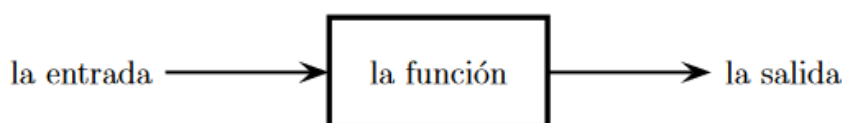
Las gráficas permiten representar la información de manera muy visual, y por eso aparecen frecuentemente en los medios informativos a nuestro alcance (prensa, carteles, libros, televisión). Pero hay que saber miraras e interpretar los datos que ofrecen. A lo largo de esta unidad vas a aprender a leer las gráficas y también cómo se crean a partir de textos, dibujos, conjuntos de datos o expresiones algebraicas. Y también vas a estudiar lo que realmente representan: funciones. Hay herramientas informáticas que ayudan en estas tareas mediante representaciones gráficas o facilitando las pesadas operaciones con grandes cantidades de datos. Veremos cómo aprovecharnos de ellas. La prensa, a veces, utiliza las gráficas para mostrar la información. Con una imagen consiguen expresar multitud de datos y es el lector quien debe interpretarlos. Por eso es importante saber cómo hacerlo.

En esta unidad deberías aprender a:

- Graficar funciones y determinar sus características.
- Reconocer el dominio y el recorrido de una función.
- Determinar si una función es continua o discontinua.
- Determinar el crecimiento o decrecimiento de una función.
- Reconocer intervalos de concavidad y convexidad de funciones.
- Hallar asíntotas de funciones.

2.2 La función como una máquina

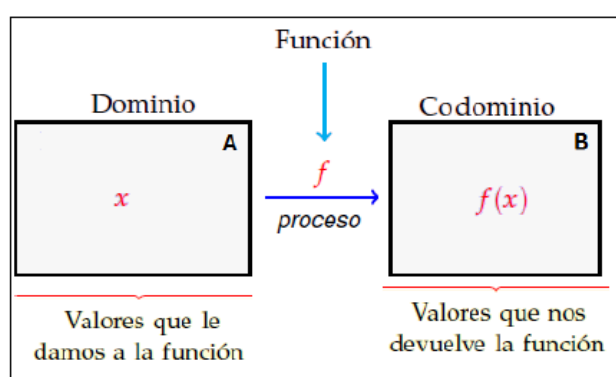
Una idea intuitiva de función es considerarla como una máquina al que se le ingresa un número (la entrada), y lo transforma en otro número (la salida). Así, podemos tener una visualización de la función como



Al imaginarnos que una función actúa como una máquina, la cual recibe unos valores y les aplica un **proceso** para obtener un valor de salida, tenemos que:

- Este proceso es la **regla** que define la función.
- Al conjunto de donde la máquina toma inicialmente los valores le llamamos el **dominio** de la función.
- Al conjunto donde la máquina deposita los valores procesados le llamamos el **recorrido** o **rango** de la función.

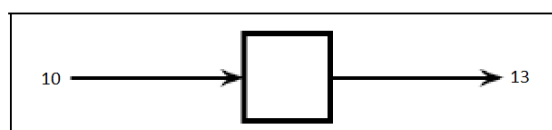
En matemática estos conjuntos, de entrada y salida, suelen ser conjuntos de números. Esto permite la representación que muestra la figura siguiente.



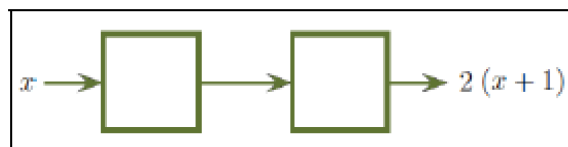
- Una entrada es la cantidad independiente que no se repite.
- La salida es la cantidad dependiente. El valor de salida depende del valor de entrada.
- Para cada entrada, hay una salida **única**. No es posible que al darle un valor la función nos devuelva dos o más valores, pero sí es posible que nosotros le demos un valor y la función no nos pueda devolver valor alguno. En este último caso decimos que el valor que le dimos a la función no pertenece al dominio de la función, precisamente porque no lo puede transformar.

Notación: al número que “entra” a la máquina usualmente lo denotamos con la letra x . Al número que “sale” de la máquina lo denotamos con el símbolo $f(x)$.

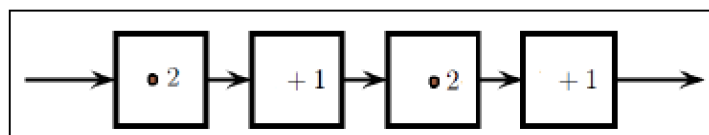
Actividad 10. En la figura siguiente, indica que acción realiza la máquina.



Actividad 11. La figura presenta dos máquinas, halla las acciones que hace cada máquina para obtener el resultado indicado



Desafío 10. En la siguiente cadena de máquinas, cada una hace la acción que se indica:



- ▶ ¿Cuál número sale si la entrada es de 18?

Ans Clear

- ▶ ¿Cuál número hay que dar de entrada para que salga el número 11?

Ans Clear

- ▶ ¿Cuál término sale si la entrada es x ? (usa * para multiplicación)

Ans Clear

- ▶ ¿Cuál término hay que dar de entrada para tener de salida y ? (usa / para división)

Ans Clear

Actividad 12. Diseña una cadena de máquinas que produzca el término $2 \cdot \frac{2 \cdot x}{3} + 1$ a partir de la entrada x . ¿cuántas máquinas necesitaste?

La función como correspondencia

En muchas situaciones encontramos que dos o más objetos o cantidades están relacionados por una correspondencia de dependencia, como por ejemplo:

-  La reacción de un organismo frente a un fármaco depende de la dosis del medicamento,
-  El crecimiento de una población depende del número de individuos y de depredadores,
-  La temperatura de ebullición del agua depende de la altura del lugar,
-  La distancia recorrida por un objeto al caer libremente depende del tiempo que transcurre en cada instante.

Hechos como estos conduce al concepto matemático de función.

Dados los conjuntos A y B , si existe una regla que permita unir elementos de ambos conjuntos, se establece una **correspondencia** entre A y B . Para denotar una correspondencia utilizamos las letras $f, g, h, \dots$

Definición 2.2.1. Una función es una correspondencia entre dos conjuntos A y B no vacíos, en la cual para todo elemento que pertenece al conjunto A existe **un solo** elemento, y solo uno, que pertenece al conjunto B al cual se le asocia o corresponde.

Así, una función es una terna constituida por:

1. Un conjunto A llamado **dominio** de la función
2. Un conjunto B llamado **codominio** de la función .
3. Una regla de correspondencia que posee dos características:
 - (a) A todo elemento del dominio se le debe asociar un **único** elemento en el codominio.
 - (b) Ningún elemento del dominio puede estar sin un elemento asociado en el codominio.

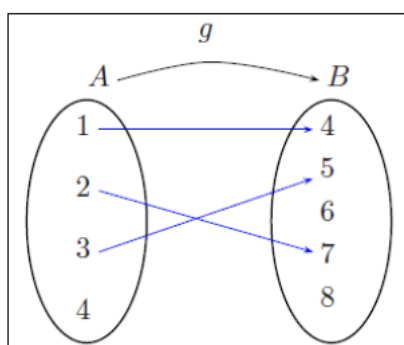
Para simbolizar que se ha establecido una función f , de un conjunto A en un conjunto B , se usa la siguiente notación:

$$f : A \rightarrow B$$

$$x \mapsto y = f(x)$$

Desafío 11.

Inicio Desafío El diagrama sagital dado define la correspondencia g de A en B como $g(1) = 4$, $g(2) = 7$ y $g(3) = 5$.



1. ► Esta correspondencia define una función.

☐ True
 ☐ False
2. ► Esta correspondencia no es función, pues 8 no tiene pre-imágen.

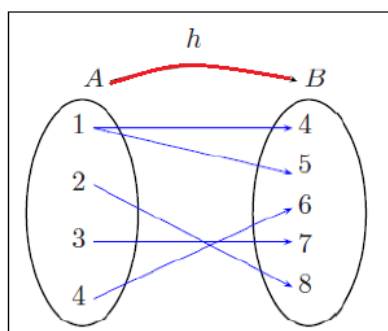
☐ True
 ☐ False
3. ► Esta correspondencia no es función, pues el 4 no tiene imagen en B .

☐ True
 ☐ False

Fin Desafío Points: **Correctas**

Desafío 12.

Inicio Desafío El diagrama sagital dado define la correspondencia h de A en B como $h(1) = 5$, $h(2) = 8$, $h(3) = 7$, $h(4) = 6$ y $h(1) = 4$.



1. ▶ Esta correspondencia no define una función.
☐ True ☐ False
2. ▶ Esta correspondencia no es función, pues A tiene 4 elementos y B 5.
☐ True ☐ False
3. ▶ Esta correspondencia no es función, pues el 1 tiene doble imagen en B .
☐ True ☐ False

Fin Desafío

Points:

Correctas

2.2.1 Funciones Reales

Definición 2.2.2. Sean A y B subconjuntos no vacíos de números reales. Una función de $A \subset \mathbb{R}$ en $B \subset \mathbb{R}$ es una correspondencia que asocia a cada elemento de A un **único** elemento en B , y se denomina **función real** de variable real.

Notación:

$$f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$$

$$x \mapsto y = f(x)$$

Características de las funciones reales:

- Se visualizan sobre el plano cartesiano (poseen geometría propia).
- Se representan a través de ecuaciones matemáticas (poseen algoritmos propios).
- Se pueden deducir y/o expresar a través de tablas de valores (se pueden tabular).
- Se pueden describir verbalmente (son adaptables al lenguaje corriente).

El hábitat natural de las funciones es el plano cartesiano.

2.2.2 El Plano cartesiano

El plano cartesiano tiene dos ejes perpendiculares (eje x o eje de abscisas y eje y o eje de ordenadas), los cuales en donde se cortan forman un ángulo de 90° (por ser perpendiculares). A su punto de intersección se le conoce como **origen** del plano. Los dos ejes dividen al plano en cuatro regiones llamadas **cuadrantes**.

En este plano cartesiano, cada punto se representa por medio de una pareja de números (x, y) , llamada pareja ordenada debido a que por ejemplo $(4, 2) \neq (2, 4)$. Así, cada punto está determinado por sus coordenadas (x, y) , en donde x es llamada la abscisa e y la ordenada del punto.

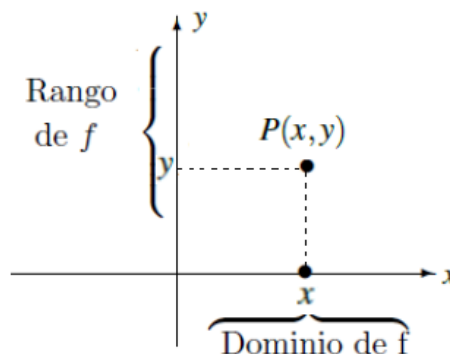
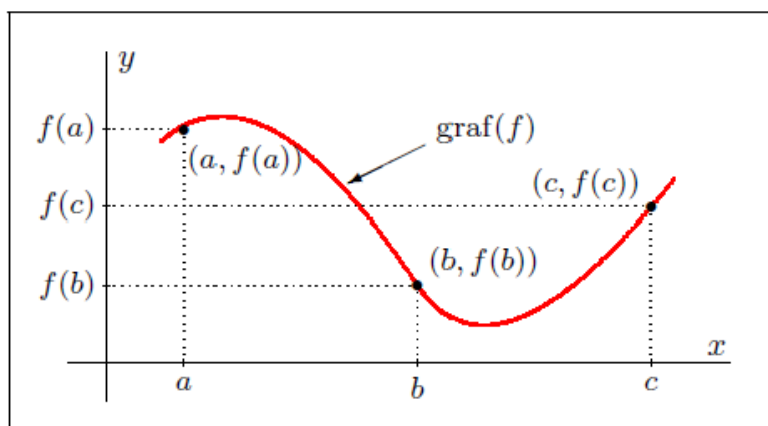


Gráfico de la función

Definición 2.2.3. Sea $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función. El **gráfico** o **gráfica** de f es el conjunto de todos los pares ordenados $(x, f(x))$ tal que $x \in \text{dom}(f)$. A su representación en el plano se le denomina **curva** o **lugar geométrico**. Escribimos

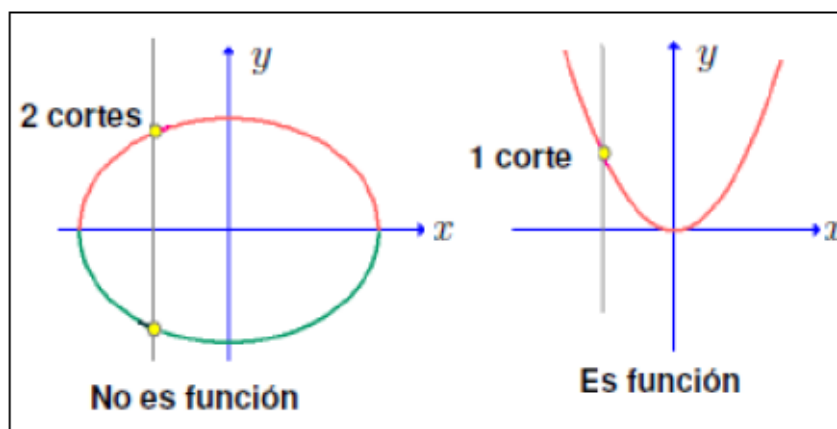
$$\text{graf}(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x \in A\}$$



Al representar una función f en el sistema cartesiano, los pares ordenados $(x, f(x))$ se representan como puntos en el plano, de manera que podemos concluir que la gráfica de una función es un subconjunto del plano cartesiano. No toda curva en un plano cartesiano representa una función por lo tanto, tiene sentido preguntarse ¿Cuándo una curva en un plano cartesiano representa una función?

La prueba de la línea vertical

Para quien está recién haciendo sus primeros pasos en el estudio de las funciones, no es sencillo, a partir de una fórmula, descubrir si se trata de una función o no, por ejemplo, de las expresiones: $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 - y = 0$, solamente la segunda de ellas es una función ¿Cómo saberlo? La gráfica en el plano cartesiano nos puede ayudar.



En un gráfico de función, ninguna línea vertical la intersecta más de una vez. Si alguna cruzara más de una vez no sería una función.

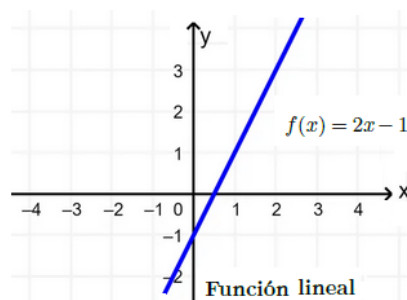
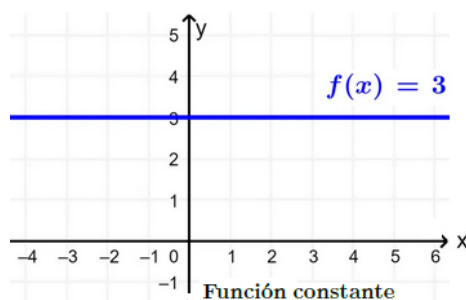
En la práctica no es posible representar todos los pares $(x, f(x))$, pues en general son infinitos. Lo que se hace es representar unos cuantos puntos significativos y trazar el resto de la gráfica según las propiedades de la función.

2.3 Clasificación de función según la variable x

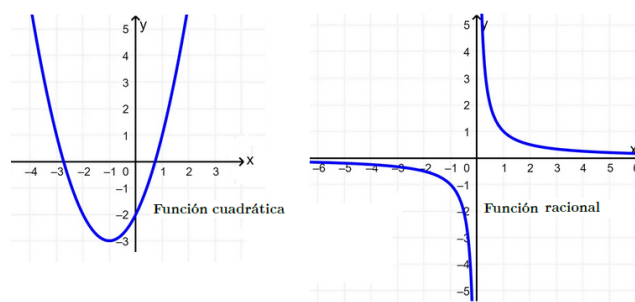
De acuerdo con la variable independiente x , tenemos dos tipos de funciones: **algebraicas** y **trascendentes**.

1. **Funciones algebraicas:** Son ecuaciones polinómicas, en las cuales se pueden efectuar operaciones con la variable x , como suma, resta, multiplicación, división, potenciación y la radicación. Entre estas funciones están:

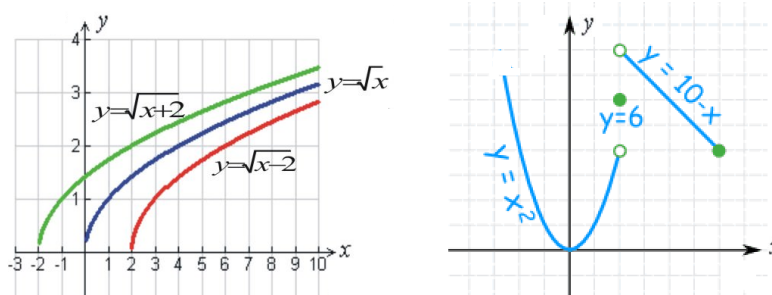
- **Funciones constantes:** $f(x) = k$, donde k es un número real



- **Funciones lineales:** $y = mx + n$. Son rectas, en donde m es la pendiente.
- **Función cuadrática:** Es un polinomio de segundo grado, su representación es una parábola.
- **Funciones racionales:** Son cocientes de polinomios.



- **Funciones radicales:** Son la raíz de una expresión polinómica.
- **Funciones a trozos:** Son funciones definidas por una función distinta en cada intervalo (o trozo) que se considere.



Funciones trascendentes

Tenemos tres de estas funciones de particular importancia

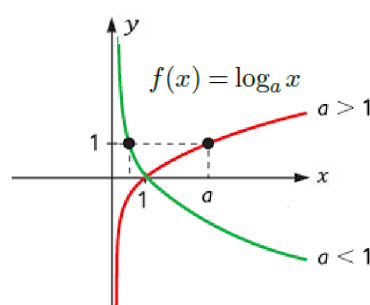
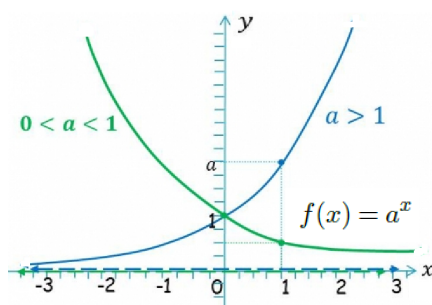
1. **Función exponencial:** Se caracteriza porque la variable está en el exponente.

- **Función exponencial de base a**

$$f(x) = a^x \text{ para } a > 0, a \neq 1$$

- **Función exponencial de base e**

$$f(x) = e^x, \text{ con } e \text{ el número de Euler}$$



2. **Función logarítmica:** Es la inversa de la función exponencial.

- La función logaritmo de base a

$$f(x) = \log_a x, \text{ con } a > 0, a \neq 1$$

- La función logaritmo de base e (logaritmo natural)

$$f(x) = \ln x, \text{ con } a > 0, a \neq 1$$

2.3.1 Construyendo la gráfica

Si nos entregan los datos de una función por algún medio y se quiere trazar su gráfica, existen algunos elementos que es necesario tener en cuenta.

Dominio de la función

- **Dominio:** El dominio de una función $y = f(x)$ es el conjunto de todos los valores para los cuales la función está definida. Se anota $dom(f)$

Recorrido o rango de la función

- **Rango o recorrido:** Es el conjunto de todos los valores que f toma. Se anota

$$rec(f) = rang(f) = \{y \in \mathbb{R} / \text{ existe } x \in A \text{ con } y = f(x)\}$$

Observación. Una forma para decidir si un punto y está o no en $rec(f)$ es tratar de resolver la ecuación $y = f(x)$ en términos de la variable x .

Puntos de cortes con los ejes

Siguiendo con el proceso de graficar, una vez que se ha determinado el dominio y el rango de una función, corresponde hallar aquellos puntos en donde la gráfica de la función pudiera cortar a los ejes coordenados. Los puntos de corte con los ejes se hallan como sigue:

- Con $y = 0$ se hallan los puntos de corte con el eje x .
- Con $x = 0$ se hallan los puntos de corte con el eje y .

2.3.2 Gráfica de la función polinomial

En esta clase de funciones se incluyen; la función constante, la lineal, la cuadrática, la cúbica y todas las demás funciones potenciales. La función polinomial es de la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

en donde los a_n son números reales, y se denominan coeficientes de la función polinomial.

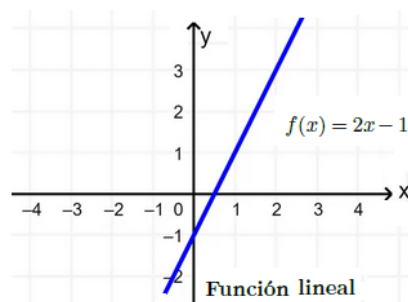
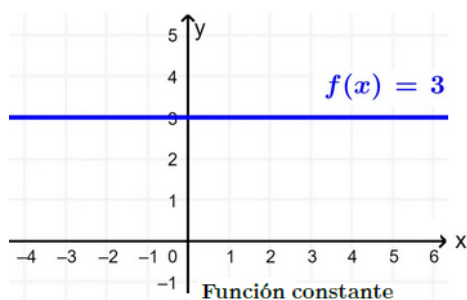
El **dominio** de una función polinomial es $\mathbb{R}$.

Para conocer el recorrido debemos ver si el exponente n es par o impar y que signo tiene el coeficiente de ese n .

1. Si $a_n > 0$ y n es par, entonces el recorrido es el intervalo $[m, \infty)$, siendo m el mínimo valor de la función. Por ejemplo, con $a_n = 1$, $n = 2$ se obtiene la parábola $y = x^2$. En este caso $m = 0$.
2. Si $a_n < 0$ y n es par, entonces el recorrido es el intervalo $(-\infty, M]$, siendo M el máximo valor de la función. Por ejemplo, con $a_n = -1$, $n = 2$ se tiene la parábola $y = -x^2$. El valor de $M = 0$.
3. Si n es impar, entonces el recorrido es el intervalo $(-\infty, \infty)$. En este caso la función no tiene valor mínimo ni máximo. Por ejemplo, con $n = 3$ se tiene la cúbica $y = x^3$.

Veamos esto a continuación:

2.3.3 Función constante



Su gráfica es una recta paralela al eje x , su dominio son los números reales, y su recorrido $\text{rec}(f) = \{y = 3\}$. Graficarla es un proceso sencillo,

2.3.4 La función lineal

Su dominio son todos los reales, y su recorrido también. Para graficarla se consideran, en ella, dos puntos y se traza la curva.



Existen diversas situaciones en las que la relación entre dos magnitudes se puede expresar a través de una función lineal. Veamos un par de ejemplos.

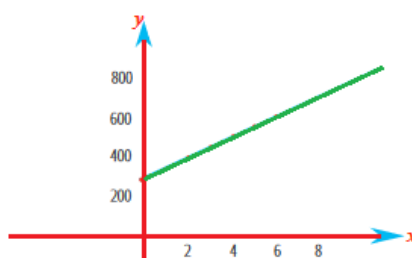
Actividad 13. Un taxista cobra \$280 por bajada de bandera y \$60 por cada tramo de 200 metros recorridos. Hallar la función que determina el costo de un viaje, si x es el número de tramos recorridos.

Una tabla te puede ayudar

$x = \text{tramos}$	0	1	2	3	4	5	6
$f(x) = \text{costo}$	280	340	400	460	520	580	640

El valor de bajada de bandera es un costo fijo, al que debe sumarse el valor por cada tramo. Se tiene

$$f(x) = 280 + 60x$$



Actividad 14. Una fábrica de pantalones tiene una demanda semanal de 500 pantalones cuando el precio es de \$60, y de 300 pantalones cuando el precio es de \$80. Determine la ecuación de la demanda de pantalones, suponiendo que es una función lineal.

Al tener la información de que la fórmula es una función lineal, podemos hallar la pendiente de esta recta considerando los pares de puntos $(60, 500)$ y $(80, 300)$. Se tiene

$$m = \frac{300 - 500}{80 - 60} = \frac{-200}{20} = -10$$

Como la ecuación de la recta tiene la forma

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

al reemplazar el valor de m y considerar $(x_1, y_1) = (60, 500)$ se obtiene

$$y - 500 = -10(x - 60)$$

que al reducir se transforma en

$$y = -10x + 1100$$

Desafío 13.

Inicio Desafío Por alquilar un auto cobran una cuota fija de \$20.000 pesos y adicionalmente \$3.000 pesos por kilómetro recorrido. (considera que y es el valor a pagar, y que x son los kilómetros recorridos)



1. ▶ La ecuación que representa esta función es:

☐ $y = 23.000x$

☐ $y = 20.000 + 3.000x$

☐ $y = 20.000x + 3.000$

☐ $y = 17.000x$

2. ▶ ¿cuánto dinero hay que pagar para hacer un recorrido de 125 Km?

☐ 395.000

☐ 300.000

☐ 295.000

☐ 195.000

3. ▶ si se pagó \$65.000 pesos ¿cuántos kilómetros se recorrieron?.

☐ 50 km

☐ 5 km

☐ 51 km

☐ 15 km

Fin Desafío

		Correctas	
ScoreField	PointsField		

2.3.5 La función cuadrática

Por ser un polinomio, su dominio es el conjunto de los números reales. Con el fin de simplificar notaciones, la función cuadrática se escribe en la forma

$$y = ax^2 + bx + c$$

Para graficarla lo primero es ver el signo del coeficiente a . Si este es positivo, la parábola se abre hacia arriba, y si es negativo, hacia abajo. Luego, una buena idea es hallar el vértice. La coordenada x del vértice es

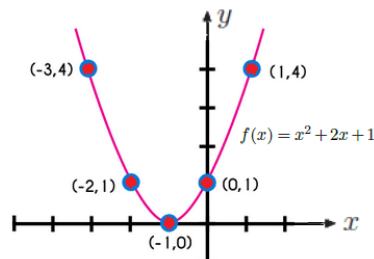
$$x = -\frac{b}{2a}$$

para finalizar se consideran dos valores de x simétricos, y se traza la curva.

Ejemplo 2.3.1. Trazar la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 2x + 1$

Ya se ha dicho que el dominio es $\mathbb{R}$. El coeficiente $a = 1$, de modo que la parábola se abre hacia arriba. La coordenada x del vértice es

$$x = -\frac{2}{2} = -1$$



la imagen de este valor es $f(-1) = 0$, siendo este el valor m mínimo que toma la parábola. Así, el vértice es el punto $(-1, 0)$. El rango es $[0, \infty)$. Un par de valores simétricos a $x = -1$ son $x = 0$ y $x = -2$.

Actividad 15. Una pelota es lanzada hacia arriba desde un edificio de 40 mts de altura con una velocidad de 80 mts por segundo. La altura de la pelota sobre el suelo puede modelarse con la ecuación

$$H(t) = -16t^2 + 80t + 40$$

- ¿Cuándo alcanza la pelota la altura máxima?
- ¿Cuál es la altura máxima de la pelota?
- ¿Cuándo llega la pelota

La ecuación que modela la situación es una parábola que se abre hacia abajo. Por tanto, el vértice (h, k) nos proporciona la información.

$$h = -\frac{b}{2a} \implies h = -\frac{80}{-32} = 2,5$$

La pelota alcanza una altura máxima a los 2,5 segundos.

Para hallar la altura máxima, la coordenada k del vértice entrega la respuesta

$$h = 2,5 \implies k = -16(2,5)^2 + 80 \cdot (2,5) + 40 = 140$$

La pelota alcanza una altura máxima de 140 mts.

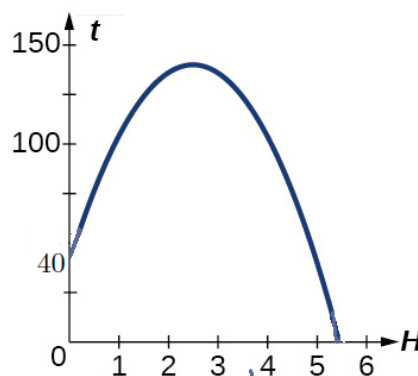
Para calcular el momento en que la pelota toca el suelo, hay que determinar cuándo la altura es cero

$$H(t) = 0 \implies -16t^2 + 80t + 40 = 0$$

Al resolver se encuentra que

$$t = 5,4$$

La figura ilustra el problema



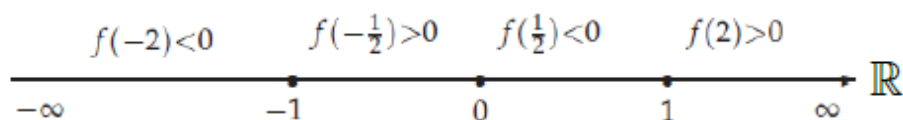
2.3.6 Gráfica de una cúbica

Ejemplo 2.3.2. Graficar la función $f(x) = x^3 - x$.

Es claro que el dominio es $\mathbb{R}$. En esta función polinomial, $a_n = 1$, $n = 3$. Luego, el recorrido de esta función es el intervalo $(-\infty, \infty)$. Para hallar las intersecciones con el eje x , hacemos $y = 0$ y resolvemos para x .

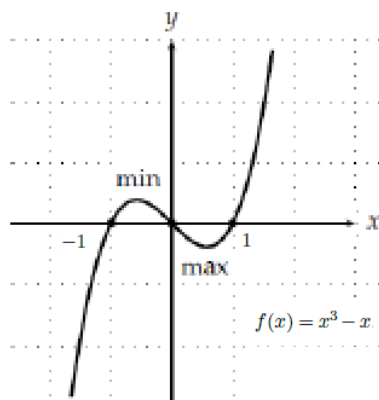
$$x^3 - x = 0 \implies x(x-1)(x+1) = 0 \implies x = 0, x = 1, x = -1$$

Ahora vamos a analizar el signo de la función en cada uno de estos cuatro intervalos para saber si la función tiene valores positivos o negativos.

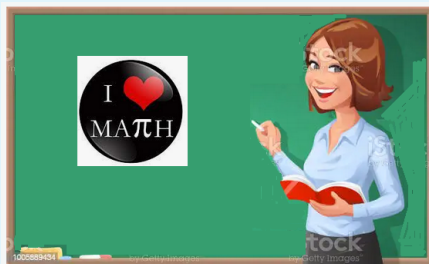


- La curva está bajo el eje x en el intervalo $(-\infty, -1)$.
- La curva está sobre el eje x para $(-1, 0)$.
- La curva está bajo el eje x para $(0, 1)$ y
- La curva está sobre el eje x para $(1, \infty)$.

De acuerdo a lo mostrado en los intervalos, en algún punto del intervalo $(-1, 0)$ existe un punto donde la función alcanza un valor máximo, ya que la curva debe bajar para cortar en $(0, 0)$. De igual forma, en el intervalo $(0, 1)$ existe un punto para el que la función alcanza un mínimo, ya que debe subir para cortar al eje x en el punto $(1, 0)$. Su gráfica es como se ve en la figura.



Trabajo con mi profe

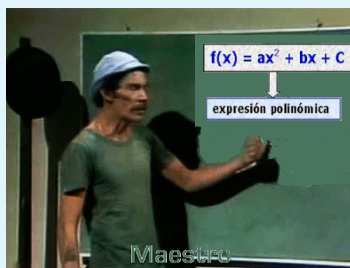


EJERCICIO 32. Se ha realizado un estudio de mercado que revela que la función de demanda de uno de los productos es

$$q = f(p) = p^2 - 70p + 1225$$

- Si al producto se le pone precio de \$100, hallar la demanda.
- Si la demanda es de 1225 productos ¿Cuál es el precio?
- Graficar la función de demanda

Trabajo con mi profe



EJERCICIO 33. Una epidemia se empieza a propagar por “Chilito”. El Servicio de Salud de la Araucanía, dirigido ¿por quién crees tú? Por supuesto, ya era hora que un tipo con lógica y conocimientos matemáticos relevantes se hiciera cargo de tan importante actividad. El Director del servicio y su equipo estiman que el número de personas que la contraerán es una función del tiempo transcurrido desde que se descubrió la epidemia, y establecen la siguiente ecuación

$$n = f(t) = 300t^3 - 20t^2$$

en donde n es el número de personas enfermas y $0 < t \leq 30$, medidos en días contados a partir de la detección de la epidemia.

- ¿Cuántas personas contraerán la epidemia al cabo de 10 días?
- ¿Cuántas personas la contraerán al cabo de 15 días?
- Graficar la función.

2.3.7 Funciones racionales

Son un cociente de polinomios

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}$$

En esta clase de funciones es interesante saber sobre la existencia o no de ciertas rectas llamadas asíntotas, que como veremos, dependen de los grados del numerador y denominador:

- Si $q(a) = 0$, pero $p(a) \neq 0$, entonces $x = a$ es una **asíntota vertical**.
- Si $n < m$, entonces la recta $y = 0$ es **asíntota horizontal**.
- Si $n > m$, entonces **no hay** asíntota horizontal.
- Si $n > m$ en solo un grado, entonces la función lineal que queda al dividir $p(x)$ por $q(x)$ es una **asíntota oblicua**.
- Si $n = m$, entonces la recta $y = \frac{a_n}{b_n}$ es una **asíntota horizontal**.

Ejemplo 2.3.3. Hacemos la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$

Es claro que el dominio son todos los reales menos el cero, esto es

$$\text{dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$$

Para el recorrido se despeja x de la función dada

$$y = \frac{1}{x} \implies x = \frac{1}{y}$$

se halla que $y \neq 0$. Con lo cual se tiene que

$$\text{rec}(f) = \{y \in \mathbb{R} / y \neq 0\} = \mathbb{R} - \{0\}$$

Para hacer su gráfica haremos los siguientes pasos:

- Tomar un valor a izquierda y otro a derecha de $x = 0$. Por ejemplo,

$$x = -1 \implies y = -1 \implies (-1, -1) \text{ punto en la curva}$$

$$x = 1 \implies y = 1 \implies (1, 1) \text{ punto en la curva}$$

- Tomar ahora un valor más cercano

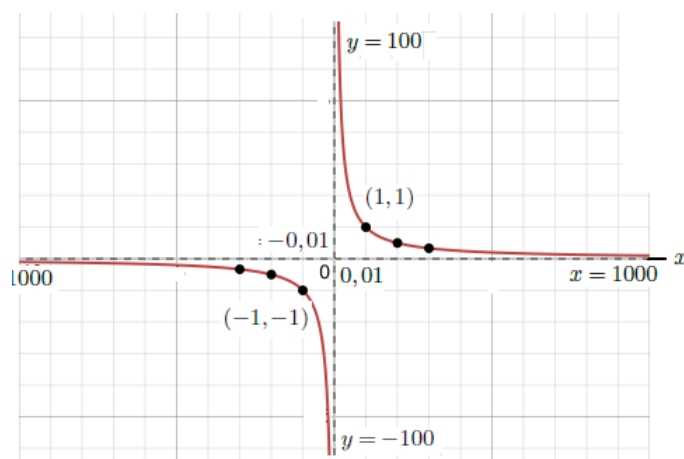
$$x = -0,01 \implies y = -100 \implies (-0,01, -100) \text{ punto en la curva}$$

$$x = 0,01 \implies y = 100 \implies (0,01, 100) \text{ punto en la curva}$$

- Finalmente, un par de valor **lejanos**.

$$x = -1000 \implies y = -0,001 \implies (-1000, -0,001) \text{ punto en la curva}$$

$$x = 1000 \implies y = 0,001 \implies (1000, 0,001) \text{ punto en la curva}$$



Respecto de la existencia de asíntotas se observa que

- La recta $x = 0$ es asíntota vertical (el numerador no se anula).
- La recta $y = 0$ es asíntota horizontal, el grado del numerador es cero, mientras el del denominador es 1.

Ejemplo 2.3.4. Determinar dominio y recorrido de la función $y = \frac{x}{x-3}$.

Como se trata de una fracción, el denominador debe ser distinto de cero; por tanto,

$$\text{dom}(f) = \mathbb{R} - \{3\}$$

Respecto del rango, usaremos la técnica de despejar la variable x

$$y = \frac{x}{x-3} \implies (x-3)y = x \implies xy - 3y = x$$

Al factorizar y despejar la x se tiene

$$x = \frac{3y}{y-1}$$

Se observa que este x se queda sin imagen si $y = 1$, Por tanto,

$$\text{rec}(f) = \{y \in \mathbb{R} / y \neq 1\} = \mathbb{R} - \{1\}$$

Para las asíntotas, se observa que

- La recta $x = 3$ es asíntota vertical.
- El grado del numerador y denominador son iguales a 1. Al hacer la división

$$\frac{x}{x-3} = 1 + \frac{3}{x-3}$$

se halla que la recta $y = 1$ es asíntota horizontal

- Al haber asíntota horizontal no hay oblícua

Cuando existen asíntotas, lo primero es poner en el sistema cartesiano las asíntotas, ellas nos guían para hacer la gráfica (sin olvidar los puntos de corte). El único punto de corte es el $(0,0)$. Ahora Se elige a derecha e izquierda del $x = 3$ (asíntota vertical) un valor sencillo de calcular, por ejemplo $x = 4$ y $x = 2$. Al evaluar

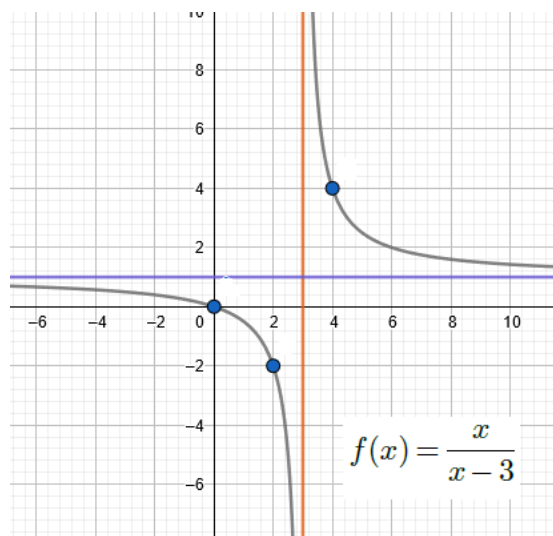


$$f(x) = \frac{x}{x-3} \implies f(2) = -2, \quad f(4) = 4$$

Veamos el comportamiento cerca de la asíntota:

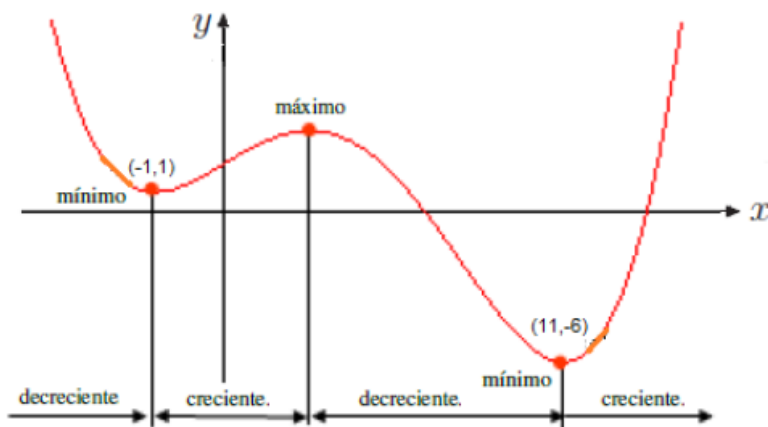
- si te acercas a ella por derecha con 3,001, la función crece hacia el $+\infty$.
- si te acercas a ella por izquierda con 2,99, la función crece hacia el $-\infty$.
- si te alejas tomando valores grande de x , por ejemplo, $x = 100003$, entonces la curva se acerca a la recta $y = 1$ por encima de ella.
- si te alejas tomando valores grande, pero negativos de x , por ejemplo, $x = -100007$, entonces la curva se acerca a $y = 1$ por debajo de ella.

Con los datos encontrados, la gráfica de esta función es la siguiente



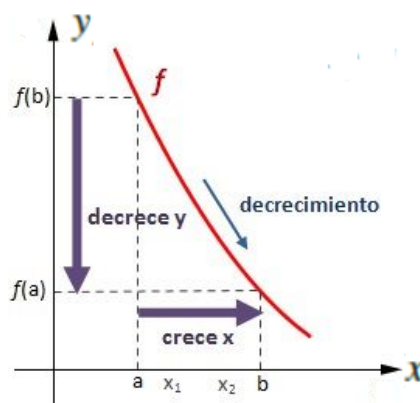
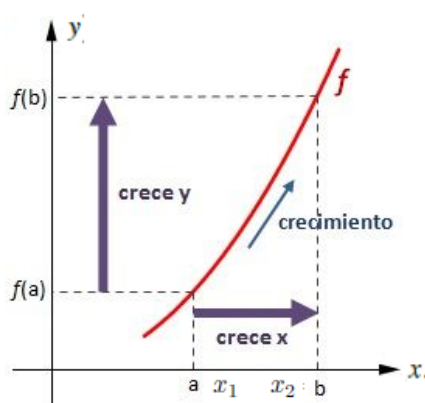
2.3.8 Características de una función a partir de su gráfica

Antes de seguir adelante con las gráficas de funciones, vamos a conocer algunas propiedades que se pueden inferir a partir de la gráfica de la función. Para ello te muestro la gráfica de una función polinomial

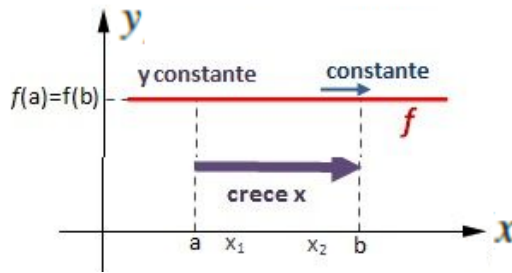


Intervalos de crecimiento y decrecimiento

- Una función es **creciente** en el intervalo $[a, b]$ si para cualquier par de puntos $x_1 < x_2$ del intervalo se cumple que $f(x_1) < f(x_2)$. Esto es, f es una función creciente en $[a, b]$ si al aumentar la variable independiente x , aumenta la variable dependiente y .



- Una función es **decreciente** en el intervalo $[a, b]$ si para cualquier par de puntos $x_1 < x_2$ del intervalo se cumple que $f(x_1) > f(x_2)$. Esto es, f es una función decreciente en $[a, b]$ si al aumentar la variable independiente x , disminuye la variable dependiente y .



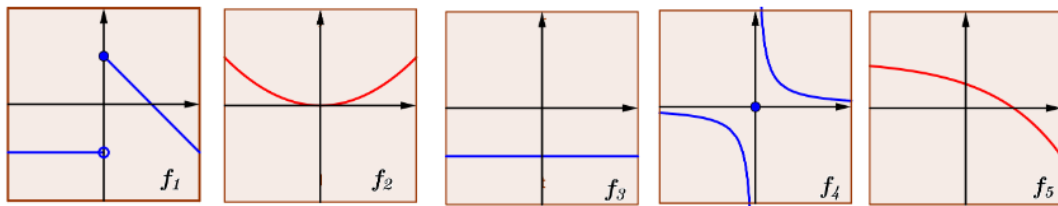
- La función f es constante en $[a, b]$ si y solo si

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) = f(x_2), \forall x_1, x_2 \in [a, b]$$

Desafío 14.

Inicio Desafío

Considerar las funciones f_i que se muestran en la figura.



- Las funciones f_1 y f_3 , en algún intervalo, muestran funciones crecientes.
☐ True ☐ False
- Las funciones f_4 y f_5 , en algún intervalo, muestran funciones decrecientes.
☐ True ☐ False
- La función f_4 es siempre creciente en su dominio.
☐ True ☐ False
- La función f_1 muestra una función constante en todo su dominio.
☐ True ☐ False

Fin Desafío

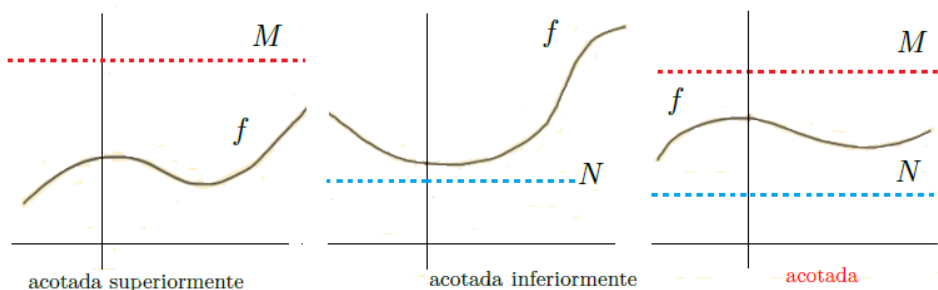
Points:

Correctas

2.3.9 Funciones acotadas

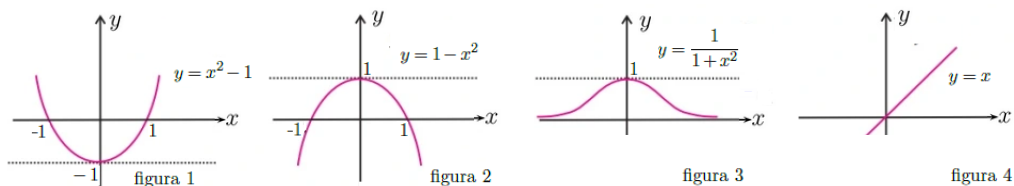
Sea $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ función real. Decimos que:

- f está acotada superiormente si y solo si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) < M$ para todo $x \in A$.
- f está acotada inferiormente si y solo si existe $N \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) > N$ para todo $x \in A$.
- f **acotada** si y solo si f es acotada superior e inferiormente



Desafío 15.

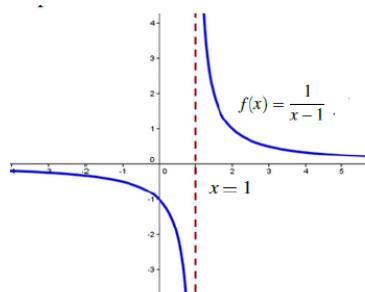
Inicio Desafío Considerar las funciones f_i que se muestran en la figura.



- Las funciones f_1 y f_3 son funciones acotadas.
☐ True ☐ False
- La función f_4 es una función no acotada.
☐ True ☐ False
- La función f_2 es acotada inferiormente.
☐ True ☐ False
- De todas las funciones mostradas en la figura, solamente la figura 3 está acotada.
☐ True ☐ False
- De todas las funciones mostradas en la figura, solo una está acotada inferiormente.
☐ True ☐ False

Fin Desafío Points: **Correctas**

Begin Test  Pasas con 100%.



- (3^{pts}) El dominio de la función que muestra la figura es:
 (a) $(-\infty, 1] \cup (1, \infty)$ (b) $(-\infty, 1) \cup [1, \infty)$
 (c) $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$ (d) $\mathbb{R}$
- (3^{pts}) El recorrido de la función que muestra la figura es:
 (a) $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ (b) $(-\infty, 0) \cup [0, \infty)$
 (c) $(-\infty, 0] \cup (0, \infty)$ (d) $\mathbb{R}$

End Test **Correctas**
 ScoreField PointsField

Correctas

Begin Test



Pasas con 100%.

1. (3^{pts}) El vértice de la parábola $f(x) = -7(x - 4)^2 + 6$ es:

(a) (4, -6)
(b) (-4, 6)
(c) (4, 6)
(d) (-4, -6)
2. (3^{pts}) El recorrido de la parábola $f(x) = 5(x + 3)^2$ es:

(a) $[0, \infty)$
(b) $(0, \infty)$
(c) $(-3, \infty)$
(d) $(-\infty, 3)$
3. (3^{pts}) La parábola $f(x) = 2x^2 + 4x - 4$ tiene recorrido:

(a) $(0, \infty)$
(b) $[0, \infty)$
(c) $[-6, \infty)$
(d) $(-\infty, -6)$
4. (3^{pts}) El recorrido de la función $y = \frac{1}{1 + x^2}$ es:

(a) $[0, 1]$
(b) $(0, 1)$
(c) $[0, 1)$
(d) $(0, 1]$
5. (3^{pts}) El recorrido de la función $f(x) = \frac{x + 2}{x + 1}$ es:

(a) $\mathbb{R}$
(b) $\mathbb{R} - \{1\}$
(c) $x \neq -1$
(d) $y \neq -1$
6. (3^{pts}) El dominio de la función $f(x) = \frac{x + 2}{x + 1}$ es:

(a) $\mathbb{R} - \{2\}$
(b) $\mathbb{R} - \{1\}$
(c) $\mathbb{R} - \{0\}$
(d) $\mathbb{R} - \{-1\}$

End Test

ScoreField

PointsField

Correctas

Begin Test



Pasas con 100%.

1. (3^{pts}) La asíntota vertical de $f(x) = \frac{1}{x + 3} - 4$ es:

(a) $x = 4$
(b) $x = -3$
(c) $x = 3$
(d) $x = -4$
2. (3^{pts}) La asíntota horizontal de $f(x) = \frac{5}{x + 7} + 9$ es:

(a) $x = -7$
(b) $y = 9$
(c) $x = 9$
(d) $x = 0$
3. (3^{pts}) La asíntota horizontal de $f(x) = \frac{1}{(x - 1)^2}$ es:

(a) $x = -1$
(b) $x = 1$
(c) $x = 0$
(d) $y = 0$
4. (3^{pts}) La asíntota oblicua de $f(x) = \frac{x^2}{x + 1}$ es:

(a) $y = x + 1$
(b) $y = x$
(c) $y = x - 1$
(d) $y = 0$
5. (3^{pts}) La asíntota vertical de $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$ es:

(a) $x = -1$
(b) $x = 0$
(c) no tiene
(d) $y = 0$

End Test

ScoreField

PointsField

Correctas

Funciones definidas a trozos

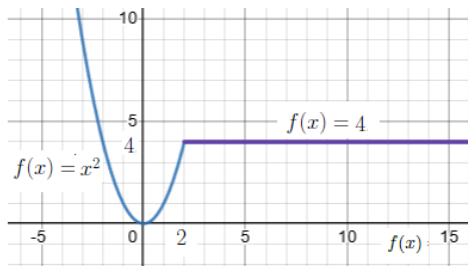
Una función definida a trozos es aquella cuya expresión analítica contiene más de una fórmula, esto es, para distintos valores de la variable independiente x se deben usar distintas fórmulas que

permitan calcular la imagen y que les corresponde.

Es imprescindible conocer qué fórmula usar con cada valor de x , por lo que cada una de las fórmulas se acompaña obligatoriamente de una condición que especifica su dominio de aplicación.

Ejemplo 2.3.5. Bosquejar la gráfica de las funciones:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x < 2 \\ 4, & x > 2 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } -5 \leq x < -2 \\ x^2, & \text{si } -2 < x < 1 \\ 8 - 3x, & 1 \leq x < 4 \end{cases}$$

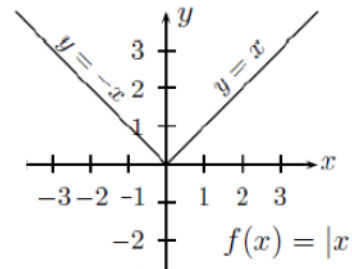


Entre las funciones a trozos más famosas tenemos; el valor absoluto y la parte entera.

Función valor absoluto

La función *valor absoluto* tiene por ecuación $f(x) = |x|$. Para trazar la gráfica observemos que:

- si $x \geq 0$, entonces $f(x) = x$, así que la parte de la gráfica de f que se encuentra a la derecha de $x = 0$, es la recta $y = x$ que tiene pendiente 1 y que pasa por el origen.
- Si $x < 0$, entonces $f(x) = -x$, de modo que la parte de la gráfica de f que se encuentra a la izquierda de $x = 0$ debe coincidir con la gráfica de $y = -x$, que es una recta con pendiente -1 y que pasa por el origen.



Esto permite escribir la función valor absoluto como

$$f(x) = \begin{cases} x & , \text{si } x \geq 0 \\ -x & , \text{si } x < 0 \end{cases}$$

EJERCICIO 34. Mira la gráfica superior para responder.

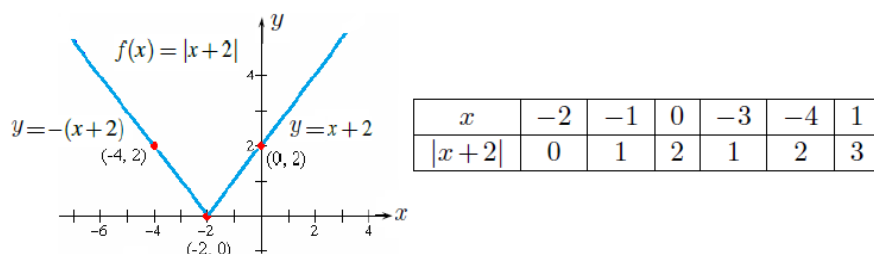
- ¿Presenta algún tipo de simetría? ¿Qué tipo de función es?
- Determina su dominio de definición.
- ¿Cuál es su recorrido?
- Halla intervalos de monotonía.
- ¿Tiene función inversa?

Las funciones en valor absoluto se pueden resolver o graficar siguiendo los siguientes pasos:

1. Se hallan los puntos de “quiebre” (valor que anula la cantidad que va en el valor absoluto).
2. Se evalúa la función tomando un valor a izquierda y otro a derecha del punto de quiebre.
3. Se representa la función resultante (dos segmentos de recta).

Ejemplo 2.3.6. Trazo la gráfica de $f(x) = |x + 2|$.

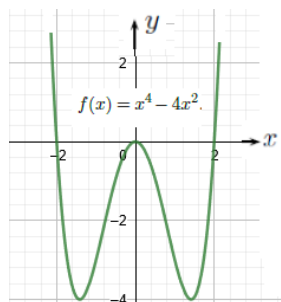
Es claro que el punto de quiebre de la función es $x = -2$, allí se produce el menor valor de la función (vértice). En este punto se “separa” la curva en dos segmentos de recta. Un par de valores a derecha e izquierda de este punto crítico nos dan una idea de como va la gráfica



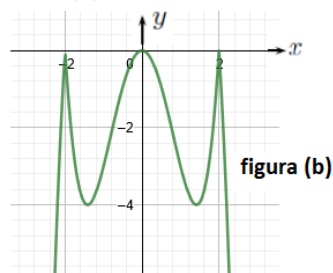
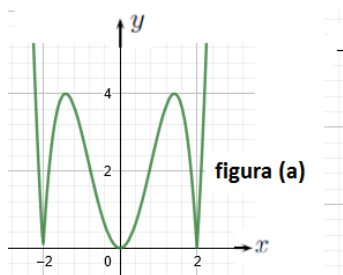
Observación. Si tienes dudas en las actividades siguientes, recuerda que el Symbolab te ayuda. <https://es.symbolab.com/graphing-calculator>

Desafío 16.

Inicio Desafío Considerar la gráfica de la función $f(x) = x^4 - 4x^2$.



1. La gráfica de la función $g(x) = -|x^4 - 4x^2|$ es la figura (a):



☐ True

☐ False

Fin Desafío

Points:

Correctas

Función parte entera

La función parte entera hace que a cada numero real, se le asigne un número entero, y este numero ENTERO que se le asigne, debe ser el mayor entero que es menor que x . Otra cosa interesante es saber que como entre dos enteros, hay infinitos decimales, todos esos decimales tendrán la misma imagen, pues la parte entera se define como el entero anterior.

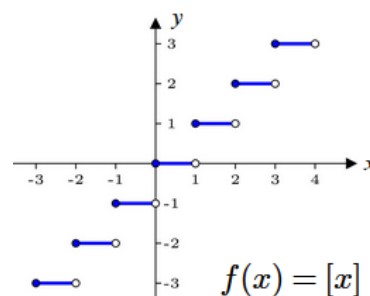
$$f(x) = [x] = \max\{k \in \mathbb{Z} / k \leq x\}$$

Esta función se conoce también como “función escalera” o “escalonada” por la forma de su gráfica.

Actividad 16. Para graficar la función parte entera se completa la siguiente tabla

x	-2	-1,5	-1	-0,5	-0,4	-0,1	0	0,1	0,2	0,5	1	1,5	2
$[x]$	-2	-2	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0	1	1	2

$$f(x) = \begin{cases} \dots & \dots \\ -2 & x \in [-2, 1) \\ -1 & x \in [-1, 0) \\ 0 & x \in [0, 1) \\ 1 & x \in [1, 2) \\ 2 & x \in [2, 3) \\ \dots & \dots \end{cases}$$



2.3.10 Combinación de funciones

Vamos a crear nuevas funciones a partir de funciones dadas, esto lo haremos haciendo uso de operaciones algebraicas. Las funciones que obtendremos serán la suma, la diferencia, el producto, el cociente y la composición de funciones.

Definición 2.3.7. Sean f y g funciones cuyos dominios son Df y Dg respectivamente; entonces, las funciones $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ llamadas suma, diferencia, producto y cociente, respectivamente, se define de la manera siguiente:

- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, para cada $x \in Df \cap Dg$
- $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$, para cada $x \in Df \cap Dg$
- $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, para cada $x \in Df \cap Dg$
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, con $g(x) \neq 0$ y $x \in Df \cap Dg$

Ejemplo 2.3.8. Sean $f(x) = \sqrt{x+1}$ y $g(x) = x+2$, entonces:

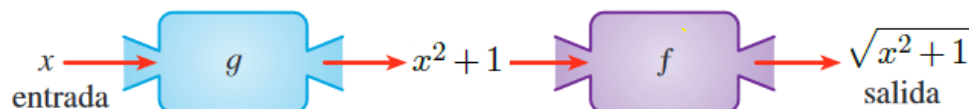
- $(f + g)(1) = f(1) + g(1) = \sqrt{2} + 3$
- $(f - g)(0) = f(0) - g(0) = 1 - 2 = -1$
- $(f \cdot g)(1) = f(1) \cdot g(1) = \sqrt{2} \cdot 3 = 3\sqrt{2}$
- $\left(\frac{f}{g}\right)(1) = \frac{f(1)}{g(1)} = \frac{\sqrt{2}}{3}$

Función compuesta

La función compuesta es aquella que se obtiene mediante una operación denominada composición de funciones, que consiste en aplicar de manera sucesiva las funciones que forman parte de la operación.

Ejemplo 2.3.9. La idea de las máquinas permite una comprensión sencilla del proceso. Si $g(x) = x^2 + 1$ es nuestra primera función (función de entrada), y $f(x) = \sqrt{x}$ es la función que se aplica a la función de entrada, entonces resulta como salida otra función, que llamamos h , y tal que

$$h(x) = f(g(x)) = \sqrt{x^2 + 1}$$

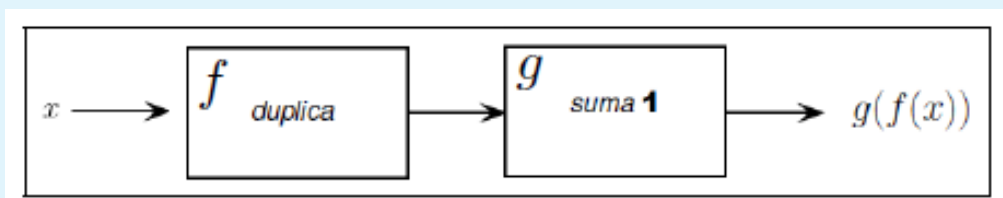


En general, dadas dos funciones f y g cualesquiera, empezamos con un número x en el dominio de g y logramos su imagen $g(x)$. Si este número $g(x)$ está en el dominio de f , podemos calcular el valor de $f(g(x))$.

Trabajo con mi profe

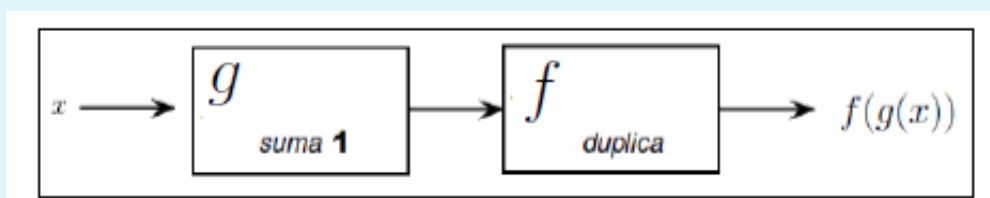


EJERCICIO 35. La figura muestra dos máquinas, la primera es f y la segunda g .



- Si por la máquina f entra $x = 2$, determina la salida en la máquina g
- Halla $(g \circ f)(2) = g(f(2)) =$
- Encuentra $g(f(\square)) =$
- Escribe la fórmula de $g(f(x))$

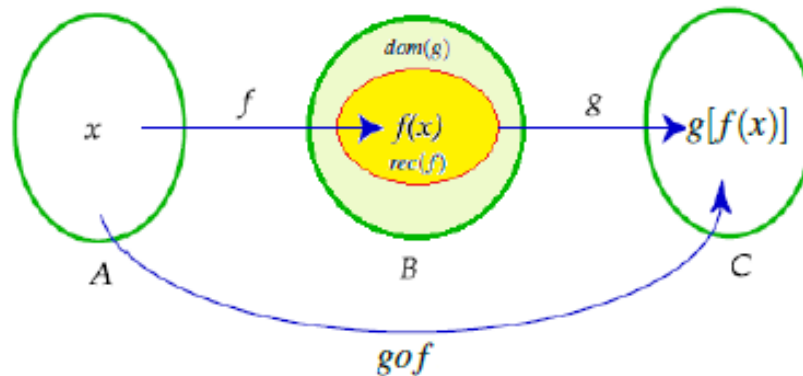
EJERCICIO 36. La figura muestra las dos máquinas anteriores. Ahora actúa primero g .



- Si en la máquina g entra $x = 2$, halla el valor de salida en la máquina f
- Encuentra $f(g(\square)) =$
- Escribe la fórmula de $f(g(x))$
- Anota tu conclusión de estas dos actividades.

Definición 2.3.10. Sean $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ funciones. La función $g \circ f : A \rightarrow C$ tal que $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, se llama función compuesta de f y g . De manera análoga se obtiene $f \circ g$.

Gráficamente podemos representar la función compuesta de g y f como



Observación.

- Los valores $g(x)$ deberán estar en el dominio de f para poder realizar $(f \circ g)$.
- Los valores $f(x)$ deberán estar en el dominio de g para poder hacer $(g \circ f)$.

Ejemplo 2.3.11. Hallar la composición $f(g(x))$ si tenemos $f(x) = 2x + 3$ y $g(x) = x + 1$.

En este caso se trata de componer una función lineal con otra lineal

$$f(g(x)) = f(x + 1) = 2(x + 1) + 3 = 2x + 5$$

Ejemplo 2.3.12. Sean $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = 2x - 3$. Te muestro $(f \circ g)(x)$, $(g \circ f)(x)$ y sus dominios.

- El dominio de la función f es

$$\text{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\} = [0, \infty)$$

- El dominio de la función g , una recta, es

$$\text{dom}(g) = \mathbb{R}$$

- La compuesta de f con g es

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x - 3) = \sqrt{2x - 3}$$

y su dominio:

$$\text{dom}(f \circ g)(x) = \{x \in \mathbb{R} / 2x - 3 \geq 0\} = \left[\frac{3}{2}, \infty\right)$$

- La composición de g con f es:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = 2\sqrt{x} - 3$$

su dominio

$$\text{dom}(g \circ f)(x) = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\} = [0, \infty)$$

Begin Test



Pasas con 100%.

1. (3pts) Para las funciones $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = 1 - x^2$, la función $(g \circ f)(x)$ es:
 - (a) $1 - x^2$
 - (b) $x^2 - 1$
 - (c) $x - 1$
 - (d) $1 - x$
2. (3pts) Para las funciones $f(x) = \frac{1}{2x-1}$ y $g(x) = \frac{1}{x}$, la función $(f \circ g)(x)$ es:
 - (a) $\frac{x}{x-2}$
 - (b) $\frac{1}{2-x}$
 - (c) $\frac{x}{2-x}$
 - (d) $\frac{2-x}{x}$
3. (3pts) Para las funciones $f(x) = \sqrt{1-x}$ y $g(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1}$, la función $(f \circ g)(x)$ es:
 - (a) $\sqrt{\frac{x}{x^2+1}}$
 - (b) $\sqrt{\frac{1}{x^2-1}}$
 - (c) no existe
 - (d) $\sqrt{\frac{1}{x^2+1}}$
4. (3pts) Sean $f(x) = x - \sqrt{3}$ para $x \in (-2, 5]$ y $g(x) = x + \sqrt{3}$ con $x \in [-5, 2]$. El dominio de la función $(f \cdot g)(x)$ es:
 - (a) $[-2, 2]$
 - (b) $(-2, 2]$
 - (c) $[-2, 2)$
 - (d) $(-2, 2)$
5. (3pts) Si $f(x) = 3x + 2$, entonces $(f \circ f)(x)$ es:
 - (a) $9x + 8$
 - (b) $8x + 9$
 - (c) $9x - 8$
 - (d) $8x - 9$

End Test

Correctas

ScoreField

PointsField

Correctas

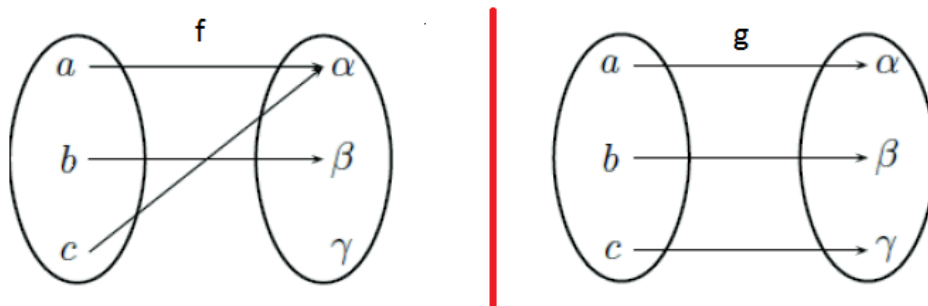
2.3.11 Funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas

Esta clasificación obedece a la forma en que están relacionados los elementos del dominio con los del codominio. Por tanto, es fundamental dar a conocer el dominio de la función y su codominio.

Funciones Inyectivas

Te presento una primera aproximación a este concepto.

Actividad 17. La figura muestra dos aplicaciones en un esquema sagital

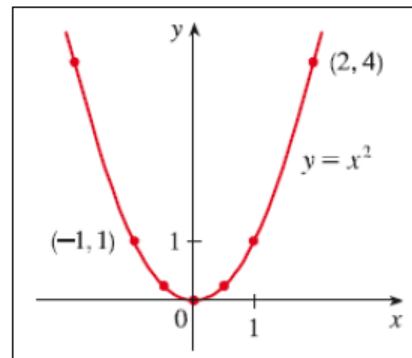


1. Determina si ambas aplicaciones son funciones.
2. Busca alguna diferencia entre estas aplicaciones

Actividad 18.

La figura tiene por dominio el conjunto de los números reales y por codominio el conjunto de los reales no negativos.

1. Traza una recta paralela al eje x y sobre el recorrido de la gráfica. ¿esta recta intersecta a la gráfica en más de un punto?
2. Proporciona dos elementos del dominio que tengan igual imagen.



Definición 2.3.13. Una función $f : A \rightarrow B$ es *inyectiva* si a valores del dominio distintos, corresponden imágenes distintas. Esto es,

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

lo que equivale a decir:

$$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$

En términos gráficos esto significa, que:

en el rango de la función, a saber $f(A)$, cualquier recta paralela al eje x corta al gráfico de f en a lo más un punto

Ejemplo 2.3.14. Pruebo que la función $f(x) = 3x - 2$ es *inyectiva*.

¡Siempre! se parte de imágenes iguales y se llega a pre-imágenes iguales. Esto es,

$$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$

Para este ejemplo esto significa que

$$f(x_1) = f(x_2) \implies 3x_1 - 2 = 3x_2 - 2$$

al cancelar términos semejante

$$3x_1 = 3x_2 \implies x_1 = x_2$$

Esto prueba que la función es *inyectiva*

Ejemplo 2.3.15. Pruebo que la función $f(x) = x^3 - 1$ es *inyectiva*.

$$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1^3 - 1 = x_2^3 - 1$$

al simplificar

$$x_1^3 = x_2^3 \implies x_1^3 - x_2^3 = 0$$

se factoriza

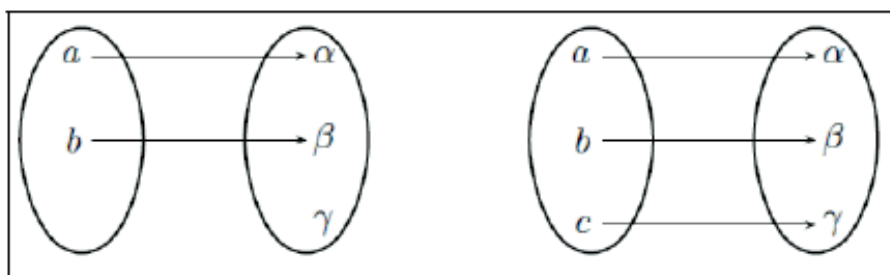
$$x_1^3 - x_2^3 = 0 \iff (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) = 0$$

La única forma de que este producto sea cero, es que el factor $x_1 - x_2 = 0$, de lo cual

$$x_1 = x_2 \quad \text{la función es inyectiva}$$

Funciones Sobreyectivas

Actividad 19. La figura muestra dos aplicaciones en un esquema sagital



1. Determina si ambas son funciones.
2. ¿Busca alguna diferencia entre estas aplicaciones.

Definición 2.3.16. Una función $f : A \rightarrow B$ es sobreyectiva si todo elemento del codominio se encuentra conectado con uno del dominio.

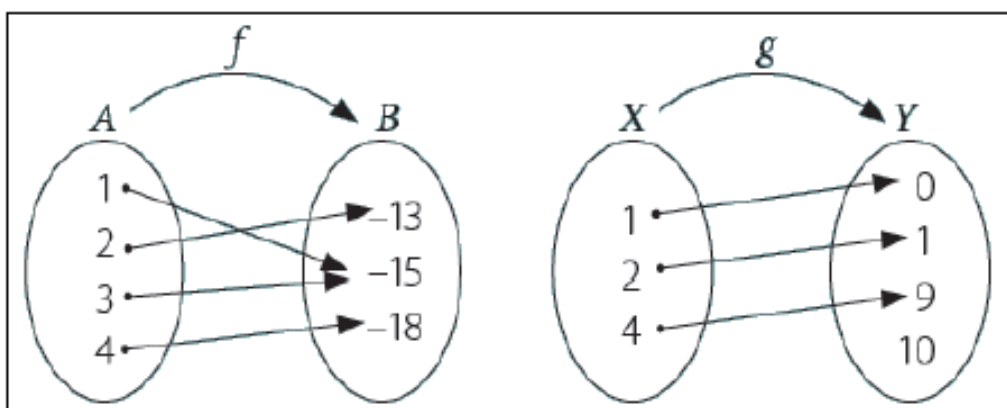
$$\forall y \in B \exists x \in A \text{ tal que } y = f(x)$$

En términos gráficos, esto significa, que:

en el **codominio** de la función: **toda recta paralela al eje x debe cortar al gráfico de f**

Dicho de otra forma: Una función f es sobreyectiva cuando el recorrido de la función es igual al codominio, es decir, cuando todos los elementos del conjunto de llegada son imagen de por lo menos un elemento del dominio.

Actividad 20. Determinar, de las aplicaciones en diagrama sagital siguientes, si alguna de ellas representa una función sobreyectiva.

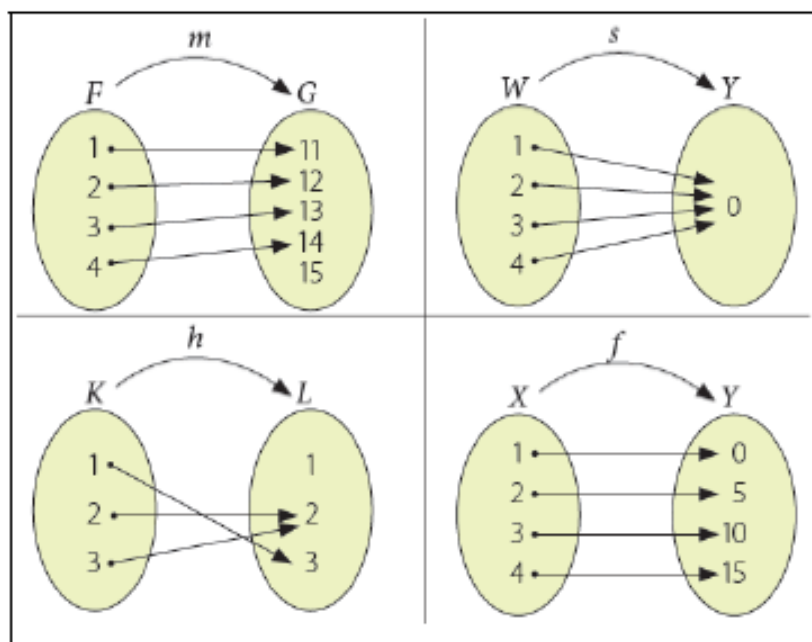


Dada cualquier función f , siempre es posible construir una función sobreyectiva considerando

$$f : A \rightarrow f(A)$$

Las funciones que son inyectivas y sobreyectivas se llaman **biyectivas**.

Actividad 21. Entre las siguientes aplicaciones, determina cuáles son inyectivas, cuáles sobreyectivas, y si existe alguna biyectiva



Ejemplo 2.3.17. Te muestro que la función $f(x) = \sqrt{x}$ es sobreyectiva.

Para ver esto se supone que existe un elemento $y \in \text{rec}(f)$, y se prueba que este y satisface $f(x) = y$. Como $f(x) = \sqrt{x}$, entonces

$$\sqrt{x} = y \implies x = y^2$$

Con esto, el elemento x del dominio que tiene de imagen al y es y^2 . Verifiquemos esto

$$f(y^2) = \sqrt{y^2} = y$$

Esto prueba que todo elemento del recorrido está ligado con uno del dominio. Por tanto, la función es sobreyectiva. Además, por ser inyectiva y sobreyectiva es biyectiva.

Trabajo con mi profe

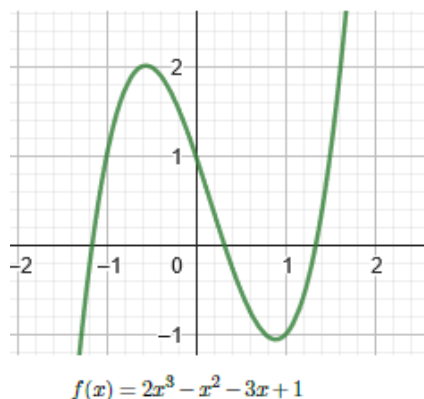
EJERCICIO 37. Dada la función $f(x) = \frac{2x-7}{7x+3}$

- Determinar dominio de la función
- Hallar el recorrido de la función
- Usar la definición para probar que la función es inyectiva.
- Probar que la función f es sobreyectiva



Desafío 17.

Begin Test La función de la figura tiene dominio y codominio los reales.



1. La función dada es inyectiva.

☐

True

☐

False

2. La función dada es sobreyectiva.

☐

True

☐

False

3. La función dada es biyectiva.

☐

True

☐

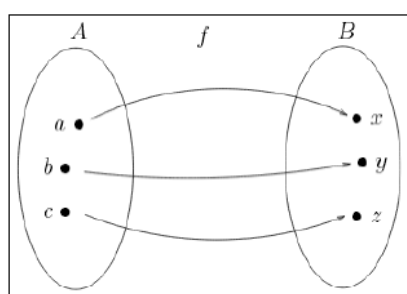
False

End Test Points: **Correctas**

2.3.12 Función inversa

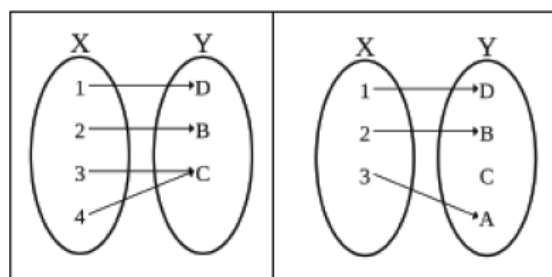
Una forma sencilla de visualizar la existencia de la función inversa y sus requisitos es mediante diagramas sagitales.

Actividad 22. Observa la función f dada en diagrama sagital



1. Determina si la función es inyectiva y/o sobreyectiva.
2. ¿se puede invertir la correspondencia? Esto es, ¿se puede construir una función $g : B \rightarrow A$?
3. Anota el conjunto de imágenes de f .
4. Anota el conjunto de imágenes de g .
5. Calcula $f \circ g$ y $g \circ f$. ¿alguna conclusión?
6. ¿Es cierto que g “deshace” lo que f “hace”?

Actividad 23. Para las funciones del diagrama siguiente ¿se puede invertir la correspondencia?



Desafío 18.

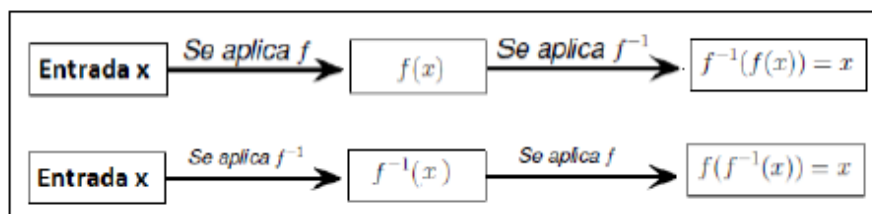
► El requisito que debe cumplir la función f para tener inversa es ser:

Definición 2.3.18. Dada una función $f : A \rightarrow B$, se llama *función inversa de f* a la función $g : B \rightarrow A$ tal que se cumplen las siguientes condiciones:

$$(g \circ f)(x) = x \quad (f \circ g)(x) = x$$

Se usa la notación $g = f^{-1}$, y se dice también que la función f es invertible

La figura siguiente muestra el proceso indicado en la definición de función compuesta entre f y su inversa f^{-1}



Se verifican también las siguientes propiedades.

- Una función tiene inversa si, y sólo si, es biyectiva.
- La función inversa de una función es invertible, y su inversa es la función original.

$$(f^{-1})^{-1} = f$$

- La composición de dos funciones invertibles es invertible, y su inversa es la composición de las inversas de los factores pero con el orden invertido. Esto es,

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Desafío 19. Verifica esta propiedad para las funciones $f(x) = 2x + 1$ y $g(x) = 3x - 1$

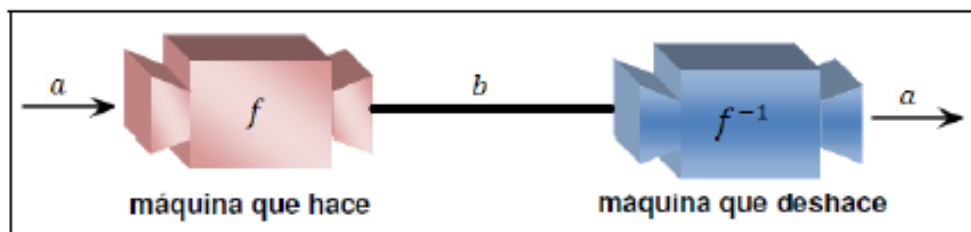
El uso de diagramas sagitales permite claridad en los conceptos, pero no es útil en los casos prácticos.

Te muestro otra forma didáctica, a partir de la cual se entra en el estudio de la inversa, y que permite luego aplicarla en la práctica.

La máquina de la inversa

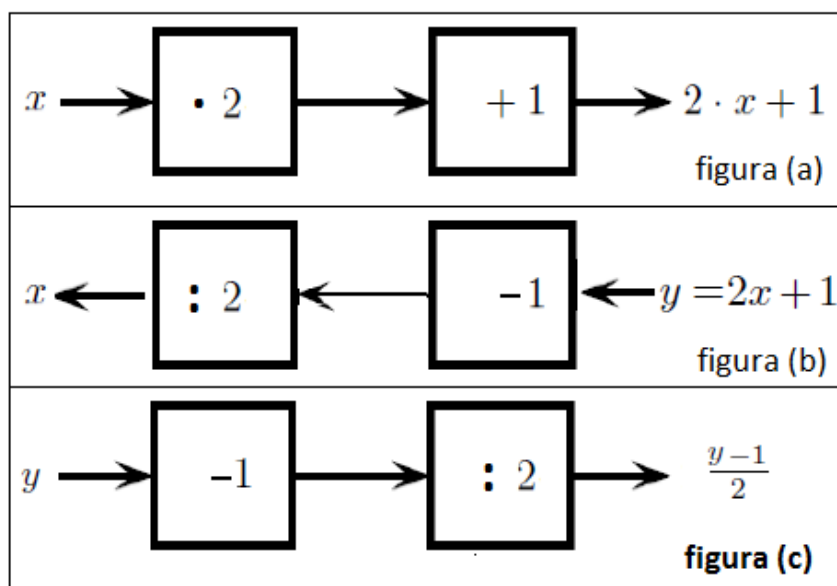
A la máquina que deshace (o invierte) todo lo que hace una función dada se le llama la función inversa de la función dada. Así por ejemplo, lo inverso de “duplicar por dos” es “dividir entre dos” y lo inverso de “aumentar en uno” es “disminuir en uno”.

Vamos a usar esta idea para estudiar funciones inversas.



Así, si f toma a y lo transforma en b , entonces f^{-1} deshace lo que hizo f para que recibamos como salida el mismo valor, a , con que comenzamos.

Actividad 24. Para la máquina de la figura (a), la máquina inversa debe hacer el proceso, que muestra la figura (b), que anotamos ahora de izquierda a derecha como muestra la nueva figura (c)



Se tiene así que; $f(x) = 2x + 1$ y que $f^{-1}(x) = \frac{x - 1}{2}$

La inversa desde la fórmula

Un procedimiento más sencillo y general de hallar la función inversa, si se cumplen las condiciones de existencia, de una función $y = f(x)$ es la siguiente:

1. Intercambiamos x e y en la ecuación $y = f(x)$
2. Despejamos y en la ecuación resultante, con lo que obtenemos la función inversa.
3. El dominio de la función inversa es el rango de la función original y el rango de la función inversa es el dominio de la función original.

Actividad 25. Se considera la función $y = f(x) = 3x - 1$

Para hallar la inversa intercambiamos x e y

$$y = 3x - 1 \implies x = 3y - 1$$

Se despeja y

$$y = \frac{x+1}{3}$$

Esta es la inversa:

$$f^{-1}(x) = \frac{x+1}{3}$$

Desafío 20.

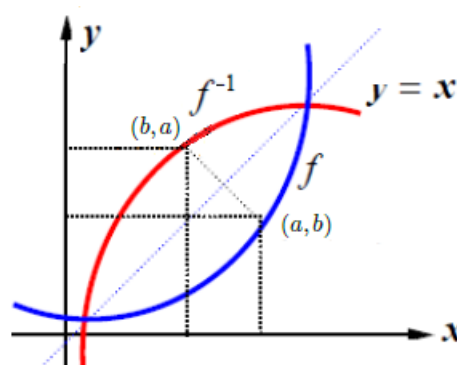
- Sea $f(x) = 2x + 1$, calcular el valor de $a + b$, si se sabe que

$$f(a) = 5, \quad f^{-1}(b) = 7$$

$a + b =$ Ans Clear

Inversa desde la gráfica

Si un punto con coordenadas (a, b) está en el gráfico de la función f , entonces $f(a) = b$ y por lo tanto $f^{-1}(b) = a$, luego el punto con coordenadas (b, a) está en el gráfico de la función f^{-1} . Además, si simetrizamos el punto (a, b) con respecto a la recta $y = x$, obtenemos el punto (b, a) . Por lo tanto, el gráfico de la función f^{-1} se obtiene simetrizando el gráfico de f con respecto a la recta $y = x$.



Ejemplo 2.3.19. Se considera la función $y = f(x) = 2x$

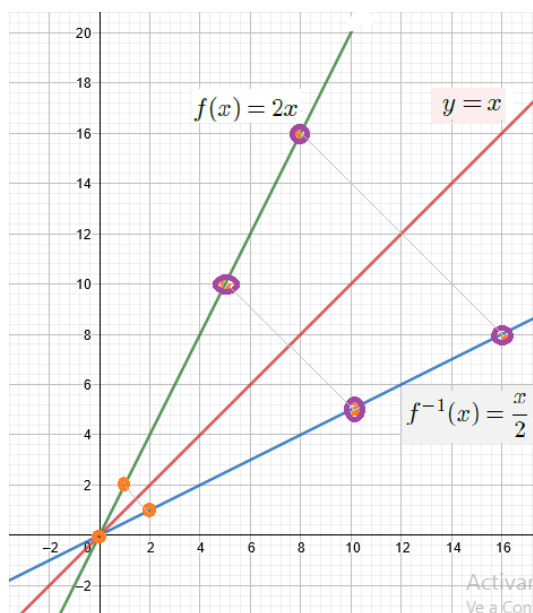
La función dada (una recta) es claramente biyectiva y podemos hallar su inversa

$$y = 2x \implies x = 2y \implies y = \frac{x}{2}$$

De esta manera, la inversa de $f(x) = 2x$ es $f^{-1}(x) = \frac{x}{2}$. Veamos algunos valores para graficarlos y verificar su simetría.

x	0	1	5	8		x	0	2	10	16
$f(x)$	0	2	10	16		$f^{-1}(x)$	0	1	5	8

La gráfica de estas funciones es la siguiente



Ejemplo 2.3.20. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ función biyectiva y tal que $f(x) = 2x - 1$

1. Hallar la función inversa de f
2. Verificar que $(f \circ f^{-1})(x) = x$ y que $(f^{-1} \circ f)(x) = x$.
3. Representar en un mismo sistema los gráficos de f , f^{-1} y $g(x) = x$

Solución

☞ Como $y = f(x) = 2x - 1$ despejando x se halla la función inversa

$$y = 2x - 1 \implies x = \frac{1}{2}(y + 1)$$

Intercambiando x por y tenemos que

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x + 1)$$

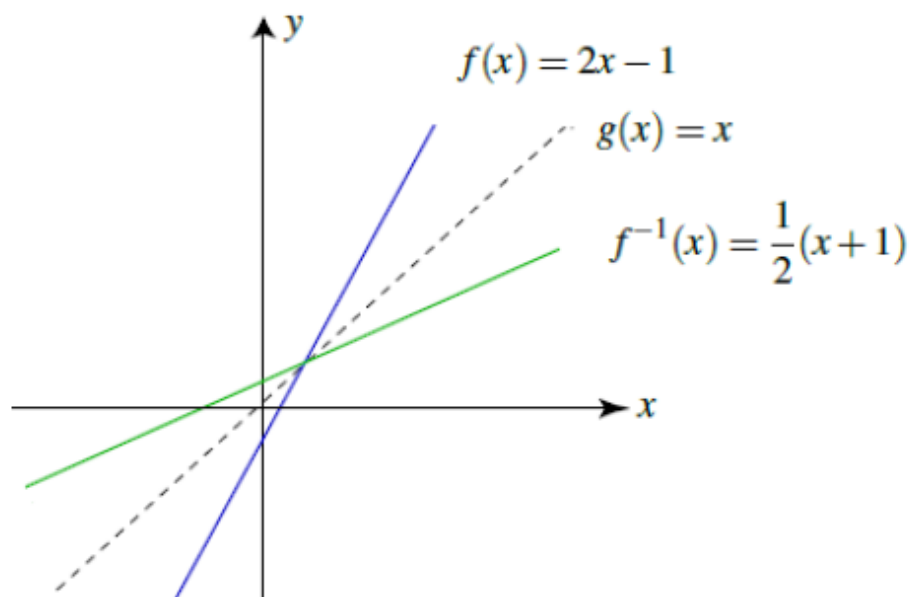
☞ Para $(f \circ f^{-1})(x)$ se tiene:

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{1}{2}(x + 1)\right) = 2 \cdot \frac{1}{2}(x + 1) - 1 = x$$

☞ Para $(f^{-1} \circ f)(x)$ se tiene:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(2x - 1) = \frac{1}{2}(2x - 1 + 1) = x$$

☞ Estas son las gráficas. Se observa la simetría de f y su inversa, respecto de la recta $g(x) = x$.



EJERCICIO 38. Sea $f : [-3, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ biyectiva, y tal que $f(x) = \sqrt{x + 3}$

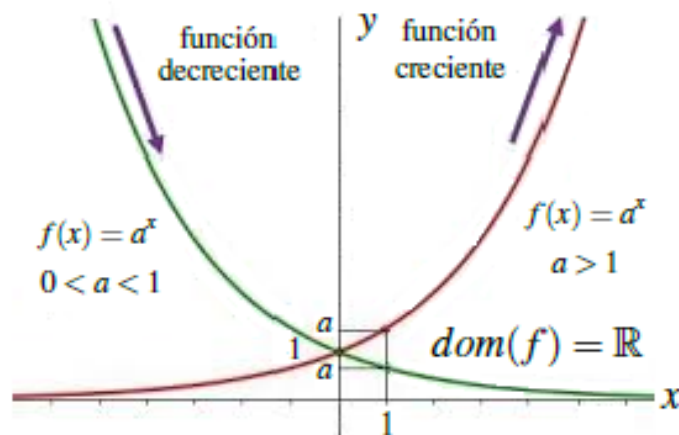
- Hallar la inversa f^{-1} de f .
- Indicar el dominio de la función inversa.
- Hallar recorrido de $f^{-1}(x)$.
- Graficar f y su inversa en el mismo plano cartesiano.

2.4 Función exponencial

Conocemos expresiones del tipo $y = x^n$, en donde x es llamada base y n es una constante llamada exponente. Si intercambiamos de lugar la base y el exponente obtenemos una expresión del tipo $y = n^x$ la cual recibe el nombre de función exponencial. Usando la notación habitual, tenemos lo siguiente:

Definición 2.4.1. Sea $a > 0$, $a \neq 1$. La función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ que a todo x asigna $f(x) = a^x$ se llama función *exponencial* de base a .

La gráfica de una función exponencial depende de la base a . Tenemos



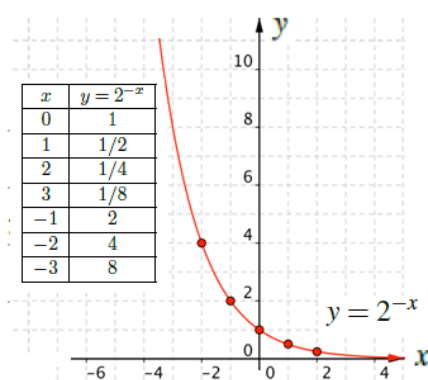
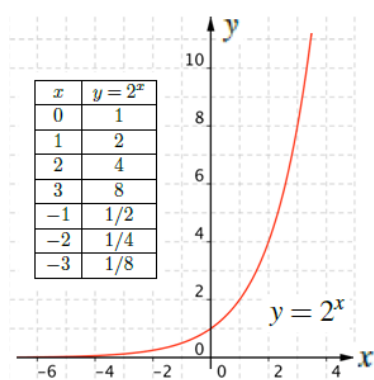
En base a las gráficas anteriores, el dominio de la función exponencial es $\mathbb{R}$ y su recorrido es $\mathbb{R}^+$. Se observa que:

- Todas ellas tienen un punto común que es $(0, 1)$.
- Cuando $a > 1$ la función es creciente.
- Cuando $0 < a < 1$ la función es decreciente.
- La gráfica de f tiene una asíntota horizontal dada por $y = 0$



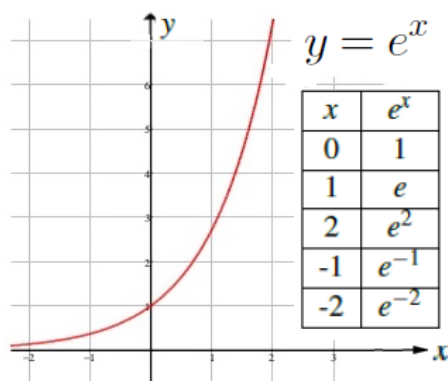
Actividad 26. Hago la gráfica de $y = 2^x$ y de $y = 2^{-x}$

Con algunos valores se puede construir una tabla y llegar a las gráficas siguientes:



La base e

Este es un caso particular para la base $a > 1$, ya que $e = 2,71828 \dots$. Una pequeña tabla y tenemos su gráfica.



De acuerdo a la gráfica esta función tiene las siguientes características:

- Es una función creciente en todo su dominio.
- Su rango o recorrido es el conjunto de los números reales positivos: $rec(f) = (0, \infty)$
- La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal.

2.4.1 Modelación exponencial

Las funciones exponenciales, en la forma

$$y(t) = y_0 a^x, \quad a > 0, \quad a \neq 1$$

tienen diversas aplicaciones:

- Si $a > 1$, entonces la función representa un **crecimiento** exponencial:

Cuando una cantidad crece exponencialmente, a partir de un valor inicial y_0 , la cantidad final $y(t)$ obtenida después de transcurrido un intervalo de tiempo t , viene dada por la siguiente ecuación:

$$y(t) = y_0 a^{kt}$$

en donde k es el porcentaje de crecimiento. Ejemplos de procesos crecientes en forma exponencial son: el interés capitalizable continuamente, el crecimiento de la población, la inflación y el crecimiento del PNB (Producto Nacional Bruto).

- si $0 < a < 1$, entonces se trata de un **decrecimiento** exponencial.

Cuando una cantidad decrece exponencialmente a partir de un valor inicial y_0 , la cantidad final $y(t)$ obtenida después de transcurrido un intervalo de tiempo t , se describe mediante la siguiente ecuación:

$$y(t) = y_0 a^{-kt}$$

en donde k es el porcentaje de decrecimiento. Ejemplos de procesos decrecientes en forma exponencial son: la descomposición radiactiva, las ventas de un artículo al interrumpir la publicidad, la devaluación de ciertos bienes de capital (maquinaria) y el enfriamiento de un objeto caliente.

EJERCICIO 39. En un cultivo de bacterias se ha descubierto que el número y de bacterias (en millones), t horas después de iniciado el experimento viene dado por la función

$$y(t) = 20e^{t/3}$$

- (a) Determinar el número de bacterias al principio del experimento.
- (b) Hallar el número de bacterias después de dos horas.
- (c) Esbozar el gráfico de la función.

Desintegración radiactiva

La ley de Rutherford sobre la desintegración radiactiva dice que el número de átomos de un elemento radiactivo transformados en un tiempo determinado es proporcional al número de átomos de ese elemento que estén **presentes** en la sustancia. La fórmula que describe la desintegración es de la forma:

$$y(t) = y_0 e^{-kt}$$

donde:

- y_0 es el número de átomos que hay en instante $t = 0$.
- $y(t)$ es el número de átomos que hay en todo instante t .
- k es la constante de desintegración del elemento.
- t es el tiempo.

Ejemplo 2.4.2. El plutonio 239 es uno de los productos radiactivos que se utilizan en los reactores nucleares. Su vida media es de unos 24000 años. Determinar la constante de desintegración de este isótopo, y la ecuación que entrega la cantidad de polonio en cualquier instante de tiempo.

La ley que rige la desintegración, para $y(0) = y_0$ es

$$y(t) = y_0 e^{-kt}$$

Por otra parte, que la vida media sea 24000 años significa que

$$y(24000) = \frac{y_0}{2} = y_0 e^{-24000k}$$

Al cancelar

$$\frac{1}{2} = e^{-24000k}$$

Al aplicar logaritmo

$$-\ln 2 = -24000k \implies k = \frac{\ln 2}{24000} \sim 0,00002888$$

Sabiendo la cantidad inicial y la constante k se forma la ecuación

$$y(t) = y_0 e^{-24000kt}$$

que permite el cálculo de la cantidad de plutonio que hay en cualquier instante de tiempo t .

Ejemplo 2.4.3. . Se sabe que la concentración en sangre de cierto tipo de anestesia viene dada por la fórmula

$$y(t) = 100 \cdot (0,94)^t$$

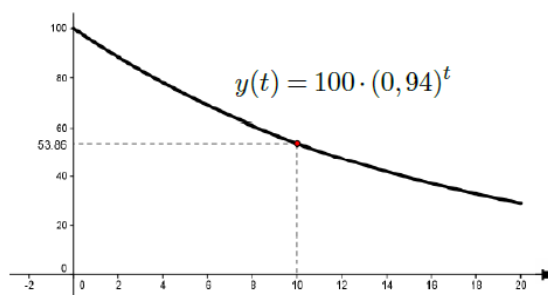
donde 100 es la dosis inicial en mg. y t los minutos transcurridos desde que se administró.

1. ¿Qué cantidad de anestesia tiene el paciente al cabo de 10 minutos?
2. Representar gráficamente la función.

Para la primera pregunta, basta con reemplazar en la fórmula $t = 10$, Se tiene

$$y(10) = 100 \cdot (0,94)^{10} = 53,86$$

Para la gráfica se observa que la base $0,94 < 1$, de modo que la gráfica es decreciente



Begin Test



Pasas con 100%.

1. (3^{pts}) El dominio de la función $f(x) = e^{x-1}$ es:

(a) $\mathbb{R}^+$
(b) $\mathbb{R}$
(c) $\mathbb{R} - \{1\}$
(d) $\{x \in \mathbb{R} / x \geq 1\}$
2. (3^{pts}) La asíntota horizontal de $y = 2^x$ es:

(a) $y = 0$
(b) $x = 0$
(c) $x = -1$
(d) $y = -1$
3. (3^{pts}) La asíntota horizontal de $f(x) = 1 + 2^x$ es:

(a) $y = 0$
(b) $x = 0$
(c) $y = 1$
(d) $x = 1$
4. (3^{pts}) La función $f(x) = 2^{-x} - 2$ corta al eje y en el punto de abscisa:

(a) $x = 1$
(b) $x = -1$
(c) $x = 0$
(d) $x = 2$
5. (3^{pts}) La función $f(x) = 2^{-x} - 2$ corta al eje x en el punto de ordenada:

(a) $y = 1$
(b) $y = 0$
(c) $y = -1$
(d) $y = 2$
6. (3^{pts}) La función $f(x) = 2^x + 3$ corta al eje x en el punto de ordenada:

(a) $y = 1$
(b) $y = 0$
(c) no existe y
(d) $y = 3$
7. (3^{pts}) La función $f(x) = 2^x + 3$ tiene por asíntota horizontal:

(a) $y = 3$
(b) $y = 0$
(c) $y = 1$
(d) $y = -3$

End Test

ScoreField

PointsField

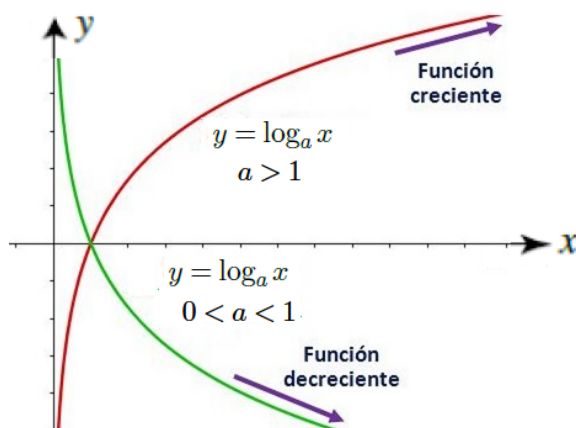
Correctas

Correctas

2.4.2 Función Logarítmica

Sea $a > 0$, $a \neq 1$. Sea x cualquier número real positivo. La función logarítmica con base a se define por

$$f(x) = \log_a x$$



Se mantiene la conexión exponencial - logaritmo

$$y = \log_a x \iff a^y = x$$

Características de la función logaritmo

Mencionamos solo las pertinentes a este curso.

- El dominio de la función logaritmo $y = \log_a x$ es aquél para el cual los valores de x (su argumento) es estrictamente positivo. Esto es

$$\text{dom}(f) = (0, \infty)$$

- Su rango o recorrido (valores de sus imágenes) es todo el conjunto de números reales. es decir

$$\text{rec}(f) = \mathbb{R}$$

- La función logarítmica es creciente si $a > 1$, y decreciente si $0 < a < 1$.
- Si la base $a = e$ tenemos la función logaritmo natural $y = \ln x$
- El eje y , de ecuación $x = 0$, es asíntota vertical

Ejemplo 2.4.4. Calcular el dominio de la función logarítmica $f(x) = \log_3(2x - 1)$

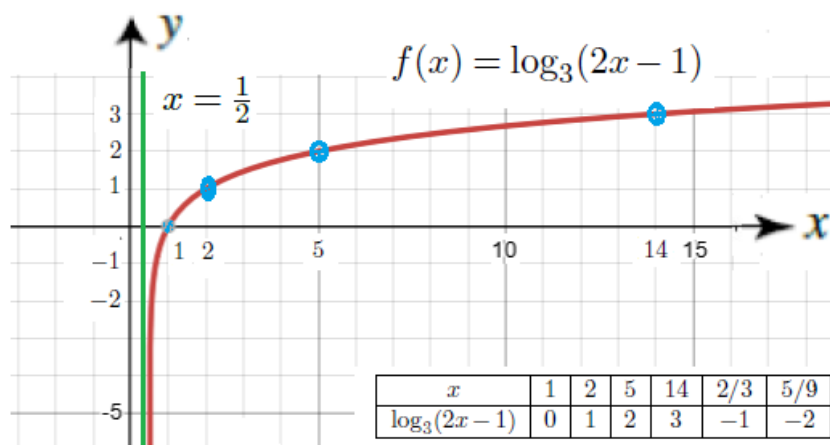
El dominio está formado por todos los elementos del argumento que sean estrictamente positivos. En este caso,

$$2x - 1 > 0 \implies 2x > 1 \implies x > \frac{1}{2}$$

Por tanto, el dominio es

$$\text{dom}(f) = \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$$

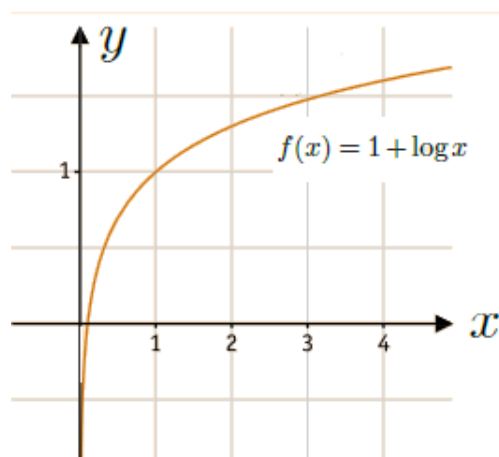
Podemos agregar que $x = \frac{1}{2}$ es asíntota vertical. Pero, si vamos más allá, de seguro quieres saber como graficar esta función. Te cuento que el sitio <https://www.desmos.com/calculator/ryn61vobok?lang=es> la hace súper fácil.



A lo mejor quieres una idea para hacer el gráfico a mano. Está bien, te digo como hacerlo. Como el argumento del logaritmo es $2x - 1$ y la base es 3, elegimos valores, de $x > \frac{1}{2}$, que sean potencias de 3.

- $2x - 1 = 1 \implies x = 1$
- $2x - 1 = 3 \implies x = 2$
- $2x - 1 = 9 \implies x = 5$
- $2x - 1 = 27 \implies x = 14$
- $2x - 1 = \frac{1}{3} \implies x = \frac{2}{3}$
- $2x - 1 = \frac{1}{9} \implies x = \frac{5}{9}$

Desafío 21. Considera la gráfica de $f(x) = 1 + \log x$



- La coordenada x donde la curva corta al eje x es

Ejemplo 2.4.5. Hago el gráfico de $y = \log_{1/3}(-4x)$

De seguro se te pararon los pelos ¡calma!. Es cierto que ese argumento tiene $-4x$, y se puede pensar que no es posible que eso exista. Estudiemos este comportamiento. El dominio de la función logaritmo son todos los valores que lo hacen positivo.

$$-4x > 0 \implies 4x < 0 \implies x < 0$$

Estamos bien, el dominio es

$$\text{dom}(f) = (-\infty, 0)$$

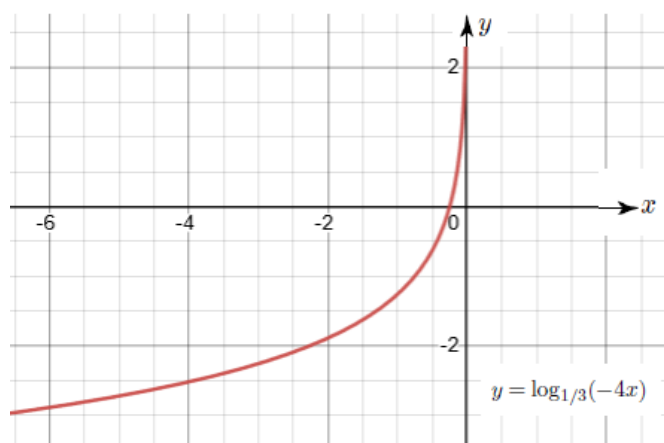
Con esto sacamos que $x = 0$ es asíntota vertical. Además, la base cumple que $0 < \frac{1}{3} < 1$, la función es **creciente** de acuerdo con el siguiente resultado

- $g(x) = \log_a(-x)$ crece si $0 < a < 1$.
- $g(x) = \log_a(-x)$ decrece si $a > 1$

Con algunos valores tenemos su gráfica:

- Si $x = -\frac{1}{4}$ se tiene $\log_{1/3}(1) = 0$. Tenemos el corte con el eje x
- Con un valor a izquierda de $x = -\frac{1}{4}$ y otro a su derecha sabremos si la curva va por encima o por debajo del eje x
 - Si $x = -\frac{9}{4}$, $\log_{1/3}(9) = -2 < 0$. La curva está debajo del eje x en $(-\infty, -\frac{1}{4})$
 - Si $x = -\frac{1}{12}$, $\log_{1/3}(\frac{1}{3}) = 1 > 0$. La curva por encima del eje x en $(-\frac{1}{4}, 0)$

Esta es la gráfica



Begin Test



Pasas con 100%.

1. (3^{pts}) La inversa de la función $f(x) = 2 - \log_2(4 - 2x)$ es:
 - (a) $1 - 2^x$
 - (b) $2 - 2^{1-x}$
 - (c) $2 - 2^x$
 - (d) $1 - 2^{1-x}$
2. (3^{pts}) Si $f(x) = \log_{(x-4)}(16 - x)$, entonces $f(7) =$
 - (a) 27
 - (b) 3
 - (c) 2
 - (d) 9
3. (3^{pts}) La gráfica de $f(x) = \log(x - 1)$ pasa por el punto:
 - (a) $(-1, 0)$
 - (b) $(2, 0)$
 - (c) $(1, 0)$
 - (d) $(0, 0)$
4. (3^{pts}) El dominio de la función $f(x) = \log_x(1 - x^2)$ es:
 - (a) $(1, \infty)$
 - (b) $(-1, 1)$
 - (c) $(-1, 0)$
 - (d) $(0, 1)$
5. (3^{pts}) La concentración de un medicamento en un órgano al tiempo t (en segundos) es

$$y(t) = 0,08 + 0,12 e^{-0,02t}$$

Donde $y(t)$ son gramos/centímetros cúbicos (gr/cm^3). El tiempo en que el órgano alcanza $0,18 \text{ gr}/\text{cm}^3$ de medicamento es:

- (a) 9 seg
- (b) 8,9 seg
- (c) 9,1 seg
- (d) 9,2 seg

End Test

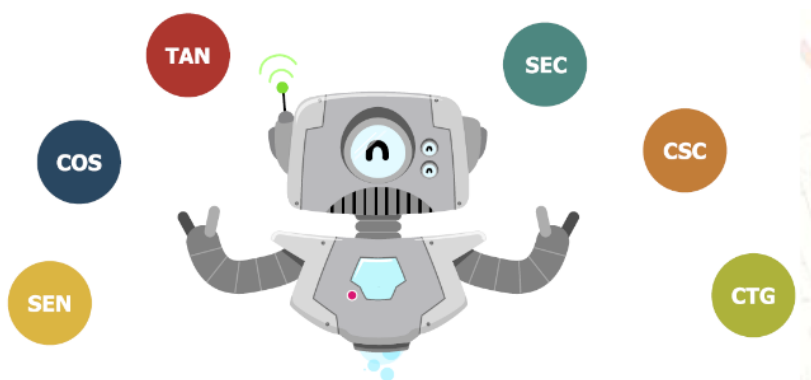
ScoreField

PointsField

Correctas

Correctas

2.5 Funciones Trigonómicas



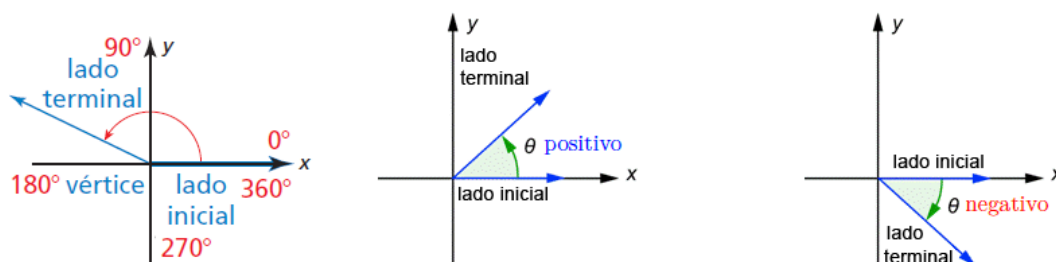
Actividad 27. La ecuación $P = 100 + 20 \sin 2\pi t$ representa la presión sanguínea P de una persona en milímetros de mercurio. En esta ecuación, t es el tiempo en segundos. La presión sanguínea oscila 20 milímetros por arriba y por abajo de 100 milímetros, lo cual significa que la presión sanguínea de la persona es de 120 sobre 80. Esta función tiene un periodo de 1 segundo, o sea que el corazón de la persona late 60 veces por minuto.

- Encuentra la presión sanguínea en $t = 0$, $t = 0.25$, $t = 0.5$, $t = 0.75$ y $t = 1$.
- Durante el primer segundo, ¿cuándo estuvo la presión sanguínea en un máximo?
- Durante el primer segundo, ¿cuándo estuvo la presión sanguínea en un mínimo?

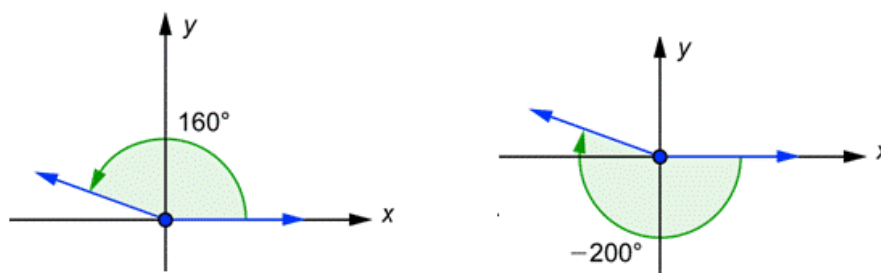
Por supuesto que este problema lo vamos a resolver, pero necesitamos algunos elementos para cumplir esta meta.

2.5.1 Elementos básicos

En trigonometría, los ángulos se posicionan en ejes de coordenadas. El vértice siempre se coloca en el origen y uno de los rayos siempre se coloca en el eje- x positivo. Este rayo se llama **lado inicial** del ángulo. El otro rayo se llama **lado terminal** del ángulo. A este posicionamiento del ángulo se llama **posición estándar**. Se acostumbra utilizar letras griegas para darle nombre a los ángulos. El ángulo que se genera se considera **positivo** si la rotación es en sentido antihorario y **negativo** si el ángulo se mide en sentido horario. Las figuras siguientes muestran estos hechos.

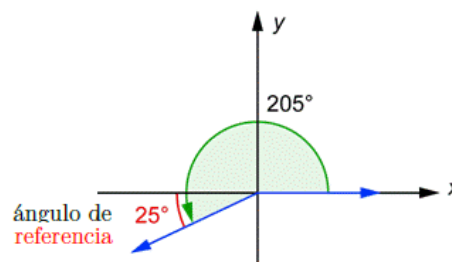
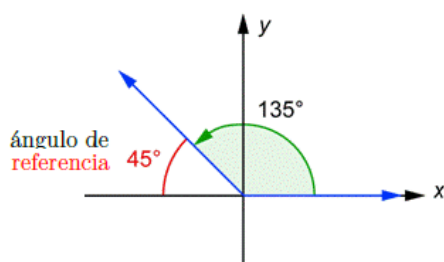


Ejemplo 2.5.1. Mira un par de ejemplos de ángulos en posición estándar. Los lados terminales son el mismo, pero representan ángulos distintos.



Ángulo de referencia

Para cada ángulo dibujado en la posición estándar, existe un ángulo relacionado conocido como ángulo de **referencia**. Este es el ángulo formado por el lado terminal y el eje x . El ángulo de referencia siempre se considera positivo, y tiene un valor entre 0° y 90° . A continuación se ilustran ángulos de referencia.

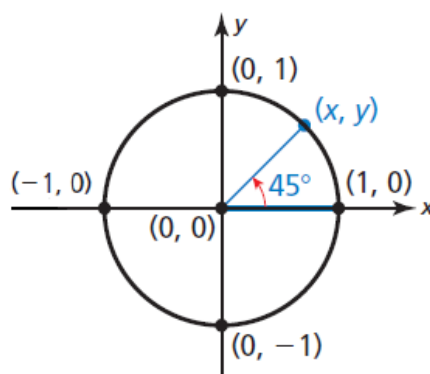
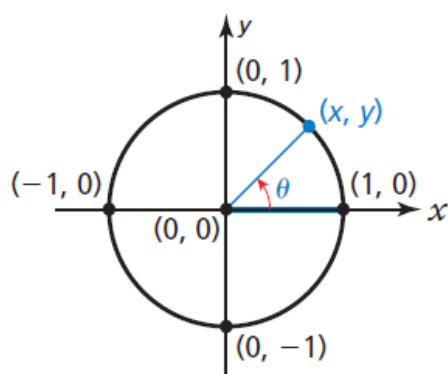


El círculo unitario

El círculo unitario es un círculo en el plano de coordenadas. Su centro está en el origen y tiene un radio de 1 unidad. La ecuación del círculo unitario es

$$x^2 + y^2 = 1$$

Como el punto (x, y) comienza en $(1, 0)$ y se mueve en sentido contrario a las manecillas del reloj alrededor del círculo unitario, el ángulo θ se mueve de 0° a 360° .



Ejemplo 2.5.2. Hallar las coordenadas exactas del punto (x, y) que muestra la figura.

Como el ángulo $\theta = 45^\circ$, el punto (x, y) está en la recta $y = x$. En la ecuación

$$x^2 + y^2 = 1$$

reemplazamos y por x para tener

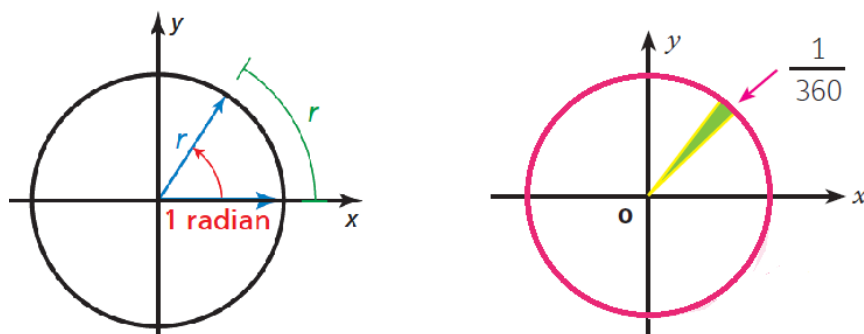
$$x^2 + x^2 = 1 \implies 2x^2 = 1$$

al despejar se halla que $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Se sigue que el punto es

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

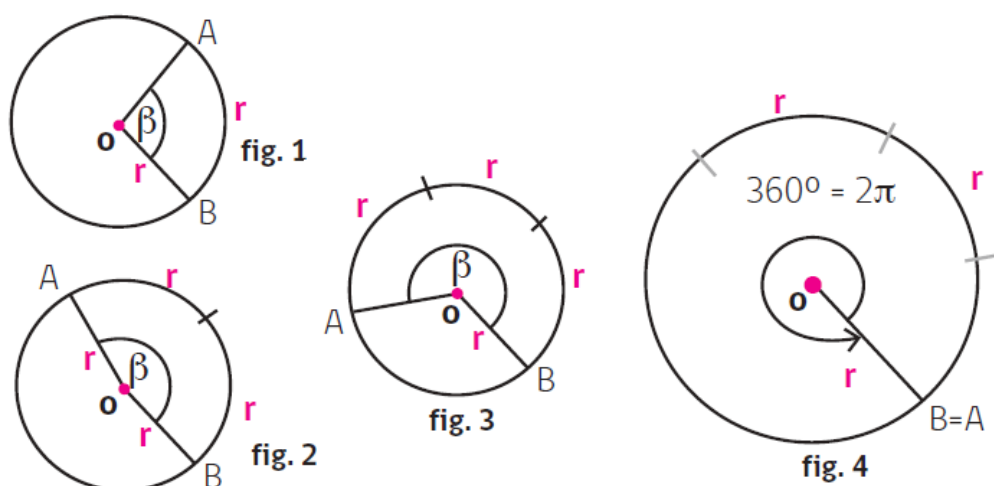
Grados sexagimales y el radián

- Un **grado sexagesimal** (1°) es la medida del ángulo del centro que subtiende un arco igual a una trescientos sesenta ava parte de la circunferencia.



- Un **radian** (1 rad.) es la medida de un ángulo del centro de circunferencia que subtiende un arco de longitud igual a la del radio.

Ejemplo 2.5.3. Considerar la figura siguiente.



- En fig 1: β mide 1 rad.
- En fig 2: β mide 2 rad.
- En fig 3: β mide 3 rad.
- En fig 4: $\beta = 360^\circ$ mide 2π rad.

En la figura 4 se observa que un ángulo de 360° subtiende un arco de circunferencia completo de medida $2\pi r$ unidades, al dividir esta longitud por la medida r del radio, se obtiene 2π , es decir

$$360^\circ = 2\pi [\text{rad}]$$

Esta equivalencia permite establecer que



GRADOS A RADIANES

Multiplicar por

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} [\text{rad}]$$



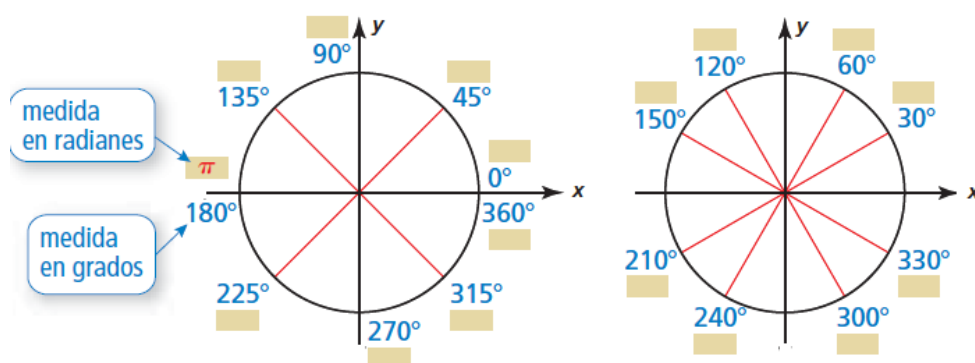
RADIANES A GRADOS

Multiplicar por

$$1 [\text{rad}] = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$$



Ejemplo 2.5.4. Una pequeña entretenición. Completa la ruleta “Ucraniana” con los radianes que corresponden.



TORPEDO 40.

(a) La ruleta del saber



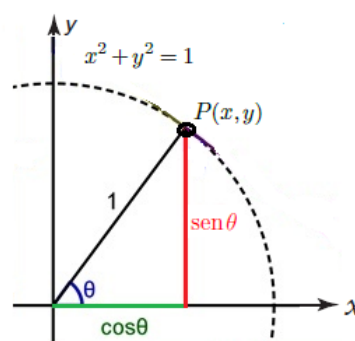
TORPEDO 41.

(a) Si aprendiste con los dedos, esto te traerá recuerdos

2.5.2 Las funciones trigonométricas

Si θ es un número real que corresponde a un ángulo en posición normal y $P(x, y)$ es el punto donde el lado terminal del ángulo corta a la circunferencia unitaria, entonces se definen las seis funciones trigonométricas como sigue:

$\sin \theta = y$	$\cos \theta = x$	$\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x}, x \neq 0$
$\theta = \frac{x}{y}, y \neq 0$	$\sec \theta = \frac{1}{x}, x \neq 0$	$\csc \theta = \frac{1}{y}, y \neq 0$



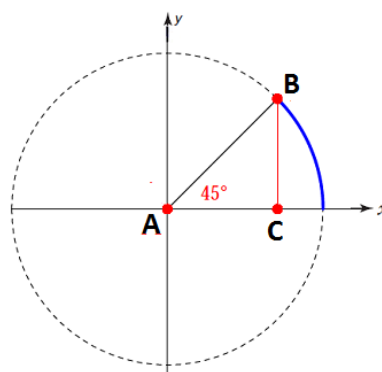
2.5.3 Seno y coseno de 45°

Se considera la figura. El ángulo en A es de 45°. Como el ángulo en C es de 90°, el ángulo en B es de 45°, de manera que el triángulo ABC es isósceles. Se sigue que el lado AC tiene la misma longitud que el lado BC . Por el teorema de Pitágoras

$$|AC|^2 + |BC|^2 = 1$$

como $|AC| = |BC|$, entonces

$$2|BC|^2 = 1 \implies |BC| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$



El lado BC es el seno. Por tanto

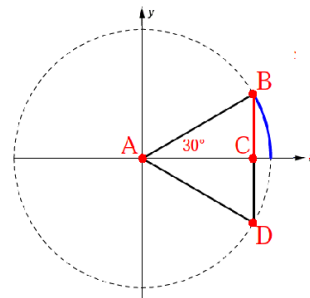
$$\text{sen}(45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Se sigue que el coseno tiene el mismo valor

$$\cos(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

2.5.4 Seno y coseno de 30°

La figura muestra el ángulo de 30° . Al copiar este ángulo en el cuarto cuadrante y prolongar el segmento BC se forma el triángulo equilátero ABD . Al ser equilátero, sus lados tienen la misma medida, por eso el segmento BD mide **una** unidad, de donde se deduce que el segmento BC mide $\frac{1}{2}$.



Este segmento representa al seno del ángulo, por tanto

$$\text{sen}(30^\circ) = \frac{1}{2}$$

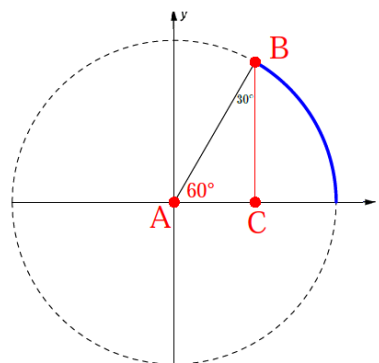
Con este valor, y usando el teorema de Pitágoras en el triángulo ABC se tiene que

$$\cos(30^\circ) = |AC| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

2.5.5 Seno y coseno de 60°

La figura muestra el ángulo de 60° . El ángulo en C es de 90° , y el ángulo en B es de 30° . Estamos en un triángulo rectángulo. Mirando el triángulo desde el ángulo de 30° el seno de 30° (longitud del cateto opuesto) es la longitud del segmento AC , esto es

$$\text{sen } 30^\circ = AC = \frac{1}{2}$$



Para determinar la medida de BC se usa Pitágoras y se halla que

$$\text{sen } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

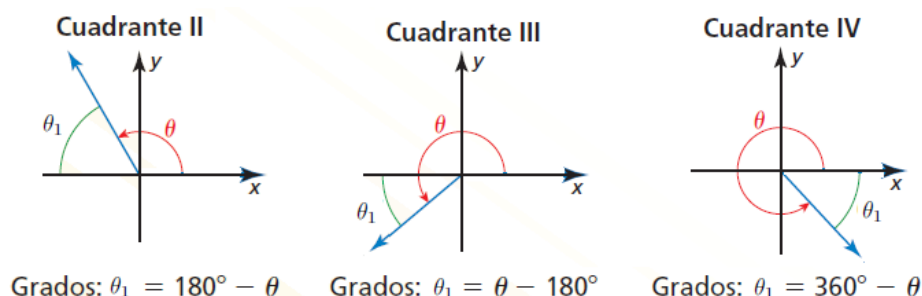
se concluye que

$$\bullet \text{ sen } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\bullet \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

2.5.6 Ángulos de referencia

Considerar que θ es un ángulo en posición estándar. El **ángulo de referencia** para θ es el ángulo agudo θ_1 formado por el lado terminal de θ y el eje x . La relación entre θ y θ_1 se muestra a continuación en la figura.



EJERCICIO 42. Para ver si se entiende te propongo dos problemitas

- Halla el ángulo de referencia $\theta = 300^\circ$
- Halla el ángulo de referencia $\theta = -130^\circ$

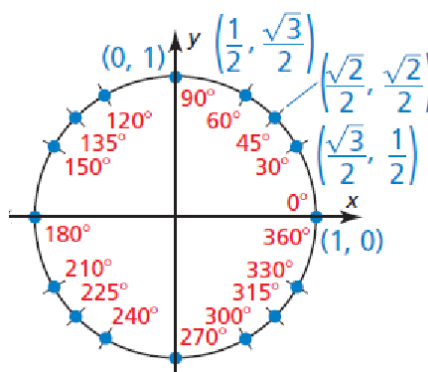
2.5.7 Evaluación de las funciones trigonométricas

Para evaluar las funciones trigonométricas es necesario conocer sus valores en algunos ángulos del primer cuadrante ($30, 45, 60$) y en los ejes coordenados ($0, 90, 180, 270, 360$), además de los signos de las funciones en cada cuadrante y tener muy clara la idea de los ángulos de referencia.

INVITACIÓN 43.

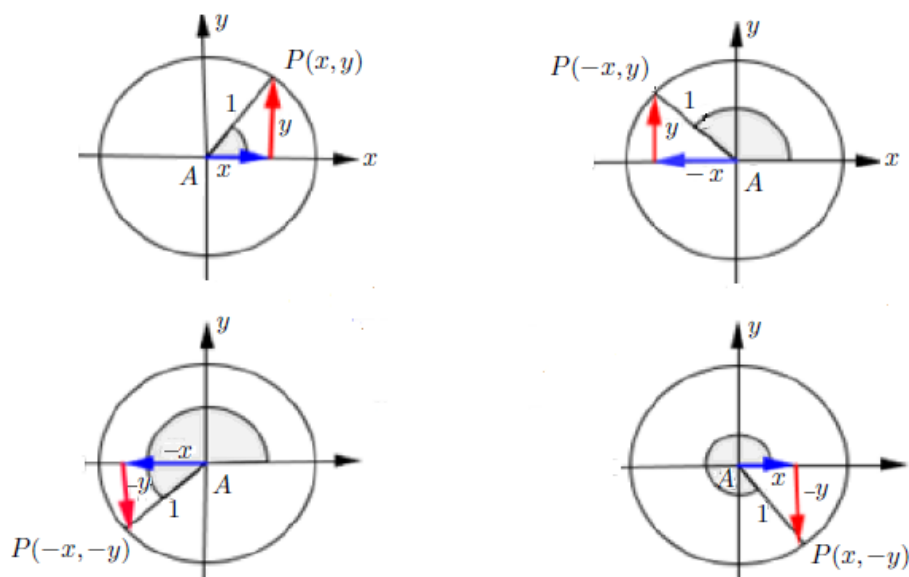


En la figura te muestro los valores importantes del primer cuadrante. Tu tarea es descubrir esos valores. Traza el segmento de recta que une el origen con cada uno de los puntos (uno a la vez), luego formas el triángulo rectángulo y descubres los valores del seno y del coseno.

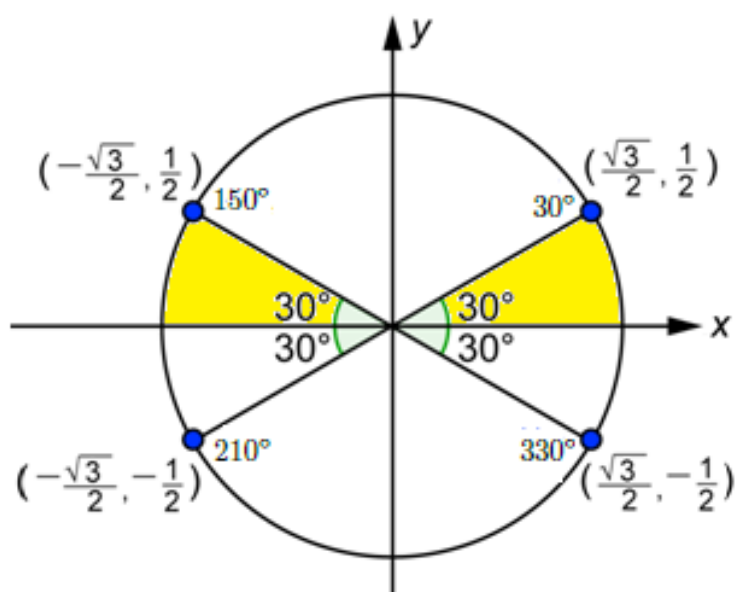


Ejemplo 2.5.5. Considera la figura siguiente para llenar la siguiente tabla con los signos de las funciones seno y coseno

	I cuadrante	II cuadrante	III cuadrante	IV cuadrante
sen x				
cos x				



Ejemplo 2.5.6. *Te voy a sorprender. Mira la figura siguiente*



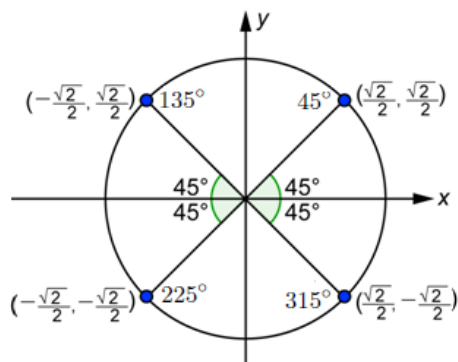
Están indicados los ángulos de 30° , 150° , 210° y 330° . Estos cuatro ángulos tienen un ángulo de referencia de 30° . Si recuerdas que el valor del seno es la segunda coordenada, entonces:

$\text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2}$	$\text{sen } 150^\circ = \frac{1}{2}$	$\text{sen } 210^\circ = -\frac{1}{2}$
$\text{sen } 330^\circ = -\frac{1}{2}$	$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos 210^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos 330^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$	

INVITACIÓN 44.

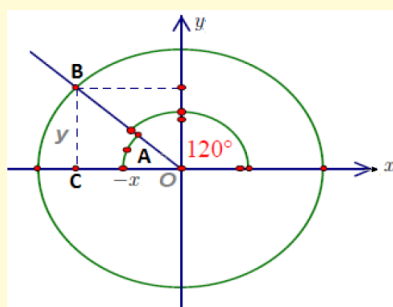


En la figura te muestro los valores en 45° en un proceso similar al anterior. La idea es que descubras los valores del seno y del coseno, con signo incluido, en los cuadrantes restantes.



**CUANDO DICES "NO PUEDO"
TU CEREBRO SE DETIENE.**

Desafío 22. Utiliza la figura para tu respuesta. Usa V para raíz, y / para división ($\sqrt{2}$ =raíz de 2)



Inicio Desafío

1. (2pts) El ángulo de referencia es:
2. (2pts) El valor del $\sin 120^\circ$ es:
3. (2pts) El $\cos 120^\circ$ es:

Fin Desafío

correctas

Número de preguntas respondidas correctamente: Puntos:

Puntos obtenidos:

Porcentaje de éxito:

2.6 Reducción de ángulos

Los ángulos entre 0° y 90° son los ángulos del llamado del primer cuadrante. Sus razones trigonométricas son conocidas, y cualquier otro ángulo mayor que estos, puede reducirse a uno de ellos mediante los ángulos de referencia, y sus razones trigonométricas coinciden con las de éste, por lo que en la práctica se utilizan estas fórmulas con este fin.

Teorema 2.6.1. *Las funciones trigonométricas de 180° más o menos un ángulo agudo son iguales a las mismas funciones del ángulo agudo, con el signo correspondiente al cuadrante en que se halla el ángulo obtuso. Esto es:*

$\operatorname{sen}(\pi - \alpha) = \operatorname{sen} \alpha$	$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$	$\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$
$(\pi - \alpha) = -\alpha$	$\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$	$(\pi - \alpha) = -\alpha$
$\operatorname{sen}(\pi + \alpha) = -\operatorname{sen} \alpha$	$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$	$\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$
$(\pi + \alpha) = \alpha$	$\sec(\pi + \alpha) = -\sec \alpha$	$\operatorname{csc}(\pi + \alpha) = -\operatorname{csc} \alpha$

Ejemplo 2.6.2.

- $\operatorname{sen} 240^\circ = \operatorname{sen}(180^\circ + 60^\circ) = -\operatorname{sen} 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$
- $\cos 330^\circ = \cos(360^\circ - 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

Teorema 2.6.3. *Las funciones trigonométricas de 360° más o menos un ángulo agudo son iguales a las mismas funciones del ángulo agudo, con el signo correspondiente al cuadrante en que se halla el ángulo obtuso. Esto es:*

$\operatorname{sen}(2\pi - \alpha) = -\operatorname{sen} \alpha$	$\cos(2\pi - \alpha) = \cos \alpha$	$\operatorname{tg}(2\pi - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$
$(2\pi - \alpha) = -\alpha$	$\sec(2\pi - \alpha) = \sec \alpha$	$\operatorname{csc}(2\pi - \alpha) = \operatorname{csc} \alpha$
$\operatorname{sen}(2\pi + \alpha) = \operatorname{sen} \alpha$	$\cos(2\pi + \alpha) = \cos \alpha$	$\operatorname{tg}(2\pi + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$
$(2\pi + \alpha) = \alpha$	$\sec(2\pi + \alpha) = \sec \alpha$	$\operatorname{csc}(2\pi + \alpha) = \operatorname{csc} \alpha$

Actividad 28.

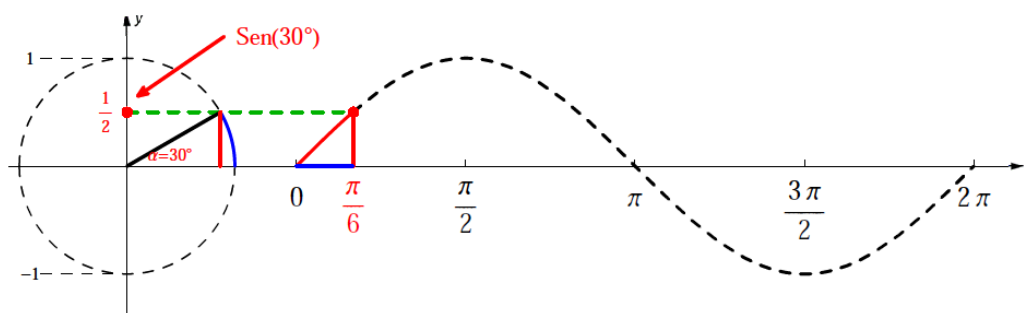
- $\text{sen } 240^\circ = \text{sen}(180^\circ + 60^\circ) = -\text{sen } 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- $\text{cos } 420^\circ = \text{cos}(360^\circ + 60^\circ) = \text{cos } 60^\circ = \frac{1}{2}$.

Actividad 29. Reducir a su menor expresión:

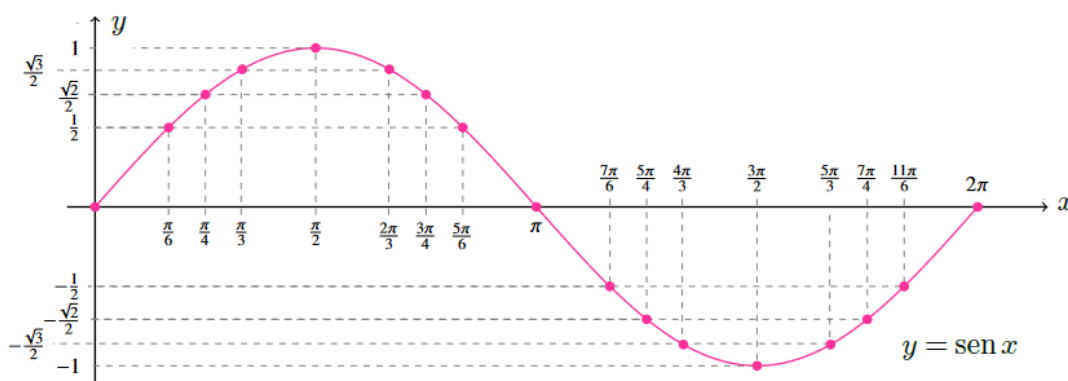
1. $\frac{\text{sen } 40^\circ}{\text{sen } 140^\circ} + \frac{\text{cos } 20^\circ}{\text{cos } 160^\circ} + \frac{\text{tg } 80^\circ}{\text{tg } 180^\circ} =$
2. $\text{sen } 150^\circ + \text{cos } 240^\circ - \text{tg } 315^\circ =$

2.6.1 Gráfica de la función seno

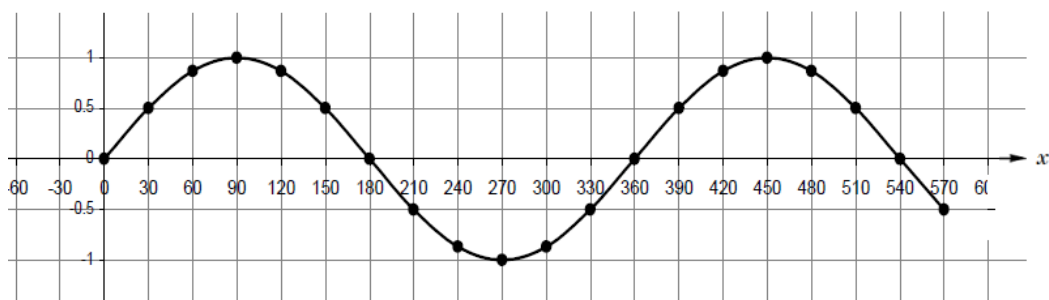
Poniendo tu imaginación al servicio del aprendizaje lúdico, la construcción de la gráfica del seno se puede realizar de la manera como se muestra paso a paso en las siguientes figuras. Se supone que se parte desde el ángulo de 0° . La figura ilustra el ángulo de 39° . La línea roja representa al seno, y a medida que se avanza sobre la circunferencia en sentido positivo, el mismo triángulo va generando la curva que muestra la figura. La gráfica que se forma (la línea roja) se dibuja de manera continua. Finalmente debemos observar que de esta manera dibujamos la gráfica del seno en el intervalo $[0, 2\pi]$. Como la función seno tiene periodo 2π la curva la podemos extender a todos los ángulos.



Observación. Si tienes tiempo visita el sitio www.math.com.mx. Finalmente la gráfica del seno queda de la siguiente manera:



Como la función seno tiene periodo 2π , su gráfica que tenemos en $[0, 2\pi]$ se copia en los intervalos (de longitud 2π) siguientes y anteriores para ocupar todo el eje horizontal.



2.6.2 Propiedades básicas de la función $y = \text{sen}(x)$

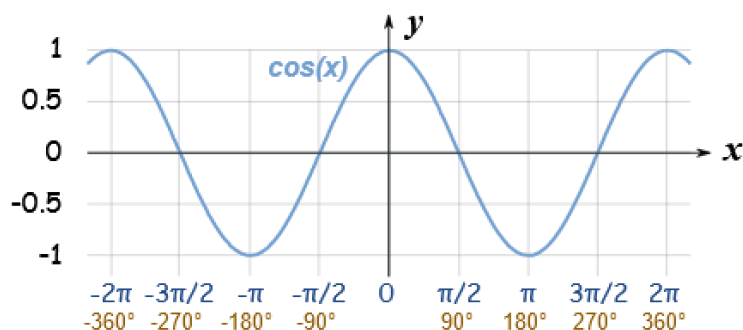
De la gráfica de la función seno podemos inferir algunas propiedades:

- La función seno tiene dominio $\mathbb{R}$ y rango el intervalo $[-1, 1]$
- La función seno es impar, es decir $\text{sen}(-x) = -\text{sen}(x)$.
- La función seno tiene un periodo 2π , es decir $\text{sen}(x) = \text{sen}(x + 2\pi)$.
- La función seno es acotada, es decir $|\text{sen}(x)| \leq 1$.
- La función seno tiene máximos (valor 1) en $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- La función seno tiene mínimos (valor -1) en $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

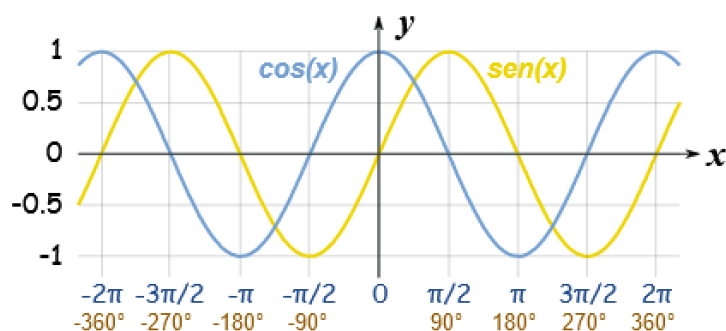
2.6.3 Gráfica de la función $y = \cos(x)$

La gráfica del coseno tiene bastante similitud con la del seno. Con la tabla siguiente se puede construir

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$f(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



La gráfica del coseno se puede obtener de la del seno trasladándola $\frac{\pi}{2}$ unidades a izquierda.



Observación. En la página <https://www.desmos.com/calculator/6zcupafgz?lang=es> puedes ver una construcción del coseno

2.6.4 Propiedades básicas de la función $y = \cos(x)$

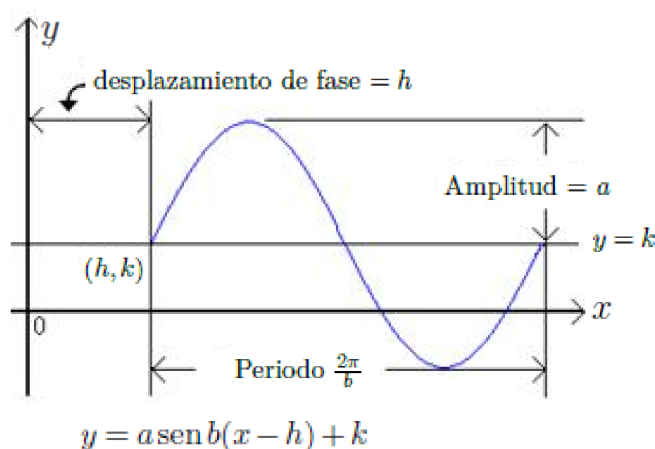
De la gráfica de la función coseno podemos inferir algunas propiedades:

- Las imágenes de la función $f(x) = \cos(x)$ están en el intervalo $[-1, 1]$.
- El máximo de la función se alcanza cuando $x = 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.
- El mínimo de la función se alcanza cuando $x = \pi + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.
- Los ceros de la función se obtienen cuando $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.
- La gráfica de la función es periódica, se repite cada $2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.
- La función coseno es par (es simétrica con respecto al eje y).

2.7 Gráfica general de la función seno

Vamos a estudiar la función general del seno que tiene la forma

$$y = a \operatorname{sen} b(x - h) + k$$



- **Eje de referencia:** Es la recta horizontal $y = k$ que divide a la sinusoide en dos porciones equivalentes. Se conoce también como **desplazamiento vertical**.

- **Amplitud:** Es la distancia vertical que existe entre el eje de referencia y la parte más alta o la parte más baja de la senoide (cambia el tamaño de la función)
- **El periodo:** El **periodo** o **longitud de onda** P es el tiempo necesario para que la función ejecute un ciclo completo.

$$P = \frac{2\pi}{b}$$

- **Frecuencia:** La frecuencia es el número de veces que la curva seno o coseno se repite en el periodo. Usamos la letra b .

$$b = \frac{2\pi}{P}$$

- **Desfase:** El valor de h produce un desplazamiento horizontal de la gráfica. Si $h > 0$, el desplazamiento es hacia la derecha. Si $h < 0$ el desplazamiento es hacia la izquierda.
- **Fin del ciclo:** Es donde termina la gráfica de la función, es $h + P$

Ejemplo 2.7.1. Hallar los elementos necesarios para realizar la gráfica de $y = 3 \sin x$

Haremos un tabla para no olvidar los elementos que se necesitan para la gráfica

eje de referencia	amplitud	desfase	período	frecuencia	fin de ciclo
$k = 0$	$a = 3$	$h = 0$	2π	1	$0 + 2\pi$

Para realizar el gráfico se deben hallar los “cototos” de la gráfica (máximos y mínimos) en $[0, 2\pi]$, como también los ceros de la función.:

- Los **máximos** habituales del seno están en $\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$. Luego

$$x = \frac{\pi}{2}$$

$$x = \frac{5\pi}{2}, \text{ fuera del intervalo.}$$

- Los **mínimos** habituales del seno están en $\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}$. Luego

$$x = \frac{3\pi}{2}$$

$$x = \frac{5\pi}{2}, \text{ ¡fuera del intervalo!}$$

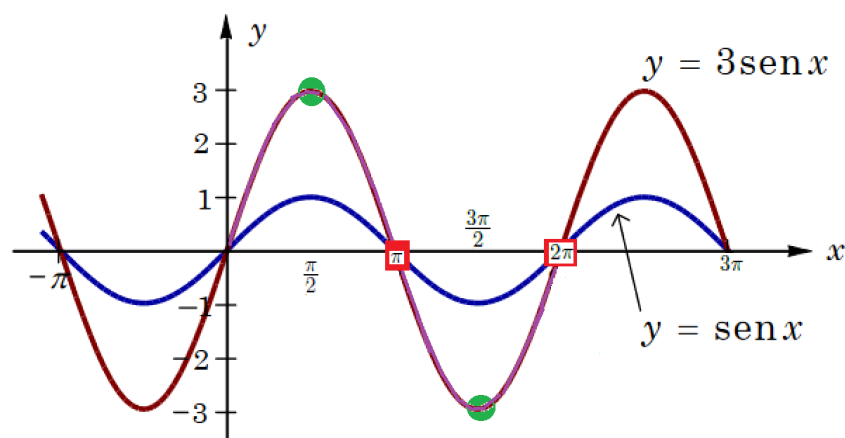
- Los **ceros** del seno están en $0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi$, etc. Se tiene:

$$x = 0$$

$$x = \pi$$

$$x = 2\pi$$

Estos valores están dentro del intervalo. Todos los valores hallados se muestran en la figura.



El único cambio respecto de la ecuación $y = \text{sen } x$ es la amplitud

Ejemplo 2.7.2. Indicar los elementos que se necesitan para graficar $y = 3 \text{sen}(2x) + 2$

La tabla de datos es la siguiente

eje de referencia	amplitud	desfase	período	frecuencia	fin de ciclo
$k = 2$	3	$h = 0$	$P = \pi$	$b = 2$	π

Se deben hallar los “cototos” de la gráfica (máximos y mínimos) en $[0, \pi]$, como también los ceros de la función.:

- Los máximos habituales del seno están en $\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$. Luego

$$2x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

Este valor sirve pues está en el intervalo señalado (el $2x$ es el argumento del seno)

$$2x = \frac{5\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{4}$$

este valor no sirve, es mayor que π .

- Los mínimos habituales del seno están en $\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}$. Luego

$$2x = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$$

Este valor sirve pues está en el intervalo señalado.

$$2x = \frac{7\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{7\pi}{4}$$

este valor no sirve, es mayor que π .

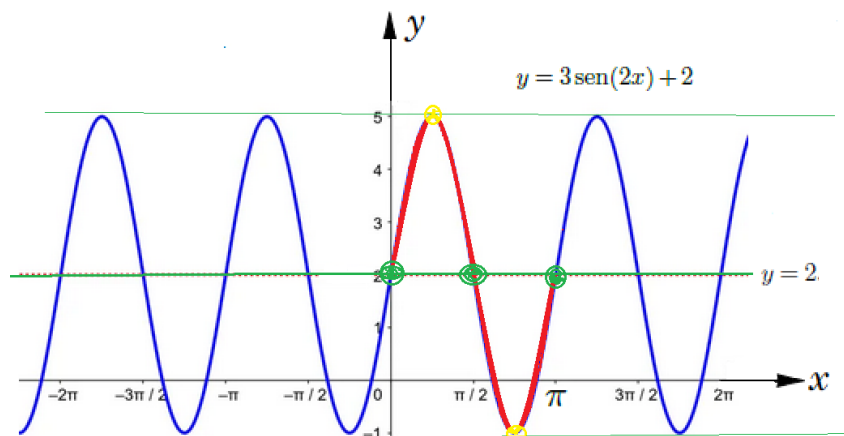
- Los ceros del seno están en $0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi$, etc. St tiene:

$$2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$2x = \pi \implies x = \frac{\pi}{2}$$

$$2x = 2\pi \implies x = \pi$$

con estos valores estamos dentro del intervalo. En la figura aparecen remarcados

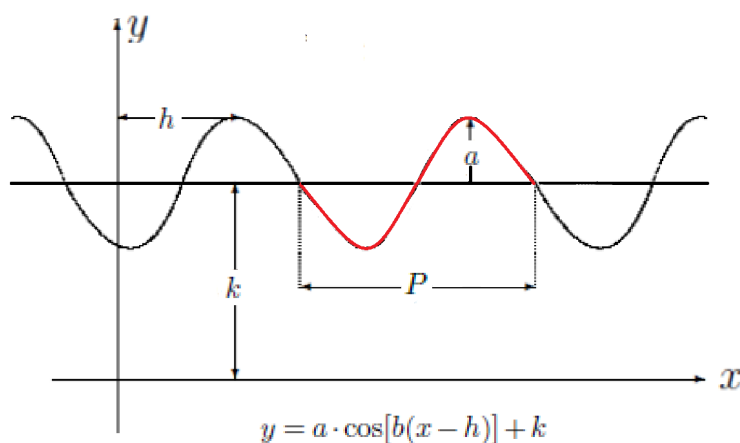


2.7.1 Gráfica general del coseno

Al igual que la función seno, el coseno tiene una forma general, que incluye todos los casos particulares de ella. Esta ecuación es

$$y = a \cdot \cos[b(x - h)] + k$$

La figura muestra la **curva general del coseno**. En ella, a es la **amplitud**, k el **desplazamiento vertical**, P el **periodo** o **longitud de onda**, b la **frecuencia angular** ($b \cdot P = 2\pi$), y h el **desfase** (la distancia entre el eje y y su valor máximo)



Ejemplo 2.7.3. Hago el gráfico de la función $y = 2 \cos(x)$ y la comparo con $y = \cos(x)$.

En la tabla siguiente comparamos los elementos entre ambas funciones

	eje referencia	amplitud	desfase	período	frecuencia	fin ciclo
$\cos(x)$	$k = 0$	$a = 1$	$h = 0$	$P = 2\pi$	$b = 1$	2π
$2 \cos(x)$	$k = 0$	$a = 2$	$h = 0$	$P = 2\pi$	$b = 1$	2π

La única diferencia es el valor de la amplitud. El proceso para graficar, ya lo conoces, máximos, mínimos y ceros.

- Los máximos habituales del coseno (1) están en $0, 2\pi$. Luego

$$x = 0, x = 2\pi \text{ ambos en } [0, 2\pi]$$

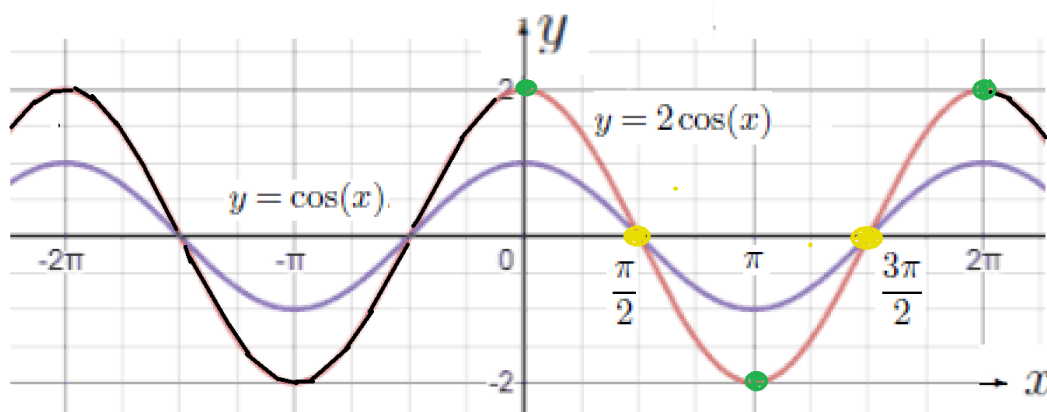
- Los mínimos habituales del coseno (-1) están en $\pi, 3\pi$. Luego

$$x = \pi, \text{ el único que sirve}$$

- Los ceros del coseno están en $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$, etc. Se tiene:

$$x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3\pi}{2}$$

En la figura aparecen remarcados



Ejemplo 2.7.4. Graficar la función $y = 1 + 2 \cos(2x)$

Como siempre, una tabla

eje referencia	amplitud	desfase	período	frecuencia	fin ciclo
$y = 1$	$a = 2$	$h = 0$	$P = \pi$	$b = 2$	π

- Los máximos habituales del coseno (1) están en $0, 2\pi, 4\pi$. Luego

$$2x = 0 \implies x = 0$$

$$2x = 2\pi \implies x = \pi$$

- Los mínimos habituales del coseno (-1) están en $\pi, 3\pi$. Luego

$$2x = \pi \implies x = \frac{\pi}{2}$$

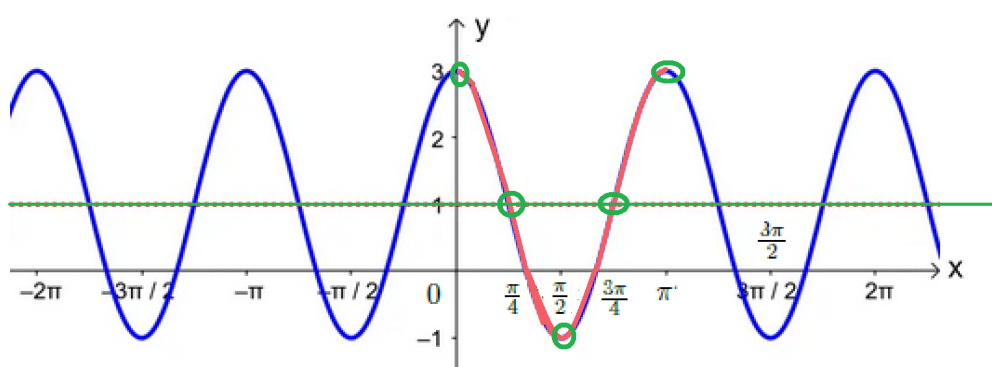
$$2x = 3\pi \implies x = \frac{3\pi}{2} \text{ fuera de } [0, \pi]$$

- Los ceros del coseno están en $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$, etc. Se tiene:

$$2x = \frac{\pi}{2} \implies x = \frac{\pi}{4}$$

$$2x = \frac{3\pi}{2} \implies x = \frac{3\pi}{4}$$

En la figura aparecen remarcados los puntos hallados



Ejemplo 2.7.5. Hallar la amplitud, período, frecuencia y desfase de la función

$$y = 2 \cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) - 3$$

Primero, la tabla, tablita, tablón

eje referencia	amplitud	desfase	período	frecuencia	fin ciclo
$k = -3$	$a = 2$	$h = \frac{\pi}{6}$	$P = \frac{2\pi}{3}$	$b = 2$	$2\pi + \frac{\pi}{6}$

- Los máximos del coseno (1) están en $0, 2\pi, 4\pi$. Luego

$$3x - \frac{\pi}{2} = 0 \implies x = \frac{\pi}{6}$$

$$3x - \frac{\pi}{2} = 2\pi \implies x = \frac{5\pi}{6}$$

- Los mínimos habituales del coseno (-1) están en π , 3π . Luego

$$3x - \frac{\pi}{2} = \pi \implies x = \frac{3\pi}{6}$$

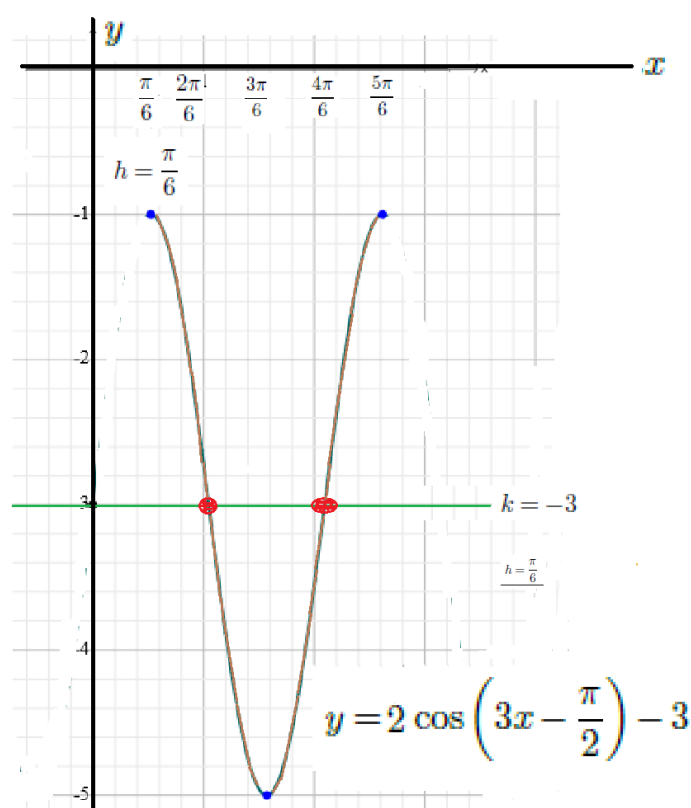
$$3x - \frac{\pi}{2} = 3\pi \implies x = \frac{7\pi}{6} \text{ ¡fuera!}$$

- Los ceros del coseno están en $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$, etc. Se tiene:

$$3x - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \implies x = \frac{2\pi}{6}$$

$$3x - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} \implies x = \frac{4\pi}{6}$$

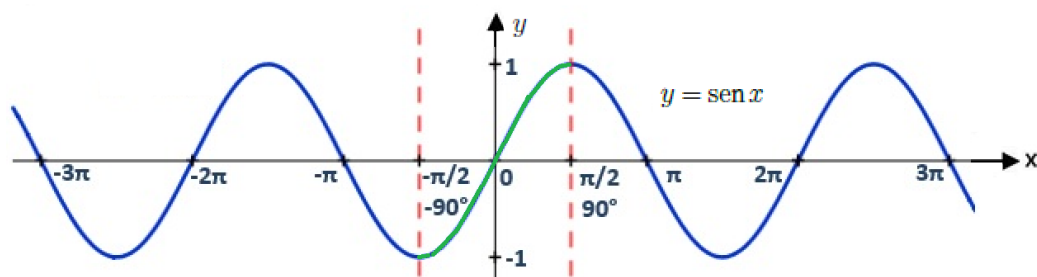
La gráfica es la siguiente



2.7.2 Funciones trigonométricas Inversas

Las funciones trigonométricas son todas periódicas, de modo que las gráficas de ninguna de ellas pasa la prueba de la línea horizontal para ser inyectiva. Esto significa que ninguna de ellas tiene una inversa a menos que el dominio de cada una esté restringido a hacer de ella una función inyectiva.

Restricción para $y = \sin x$



- Se restringe el dominio de $f(x) = \sin x$ al intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ para hacerla inyectiva y estrictamente creciente.

En estas condiciones existe la función inversa de $\sin x$, que se denota $\arcsin x$.

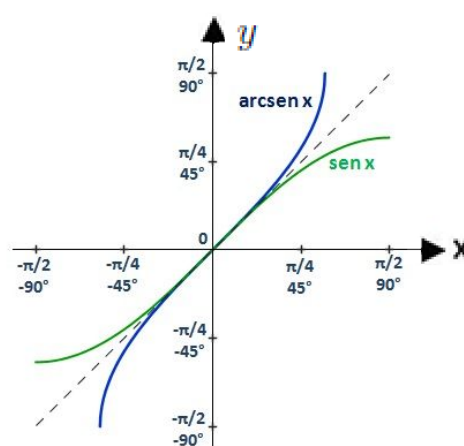
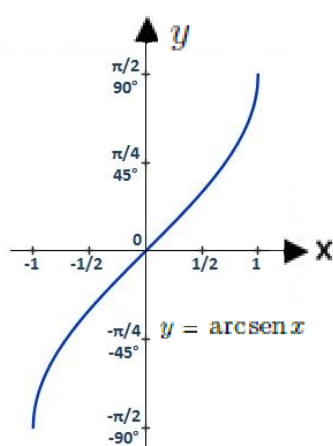
$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

$$\arcsin x = y \iff x = \sin y$$

A partir de lo cual se satisface:

$$\arcsin(\sin x) = x, \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\sin(\arcsin(x)) = x, \quad -1 \leq x \leq 1$$

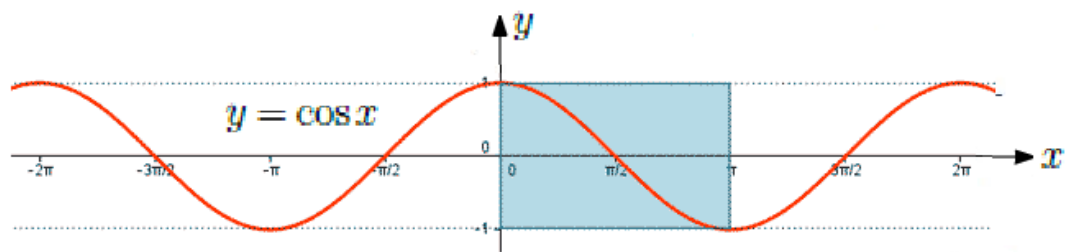


La gráfica de la función arcoseno es simétrica a la de la función seno respecto a la recta bisectriz del primer y tercer cuadrante $y = x$.

Actividad 30. Completa la siguiente tabla:

Función	Expresión equivalente	Solución
$y = \arcsen(\frac{1}{2})$	$\text{sen}(y) = \frac{1}{2}, -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$	$y = \frac{\pi}{6}$
$y = \arcsen(-\frac{1}{2})$		
$y = \arcsen(-1)$		
$y = \arcsen(-\frac{\sqrt{2}}{2})$		
$y = \arcsen(-\frac{\sqrt{3}}{2})$		
$y = \arcsen(0)$		

Restricción para $y = \cos x$



- Se restringe el dominio de $f(x) = \cos x$ al intervalo $[0, \pi]$ para hacerla inyectiva.

En estas condiciones existe la función inversa de $\cos x$, que se denota $\arccos x$.

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

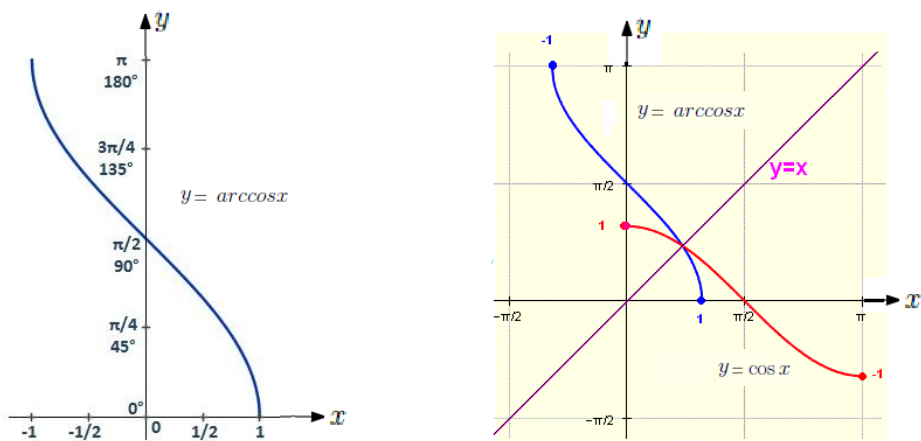
$$\arccos x = y \iff x = \cos y$$

Se verifica que:

$$\arccos(\cos x) = x, \quad 0 \leq x \leq \pi$$

$$\cos(\arccos(x)) = x, \quad -1 \leq x \leq 1$$

La gráfica de la función $y = \arccos x$ se muestra en la figura izquierda que sigue, y en la figura derecha junto a su función inversa $y = \cos x$



Actividad 31. Completa la siguiente tabla:

Función	Expresión equivalente	Solución
$y = \arccos(\frac{1}{2})$	$\cos(y) = \frac{1}{2}, 0 \leq y \leq \pi$	$y = \frac{\pi}{3}$
$y = \arccos(-\frac{1}{2})$		
$y = \arccos(-1)$		
$y = \arccos(-\frac{\sqrt{2}}{2})$		
$y = \arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2})$		
$y = \arccos(0)$		

Begin Test



Pasas con 100%.

1. (3^{pts}) La operación $\sin^2 60^\circ - 4(1 - \sin 30^\circ + \sin 45^\circ \cdot \cos 45^\circ)$ da como resultado:

(a) $-\frac{9}{4}$

(b) $\frac{9}{4}$

(c) $-\frac{13}{4}$

(d) $\frac{13}{4}$

2. (3^{pts}) El valor de x para que en la expresión siguiente se de la igualdad es:

$$\frac{\cos A}{1 + \sin A} + \frac{\cos A}{1 - \sin A} = \frac{2}{x}$$

(a) $x = \cos A$

(b) $x = \sin A$

(c) $x = 1$

(d) $x = \operatorname{tg} A$

3. (3^{pts}) La amplitud de la función $y = -\frac{1}{2} \cos x$ es:

(a) 1

(b) $\frac{1}{2}$

(c) $-\frac{1}{2}$

(d) 2

4. (3^{pts}) El periodo de la función $y = 4 \cos\left(\frac{x}{2}\right)$ es:

(a) 2π

(b) 4π

(c) π

(d) $\frac{\pi}{2}$

5. (3^{pts}) En la función $g(x) = 5 \cos \frac{1}{2}(x - 3\pi)$ el desfase es:

(a) $h = 3\pi$

(b) $h = \frac{3\pi}{2}$

(c) $h = 4\pi$

(d) $h = 5$

6. (3^{pts}) Los ceros de $g(t) = \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$ en $[0, 2\pi]$ son:

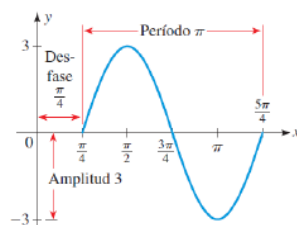
(a) $\frac{3\pi}{2}$

(b) $\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$

(c) $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$

(d) 0, 2π

7. (3^{pts}) La función seno de la figura es:



(a) $3 \sin(x - \pi)$

(b) $3 \sin(x + \frac{\pi}{4})$

(c) $3 \sin(x - \frac{\pi}{2})$

(d) $3 \sin(x - \frac{\pi}{4})$

End Test

Correctas

ScoreField

PointsField

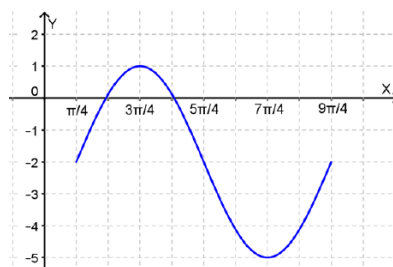
Correctas

Begin Test



Pasas con 100%.

El siguiente gráfico representa una función de la forma $y = a \sin b(x - h) + k$



1. (3^{pts}) El desfase es:

(a) $h = \pi$

(b) $h = \frac{\pi}{2}$

(c) $h = \frac{\pi}{4}$

(d) $h = -\frac{\pi}{4}$

2. (3^{pts}) La amplitud de la función es:

(a) $a = 3$

(b) $a = -3$

(c) $a = 5$

(d) $a = 1$

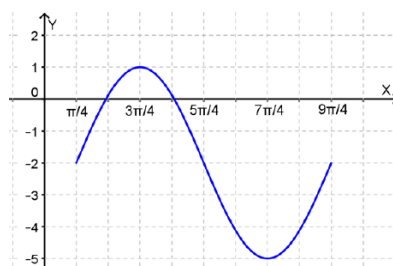
3. (3^{pts}) El periodo de la función es:

(a) $P = \frac{\pi}{4}$

(b) $P = \frac{3\pi}{4}$

(c) $P = \pi$

(d) $P = 2\pi$



4. (3^{pts}) El desplazamiento vertical de la función es:

(a) $k = 1$

(b) $k = 0$

(c) $k = -2$

(d) $k = 2$

5. (3^{pts}) La ecuación de la función es:

(a) $y = 3 \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) - 2$

(b) $y = 3 \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) - 2$

(c) $y = 3 \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) + 2$

(d) $y = 3 \sin \left(x - \frac{\pi}{2} \right) - 2$

End Test

ScoreField

PointsField

Correctas

Correctas

Begin Test



Pasas con 100%.

La ecuación $P = 100 + 20 \sin 2\pi t$ representa la presión sanguínea P de una persona en milímetros de mercurio. En esta ecuación, t es el tiempo en segundos. La presión sanguínea oscila 20 milímetros por arriba y por abajo de 100 milímetros, lo cuál significa que la presión sanguínea de la persona es de 120 sobre 80. Esta función tiene un periodo de 1 segundo, o sea que el corazón de la persona late 60 veces por minuto.



1. (3^{pts}) La presión sanguínea al inicio ($t = 0$) es de:

- (a) 120 (b) 100 (c) 80 (d) 0

2. (3^{pts}) Durante el primer segundo, la presión sanguínea tuvo un máximo en:

- (a) $t = 0,30$ (b) $t = 0,15$ (c) $t = 0,10$ (d) $t = 0,25$

3. (3^{pts}) Durante el primer segundo, la presión sanguínea tuvo un mínimo en:

- (a) $t = 0,45$ (b) $t = 0,55$ (c) $t = 0,75$ (d) $t = 0,65$

End Test

ScoreField

PointsField

Correctas

Correctas

UNIVERSIDAD DE LA FRONTERA
Departamento de Matemática y Estadística

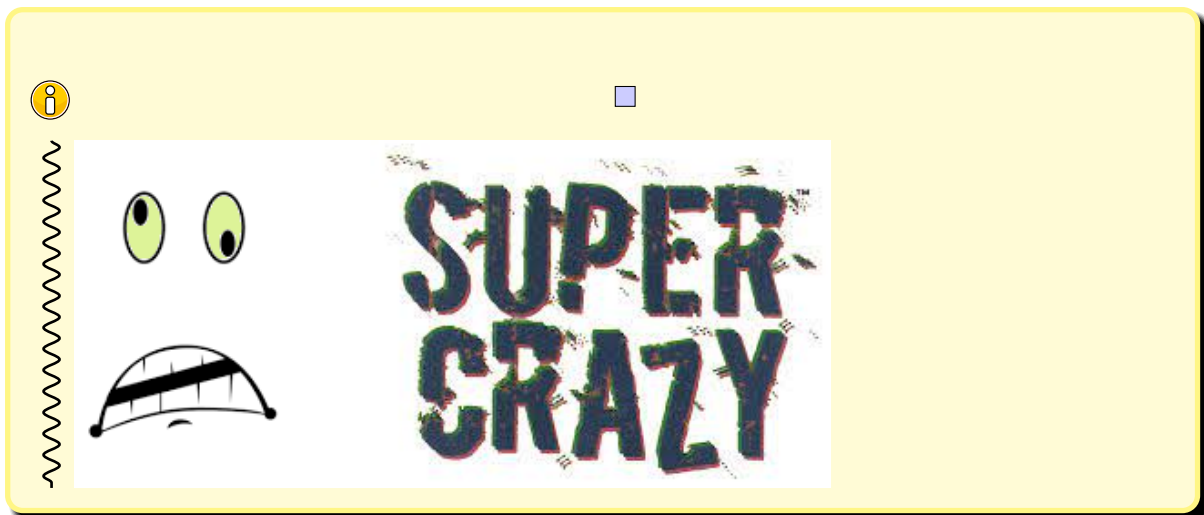
CUADERNO INTERACTIVO

Geometría Analítica



Matemática

cuaderno de autoaprendizaje



Este es el cuaderno de auto aprendizaje, presenta un resumen de los contenidos del programa de la asignatura, establece una ruta para el desarrollo de estos contenidos y colabora en el logro de tu aprendizaje.

Nuestro amigo **SuperCrazy** nos sigue acompañando y ayudando. No es visible, pero lo puedes considerar tu **ayudante** de cabecera.

3.1 Introducción

La Geometría Analítica es un puente entre el Álgebra y la Geometría que hace posible resolver algebraicamente problemas geométricos, como también resolver geométricamente problemas algebraicos.

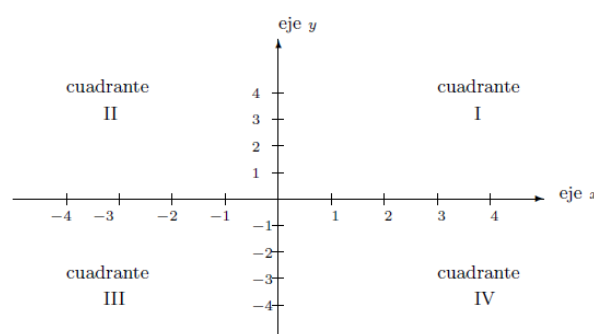
Objetivos Generales

- Dada una gráfica en el plano de coordenadas, encontrar la expresión algebraica correspondiente.
- Dada la expresión algebraica, determinar la gráfica que le corresponde.

3.2 Sistema de coordenadas rectangulares

Un sistema cartesiano, o de coordenadas rectangulares se forma en un plano con dos rectas perpendiculares que se intersectan en un punto que es el cero (0) de cada recta. Este punto de intersección se llama **origen** del sistema y se denota con la letra 0 . La recta horizontal se conoce como eje de las **abscisas** (x), y a la recta vertical como eje de las **ordenadas** (y).

Estos ejes dividen el plano en cuatro regiones, llamadas **cuadrantes**, que se numeran del I a IV tal como lo muestra la figura. Los ejes x e y se deben graduar, pero no necesariamente sus escalas deben coincidir. Por lo general se toman las mismas escalas. La figura muestra el caso en que son diferentes.



3.3 Abscisa y Ordenada

Sea P un punto en este plano cartesiano. Se asocia un par ordenado de números reales con este P , trazando una línea vertical desde P hasta el eje x , y una línea horizontal desde P hasta el eje y . Si la línea vertical intersecta el eje x en a y la línea horizontal intersecta el eje y en b , entonces hemos asociado el punto P con el par ordenado (a, b) .

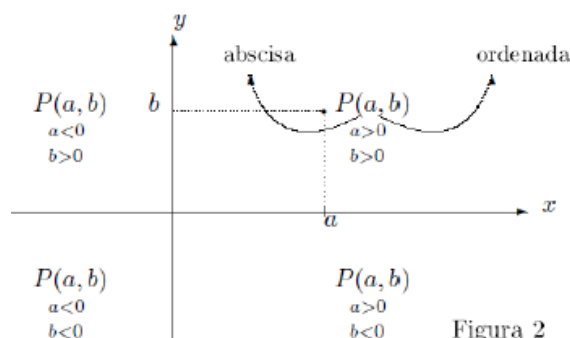


Figura 2

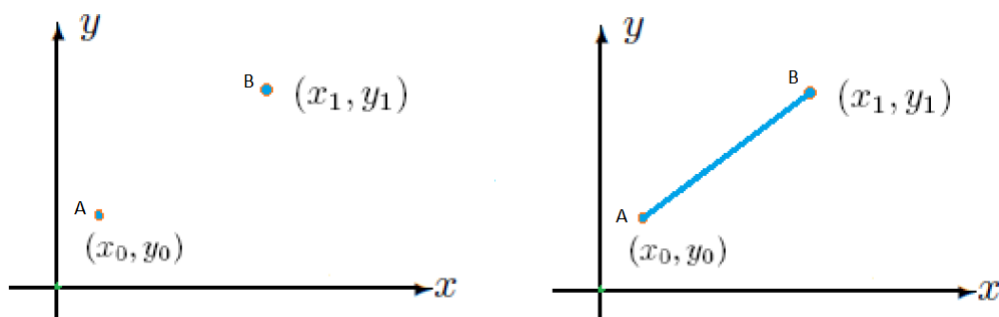
Al valor a se le denomina *abscisa* del punto P y al valor b *ordenada* del punto P . A ambos valores se les llama *coordenadas* del punto P . Los signos de las coordenadas de un punto dependen del cuadrante en que estén ubicados. La figura 2 ilustra esta situación

EJERCICIO 45.

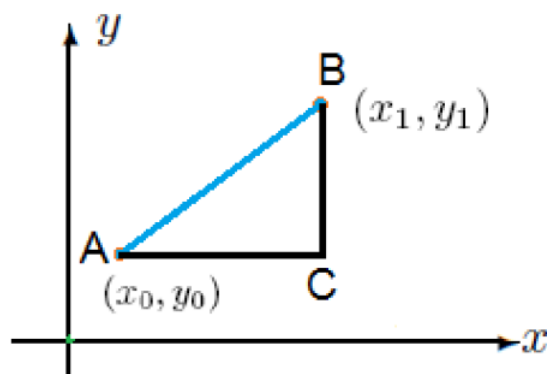
- (a) En el plano cartesiano identifica los ejes x e y , elige tus escalas numéricas sobre cada eje y anota los siguientes puntos en el plano: $A(3, 2)$, $B(8, -2)$, $C(-6, -3)$, $D(-3, 5)$, $E(10, 0)$ y $F(0, 6)$.

3.3.1 Distancia entre dos puntos

Se considera un par de puntos de coordenadas $A = (x_0, y_0)$ y $B = (x_1, y_1)$, con $x_0 < x_1$, $y_0 < y_1$ en el primer cuadrante, y la recta que los une



Ahora viene lo interesante. Hay que calcular la distancia $d(A, B)$. Se forma un triángulo rectángulo con hipotenusa AB .



EJERCICIO 46. Si eres tan amable: T

(a) escribe en la figura, cuanto mide cada cateto.

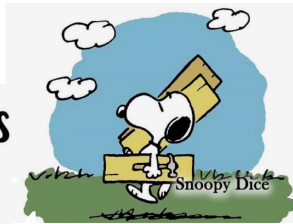
(b) Es obvio que ¡Pitágoras es lo máximo! anota entonces $d(A, B) =$

Fórmula para la distancia:

La distancia entre los puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1) , del plano cartesiano, es

$$d[(x_0, y_0), (x_1, y_1)] = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$$

Por motivos ajenos
a mi voluntad...



voy a trabajar

Begin Test

**MATHS
QUIZ**

Pasas con 100%.

1. La distancia entre los puntos $(-2, 1)$ y $(3, 4)$ es:

☐ $\sqrt{33}$

☐ 36

☐ $\sqrt{34}$

☐ $\sqrt{35}$

2. Dos puntos del plano; $P(-3, y)$ y $Q(9, 2)$ se encuentran “conversando en voz alta”. Si la distancia entre ellos es $d(P, Q) = 13$, el valor de y es:

☐ $y = -3, y = 7$

☐ $y = 3, y = 7$

☐ $y = -3, y = -7$

☐ $y = 3, y = -7$

3. Un rectángulo tiene vértices en los puntos $(1, 2)$, $(4, 7)$, $(-6, 13)$ y $(-9, 8)$. Las diagonales miden:

☐ $\sqrt{180}$

☐ $\sqrt{120}$

☐ $\sqrt{130}$

☐ $\sqrt{170}$

End Test

Puntos:

Correctas

3.4 Lugares Geométricos

Un Lugar geométrico (LG) es un conjunto de puntos del plano cartesiano que satisface cierta condición expresada por una ecuación del tipo $F(x, y) = 0$.

Estudiaremos los siguientes lugares geométricos: La recta, la parábola, la elipse, la circunferencia y la hipérbola.

3.5 La Recta

Desde el punto de vista de la geometría tenemos el siguiente resultado

Teorema 3.5.1. A toda recta L del plano cartesiano está asociada al menos una ecuación de la forma

$$ax + by + c = 0$$

en donde a , b y c son números reales; $a \neq 0$ o bien $b \neq 0$, siendo (x, y) un punto genérico de L .

Ecuación general

La ecuación $ax + by + c = 0$ se denomina **Ecuación General** de la recta, la cual es satisfecha por todos los puntos $P(x, y)$ pertenecientes a dicha recta.

Ecuación pendiente-ordenada al origen

A partir de la ecuación general de la recta $ax + by + c = 0$, si $b \neq 0$, se tiene:

$$by = -ax - c \implies y = \overbrace{\left(-\frac{a}{b}\right)}^m x + \overbrace{\left(-\frac{c}{b}\right)}^n$$

Esta última ecuación que expresa y en términos de x se anota en la forma

Definición 3.5.2. La ecuación de la recta de pendiente m que pasa por el punto (x, y) del plano cartesiano, es

$$y = mx + n$$

donde $m = -\frac{a}{b}$ se llama **pendiente** y n es la intersección con el eje y (**ordenada al origen**).

Ecuación que pasa por dos puntos

Se sabe que la ecuación de una recta tiene la forma

$$y = mx + n$$

Si ahora se dan dos puntos conocidos, (x_1, y_1) y (x_2, y_2) sobre la recta, entonces ellos deben satisfacer la ecuación de la recta. Para ver esto, se sustituyen estos valores en la ecuación anterior.

$$\begin{cases} y_1 = m \cdot x_1 + n \\ y_2 = m \cdot x_2 + n \end{cases}$$

Al restar se tiene

$$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$$

de lo cual se halla que

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Para hallar el valor de n se reemplaza en una de las ecuaciones del sistema

$$y_1 = m \cdot x_1 + n \implies n = y_1 - m \cdot x_1$$

al reemplazar el valor obtenido de m se tiene

$$n = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1$$

Con estos valores de m y n se va a la ecuación $y = mx + n$ para tener

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x + y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1$$

asociando

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1$$

al factorizar

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)$$

O bien

Definición 3.5.3. La ecuación de la recta que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) , del plano cartesiano, es

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Desafío 23. Utiliza la forma $ax + by + c = 0$ para indicar la ecuación de la recta

Inicio Desafío

1. (2^{pts}) pasa por los puntos $(-1, 2)$ y $(3, 8)$

1. (2^{pts}) pasa por los puntos $(0, 0)$ y $(3, 3)$

Fin Desafío

correctas

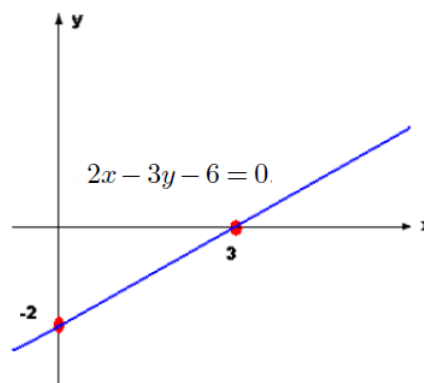
Número de preguntas respondidas correctamente: Puntos:

Puntos obtenidos:

Porcentaje de éxito:

3.5.1 Gráfica de una recta

Para graficar una recta se localizan los puntos en que ésta intersecta los ejes coordenados. Con $x = 0$ se obtiene el valor de y , luego con $y = 0$ se encuentra el valor de x . Este proceso permite encontrar dos puntos en la recta, se unen estos puntos y se tiene la gráfica de la recta.

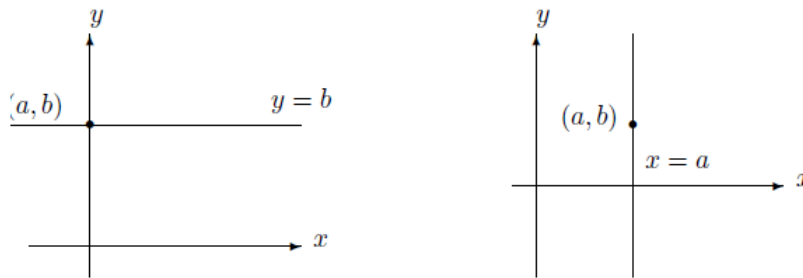


Actividad 32. La ecuación de una recta es $2x - 3y - 6 = 0$. La vamos a graficar.

- Si $x = 0$, al reemplazar en $2x - 3y - 6 = 0$ se obtiene $y = -2$. Con esto tenemos el punto $(0, -2)$.
- Si $y = 0$, entonces $x = 3$. Se tiene el punto $(3, 0)$.

3.5.2 Rectas paralelas a los ejes

Existen dos clases de rectas que son “clásicas”, aparecen casi siempre.



Vamos por parte, considerar un punto (a, b) en la figura a la izquierda, y una recta que pase por este punto en forma paralela al eje x . Sobre esta recta, otro punto debe tener coordenadas (x, b) . Siendo así, su pendiente es

$$m = \frac{b - b}{x - a} = 0$$

Al reemplazar en la ecuación $y - y_0 = m(x - x_0)$, queda que

$$y - b = 0 \cdot (x - a) \implies y = b$$

Esta es la conclusión

Toda recta paralela al eje x tiene ecuación $y = b$

en donde b es una constante que se conoce como *ordenada* en el origen.

La otra ecuación de recta tiene que ver con aquellas que son paralelas al eje y . En tal caso, si (a, b) en un punto del plano por donde pasa una recta paralela al eje y , entonces otro punto en ella tiene coordenadas (a, y) . De esta manera, su pendiente es

$$m = \frac{y - b}{a - a} = \frac{y - b}{0}$$

Esto significa que la pendiente *no* está definida.

Este es un caso “patológico” y “patético”. Parece que no sirven las ecuaciones anteriores, pues requerían de pendiente y también de un punto. Sin embargo, dado que la variable y puede tomar todos los valores que quiera, elegimos $y = 0$ para tener que, la ecuación general $Ax + By + C = 0$ se transforma en

$$Ax + C = 0$$

si determinamos C estamos al otro lado. El punto (a, b) está en la recta, luego, sus coordenadas satisfacen esta última ecuación, es decir,

$$A \cdot a + C = 0$$

de donde $C = -A \cdot a$. Al reemplazar, de vuelta en $Ax + C = 0$, se tiene

$$Ax - A \cdot a = 0 \implies A(x - a) = 0 \implies x = a$$



Toda recta **paralela** al eje y tiene ecuación $x = a$

Este valor de a se conoce como **abscisa** en el origen

Trabajo con mi profe



EJERCICIO 47. Determina cual o cuales de las siguientes rectas son paralelas a uno de los ejes. Si lo es, indica a cual eje.

- (a) $2x - 3y = 5$ (b) $5y - 2 = 0$ (c) $8x + 1 = 0$ (d) $y - x = 0$

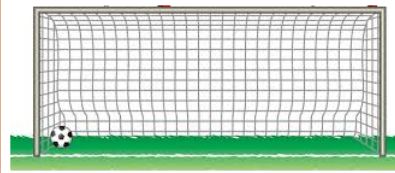
EJERCICIO 48. Determina la abscisa y la ordenada en el origen de las siguientes rectas:

- (a) $2x - 3y = 6$ (b) $5y - 2 = 0$ (c) $2x + 1 = 0$ (d) $y - x = 0$

3.5.3 Rectas paralelas y perpendiculares

Debes haber visto o bien conoces las líneas del tren ¿cómo son?

Si, de acero, pero que otra cosa puedes decir, además de que van en el suelo, exactamente, que la distancia entre los rieles es siempre la misma y que estos rieles van puestos paralelamente. Si te gusta el fútbol, conoces los arcos, allí también encuentras rectas paralelas.



Desafío 24. ¿Qué crees tú que influye para que dos rectas sean paralelas?

Inicio Desafío

1. (2^{pts}) influye

Fin Desafío

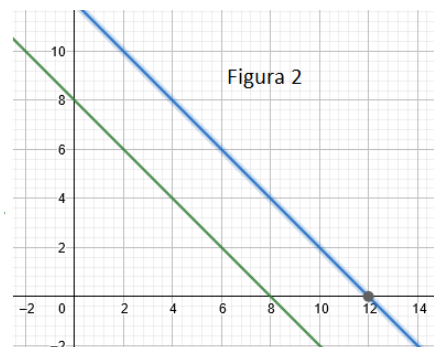
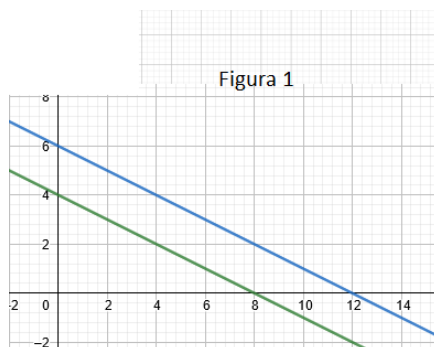
correctas

Número de preguntas respondidas correctamente:

Desafío 25. Considera las rectas; $x + 2y = 8$ y $x + 2y = 12$

Inicio Desafío

1. (2^{pts}) La figura 2 representa al par de rectas dadas



(a) True

(b) False

2. (2^{pts}) La pendiente de ambas rectas es

3. (2^{pts}) Las rectas son paralelas

(a) True

(b) False

Fin Desafío

correctas

Puntos obtenidos:

Seguro estamos de acuerdo, lo bacán, lo grosso es que

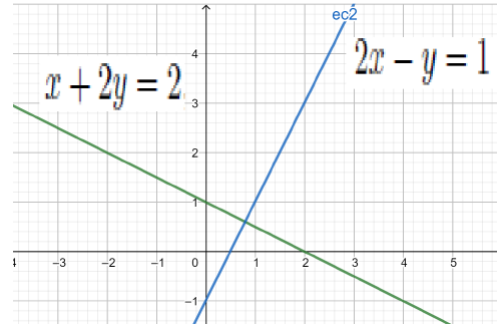
Dos rectas son paralelas si y solo si tienen la misma pendiente

Por lo general, las paredes de una casa, de la sala de clases, las patas de la mesa con la cubierta al juntarse forman un ángulo de 90° . Cuando dos rectas hacen lo mismo se dice que son perpendiculares. Lo que interesa es ¿cómo saber cuando dos rectas son perpendiculares?, ¿quién me puede ayudar?, definitivamente, no es el “Chapulín Colorado”. Te voy a dar una pista en la siguiente actividad, ¡pónle ojo!.

EJERCICIO 49. Considera las rectas

$$x + 2y = 4, \text{ y } 2x - y = 8$$

- Escribe ambas rectas en la forma $y = mx + n$
- Dáme a conocer sus pendientes:
- Dime ¿qué sucede si multiplicas ambas pendientes? Anota su valor



Este es tu gran descubrimiento

Dos rectas son perpendiculares si y sólo si el producto de sus pendientes es igual a -1

Trabajo con mi profe



EJERCICIO 50. Hallar la ecuación de la recta que pasa por $(0, -3)$ y es perpendicular a la recta $4x - 3y + 6 = 0$

- Grafica la recta $4x - 3y + 6 = 0$ en el plano y ubica el punto $(0, -3)$.
- Traza la recta que pasa por el punto y es perpendicular a la graficada.
- ¿Cuál es la condición de perpendicularidad?
- Conoces la pendiente de una de las rectas, que es $m = \frac{4}{3}$, en consecuencia, para que sean perpendiculares, la otra debe tener pendiente
- Sabiendo que la fórmula de la ecuación de la recta es

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

escribe tu ecuación de recta que pasa por el punto y tiene pendiente m

3.6 Distancia punto - recta

No te quiero complicar la vida, de modo que te presento una actividad para que te formes una idea de lo que se hace. Deducir la fórmula que permite el cálculo de la distancia es un poco

engorroso a este nivel, pero si tienes interés en saber como se obtiene, te sugiero veas el texto de la bibliografía.

EJERCICIO 51. Hallar la distancia del punto $(4, 3)$ a la recta $x + y - 3 = 0$.

- (a) En un sistema cartesiano traza la recta y el punto dado
- (b) ¿Te quedó derecha la recta?, ¿si?, entonces podemos seguir. Con lápiz de otro color dibuja la perpendicular del punto a la recta. ¿esa es la distancia a encontrar!
- (c) La pendiente de la recta dada es
- (d) La pendiente de la recta perpendicular es
- (e) La tarea es hallar la ecuación de esta recta perpendicular. Si tienes olvidada la ecuación que hay que usar, te ayudo

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Tienes el punto y también la pendiente. La ecuación de la recta es

- (f) Observa bien, tienes las dos ecuaciones de recta. ¿Puedes hallar su punto de intersección?, yo creo que sí. Anota tu sistema y resuelve.
- (g) Hasta aquí vamos bien. En este momento el problema está “casi” resuelto. Llegaste a descubrir el punto de intersección de las rectas, tienes el otro punto, por tanto, usando distancia punto - punto das respuesta a la distancia entre el punto y la recta. ¿Qué esperas?, ¡manos a la obra!
- (h) En consecuencia, la distancia entre el punto y la recta es

Es probable que esto te parezca un proceso muy largo, estamos de acuerdo. Existe una expresión matemática súper sencilla que te simplifica los cálculos. Es la siguiente

La **distancia** entre el punto (x_0, y_0) y la recta $ax + by + c = 0$ está dada por

$$d[(x_0, y_0), ax + by + c = 0] = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Con esto, tienes todo para ser feliz, te será un gusto hallar la distancia punto - recta en el siguiente problema.

EJERCICIO 52.

- (a) Hallar la distancia del punto $(-2, 3)$ a la recta $2x + y - 4 = 0$.

Desafío 26. Considera las rectas paralelas; $2x - 4y - 6 = 0$ y $-x + 2y + 4 = 0$

Inicio Desafío

1. (2pts) La distancia (usa $\wedge$ para raíz y $/$ para división) entre estas dos recta paralelas es:

Fin Desafío

correctas

Puntos obtenidos:



Inicio Test

Pasas con 100%.

La cantidad de agua que queda cada día, en una represa que pierde agua de manera uniforme viene dada por la siguiente tabla

día (x)	0	1	2	3	
millones de litros (y)	1150	1130	1110	990	

1. (3^{pts}) La ecuación matemática que representa la cantidad de agua es:

(a) $y = 20x - 1150$

(b) $y = 20x + 1150$

(c) $y = -20x + 1150$

(d) $y = -20x - 1150$

2. (3^{pts}) El tiempo (días) en que quedará vacía la represa es:

(a) 58

(b) 57

(c) 56

(d) 55

3. (3^{pts}) ¿En cuántos días tendrá 150 millones de litros?

(a) 50

(b) 55

(c) 51

(d) 40

(3^{pts}) Determina cuál de las siguientes rectas:

I $3x + 2y = 2$

II $y = \frac{3}{2}x$

III $4x + 6y = 2$

es perpendicular a la recta $2x + 3y - 3 = 0$

(a) Solo I

(b) Solo II

(c) solo III

(d) I y II

(e) I, II y III

(3^{pts})

Respecto de la recta $2x - y = 3$, ¿Cuáles afirmaciones son falsas:

1. I Es paralela a la recta $4x + 2y = 10$

II Pasa por el punto (3,3)

III Corta al eje de ordenadas en $y = -3$

(a) solo I

(b) solo II

(c) solo III

(d) I y II

(e) II y III

2. (3^{pts}) La recta que tiene pendiente -4 y pasa por la intersección de las rectas $2x + y - 8 = 0$ y $3x - 2y + 9 = 0$ es:

(a) $y = 4x + 6$

(b) $y = -4x + 10$

(c) $y = 4x + 10$

(d) $y = -4x - 10$

Fin Test

ScoreField

PointsField

Correctas

Correctas



Pasas con 100%.

1. (3^{pts}) La distancia del punto $(2, -1)$ a la recta $y = x + 1$ es:

- (a) $\sqrt{2}$ (b) $2\sqrt{2}$ (c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (d) 2

2. (3^{pts}) La distancia entre el punto $(4, 4)$ y la recta $x + 2y - 4 = 0$ es:

- (a) $\frac{8}{\sqrt{5}}$ (b) $\frac{4}{\sqrt{5}}$ (c) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{5}}$

3. (3^{pts}) La distancia entre las rectas **paralelas**; $y = 2x - 1$ e $y = 2x + 4$ es:

- (a) $5\sqrt{5}$ (b) $\sqrt{5}$ (c) $2\sqrt{5}$ (d) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

4. (3^{pts}) El valor de k para que la distancia del punto $(3, 4)$ a la recta $x + y + k = 0$ sea $\sqrt{2}$ es:

- (a) 5 y -9 (b) 5 y 9 (c) -5 y 9 (d) -5 y -9

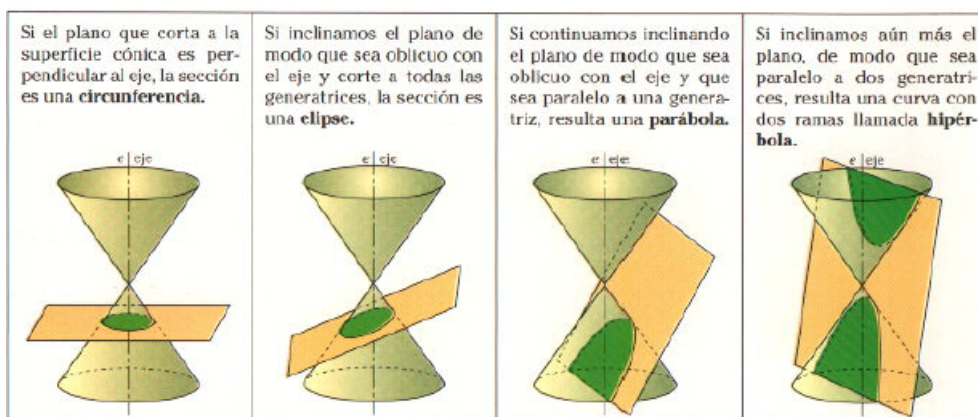
Fin Test			Correctas
	ScoreField	PointsField	

	Correctas
--	-----------

--

3.7 Cónicas

Las curvas, circunferencia, parábola, elipse, e hipérbola, son conocidas con el nombre genérico de cónicas, pues todas ellas se pueden obtener como intersección de una superficie cónica con un plano.



El estudio de las cónicas tiene su origen en el libro *Cónicas*, de Apolonio de Perga (262-190 A.C), en el cual se estudian las figuras que pueden obtenerse al cortar un cono cualquiera por diversos planos.

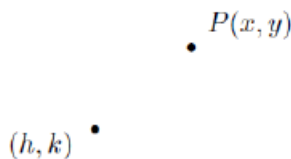
3.7.1 La circunferencia

La circunferencia es el Lugar geométrico de todos los puntos cuya distancia (radio) a un punto fijo (centro) es siempre la misma

Vamos a deducir su ecuación. Ya se que puedes tener ideas preconcebidas respecto de la circunferencia. Si lo consideras fácil me alegro, pero más de alguno sentirá que ahora el conocimiento está “penetrando” para quedarse, no para olvidar. ¡Sigamos!

EJERCICIO 53.

La figura muestra el centro de la circunferencia, punto que denotamos por (h, k) , y un punto $P = (x, y)$ cualquiera que pertenece a la circunferencia. Usar la definición para graficar todos los puntos que cumplen el mismo papel que P



- (a) Con esos dos puntos de seguro que encuentras la ecuación de la circunferencia. ¡Ah!, llama r a la distancia, otra cosa, la ecuación que vas a encontrar se llama canónica o estándar de la circunferencia.

Seguro te sientes feliz, descubriste la ecuación canónica de la circunferencia. Ves que la cosa va bien, tu ánimo está por las nubes.

Trabajo con mi profe



EJERCICIO 54. Veamos que pasa si te doy la ecuación $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$

- Halla la forma canónica completando cuadrados.
- Con solo mirar me dices que, $r =$, que $h =$, y que $k =$
- Grafica la circunferencia.

EJERCICIO 55. Halla la ecuación de la circunferencia tangente a la recta $3x - 4y + 30 = 0$, y centro en el punto $(-4, -3)$

- Si la circunferencia es tangente a una recta es por que el radio es la distancia del centro a la recta. Bosqueja la situación.
- Calcula el radio
- Ahora escribes la ecuación canónica de esta circunferencia.

Begin Test

Math

Pasas con 100%.

1. (3^{pts}) El centro de la circunferencia $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$ es:

(a) (3, 4)

(b) (3, -4)

(c) (-3, 4)

(d) (-3, -4)

2. (3^{pts}) La ecuación de la circunferencia que tiene centro en el origen y es tangente a la recta $x + y = 5$ es:

(a) $x^2 + y^2 = \frac{5}{2}$

(b) $x^2 + y^2 = \frac{25}{2}$

(c) $x^2 + y^2 = \frac{25}{4}$

(d) $x^2 + y^2 = \frac{5}{4}$

3. (3^{pts}) La ecuación de la circunferencia con centro en $(-2, 4)$ y que pasa por el punto $(1, 5)$ es:

(a) $(x + 2)^2 + (y + 4)^2 = 10$

(b) $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 10$

(c) $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = \sqrt{10}$

(d) $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 10$

4. (3^{pts}) La ecuación de la circunferencia que tiene centro en $(-1, 4)$ y que es tangente a la recta que une los puntos $(3, -2)$ y $(-9, 3)$ es:

(a) $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 16$

(b) $(x + 1)^2 + (y + 4)^2 = 16$

(c) $(x - 1)^2 + (y + 4)^2 = 16$

(d) $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 16$

End Test

ScoreField

PointsField

Correctas

Correctas

3.8 La parábola



La figura muestra lo que será el puente Chacao. Como es colgante, se observan dos brazos parabólicos

El término parábola puedes haberlo visto en la Biblia y corresponde a narraciones breves hechas por Jesús para extraer una enseñanza moral ante diferentes situaciones. Las enseñaba con frecuencia porque se pueden recordar fácilmente y se aprenderían mucho mejor. Jesús enseñó más de 50 parábolas.

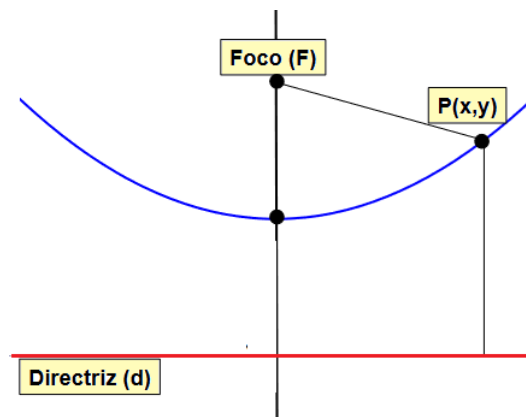


En el contexto de la matemática la parábola es simplemente un Lugar Geométrico (LG) que goza de ciertas propiedades.

La **parábola** es el Lugar geométrico de todos los puntos cuya distancia a un punto fijo (foco) es la misma que a una recta fija llamada directriz. Esto es

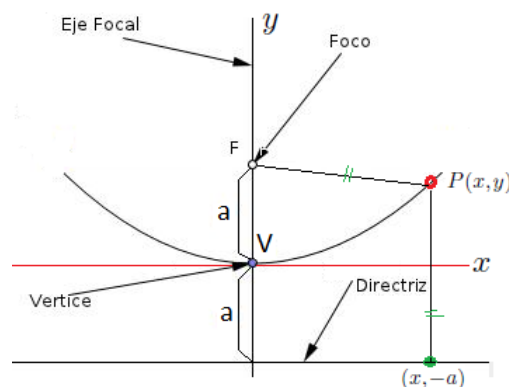
$$d(P, F) = d(P, d)$$

Un esquema simple de parábola es el siguiente



Vamos a estudiar 4 tipos de parábolas:

3.8.1 Parábola que se abre hacia arriba



La figura muestra la parábola con vértice en $(0,0)$, y eje de simetría paralelo al eje y . Si un punto de la parábola es (x,y) y la distancia de éste al foco (igual a su distancia a la directriz) es a , entonces la ecuación

$$d(P, F) = d(P, d)$$

se convierte en

$$d[(x, y), (0, a)] = y + a \iff \sqrt{x^2 + (y - a)^2} = y + a$$

al elevar al cuadrado y eliminar términos semejantes

$$x^2 + (y - a)^2 = (y + a)^2 \iff x^2 = 4ay$$

es la ecuación de esta parábola

Trabajo con mi profe

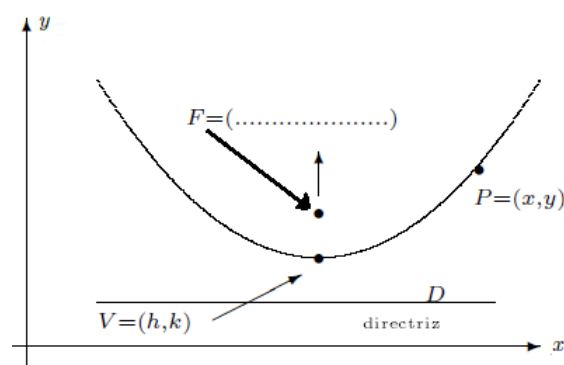


EJERCICIO 56. Una parábola tiene por foco el punto $(0, 6)$ y por directriz la recta $y = -6$. Halla su ecuación. (Un pequeño esquema te ayuda a visualizar la situación, ¡házlo siempre!)

- (a) Grafica la situación
- (b) Anota el valor de la constante a
- (c) La ecuación de la parábola es:

3.8.2 Parábola hacia arriba y vértice (h, k)

Le vamos a cambiar el vértice a la parábola anterior, mediante un movimiento de traslación. Esta clase de movimiento son rígidos, hacia la derecha o izquierda y también hacia arriba o hacia abajo.



EJERCICIO 57. Considera la figura para responder lo siguiente:

- (a) Usa lápiz de color para ilustrar en la figura la condición que debe cumplir la parábola.
- (b) Anota el valor de a en la figura.
- (c) Anota coordenadas del Foco.
- (d) Escribe la ecuación de la directriz.
- (e) Establece, en coordenadas, la ecuación de la parábola (distancias que deben ser iguales) y desarrolla para obtener la ecuación

Trabajo con mi profe

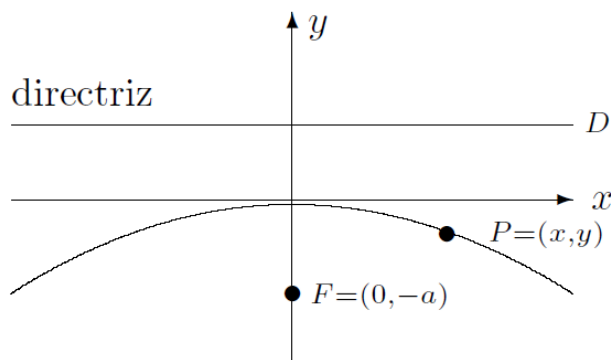


EJERCICIO 58.

- Halla la ecuación de la parábola con foco en $(0, 5)$ y vértice $(0, 2)$.
- Halla la ecuación de la parábola que tiene foco en $(0, 0)$ y vértice en $(0, -2)$. Bosqueja la parábola.
- Hallar la ecuación de la parábola que tiene vértice en $(-4, 3)$ y foco en $(-4, 6)$. Determina también la ecuación de la directriz y bosqueja esta parábola.
- La ecuación de una parábola es $x^2 - 4x - 2y + 10 = 0$. Determina, el vértice, el foco, la ecuación de la directriz y bosqueja esta parábola.

3.8.3 Parábola que se abre hacia abajo

Le vamos a cambiar la cara a nuestra primera parábola (la con vértice en el origen), en el sentido que ahora hacemos una reflexión de ella sobre el eje x , con lo cual queda “mirando” hacia abajo. ¿Te parece complicada la lectura, no la entiendes?, no importa, acuerdate de ese viejo refrán de que “un dibujo vale más que mil palabras” y mira la figura.



EJERCICIO 59. Hallemos la ecuación de esta parábola

- Escribe, sólo en letras, la condición que cumple la parábola como lugar geométrico.
- Escribe lo anterior en coordenadas, desarrolla las expresiones y escribe la ecuación
- ¿Notaste la diferencia con la primera ecuación? ¿Cuál es?

Trabajo con mi profe

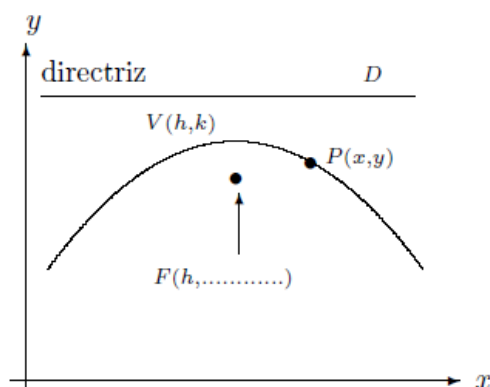


EJERCICIO 60.

- Una parábola tiene por foco el punto $(0,6)$ y por directriz la recta $y = 10$. Halla su ecuación, el valor de la constante a , y haz la gráfica.
- Halla la ecuación de la parábola que tiene foco en $(0,0)$ y vértice en $(0,8)$. Indica la ecuación de la directriz y haz la gráfica de la parábola.

Caso general

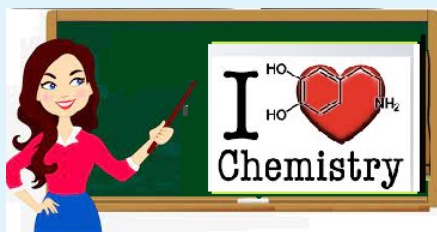
Se considera el mismo tipo de parábola, pero ahora cuando se traslada el origen de coordenadas al punto (h,k) .



EJERCICIO 61. Hallemos la ecuación de esta parábola, para ello considera la figura superior

- En la figura, anota la condición que cumple la parábola como lugar geométrico.
- Anota la distancia Foco - Vértice, también la ordenada del foco
- Escribe, en coordenadas, la condición que cumple la parábola y deduce la ecuación

Trabajo con mi profe

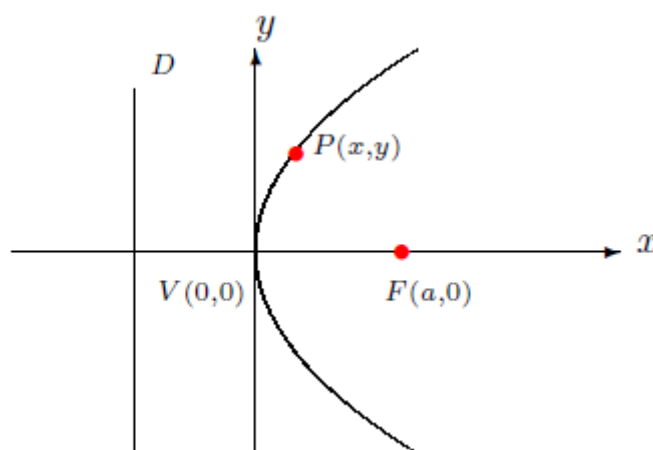


EJERCICIO 62.

- (a) Una parábola tiene ecuación $x^2 - 8x + 3y + 16 = 0$. Indicar: posición, coordenadas del vértice y foco, la ecuación de la directriz y bosquejar la parábola.

3.8.4 Parábola que se abre hacia la derecha

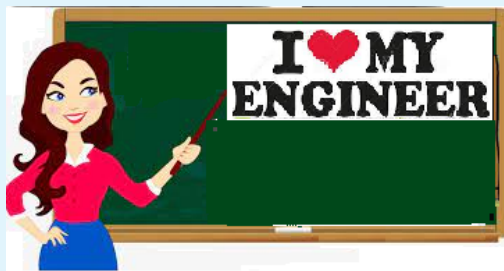
Partimos con el caso más simple, el vértice está en el origen se abre a la derecha. Como consecuencia, el foco está a la derecha del vértice y la directriz a la izquierda. La figura muestra esta parábola.



EJERCICIO 63.

- Marca en la figura la condición que cumple la parábola (¿qué distancias son iguales?)
- Anota lo anterior en símbolos y luego pásalo a coordenadas. Anota la ecuación simplificada de esta parábola.
- Pienso que no es necesario hacer paso por paso la deducción de la fórmula general de esta clase de parábolas. Si te interesa debes hallar la ecuación general de esta clase de parábola

Trabajo con mi profe

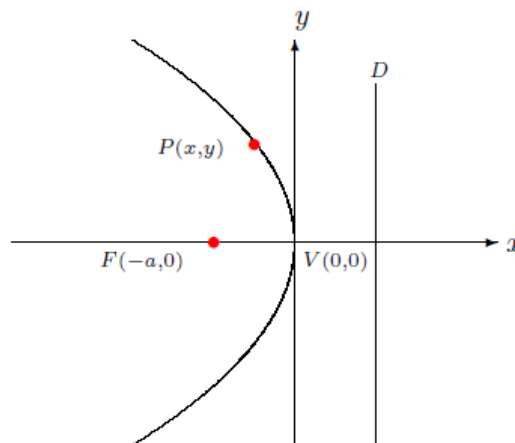


EJERCICIO 64.

- Una parábola tiene por foco el punto $(2,0)$ y por directriz la recta $x + 2 = 0$. Halla el vértice, la constante a , su ecuación, y haz la gráfica.
- Halla la ecuación de la parábola que tiene foco en $(3,0)$ y vértice en $(0,0)$. Indica la ecuación de la directriz y haz la gráfica de la parábola.
- Una parábola tiene ecuación $y^2 - 8y - 4x + 16 = 0$. Indicar: posición, coordenadas del vértice y foco, la ecuación de la directriz y bosquejar la parábola. (no olvides completar cuadrados)

3.8.5 Parábola que se abre hacia la izquierda

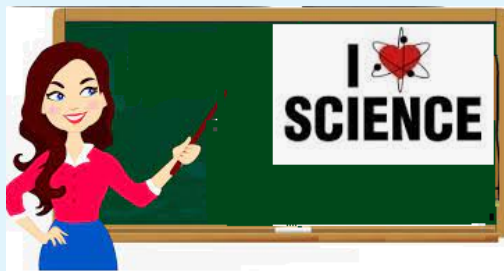
El vértice de la parábola está en el origen, el foco a la izquierda del vértice y la directriz a la derecha. Es obvio, evidente y claro que esta parábola se abre a la izquierda. La figura muestra esta parábola en todo su esplendor.



EJERCICIO 65.

- Marca en la figura la condición que cumple la parábola (¡distancias iguales!)
- Anota lo anterior en forma literal luego, pásalo a coordenadas y escribe la ecuación simplificada
- Escribe la ecuación general de esta familia de parábola de vértice (h,k) .

Trabajo con mi profe



EJERCICIO 66.

- Una parábola tiene por foco el punto $(2,4)$ y por directriz la recta $x = 6$. Halla el vértice, la constante a , la ecuación, y dibuja la parábola.
- Halla la ecuación de la parábola que tiene foco en $(-2,0)$ y vértice en $(0,0)$. Indica ecuación de la directriz y haz la gráfica de la parábola.
- Una parábola tiene ecuación $y^2 - 8y + 4x = 0$. Indicar: posición, coordenadas del vértice y foco, la ecuación de la directriz y bosquejar la parábola.

Fuiste capaz de descubrir las ecuaciones de todas las parábolas anteriores. Si la memoria no te traiciona tienes que haberte dado cuenta que la determinación de cada ecuación de parábola tuvo los mismos pasos. Ahora debes poner a prueba tu aprendizaje

Begin Test



Pasas con 100%.

Dadas las parábolas

- $y^2 = 4(x - 1)$
- $(y - 2)^2 = 8x$
- $x^2 = 4(y + 1)$
- $(x - 2)^2 = -6y$

1. (3^{pts}) Aquella que tiene foco en $(2,2)$ es:

- (a) 3 (b) 1 (c) 2 (d) 4

2. (3^{pts}) Aquella que tiene directriz $y = \frac{3}{2}$ es la número:

- (a) 1 (b) 4 (c) 3 (d) 2

3. (3^{pts}) La ecuación de la parábola de foco $F(2,1)$ y directriz $y + 3 = 0$ es:

- (a) $(x - 2)^2 = 8(y - 1)$ (b) $(x - 2)^2 = 8(y + 1)$
- (c) $(x + 2)^2 = 8(y + 1)$ (d) $(x + 2)^2 = 8(y - 1)$

End Test

Correctas

ScoreField
PointsField

Correctas

Begin Test



Pasas con 100%.

1. (3^{pts}) El vértice de la parábola $y = x^2 - 4x - 12$ es:

(a) $(2, -16)$

(b) $(2, 16)$

(c) $(-2, -16)$

(d) $(-2, 16)$

2. (3^{pts}) La parábola $y^2 - 4y - 6x - 5 = 0$ tiene foco $(0, 2)$. Su directriz es:

(a) $y = -3$

(b) $y = 3$

(c) $x = 3$

(d) $x = -3$

3. (3^{pts}) La parábola con eje paralelo al eje y , con vértice $V(-1, -1)$ y que pasa por el punto $P(1, 6)$ es:

(a) $(x - 1)^2 = \frac{4}{7}(y + 1)$

(b) $(x + 1)^2 = \frac{4}{7}(y + 1)$

(c) $(x + 1)^2 = \frac{4}{7}(y - 1)$

(d) $(x - 1)^2 = 8(y - 1)$

4. (3^{pts}) El vértice de la parábola $8x + y^2 + 4y + 12 = 0$ es:

(a) $(-1, -2)$

(b) $(-1, 2)$

(c) $(1, -2)$

(d) $(1, 2)$

End Test

ScoreField

PointsField

Correctas

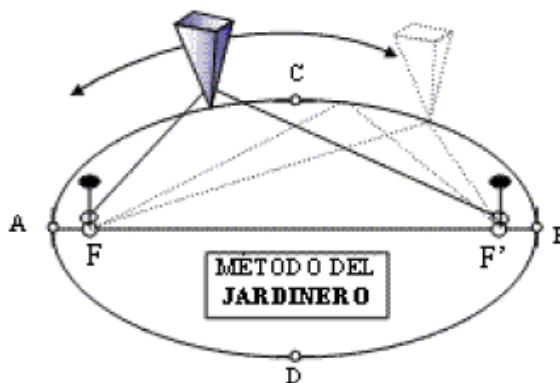
Correctas

3.9 La Elipse

El término *elipse* lo puedes haber escuchado cuando alguien se refiere a la *elipse* del Parque O'Higgins.

- Trazado de la elipse (Método del jardinero)

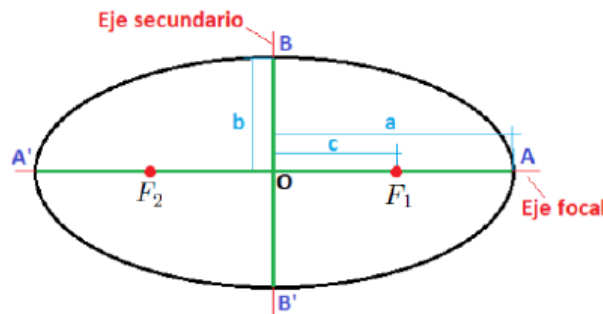
Los jardineros, para trazar una forma elíptica sobre la tierra, clavan dos estacas en el suelo, atan entre ambas una cuerda suficientemente amplia y, manteniéndola tensa, trazan una línea sobre la tierra apoyando un palo sobre la cuerda y deslizándolo sobre la misma



Mira la siguiente animación <https://www.geogebra.org/m/bfxyaydn>

La **elipse** es el lugar geométrico de todos los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos (**focos**) es constante.

Elementos de la elipse

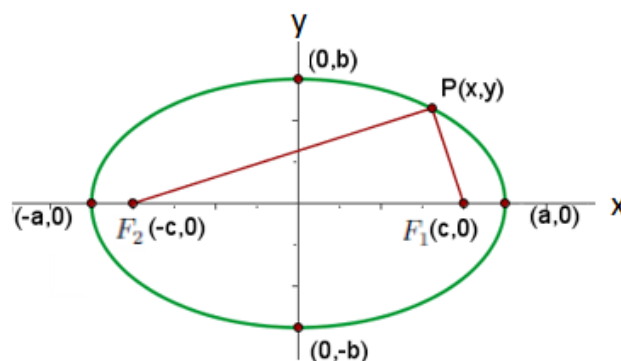


- **La distancia focal:** Es la distancia entre ambos focos, tiene un valor de $2c$, siendo c la distancia de cada foco al centro de la elipse.
- **El eje mayor:** El segmento de recta que pasa por los focos de longitud $2a$. Sus extremos son dos puntos llamados vértices de la elipse.
- **El eje menor:** El segmento de recta perpendicular al eje mayor de longitud $2b$. Sus extremos son dos puntos, que también son vértices de la elipse.
- **El lado recto:** Es conocido también como *Latus Rectum* de la elipse, y es la magnitud del segmento de recta, que une dos puntos de la elipse, perpendicular al eje mayor y que pasa por los focos. Su longitud es $\frac{2b^2}{a}$.
- **La excentricidad de la elipse:** Se representa con la letra e , y corresponde a la razón entre a y c , es decir,

$$e = \frac{c}{a}$$

3.9.1 Elipse con eje mayor paralelo al eje x

La idea es que establezcas la ecuación de la elipse que muestra la figura. Por supuesto que iremos paso a paso, y con el profe ahí, al “pie del cañón”

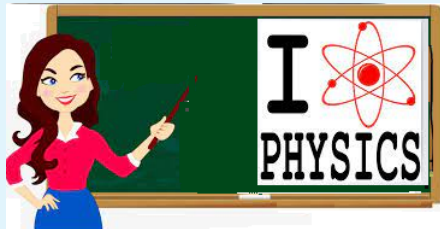


EJERCICIO 67.

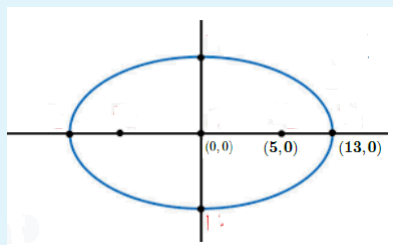
- En la figura, considera que $2a$ es la distancia constante en la definición de elipse. Escribe las coordenadas de los vértices
- El valor de a representa (¿qué distancia?)

- (c) ¿A qué es igual la propiedad que cumple la elipse $d(P, F_1) + d(P, F_2) = ?$
 (d) Te muestro como llegar a la ecuación de esta elipse

Trabajo con mi profe



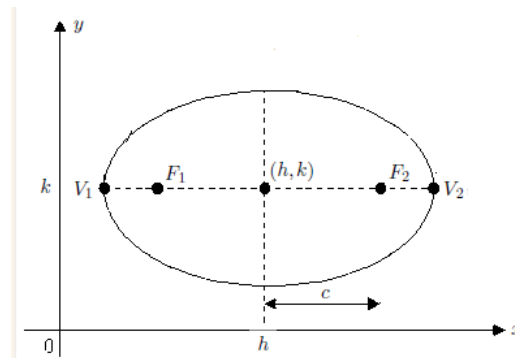
EJERCICIO 68. Una elipse tiene centro en el origen, un vértice en $(13, 0)$ y un foco en $(5, 0)$. Te ilustro la situación.



- (a) El valor de a en esta elipse es: (b) El otro vértice de la elipse está en
 (c) El otro foco tiene coordenadas: (d) La longitud del eje mayor ($2a$) es:
 (e) La longitud del eje menor ($2b$) es: (f) En esta elipse, el lado recto $L_r =$
 (g) La excentricidad de esta elipse es (h) Escribe la ecuación de esta elipse.

Generalización

Queremos obtener la ecuación de la elipse de centro (h, k) , cuyo eje mayor mida $2a$ y, que sea paralelo al eje x . La figura siguiente te va a servir para ir poniendo los datos que obtengas como respuesta a las situaciones que se plantean.

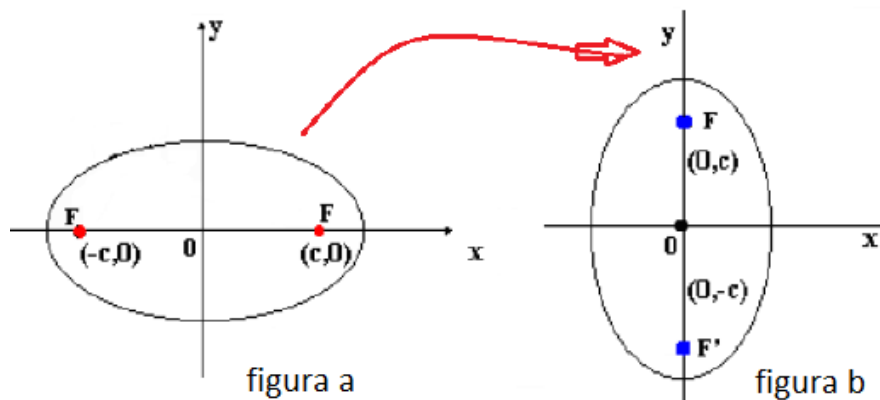


EJERCICIO 69.

- La distancia del centro al foco es c . Escribe las coordenadas de los focos.
- La distancia $d(V_1, V_2) = 2a$. Escribe, en función de h y k , las coordenadas de los vértices
- Como ya sabes trasladar, escribe la ecuación de esta elipse.

3.9.2 Elipse con eje mayor paralelo al eje y

Tenemos dos alternativas para conocer la ecuación de esta clase de elipse. La primera es un procedimiento análogo al empleado en la búsqueda de la primera elipse, y el otro hacer un giro de 90° .



La elipse de la figura (a) tiene ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. El efecto de hacer un giro de 90° en sentido positivo en una curva corresponde a reemplazar, en su ecuación, los x por y y los y por $-x$. La figura (b) muestra las nuevas coordenadas de los focos al girar la elipse en 90° en torno al origen, y que corresponden a los puntos $(0, c)$ y $(0, -c)$.

Las nuevas coordenadas del vértice son

$$(0, a) \quad \text{y} \quad (0, -a)$$

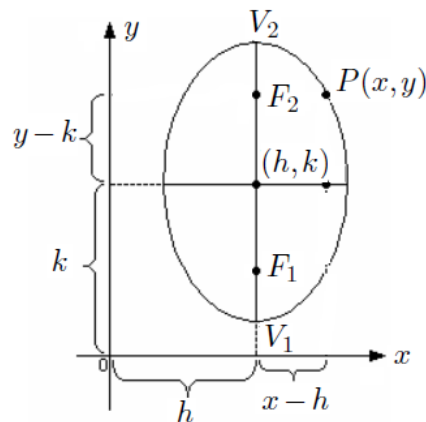
La nueva ecuación de la elipse es

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

¿Salió fácil? Así me gusta, esto prueba que puedes, no desmayes en tu intento. Sigue con actitud, eso es lo básico el resto, un poco de imaginación, algo de talento para la Matemática y ganas de salir adelante y triunfar.

Generalización

Ahora abordamos la generalización para una elipse de centro (h, k) , con eje mayor de longitud $2a$, y paralelo al eje y . La figura que sigue sirve para este efecto.



EJERCICIO 70.

- La distancia del centro al foco es c . Escribe las coordenadas de los focos.
- La distancia $d(V_1, V_2) = 2a$. Escribe, en función de h y k , las coordenadas de los vértices
- Como ya sabes trasladar, escribe la ecuación de esta elipse.

Begin Test

Math

Pasas con 100%.

Dada la elipse $25x^2 + 16y^2 + 100x - 96y - 156 = 0$

- (3^{pts}) El centro de esta elipse es:

(a) $(-2, 3)$

(b) $(2, 3)$

(c) $(2, -3)$

(d) $(-2, -3)$

- (3^{pts}) El valor de c de esta elipse es:

(a) 1

(b) 4

(c) 3

(d) 2

- (3^{pts}) uno de los focos de esta elipse es:

(a) $(2, -6)$

(b) $(2, 6)$

(c) $(-2, 6)$

(d) $(-2, -6)$

- (3^{pts}) La ecuación de la elipse con focos $(2, -1)$ y $(2, -5)$, y eje mayor de longitud 10 es:

(a) $\frac{(x-2)^2}{21} + \frac{(y+3)^2}{25} = 1$

(b) $\frac{(x+2)^2}{21} + \frac{(y+3)^2}{25} = 1$

(c) $\frac{(x-2)^2}{21} + \frac{(y-3)^2}{25} = 1$

(d) $\frac{(x+2)^2}{21} + \frac{(y-3)^2}{25} = 1$

End Test

ScoreField

PointsField

Correctas

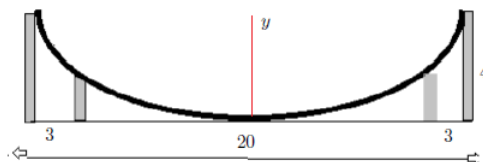
Correctas

Begin Test

Math

Pasas con 100%.

Se construye una plataforma de skate con forma de arco semielíptico de 20 mts. lineales de largo y una profundidad de 4mts. Para su construcción se consideran 4 pilares, 2 en los extremos y dos postes interiores ubicados a tres metros de éstos, como se muestra en la figura.



1. (3^{pts}) La ecuación de la elipse es:

(a) $\frac{x^2}{100} + \frac{(y+4)^2}{16} = 1$

(b) $\frac{y^2}{100} + \frac{(x+4)^2}{16} = 1$

(c) $\frac{y^2}{100} + \frac{(x-4)^2}{16} = 1$

(d) $\frac{x^2}{100} + \frac{(y-4)^2}{16} = 1$

2. (3^{pts}) La altura de los postes interiores es:

(a) 1, 21

(b) 1, 14

(c) 2, 2

(d) 5, 2

End Test

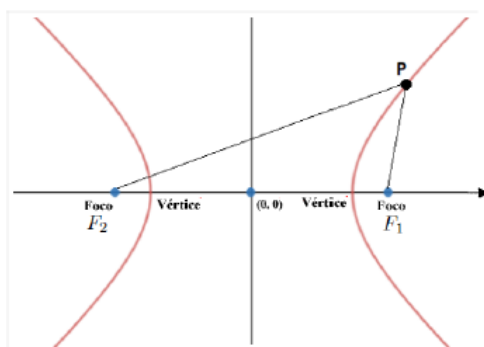
		Correctas
ScoreField	PointsField	

	Correctas
--	-----------

--

3.10 La Hipérbola

La hipérbola es el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias no dirigidas a dos puntos dados (focos) es constante

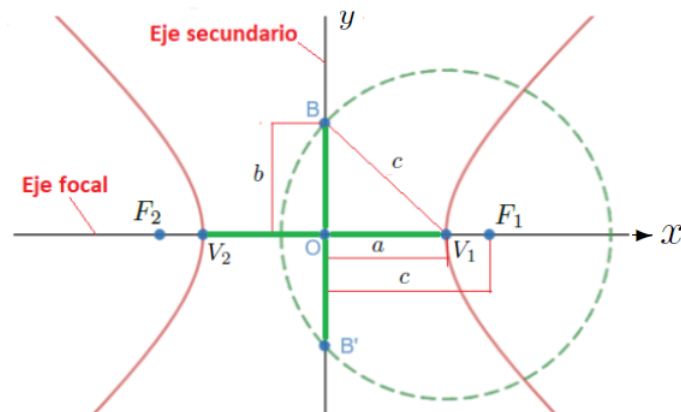


Una hipérbola está formada por dos ramas, ya que si P es un punto del lugar geométrico y F_1 y F_2 son los focos, entonces las diferencias son:

$$d(P, F_1) - d(P, F_2) \quad \text{o bien} \quad d(P, F_2) - d(P, F_1)$$

lo que da lugar a las dos ramas.

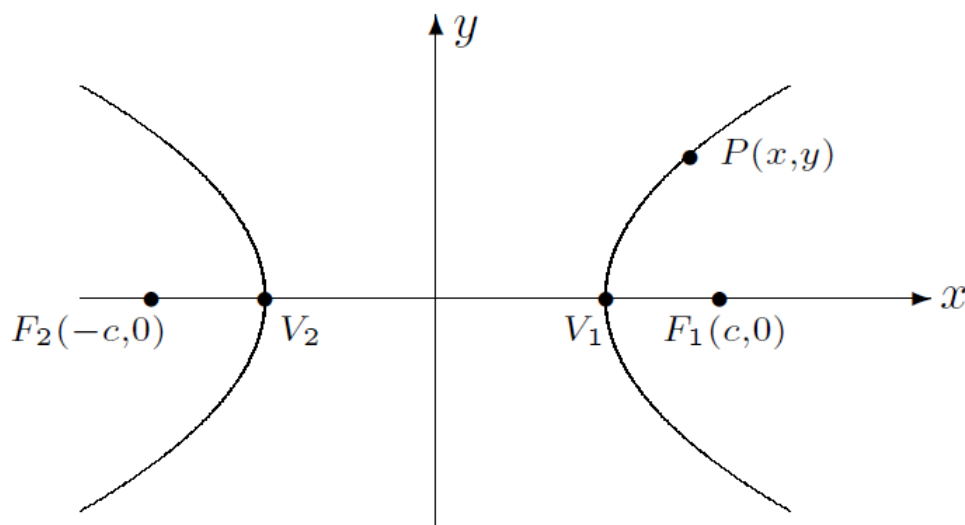
3.11 Elementos de la Hipérbola



1. La recta que pasa por ambos focos se llama **eje real** o **eje focal** de la hipérbola y la mediatriz se llama **eje imaginario** o secundario
2. El punto donde se cortan ambos ejes (el punto medio de los focos) se llama **centro** de la hipérbola.
3. Los puntos donde la hipérbola corta a los ejes se llaman **vértices** de la hipérbola, y su longitud es $2a$
4. La distancia entre los dos focos se llama **distancia focal** y tiene longitud $2c$.
5. En la hipérbola, y a diferencia de la elipse, se tiene $2c > 2a$, de donde, $c > a$, y por tanto, $c^2 - a^2 = b^2$.

3.11.1 Hipérbola de eje real paralelo al eje x

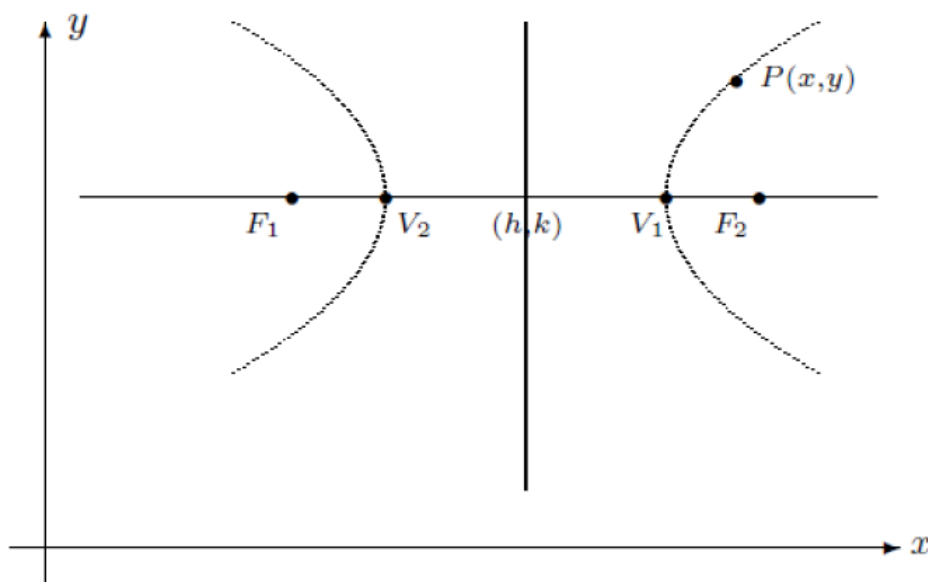
La figura muestra una hipérbola cuyo eje real es el eje x . Como siempre, la tarea es obtener la ecuación de este lugar geométrico



EJERCICIO 71. Completa lo pedido usando como base la figura anterior.

(a) La distancia $d(V_1, V_2) = 2a$. Escribe las coordenadas de los vértices.

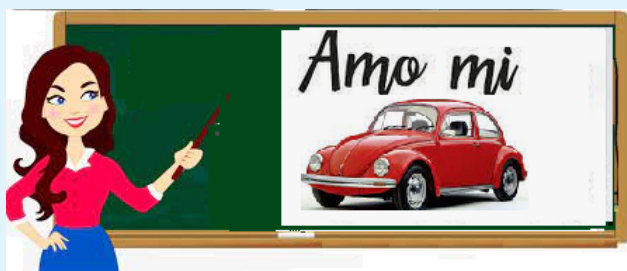
- (b) Usando P , F_1 y F_2 anota la expresión que define la hipérbola como lugar geométrico.
 (c) Usando las coordenadas de P , F_1 y F_2 escribe la expresión anterior, y resuelve este dilema algebraico



EJERCICIO 72. Completa lo pedido usando como base la figura anterior.

- (a) La distancia del centro al foco es c . Escribe las coordenadas de los focos.
 (b) La distancia $d(V_1, V_2) = 2a$. Escribe, en función de h y k , las coordenadas de los vértices
 (c) Como sabes trasladar, escribe la ecuación de la hipérbola

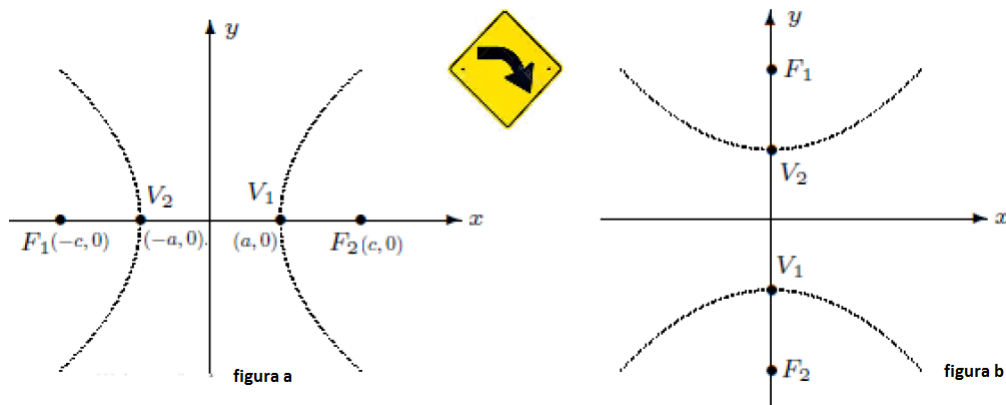
Trabajo con mi profe



EJERCICIO 73. Una hipérbola tiene un foco en $(6, 0)$ y un vértice en $(4, 0)$.

- (a) Bosqueja la situación
 (b) Anota la ecuación de la hipérbola

3.12 Hipérbola de eje real paralelo al eje y



Si la hipérbola de centro en $(0,0)$ (figura a) se hace girar 90° en sentido positivo, de tal modo que sus focos queden sobre el eje y , entonces tenemos nuevas ecuaciones.

- En la figura a, la distancia entre vértices es $2a$ y la distancia del centro al foco es c . Los focos están en $(c,0)$ y $(-c,0)$ y los vértices en $(a,0)$ y $(-a,0)$.
- Al girar en 90° la hipérbola de la figura a, las nuevas coordenadas de los focos son $(0,c)$ y $(0,-c)$. Los vértices rotados son $(0,a)$ y $(0,-a)$ (figura b).
- La nueva ecuación de la hipérbola obtenida por rotación en torno al origen de coordenadas es

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Trabajo con mi profe



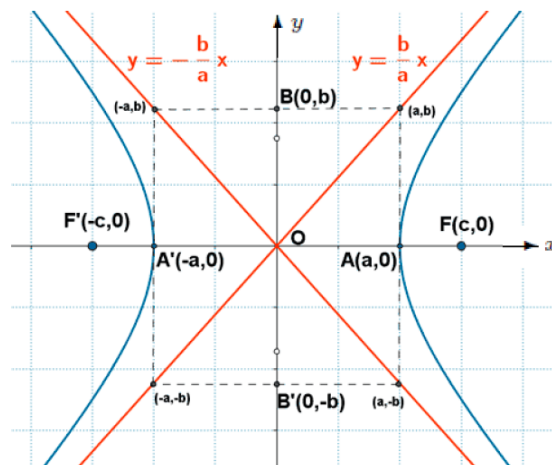
EJERCICIO 74.

- (a) Hallar la ecuación de la hipérbola de centro en el origen, un vértice en el punto $(0,6)$ y con excentricidad $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{3}$. Hacer un esquema de esta hipérbola.

3.12.1 Asíntotas

Si la distancia de una recta a un punto sobre una curva tiende a cero cuando el punto se aleja del origen, entonces la recta se llama **asíntota** a la curva

En el caso de la hipérbola, ella tiene dos asíntotas. La figura siguiente muestra a la hipérbola con eje paralelo al eje x



Ecuaciones de las asíntotas

Si la ecuación de la hipérbola es de la forma

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

entonces la ecuación de las asíntotas se obtiene a partir de la expresión

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

Ya que al descomponer esta expresión en suma por diferencia se obtiene

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) \cdot \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 0$$

¡¡Listo!!, las ecuaciones son:

$$\bullet \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0, \quad y$$

$$\bullet \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$$

Trabajo con mi profe



EJERCICIO 75.

(a) Hallar las asíntotas de la hipérbola de ecuación

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

EJERCICIO 76.

(a) Considera la hipérbola $x^2 + 2x - y^2 + 2y = 1$. Completa cuadrados y escribe la ecuación general, anota las ecuaciones de las asíntotas.

Begin Test



Pasas con 100%.

1. (3^{pts}) Los focos de la hipérbola $9x^2 - 16y^2 = 144$ son:

(a) $(\pm 3, 0)$

(b) $(0, \pm 3)$

(c) $(\pm 5, 0)$

(d) $(\pm 4, 0)$

2. (3^{pts}) Las asíntotas de la hipérbola $9y^2 - 4x^2 = 36$ son:

(a) $y = \pm \frac{1}{3}x$

(b) $y = \pm \frac{4}{3}x$

(c) $y = \pm \frac{2}{3}x$

(d) $y = \pm \frac{5}{3}x$

3. (3^{pts}) El centro de la hipérbola $4x^2 - 9y^2 + 32x + 36y = -64$ es:

(a) $(-4, 2)$

(b) $(-4, -2)$

(c) $(4, 2)$

(d) $(4, -2)$

4. (3^{pts}) Los vértices de la hipérbola $9x^2 - 16y^2 + 18x + 64y - 199 = 0$ son:

(a) $(3, -2)$ y $(-5, 2)$

(b) $(3, 2)$ y $(-5, 2)$

(c) $(3, 2)$ y $(5, 2)$

(d) $(3, 2)$ y $(5, -2)$

5. (3^{pts}) La excentricidad de la hipérbola $\frac{x^2}{80} - \frac{y^2}{100} = 1$ es:

(a) $e = \frac{1}{\sqrt{80}}$

(b) $e = \frac{3}{2}$

(c) $e = \frac{5}{\sqrt{80}}$

(d) $e = \frac{2}{\sqrt{80}}$

6. (3^{pts}) Las asíntotas de la hipérbola $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$ son:

(a) $y = \pm \frac{4}{5}x$

(b) $y = \pm \frac{1}{5}x$

(c) $y = \pm \frac{2}{5}x$

(d) $y = \pm \frac{3}{5}x$

7. (3^{pts}) La ecuación de la hipérbola con centro en el origen, eje focal de 6 unidades sobre el eje x , eje imaginario igual 4 es:

(a) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$

(b) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

(c) $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$

(d) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

End Test

ScoreField

PointsField

Correctas

Correctas

Inicio Test



Pasas con 100%.

1. (3^{pts}) La ecuación de la hipérbola con focos (1,3) y (7,3), y vértices (2,3) y (6,3) es:

(a) $5x^2 - 4y^2 - 40x + 24y + 24 = 0$

(b) $5x^2 - 4y^2 - 40x - 24y + 24 = 0$

(c) $5x^2 - 4y^2 + 40x + 24y + 24 = 0$

(d) $5x^2 - 4y^2 + 40x - 24y + 24 = 0$

Fin Test

Correctas

ScoreField

PointsField

Correctas

ADIOS

HASTA LA PROXIMA

Mathematics of Life

Life + Love = Happy

Life - Love = Sad

2 Life = Happy + Sad

∴ Life = $\frac{\text{Happy} + \text{Sad}}{2}$

∴ Life = ½ Happy + ½ Sad

Soluciones a los Ejercicios

Ejercicio 1(a)

Carl Friedrich Gauss

□

Ejercicio 2(a)

- Si un ciudadano **malo** $(-)$ sale de la isla, el resultado para la isla es positivo:

$$(-) \cdot (-) = +$$

- Si un ciudadano **bueno** $(+)$ sale $(-)$ de la isla, el resultado para la isla es negativo:

$$(+) \cdot (-) = -$$

- Si un ciudadano **malo** $(-)$ entra $(+)$ a la isla, el resultado para la isla es negativo:

$$(+) \cdot (-) = -$$

□

Ejercicio 3(a) La respuesta es

$$x = \frac{2}{3}$$

□

Ejercicio 3(b) Si no hay errores, la respuesta debe ser

$$\frac{2a^2 - 2a + 1}{1 - 2a}$$

□

Ejercicio 3(c) Dicen que la solución es $x = 5$

□

Ejercicio 3(d) La respuesta es el **conjunto vacío**

□

Ejercicio 4(a) $x^2 + 2xy + y^2$

□

Ejercicio 4(b) $x^2 - y^2$

□

Ejercicio 4(c) $x^2 + 9x + 20$

□

Ejercicio 4(d) $y^2 + 4y + 3$

□

Ejercicio 4(e) $2y^2 - 5y - 3$

□

Ejercicio 4(f) $-x^2 - 18x + 15$

□

Ejercicio 4(g) $5a - 4b$

□

Ejercicio 4(h) $x - 4y$

□

Ejercicio 5(a) El término independiente es -6 , sus divisores son: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. Por acierto y error se encuentra que $z = -1$ es tal que:

$$(-1)^4 - 2 \cdot (-1)^3 - (-1)^2 - 4 \cdot (-1) - 6 = 1 + 2 - 1 + 4 - 6 = 0$$

Luego se procede a dividir el polinomio dado por el factor $z - (-1) = z + 1$. Se tiene:

$$z^4 - 2z^3 - z^2 - 4z - 6 \div z + 1 = z^3 3z^2 + 2z - 6$$

Nos ha quedado un polinomio de grado 3. Repetimos el proceso para ver si podemos seguir factorizando. Para ello, de entre los divisores de -6, que son $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ buscamos uno que nos de resto cero en el polinomio cúbico. Se halla que $z = 3$ es factor. Se divide:

$$z^3 - 3z^2 + 2z - 6 \div (z - 3) = z^2 + 2$$

Como $z^2 + 2$ nunca se anula, se obtiene así la siguiente factorización:

$$z^4 - 2z^3 - z^2 - 4z - 6 = (z^2 + 2)(z + 1)(z - 3)$$

□

Ejercicio 6(a) Para simplificar un radical dividimos el índice y el exponente del radical por el mcd de los dos. En este caso, $\text{mcd}(15, 6) = 3$. Se tiene

$$\sqrt[15]{7^6} = \sqrt[3 \cdot 5]{7^{3 \cdot 2}} = \sqrt[5]{7^2}$$

Si esto te complicó, recuerda que lo puedes pasar a potencias. En este caso

$$\sqrt[15]{7^6} = 7^{6/15} = 7^{3 \cdot 2 / 3 \cdot 5} = 7^{2/5} = \sqrt[5]{7^2}$$

□

Ejercicio 6(b) El procedimiento para sacar factores de un radical es el siguiente.

- Descomponer en factores primos el radicando.
- Determinar exponentes que sean múltiplos del índice de la raíz, para simplificar.

$$\sqrt[3]{250a^5b^7} = \sqrt[3]{5^3 \cdot 2 \cdot a^3 \cdot a^2 \cdot b^6 \cdot b} = 5ab^2\sqrt[3]{2a^2b}$$

□

Ejercicio 6(c) Para introducir un factor en un radicando, lo elevamos al número que indique el índice y lo multiplicamos por el radicando.

$$2\sqrt[5]{3a^2} = 2\sqrt[5]{2^5 \cdot 3a^2} = 2\sqrt[5]{96a^2}$$

□

Ejercicio 6(d) Reducir a índice común unos radicales es convertirlos en otros radicales equivalentes que tengan el mismo índice. Este índice común es el mcm de los índices y el radicando se eleva al resultado de dividir el índice común entre el índice respectivo.

Se observa que el $\text{mcm}(3, 4, 2) = 12$. Se tiene

- $\sqrt[3]{5^4} = \sqrt[12]{(5^4)^4} = \sqrt[12]{5^{16}}$
- $\sqrt[4]{7^5} = \sqrt[12]{(7^5)^3} = \sqrt[12]{7^{15}}$
- $\sqrt{3^5} = \sqrt[12]{(3^5)^6} = \sqrt[12]{3^{30}}$

De esta manera, las tres expresiones tienen el mismo radical

□

Ejercicio 6(e) Para multiplicar o dividir radicales, se reducen los radicales a índice común

$$\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt{5} = \sqrt[6]{7^2} \cdot \sqrt[6]{5^3} = \sqrt[6]{7^2 \cdot 5^3} = \sqrt[6]{6125}$$

□

Ejercicio 6(f) Para multiplicar o dividir radicales, se reducen los radicales a índice común

$$\frac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt[6]{3}} = \frac{\sqrt[12]{5^3}}{\sqrt[12]{3^2}} = \sqrt[12]{\frac{5^3}{3^2}} = \sqrt[12]{\frac{125}{9}}$$

☐

Ejercicio 7(a) $\parallel a^{-1}$

☐

Ejercicio 7(b) $\parallel x^{-\frac{4}{3}}$

☐

Ejercicio 7(c) $\parallel x^{\frac{5}{6}}$

☐

Ejercicio 7(d) $\parallel x$

☐

Ejercicio 7(e) $\parallel a^{-\frac{7}{6}} \times b^{\frac{2}{3}}$

☐

Ejercicio 7(f) $\parallel a^{\frac{25}{36}}$

☐

Ejercicio 7(g) $\parallel b^{\frac{7}{24}}$

☐

Ejercicio 7(h) $\parallel a^{\frac{5}{2}} b^{-\frac{5}{2}}$

☐

Ejercicio 7(i) $x^3 y^4$

☐

Ejercicio 7(j) $11\sqrt{2}$

☐

Ejercicio 8(a) $(x+3)^2 + 2$

☐

Ejercicio 8(b) $(x+2)^2 - 1$

☐

Ejercicio 8(c) $2(x+2)^2 - 4$

☐

Ejercicio 8(d) $(x-a)^2 + b^2$

☐

Ejercicio 8(e) $(x+4)^2 - 1$

☐

Ejercicio 8(f) $(x - \frac{5}{2})^2 - \frac{1}{4}$

☐

Ejercicio 8(g) $(x-3)^2 - 4$

☐

Ejercicio 8(h) $2(z+2)^2 + 1$

☐

Ejercicio 8(i) $2(w - \frac{5}{4})^2 + \frac{31}{8}$

☐

Ejercicio 8(j) $3(y + \frac{1}{3})^2 + \frac{5}{3}$

☐

Ejercicio 8(k) $2(x+2)^2 - 3$

☐

Ejercicio 8(l) $2(x - \frac{3}{4})^2 + \frac{31}{8}$

☐

Ejercicio 8(m) $2(x+4)^2 + 17$

☐

Ejercicio 8(n) $(x-2)^2 - 3$

☐

Ejercicio 8(o) $2(x+3)^2 + 2$

☐

Ejercicio 9(a)

$$x = 2 + \sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x} = x - 2 \Rightarrow x = (x - 2)^2$$

Al desarrollar y reducir términos semejantes

$$x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow (x - 1)(x - 4) = 0$$

se sigue que $x = 1$ o $x = 4$. Al verificar en la ecuación original se tiene que la solución es sólo $x = 4$

☐

Ejercicio 9(b)

$$\sqrt{1-2x} + \sqrt{x+5} = 4 \Rightarrow \sqrt{1-2x} = 4 - \sqrt{x+5}$$

Al elevar al cuadrado

$$1-2x = 16 - 8\sqrt{x+5} + x+5 \Rightarrow 8\sqrt{x+5} = 20+3x$$

de nuevo, al elevar al cuadrado

$$64(x+5) = 400 + 120x + 9x^2 \Rightarrow 9x^2 + 56x + 80 = 0$$

Por fórmula de la cuadrática

$$x = \frac{1}{18}(-56 \pm \sqrt{3136 - 2880}) = \frac{1}{18}(-56 \pm 16)$$

de lo cual se obtienen:

$$x_1 = -\frac{20}{9} \quad y \quad x_2 = -4$$

Por todas las elevaciones al cuadrado hay que verificar si son o no soluciones. Una vez hecho esto, ambas son soluciones. ☐

Ejercicio 10(a) 4, pues $2^4 = 16$ ☐

Ejercicio 10(b) 4, pues $3^4 = 81$ ☐

Ejercicio 10(c) $\frac{1}{2}$, pues $9^{1/2} = 3$ ☐

Ejercicio 10(d) -1, pues $3^{-1} = \frac{1}{3}$ ☐

Ejercicio 10(e) 3, pues $3^3 = 27$ ☐

Ejercicio 10(f) 3, pues $5^3 = 125$ ☐

Ejercicio 10(g) -2, pues $2^{-2} = \frac{1}{4}$ ☐

Ejercicio 10(h) 4, pues $2^4 = 16$ ☐

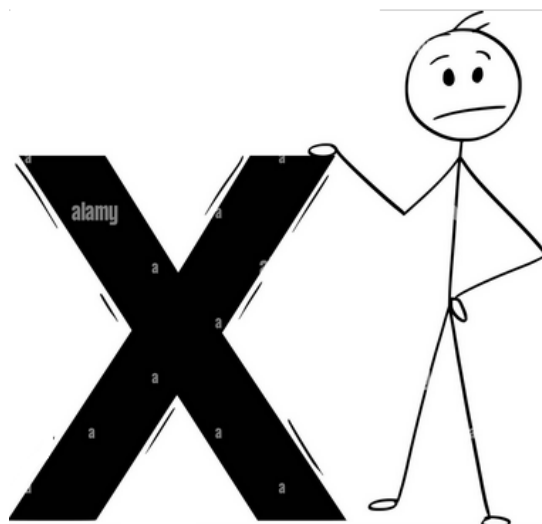
Ejercicio 10(i) 8, pues $2^3 = 8$ ☐

Ejercicio 10(j) 2, pues $\log_6 4 + \log_6 9 = \log_6 36 = 2$ ☐

Ejercicio 10(k) 1, pues $\log_5 20 + \log_5(\frac{1}{4}) = \log_5 5 = 1$ ☐

Ejercicio 10(l) 64 ☐

Ejercicio 11(a)



Ejercicio 11(b)

$$(x - y)^2$$

☐

Ejercicio 11(c)

$$10 \cdot x - 20$$

☐

Ejercicio 11(d)

$$x^2 + y^2$$

☐

Ejercicio 11(e)

$$(x + y)^2$$

☐

Ejercicio 11(f)

$$\frac{1}{x}$$

☐

Ejercicio 11(g)

$$\frac{1}{x + y}$$

☐

Ejercicio 11(h)

$$2^x$$

☐

Ejercicio 11(i)

$$\sqrt{x + y}$$

☐

Ejercicio 11(j)

$$x \geq 20$$

☐

Ejercicio 11(k)

$$(3 \cdot x)^2$$

☐

Ejercicio 11(l)

$$3x^2$$

☐

Ejercicio 12(a)

$$(p + 5n)^2 = p^2 + 10pn + 25n^2$$

☐

Ejercicio 12(b)

$$(2a + 3b)^2 = 4a^2 + 12ab + 9b^2$$

☐

☐

Ejercicio 12(c)

$$(a - 7b)^2 = a^2 - 14ab + 49b^2$$

☐

Ejercicio 12(d)

$$(2a + b)(2a - b) = 4a^2 - b^2$$

☐

Ejercicio 12(e)

$$(x - y + 2)^2 = x^2 + y^2 + 4 - 2xy + 4x - 4y$$

☐

Ejercicio 12(f)

$$(x + 5)(x + 3) = x^2 + 8x + 15$$

☐

Ejercicio 12(g)

$$(x + 5)^3 = x^3 + 15x^2 + 75x + 125$$

☐

Ejercicio 13(a)

$$8xz + 12xw = 4x(2z + 3w)$$

☐

Ejercicio 13(b)

$$12ab + 18ac - 30ad =$$

☐

Ejercicio 13(c)

$$(3x - 4y)(3x + 4y)$$

☐

Ejercicio 13(d)

$$(ab^2 - w)(ab^2 + w)$$

☐

Ejercicio 13(e)

$$(x + y)(a - 1)$$

☐

Ejercicio 13(f)

$$(x + 2y)^2 + (x + 2y) = (x + 2y)(x + 2y + 1)$$

☐

Ejercicio 14(a)

$$\frac{ax - ay - x + y}{ax + ay - x - y} = \frac{(x - y)(a - 1)}{(x + y)(a - 1)} = \frac{x - y}{x + y}$$

☐

Ejercicio 14(b)

$$\frac{(a - b)^2 - c^2}{a^2 - (b + c)^2} = \frac{[(a - b) - c][(a - b) + c]}{[a - (b + c)][a + (b + c)]} = \frac{a - b + c}{a + b + c}$$

☐

Ejercicio 14(c)

$$\frac{1 - \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}}{\frac{x-y}{x+y} - \frac{x+y}{x-y}} = \frac{-2y^2}{x - y^2 - (x+y)^2} = \frac{-2y^2}{-4xy} = \frac{y}{2x}$$

☐

Ejercicio 15(a)

$$81$$

pues

$$y^2 - 18y + 81 = (y - 9)^2$$

☐

Ejercicio 15(b)

$$16ab$$

pues

$$a^2 + 16ab + 64b^2 = (a + 8b)^2$$

☐

Ejercicio 15(c)

$$9y^2$$

pues

$$9y^2 - 30y + 25 = (3y - 5)^2$$

☐

Ejercicio 16(a)

$$\sqrt{xy} \left(\sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}} \right) = x - y$$

☐

Ejercicio 16(b)

$$\sqrt{\frac{2(a^2 + b^2)^2}{c^2} - \frac{2(a^2 - b^2)^2}{c^2}} = 2\sqrt{2}\frac{ab}{c}$$

☐

Ejercicio 16(c)

$$\left(\sqrt{\frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{y}} \right) \left(\sqrt{\frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{y}} \right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$$

☐

Ejercicio 17(a)

$$\frac{7}{2x} - \frac{8}{3x} + \frac{9}{4x} - \frac{1}{3} = \frac{31 - 7x}{6x} \implies \frac{37 - 4x}{12x} = \frac{31 - 7x}{6x}$$

Despues de multiplicar por $12x$ se tiene

$$x = \frac{5}{2}$$

☐

Ejercicio 17(b) Despues de reducir queda

$$12x^2 - 118x + 276 = 0 \implies x = 6 \vee x = \frac{23}{6}$$

☐

Ejercicio 17(c)

$$\sqrt{1 + 4\sqrt{x}} = 1 + \sqrt{x} \implies 1 + 4\sqrt{x} = (1 + \sqrt{x})^2$$

Se simplifica para tener que

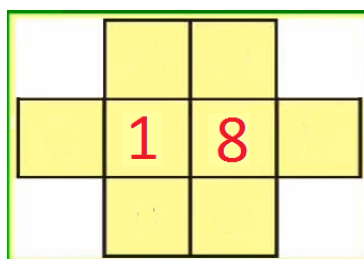
$$2\sqrt{x} = x$$

Se eleva al cuadrado

$$4x = x^2 \implies x(x - 4) = 0 \implies x = 0 \vee x = 4$$

☐

Ejercicio 18(a) Te entrego la pista fundamental


☐

Ejercicio 19(a)

$$(x - 1)(x + 2) - 4 < 0$$

☐

Ejercicio 19(b)

$$A(x) = (x - 1)(x + 2) - 4$$

☐

Ejercicio 19(c)

$$x^2 + x - 6 < 0$$

☐

Ejercicio 19(d)

$$(x + 3)(x - 2) = 0$$

☐

Ejercicio 19(e)

$$x = -3 \vee x = 2$$

☐

Ejercicio 19(f)

☐

Ejercicio 19(g)

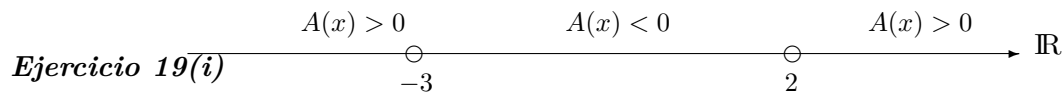
En 3 subintervalos

☐

Ejercicio 19(h)

- En $(-\infty, -3)$ se puede tomar $x = -4$ con lo cual $A(-4) = (-4 + 3)(-4 - 2) > 0$

- En $(-3, 2)$ se puede tomar $x = 0$ con lo cual $A(0) = (0 + 3)(0 - 2) < 0$
- En $(2, \infty)$ se puede tomar $x = 4$ con lo cual $A(4) = (4 + 3)(4 - 2) > 0$

☐

☐

Ejercicio 19(j)

$$S_x = (-3, 2)$$

☐

Ejercicio 20(a) $(1, 6)$

☐

Ejercicio 20(b) $(-\infty, 5) \cup (7, \infty)$

☐

Ejercicio 20(c) La desigualdad es equivalente a $2x^2 + 3x + 4 \leq 0$. Al resolver $2x^2 + 3x + 4 = 0$ el discriminante $b^2 - 4ac < 0$ de modo que no existe $x \in \mathbb{R}$ que haga cero la ecuación. En consecuencia, ella es siempre positiva o negativa. Para ver esto se toma cualquier x y se evalúa. Por ejemplo, con $x = 0$ se tiene $2(0)^2 + 3(0) + 4 = 4 > 0$. Por tanto, no existe x que la haga negativa, de manera que la ecuación no tiene solución en $\mathbb{R}$

☐

Ejercicio 20(d) $(\frac{1}{3}, 2)$

☐

Ejercicio 20(e) $x \in (\frac{7}{4}, 2)$

☐

Ejercicio 20(f) $\{x < -1\} \cup \{x > 0\}$

☐

Ejercicio 20(g) $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{2}{3}, \infty)$

☐

Ejercicio 20(h) $(-1, \frac{2}{3})$

☐

Ejercicio 21(a)

$$|4 - 6 - 8| = |4 - 14| = |-10| = -(-10) = 10$$

☐

Ejercicio 21(b)

$$|4| - |6| - |8| = -10$$

☐

Ejercicio 21(c)

$$|4| \cdot |-8| = 32$$

☐

Ejercicio 21(d)

$$||4| - 6| - |8| = -6$$

☐

Ejercicio 21(e)

$$|-4| + |6| \cdot |-8| = 52$$

☐

Ejercicio 21(f)

$$| -1 | \cdot | -2 | = 2$$

☐

Ejercicio 22(a)

$$x = 3$$

☐

Ejercicio 22(b)

$$x = \frac{1}{4}$$

☐

Ejercicio 22(c)

$$x = -4$$

☐

Ejercicio 22(d)

$$x = -\frac{1}{8}$$

☐

Ejercicio 23(a)

$$x > 5$$

☐

Ejercicio 23(b)

$$x > \frac{1}{4}$$

☐

Ejercicio 23(c)

$$x > -2$$

☐

Ejercicio 23(d)

$$x > -3$$

☐

Ejercicio 24(a)

$$x < 6$$

☐

Ejercicio 24(b)

$$x < \frac{2}{3}$$

☐

Ejercicio 24(c)

$$x < -2$$

☐

Ejercicio 24(d)

$$x < -4$$

☐

Ejercicio 25(a)

$$|x - 2| = \begin{cases} x - 2, & \text{si } x - 2 > 0 \text{ o bien } x > 2 \\ 0, & \text{si } x = 2 \\ -(x - 2), & \text{si } x - 2 < 0 \text{ o bien } x < 2 \end{cases}$$

□

Ejercicio 25(b)

$$|3x - 2| = \begin{cases} 3x - 2, & \text{si } x > \frac{2}{3} \\ 0, & \text{si } x = \frac{2}{3} \\ -3x + 2, & \text{si } x < \frac{2}{3} \end{cases}$$

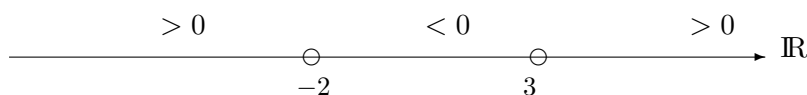
□

$$\text{Ejercicio 25(c) } |2x - 4| = \begin{cases} 2x - 4, & \text{si } x > 2 \\ 0, & \text{si } x = 2 \\ -2x + 4, & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

□

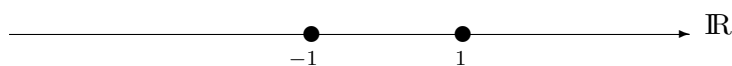
Ejercicio 25(d)

$$\left| \frac{x+2}{x-3} \right| = \begin{cases} \frac{x+2}{x-3}, & \text{si } x \in (-\infty, -2) \cup (3, \infty) \\ 0, & \text{si } x = -2 \\ -\frac{x+2}{x-3}, & \text{si } x \in (-2, 3) \end{cases}$$



9

Ejercicio 26(a) Los “puntos de quiebre” son $x = -1$ y $x = 1$, ambos son parte del conjunto solución (es cosa de reemplazar). En la recta la cosa se ve como sigue



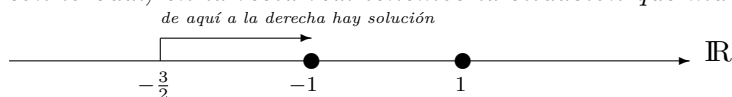
La recta ha quedado dividida en tres subintervalos, en los cuales se tiene:

$$En \text{ } (-\infty, -1)$$

Al sacar valores absolutos la ecuación $|x + 1| + |x - 1| < 3$ equivale a

$$-x - 1 - x + 1 < 3 \implies x > -\frac{3}{2}$$

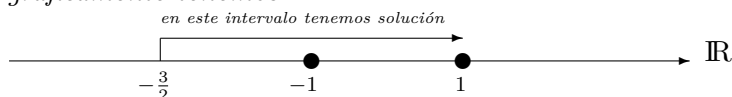
con lo cual, en la recta real tenemos la situación que muestra la figura


$$En \text{ } (-1, 1)$$

Al sacar valores absolutos la ecuación $|x+1| + |x-1| < 3$ equivale a

$$x + 1 - x + 1 < 3 \implies 2 < 3$$

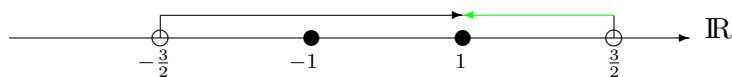
una verdad tan grande como el “eterno campeón”. Así que el $[-1, 1]$ es solución, de modo que gráficamente tenemos


$$En \ (1, \infty)$$

Al sacar valores absolutos la ecuación $|x + 1| + |x - 1| < 3$ equivale a

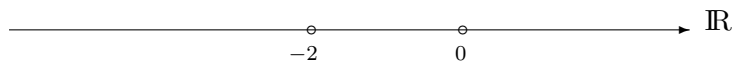
$$x + 1 + x - 1 < 3 \implies x < \frac{3}{2}$$

que en la recta se ve de la siguiente forma



Se concluye que el conjunto solución es $(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ □

Ejercicio 27(a) La desigualdad es equivalente a $\frac{|x|}{|x+2|} \leq 1$. Los “puntos de quiebre” son $x = 0$ y $x = -2$. Los ponemos sobre la recta numérica



La recta queda dividida en 3 intervalos. Tienes que ver que pasa en cada uno de ellos. Por ejemplo, en $(-\infty, -2)$ la ecuación $|x| \leq |x+2|$ equivale a tener

$$-x \leq -(x+2)$$

de lo cual se obtiene, al simplificar las x , que $0 \leq -2$. Como esto es falso, significa que **no hay** solución allí. Por otra parte, en el intervalo $(-2, 0)$ la ecuación equivale a tener

$$-x \leq x+2 \implies -2x \leq 2 \implies x \geq -1$$

En $x = -1$ se da la igualdad

$$|-1| = |-1+2| \implies 1 = 1$$

Este punto debe agregarse a la recta. Con ello la situación en la recta es



Dado que $x = 0$ satisface la desigualdad, debemos agregarlo en el conjunto solución. Finalmente, en el intervalo $(0, \infty)$ la ecuación equivale a tener

$$x \leq x+2 \implies 0 \leq 2$$

lo que es siempre verdadero, de lo cual se deduce que todos los valores de x a la derecha del 0 son parte del conjunto solución. En la recta tenemos la situación

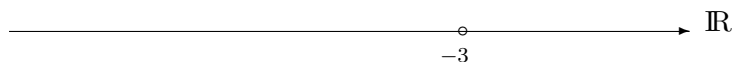


De esta manera, el conjunto solución es

$$S = (-1, 0) \cup (0, \infty) \cup \{0\} = (-1, \infty)$$

□

Ejercicio 27(b) El “punto de quiebre” es $x = -3$, que no forma parte del conjunto solución. En la recta numérica tenemos



La recta queda dividida en 2 intervalos. En $(-\infty, -3)$ se tiene la equivalencia

$$\left| \frac{x}{6} + \frac{1}{2} \right| > \frac{5}{6} \iff -\frac{x}{6} - \frac{1}{2} > \frac{5}{6}$$

de lo cual se obtiene $x < -8$. La recta se ve como sigue



Por otra parte, en el intervalo $(-3, \infty)$ se tiene la equivalencia

$$\left| \frac{x}{6} + \frac{1}{2} \right| > \frac{5}{6} \iff \frac{x}{6} + \frac{1}{2} > \frac{5}{6}$$

de lo cual se obtiene $x > 2$. La recta se ve ahora como sigue



De esta manera, el conjunto solución es

$$S = (-\infty, -3) \cup (2, \infty)$$

☐

Ejercicio 28(a) $\sum_{k=1}^5 k(k+1) = 70$

☐

Ejercicio 28(b) $\sum_{n=0}^3 2^n = 15$

☐

Ejercicio 28(c) $\sum_{h=-2}^3 (6h-1) = 12$

☐

Ejercicio 28(d) $\sum_{i=3}^7 i(3-2i) = -195$

☐

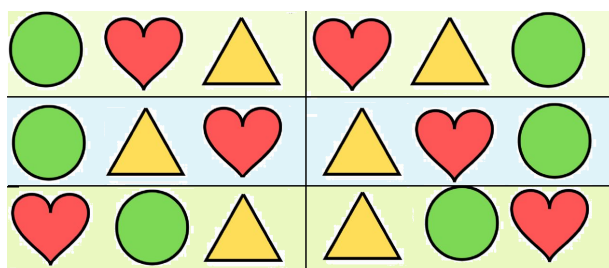
Ejercicio 28(e) $\sum_{i=1}^{20} \frac{1}{i+2} - \frac{1}{i+1} = \frac{1}{22} - \frac{1}{2} = -\frac{5}{11}$

☐

Ejercicio 28(f) $\sum_{i=p}^{n+1} \frac{1}{2i-1} - \frac{1}{2i+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2p+1}$

☐

Ejercicio 29(a) Se puede ordenar de 6 maneras distintas. Ellas son:


☐

Ejercicio 29(b) Son 24 formas

☐

Ejercicio 31(a) Usando la fórmula del binomio de Newton se tiene:

$$(x+y)^4 = \binom{4}{0}x^4 + \binom{4}{1}x^3y + \binom{4}{2}x^2y^2 + \binom{4}{3}xy^3 + \binom{4}{4}x^0y^4$$

Haciendo los cálculos, se llega a

$$x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

☐

Ejercicio 31(b) El T_k nunca falla

$$T_5 = \binom{5}{4} a^1 (2y)^4 = 80xy^4$$

□

Ejercicio 31(c) Se aplica la fórmula del T_k

$$T_k = \binom{7}{k-1} (3x^2)^{7-k+1} \left(\frac{1}{x}\right)^{k-1} = \binom{7}{k-1} (3)^{8-k} (x^2)^{8-k} \cdot (x)^{1-k}$$

Como buscamos el de grado 8, el exponente de x debe ser 8, esto es

$$x^{2(8-k)} \cdot x^{1-k} = x^8 \implies k = 3$$

Esto significa que el término de grado 8 es el tercero

$$T_3 = \binom{7}{2} (3x^2)^5 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^2 = 5103x^8$$

□

Ejercicio 31(d) Cuando n es par hay un único término central y es $\frac{n}{2} + 1$. Por tanto, en este caso es

$$T_4 = \binom{6}{3} (x^2)^3 a^3$$

□

Ejercicio 31(e) Como el exponente del binomio es **impar**, hay dos términos centrales, que son

$$T_{(n+1)/2} \quad y \quad T_{(n+1)/2+1}$$

En este caso:

$$T_4 = \binom{7}{3} (x^2)^4 (a^3)^3$$

$$T_5 = \binom{7}{4} (x^2)^3 (a^3)^4$$

□

Ejercicio 31(f) Se aplica el T_k . Se tiene:

$$T_k = \binom{9}{k-1} \left(\frac{3}{2}x^2\right)^{9-k+1} \left(-\frac{1}{3x}\right)^{k-1}$$

Al simplificar y haciendo los cálculos se debe hallar

$$T_7 = \binom{9}{6} \left(\frac{3}{2}\right)^3 \left(-\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{7}{18}$$

□

Ejercicio 32(a) Al reemplazar

$$q = 100^2 - 70 \times 100 + 1225 = 4225$$

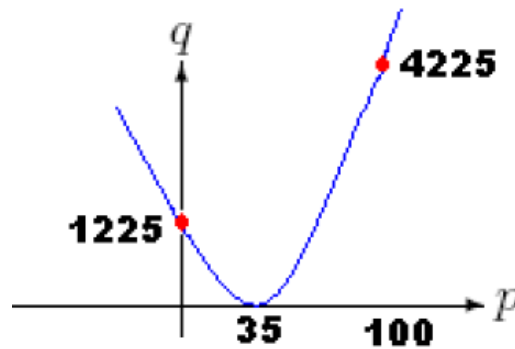
□

Ejercicio 32(b) En este caso, una completación de cuadrados simplifica los cálculos

$$1225 = (p - 35)^2 \implies 35^2 = (p - 35)^2 \implies p = 70$$

□

Ejercicio 32(c)



□

Ejercicio 33(a) Solo hay que reemplazar $t = 10$ en la fórmula dada

$$n = f(t) = 300t^3 - 20t^2 \implies f(10) = 300 \times 10^3 - 20 \times 10^2 = 298000$$

□

Ejercicio 33(b) En este caso se reemplaza $t = 15$

$$f(15) = 300 \times 15^3 - 20 \times 15^2 = 515200$$

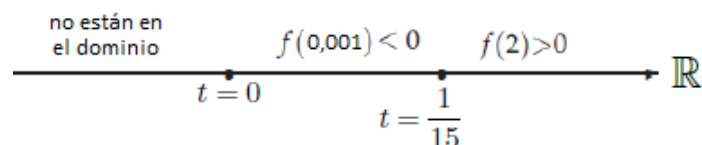
□

Ejercicio 33(c) Como se trata de una función polinómica de grado 3, su dominio es $\mathbb{R}$ y su rango o recorrido es también $\mathbb{R}$. Los cortes con los ejes son:

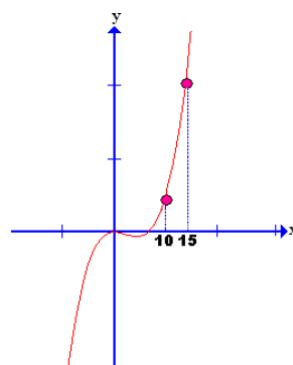
- Si $t = 0$, entonces $n = f(t) = 0$
- Si $n = 0$, entonces $300t^3 - 20t^2 = 0$, de lo cual

$$20t^2(15t - 1) \implies t = 0, \quad \vee \quad t = \frac{1}{15}$$

La positividad de la función se observa en los siguientes subintervalos.



Su gráfica es la que se indica



☐

Ejercicio 34(a) Hay simetría respecto del eje y . Se trata de una función par

☐

Ejercicio 34(b) No tiene problemas para tomar cualquier número real. Luego

$$\text{dom}(f) = \mathbb{R}$$

☐

Ejercicio 34(c) Esta función tiene recorrido los reales más el cero. Esto es

$$\text{rec}(f) = \mathbb{R} \cup \{0\}$$

☐

Ejercicio 34(d) Se observa que es decreciente en $(-\infty, 0)$ y creciente en $(0, \infty)$. No te preocupes por el cero, lo puedes ubicar en cualquiera de los dos intervalos

☐

Ejercicio 34(e) ¡¡¡¡NO rotundo, no es inyectiva

☐

Ejercicio 35(a)

$$f(g(2)) = f(3) = 6$$

☐

Ejercicio 35(b) En este caso, aplica, en primer lugar, la función f . Se tiene

$$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(4) = 5$$

☐

Ejercicio 35(c)

$$g(f(\square)) = g(2 \cdot \square) = 2 \cdot \square + 1$$

☐

Ejercicio 35(d)

$$g(f(x)) = g(2x) = 2x + 1$$

☐

Ejercicio 36(a)

$$(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(3) = 6$$

☐

Ejercicio 36(b)

$$f(g(\square)) = f(\square + 1) = 2 \cdot (\square + 1)$$

☐

Ejercicio 36(c)

$$f(g(x)) = f(x + 1) = 2(x + 1) = 2x + 2$$

☐

Ejercicio 36(d) Por los resultados

$$f(g(x)) = 2x + 2 \neq 2x + 1 = g(f(x))$$

☐

Ejercicio 37(a) Se trata de una función racional. El denominador se anula en $x = -\frac{3}{7}$. Por ello, su dominio es

$$\text{dom}(f) = \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{7}\right\}$$

□

Ejercicio 37(b) Para encontrar el recorrido debemos despejar la variable x y observar que pasa con la y

$$y = \frac{2x-7}{7x+3} \implies (7x+3)y = 2x-7 \implies x(7y-2) = -3y-7$$

Al despejar

$$x = \frac{3y+7}{2-7y}$$

De esta manera, debe ser $y \neq \frac{2}{7}$, y se concluye que

$$\text{rec}(f) = \mathbb{R} - \left\{\frac{2}{7}\right\}$$

□

Ejercicio 37(c)

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\implies \frac{2x_1-7}{7x_1+3} = \frac{2x_2-7}{7x_2+3} \\ (2x_1-7)(7x_2+3) &= (2x_2-7)(7x_1+3) \\ 14x_1x_2 + 6x_1 - 49x_2 - 21 &= 14x_1x_2 + 6x_2 - 49x_1 - 21 \\ 6x_1 - 49x_2 &= 6x_2 - 49x_1 \\ 55x_1 &= 55x_2 \\ x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

Hemos probado que la función dada es inyectiva

□

Ejercicio 37(d) Nos damos un y en el recorrido y luego vemos si tiene asociada una pre-imagen

$$y = \frac{2x-7}{7x+3} \implies x = \frac{3y+7}{2-7y}$$

De esta manera, el elemento x que debemos tomar, para obtener y es

$$x = \frac{3y+7}{2-7y}$$

Para este x se debe cumplir que $y \neq \frac{2}{7}$. Esto significa que el recorrido de la función es

$$\text{rec}(f) = \mathbb{R} - \left\{\frac{2}{7}\right\}$$

Así, la función es sobreyectiva al considerar

$$f : \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{7}\right\} \rightarrow \mathbb{R} - \left\{\frac{2}{7}\right\}, \text{ con } f(x) = \frac{2x-7}{7x+3}$$

□

Ejercicio 38(a) Como $y = \sqrt{x+3}$, entonces

$$y^2 = x+3 \implies x = y^2 - 3$$

Por tanto, al intercambiar x por y se tiene que la inversa es

$$f^{-1}(x) = x^2 - 3$$

□

Ejercicio 38(b) Claramente, de la definición de la función,

$$\text{dom}(f^{-1}(x)) = [0, \infty)$$

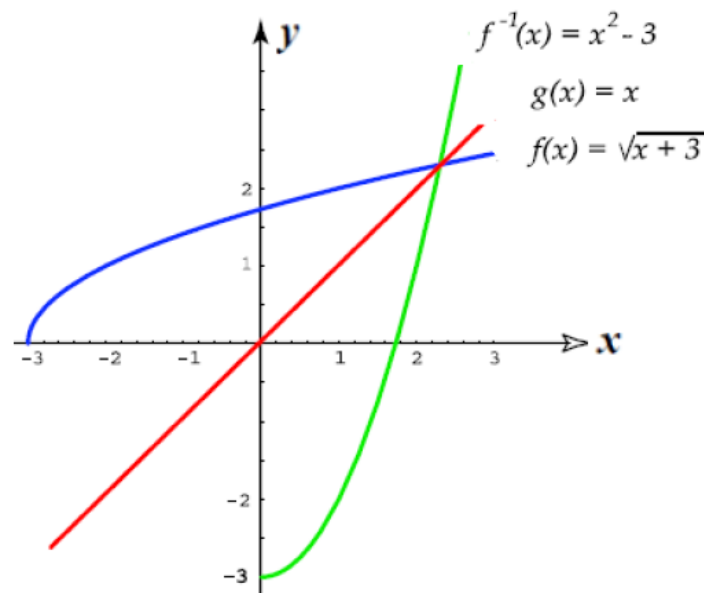
□

Ejercicio 38(c) Como $f^{-1}(x) = x^2 - 3$, el menor valor que toma esta función es -3 y no tiene cota superior. Por tanto,

$$\text{rec}(f^{-1}(x)) = [-3, \infty)$$

□

Ejercicio 38(d)



□

Ejercicio 39(a) Al principio del experimento es $t = 0$, de modo que $y(0) = 20e^0 = 20$. Significa que al principio se tiene 20 millones de bacterias

□

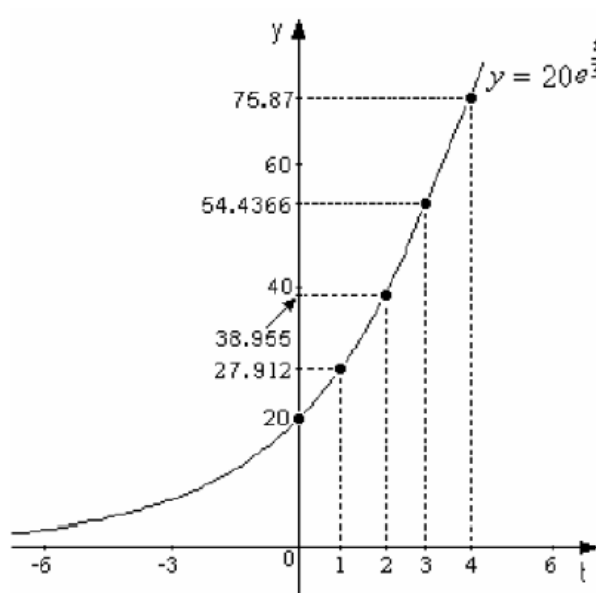
Ejercicio 39(b) Dos horas significa que se toma tiempo $t = 2$. Se tiene

$$y(2) = 20 \cdot e^{2/3} = 38955 \text{ millones}$$

Se sacó usando calculadora

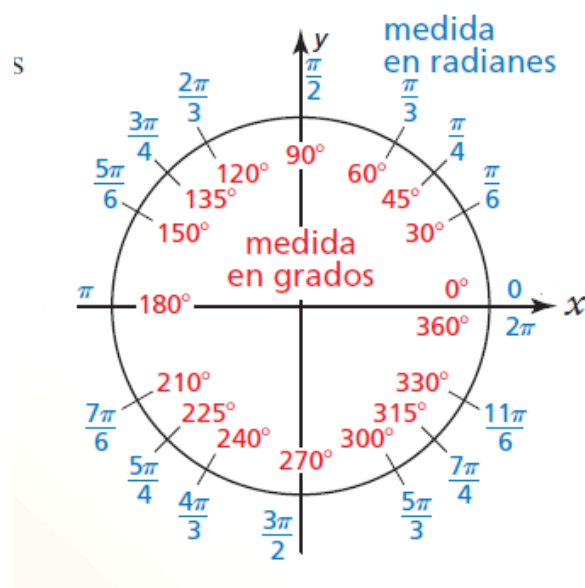
□

Ejercicio 39(c) La base $e = 2,71828 \dots$. Como esta cantidad es mayor que 1, su gráfica es creciente



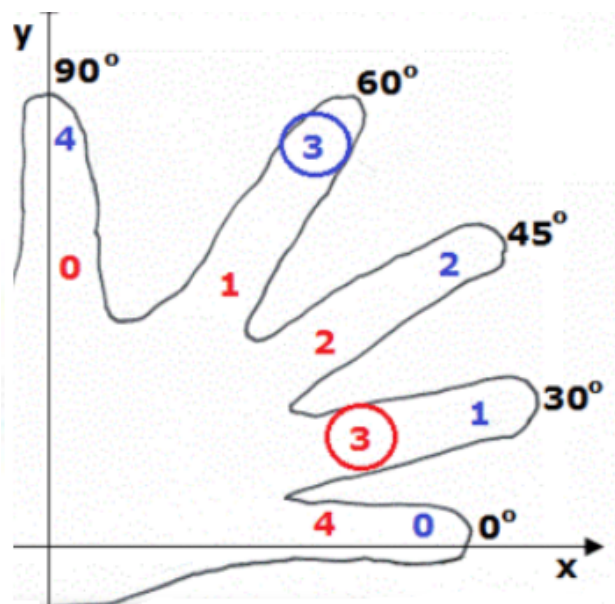
□

Torpedo 40(a)



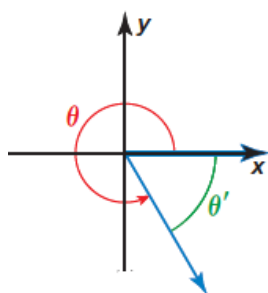
□

Torpedo 41(a)



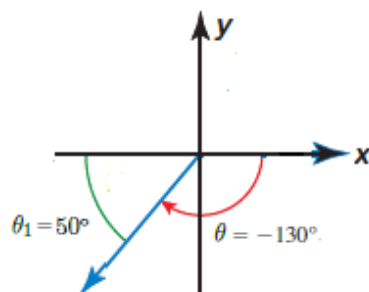
□

Ejercicio 42(a) La primera cuenta que debes sacar es saber en qué cuadrante se halla el ángulo que te dieron. Como es de 300° , está en el cuarto cuadrante. Así que su distancia al eje x (en la misma dirección positiva) es de 60° . Éste es el ángulo de referencia.



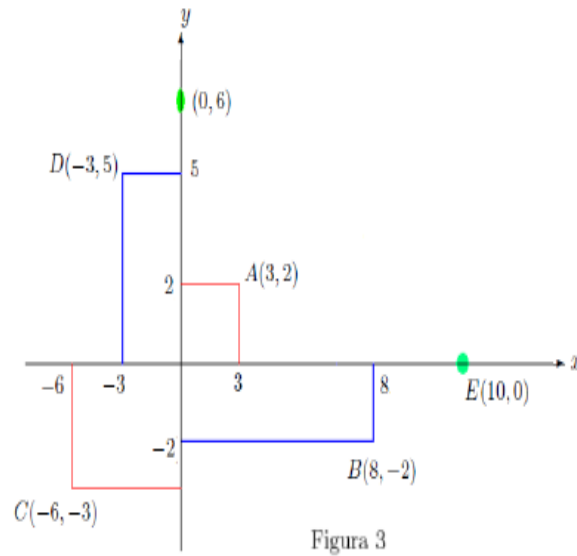
□

Ejercicio 42(b) Para este ángulo de 130° negativo, su distancia al eje x (en la misma dirección negativa) es de 50° . Se sigue que 50° es el ángulo referencia.

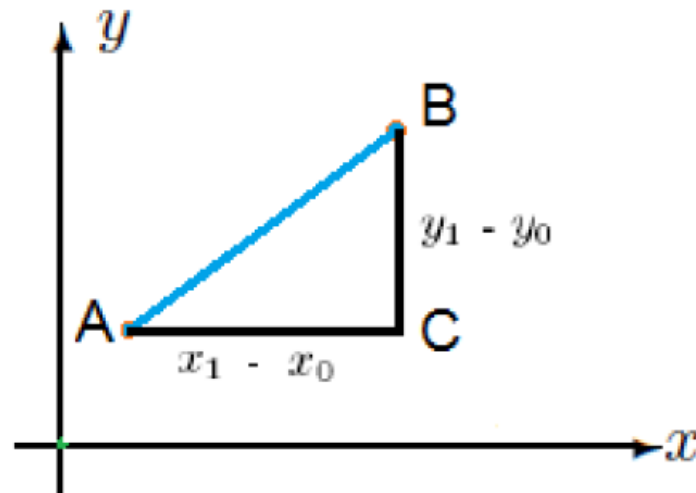


□

Ejercicio 45(a)


☐

Ejercicio 46(a)


☐

Ejercicio 46(b) Al usar Pitágoras

$$d(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$$

☐

Ejercicio 47(a) Tiene pendiente $\frac{3}{2}$. ¡NO es paralela a ningún eje!

☐

Ejercicio 47(b) ¡Esta es paralela al eje x!

$$y = \frac{5}{2}$$

☐

Ejercicio 47(c) $x = -\frac{1}{8}$. ¡Esta es paralela al eje y!

☐

Ejercicio 47(d) Esta es **NO** es paralela a los ejes. ☐

Ejercicio 48(a) Para hallar ordenada en el origen se hace $x = 0$ y listo.

$$x = 0 \implies y = -2$$

Para hallar la ordenada en el origen se hace $y = 0$

$$y = 0 \implies x = 3$$

Ejercicio 48(b) $x = 0 \implies y = \frac{2}{5}$. No hay abscisa en el origen. ☐

Ejercicio 48(c) $y = 0 \implies x = -\frac{1}{2}$. No hay ordenada en el origen. ☐

Ejercicio 48(d)

$$x = 0 \iff y = 0$$

$x = 0$ es la abscisa en el origen e $y = 0$ es la ordenada en el origen. ☐

Ejercicio 49(a) La expresión de ambas rectas es:

- $x + 2y = 4 \implies y = -\frac{1}{2}x + 2$
- $2x - y = 8 \implies y = 2x - 8$

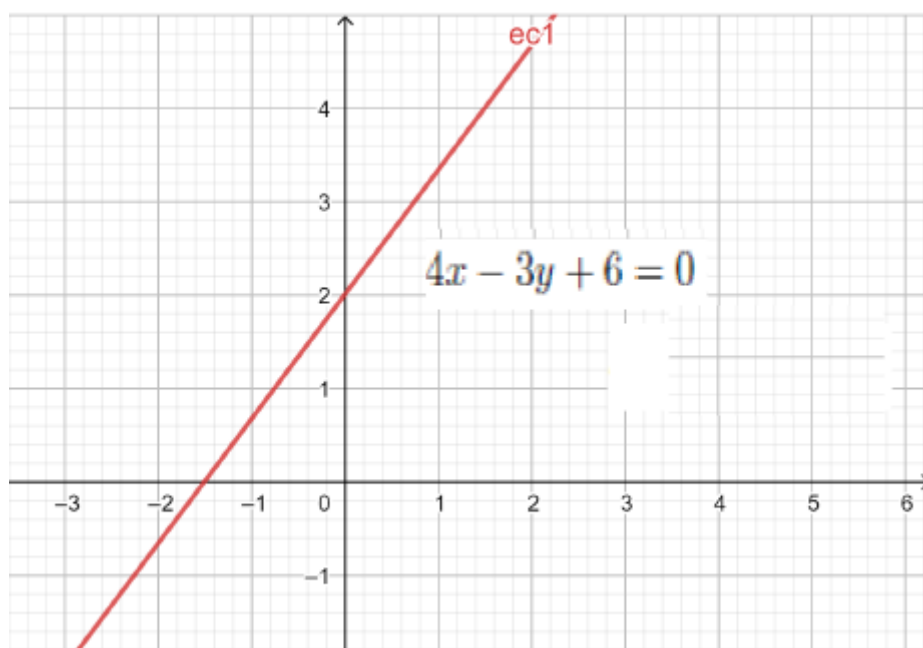
Ejercicio 49(b)

- $x + 2y = 4 \implies m_1 = -\frac{1}{2}$
- $2x - y = 8 \implies m_2 = 2$

Ejercicio 49(c)

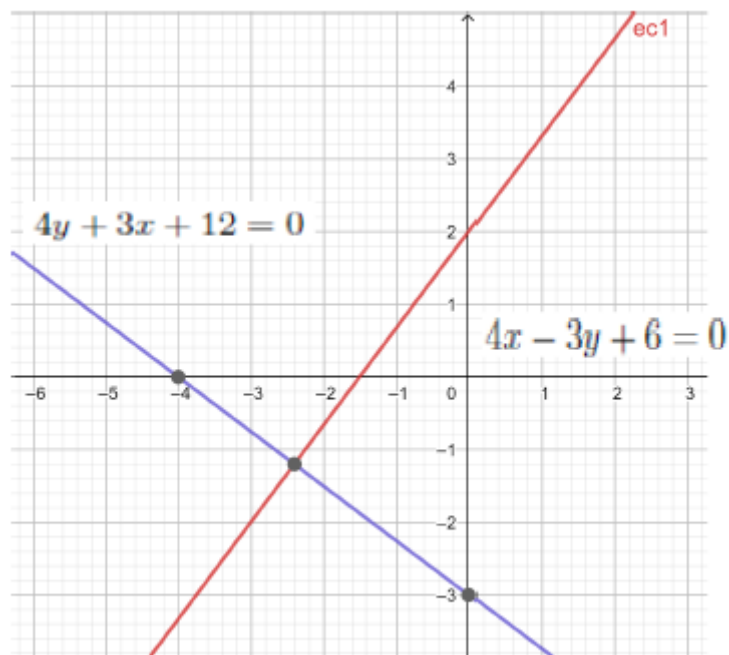
$$m_1 \cdot m_2 = -\frac{1}{2} \cdot 2 = -1$$

Ejercicio 50(a)



☐

Ejercicio 50(b)


☐

Ejercicio 50(c) el producto de pendientes debe ser -1

☐

Ejercicio 50(d)

$$m = -\frac{3}{4}$$

☐

Ejercicio 50(e) La ecuación es

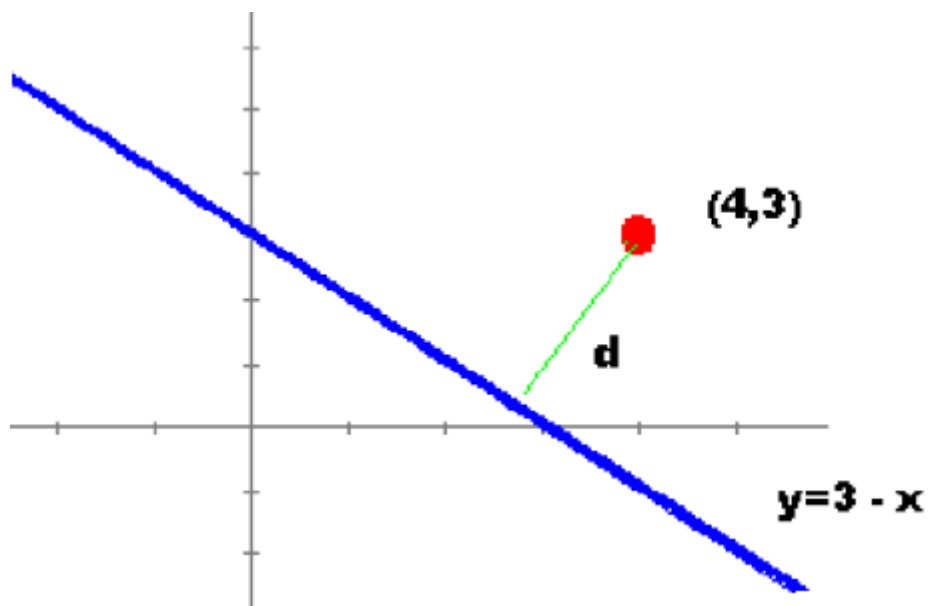
$$y + 3 = -\frac{3}{4} \cdot (x - 0)$$

O bien

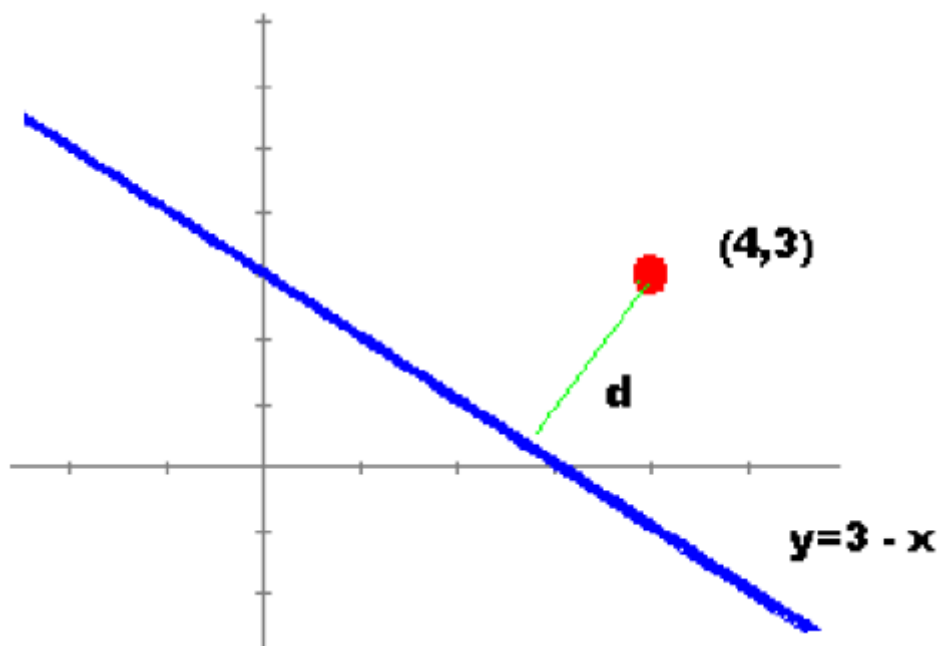
$$4y + 3x + 12 = 0$$

☐

Ejercicio 51(a)


☐

Ejercicio 51(b)


☐

Ejercicio 51(c) La pendiente es -1

☐

Ejercicio 51(d) La pendiente es 1

☐

Ejercicio 51(e) La ecuación es

$$y = x - 1$$

☐

Ejercicio 51(f) El sistema es

$$x + y = 3$$

$$x - y = 1$$

de lo cual $x = 2$ e $y = 1$

☐

Ejercicio 51(g) La distancia es

$$d[(4, 3), (2, 1)] = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

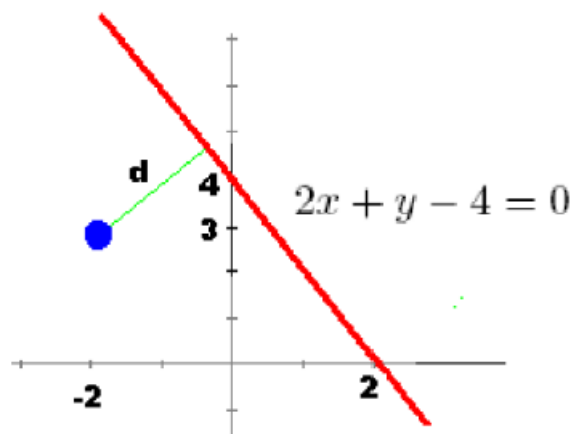
☐

Ejercicio 51(h)

$$d[(3, 4), x + y - 3 = 0] = 2\sqrt{2}$$

☐

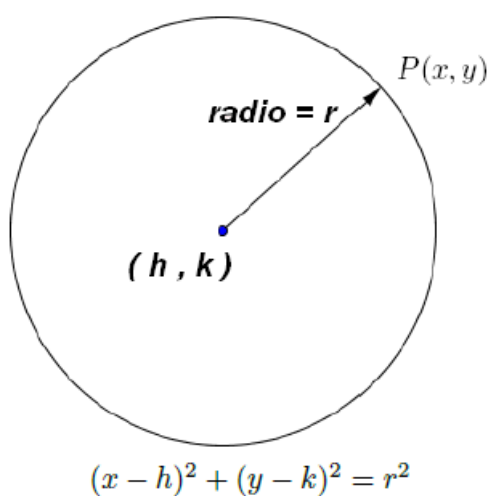
Ejercicio 52(a)



$$d[(-2, 3), 2x + y - 4 = 0] = \frac{|(-2) \cdot 2 + 3 \cdot 1 - 4|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

☐

Ejercicio 53(a)


☐

Ejercicio 54(a) La completación de cuadrados es la siguiente

$$x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0 \implies (x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 25$$

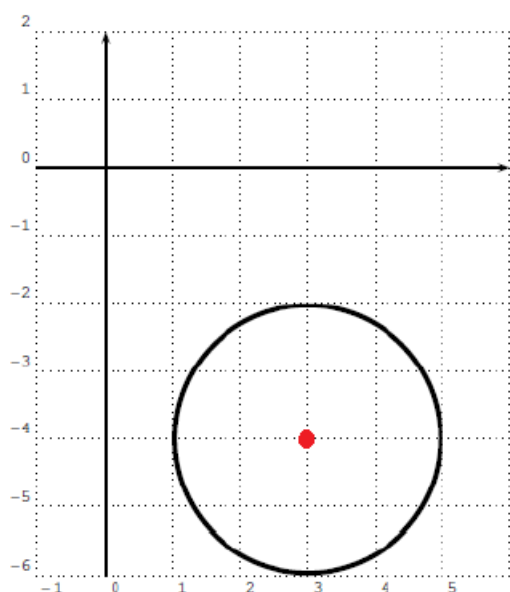
□

Ejercicio 54(b) Los valores son

$$r = 5, \quad h = 3, \quad k = -4$$

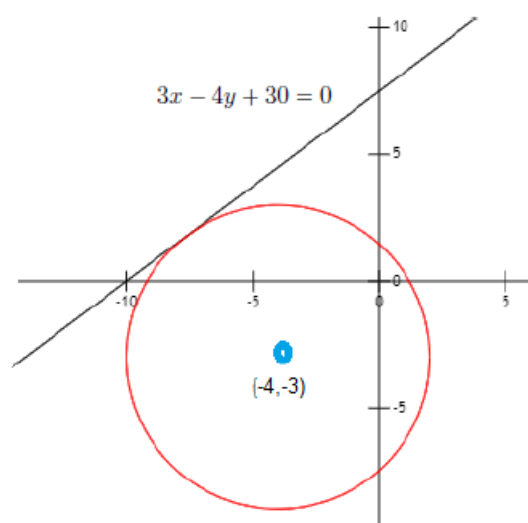
□

Ejercicio 54(c)



□

Ejercicio 55(a)



□

Ejercicio 55(b) El cálculo es el siguiente;

$$r = d[(-4, -3), 3x - 4y + 30] = \frac{(-4) \cdot 3 + (-3)(-4) + 30}{\sqrt{25}} = 6$$

Los valores son

$$r = 5, \quad h = 3, \quad k = -4$$

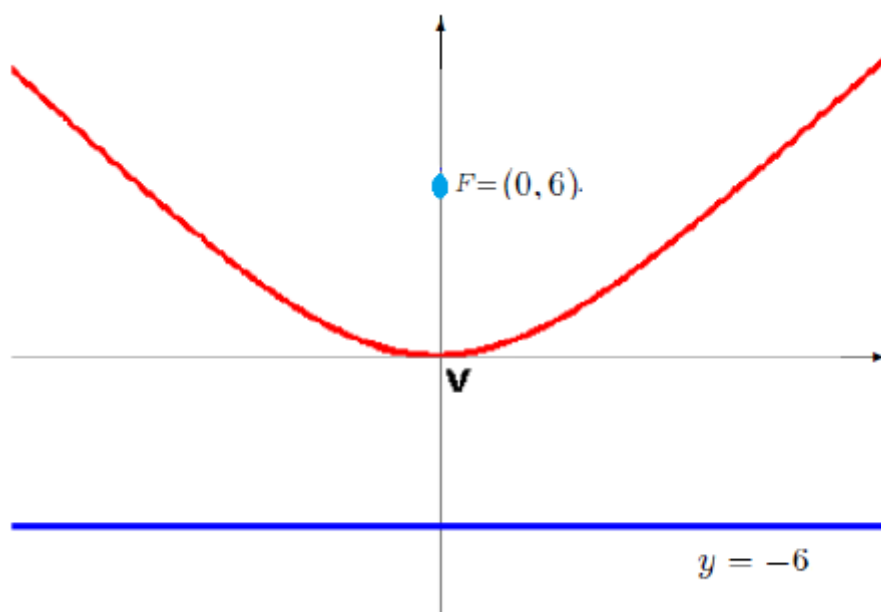
☐

Ejercicio 55(c) La ecuación es

$$(x + 4)^2 + (y + 3)^2 = 36$$

☐

Ejercicio 56(a)


☐

Ejercicio 56(b) Es la distancia vértice-foco y vértice directriz. Es $a = 6$

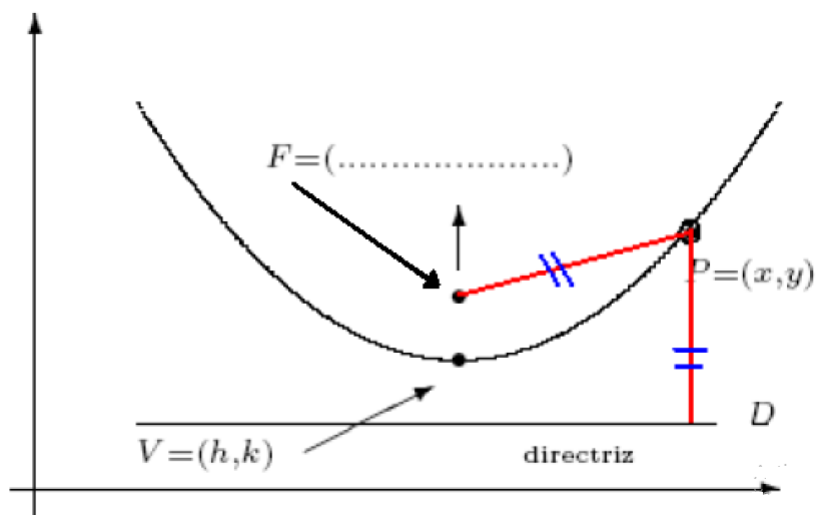
☐

Ejercicio 56(c)

$$x^2 = 24y$$

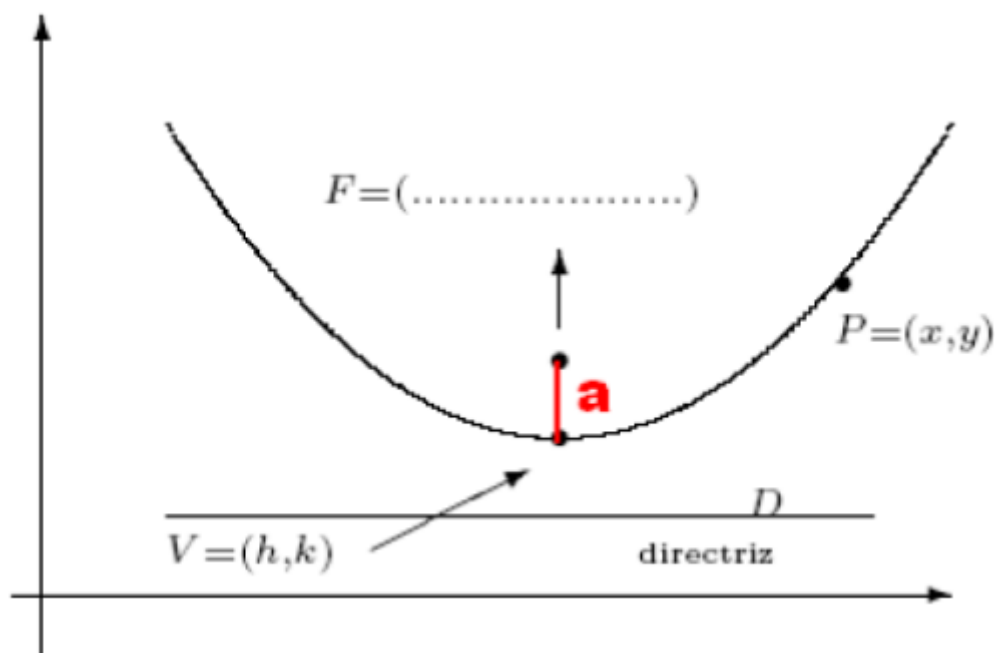
☐

Ejercicio 57(a)



□

Ejercicio 57(b)



□

Ejercicio 57(c)

$$F(h, k + a)$$

□

Ejercicio 57(d)

$$y = k - a$$

□

Ejercicio 57(e)

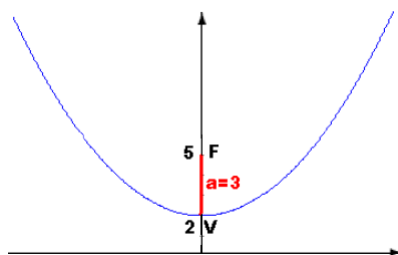
$$d(P, F) = d(P, \text{directriz}) \implies (x - h)^2 + (y - k - a)^2 = y - k + a$$

Después de desarrollar

$$(x - h)^2 = 4a(y - k)$$

□

Ejercicio 58(a)



La distancia vértice foco es 3, lo que significa que $a = 3$. Además, $h = 0$ y $k = 2$. Luego, usando la forma

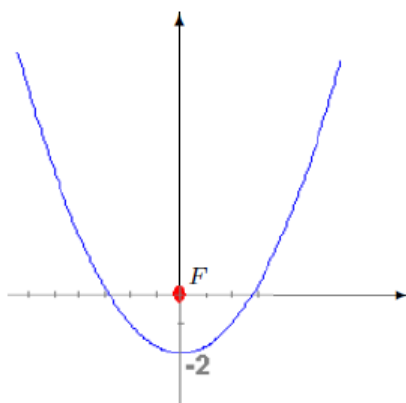
$$(x - h)^2 = 4a(y - k)$$

se tiene

$$x^2 = 12(y - 2)$$

□

Ejercicio 58(b)

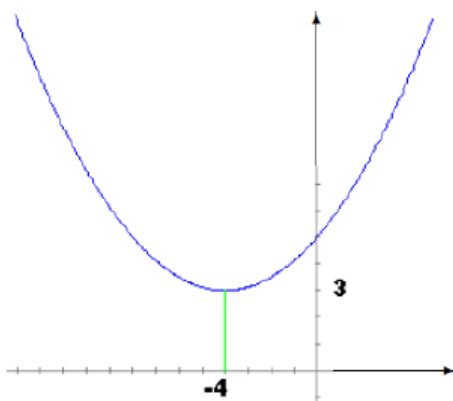


La distancia-vértice foco es 2, lo que significa que $a = 2$. Además, $h = 0$ y $k = -2$. Luego, usando la forma $(x - h)^2 = 4a(y - k)$, se tiene

$$x^2 = 8(y + 2)$$

□

Ejercicio 58(c)

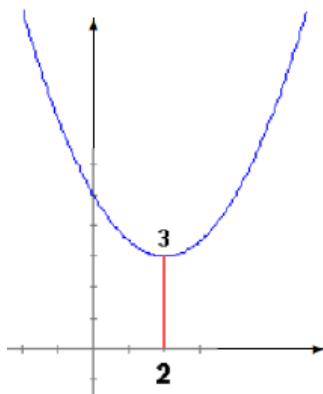


La distancia-vértice foco es 3, lo que significa que $a = 3$. Además, $h = -4$ y $k = 3$. Luego, usando la forma $(x - h)^2 = 4a(y - k)$, se tiene

$$(x + 4)^2 = 12(y - 3)$$

□

Ejercicio 58(d) De seguro sacaste que $(x - 2)^2 = 2(y - 3)$. Con esto se tiene que $h = 2$, $k = 3$, $a = \frac{1}{2}$



Las coordenadas del foco son

$$F(2, 3 + \frac{1}{2}) = F(2, \frac{7}{2})$$

□

Ejercicio 59(a)

$$d(P, F) = d(P, \text{directriz})$$

□

Ejercicio 59(b)

$$d[(x, y), (0, -a)] = d[(x, y), y - a = 0] \implies x^2 + (y + a)^2 = (y - a)^2$$

Al simplificar,

$$x^2 = -4ay$$

□

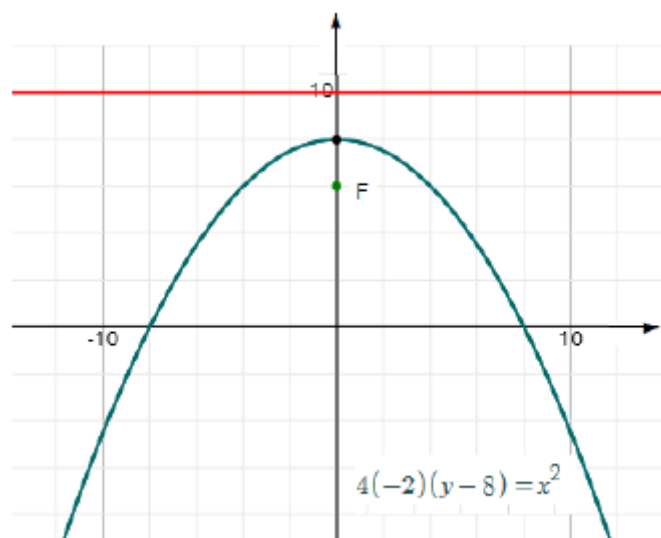
Ejercicio 59(c) el **signo**

□

Ejercicio 60(a) Al hacer el esquema correspondiente se halla que $a = 2$ y como el vértice es $(0, 6)$, entonces

$$(x - 0)^2 = -4 \cdot 2(y - 8) \implies x^2 = -8(y - 8)$$

La gráfica es la siguiente

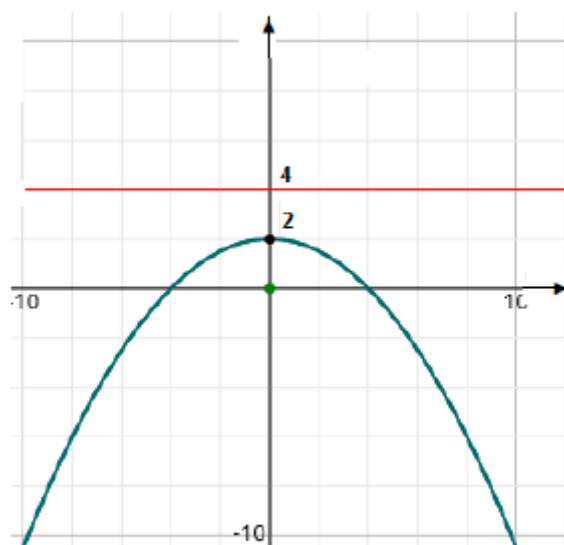


□

Ejercicio 60(b) Al hacer el esquema correspondiente se halla que $a = 2$ y como el vértice es $(0, 2)$, entonces

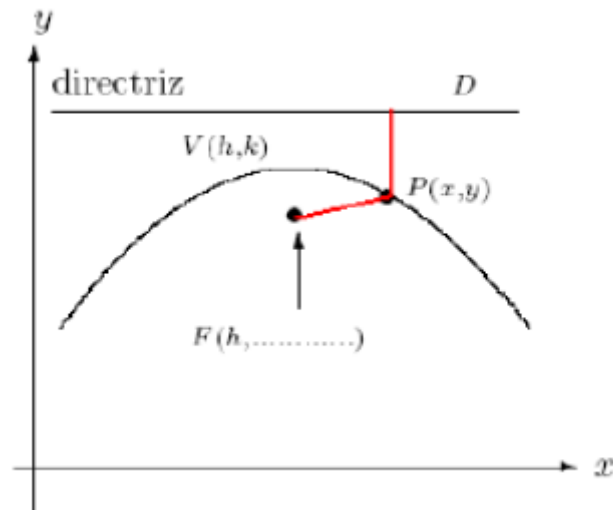
$$(x - 0)^2 = -4 \cdot 2(y - 2) \implies x^2 = -8(y - 2)$$

La gráfica es la siguiente



□

Ejercicio 61(a)



□

Ejercicio 61(b) La distancia Foco - Vértice es a y la ordenada del foco es $k - a$.

□

Ejercicio 61(c)

$$d[(x, y), (h, k - a)] = d[(x, y), y - k - a = 0] \implies (x - h)^2 + (y - k + a)^2 = (y - k - a)^2$$

Al reducir

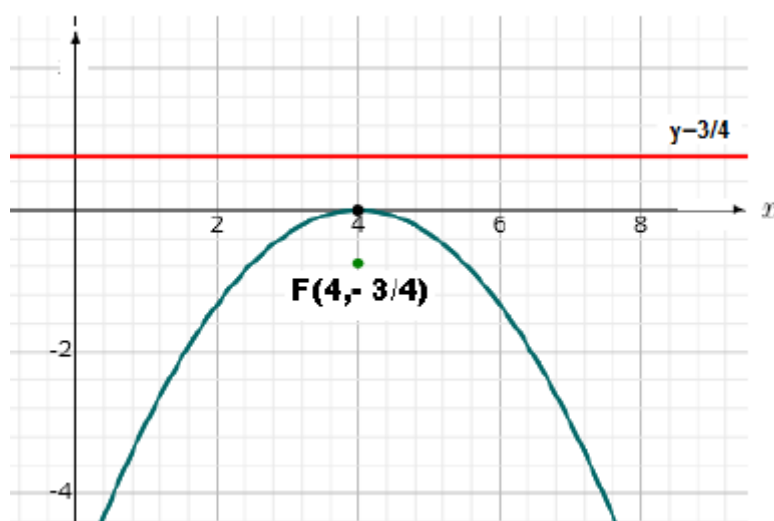
$$(x - h)^2 = -4a(y - k)$$

□

Ejercicio 62(a) Al completar cuadrados se halla que

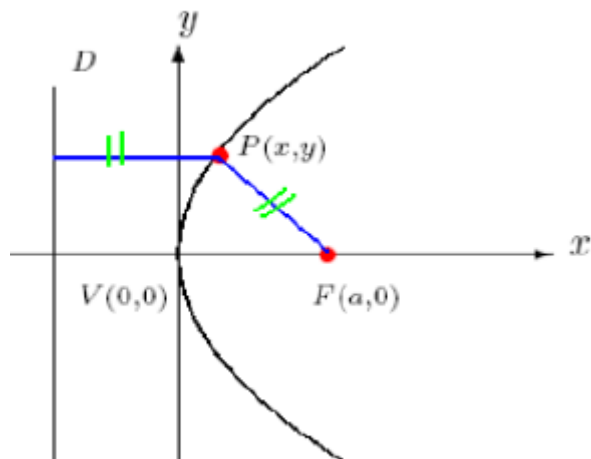
$$(x - 4)^2 = -3y$$

De esto se deduce que $V(4, 0)$ y $4a = -3 \implies a = -\frac{3}{4}$



□

Ejercicio 63(a)



□

Ejercicio 63(b)

$$\begin{aligned} d(P, F) = d(P, \text{directriz}) &\implies d[(x, y), (a, 0)] = d[(x, y), x = -a] \\ &\implies (x - a)^2 + y^2 = (x + a)^2 \end{aligned}$$

Al reducir

$$y^2 = 4ax$$

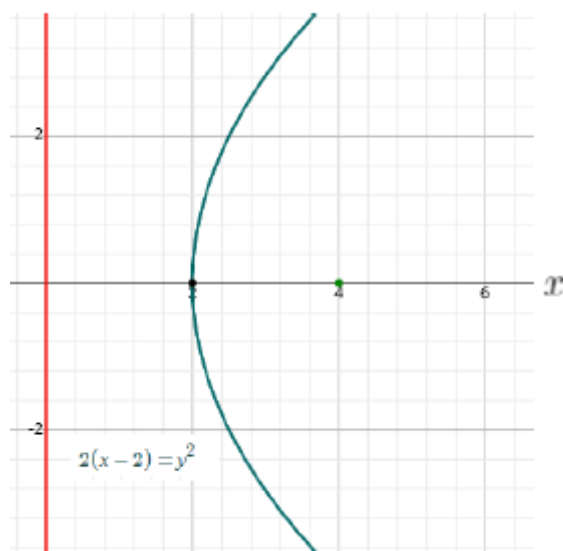
□

Ejercicio 63(c)

$$(y - k)^2 = 4a(x - h)$$

□

Ejercicio 64(a)

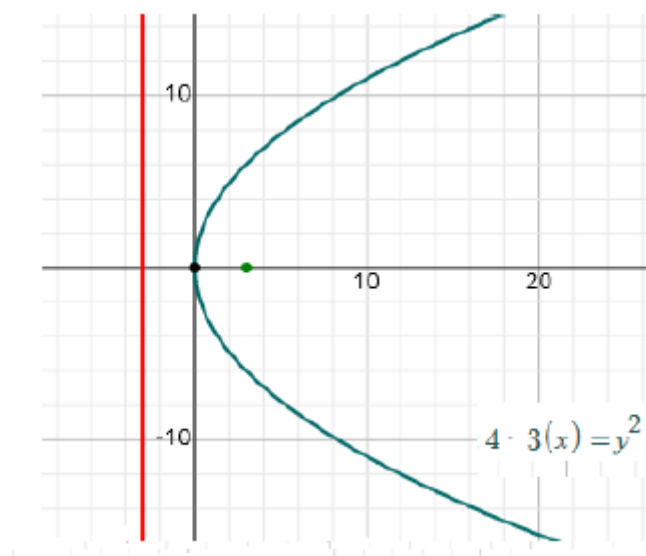


Como el vértice es $V(0,0)$, $a = 2$ y el foco es $F(2,0)$, entonces

$$(y - 0)^2 = 4 \cdot 2(x - 0) \implies y^2 = 8x$$

□

Ejercicio 64(b)

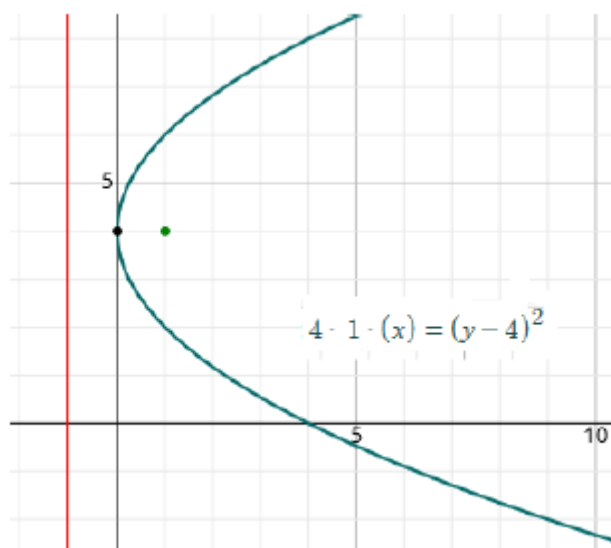


Como el vértice es $V(0,0)$, $a = 3$ y el foco es $F(3,0)$, entonces

$$(y - 0)^2 = 4 \cdot 3(x - 0) \implies y^2 = 12x$$

□

Ejercicio 64(c)

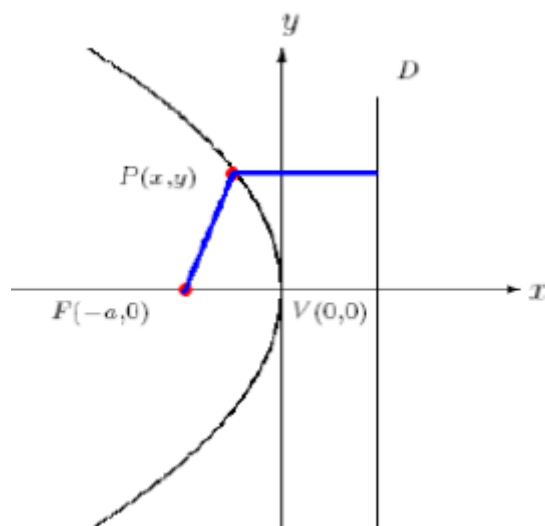


Al completar cuadrados se tiene

$$(y - 4)^2 = 4x \implies a = 1, h = 0, k = 4$$

□

Ejercicio 65(a)



□

Ejercicio 65(b)

$$d(P, F) = d(P, \text{directriz}) \implies d[(x, y), (-a, 0)] = d[(x, y), x = a]$$

de lo cual se tiene que

$$(x + a)^2 + y^2 = (x - a)^2$$

Al reducir

$$y^2 = -4ax$$

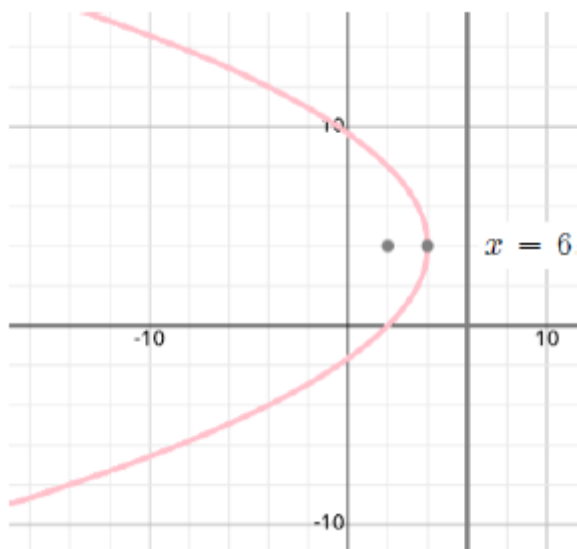
□

Ejercicio 65(c)

$$(y - k)^2 = -4a(x - h)$$

□

Ejercicio 66(a)

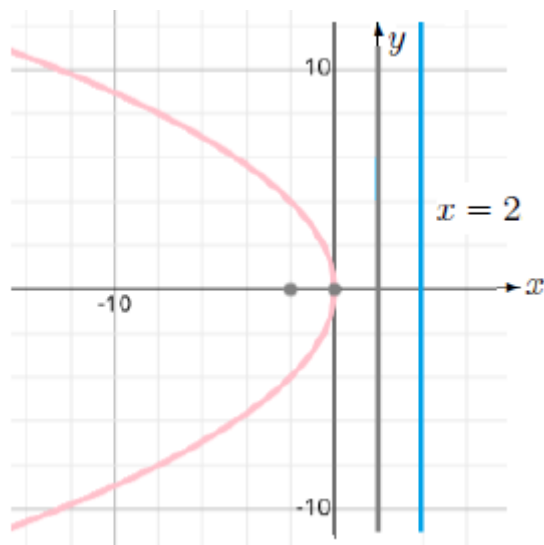


Al bosquejar se halla que $a = 2$ con lo que el vértice es $V(4, 4)$. Luego se abre hacia la izquierda. Por tanto, su ecuación es

$$(y - 4)^2 = -4 \cdot 2(x - 4) \implies (y - 4)^2 = -8(x - 4)$$

□

Ejercicio 66(b)

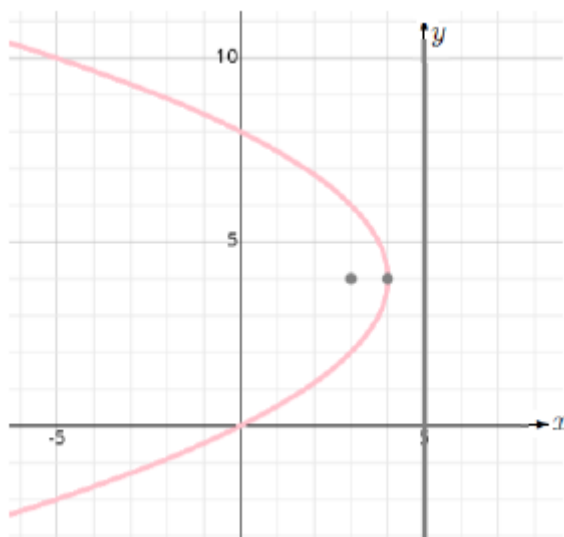


Al bosquejar se halla que $a = 2$ con lo que la directriz tiene ecuación $x = 2$. Luego, se abre hacia la izquierda. Por tanto, su ecuación es

$$(y - 0)^2 = -4 \cdot 2(x - 0) \implies y^2 = -8x$$

□

Ejercicio 66(c)



Al completar cuadrados se tiene que $a = 1$, $h = k = 4$. Se abre hacia la izquierda. Por tanto, su ecuación es

$$(y - 4)^2 = -4 \cdot (x - 4)$$

□

Ejercicio 67(a)

$$(a, 0), \quad y \quad (-a, 0)$$

□

Ejercicio 67(b) La distancia del centro al vértice

□

Ejercicio 67(c)

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

□

Ejercicio 67(d)

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a \implies d[(x, y), (c, 0)] + d[(x, y), (-c, 0)] = 2a$$

de donde

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

Al trasladar y elevar al cuadrado se tiene

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2$$

Al simplificar

$$4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 4a^2 + 4cx \implies a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx$$

Elevando nuevamente al cuadrado

$$a^2[(x+c)^2 + y^2] = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2 \implies a^2(x+c)^2 + a^2y^2 = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2$$

Ahora se simplifica

$$a^2x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2 \implies (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Al poner $a^2 - c^2 = b^2$ se tiene

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

Al dividir por a^2b^2 se obtiene la forma canónica

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

□

Ejercicio 68(a)

$$a = 13$$

□

Ejercicio 68(b)

$$(-13, 0)$$

□

Ejercicio 68(c)

$$(-5, 0)$$

□

Ejercicio 68(d)

$$2a = 26$$

☐

Ejercicio 68(e) Como $a^2 - c^2 = b^2$, entonces $13^2 - 5^2 = 144 = b^2$, de donde $b = 12$, con lo cual la longitud del eje menor es 24

☐

Ejercicio 68(f)

$$L_r = \frac{2b^2}{a} = \frac{288}{13}$$

☐

Ejercicio 68(g)

$$e = \frac{c}{a} = \frac{5}{13}$$

☐

Ejercicio 68(h) La ecuación de la elipse tiene la forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \implies \frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$$

☐

Ejercicio 69(a)

$$(h + c, k) \quad y \quad (h - c, k)$$

☐

Ejercicio 69(b)

$$(h + a, k) \quad y \quad (h - a, k)$$

☐

Ejercicio 69(c)

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

☐

Ejercicio 70(a)

$$(h, k + c) \quad y \quad (h, k - c)$$

☐

Ejercicio 70(b)

$$(h, k + a) \quad y \quad (h, k - a)$$

☐

Ejercicio 70(c)

$$\frac{(x - h)^2}{b^2} + \frac{(y - k)^2}{a^2} = 1$$

☐

Ejercicio 71(a) Los vértices son

$$(a, 0) \quad y \quad (-a, 0)$$

☐

Ejercicio 71(b)

$$d[P, F_2] - d[P, F_1] = 2a$$

☐

Ejercicio 71(c) De acuerdo con la definición

$$d[(x, y), (-c, 0)] - d[(x, y), (c, 0)] = 2a$$

esto equivale a tener

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

Trasladando una raíz tenemos

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Se eleva al cuadrado

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

Al reducir

$$cx - a^2 = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Se eleva de nuevo al cuadrado

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a[(x-c)^2 + y^2]$$

que equivale a

$$x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 - a^2(c^2 - a^2) = 0$$

Considerando $c^2 - a^2 = b^2$, pues $c > a$, se tiene

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

□

Ejercicio 72(a) Las coordenadas de los focos son:

$$(h+c, k) \quad y \quad (h-c, k)$$

□

Ejercicio 72(b) Las coordenadas de los vértices son:

$$(h+a, k) \quad y \quad (h-a, k)$$

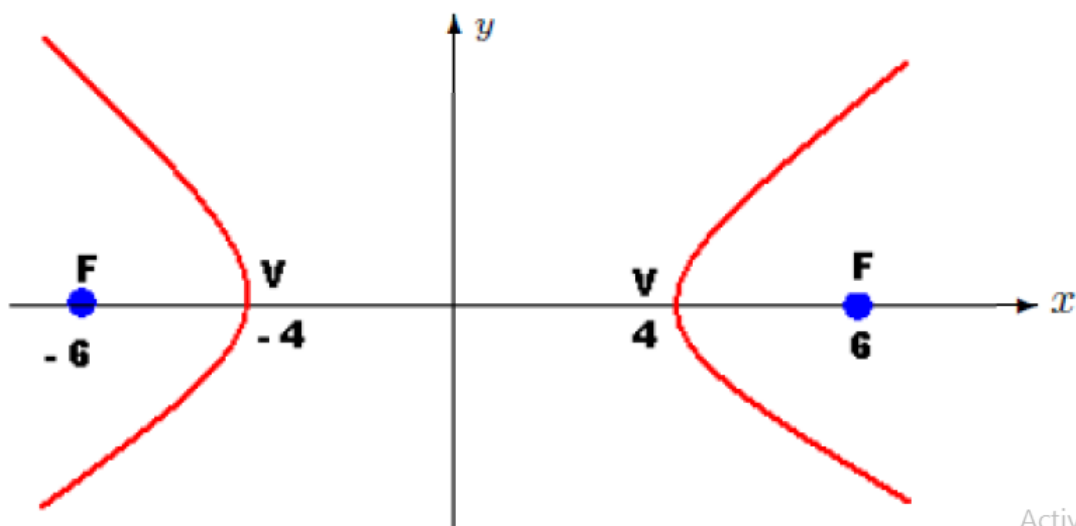
□

Ejercicio 72(c)

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

□

Ejercicio 73(a)



Activar

□

Ejercicio 73(b) La distancia centro - vértice es 4, luego, $a = 4$. Además, de $c^2 - a^2 = b^2$ se tiene

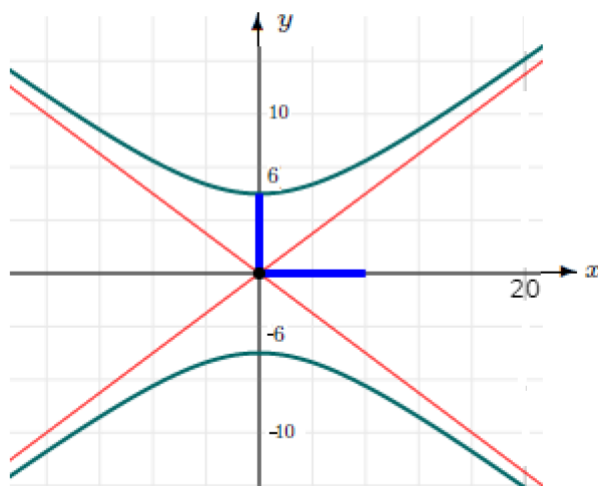
$$36 - 16 = b^2 \implies b = \sqrt{20}$$

Como $h = k = 0$ se tiene que la ecuación es

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1$$

□

Ejercicio 74(a) Un esquema es el siguiente



Como $a = 6$ y la excentricidad

$$e = \frac{c}{a} = \frac{5}{3} \implies c = 10$$

Además,

$$c^2 - a^2 = b^2 \implies b = 8$$

Dado que el centro es $(h, k) = (0, 0)$, entonces la ecuación de la hipérbola es

$$\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{64} = 1$$

□

Ejercicio 75(a) A partir de la ecuación

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

se establece la misma ecuación, pero igualada a cero

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 0$$

Se escribe esta ecuación como suma por diferencia

$$\left(\frac{x-h}{a} - \frac{y-k}{b}\right) \cdot \left(\frac{x-h}{a} + \frac{y-k}{b}\right) = 0$$

Cada factor representa una asíntota. Despejando la variable y se obtiene

$$y = k \pm \frac{b}{a}(x-h)$$

□

Ejercicio 76(a) Al completar cuadrados, la ecuación tiene la forma

$$(x+1)^2 - (y-1)^2 = 1$$

Las asíntotas son:

$$[(x+1) - (y-1)] \cdot [(x+1) + (y-1)] = 0$$

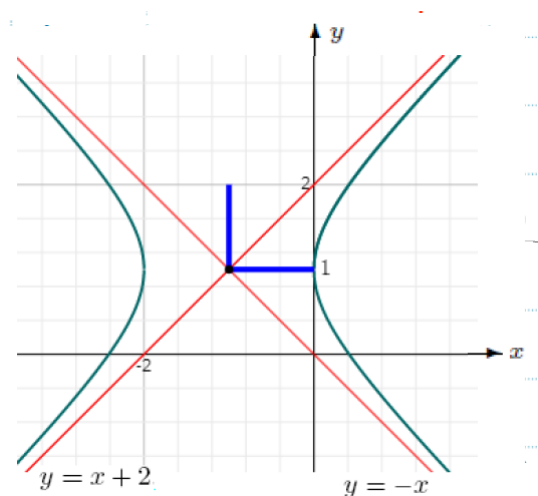
Al reducir cada factor:

$$x - y + 2 = 0, \quad x + y = 0$$

Luego, las asíntotas tienen ecuaciones

$$y = x + 2, \quad y = -x$$

La gráfica es



□