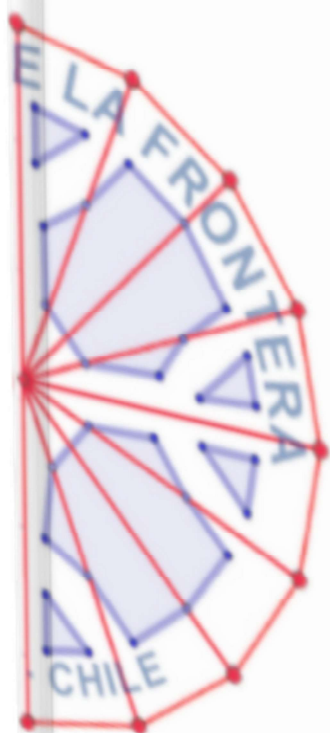


110 PROBLEMAS
DE CAMPEONATO



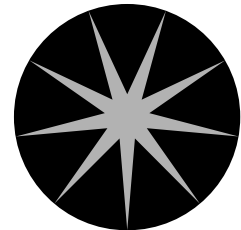
7°

CAMPEONATO

de Matemática
UNIVERSIDAD de
La FRONTERA

2014

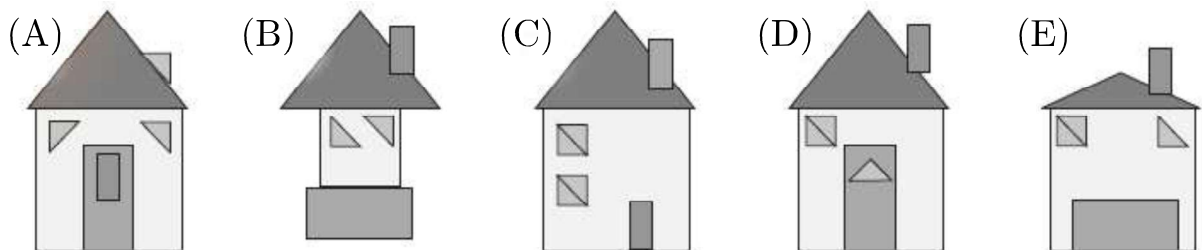
Problema 1. ¿Qué dibujo es la parte central de la estrella que se muestra en la imagen ?



- (A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

Problema 2. Juan quiere insertar el dígito 3 en algún lugar del número 2014. ¿Dónde se debe insertar el dígito 3 si el quiere que su número de cinco dígitos sea lo más pequeño posible?

Problema 3. ¿Qué pareja de casas fueron hechas usando exactamente las mismas piezas de forma triangular o rectangular?

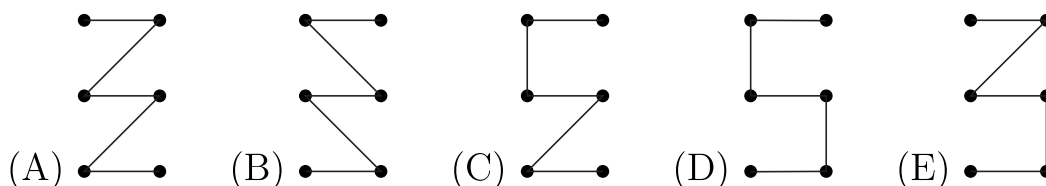


Problema 4. Cuando Koko el Koala no duerme, come 50 gramos de hojas por hora. Ayer, él durmió durante 20 horas. ¿Cuántos gramos de hojas comió ayer?

Problema 5. Alicia tiene 10 nietos. Fernanda es la mayor. Un día la abuela se da cuenta que sus nietos tienen todas edades distintas. Si la suma de las edades de sus nietos es 180, ¿Cuál es la edad mínima que Fernanda puede tener?

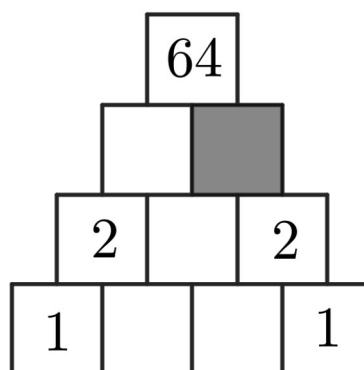
Problema 6. María realiza 6 restas y obtiene como resultados los números desde el 0 al 5. Ella une los puntos de menor a mayor, comenzando en el punto con el resultado 0 y terminando en el punto con el resultado 5. ¿Cuál figura ella obtiene?

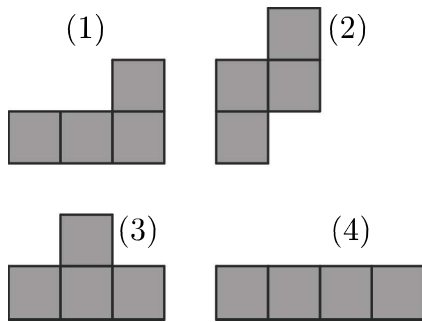
$2-2$ • • $6-5$
 $8-6$ • • $11-8$
 $13-9$ • • $17-12$



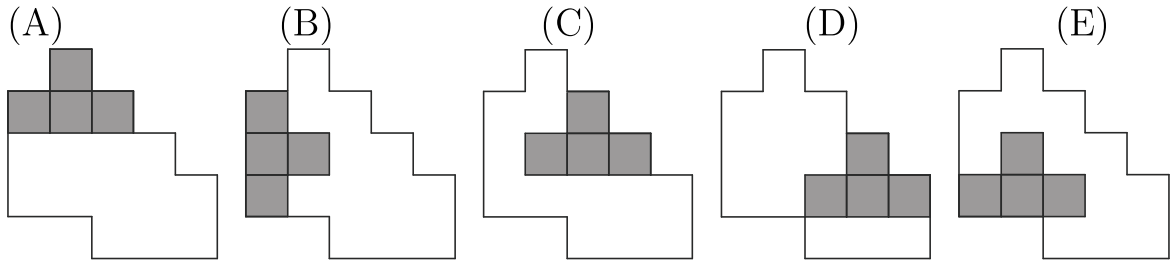
Problema 7. Alan construyó menos castillos de arena que Martín pero más que Susana. Lucía contruyó más castillos que Alan y que Martín. Daniela construyó más castillos que Martín y menos que Lucía. ¿Quién de ellos contruyó más castillos de arena?

Problema 8. Mónica escribe números en el diagrama de manera que cada número sea el producto de los dos números de abajo. ¿Qué número debería escribir en la celda gris?

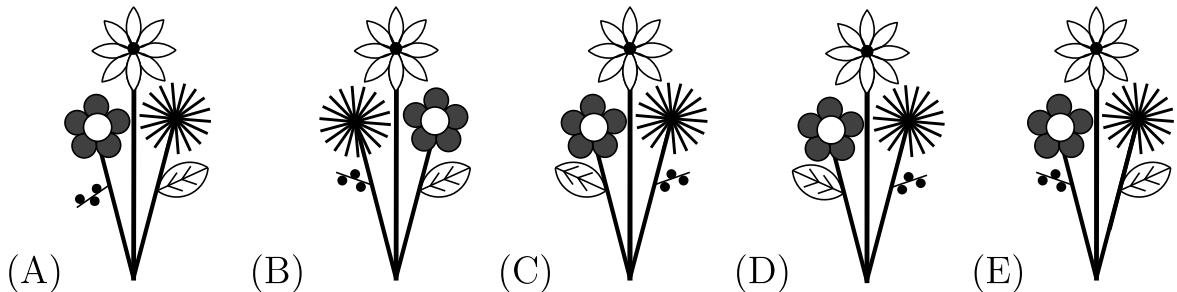




Problema 9. Ana tiene cuatro piezas las cuales se muestran en la imagen. Con esas piezas ella puede cubrir completamente solo una de las siguientes figuras. ¿Cuál de las siguientes ella puede cubrir con todas sus piezas?

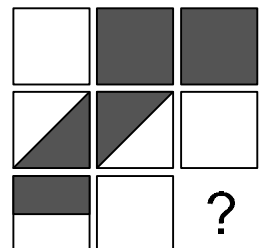


Problema 10. Bruno ha pintado flores en la ventana de la tienda (mire la figura). ¿Cómo se verán estas flores desde el otro lado de la ventana?

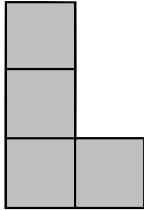


Problema 11. Había algunos dulces en un frasco, Sara tomó la mitad de los dulces, entonces Tomás tomó la mitad de los dulces restantes en el frasco, después de eso, Clara tomó la mitad de los dulces que quedaban. Al final, quedaron 6 dulces en el frasco. ¿Cuántos dulces había en el frasco al comienzo?

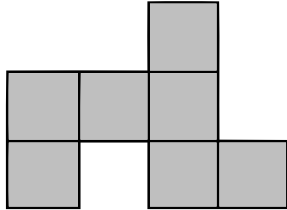
Problema 12. ¿Cuál de las siguientes baldosas debe ser agregada en la imagen para que el área blanca sea tan grande como el área negra?



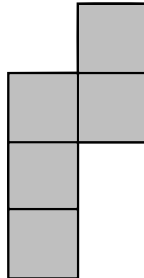
(A)



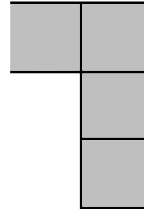
(B)



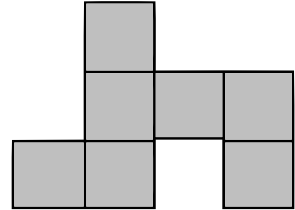
(C)



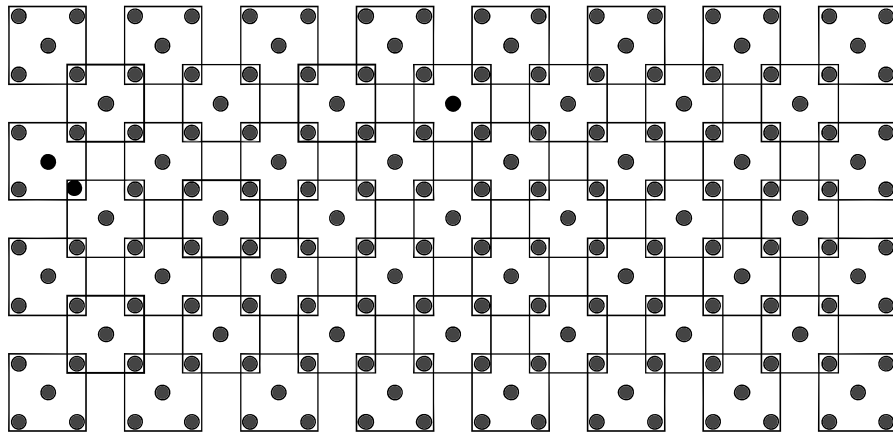
(D)



(E)



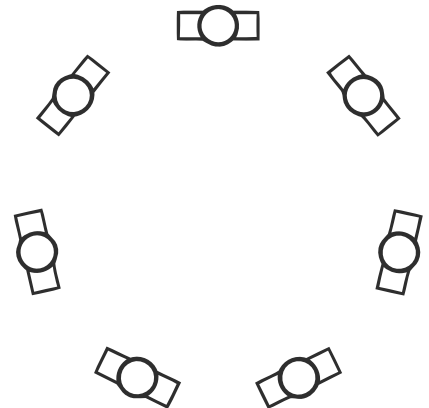
Problema 17. ¿Cuántos puntos hay en esta imagen?



Problema 18. ¿En el planeta canguro cada canguro-año tiene 20 canguro-meses y cada canguro-mes tiene 6 canguro-semanas. ¿Cuántas canguro-semanas hay en un cuarto de canguro-años?

Problema 19. Siete estudiantes (niños y niñas) están de pie en círculo. No hay dos niños de pie uno al lado del otro. No hay tres chicas de pie juntas una al lado de la otra. ¿Cuál de éstas afirmaciones es cierta respecto al número de chicas que se ubicaron en el círculo?

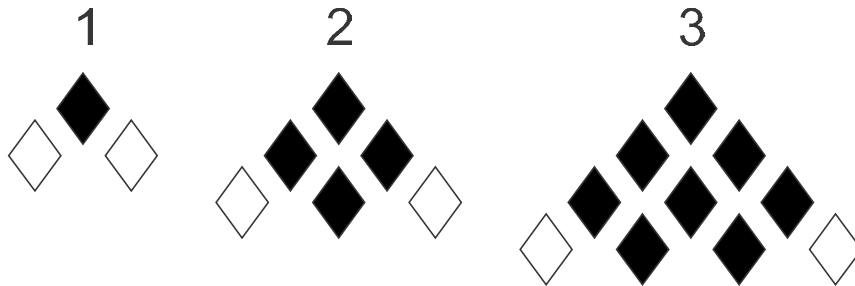
- (A) Solo 3 es posible (B) 3 y 4 es posible
 (C) Solo 4 es posible (D) 4 y 5 es posible
 (E) Solo 5 es posible



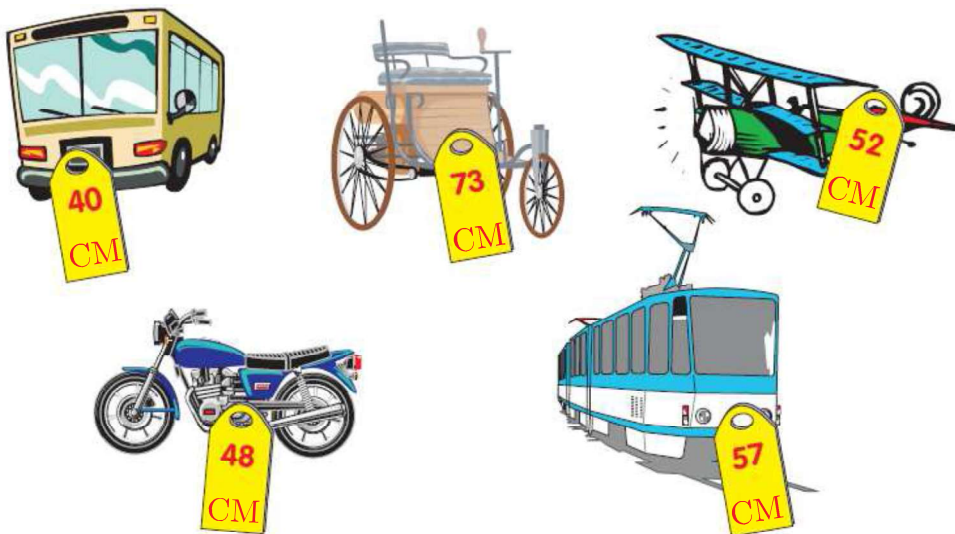
Problema 20. Evelyn ordenó cartas en línea como se muestra en la figura. En cada movimiento a Evelyn se le permite intercambiar cualquier par de cartas. ¿Cuál es el menor número de movimientos que Evelyn tiene que hacer para conseguir la palabra ALOCADOS?

O L D C S O A A

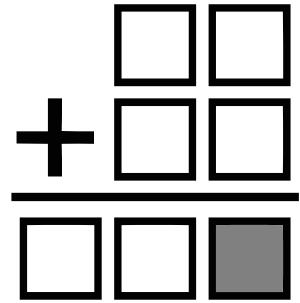
Problema 21. Se realiza una secuencia de triángulos de diamantes. En la figura se muestran las tres primeras etapas. En cada etapa se añade una línea de diamantes. En las líneas inferiores los diamantes exteriores son de color blanco. El resto de los diamantes en el triángulo son negros. ¿Cuántos diamantes negros tiene la figura en la etapa número 6?



Problema 22. Un canguro compró juguetes y le entregó 150 canguro-monedas al asistente de la tienda. Recibió 20 canguro-monedas de vuelta. Luego cambió de opinión y cambió uno de los juguetes por otro. Le devolvieron 5 canguro-monedas. ¿Con qué juguetes salió el canguro de la tienda?



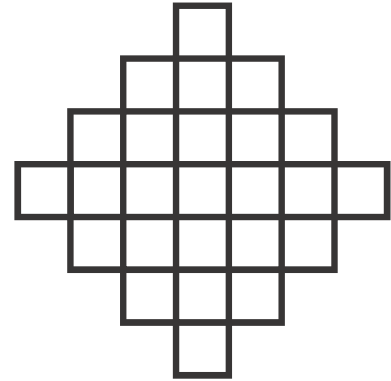
Problema 23. Escribe cada uno de los números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 en los cuadrados para hacer la adición correcta. ¿Qué dígito estará en el cuadrado gris?



Problema 24. ¿Cuál es el mayor número de cuadrados pequeños que pueden ser sombreados para que ningún cuadrado de la forma:



Hecho de cuatro cuadrados sombreados pequeños aparezca en la figura?

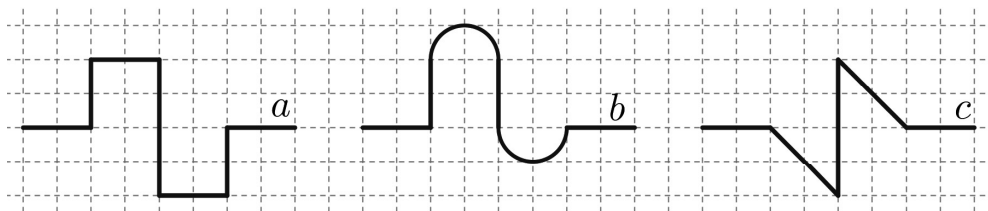


Problema 25. Nicol ha escrito cada uno de los números del 1 al 9 en las celdas de la tabla 3×3 . Solo cuatro de estos números se pueden ver en la figura. Nicol se ha dado cuenta de que para el número 5 la suma de los números en las celdas vecinas es igual a 13 (las celdas vecinas son aquellas celdas que comparten lados). Se dio cuenta que lo mismo se aplica para el número 6. ¿Qué número ha escrito Nicol en la celda sombreada?

1		2
4		3

Problema 26. El barco MSC Fabiola tiene el récord de ser el mayor buque contenedor en cruzar el canal de Panamá. Lleva 12500 contenedores que si se ubicaran de extremo a extremo alcanzarían una distancia de 75 km. ¿Cuál es la longitud de un contenedor?

Problema 27. Si a , b y c denotan las longitudes de las líneas de la imagen, ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

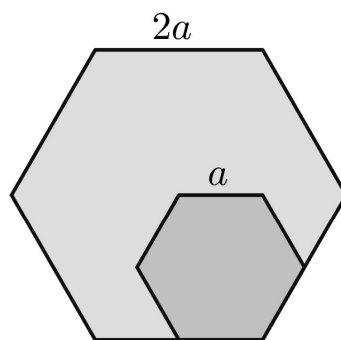


(A) $a < b < c$ (B) $a < c < b$ (C) $b < a < c$ (D) $b < c < a$ (E) $c < b < a$

Problema 28. ¿Qué número está en el medio de $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{5}$?

Problema 29. En el número 2014 el último dígito es más grande que la suma de los otros tres dígitos. ¿Cuántos años atrás fue la última vez que ocurrió esto?

Problema 30. La longitud de los lados del hexágono regular grande es dos veces la longitud de los lados del hexágono regular pequeño. El hexágono pequeño tiene una superficie de 4 cm^2 . ¿Cuál es el área del hexágono grande?

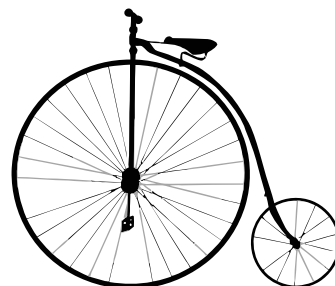


Problema 31. ¿Cuál es la negación de la siguiente declaración "Todo el mundo resuelve más de 20 problemas"?

Problema 32. En un sistema de coordenadas Tom dibujó un cuadrado. Una de sus diagonales se encuentra en el eje x . Las coordenadas de los dos vértices que están en el eje x son $(-1, 0)$ y $(5, 0)$. ¿Cuál de las siguientes son las coordenadas de otro vértice del cuadrado?

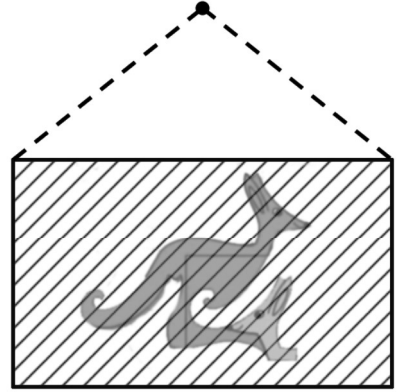
Problema 33. En un pueblo, la razón entre hombres adultos y mujeres adultas es de $2 : 3$ y la razón entre las mujeres y los niños es de $8 : 1$. ¿Cuál es la razón entre los adultos (hombres y mujeres) y los niños?

Problema 34. La rueda grande de esta bicicleta tiene 4,2 metros de perímetro. La rueda pequeña tiene 0,9 metros de perímetro. En un determinado momento, las válvulas de las dos ruedas están en su punto más bajo. La bicicleta rueda hacia la izquierda. ¿Después de cuántos metros estarán nuevamente las dos válvulas en su punto más bajo?



Problema 35. Una abuela, su hija y su nieta pueden decir este año (2014) que la suma de sus edades es 100. ¿En qué año nació la nieta si cada una de las edades es una potencia de 2?

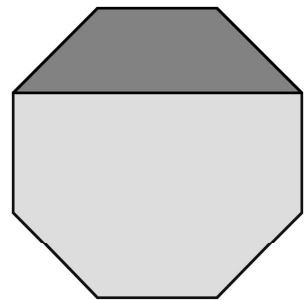
Problema 36. Pablo puso algunos cuadros rectangulares en la pared. Por cada foto puso un clavo en la pared 2,5 m por encima del suelo y adjuntó una larga cadena de 2 m en las dos esquinas superiores. ¿Cuál de las siguientes fotos es la más cercana al suelo (formato: ancho en cm $\times$ altura en cm)?



- (A) 60×40 (B) 120×50 (C) 120×90 (D) 160×60 (E) 160×100

Problema 37. Seis niñas comparten un departamento con dos baños que utilizan todas las mañanas a partir de las 7:00 en punto. Ellas usan el baño una a la vez, y se sientan a desayunar juntas tan pronto como la última chica ha terminado. Pasan 9, 11, 13, 18, 22 y 23 minutos en el baño respectivamente. Estando bien organizadas, ¿Qué es lo más temprano que pueden desayunar juntas?

Problema 38. En la siguiente figura hay un octágono regular. El área sombreada mide 3 cm^2 . Encontrar el área del octágono .



Problema 39. Una nueva especie de cocodrilo ha sido descubierta en África. La longitud de la cola es de un tercio de toda su longitud. Su cabeza es de 93 cm de largo y esta corresponde a la cuarta parte de la longitud del cocodrilo sin su cola. ¿Cuánto mide este cocodrilo en cm?

Problema 40. En la imagen hay un dado especial. Los números en las caras opuestas siempre suman lo mismo. Los números que no podemos ver en la imagen son todos números primos. ¿Qué número es opuesto al 14?



Problema 41. Ana ha caminado 8 kilómetros con una velocidad de 4km/h. Ahora ella correrá algún tiempo con una velocidad de 8 km/h. ¿Cuánto tiempo le queda por correr para que su velocidad promedio global sea de 5 km/h?

Problema 42. Un jugador de ajedrez jugó 40 partidos y acumuló 25 puntos (una victoria cuenta como un punto, un empate cuenta como medio punto, y una derrota cuenta como cero puntos). ¿Cuál es la diferencia entre los partidos ganados y los partidos perdidos?

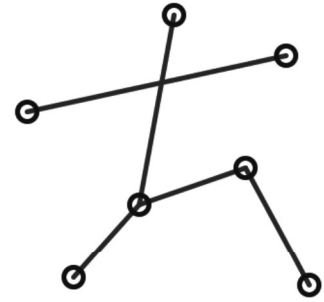
Problema 43. Las trillizas Javiera, Daniela y Luisa querían comprar sombreros idénticos. Sin embargo, a Javiera le faltaba un tercio del precio, a Daniela un cuarto y a Luisa un quinto. Cuando los sombreros estuvieron \$ 940 más baratos, las hermanas juntaron sus ahorros y cada una de ellas compró un sombrero. No les sobró ni un peso. ¿Cuál era el precio de un sombrero antes de que su precio disminuyera?

Problema 44. Sean p , q , r números enteros positivos y $p + \frac{1}{q + \frac{1}{r}} = \frac{25}{19}$.

¿Cuál es el valor del producto pqr ?

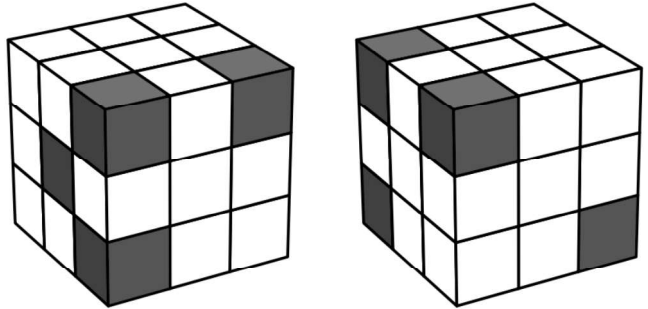
Problema 45. En la ecuación $N \cdot U \cdot (M + E + R + O) = 33$, cada letra representa un dígito diferente (0, 1, 2, ..., 9). ¿Cuántas maneras diferentes hay para elegir los valores de las letras?

Problema 46. En la imagen que se muestra, Karina quiere añadir algunos segmentos de línea de tal manera que cada uno de los siete puntos tenga el mismo número de conexiones a los otros puntos. ¿Cuál es el menor número de segmentos de línea que Karina debe dibujar?



Problema 47. La imagen muestra el mismo cubo desde dos puntos de vista diferentes.

Está construido a partir de 27 cubos pequeños, algunos de ellos son de color negro y algunos son blancos.



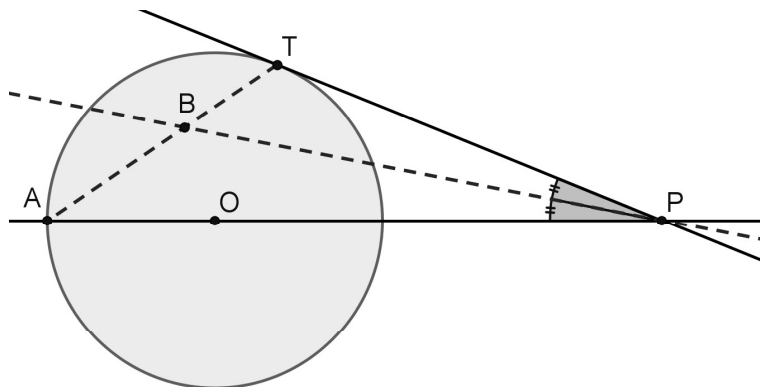
¿Cuál es el mayor número de cubos negros que podría haber?

Problema 48. En una isla, las ranas son siempre verdes o azules, cuando el número de ranas verdes se redujo el 60 %, el número de ranas azules aumentó el 60 %. Resultó que la nueva relación de las ranas azules a las ranas verdes es igual a la relación anterior pero en el orden opuesto (ranas verdes a las ranas azules). ¿En qué porcentaje se modificó el número total de las ranas?

Problema 49. Tomás escribió varios números enteros positivos distintos, sin exceder de 100. Si el producto de estos números no es divisible por 18. A lo más, ¿cuántos números podría haber escrito?

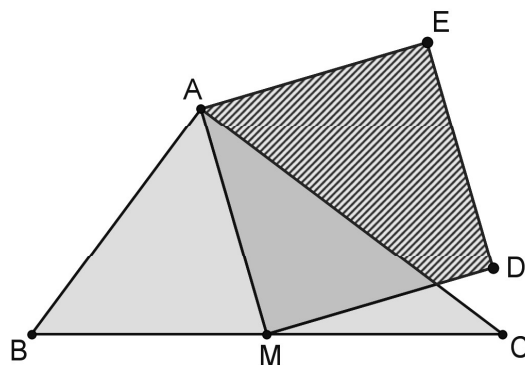
Problema 50. Con cualquier trío de vértices de un cubo que no están sobre una misma cara formamos un triángulo. ¿Cuántos triángulos se pueden formar con esta condición?

Problema 51. En la imagen, PT es tangente a una circunferencia C con centro O y PB bisectriz del ángulo TPA . Calcula el ángulo TBP .



Problema 52. Considere el conjunto de todos los números de 7 dígitos que se pueden obtener utilizando, para cada número, todos los dígitos 1, 2, 3, ..., 7. Enumere los números de la serie en orden creciente y divida la lista exactamente en la mitad en dos partes de igual tamaño. ¿Cuál es el último número de la primera mitad?

Problema 53. Sea ABC un triángulo tal que $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm y $BC = 10$ cm y sea M el punto medio de BC . $AMDE$ es un cuadrado, y MD intersecta AC en el punto F . Encontrar el área del cuadrilátero $AFDE$ en cm^2 .

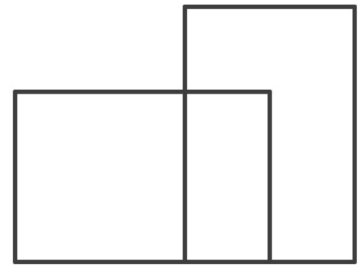


Problema 54. Hay 2014 personas en una fila. Cada uno de ellos es un mentiroso (que siempre miente) o un caballero (que siempre dice la verdad). Cada persona dice “Hay más mentirosos a mi izquierda que caballeros a mi derecha”. ¿Cuántos mentirosos hay en la fila?

Problema 55. Cada año, el tercer jueves del mes de marzo aparece el Trauco en Chiloé. ¿Cuál es la fecha más tardía en que puede aparecer el Trauco algún año?

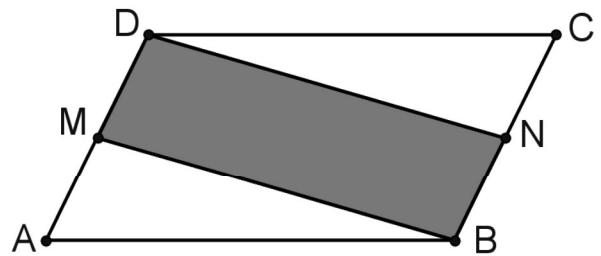
- (A) 14 de marzo (B) 15 de marzo (C) 20 de marzo
(D) 21 de marzo (E) 22 de marzo

Problema 56. ¿Cuántos cuadriláteros de cualquier tamaño se muestran en la figura?



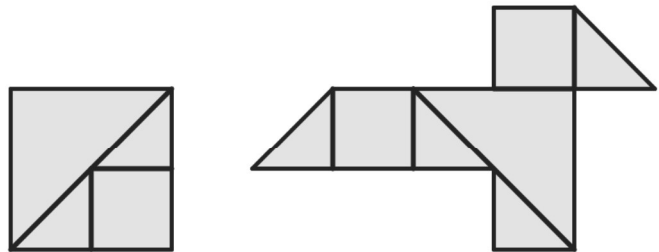
Problema 57. ¿Cuál es el resultado de $2014 \cdot 2014 \div 2014 - 2014$?

Problema 58. El área del paralelogramo $ABCD$ es 10. Los puntos M y N son puntos medios de los lados AD y BC . ¿Cuál es el área del cuadrilátero $MBND$?



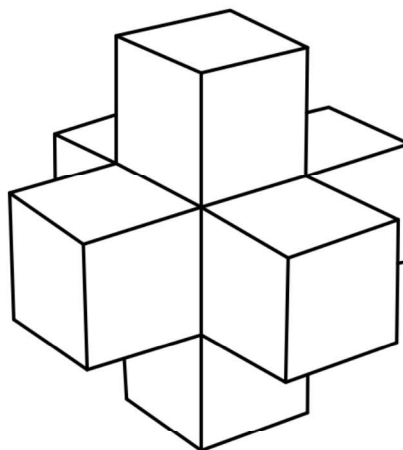
Problema 59. El producto de dos números es 36 y la suma es 37. ¿Cuál es la diferencia positiva entre ellos?

Problema 60. Amanda tiene varios cuadrados de papel de área 4. Ella los corta en cuadrados y en triángulos rectángulos de la forma en que se muestra en el primer diagrama. Luego toma algunas de las piezas y hace un pájaro como se muestra en el segundo diagrama. ¿Cuál es el área de este pájaro?



Problema 61. Un estanque estaba lleno hasta su mitad, el abuelo Anacleto añadió 2 litros al estanque. Ahora el estanque está lleno a tres cuartos de su capacidad. ¿Cuál es la capacidad del estanque?

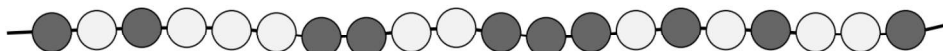
Problema 62. Jorge construyó el cuerpo que se muestra a continuación usando siete unidades cúbicas. ¿Cuántos cubos tiene que agregar para hacer un cubo con aristas de longitud 3?



Problema 63. ¿Cuál de los siguientes cálculos entrega el resultado más grande?

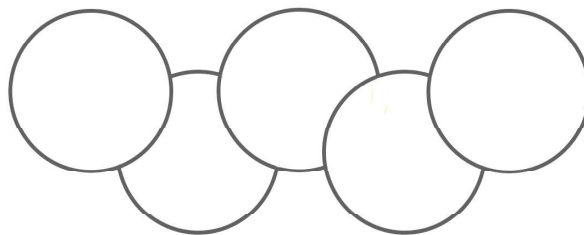
- (A) 44×777 (B) 55×666 (C) 77×444 (D) 88×333 (E) 99×222

Problema 64. El collar de la imagen contiene perlas grises y perlas blancas. Marcos saca una perla tras otra del collar. Siempre saca una perla de uno de los extremos. Se detiene cuando ha quitado la quinta perla gris. ¿Cuál es el mayor número de perlas blancas que Marcos puede haber sacado?

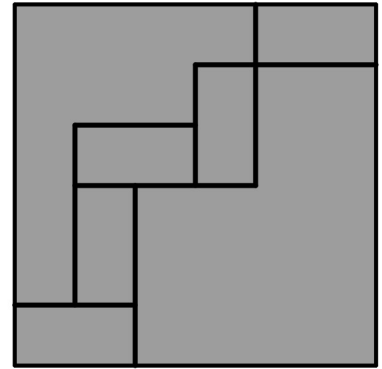


Problema 65. Juan tiene una lección de piano dos veces en la semana y Alejandra tiene una lección de piano cada dos semanas. En un momento determinado, Juan tiene 15 lecciones más que Alejandra. ¿Cuántas semanas de lecciones lleva?

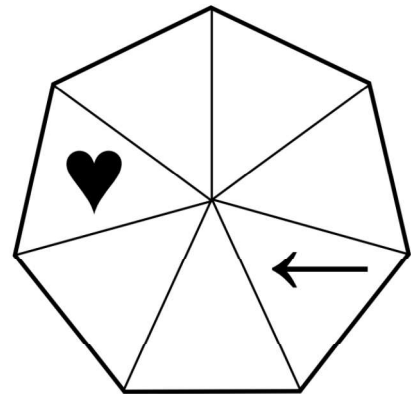
Problema 66. En el diagrama, el área de cada círculo es 1cm^2 . El área común a dos círculos superpuestos es $\frac{1}{8}\text{cm}^2$. ¿Cuál es el área de la región cubierta por los cinco círculos?



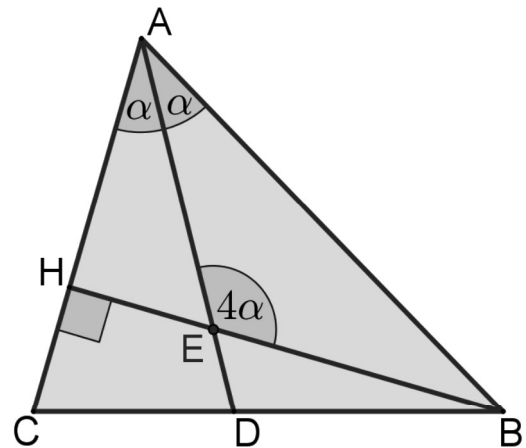
Problema 67. Cinco rectángulos iguales se colocan dentro de un cuadrado de 24 cm de lado, como se muestra en el diagrama. ¿Cuál es el área de uno de los rectángulos resultantes?



Problema 68. El corazón y la flecha están en las posiciones mostradas en la figura. Al mismo tiempo, el corazón y la flecha empiezan a moverse. La flecha se mueve tres lugares hacia la derecha y el corazón se mueve cuatro lugares hacia la izquierda y luego se detiene. Siguen la misma rutina una y otra vez. ¿Después de cuántas veces repetida la rutina se encontrará el corazón y la flecha en el mismo triángulo por primera vez?



Problema 69. La figura muestra el triángulo ABC en donde BH es una altura y AD es bisectriz del ángulo en A . El ángulo obtuso entre BH y AD es cuatro veces el ángulo DAB . ¿Cuánto mide el ángulo CAB ?



Problema 70. Un rectángulo tiene lados de longitudes 6 cm y 11 cm. Se selecciona uno de los lados largos y se dibujan las bisectrices de los ángulos en cada extremo de ese lado. Estas bisectrices dividen el otro lado largo en tres partes. ¿Cuáles son las longitudes de estas secciones?

Problema 71. El Capitán Sparrow y su tripulación pirata desenterraron varias monedas de oro. Ellos dividen las monedas entre sí de manera que cada persona recibe el mismo número de monedas. Si hubiera cuatro piratas menos en la tripulación, entonces cada persona recibiría 10 monedas más. Sin embargo, si hubiera 50 monedas menos, cada persona recibiría 5 monedas menos. ¿Cuántas monedas desenterraron?

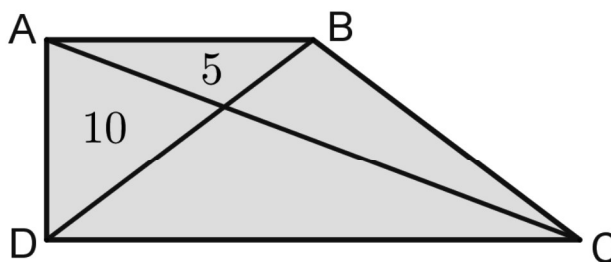
Problema 72. El promedio de dos números positivos es 30 % menos que uno de ellos. ¿En qué porcentaje es mayor este promedio que el otro número?

Problema 73. Una pesa no está funcionando correctamente. Si algo es más ligero que 1000 g, la pesa muestra el peso correcto. Sin embargo, si algo es más pesado o igual que 1000 g, la pesa puede mostrar cualquier número por encima de 1000 g. Tenemos 5 pesos A , B , C , D , E cada uno bajo los 1000 g. Cuando se pesan de dos en dos la pesa muestra lo siguiente: $B + D = 1200$, $C + E = 2100$, $B + E = 800$, $B + C = 900$, $A + E = 700$. ¿Cuál de éstos es el que más pesa?

Problema 74. Andrés escribe todos los dígitos del 1 al 9 en las celdas de una tabla de 3×3 , de manera que cada celda contiene un dígito. Él ya ha escrito el 1, 2, 3 y 4, como se muestra en la figura. Dos números son considerados como vecinos si sus celdas comparten un borde. Una vez introducidos todos los números se da cuenta de que la suma de los vecinos de 9 es 15. ¿Cuál es la suma de los vecinos de 8?

1		3
2		4

Problema 75. El cuadrilátero $ABCD$ tiene ángulos rectos en los vértices A y D . Los números muestran las áreas de dos de los triángulos. ¿Cuál es el área de $ABCD$?



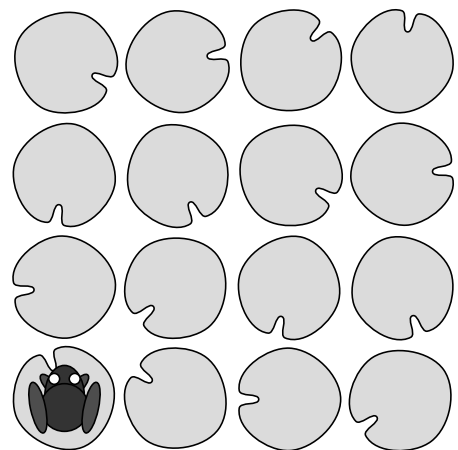
Problema 76. Liz y María compiten en la resolución de problemas. A cada una de ellas se les da la misma lista de 100 problemas. La primera en resolver cualquiera de estos problemas obtiene 4 puntos, mientras que la segunda en resolverlo obtiene 1 punto. Liz resolvió 60 problemas, y María también resolvió 60 problemas. Juntas, consiguieron 312 puntos. ¿Cuántos problemas fueron resueltos por ambas?

Problema 77. David viaja en su bicicleta desde Temuco a su parcela. Él debía llegar a las 15 : 00, pero gastó $\frac{2}{3}$ del tiempo planeado cubriendo $\frac{3}{4}$ de la distancia. Después de eso, pedaleó más lentamente y llegó justo a tiempo. ¿Cuál es la razón entre la velocidad de la primera parte del viaje y la velocidad de la segunda parte del viaje?

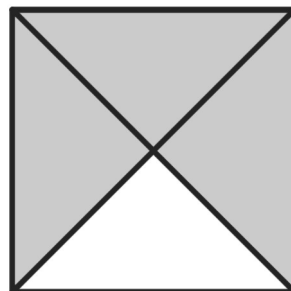
Problema 78. En grupo de 25 personas formado por caballeros, niños y damas, los caballeros siempre dicen la verdad, los niños siempre mienten, y de las damas algunas mienten y otras dicen la verdad. Cuando se les preguntó: “¿Es usted una dama?”, 12 de ellos dijeron: “Sí”. Cuando se les preguntó: “¿Es usted un niño?”, 8 de ellos dijeron: “Sí”. ¿Cuántos caballeros hay en el grupo?

Problema 79. Diferentes números enteros positivos se escriben en el pizarrón. Exactamente dos son divisibles por 2 y exactamente 13 de ellos son divisibles por 13. Sea M el más grande de estos números. ¿Cuál es el menor valor posible de M ?

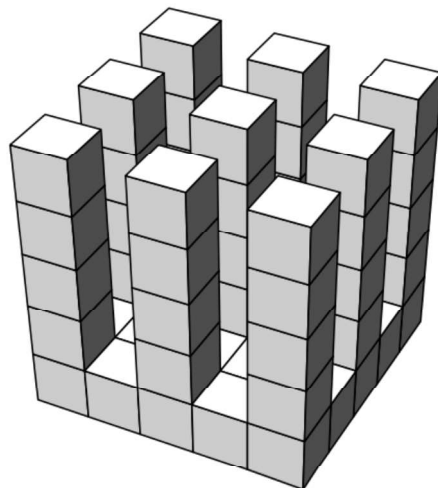
Problema 80. En un estanque hay 16 hojas de lirio de agua formando un patrón de 4 por 4 como se muestra en la imagen. Una rana se sienta en una hoja en una de las esquinas. A continuación, salta de una hoja a otra, ya sea horizontal o verticalmente. La rana siempre salta por encima de al menos una hoja y nunca cae en la misma hoja dos veces. ¿Cuál es el mayor número de hojas (incluyendo la hoja en la que se encuentra) que la rana puede alcanzar?



Problema 81. Una plaza de 5×5 está hecha de 25 azulejos de 1×1 , todos los azulejos con el mismo patrón, tal como el azulejo que se muestra en la figura. Se sabe que en la plaza siempre dos baldosas adyacentes tienen el mismo color a lo largo del borde compartido. El perímetro de la plaza se compone de segmentos blancos (lados de triángulos blancos) y grises (lados de triángulos grises) de longitud 1. ¿Cuál es el menor número posible de tales segmentos grises de longitud 1?



Problema 82. De un cubo de $5 \times 5 \times 5$ formado por cubos pequeños de $1 \times 1 \times 1$ se han sacado algunos cubos pequeños, quedando el cuerpo que se muestra en la figura. ¿Cuántos cubos pequeños $1 \times 1 \times 1$ se han sacado?



Problema 83. Hoy es el cumpleaños de Carla, Emilia y Liliana. La suma de sus edades es 44. ¿Cuál será la suma de sus edades, la próxima vez que ésta vuelva a ser un número de dos dígitos iguales?

Problema 84. Si $a^b = \frac{1}{2}$ ¿Cuál es el valor de a^{-3b} ?

Problema 85. Hay 48 pelotas colocadas en tres canastas de diferentes tamaños. La canasta más pequeña junto con la más grande, contienen dos veces el número de pelotas que contiene la canasta mediana. La canasta más pequeña contiene la mitad de número de pelotas que tiene la canasta del centro. ¿Cuántas pelotas hay en la canasta grande?

Problema 86. Calcule el valor de $\frac{2^{2014} - 2^{2013}}{2^{2013} - 2^{2012}}$

Problema 87. ¿Cuál de estas expresiones no contiene $b+1$ como un factor?

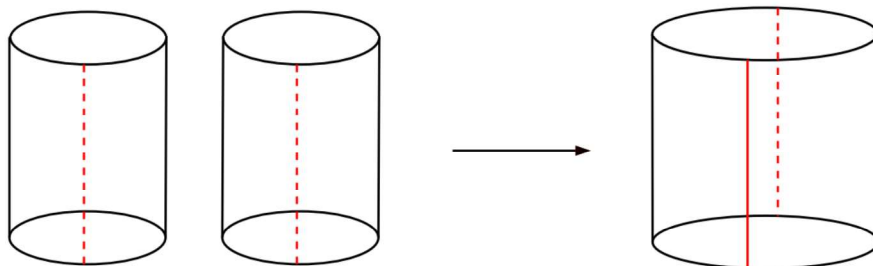
$$(A) 2b + 2 \quad (B) b^2 - 1 \quad (C) b^2 + b \quad (D) -1 - b \quad (E) b^2 + 1$$

Problema 88. ¿Cuántas cifras tendrá el resultado de la multiplicación: $(2^{22})^5 \cdot (5^{55})^2$?

Problema 89. Hector tiene una cuenta de correo electrónico secreto que sólo cuatro de sus amigos conocen. Hoy recibió 8 emails a esa cuenta. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

- (A) Hector recibió dos correos electrónicos de cada amigo.
- (B) Hector no pudo haber recibido ocho correos electrónicos de un solo amigo.
- (C) Hector recibió al menos un correo electrónico de cada amigo.
- (D) Hector recibió por lo menos dos correos electrónicos de uno de sus amigos.
- (E) Hector recibió al menos dos correos electrónicos de 2 amigos diferentes.

Problema 90. Dos cilindros idénticos se cortan a lo largo de las líneas punteadas y se pegan entre sí formando un cilindro más grande (ver figura). ¿Qué se puede decir sobre el volumen del cilindro grande en comparación con el volumen de un cilindro pequeño?



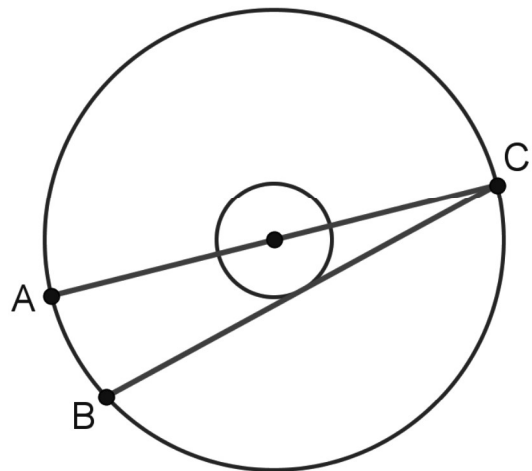
Problema 91. En el número 2014 los dígitos son diferentes y el último dígito es mayor que la suma de los otros tres dígitos ¿Cuántos años antes de 2014 ocurrió esto por última vez?

Problema 92. El tamaño de una caja rectangular es $a \times b \times c$, con $a < b < c$. Si aumenta a o b o c en un número positivo dado, el volumen de la caja también aumenta. ¿En cuál de los siguientes casos el volumen de la caja es mayor?

- (A) Si aumenta solo a .
- (B) Si aumenta solo b .
- (C) Si aumenta solo c .
- (D) El aumento de volumen es la misma en (A), (B), (C).
- (E) Depende de los valores de a , b , c .

Problema 93. En un partido de fútbol, el ganador recibe 3 puntos, el perdedor recibe 0 puntos, mientras que en el caso de un empate, cada equipo obtiene 1 punto. Cuatro equipos, A , B , C , D , participan en un torneo de fútbol. Cada equipo juega tres partidos. Al final del torneo el equipo A obtiene 7 puntos y los equipos B y C , 4 puntos cada uno. ¿Cuántos puntos obtuvo el equipo D ?

Problema 94. Los radios de dos círculos concéntricos están en la razón $1 : 3$. AC es el diámetro del círculo grande; BC es una cuerda del círculo grande que es tangente al círculo más pequeño; y la longitud de la cuerda AB es 12. Calcule el radio del círculo grande.



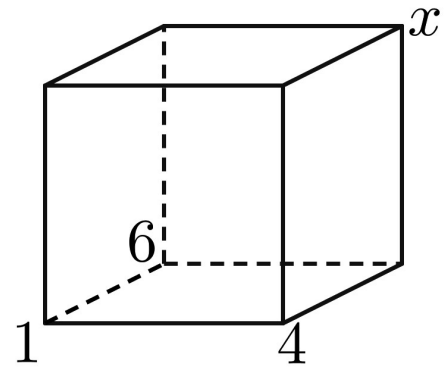
Problema 95. ¿Cuántas tripletas (a, b, c) de enteros con $a > b > c > 1$ satisface que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > 1$?

Problema 96. a, b, c son números no nulos, n es un número entero positivo. Se sabe que los números $(-2)^{2n+3} \cdot a^{2n+2} \cdot b^{2n-1} \cdot c^{3n+2}$ y $(-3)^{2n+2} \cdot a^{4n+1} \cdot b^{2n+5} \cdot c^{3n-4}$ tienen el mismo signo. ¿Cuál de las siguientes alternativas es siempre verdadera?

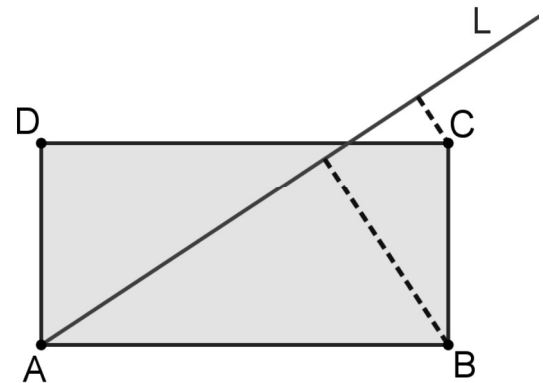
- (A) $a > 0$ (B) $b > 0$ (C) $c > 0$ (D) $a < 0$ (E) $b < 0$

Problema 97. Seis semanas son $n!$ segundos. Calcule el valor de n .

Problema 98. Los vértices de un cubo se enumeran de 1 a 8 de manera que el resultado de la suma de los cuatro vértices de una cara es la misma para todas las caras. Los números 1, 4 y 6 ya se encuentran establecidos en algunos vértices como se muestra en la figura. ¿Cuál es el valor de x ?



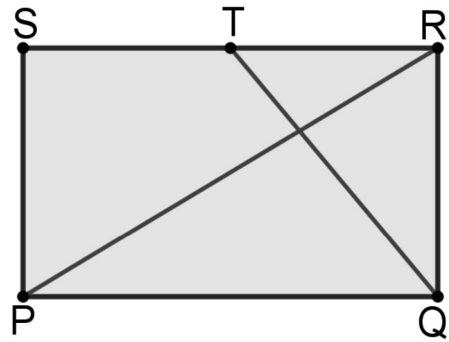
Problema 99. La línea L pasa por el vértice A de un rectángulo $ABCD$. La distancia del punto C a L es 2, y la distancia del punto B a L es 6. Si AB es el doble de BC , encontrar AB .



Problema 100. La función $f(x) = ax + b$ satisface las igualdades $f(f(f(1))) = 29$ y $f(f(f(0))) = 2$. ¿Cuál es el valor de a ?

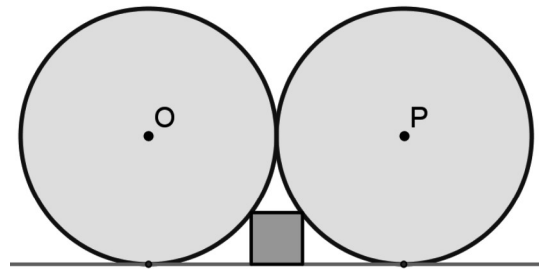
Problema 101. Hay 10 diferentes enteros positivos, exactamente 5 de ellos son divisibles por 5 y exactamente 7 de ellos son divisibles por 7. Sea M el más grande de estos 10 números. ¿Cuál es valor mínimo posible de M ?

Problema 102. $PQRS$ es un rectángulo. T es el punto medio RS . QT es perpendicular a la diagonal PR . ¿Cuál es la razón $PQ : QR$?



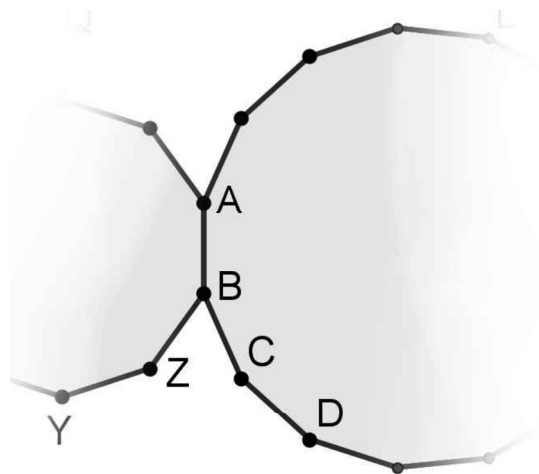
Problema 103. Hay 9 canguros, ellos son de color plata o de color oro. Cuando 3 canguros se encuentran por casualidad, la probabilidad de que ninguno de ellos sea color plata es $\frac{2}{3}$. ¿Cuántos canguros son de color oro?

Problema 104. Un cuadrado se ajusta perfectamente entre la línea horizontal y dos círculos tangentes de radio 1. ¿Cuál es la longitud del lado del cuadrado?



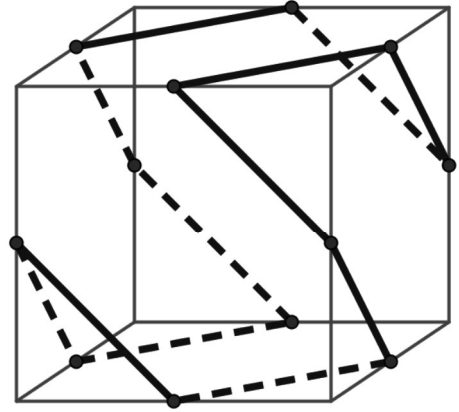
Problema 105. Tomás quiere escribir varios números enteros positivos distintos, ninguno de ellos mayor a 100. Por otra parte el producto de todos estos números no debe ser divisible por 54. ¿Cuál es el máximo número de enteros que logra escribir?

Problema 106. Dos polígonos regulares de lado 1 tienen en común el lado AB . Uno de ellos $ABCD \dots$ tiene 15 lados y el otro $ABZY \dots$ tiene n lados. ¿Qué valor de n hace que la distancia CZ sea igual a 1?



Problema 107. Las igualdades $k = (2014 + m)^{\frac{1}{n}} = 1024^{\frac{1}{n}} + 1$ son dadas para enteros positivos k, m, n . ¿Cuántos valores diferentes puede tomar la cantidad m ?

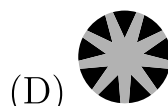
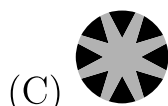
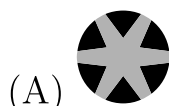
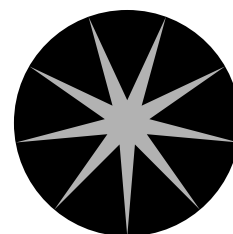
Problema 108. El diagrama muestra una poligonal cuyos vértices son los puntos medios de las aristas de un cubo. Un ángulo interior de la poligonal está definido de la forma habitual: el ángulo entre los dos bordes se encuentran en un vértice. ¿Cuál es la suma de todos los ángulos interiores de la poligonal?



Problema 109. La función $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ satisface las condiciones $f(4) = 6$ y $x \cdot f(x) = (x - 3) \cdot f(x + 1)$. ¿Cuál es el valor de $f(4) \cdot f(7) \cdot f(10) \cdot \dots \cdot f(2011) \cdot f(2014)$?

Problema 110. En los bosques de una isla mágica viven tres tipos de animales: leones, lobos y cabras. Los lobos pueden comer cabras, y los leones pueden comer lobos o cabras. Sin embargo, siendo esta una isla mágica, si un lobo se come una cabra, se convierte en león. Si un león se come una cabra, se convierte en lobo. Si un león se come un lobo, se convierte en una cabra. Originalmente, había 17 cabras, 55 lobos y 6 leones en la isla. En algún momento quedará un cierto número de animales que no podrá comerse entre ellos. ¿Cuál es el mayor número de animales que puede quedar en la isla?

Problema 1. ¿Qué dibujo es la parte central de la estrella que se muestra en la imagen ?



Solución

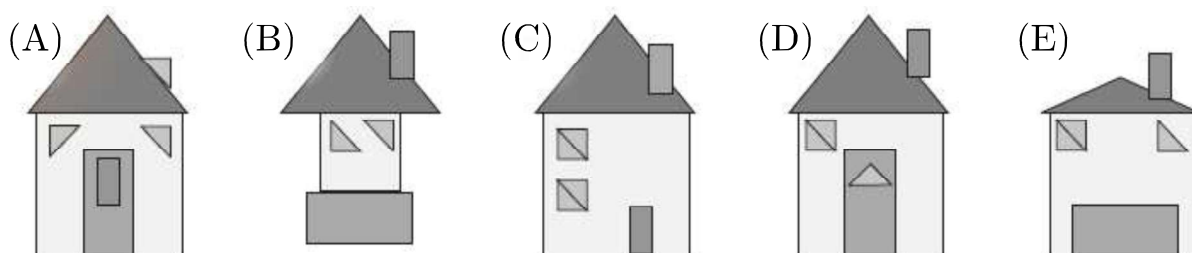
Debemos contar las puntas de la estrella, en este caso, la estrella tiene 9 puntas, por lo tanto la parte central de la estrella se muestra en la alternativa (D).

Problema 2. Juan quiere insertar el dígito 3 en algún lugar del número 2014. ¿Dónde se debe insertar el dígito 3 si el quiere que su número de cinco dígitos sea lo más pequeño posible?

Solución

Lógicamente no es conveniente insertar el número 3 antes del 2014, pues 3 es mayor que 2. Del mismo modo no conviene insertar el número entre el 2 y el 0, pues 3 es mayor que 0. Tampoco conviene insertar el número entre el 0 y el 1, pues 3 es mayor que 1. Como 3 es menor que 4, entonces debemos insertar el número entre el 1 y el 4.

Problema 3. ¿Qué pareja de casas fueron hechas usando exactamente las mismas piezas de forma triangular o rectangular?



Solución

Descartamos la casa de la alternativa (C), pues es la única que tiene 2 , las que se componen por 2 pares de , además es la única que tiene dos piezas de la forma .

Descartamos la alternativa (B) y (E) pues tienen 2 piezas únicas que no se repiten en las demás casas. Por lo tanto A y D fueron construidas con las mismas piezas.

Problema 4. Cuando Koko el Koala no duerme, come 50 gramos de hojas por hora. Ayer, él durmió durante 20 horas. ¿Cuántos gramos de hojas comió ayer?

Solución

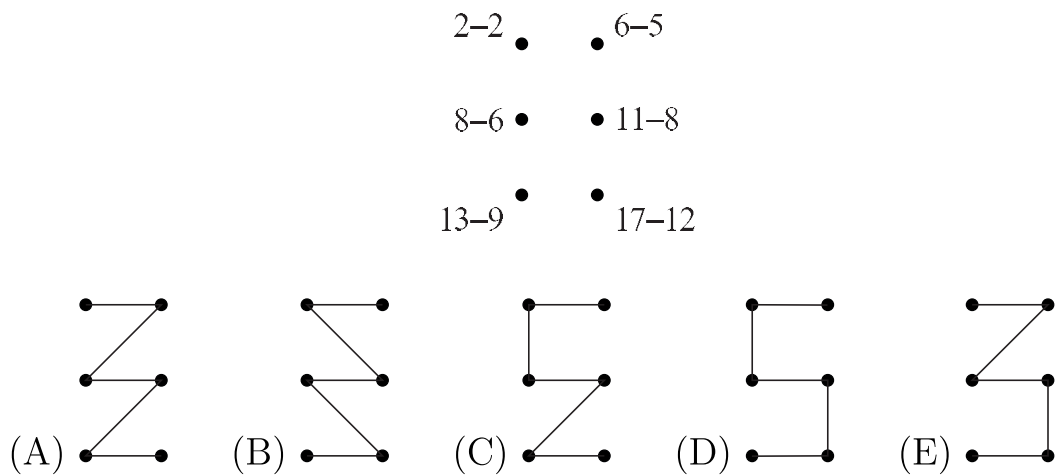
Como un día tiene 24 horas, Koko durmió 20 horas y se mantuvo despierto 4 horas, como Koko come 50 gramos de hojas cuando no duerme, en 4 horas comerá $50 \cdot 4 = 200$ gramos de hojas.

Problema 5. Alicia tiene 10 nietos. Fernanda es la mayor. Un día la abuela se da cuenta que sus nietos tienen todas edades distintas. Si la suma de las edades de sus nietos es 180, ¿Cuál es la edad mínima que Fernanda puede tener?

Solución

Si dividimos 180 en 10 obtenemos 18, es decir el promedio de las edades de los nietos es 18, de este modo las edades de los nietos que minimizan la edad de Fernanda serán 13, 14, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 22, 23, por lo tanto la edad mínima de Fernanda será de 23 años.

Problema 6. María realiza 6 restas y obtiene como resultados los números desde el 0 al 5. Ella une los puntos de menor a mayor, comenzando en el punto con el resultado 0 y terminando en el punto con el resultado 5. ¿Cuál figura ella obtiene?



Solución

Restando se tiene:

$$2 - 2 = 0 \quad \bullet \quad \bullet 6 - 5 = 1$$

$$8 - 6 = 2 \quad \bullet \quad \bullet 11 - 8 = 3$$

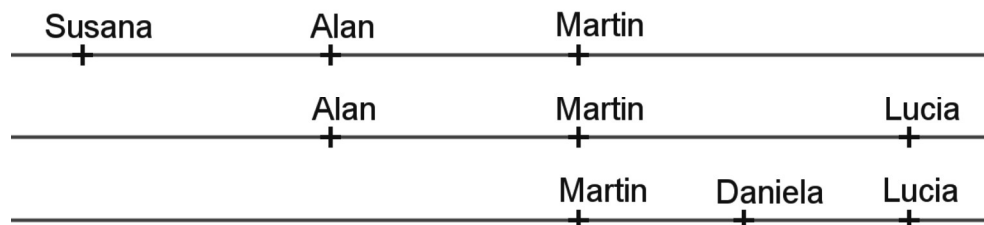
$$13 - 9 = 4 \quad \bullet \quad \bullet 17 - 12 = 5$$

Uniando los puntos desde 0 a 5 se obtiene la figura (A).

Problema 7. Alan construyó menos castillos de arena que Martín pero más que Susana. Lucía contruyó más castillos que Alan y que Martín. Daniela construyó más castillos que Martín y menos que Lucía. ¿Quién de ellos contruyó más castillos de arena?

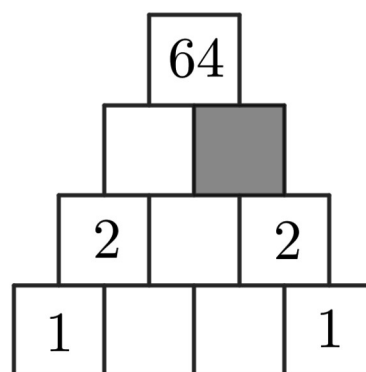
Solución

Podemos ordenar los datos en el siguiente esquema:

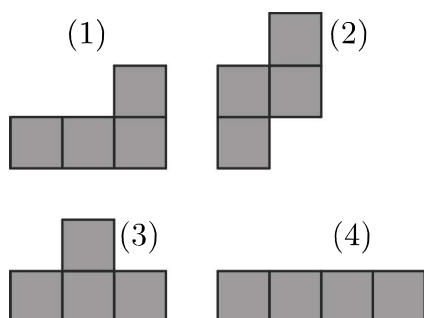
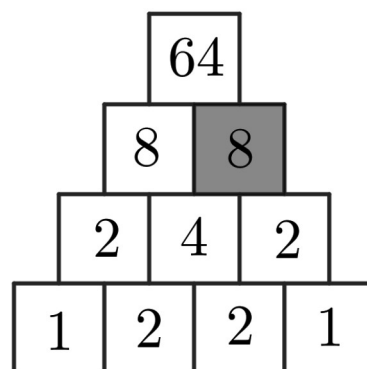


Concluyendo que Lucía fue la que construyó la mayor cantidad de castillos.

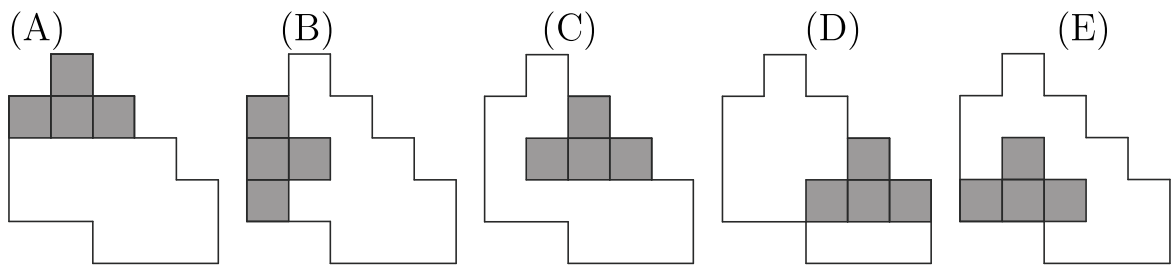
Problema 8. Mónica escribe números en el diagrama de manera que cada número sea el producto de los dos números de abajo. ¿Qué número debería escribir en la celda gris?

**Solución**

Completamos el diagrama desde abajo hacia arriba, claramente las dos casillas en blanco de abajo deben ser completadas con números 2, pues $1 \cdot 2 = 2$. Luego en la siguiente fila la casilla vacía corresponde a un 4, pues $2 \cdot 2 = 4$, finalmente se tiene que la casilla gris es $2 \cdot 4 = 8$

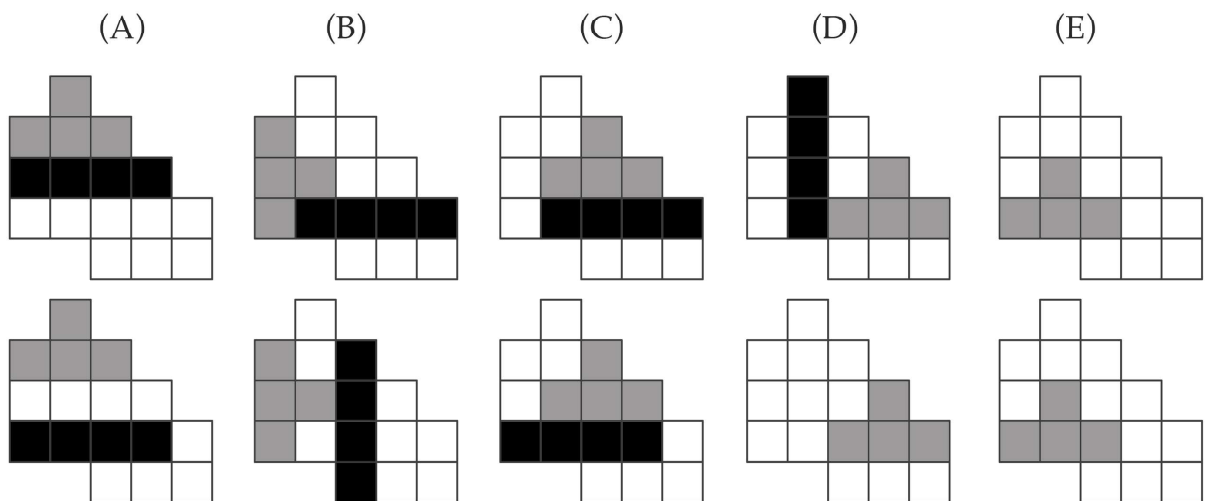


Problema 9. Ana tiene cuatro piezas las cuales se muestran en la imagen. Con esas piezas ella puede cubrir completamente solo una de las siguientes figuras. ¿Cuál de las siguientes ella puede cubrir con todas sus piezas?

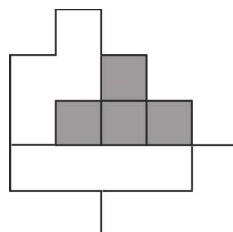


Solución

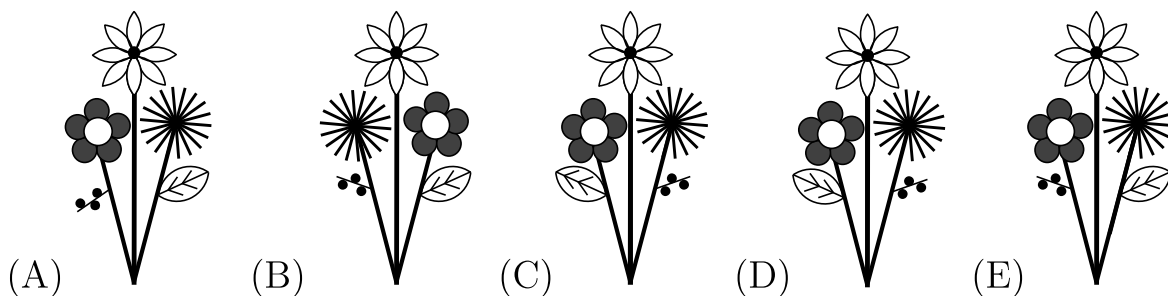
Notemos que en (A), la pieza (4) tiene solo una posición, descartamos todas las otras posturas pues necesitaríamos dos piezas (4), ubicamos la pieza (4) inmediatamente debajo de la pieza (3), quedando obligados a colocar debajo de la pieza (4) la pieza (1), siendo imposible completar la figura con la pieza (2). En (B) tenemos dos posiciones para la pieza (4) una horizontal y una vertical, cualquiera de las dos posiciones nos impide seguir colocando piezas. En (D) es imposible rellenar con alguna de las piezas las tres casillas que están abajo. (E) no se puede ubicar la pieza (4), por lo que descartamos esta alternativa.



Luego solamente se pueden poner todas las piezas en la figura (C), como se muestra a continuación:



Problema 10. Bruno ha pintado flores en la ventana de la tienda (mire la figura). ¿Cómo se verán estas flores desde el otro lado de la ventana?



Solución

Desde el otro lado de la ventana, la flor que está a la izquierda se verá a la derecha, y la flor que está a la derecha se verá a la izquierda, esto es equivalente a rotar la figura en 180° en torno de la flor central, por lo que el ramo se verá como muestra la alternativa (E).

Problema 11. Había algunos dulces en un frasco, Sara tomó la mitad de los dulces, entonces Tomás tomó la mitad de los dulces restantes en el frasco, después de eso, Clara tomó la mitad de los dulces que quedaban. Al final, quedaron 6 dulces en el frasco. ¿Cuántos dulces había en el frasco al comienzo?

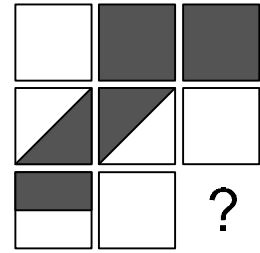
Solución

Como quedaron 6 dulces, cuando Clara fue a sacar dulces, había el doble de estos, es decir $6 \cdot 2 = 12$. Cuando Tomás fue a sacar dulces, había el doble de 12, es decir $12 \cdot 2 = 24$. Cuando Sara fue a sacar dulces, había el doble de 24, es decir $24 \cdot 2 = 48$. Por lo tanto al comienzo había 48 dulces en el frasco.

De otro modo, supongamos que x es el número de dulces que había en el frasco, pudiendo expresar el problema con la siguiente ecuación:

$$\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 6 \Rightarrow x = 48$$

Problema 12. ¿Cuál de las siguientes baldosas debe ser agregada en la imagen para que el área blanca sea tan grande como el área negra?

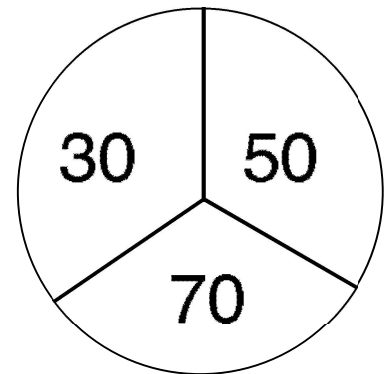


- (A) (B) (C) (D) (E)

Solución

Las dos primeras filas son equivalentes pues en ellas hay 2 baldosas blancas, 2 baldosas negras y 2 baldosas con mitad blanca y mitad negra, de modo que analizamos la última fila, en la cual debemos agregar una baldosa completamente negra para compensar la baldosa blanca. Luego agregamos la baldosa (B).

Problema 13. Paula dispara flechas al objetivo que se muestra en la figura. Cuando ella no acierta al objetivo, obtiene cero puntos. Paula dispara dos flechas y suma el puntaje de ambos disparos. ¿Cuál de las siguientes sumas no puede ser su puntaje?



- (A) 60 (B) 70 (C) 80 (D) 90 (E) 100

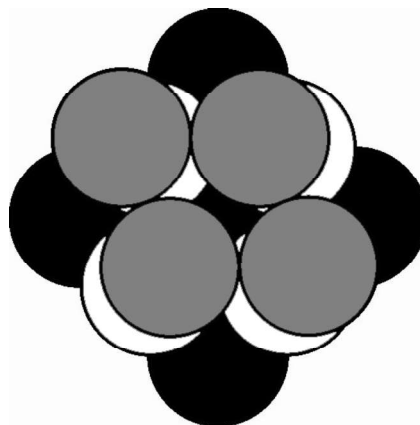
Solución

Observemos que:

- $60 = 30 + 30$
- $70 = 70 + 0$
- $80 = 50 + 30$
- $100 = 50 + 50 = 70 + 30$

90 no se puede escribir como suma de dos de los números dados con y sin repetir, luego, Paula no pudo haber obtenido 90 puntos.

Problema 14. María tenía el mismo número de fichas grises, negras y blancas. Ella utilizó algunas de estas fichas para hacer una pila. En la figura, se pueden ver todas las fichas que utilizó. Ella todavía tiene cinco fichas que no están en la pila. ¿Cuántas fichas negras tenía al principio?



Solución

Como muestra la figura, María ha utilizado 5 fichas negras, 4 fichas blancas y 4 fichas grises, se tiene que $5 + 4 + 4 = 13$ fichas. Además, María aún tiene 5 fichas en la mano, por lo que podemos concluir que originalmente tenía 18 fichas y como tiene el mismo número de fichas de cada color, se concluye que originalmente tenía 6 fichas negras.

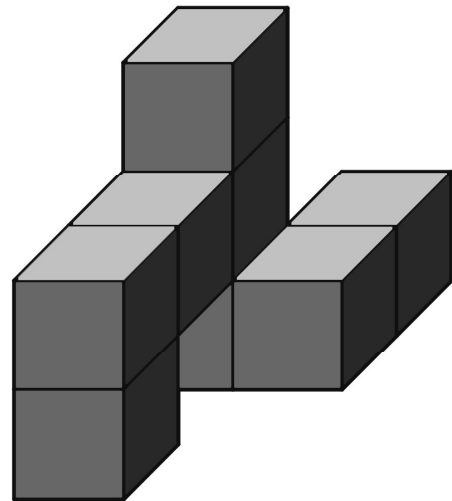
Problema 15. A un conejo le gustan mucho las zanahorias y el repollo. En un día se puede comer o 9 zanahorias, o 2 repollos, o 4 zanahorias y 1 repollo. Durante una semana ha comido 30 zanahorias. ¿Cuántos repollos ha comido durante esta semana?

Solución

Observemos que el conejo no puede haber comido 4 zanahorias y un repollo todos los días, pues en 7 días comería $4 \cdot 7 = 28$ zanahorias, además 30 no es múltiplo de 4, luego, el conejo comió 9 zanahorias por lo menos en uno de los 7 días. Si el conejo comió 9 zanahorias solo en uno de los 7 días, en los otros 6 días debería haber comido $30 - 9 = 21$ zanahorias, pero 21 no es múltiplo de 4. Si el conejo comió 9 zanahorias en 2 de los 7 días, en los otros 5 días debería haber comido $30 - 18 = 12$ zanahorias, es decir en 3 de los otros 5 días comió 4 zanahorias y 1 repollo, y en los 2 restantes comió 2 repollos.

De este modo el conejo comió 7 repollos.

Problema 16. El sólido de la imagen fue hecho pegando ocho cubos iguales entre sí. ¿Cómo se ve desde arriba?



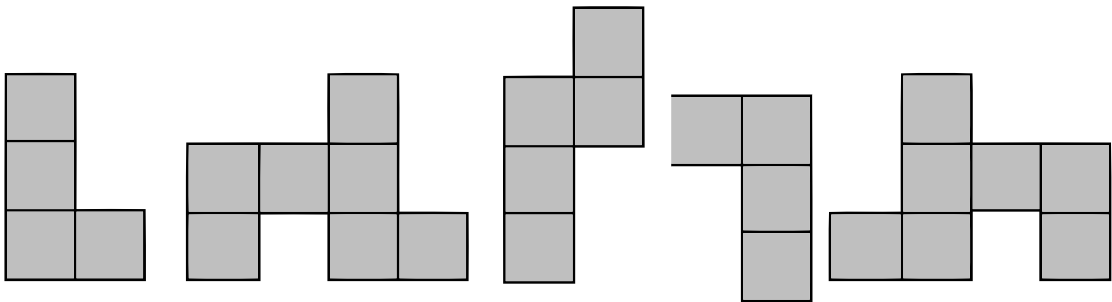
(A)

(B)

(C)

(D)

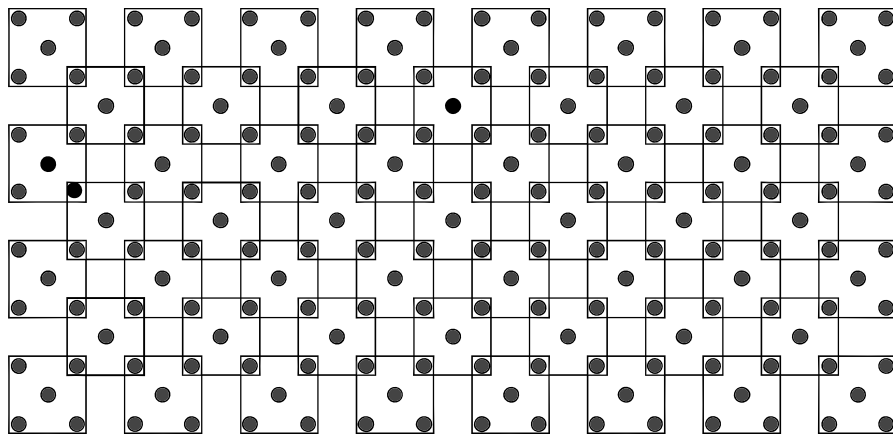
(E)



Solución

Desde arriba se ve la figura (C), que corresponde a las caras más iluminadas del sólido.

Problema 17. ¿Cuántos puntos hay en esta imagen?



Solución

En la figura se observan 4 filas con 8 cuadrados cada una, donde cada cuadrado tiene 5 puntos, supongamos que estas 4 filas se superponen sobre las tres filas con 7 cuadrados cada una, donde cada cuadrado tiene 1 punto. De este modo, las 4 filas de 8 cuadrados cada una tienen $4 \cdot 8 \cdot 5 = 160$ puntos, y las 3 filas de 7 cuadrados tienen $3 \cdot 7 \cdot 1 = 21$ puntos cada una. Finalmente la figura tiene $160 + 21 = 181$ puntos.

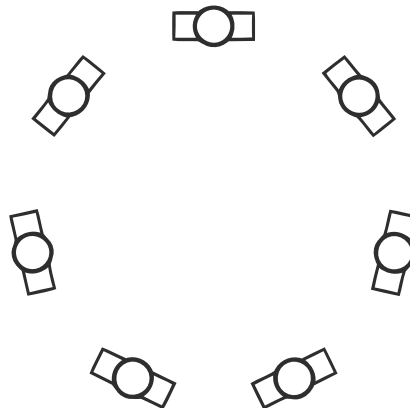
Problema 18. ¿En el planeta canguro cada canguro-año tiene 20 canguro-meses y cada canguro-mes tiene 6 canguro-semanas. ¿Cuántas canguro-semanas hay en un cuarto de canguro-años?

Solución

Un cuarto de canguro-años corresponden a $\frac{1}{4} \cdot 20 = 5$ canguro-meses, como cada canguro-mes tiene 6 canguro-semanas, 5 canguro-meses tienen $6 \cdot 5 = 30$ semanas.

Problema 19. Siete estudiantes (niños y niñas) están de pie en círculo. No hay dos niños de pie uno al lado del otro. No hay tres chicas de pie juntas una al lado de la otra. ¿Cuál de éstas afirmaciones es cierta respecto al número de chicas que se ubicaron en el círculo?

- (A) Solo 3 es posible (B) 3 y 4 es posible
 (C) Solo 4 es posible (D) 4 y 5 es posible
 (E) Solo 5 es posible

**Solución**

No es posible que en el círculo haya 3 niñas, pues de los 4 niños quedarían 2 juntos. No es posible que en el círculo haya 5 niñas, pues quedarían 3 niñas juntas. Solo es posible que haya 4 niñas y 3 niños, de modo que en los 6 primeros lugares se intercalen niños y niñas, y en el séptimo lugar se agregue una niña (niño, niña, niño, niña, niño, niña, niña).

Problema 20. Evelyn ordenó cartas en línea como se muestra en la figura. En cada movimiento a Evelyn se le permite intercambiar cualquier par de cartas. ¿Cuál es el menor número de movimientos que Evelyn tiene que hacer para conseguir la palabra ALOCADOS?

O	L	D	C	S	O	A	A
---	---	---	---	---	---	---	---

Solución

Como tenemos 8 letras, claramente con 8 movimientos logramos escribir la palabra ALOCADOS, pero como se trata de encontrar el menor número de movimientos, debemos buscar algún movimiento que deje inmediatamente 2 letras en su lugar. De este modo es conveniente intercambiar las letras en la quinta y octava posición:

O	L	D	C	A	O	A	S
---	---	---	---	---	---	---	---

Luego, por la misma razón, nos conviene intercambiar las letras que están en la primera y séptima posición:

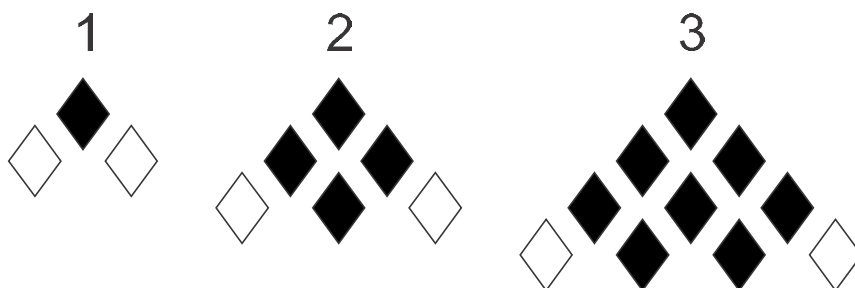
A	L	D	C	A	O	O	S
---	---	---	---	---	---	---	---

Finalmente, intercambiamos las letras ubicadas en la tercera y sexta posición:

A	L	D	C	A	O	O	S
---	---	---	---	---	---	---	---

Por lo tanto, 3 es el menor número de movimientos.

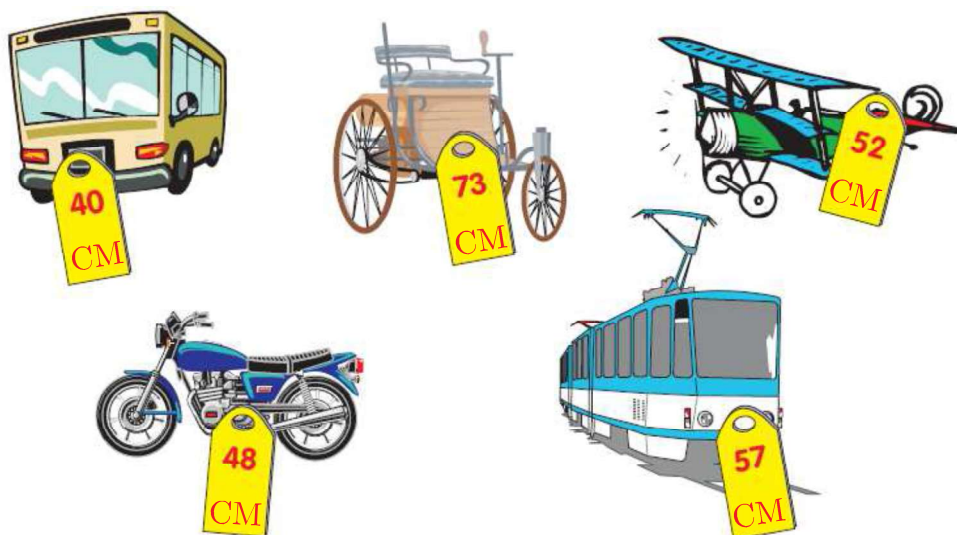
Problema 21. Se realiza una secuencia de triángulos de diamantes. En la figura se muestran las tres primeras etapas. En cada etapa se añade una línea de diamantes. En las líneas inferiores los diamantes exteriores son de color blanco. El resto de los diamantes en el triángulo son negros. ¿Cuántos diamantes negros tiene la figura en la etapa número 6?



Solución

Notemos que en la primera figura se tienen $1 + 2 = 3$ diamantes, en la segunda figura se tienen $1 + 2 + 3 = 6$ diamantes y en la tercera figura se tienen $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ diamantes, de modo que en la etapa número 6 se tienen $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$ diamantes, como siempre se tienen dos diamantes blancos en las esquinas, en la etapa 6 hay 26 diamantes negros.

Problema 22. Un canguro compró juguetes y le entregó 150 canguro-monedas al asistente de la tienda. Recibió 20 canguro-monedas de vuelta. Luego cambió de opinión y cambió uno de los juguetes por otro. Le devolvieron 5 canguro-monedas. ¿Con qué juguetes salió el canguro de la tienda?



Solución

Inicialmente el canguro entregó 150 canguro-monedas al asistente de la tienda y recibió 20 canguro-monedas de vuelta, por lo que inicialmente

gastó 130 canguro-monedas, como para comprar tres o más juguetes se necesitan más de 130 canguro-monedas, el canguro debe haber comprado dos juguetes, el carruaje y el tren, que son los únicos dos juguetes que suman 130 canguro-monedas. Como luego cambió uno de estos juguetes y le devolvieron 5 canguro-monedas, el canguro necesariamente cambió el tren por el avión.

Problema 23. Escribe cada uno de los números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 en los cuadrados para hacer la adición correcta. ¿Qué dígito estará en el cuadrado gris?

$$\begin{array}{r} \square \square \\ + \square \square \\ \hline \square \square \square \end{array}$$

Solución

Denotemos cada una de las casillas con letras desde la A hasta la B .

$$\begin{array}{r} A \ B \\ + C \ D \\ \hline E \ F \ G \end{array}$$

Notemos que la suma de 2 números de 2 dígitos es a lo más $99 + 99 = 198$, dado que el resultado es un número de 3 dígitos entonces $E = 1$. Como $E = 1$, $A + C$ debe ser $4 + 6 = 10$ o $5 + 6 = 11$, pero el 5 y el 6 se descartan pues F sería igual a 1, el cual ya ocupamos, luego ocupamos el 4 y el 6 en estas casillas, con lo que $F = 0$.

$$\begin{array}{r} 4 \ B \\ + 6 \ D \\ \hline 1 \ 0 \ G \end{array}$$

Finalmente nos queda por ubicar 2,3 y 5, y como $2 + 3 = 5$, $G = 5$, con lo que tenemos:

$$\begin{array}{r} 4 \ 2 \\ + 6 \ 3 \\ \hline 1 \ 0 \ 5 \end{array}$$

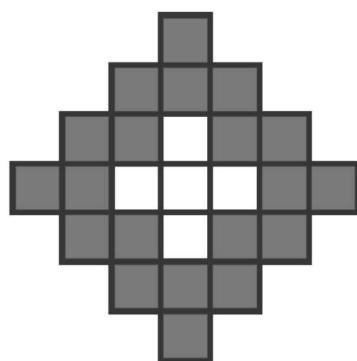
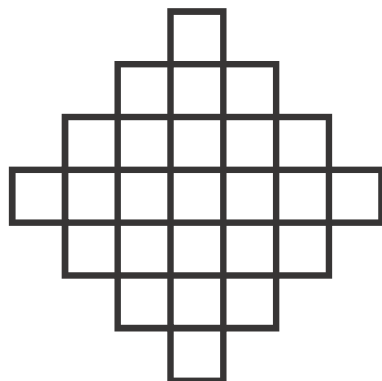
Problema 24. ¿Cuál es el mayor número de cuadrados pequeños que pueden ser sombreados para que ningún cuadrado de la forma:



Hecho de cuatro cuadrados sombreados pequeños aparezca en la figura?

Solución

Como se trata de pintar la mayor cantidad de cuadrados posibles, y no queremos cuadrados de 2×2 , pintamos los bordes como se muestra en la figura, pues en los bordes nunca tendremos cuadrados de 2×2 . Además si pintamos el cuadrado del centro aún se cumple la condición, por lo que podemos pintar 21 cuadrados pequeños.



Problema 25. Nicol ha escrito cada uno de los números del 1 al 9 en las celdas de la tabla 3×3 . Solo cuatro de estos números se pueden ver en la figura. Nicol se ha dado cuenta de que para el número 5 la suma de los números en las celdas vecinas es igual a 13 (las celdas vecinas son aquellas celdas que comparten lados). Se dio cuenta que lo mismo se aplica para el número 6. ¿Qué número ha escrito Nicol en la celda sombreada?

1		2
4		3

Solución

Notemos que 5 no puede estar al centro, pues la suma de sus vecinos será $6 + 7 + 8 + 9 = 30$, 6 tampoco puede ir al centro pues la suma de sus vecinos también será mayor que 13, de este modo el 5 y el 6 siempre tendrán 3 vecinos. 6 no puede estar entre 1 y 2, de ser así en la celda gris se debería escribir el 10, y 10 no se puede ocupar. 6 no puede estar entre 4 y 3, de ser así en la celda gris también se debería escribir el 6.

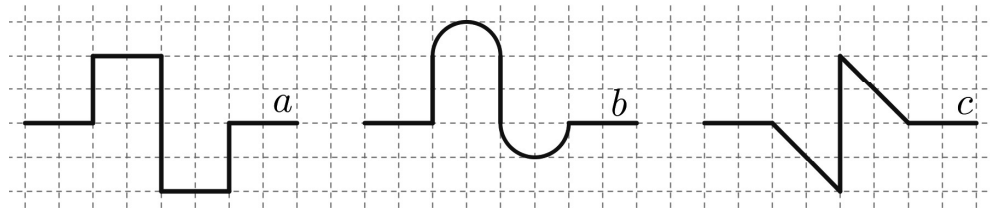
Luego el 6 debe estar entre 1 y 4, o bien, entre 2 y 3, de cualquier modo, la celda gris debe contener a 8.

Problema 26. El barco MSC Fabiola tiene el récord de ser el mayor buque contenedor en cruzar el canal de Panamá. Lleva 12500 contenedores que si se ubicaran de extremo a extremo alcanzarían una distancia de 75 km. ¿Cuál es la longitud de un contenedor?

Solución

12500 contenedores en fila alcanzan una distancia de 75 km = 75000 mt. Como $\frac{75000}{12500} = 6$, se tiene que un contenedor mide 6 mt.

Problema 27. Si a , b y c denotan las longitudes de las líneas de la imagen, ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?



- (A) $a < b < c$ (B) $a < c < b$ (C) $b < a < c$ (D) $b < c < a$ (E) $c < b < a$

Solución

Notemos que:

- $a = 2 + 2 + 2 + 4 + 2 + 2 + 2 = 16$
- $b = 2 + 2 + \pi + 2 + \pi + 2 = 8 + 2\pi$
- $c = 2 + 2\sqrt{2} + 4 + 2\sqrt{2} + 2 = 8 + 4\sqrt{2}$

Luego $c < b < a$

Problema 28. ¿Qué número está en el medio de $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{5}$?

Solución

El número que está en medio es:

$$\frac{\frac{2}{3} + \frac{4}{5}}{2} = \frac{\frac{10 + 12}{15}}{2} = \frac{22}{30} = \frac{11}{15}$$

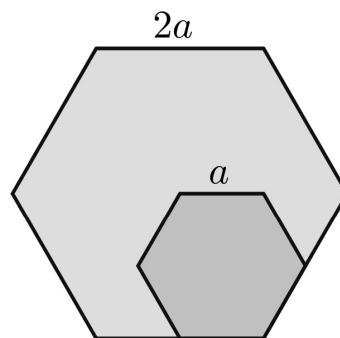
Problema 29. En el número 2014 el último dígito es más grande que la suma de los otros tres dígitos. ¿Cuántos años atrás fue la última vez que ocurrió esto?

Solución

- Para 2013 no se cumple pues $3 = 2 + 0 + 1$.
- Para 2012 no se cumple pues $2 < 2 + 0 + 1$.
- Para 2011 no se cumple pues $1 < 2 + 0 + 1$.
- Para 2010 no se cumple pues $0 = 2 + 0 + 1$.
- Para 2009 si se cumple pues $9 > 2 + 0 + 0$.

Luego, esto ocurrió por última vez hace 5 años.

Problema 30. La longitud de los lados del hexágono regular grande es dos veces la longitud de los lados del hexágono regular pequeño. El hexágono pequeño tiene una superficie de 4 cm^2 . ¿Cuál es el área del hexágono grande?

**Solución**

Dado que ambos hexágonos son semejantes, sabiendo que la razón entre las áreas de dos figuras semejantes es igual al cuadrado de la razón de semejanza, se tiene que:

$$\frac{A_{\text{pequeño}}}{A_{\text{grande}}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Como $A_{\text{pequeño}} = 4$, entonces:

$$\frac{4}{A_{\text{grande}}} = \frac{1}{4} \implies A_{\text{grande}} = 16 \text{ cm}^2$$

Problema 31. ¿Cuál es la negación de la siguiente declaración "Todo el mundo resuelve más de 20 problemas"?

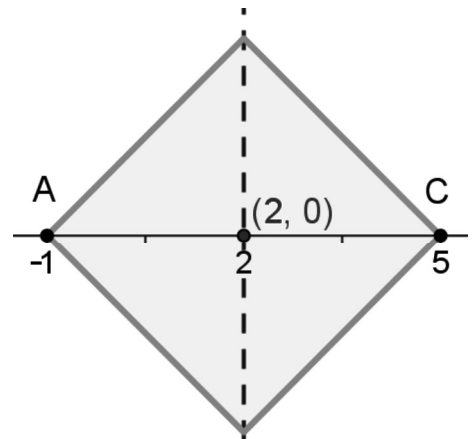
Solución

Alguien resuelve menos de 21 problemas.

Problema 32. En un sistema de coordenadas Tom dibujó un cuadrado. Una de sus diagonales se encuentra en el eje x . Las coordenadas de los dos vértices que están en el eje x son $(-1, 0)$ y $(5, 0)$. ¿Cuál de las siguientes son las coordenadas de otro vértice del cuadrado?

Solución

Si $\overline{AC}$ es una diagonal, entonces la otra diagonal es perpendicular a $\overline{AC}$ y pasa por el punto $(2, 0)$, con medida 6 unidades. Luego los otros vértices son $(2, -3)$ y $(2, 3)$.



Problema 33. En un pueblo, la razón entre hombres adultos y mujeres adultas es de $2 : 3$ y la razón entre las mujeres y los niños es de $8 : 1$. ¿Cuál es la razón entre los adultos (hombres y mujeres) y los niños?

Solución

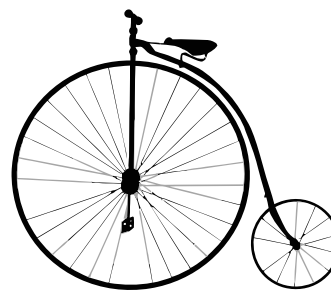
Como la razón entre hombres adultos y mujeres adultas es de $2 : 3$, entonces hay $2k$ hombres y $3k$ mujeres. Como la razón entre las mujeres y los niños es de $8 : 1$, entonces hay $8j$ mujeres y j niños. Luego:

$$8j = 3k \implies j = \frac{3}{8}k$$

Por lo tanto la razón entre los adultos (hombres y mujeres) y los niños es de:

$$\frac{2k + 3k}{\frac{3}{8}k} = \frac{40}{3}$$

Problema 34. La rueda grande de esta bicicleta tiene 4,2 metros de perímetro. La rueda pequeña tiene 0,9 metros de perímetro. En un determinado momento, las válvulas de las dos ruedas están en su punto más bajo. La bicicleta rueda hacia la izquierda. ¿Después de cuántos metros estarán nuevamente las dos válvulas en su punto más bajo?



Solución

Debemos encontrar el mínimo común múltiplo entre 4,2 y 0,9. Notemos que $4,2 = 7 \cdot 3 \cdot 2$ y $0,9 = 3 \cdot 3$, luego el mínimo común múltiplo entre 4,2 y 0,9 es $7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 = 126$, por lo tanto después de 12,6 metros estarán nuevamente las dos válvulas en su punto más bajo.

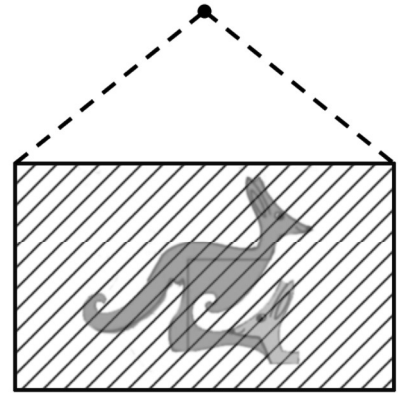
Problema 35. Una abuela, su hija y su nieta pueden decir este año (2014) que la suma de sus edades es 100. ¿En qué año nació la nieta si cada una de las edades es una potencia de 2?

Solución

Notemos que $2 = 2^1$, $4 = 2^2$, $8 = 2^3$, $16 = 2^4$, $32 = 2^5$, $64 = 2^6$ son las potencias de 2 menores a 100, de las cuales tres deben sumar 100, lo que solamente se logra con $2^2, 2^5, 2^6$. De este modo se tiene que las edades de la

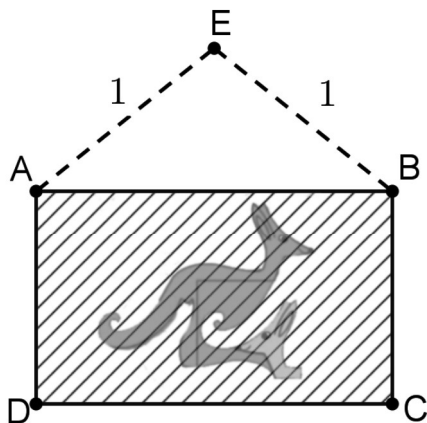
nieta, la hija y la abuela son 4, 32, 64 respectivamente, por lo que la nieta nació el año 2010.

Problema 36. Pablo puso algunos cuadros rectangulares en la pared. Por cada foto puso un clavo en la pared 2,5 m por encima del suelo y adjuntó una larga cadena de 2 m en las dos esquinas superiores. ¿Cuál de las siguientes fotos es la más cercana al suelo (formato: ancho en cm $\times$ altura en cm)?



- (A) 60×40 (B) 120×50 (C) 120×90 (D) 160×60 (E) 160×100

Solución



Debemos calcular la altura del triángulo ABE para $\overline{AB} = 0,6$, $\overline{AB} = 1,2$ y para $\overline{AB} = 1,6$.

- Altura del $\triangle ABE$ para $\overline{AB} = 0,6$:

$$\begin{aligned} 0,3^2 + h_1^2 &= 1^2 \\ h_1^2 &= 1 - 0,09 \\ h_1 &= \sqrt{0,91} \end{aligned}$$

- Altura del $\triangle ABE$ para $\overline{AB} = 1,2$:

$$\begin{aligned} 0,6^2 + h_1^2 &= 1^2 \\ h_1^2 &= 1 - 0,36 \\ h_1 &= 0,8 \end{aligned}$$

- Altura del $\triangle ABE$ para $\overline{AB} = 1,6$:

$$\begin{aligned}0,8^2 + h_1^2 &= 1^2 \\ h_1^2 &= 1 - 0,64 \\ h_1 &= 0,6\end{aligned}$$

Determinemos cuál es el cuadro que está más cerca del suelo sumando la altura del rectángulo a estos valores según corresponda.

- Rectángulo $60 \times 40 \implies 0,95 + 0,4 = 1,35$ metro.
- Rectángulo $120 \times 50 \implies 0,8 + 0,5 = 1,3$ metros.
- Rectángulo $120 \times 90 \implies 0,8 + 0,9 = 1,7$ metros.
- Rectángulo $160 \times 60 \implies 0,6 + 0,6 = 1,2$ metros.
- Rectángulo $160 \times 100 \implies 0,6 + 1 = 1,6$ metros.

Finalmente la foto más cercana al suelo es la de 120×90 .

Problema 37. Seis niñas comparten un departamento con dos baños que utilizan todas las mañanas a partir de las 7:00 en punto. Ellas usan el baño una a la vez, y se sientan a desayunar juntas tan pronto como la última chica ha terminado. Pasan 9, 11, 13, 18, 22 y 23 minutos en el baño respectivamente. Estando bien organizadas, ¿Qué es lo más temprano que pueden desayunar juntas?

Solución

Se trata de distribuir las 6 niñas en los dos baños, tal que ocupen el baño en el menor tiempo posible, por lo que debemos lograr que la suma de los tiempos en cada baño sean lo más cercanas posibles.

Observemos que si todas entraran a un solo baño se demorarían $9 + 11 + 13 + 18 + 22 + 23 = 96$ minutos, es decir, ocupando dos baños deberían demorarse 48 minutos en cada uno. Comencemos ubicando las que más se demoran, una en cada baño:

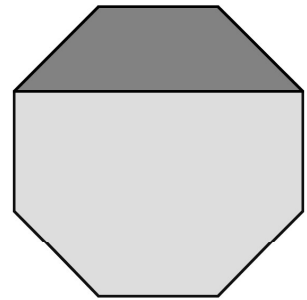
$$B_1 : 23 + a + b, \quad B_2 : 22 + c + d$$

De este modo debemos escoger entre los restantes (9, 11, 13, 18) una pareja que sume 26 y otra que sume 25, lo cual es imposible, por lo que intentaremos que un grupo se demore 47 minutos y el otro 49 minutos. De este modo se tiene:

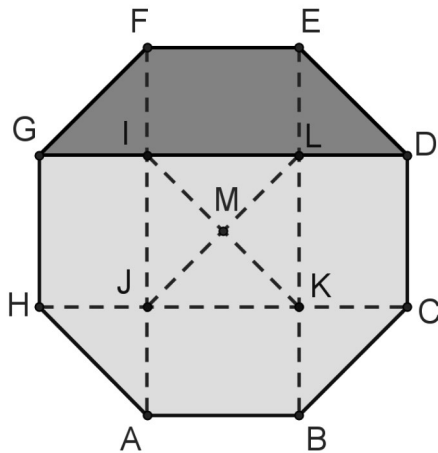
$$B_1 : 23 + 13 + 11, \quad B_2 : 22 + 18 + 9$$

Por lo que a las 07 : 49, será lo más temprano que pueden desayunar juntas.

Problema 38. En la siguiente figura hay un octágono regular. El área sombreada mide 3 cm^2 . Encontrar el área del octágono .



Solución



Sea T el área de cada uno de los triángulos que componen el cuadrado central:

$$A_{\triangle JKM} = A_{\triangle KLM} = A_{\triangle LIM} + A_{\triangle IJM} = T$$

Dichos triángulos son congruentes con cada uno de los cuatro triángulos de las esquinas:

$$A_{\triangle BCK} = A_{\triangle DEL} = A_{\triangle FGI} = A_{\triangle HAJ} = T$$

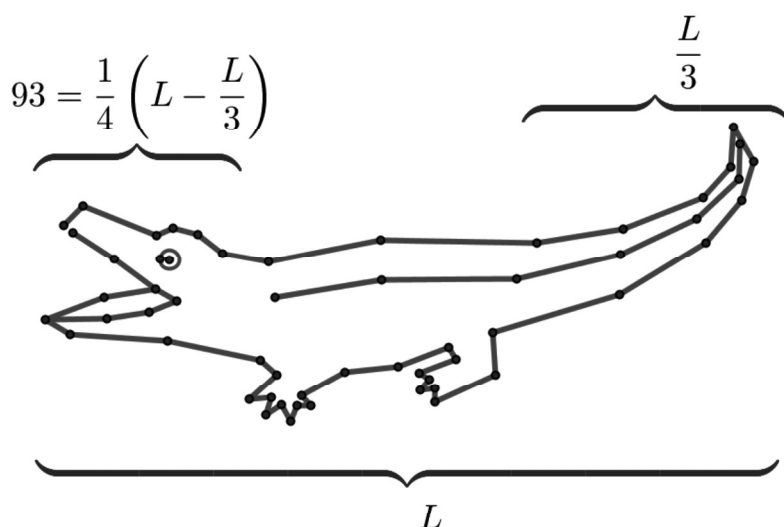
Luego si sumamos las áreas de los cuatro cuadriláteros $A_{HABC} + A_{BCDE} + A_{DEFG} + A_{FGHA}$, estamos sumando 4 veces de más cada triángulo de área T , pero aún nos falta sumar los 4 triángulos centrales. Luego el área del hexágono es:

$$3 + 3 + 3 + 3 - 4t + 4t = 12$$

Problema 39. Una nueva especie de cocodrilo ha sido descubierta en África. La longitud de la cola es de un tercio de toda su longitud. Su cabeza es de 93 cm de largo y esta corresponde a la cuarta parte de la longitud del cocodrilo sin su cola. ¿Cuánto mide este cocodrilo en cm?

Solución

Sea L la longitud del cocodrilo, entonces la longitud de la cola es $\frac{L}{3}$ y la de su cabeza es de $\frac{1}{4} \left(L - \frac{L}{3} \right)$.



Por lo tanto debemos resolver la siguiente ecuación :

$$\begin{aligned} 93 &= \frac{1}{4} \left(L - \frac{L}{3} \right) \\ 93 &= \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} L \\ 93 &= \frac{L}{6} \\ 558 &= L \end{aligned}$$

Finalmente la longitud del cocodrilo es de 558 cm.

Problema 40. En la imagen hay un dado especial. Los números en las caras opuestas siempre suman lo mismo. Los números que no podemos ver en la imagen son todos números primos. ¿Qué número es opuesto al 14?

**Solución**

Sean p_1, p_2, p_3 los primos ubicados en las caras que no se ven, entonces:

$$18 + p_1 = 35 + p_2 = 14 + p_3$$

- Como $14 + p_3 = 18 + p_1 \implies p_3 = 4 + p_1$.
- Como $14 + p_3 = 35 + p_2 \implies p_3 = 21 + p_2$.

Notemos que el primo que sigue 21 es 23, por lo tanto si $p_2 = 2$, $p_3 = 23$, y para $p_3 = 23$, $p_1 = 19$ que también es primo. Luego una solución es $p_3 = 23$.

Problema 41. Ana ha caminado 8 kilómetros con una velocidad de 4km/h. Ahora ella correrá algún tiempo con una velocidad de 8 km/h. ¿Cuánto tiempo le queda por correr para que su velocidad promedio global sea de 5 km/h?

Solución

Si Ana ha caminado 8 kilómetros a 4 km/h, entonces ha caminado durante 2 horas, y aún le queda por recorrer t horas a una velocidad de 8 km/h, es decir le queda por recorrer $8t$ km luego se cumple que:

$$\frac{8 + 8t}{2 + t} = 5$$

Por lo que $t = \frac{2}{3}\text{h} = 40 \text{ min.}$

Problema 42. Un jugador de ajedrez jugó 40 partidos y acumuló 25 puntos (una victoria cuenta como un punto, un empate cuenta como medio punto, y una derrota cuenta como cero puntos). ¿Cuál es la diferencia entre los partidos ganados y los partidos perdidos?

Solución

Sea G el número de partidos ganados, E el número de partidos empatados, y P el número de partidos perdidos, entonces:

$$G + E + P = 40 \tag{2.1}$$

$$G + \frac{E}{2} = 25 \tag{2.2}$$

Restando ambas ecuaciones obtenemos que:

$$P + E - \frac{E}{2} = 40 - 25 \implies P + \frac{E}{2} = 15 \quad (3)$$

Finalmente, restando (2) – (3), obtenemos que $G - P = 10$.

Problema 43. Las trillizas Javiera, Daniela y Luisa querían comprar sombreros idénticos. Sin embargo, a Javiera le faltaba un tercio del precio, a Daniela un cuarto y a Luisa un quinto. Cuando los sombreros estuvieron \$ 940 más baratos, las hermanas juntaron sus ahorros y cada una de ellas compró un sombrero. No les sobró ni un peso. ¿Cuál era el precio de un sombrero antes de que su precio disminuyera?

Solución

Sea P el precio del sombrero antes de bajar, entonces:

- Si a Javiera le faltaba $\frac{1}{3}$ de P , entonces tenía $\frac{2}{3}P$.
- Si a Daniela le faltaba $\frac{1}{4}$ de P , entonces tenía $\frac{3}{4}P$.
- Si a Luisa le faltaba $\frac{1}{5}$ de P , entonces tenía $\frac{4}{5}P$.

Cuando los sombreros estuvieron \$ 940 más baratos, es decir cuando costaban $P - 940$, cada una de ellas compró un sombrero, luego, cuando juntaron sus ahorros obtuvieron $3(P - 940)$. Esta situación puede ser representada por la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}P + \frac{3}{4}P + \frac{4}{5}P &= 3(P - 940) \\ \frac{133}{60}P &= 3P - 2820 \\ P &= 3600 \end{aligned}$$

Luego, el precio del sombrero antes de que este disminuyera era de \$3600.

Problema 44. Sean p, q, r números enteros positivos y $p + \frac{1}{q + \frac{1}{r}} = \frac{25}{19}$.

¿Cuál es el valor del producto pqr ?

Solución

$$\begin{aligned} p + \frac{1}{q + \frac{1}{r}} &= \frac{25}{19} \\ p + \frac{1}{\frac{qr+1}{r}} &= \frac{25}{19} \\ p + \frac{r}{qr+1} &= \frac{25}{19} \\ \frac{p(qr+1) + r}{qr+1} &= \frac{25}{19} \end{aligned}$$

De este modo $qr + 1 = 19 \implies qr = 18$ y $p(qr + 1) + r = 19p + r = 25$, por lo tanto, $p = 1$. Finalmente, el valor de $pqr = 18$

Problema 45. En la ecuación $N \cdot U \cdot (M + E + R + O) = 33$, cada letra representa un dígito diferente $(0, 1, 2, \dots, 9)$. ¿Cuántas maneras diferentes hay para elegir los valores de las letras?

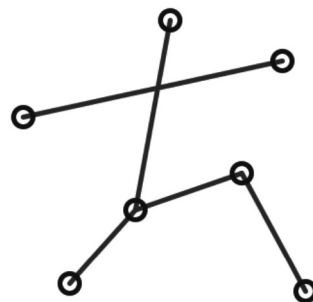
Solución

Notemos que $33 = 3 \cdot 11$, por lo que $N \cdot U = 3$ y $M + E + R + O = 11$.

- Para $N \cdot U = 3$, tenemos 2 posibilidades, $3 \cdot 1 = 3$ y $1 \cdot 3 = 3$. De este modo para M, E, R, O solo podemos elegir entre los valores $\{0, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
- Para $M + E + R + O = 11$, tenemos que solo la suma $0 + 2 + 4 + 5 = 11$ cumple. Por lo tanto podemos combinar estos cuatro sumandos de $4! = 24$ maneras.

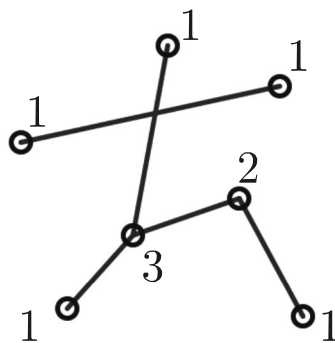
Finalmente, existen $2 \cdot 24 = 48$ maneras diferentes para elegir los valores de las letras.

Problema 46. En la imagen que se muestra, Karina quiere añadir algunos segmentos de línea de tal manera que cada uno de los siete puntos tenga el mismo número de conexiones a los otros puntos. ¿Cuál es el menor número de segmentos de línea que Karina debe dibujar?



Solución

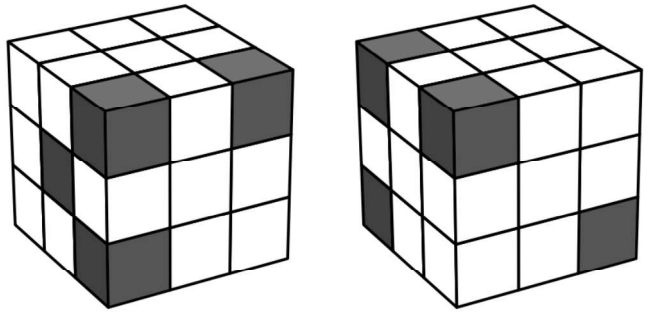
Comencemos asignando a cada vértice el número correspondiente al número de conexiones que tiene, si sumamos estos números obtenemos $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 3 = 10$. Nuestro objetivo es que los siete puntos tengan el mismo número de conexiones a los otros puntos, es decir que la suma de los números asignados a los vértices sea un múltiplo de 7 mayor o igual que $7 \cdot 3$ (pues en la figura hay un vértice con 3 conexiones), luego la suma puede ser $21 = 10 + 11$, $28 = 10 + 18$, $35 = 10 + 25$, $42 = 10 + 32, \dots$



Además, notemos que cada vez que unimos un vértice con otro, sumaremos 1 a cada uno de estos vértices, por lo tanto, por cada segmento que tracemos uniendo dos vértices agregaremos 2 unidades al total, es decir que a $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 3$ siempre sumaremos un número par, luego como mínimo obtendremos $10 + 18 = 28$ como suma, por lo que el menor número de segmentos que se trazarán es 9.

Problema 47. La imagen muestra el mismo cubo desde dos puntos de vista diferentes.

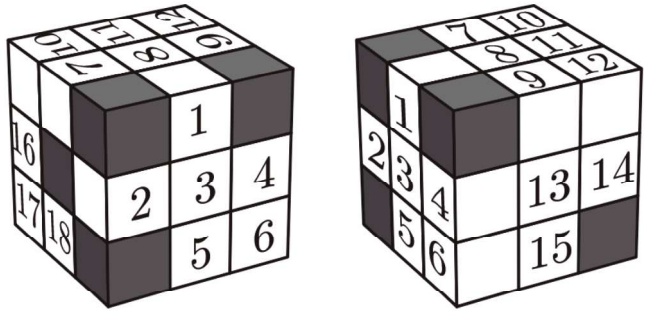
Está construido a partir de 27 cubos pequeños, algunos de ellos son de color negro y algunos son blancos.



¿Cuál es el mayor número de cubos negros que podría haber?

Solución

Enumerando cada uno de los cubos pequeños de color blanco que podemos ver en el gran cubo, podemos contar 18 de estos, con lo cual, concluimos que a lo más puede haber 9 cubos pequeños de color negro.



Problema 48. En una isla, las ranas son siempre verdes o azules, cuando el número de ranas verdes se redujo el 60 %, el número de ranas azules aumentó el 60 %. Resultó que la nueva relación de las ranas azules a las ranas verdes es igual a la relación anterior pero en el orden opuesto (ranas verdes a las ranas azules). ¿En qué porcentaje se modificó el número total de las ranas?

Solución

Sea a el número de ranas azules y v el número de ranas verdes, entonces el número de ranas azules aumentó el 60 %, ahora hay $a + 0,6a = 1,6a$. Como las ranas verdes disminuyeron el 60 %, ahora hay $v - 0,6v = 0,4v$. Como la nueva relación de las ranas azules a las ranas verdes es igual a la relación anterior pero en el orden opuesto, se tiene que:

$$\begin{aligned}\frac{v}{a} &= \frac{1,6a}{0,4v} \\ \frac{v}{a} &= 4\frac{a}{v} \\ \frac{v^2}{a^2} &= 4 \\ \frac{v}{a} &= 2 \\ v &= 2a\end{aligned}$$

Como inicialmente había a ranas azules al aumentar el 60 % ahora hay $1,6a$. Por otra parte inicialmente había $2a$ ranas verdes al disminuir el 60 % ahora hay $0,8a$. Finalmente pasamos de tener $3a$ ranas, a tener $2,4a$ ranas, por lo que las ranas disminuyeron el 20 %.

Problema 49. Tomás escribió varios números enteros positivos distintos, sin exceder de 100. Si el producto de estos números no es divisible por 18. A lo más, ¿cuántos números podría haber escrito?

Solución

Se trata de eliminar del producto $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 99 \cdot 100$ la menor cantidad de factores, tal que 18 no divida el número resultante.

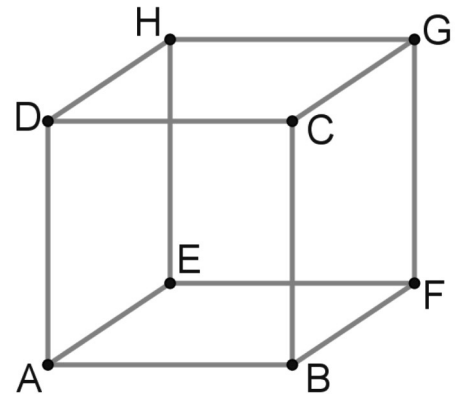
Notemos que $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$ por lo que en el producto de todos los números que escribamos puede tener el 3 como factor solo una vez a lo más, ya que con un segundo múltiplo de tres y un número par, el número sería divisible por 18, y como de 1 a 100 hay 33 múltiplos de 3, eliminamos 32 de ellos, dejando solo 1, por ejemplo el 3. De esta forma nos aseguramos de que nunca $3 \cdot 3$ sea un factor, y así podemos dejar en el producto todos los números pares que no son múltiplos de 3. Como de 1 a 100 hay 100 números, y ya quitamos 32, quedan 68 números enteros.

Finalmente el máximo número de enteros que logra escribir es 68.

Problema 50. Con cualquier trío de vértices de un cubo que no están sobre una misma cara formamos un triángulo. ¿Cuántos triángulos se pueden formar con esta condición?

Solución

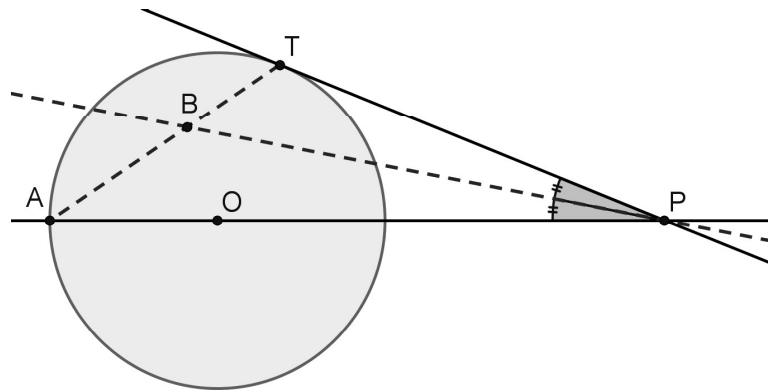
Analicemos los triángulos que podemos construir utilizando una arista de la cara frontal. Observando la imagen y comenzando con la arista AB , tenemos los triángulos ABH y ABG , del mismo modo, por cada una de las otras 3 aristas de la cara frontal, podemos formar 2 triángulos. Luego desde la cara frontal, usando las aristas, podemos trazar $2 \cdot 4 = 8$ triángulos.



Por otra parte, contemos los triángulos que podemos formar comenzando con la diagonal AC de la cara frontal, tenemos los triángulos ACE , ACF , ACG y ACH , con la diagonal DB , también construimos 4 triángulos. Luego desde la cara frontal, usando las diagonales, podemos trazar $4 \cdot 2 = 8$ triángulos. Por lo tanto desde la cara frontal podemos construir 16 triángulos, y desde la cara frontal 16 triángulos más, en total 32 triángulos.

Notemos que si intentamos construir un triángulo partiendo de una arista o diagonal de una cara lateral, este coincide con alguno de los ya contruidos.

Problema 51. En la imagen, PT es tangente a una circunferencia C con centro O y PB bisectriz del ángulo TPA . Calcula el ángulo TBP .



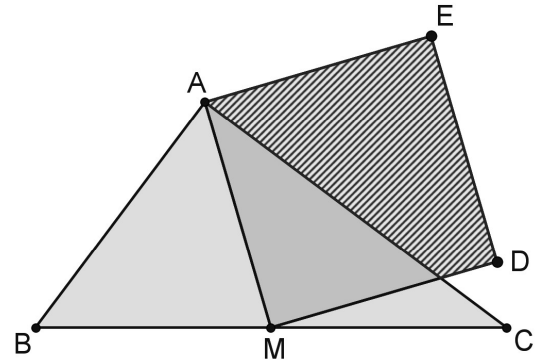
Solución

Como PT es tangente a la circunferencia, $\angle OTP = 90^\circ$. Como OA y OT son radios, $\angle TAO = \angle OTA = \alpha$. Como PB es bisectriz, $\angle APB = \angle BPT = \beta$.

los que comienzan con 47, descartando en esta lista los que comienzan con 44. De este modo se tiene que la mitad de la serie estará entre los números 4376521 (el mayor de la lista que comienza con 43) y 4512367 (el menor de la lista que comienza con 45).

Finalmente el último número de la primera mitad es 4376521.

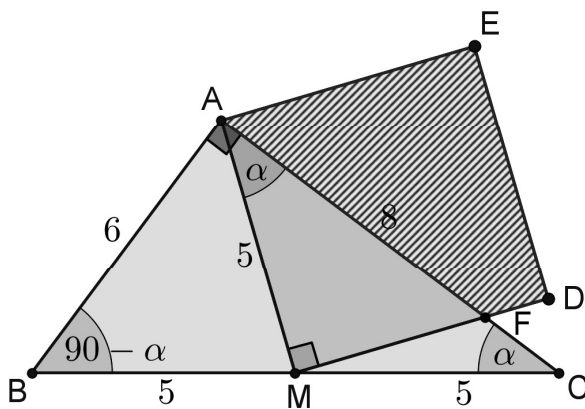
Problema 53. Sea ABC un triángulo tal que $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm y $BC = 10$ cm y sea M el punto medio de BC . $AMDE$ es un cuadrado, y MD intersecta AC en el punto F . Encontrar el área del cuadrilátero $AFDE$ en cm^2 .



Solución

Observemos que el triángulo ABC es rectángulo en A pues:

$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 &= BC^2 \\ 36 + 64 &= 100 \end{aligned}$$



Como M es el punto medio del lado BC se tiene que $BM = CM = AM = 5$, $\angle BAC = 90^\circ$, luego, M es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC , por lo tanto, $BM = BA = MC$ (radios de la circunferencia inscrita) por lo que el cuadrado tiene lado 5.

Notemos que como $AM = CM$ el triángulo ACM es isósceles, entonces:

$$\angle MCA = \angle MAC = \alpha$$

Entonces se tiene que el triángulo ABC y el triángulo MFA tienen todos sus ángulos congruentes, por lo que son semejantes $\triangle ABC \sim \triangle MFA$.

Luego se cumple que:

$$\begin{aligned}\frac{MF}{AB} &= \frac{MA}{AC} \\ \frac{MF}{6} &= \frac{5}{8} \\ MF &= \frac{30}{8}\end{aligned}$$

De este modo el área del triángulo AMF es:

$$A_{\triangle AMF} = \frac{1}{2} \cdot \frac{30}{8} \cdot 5 = \frac{75}{8}$$

Finalmente el área del cuadrilátero $AFDE$ está dada por:

$$A_{AFDE} = A_{\square AMDE} - A_{\triangle AMF} = 25 - \frac{75}{8} = \frac{125}{8}$$

Problema 54. Hay 2014 personas en una fila. Cada uno de ellos es un mentiroso (que siempre miente) o un caballero (que siempre dice la verdad). Cada persona dice “Hay más mentirosos a mi izquierda que caballeros a mi derecha”. ¿Cuántos mentirosos hay en la fila?

Solución

Sean las personas

$$P_1, P_2, P_3, \dots, P_{2013}, P_{2014}$$

Claramente P_1 miente pues no hay nadie a la izquierda de él. P_2 no puede ser caballero, si fuera así a su derecha serían todos mentirosos pero P_3 diría la verdad, luego P_2 miente. Del mismo modo podemos razonar con $P_3, P_4, \dots, P_{1007}$ concluyendo que todos son mentirosos y que $P_{1008}, P_{1009}, \dots, P_{2014}$ son caballeros, pues siempre habrá más mentirosos a su izquierda que caballeros a su derecha, por lo tanto hay 1007 mentirosos.

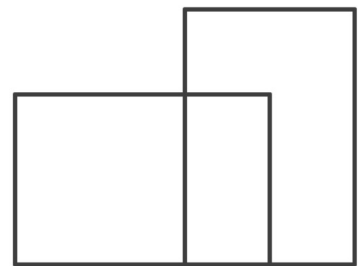
Problema 55. Cada año, el tercer jueves del mes de marzo aparece el Trauco en Chiloé. ¿Cuál es la fecha más tardía en que puede aparecer el Trauco algún año?

(A) 14 de marzo (B) 15 de marzo (C) 20 de marzo (D) 21 de marzo (E) 22 de marzo

Solución

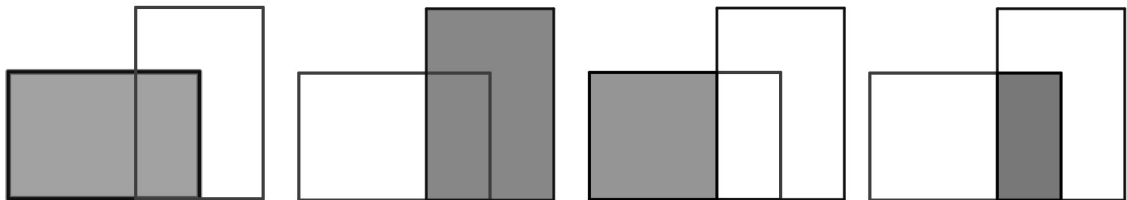
Basta con encontrar el primer Jueves más lejano, lo cual ocurre cuando Marzo comienza en Viernes, es decir Viernes 1 de Marzo, lo que implica que el primer Jueves es el día 7 de Marzo, por lo tanto el Trauco aparecerá a más tardar el día Jueves 21 de Marzo.

Problema 56. ¿Cuántos cuadriláteros de cualquier tamaño se muestran en la figura?



Solución

Cuatro cuadriláteros, los cuales se muestran a continuación.



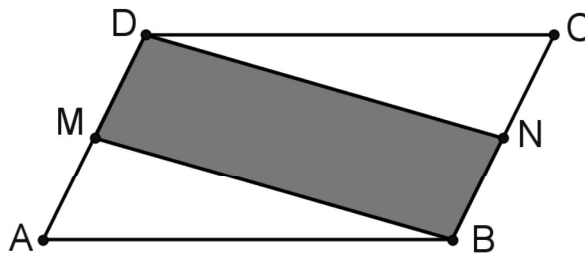
Problema 57. ¿Cuál es el resultado de $2014 \cdot 2014 \div 2014 - 2014$?

Solución

$$[(2014 \cdot 2014) \div 2014] - 2014 = 0$$

Pues de acuerdo a la prioridad de las operaciones primero multiplicamos y/o dividimos de izquierda a derecha y finalmente sumamos y/o restamos de izquierda a derecha (en ausencia de paréntesis).

Problema 58. El área del paralelogramo $ABCD$ es 10. Los puntos M y N son puntos medios de los lados AD y BC . ¿Cuál es el área del cuadrilátero $MBND$?



Solución

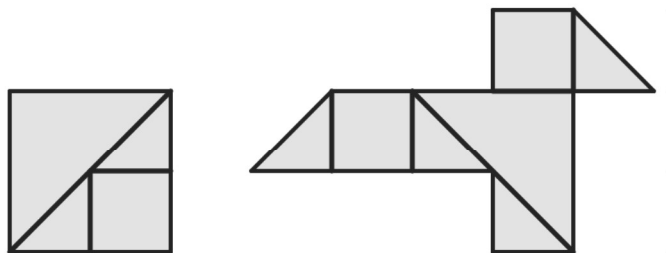
Al unir los puntos M y N se forman cuatro triángulos equivalentes (de igual área), por lo tanto el área de cada triángulo es 2.5, finalmente el área del cuadrilátero sombreado $MBND$ es 5.

Problema 59. El producto de dos números es 36 y la suma es 37. ¿Cuál es la diferencia positiva entre ellos?

Solución

Sean x y $37 - x$ los números buscados, por lo tanto $x \cdot (37 - x) = 36$, al resolver esta ecuación cuadrática se obtienen como soluciones 1 y 36. Al considerar $x = 1 \implies 37 - x = 36$, al considerar $x = 36 \implies 37 - x = 1$ y en ambos casos la diferencia positiva es 35.

Problema 60. Amanda tiene varios cuadrados de papel de área 4. Ella los corta en cuadrados y en triángulos rectángulos de la forma en que se muestra en el primer diagrama. Luego toma algunas de las piezas y hace un pájaro como se muestra en el segundo diagrama. ¿Cuál es el área de este pájaro?



Solución

Como el área del cuadrado original es 4 y la diagonal lo divide en dos partes iguales, el triángulo grande tiene área 2, el área del cuadrado pequeño es 1 y el área de cada uno de los triángulos pequeños tiene área $\frac{1}{2}$. Identificando cada una de estas partes en la nueva figura notamos que su área es 6.

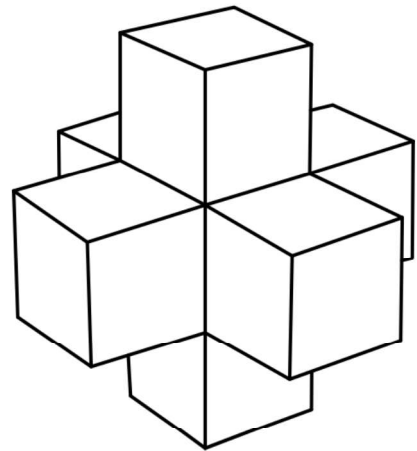
Problema 61. Un estanque estaba lleno hasta su mitad, el abuelo Anacleto añadió 2 litros al estanque. Ahora el estanque está lleno a tres cuartos de su capacidad. ¿Cuál es la capacidad del estanque?

Solución

Si el estanque estaba hasta la mitad y con 2 litros adicionales quedó a tres cuartos de su capacidad, significa que los dos 2 litros que añadió el abuelo corresponden a $\frac{1}{4}$ de la capacidad.

$$\text{Luego, } 2 = \frac{\text{capacidad}}{4} \Rightarrow \text{capacidad} = 2 \cdot 4 = 8 \text{ litros}$$

Problema 62. Jorge construyó el cuerpo que se muestra a continuación usando siete unidades cúbicas. ¿Cuántos cubos tiene que agregar para hacer un cubo con aristas de longitud 3?



Solución

Como el cubo que se debe formar es de arista 3, este contendrá 27 cubos pequeños de arista 1, y como ya tenemos 7, faltan 20 cubos.

Problema 63. ¿Cuál de los siguientes cálculos entrega el resultado más grande?

- (A) 44×777 (B) 55×666 (C) 77×444 (D) 88×333 (E) 99×222

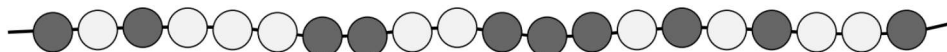
Solución

Notemos que:

- $44 \times 777 = 11 \times 4 \times 111 \times 7 = 11 \times 111 \times 4 \times 7$
- $55 \times 666 = 11 \times 5 \times 111 \times 6 = 11 \times 111 \times 5 \times 6$
- $77 \times 444 = 11 \times 7 \times 111 \times 4 = 11 \times 111 \times 7 \times 4$
- $88 \times 333 = 11 \times 8 \times 111 \times 3 = 11 \times 111 \times 8 \times 3$
- $99 \times 222 = 11 \times 9 \times 111 \times 2 = 11 \times 111 \times 9 \times 2$

Observemos que todos los números tienen los factores 11×111 , por lo que analizamos los otros dos factores, donde 5×6 es el mayor, por lo tanto, el resultado más grande es 55×666 .

Problema 64. El collar de la imagen contiene perlas grises y perlas blancas. Marcos saca una perla tras otra del collar. Siempre saca una perla de uno de los extremos. Se detiene cuando ha quitado la quinta perla gris. ¿Cuál es el mayor número de perlas blancas que Marcos puede haber sacado?

**Solución**

El mayor número de perlas blancas que Marcos puede sacar es 7, lo cual se deduce de la siguiente manera, Marcos quita una perla gris de cada lado sacando luego 3 blancas, Marcos quita nuevamente una perla gris de cada lado y puede sacar 4 blancas más, finalmente Marcos quita la quinta perla gris de cualquiera de los lados del collar, se detiene y no puede quitar más perlas. Finalmente el mayor número de perlas blancas que Marcos puede sacar es de 7 perlas.

Problema 65. Juan tiene una lección de piano dos veces en la semana y Alejandra tiene una lección de piano cada dos semanas. En un momento determinado, Juan tiene 15 lecciones más que Alejandra. ¿Cuántas semanas de lecciones lleva?

Solución

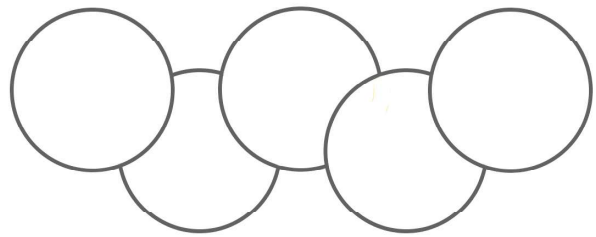
Observemos que por cada lección de Alejandra Juan toma 4 lecciones, por lo que la cantidad de lecciones que toma Alejandra y la cantidad de lecciones que toma Juan están en la razón $\frac{1}{4}$.

Sea x la cantidad de lecciones que ha tomado Alejandra queremos que Juan haya tomado $x + 15$ lecciones, por lo que debe ocurrir que:

$$\frac{1}{4} = \frac{x}{x + 15}$$

Resolviendo la ecuación se tiene $x = 5$, o sea Alejandra ha tomado 5 lecciones, es decir han transcurrido 10 semanas, por lo tanto Juan ha tomado 20 lecciones.

Problema 66. En el diagrama, el área de cada círculo es 1cm^2 . El área común a dos círculos superpuestos es $\frac{1}{8}\text{cm}^2$. ¿Cuál es el área de la región cubierta por los cinco círculos?



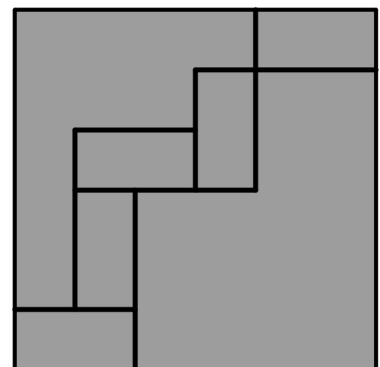
Solución

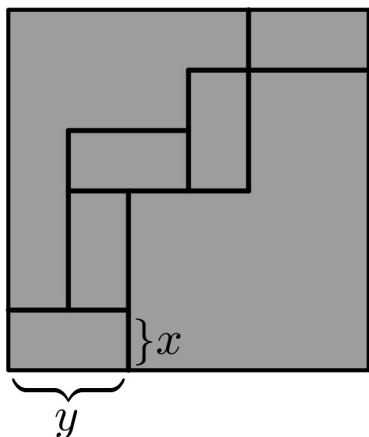
El área de cada círculo es 1 cm^2 , entonces, el área de 5 de ellos es 5cm^2 , pero como dos de estos tienen un sector común de $\frac{1}{8}\text{cm}^2$, y dichos sectores son 4 se tiene que el área de la figura es:

$$5 - 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{9}{2}\text{cm}^2$$

.

Problema 67. Cinco rectángulos iguales se colocan dentro de un cuadrado de 24 cm de lado, como se muestra en el diagrama. ¿Cuál es el área de uno de los rectángulos resultantes?



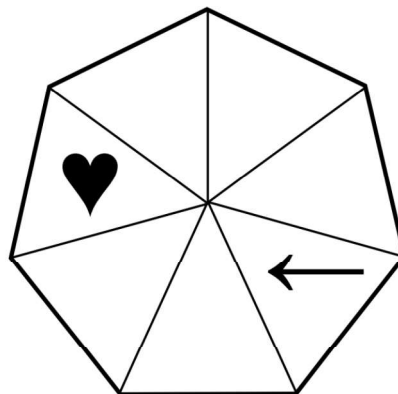
Solución

Sean x e y los lados del rectángulo, como muestra la figura, de este modo se tiene que

$$2x + 2y = 24 \text{ y que } 3y + x - x = 24$$

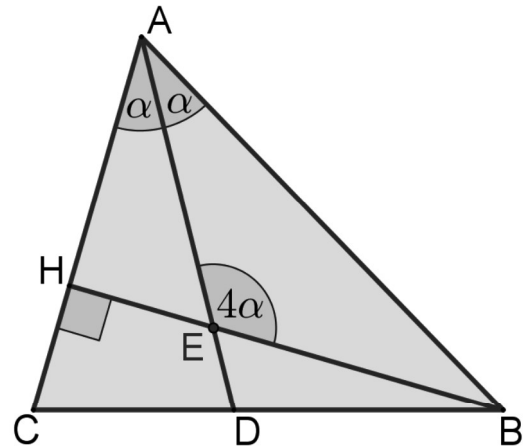
Obteniendo de la segunda ecuación que $y = 8$, y reemplazando en la primera se tiene que $x = 4$, por lo que el área del rectángulo es $8 \cdot 4 = 32\text{cm}^2$

Problema 68. El corazón y la flecha están en las posiciones mostradas en la figura. Al mismo tiempo, el corazón y la flecha empiezan a moverse. La flecha se mueve tres lugares hacia la derecha y el corazón se mueve cuatro lugares hacia la izquierda y luego se detiene. Siguen la misma rutina una y otra vez. ¿Después de cuántas veces repetida la rutina se encontrará el corazón y la flecha en el mismo triángulo por primera vez?

**Solución**

Nunca se encontrará el corazón y la flecha en el mismo triángulo pues rotar una figura tres posiciones a la derecha es equivalente que rotarla 4 lugares a la izquierda, esto es equivalente a mover ambas figuras 3 lugares a la derecha, o bien, mover 4 lugares a la izquierda, por lo que nunca se juntarán.

Problema 69. La figura muestra el triángulo ABC en donde BH es una altura y AD es bisectriz del ángulo en A . El ángulo obtuso entre BH y AD es cuatro veces el ángulo DAB . ¿Cuánto mide el ángulo CAB ?

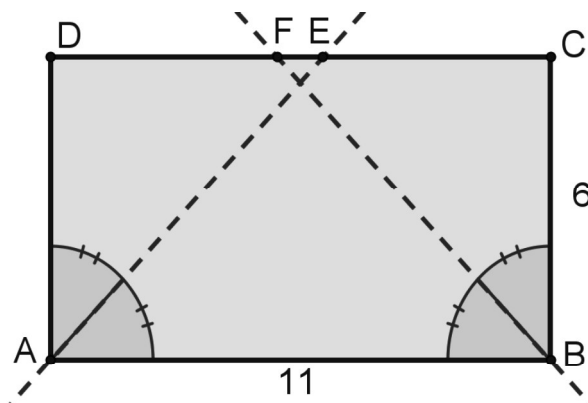


Solución

Notemos que $\angle AEH = 90^\circ - \alpha$, además, $\angle AEH + \angle AEB = 180^\circ$, es decir, $90^\circ - \alpha + 4\alpha = 180^\circ$ por lo tanto $\alpha = 30^\circ$.

Problema 70. Un rectángulo tiene lados de longitudes 6 cm y 11 cm. Se selecciona uno de los lados largos y se dibujan las bisectrices de los ángulos en cada extremo de ese lado. Estas bisectrices dividen el otro lado largo en tres partes. ¿Cuáles son las longitudes de estas secciones?

Solución



Al trazar las bisectrices como se muestra en la figura se generan dos triángulos rectángulos isósceles cuya medida de los catetos es 6. De la figura también se deduce que:

$$\overline{DF} + \overline{FE} + \overline{EC} = 11$$

Como $\overline{DE} = 6$, $\overline{EC} = 5$, por lo tanto $\overline{FE} = 1$ y $\overline{DF} = \overline{EC} = 5$.

Problema 71. El Capitán Sparrow y su tripulación pirata desenterraron varias monedas de oro. Ellos dividen las monedas entre sí de manera que cada persona recibe el mismo número de monedas. Si hubiera cuatro piratas menos en la tripulación, entonces cada persona recibiría 10 monedas

más. Sin embargo, si hubiera 50 monedas menos, cada persona recibiría 5 monedas menos. ¿Cuántas monedas desenterraron?

Solución

Sea x el número de monedas por tripulantes, y el número de tripulantes. Entonces $x \cdot y$ será el número total de monedas. Con los datos se puede plantear el siguiente sistema de ecuaciones:

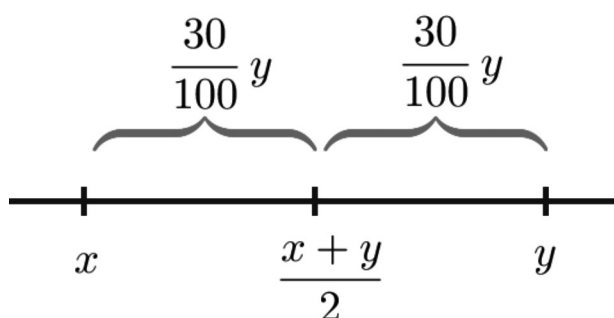
$$\begin{aligned}(y - 4) \cdot (x + 10) &= x \cdot y \\ y \cdot (x - 5) &= x \cdot y - 50\end{aligned}$$

Dicho sistema tiene como solución $x = 15$ e $y = 10$. Finalmente se desenterraron $x \cdot y = 150$ monedas.

Problema 72. El promedio de dos números positivos es 30 % menos que uno de ellos. ¿En qué porcentaje es mayor este promedio que el otro número?

Solución

Sean x e y números positivos tal que $x < y$. El promedio de los dos números es entonces $\frac{x + y}{2}$.



Como dicho promedio es 30 % menos que uno de ellos se tiene que y es $\frac{3}{10}y$ mayor que el promedio, del mismo modo, x es $\frac{3}{10}y$ menor que el promedio, tal como muestra la figura.

Por otra parte tenemos que:

$$\begin{aligned}\frac{x+y}{2} &= y - \frac{3}{10}y \\ \frac{y}{2} - y + \frac{3}{10}y &= -\frac{x}{2} \\ \frac{1}{5}y &= \frac{x}{2} \\ y &= \frac{5}{2}x\end{aligned}$$

Entonces el promedio es:

$$\frac{x+y}{2} = \frac{x + \frac{5}{2}x}{2} = \frac{x}{2} + \frac{5}{4}x$$

Como queremos saber la diferencia entre el promedio y x sumamos y restamos x a esta expresión obteniendo:

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{2} + \frac{5}{4}x - \frac{x}{2} = x + \frac{3}{4}x$$

Finalmente el promedio es 75 % mayor que x .

Problema 73. Una pesa no está funcionando correctamente. Si algo es más ligero que 1000 g, la pesa muestra el peso correcto. Sin embargo, si algo es más pesado o igual que 1000 g, la pesa puede mostrar cualquier número por encima de 1000 g. Tenemos 5 pesos A , B , C , D , E cada uno bajo los 1000 g. Cuando se pesan de dos en dos la pesa muestra lo siguiente: $B + D = 1200$, $C + E = 2100$, $B + E = 800$, $B + C = 900$, $A + E = 700$. ¿Cuál de éstos es el que más pesa?

Solución

Enumeremos las siguientes ecuaciones

$$B + E = 800 \tag{1}$$

$$B + C = 900 \tag{2}$$

$$A + E = 700 \tag{3}$$

$$B + D > 1000 \tag{4}$$

$$C + E > 1000 \tag{5}$$

Restamos $(2) - (1)$ y obtenemos que $C - E = 100$. Por lo tanto, $C > E$.

Restamos $(1) - (3)$ y obtenemos que $B - A = 100$. Por lo tanto, $B > A$.

Sumamos $(4) + (5)$ y obtenemos que $B + C + D + E > 2000$. Como $B + C = 900$, entonces $D + E > 1100$. Por (5) $C + E > 1000$, restando estas dos desigualdades se tiene que $D - C > 100$. Por lo tanto $D > C$.

Sumamos $(4) + (5)$ y obtenemos que $B + C + D + E > 2000$. Como $B + E = 800$, entonces $D + C > 1200$. Por (4) $B + D > 1000$, restando estas dos desigualdades se tiene que $C - B > 200$. Por lo tanto $C > B$.

Finalmente D es el que más pesa.

Problema 74. Andrés escribe todos los dígitos del 1 al 9 en las celdas de una tabla de 3×3 , de manera que cada celda contiene un dígito. Él ya ha escrito el 1, 2, 3 y 4, como se muestra en la figura. Dos números son considerados como vecinos si sus celdas comparten un borde. Una vez introducidos todos los números se da cuenta de que la suma de los vecinos de 9 es 15. ¿Cuál es la suma de los vecinos de 8?

1		3
2		4

Solución

Observemos que la suma de los primeros 9 dígitos es 45.

$$1 + 2 + 3 + \dots + 8 + 9 = 45$$

Los dígitos que debemos ubicar en los cuadrados libres a parte de 9 son 5, 6, 7, 8, por lo tanto 9 no puede ubicarse al centro pues sus vecinos serían 5, 6, 7, 8, que suman 26. El 9 no puede estar entre 1 y 2 pues al centro se debería ubicar el 12, del mismo modo, no puede estar entre 1 y 3, ni entre 2 y 4, como se muestra en la figura.

1		3
9	12	
2		4

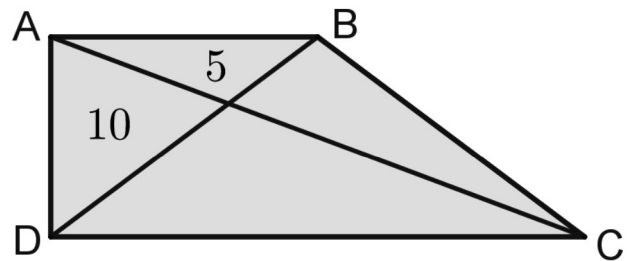
1	9	3
	11	
2		4

1		3
	9	
2	9	4

Concluimos que 9 debe estar entre 3 y 4, lo que obliga que 8 esté en el centro, siendo 15 la suma de los vecinos de este.

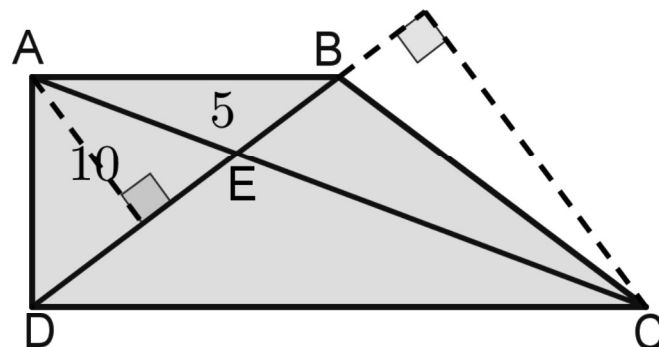
1		3
	8	9
2		4

Problema 75. El cuadrilátero $ABCD$ tiene ángulos rectos en los vértices A y D . Los números muestran las áreas de dos de los triángulos. ¿Cuál es el área de $ABCD$?



Solución

Sea E la intersección de las diagonales. Notemos que los triángulos ABD y ABC tienen igual área, pues tienen la misma base AB y la misma altura AD . De este modo el triángulo BEC tiene área 10.

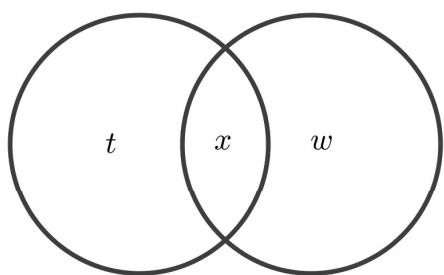


Proyectemos la altura desde A hasta BD . Como los triángulos ADE y AEB tienen la misma altura y sus áreas están en razón $1 : 2$, entonces $BE : ED = 1 : 2$. Por otra parte los triángulos BEC y DEC comparten

la misma altura, proyectada desde C a la prolongación del segmento DB , como sus bases BE y ED están en la razón $1 : 2$, y comparten la altura, la razón entre las áreas también es $1 : 2$. Dado que el área del triángulo BEC es 10, el área del triángulo EDC es 20. Finalmente, el área del cuadrilátero es 45 u^2 .

Problema 76. Liz y María compiten en la resolución de problemas. A cada una de ellas se les da la misma lista de 100 problemas. La primera en resolver cualquiera de estos problemas obtiene 4 puntos, mientras que la segunda en resolverlo obtiene 1 punto. Liz resolvió 60 problemas, y María también resolvió 60 problemas. Juntas, consiguieron 312 puntos. ¿Cuántos problemas fueron resueltos por ambas?

Solución



Sea t la cantidad de problemas que resuelve solamente Liz, w la cantidad de problemas que resuelve solamente María y x la cantidad de problemas que resuelve tanto Liz como María.

De este modo Liz ha resuelto $t + x = 60$ problemas y María ha resuelto $w + x = 60$ problemas. Por los $t + w$ problemas resueltos por solo una de ellas han acumulado $4t + 4w$ puntos, por lo problemas resueltos por ambas han acumulado $5x$ puntos (la primera en resolver cualquiera de estos problemas obtiene 4 puntos, mientras que la segunda en resolverlo obtiene 1 punto).

Como juntas consiguieron 312 puntos, se tiene que:

$$4t + 4w + 5x = 312$$

Por otra parte:

$$t + x = 60 \implies t = 60 - x$$

$$w + x = 60 \implies w = 60 - x$$

Luego:

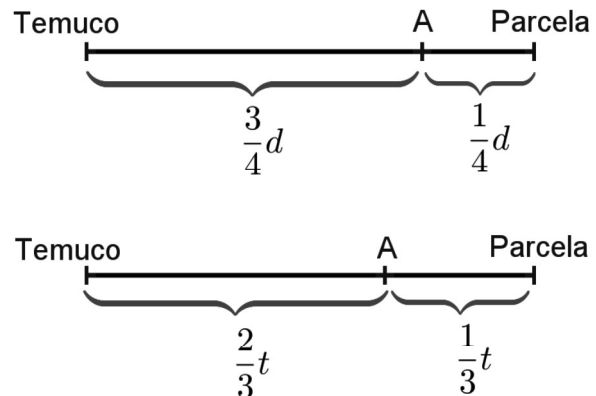
$$\begin{aligned}
 4t + 4w + 5x &= 312 \\
 240 - 4x + 240 - 4x + 5x &= 312 \\
 -3x &= -168 \\
 x &= 56
 \end{aligned}$$

Finalmente, 56 problemas fueron resueltos por Liz y María a la vez.

Problema 77. David viaja en su bicicleta desde Temuco a su parcela. Él debía llegar a las 15 : 00, pero gastó $\frac{2}{3}$ del tiempo planeado cubriendo $\frac{3}{4}$ de la distancia. Después de eso, pedaleó más lentamente y llegó justo a tiempo. ¿Cuál es la razón entre la velocidad de la primera parte del viaje y la velocidad de la segunda parte del viaje?

Solución

Sea d la distancia desde Temuco a la parcela, y t el tiempo que demora David en cubrir dicha distancia en bicicleta. Notemos que en el primer trayecto David recorre $\frac{3}{4}d$ en $\frac{2}{3}t$.



Como la velocidad $v = \frac{d}{t}$, la velocidad de David en el primer trayecto es:

$$v_1 = \frac{\frac{3}{4}d}{\frac{2}{3}t} = \frac{9d}{8t}$$

Y la velocidad de David en el segundo trayecto es:

$$v_2 = \frac{\frac{1}{4}d}{\frac{1}{3}t} = \frac{3d}{4t}$$

Luego:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\frac{9d}{8t}}{\frac{3d}{4t}} = \frac{36}{24} = \frac{3}{2}$$

Finalmente, la razón entre las velocidades de la primera y segunda parte del viaje es 3 : 2.

Problema 78. En grupo de 25 personas formado por caballeros, niños y damas, los caballeros siempre dicen la verdad, los niños siempre mienten, y de las damas algunas mienten y otras dicen la verdad. Cuando se les preguntó: “¿Es usted una dama?”, 12 de ellos dijeron: “Sí”. Cuando se les preguntó: “¿Es usted un niño?”, 8 de ellos dijeron: “Sí”. ¿Cuántos caballeros hay en el grupo?

Solución

Sea c el número de caballeros, n el número de niños, d el número de damas (d_m las que mienten y d_v las que dicen la verdad). de modo que:

$$c + n + d = 25$$

Cuando se les preguntó: “¿Es usted una dama?”, 12 de ellos dijeron “Sí”, entre ellos las damas que dicen la verdad, y los niños, pues mienten, por lo tanto, $n + d_v = 12$.

Cuando se les preguntó: “Es usted un niño”, 8 de ellos dijeron: “Sí”, solamente respondieron que sí las damas mentirosas, por lo tanto $d_m = 8$.

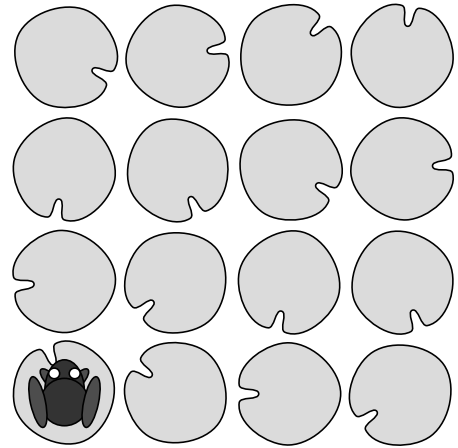
Sabiendo que $d_m = 8$ y que $n + d_v = 12$, se tiene que hay 20 personas contando los niños y todas las damas, por lo que los caballeros resultan ser 5.

Problema 79. Diferentes números enteros positivos se escriben en el pizarrón. Exactamente dos son divisibles por 2 y exactamente 13 de ellos son divisibles por 13. Sea M el más grande de estos números. ¿Cuál es el menor valor posible de M ?

Solución

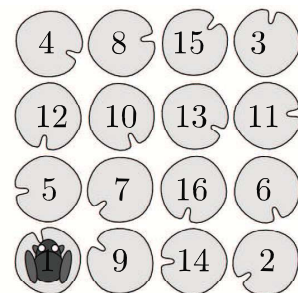
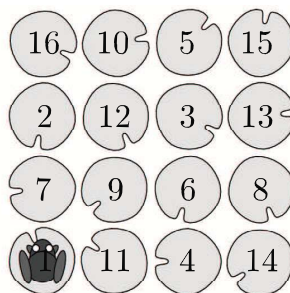
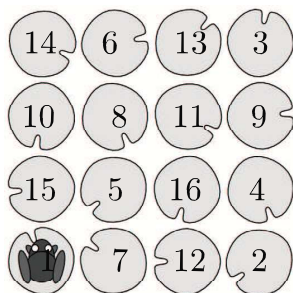
Como en la pizarra tiene que haber al menos 13 números divisibles por 13, y exactamente 2 números pares, estos también deben ser múltiplos de 13, para que así el más grande de estos números sea el menor valor posible. De este modo elegimos los primeros 11 múltiplos de 13 impares y 2 múltiplos de 13 pares menores a $13 \cdot 21$. Finalmente, el menor valor posible de M es $13 \cdot 21 = 273$.

Problema 80. En un estanque hay 16 hojas de lirio de agua formando un patrón de 4 por 4 como se muestra en la imagen. Una rana se sienta en una hoja en una de las esquinas. A continuación, salta de una hoja a otra, ya sea horizontal o verticalmente. La rana siempre salta por encima de al menos una hoja y nunca cae en la misma hoja dos veces. ¿Cuál es el mayor número de hojas (incluyendo la hoja en la que se encuentra) que la rana puede alcanzar?

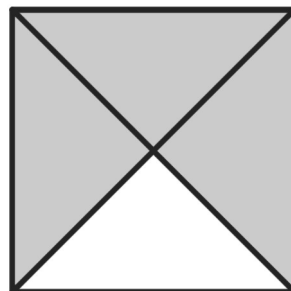


Solución

La rana saltando según las condiciones del problema puede alcanzar las 16 hojas que hay en el agua (incluyendo la hoja en la que se encuentra), a continuación se muestran tres de las posibles combinaciones que cubren las 16 hojas.

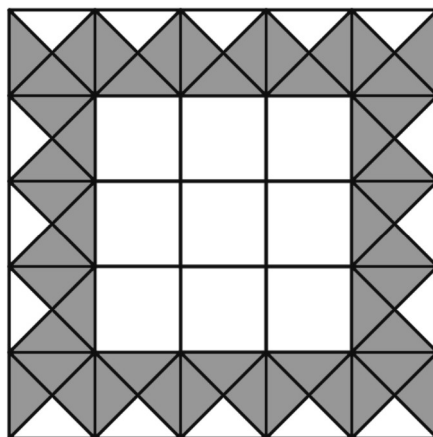


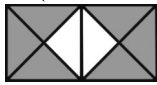
Problema 81. Una plaza de 5×5 está hecha de 25 azulejos de 1×1 , todos los azulejos con el mismo patrón, tal como el azulejo que se muestra en la figura. Se sabe que en la plaza siempre dos baldosas adyacentes tienen el mismo color a lo largo del borde compartido. El perímetro de la plaza se compone de segmentos blancos (lados de triángulos blancos) y grises (lados de triángulos grises) de longitud 1. ¿Cuál es el menor número posible de tales segmentos grises de longitud 1?

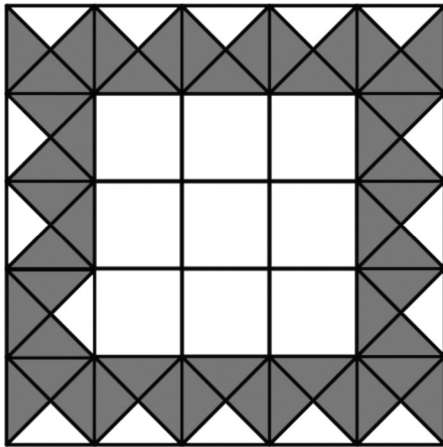


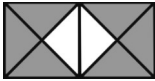
Solución

Nos interesa rodear la plaza con segmentos blancos, un arreglo óptimo es el mostrado en la imagen, lo que nos obliga a tener 4 segmentos grises alrededor de la plaza, pues es imposible tener dos segmentos blancos formando una esquina.

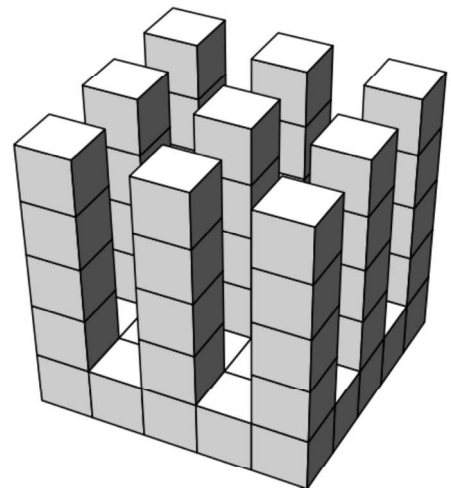


Pero de este modo debemos rellenar el resto de la plaza (el cuadrado de 3×3) con baldosas que necesariamente sean de la forma  (por la condición de que en la plaza siempre dos baldosas adyacentes tienen el mismo color a lo largo del borde compartido), pero esto es imposible, pues nos queda por cubrir una cantidad impar de baldosas.



Luego debemos modificar el arreglo inicial e intentar cubrir la plaza dejando 5 segmentos grises alrededor de la plaza, de modo que el interior de la plaza (el cuadrado de 3×3), se pueda cubrir con 4 piezas de la forma , y con una pieza de la forma .

Problema 82. De un cubo de $5 \times 5 \times 5$ formado por cubos pequeños de $1 \times 1 \times 1$ se han sacado algunos cubos pequeños, quedando el cuerpo que se muestra en la figura. ¿Cuántos cubos pequeños $1 \times 1 \times 1$ se han sacado?



Solución

Notemos que el cubo grande de $5 \times 5 \times 5$ está formado 125 cubos pequeños de $1 \times 1 \times 1$, en el sólido que muestra la figura hay una base de $5 \times 5 \times 1 = 25$ cubos y 9 columnas de $1 \times 1 \times 4 = 36$ cubos, en total hay 61 cubos, luego faltan 64 cubos pequeños para completar el cubo grande.

Problema 83. Hoy es el cumpleaños de Carla, Emilia y Liliana. La suma de sus edades es 44. ¿Cuál será la suma de sus edades, la próxima vez que ésta vuelva a ser un número de dos dígitos iguales?

Solución

Observemos que en un año más, sumaremos 3 años a la suma de sus edades, en dos años más sumaremos $3 \cdot 2 = 6$ años a la suma de sus edades, en n años más sumaremos $3 \cdot n$ años a la suma de sus edades, por lo que

año a año la suma de sus edades se incrementa en un múltiplo de 3, de modo que el incremento de la suma de sus edades debe ser divisible por 3. Teniendo en cuenta que los números con 2 dígitos iguales, mayores que 44, son 55, 66, 77, 88 y 99, el único número que cumple la condición es 77, pues $77 - 44 = 33 = 3 \cdot 11$.

Problema 84. Si $a^b = \frac{1}{2}$ ¿Cuál es el valor de a^{-3b} ?

Solución

Usando las propiedades de las potencias, se tiene que:

$$a^{-3b} = (a^b)^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 2^3 = 8$$

Problema 85. Hay 48 pelotas colocadas en tres canastas de diferentes tamaños. La canasta más pequeña junto con la más grande, contienen dos veces el número de pelotas que contiene la canasta mediana. La canasta más pequeña contiene la mitad de número de pelotas que tiene la canasta del centro. ¿Cuántas pelotas hay en la canasta grande?

Solución

Sea a el número de pelotas en la canasta pequeña, b el número de pelotas en la canasta mediana y c el número de pelotas en la canasta grande, entonces:

$$\begin{aligned}a + c &= 2b \\a &= \frac{b}{2} \\a + b + c &= 48\end{aligned}$$

Al resolver el sistema de ecuaciones se obtiene que $a = 8$, $b = 16$ y $c = 24$.

Problema 86. Calcule el valor de $\frac{2^{2014} - 2^{2013}}{2^{2013} - 2^{2012}}$

Solución

$$\begin{aligned}\frac{2^{2014} - 2^{2013}}{2^{2013} - 2^{2012}} &= \frac{2^{2013} \cdot (2 - 1)}{2^{2012} \cdot (2 - 1)} \\ &= \frac{2^{2013}}{2^{2012}} \\ &= 2\end{aligned}$$

Problema 87. ¿Cuál de estas expresiones no contiene $b+1$ como un factor?

$$(A) 2b + 2 \quad (B) b^2 - 1 \quad (C) b^2 + b \quad (D) -1 - b \quad (E) b^2 + 1$$

Solución

- $2b + 2 = 2(b + 1)$
- $b^2 - 1 = (b + 1)(b - 1)$
- $b^2 + b = b(b + 1)$
- $-1 - b = -(1 + b) = -(b + 1)$
- $b^2 + 1$ no se puede factorizar en $\mathbb{R}$.

Luego, las cuatro primeras expresiones son factorizadas por $(b + 1)$, la quinta no tiene como factor $(b + 1)$.

Problema 88. ¿Cuántas cifras tendrá el resultado de la multiplicación: $(2^{22})^5 \cdot (5^{55})^2$?

Solución

$$(2^{22})^5 \cdot (5^{55})^2 = 2^{110} \cdot 5^{110} = 10^{110}$$

Notemos que 10^0 tiene 1 cifra, 10^1 tiene 2 cifras, 10^2 tiene 3 cifras, 10^n tiene $n + 1$ cifras. Por lo tanto 10^{110} tiene 111 cifras.

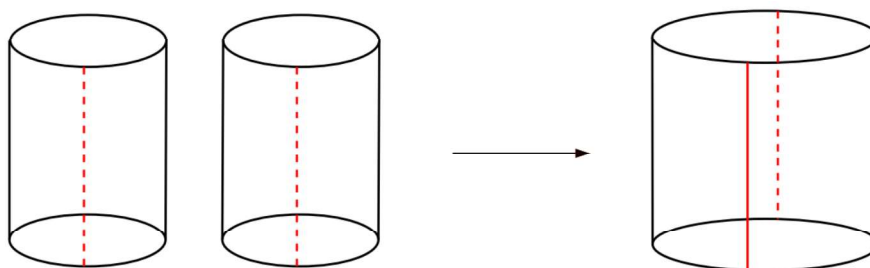
Problema 89. Hector tiene una cuenta de correo electrónico secreto que sólo cuatro de sus amigos conocen. Hoy recibió 8 emails a esa cuenta. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

- (A) Hector recibió dos correos electrónicos de cada amigo.
- (B) Hector no pudo haber recibido ocho correos electrónicos de un solo amigo.
- (C) Hector recibió al menos un correo electrónico de cada amigo.
- (D) Hector recibió por lo menos dos correos electrónicos de uno de sus amigos.
- (E) Hector recibió al menos dos correos electrónicos de 2 amigos diferentes.

Solución

Analicemos cada alternativa. Se descarta que Hector recibió dos correos electrónicos de cada amigo, porque Hector puede haber recibido incluso los 8 correos de solo un amigo. Se descarta que Hector no pudo haber recibido ocho correos electrónicos de un solo amigo, pues el enunciado dice que Hector recibió 8 correos, no necesariamente de un solo amigo. Se descarta que Hector recibió al menos un correo electrónico de cada amigo, pues es posible que alguno de sus amigos no le haya enviado ningún correo. Es correcto que Hector recibió por lo menos dos correos electrónicos de uno de sus amigos, pues como son 4 amigos y ha recibido 8 correos, al menos un amigo le envió al menos dos correos a Hector.

Problema 90. Dos cilindros idénticos se cortan a lo largo de las líneas punteadas y se pegan entre sí formando un cilindro más grande (ver figura). ¿Qué se puede decir sobre el volumen del cilindro grande en comparación con el volumen de un cilindro pequeño?



Solución

Sea r el radio de los cilindros pequeños y h su altura, al cortar los dos cilindros y unirlos, el perímetro de la circunferencia basal del cilindro grande será $2\pi r + 2\pi r = 4\pi r$. Sea R el radio del cilindro mayor, por lo tanto, $4\pi r = 2\pi R \implies R = 2r$.

Calculando los volúmenes de los cilindros, se obtiene que el volumen del cilindro pequeño es $\pi \cdot r^2 \cdot h$ y el volumen del cilindro mayor es:

$$\pi \cdot R^2 \cdot h = \pi \cdot (2r)^2 \cdot h = 4\pi r^2 h$$

Luego el volumen del cilindro grande es cuatro veces el volumen del cilindro pequeño.

Problema 91. En el número 2014 los dígitos son diferentes y el último dígito es mayor que la suma de los otros tres dígitos ¿Cuántos años antes de 2014 ocurrió esto por última vez?

Solución

Notemos que no puede ser entre el año 2010 y 2013, pues el último dígito no es mayor que la suma de los primeros 3 ($2 + 0 + 1 = 3$). Se descartan los años entre 2000 y el 2009, ya que contienen entre sus cifras 2 ceros y los dígitos deben ser distintos. También se descartan los años entre 1900 y 1999, pues la suma de los tres primeros dígitos es mayor o igual que 10, de igual manera se descartan los años entre 1800 y 1899, pues la suma de los tres primeros dígitos es mayor o igual que 9. Entre los años 1700 y 1799 la suma de los dos primeros dígitos es 8, por lo tanto el tercer dígito debe ser cero, y el cuarto dígito debe ser 9, es decir, el año 1709. Como $2014 - 1709 = 305$, entonces hace 305 años atrás ocurrió esto por última vez.

Problema 92. El tamaño de una caja rectangular es $a \times b \times c$, con $a < b < c$. Si aumenta a o b o c en un número positivo dado, el volumen de la caja también aumenta. ¿En cuál de los siguientes casos el volumen de la caja es mayor?

- (A) Si aumenta solo a .
- (B) Si aumenta solo b .
- (C) Si aumenta solo c .
- (D) El aumento de volumen es la misma en (A), (B), (C).
- (E) Depende de los valores de a , b , c .

Solución

Sea x la constante positiva en que aumentan los lados, analicemos los siguientes 3 casos:

- $(a + x) \cdot b \cdot c = abc + bcx$
- $a \cdot (b + x) \cdot c = abc + acx$
- $a \cdot b \cdot (c + x) = abc + abx$

Debemos comparar ahora los tres productos bcx , acx , abx , donde claramente bcx es mayor, pues b y c son los lados más grandes. Luego el mayor aumento se produce cuando aumenta a .

Problema 93. En un partido de fútbol, el ganador recibe 3 puntos, el perdedor recibe 0 puntos, mientras que en el caso de un empate, cada equipo obtiene 1 punto. Cuatro equipos, A , B , C , D , participan en un torneo de fútbol. Cada equipo juega tres partidos. Al final del torneo el equipo A obtiene 7 puntos y los equipos B y C , 4 puntos cada uno. ¿Cuántos puntos obtuvo el equipo D ?

Solución

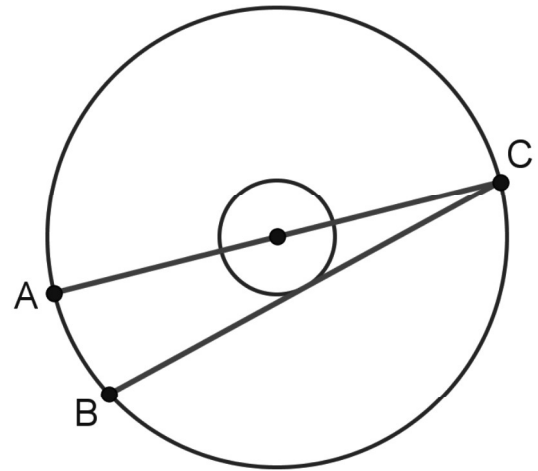
Observemos que:

- Como A tiene 7 puntos, necesariamente ganó 2 y empató 1.
- Como B tiene 4 puntos, necesariamente ganó 1, empató 1 y perdió 1.

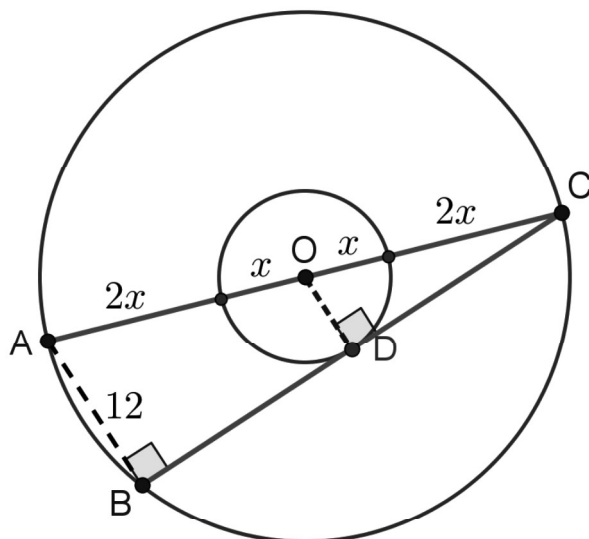
- Como C tiene 4 puntos, , necesariamente ganó 1, empató 1 y perdió 1.

Tenemos que en total $A + B + C$ ganaron 4 partidos, por lo que deben haber 4 derrotas, como B y C perdieron cada uno 1 partido, entonces, D perdió los otros 2 partidos. Además A, B, C juntos acumulan 3 empates, así que D debe haber empatado con alguno de ellos. De este modo D , de los 3 partidos que jugó, perdió 2 y empató 1, obteniendo 1 punto.

Problema 94. Los radios de dos círculos concéntricos están en la razón 1 : 3. AC es el diámetro del círculo grande; BC es una cuerda del círculo grande que es tangente al círculo más pequeño; y la longitud de la cuerda AB es 12. Calcule el radio del círculo grande.



Solución



Sea D el punto de tangencia de la cuerda BC con la circunferencia pequeña, por lo que el segmento OD es perpendicular al segmento BC . Además, el triángulo ABC es rectángulo en B pues está inscrito en la semicircunferencia mayor, con lo cual $ODC \sim ABC$ en razón 1 : 2, luego el radio de la circunferencia menor es 6, por lo que el radio la circunferencia mayor es 18.

Problema 95. ¿Cuántas tripletas (a, b, c) de enteros con $a > b > c > 1$ satisface que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > 1$?

Solución

Como queremos que los sumandos sean lo más grande posible, los denominadores de cada fracción deben ser lo menor posible. Para $a = 2$ y $b = 3$, se tiene que:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

Por lo que $\frac{1}{c}$ debe ser mayor que $\frac{1}{6}$, de este modo $\frac{1}{c}$ debe ser $\frac{1}{5}$ o $\frac{1}{4}$. Finalmente las tripletas que cumplen la condición son $(2, 3, 4)$ y $(2, 3, 5)$.

Problema 96. a, b, c son números no nulos, n es un número entero positivo. Se sabe que los números $(-2)^{2n+3} \cdot a^{2n+2} \cdot b^{2n-1} \cdot c^{3n+2}$ y $(-3)^{2n+2} \cdot a^{4n+1} \cdot b^{2n+5} \cdot c^{3n-4}$ tienen el mismo signo. ¿Cuál de las siguientes alternativas es siempre verdadera?

- (A) $a > 0$ (B) $b > 0$ (C) $c > 0$ (D) $a < 0$ (E) $b < 0$

Solución

Observemos que $2n + 3$ es impar, entonces $(-2)^{2n+3}$ es negativo, como $2n + 2$ es par, entonces $(-3)^{2n+2}$ es positivo, luego $a^{2n+2} \cdot b^{2n-1} \cdot c^{3n+2}$ y $a^{4n+1} \cdot b^{2n+5} \cdot c^{3n-4}$ tienen signos distintos.

Del mismo modo $2n - 1$ y $2n + 5$ son impares, entonces b^{2n-1} y b^{2n+5} tienen el mismo signo, luego $a^{2n+2} \cdot c^{3n+2}$ y $a^{4n+1} \cdot c^{3n-4}$ deben tener signos distintos.

Además, $3n + 2$ y $3n - 4$ son pares cuando n es par y son impares cuando n es impar, entonces c^{3n+2} y c^{3n-4} tienen el mismo signo para cualquier valor de n , por lo que a^{2n+2} y a^{4n+1} deben tener signos distintos, así es que $a < 0$.

Problema 97. Seis semanas son $n!$ segundos. Calcule el valor de n .

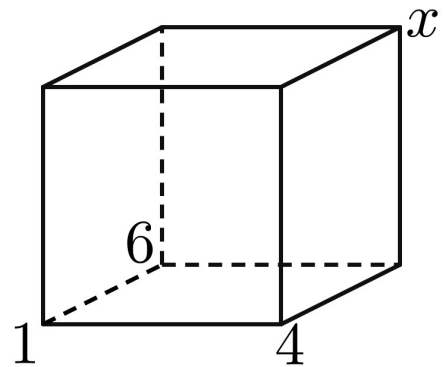
Solución

La cantidad de segundos que hay en 6 semanas es:

$$\begin{aligned}
 6 \cdot 7 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 &= 6 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 12 \cdot 60 \\
 &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 30 \\
 &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 90 \\
 &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \\
 &= 10!
 \end{aligned}$$

Luego $n = 10$.

Problema 98. Los vértices de un cubo se enumeran de 1 a 8 de manera que el resultado de la suma de los cuatro vértices de una cara es la misma para todas las caras. Los números 1, 4 y 6 ya se encuentran establecidos en algunos vértices como se muestra en la figura. ¿Cuál es el valor de x ?



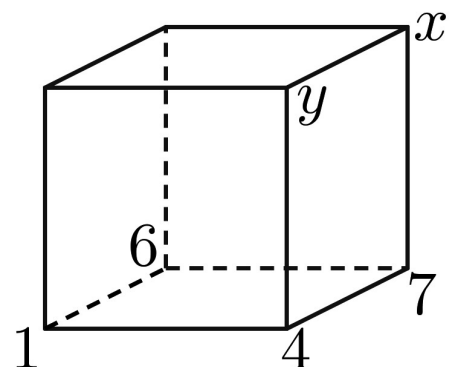
Solución

Como en un cubo un vértice es la intersección de tres caras, cada número ubicado en los vértices, participa en la suma de 3 caras distintas, es decir, en la suma total de las seis caras cada número aparecerá 3 veces, por lo que la suma será:

$$1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + \dots + 8 + 8 + 8 = 3 \cdot (1 + 2 + \dots + 8) = 108$$

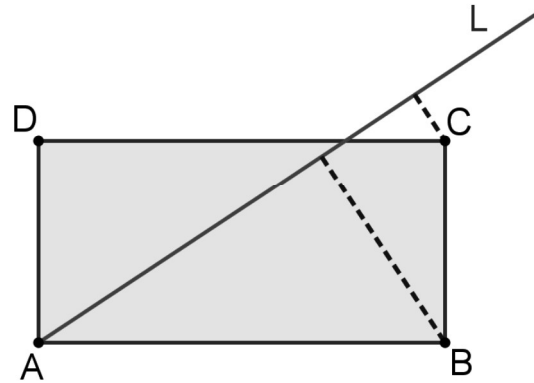
Como se tienen 6 caras, cada cara suma $\frac{108}{6} = 18$.

De este modo, en la base del cubo el cuarto vértice necesariamente es 7, además $4 + 7 + x + y = 18$ pues son los vértices de una cara, es decir $x + y = 7$, 1 y 6 no pueden ser, pues ya están en la base, 4 y 3 no pueden ser pues 4 ya está en la base, de modo que solo es posible 2 y 5.



Además x no puede ser 5, de ser así, en la cara trasera los 3 vértices ya sumarían 18, de modo que $x = 2$.

Problema 99. La línea L pasa por el vértice A de un rectángulo $ABCD$. La distancia del punto C a L es 2, y la distancia del punto B a L es 6. Si AB es el doble de BC , encontrar AB .

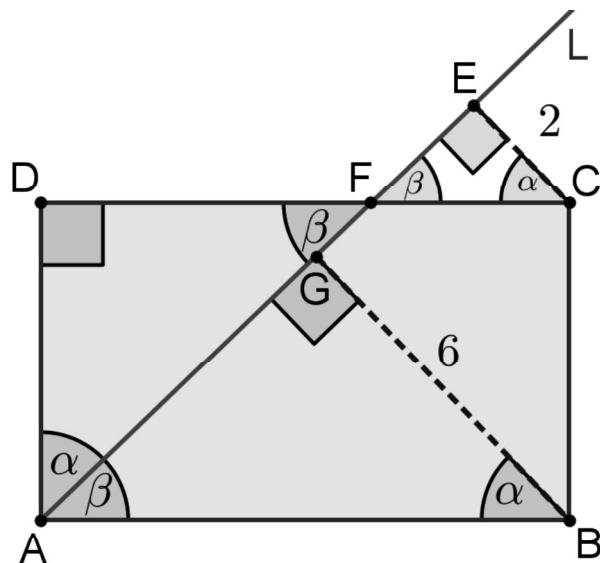


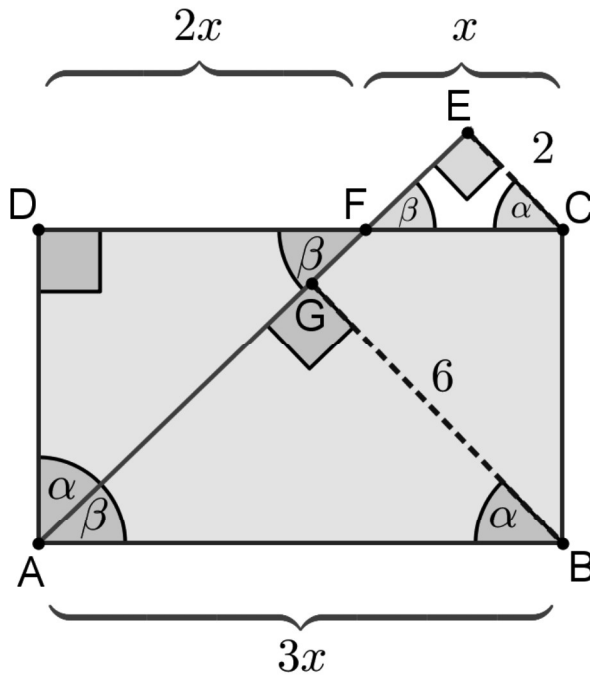
Solución

Claramente:

$$\triangle AFD \sim \triangle BAG \sim \triangle CFE$$

Entonces la razón de semejanza entre $\triangle CFE$ $\triangle BAG$ es 1 : 3. Llamemos x a la medida del segmento FC , entonces $AB = 3x$ y $DF = 2x$.





Además, $AD = \frac{3}{2}x$, aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo AFD se determina que $AF = \frac{5}{2}x$. Como $\triangle AFD \sim \triangle CFE$, se tiene que:

$$\frac{2}{\frac{3x}{2}} = \frac{x}{\frac{5x}{2}}$$

Resolviendo la ecuación se tiene que $x = \frac{10}{3}$, por lo tanto $AB = 10$.

Problema 100. La función $f(x) = ax + b$ satisface las igualdades $f(f(f(1))) = 29$ y $f(f(f(0))) = 2$. ¿Cuál es el valor de a ?

Solución

Notemos que:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax + b \\ f(1) &= a + b \\ f(f(1)) &= a(a + b) + b = a^2 + ab + b \\ f(f(f(1))) &= a(a^2 + ab + b) + b = a^3 + a^2b + ab + b = 29 \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} f(x) &= ax + b \\ f(0) &= b \\ f(f(0)) &= ab + b \\ f(f(f(0))) &= a(ab + b) + b = a^2b + ab + b = 2 \end{aligned}$$

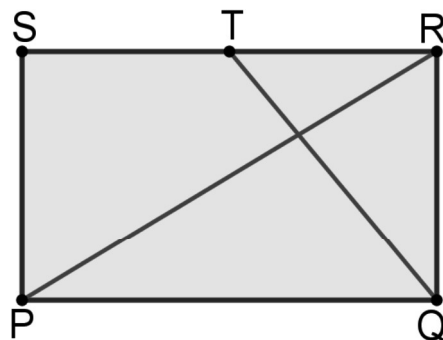
Como $a^2b + ab + b = 2 \implies a^3 + a^2b + ab + b = a^3 + 2 = 29$. Finalmente $a^3 = 27 \implies a = 3$.

Problema 101. Hay 10 diferentes enteros positivos, exactamente 5 de ellos son divisibles por 5 y exactamente 7 de ellos son divisibles por 7. Sea M el más grande de estos 10 números. ¿Cuál es valor mínimo posible de M ?

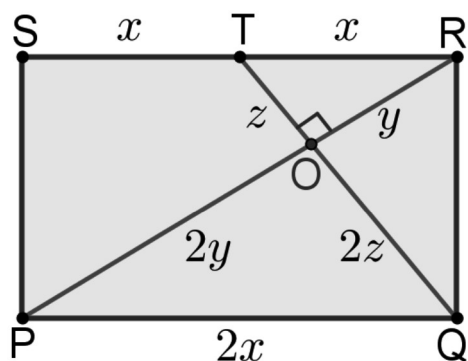
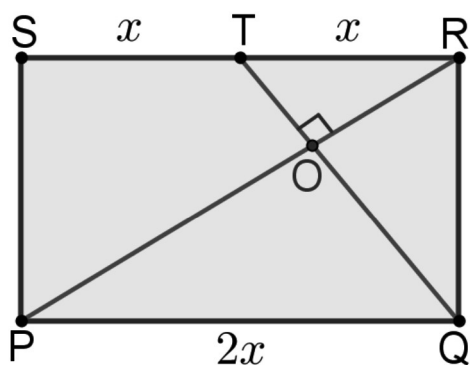
Solución

Los primeros 7 múltiplos de 7 son 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, notemos que el 35 es también un múltiplo de 5, por lo tanto solo debemos agregar a la lista 4 múltiplos de 5 menores que 49, por ejemplo pueden ser 5, 10, 15, 20, así que 49 es el valor mínimo de M .

Problema 102. $PQRS$ es un rectángulo. T es el punto medio RS . QT es perpendicular a la diagonal PR . ¿Cuál es la razón $PQ : QR$?



Solución



Se observa claramente que $\triangle TOR \sim \triangle QOP$ en razón 1 : 2.

Al aplicar el teorema de Pitágoras en los triángulos OQR y OQP , obtenemos que:

$$\overline{PQ} = \sqrt{(2y)^2 + (2z)^2}$$

$$\overline{QR} = \sqrt{y^2 + (2z)^2}$$

Luego,

$$\frac{PQ}{QR} = \frac{\sqrt{(2y)^2 + (2z)^2}}{\sqrt{y^2 + (2z)^2}} = \frac{\sqrt{4y^2 + 4z^2}}{\sqrt{y^2 + 4z^2}}$$

Además $\triangle TQR$ es rectángulo en R e y es la altura, aplicando el teorema de Euclides, se tiene que $y^2 = 2z^2$. De este modo:

$$\frac{PQ}{QR} = \frac{\sqrt{4 \cdot 2z^2 + 4z^2}}{\sqrt{2z^2 + 4z^2}} = \frac{\sqrt{12z^2}}{\sqrt{6z^2}} = \sqrt{2}$$

Finalmente $PQ : QR = \sqrt{2} : 1$

Problema 103. Hay 9 canguros, ellos son de color plata o de color oro. Cuando 3 canguros se encuentran por casualidad, la probabilidad de que ninguno de ellos sea color plata es $\frac{2}{3}$. ¿Cuántos canguros son de color oro?

Solución

Sean $C_1, C_2, C_3, \dots, C_9$ los nueve canguros, entonces la cantidad total de grupos de tres canguros será

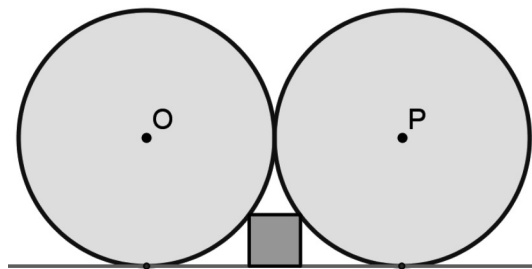
$$\binom{9}{3} = \frac{9!}{3!(9-3)!} = 84$$

Donde $\frac{2}{3}$ de estos grupos no tiene canguros color plata, es decir, $\frac{2}{3}$ de 84, 56 grupos. por lo tanto debemos encontrar el número n de canguros color oro, de manera tal, que al agruparlos de tres en tres formemos 56 grupos, esto queda expresado como:

$$\begin{aligned} \binom{n}{3} &= 56 \\ \frac{n!}{3! \cdot (n-3)!} &= 56 \\ \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4) \cdot \dots \cdot 1}{6 \cdot (n-3) \cdot (n-4) \cdot \dots \cdot 1} &= 56 \\ \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{6} &= 56 \\ n \cdot (n-1) \cdot (n-2) &= 8 \cdot 7 \cdot 6 \\ n &= 8 \end{aligned}$$

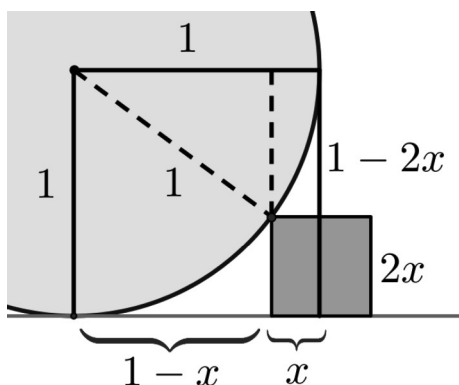
Por lo tanto, la cantidad de canguros color oro es 8.

Problema 104. Un cuadrado se ajusta perfectamente entre la línea horizontal y dos círculos tangentes de radio 1. ¿Cuál es la longitud del lado del cuadrado?



Solución

Sea $2x$ la medida del lado del cuadrado, como el radio de los círculos es 1 podemos establecer las siguientes medidas:



Utilizando el teorema de Pitágoras, se tiene que:

$$\begin{aligned}(1-x)^2 + (1-2x)^2 &= 1 \\ 1-2x+x^2 + 1-4x+4x^2 - 1 &= 0 \\ 5x^2 - 6x + 1 &= 0\end{aligned}$$

Resolviendo la ecuación cuadrática obtenemos las soluciones $x_1 = \frac{1}{5}$ y $x_2 = 1$, pero x no puede ser 1, de ser así, no existirían los círculos, luego $x = \frac{1}{5}$. Finalmente el lado del cuadrado mide $\frac{2}{5}$.

Problema 105. Tomás quiere escribir varios números enteros positivos distintos, ninguno de ellos mayor a 100. Por otra parte el producto de todos estos números no debe ser divisible por 54. ¿Cuál es el máximo número de enteros que logra escribir?

Solución

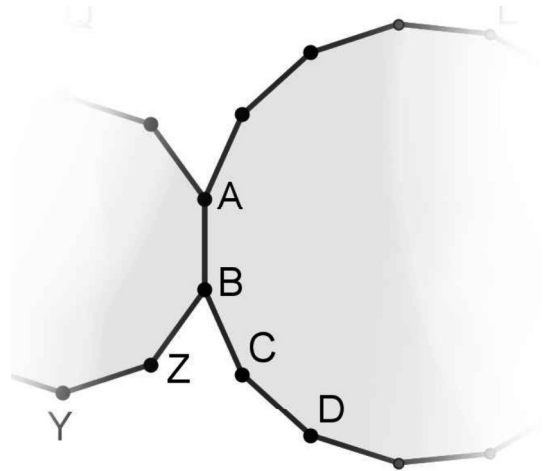
Se trata de eliminar del producto $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 99 \cdot 100$ la menor cantidad de factores, tal que 54 no sea divisor del número resultante.

Notemos que $54 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2$ por lo que en el producto de todos los números que escribamos puede tener el 3 como factor dos veces a lo más,

ya que con un tercer múltiplo de tres y un número par, el número sería divisible por 54, y como de 1 a 100 hay 33 múltiplos de 3, eliminamos 31 de ellos, dejando solo 2, los cuales no pueden ser múltiplos de 9 ni de 27, por ejemplo dejamos 3 y 15. De esta forma nos aseguramos de que nunca $3 \cdot 3 \cdot 3$ sea un factor, y así podemos dejar en el producto todos los números pares que no son múltiplos de 3. Como de 1 a 100 hay 100 números, y ya quitamos 31, quedan 69 números enteros.

Finalmente el máximo número de enteros que logra escribir es 69.

Problema 106. Dos polígonos regulares de lado 1 tienen en común el lado AB . Uno de ellos $ABCD \dots$ tiene 15 lados y el otro $ABZY \dots$ tiene n lados. ¿Qué valor de n hace que la distancia CZ sea igual a 1?



Solución

Claramente el triángulo BCZ debe ser equilátero de lado 1. Por otra parte la medida de cada uno de los ángulos interiores de un polígono de 15 lados es $\frac{180(15-2)}{15} = 156^\circ$, luego $\angle ABC = 156^\circ$. Además sabemos que:

$$\begin{aligned}\angle ABC + \angle CBZ + \angle ZBA &= 360^\circ \\ 156^\circ + 60^\circ + \angle ZBA &= 360^\circ \\ \angle ZBA &= 144^\circ\end{aligned}$$

Por lo tanto el polígono de n lados cumple que:

$$\frac{180 \cdot (n-2)}{n} = 144$$

Resolviendo la ecuación obtenemos que $n = 10$.

Problema 107. Las igualdades $k = (2014 + m)^{\frac{1}{n}} = 1024^{\frac{1}{n}} + 1$ son dadas para enteros positivos k, m, n . ¿Cuántos valores diferentes puede tomar la cantidad m ?

Solución

Claramente para que k sea entero $1024^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{1024} = \sqrt[n]{2^{10}}$ debe ser entero, esto se cumple solo si, $n = 2, n = 5$ o $n = 10$. Analicemos estos tres casos:

1. Si $n = 2 \implies$

$$\begin{aligned}\sqrt{2014 + m} &= \sqrt{1024} + 1 \\ \sqrt{2014 + m} &= 33 \\ 2014 + m &= 33^2 \\ m &= 1089 - 2014 \\ m &= -915\end{aligned}$$

2. Si $n = 5 \implies$

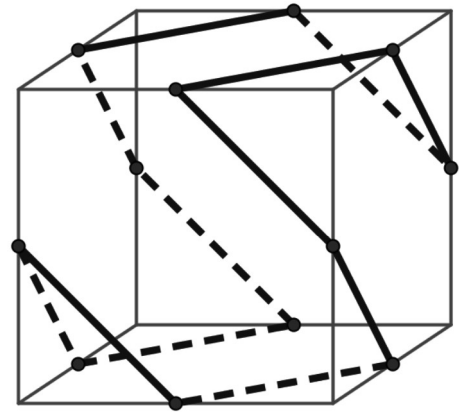
$$\begin{aligned}\sqrt[5]{2014 + m} &= \sqrt[5]{1024} + 1 \\ \sqrt[5]{2014 + m} &= 5 \\ 2014 + m &= 5^5 \\ m &= 3125 - 2014 \\ m &= 1111\end{aligned}$$

3. Si $n = 10 \implies$

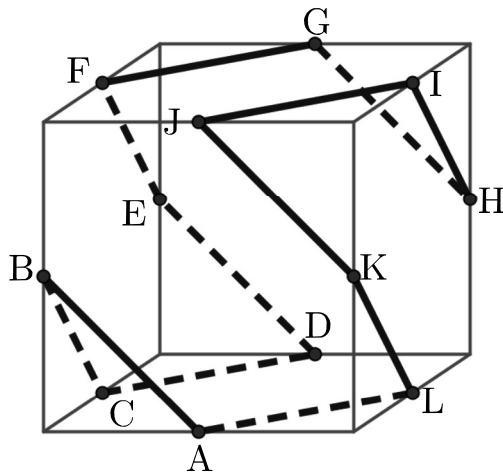
$$\begin{aligned}\sqrt[10]{2014 + m} &= \sqrt[10]{1024} + 1 \\ \sqrt[10]{2014 + m} &= 3 \\ 2014 + m &= 3^{10} \\ m &= 59049 - 2014 \\ m &= 57035\end{aligned}$$

Como m es un entero positivo concluimos que solo puede tomar 2 valores distintos, $m_1 = 1111$ y $m_2 = 57035$.

Problema 108. El diagrama muestra una poligonal cuyos vértices son los puntos medios de las aristas de un cubo. Un ángulo interior de la poligonal está definido de la forma habitual: el ángulo entre los dos bordes se encuentran en un vértice. ¿Cuál es la suma de todos los ángulos interiores de la poligonal?



Solución



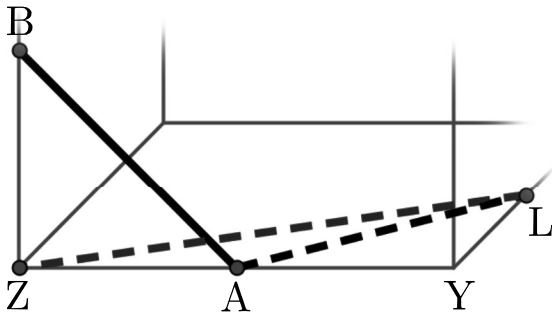
Notemos que:

- $AB = BC = CA \Rightarrow \triangle ABC$ es equilátero $\Rightarrow \angle ABC = 60^\circ$.
- $GH = HI = IG \Rightarrow \triangle GHI$ es equilátero $\Rightarrow \angle GHI = 60^\circ$.
- $EF = FG = GE \Rightarrow \triangle EFG$ es equilátero $\Rightarrow \angle EFG = 60^\circ$.

Además

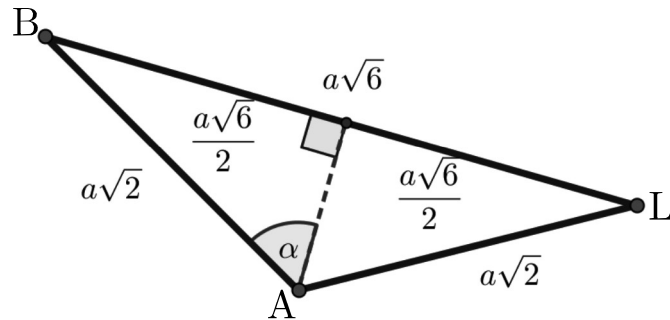
- $AB = AL \Rightarrow \triangle ABL$ es isósceles.
- $BC = CD \Rightarrow \triangle BCD$ es isósceles.
- $DE = EF \Rightarrow \triangle DEF$ es isósceles.
- $LK = KJ \Rightarrow \triangle LKJ$ es isósceles.
- $EF = FG \Rightarrow \triangle EFG$ es isósceles.
- $KJ = JI \Rightarrow \triangle KJI$ es isósceles.

Además, estos 6 triángulos nombrados anteriormente son congruentes. Sea $2a$ el lado del cubo. Entonces $\triangle BZA$ y $\triangle AYL$ son rectángulos isósceles, de modo que $BA = AL = \sqrt{2}a$.



Además $\triangle ZYL$ es rectángulo de catetos $2a$ y a , por lo que su hipotenusa $ZL = \sqrt{5}a$. Observemos también que $\triangle BZL$ es rectángulo de catetos a y $\sqrt{5}a$, luego su hipotenusa $BL = \sqrt{6}a$.

El triángulo BAL es isósceles, es fácil notar que la altura marcada en la figura es $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, por lo que el triángulo BAL está compuesto por dos triángulos, cuyos ángulos son 30° , 60° y 90° . Por lo tanto $\alpha = 60^\circ$.



Por último concluimos que:

$$\angle BAL = \angle BCD = \angle FED = \angle FGH = \angle JKL = \angle JIH = \angle FGH = 120^\circ$$

Finalmente la suma de los ángulos interiores del polígono es $120 \cdot 6 + 60 \cdot 6 = 1080^\circ$.

Problema 109. La función $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ satisface las condiciones $f(4) = 6$ y $x \cdot f(x) = (x - 3) \cdot f(x + 1)$. ¿Cuál es el valor de $f(4) \cdot f(7) \cdot f(10) \cdot \dots \cdot f(2011) \cdot f(2014)$?

Solución

Notemos que

$$x \cdot f(x) = (x - 3) \cdot f(x + 1) \implies f(x) = \frac{(x - 3)}{x} \cdot f(x + 1).$$

Además $f(4) = 6 = 2 \cdot 3$, luego:

$$\blacksquare f(4) = \frac{1}{4} \cdot f(5) \implies f(5) = f(4) \cdot 4 = 2 \cdot 3 \cdot 4$$

$$\begin{aligned}
& \blacksquare f(5) = \frac{2}{5} \cdot f(6) \implies f(6) = f(5) \cdot \frac{5}{2} = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{5}{2} = 3 \cdot 4 \cdot 5 \\
& \blacksquare f(6) = \frac{3}{6} \cdot f(7) \implies f(7) = f(6) \cdot \frac{6}{3} = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{6}{3} = 4 \cdot 5 \cdot 6 \\
& \blacksquare f(7) = \frac{4}{7} \cdot f(8) \implies f(8) = f(7) \cdot \frac{7}{4} = 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \frac{7}{4} = 5 \cdot 6 \cdot 7 \\
& \blacksquare f(8) = \frac{5}{8} \cdot f(9) \implies f(9) = f(8) \cdot \frac{8}{5} = 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \frac{8}{5} = 6 \cdot 7 \cdot 8 \\
& \blacksquare f(9) = \frac{6}{9} \cdot f(10) \implies f(10) = f(9) \cdot \frac{9}{6} = 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot \frac{9}{6} = 7 \cdot 8 \cdot 9 \\
& \vdots \\
& \blacksquare f(2013) = \frac{2010}{2013} \cdot f(2014) \implies f(2014) = 2011 \cdot 2012 \cdot 2013
\end{aligned}$$

De este modo:

$$f(4) \cdot f(7) \cdot f(10) \cdot \dots \cdot f(2011) \cdot f(2014) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2013 = 2013!$$

Problema 110. En los bosques de una isla mágica viven tres tipos de animales: leones, lobos y cabras. Los lobos pueden comer cabras, y los leones pueden comer lobos o cabras. Sin embargo, siendo esta una isla mágica, si un lobo se come una cabra, se convierte en león. Si un león se come una cabra, se convierte en lobo. Si un león se come un lobo, se convierte en una cabra. Originalmente, había 17 cabras, 55 lobos y 6 leones en la isla. En algún momento quedará un cierto número de animales que no podrá comerse entre ellos. ¿Cuál es el mayor número de animales que puede quedar en la isla?

Solución

Observemos que después de un tiempo, solo sobrevivirá uno de los tres tipo de animales, claramente sobrevivirán los leones cuyo número debemos maximizar. En una primera iteración nos damos cuenta que el número máximo de leones debe ser 23, ya que la única manera de que los otros animales se transformen en leones, es que los lobos se coman la totalidad de las cabras, es decir, 17 lobos se comen 17 cabras obteniendo 23 leones y 38 lobos. Luego existen muchas formas de mantener la cantidad máxima de 23 leones, siendo la más evidente la de iterar de la siguiente manera:

Leon	Lobo	Cabra
23	38	0
22	37	1
23	36	0
22	35	1
23	34	0
...	...	
23	2	0
23	1	1
23	0	0