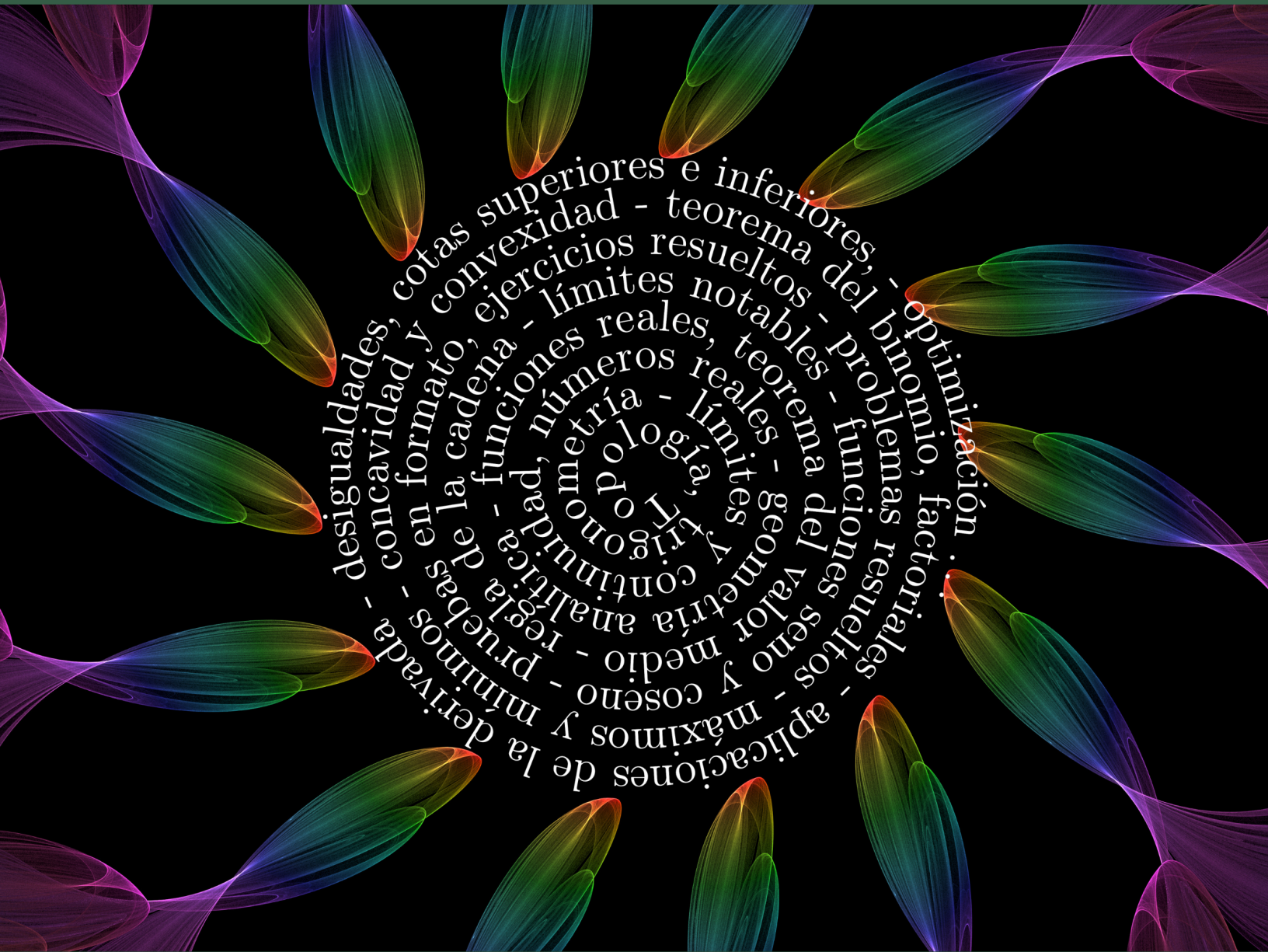


MATEMÁTICA

Resueltos

VOLUMEN 5



PEDRO H. VALENZUELA T. 2024

Introducción

Tener un texto de problemas resueltos es siempre un gran alivio a la hora de preparar una prueba. Uno de los objetivos de este texto es justamente ése, proporcionar un instrumento de apoyo con indicaciones de como enfrentar diversos problemas que guarden relación con un primer o segundo curso de matemática universitaria. Se espera que las sugerencias dadas y las indicaciones y comentarios que se realizan sean tomados con humor, de lo cual hay algunas ráfagas a lo largo del libro. Cualquiera mortal se puede preguntar ¿Qué gracias tiene este libro? La respuesta es simple; son problemas que se han aplicado a estudiantes de la Universidad y de diferentes carreras, se puede agregar que hay un “montón” de ellos resueltos, usando una metodología adecuada a los desarrollos, sin quitar rigor matemático. ¿Qué se espera del texto? que te sea útil, que te ayude a enfrentar de mejor forma cualquier problema, y que te sirva de modelo de comparación con otros métodos de trabajo.



Los contenidos guardan relación con los tradicionales de un curso de matemática universitaria.

- El capítulo I contiene problemas relacionados con los Números Reales. Hay algunas demostraciones, se trabaja fuertemente la ley de tricotomía para resolver desigualdades, se resuelven problemas sobre operatoria algebraica en los reales, no se han olvidado los logaritmos, hay problemas relacionados con Inducción y Teorema del Binomio. Hay también algo de problemas resueltos de topología en los reales.
- El capítulo II guarda relación con las Funciones Reales y la Geometría Analítica; hay problemas de transformaciones gráficas, se trabajan la recta, las cónicas y los lugares geométricos. Hay problemas resueltos sobre las funciones exponencial y logaritmo, se concluye con problemas sobre las funciones trigonométricas, ejercitando identidades, ecuaciones y gráficas.
- En el capítulo III se entra de lleno al estudio del Cálculo Diferencial, es el más “sabroso”, toda la magia del cálculo empieza a aparecer, partiendo con límites y siguiendo con la continuidad (un

acontecimiento notable para un mechón).

- El capítulo IV es para las derivadas y sus aplicaciones. Derivar funciones es un proceso simple, pero se debe entender que ella representa a la pendiente de la recta tangente o bien a la velocidad instantánea de un móvil. La regla de la cadena es la herramienta fundamental. En las aplicaciones aparece el Marqués de L'Hôpital que con sus reglas para calcular límites nos hace parecer “invencibles” para calcular límites. La derivada permite hacer gráficas aproximadas de muchas funciones y resolver problemas de optimización, en esto último, no solo hay que saber leer, si no que “comprender” lo que se lee.
- El capítulo V proporciona muchas pruebas de años anteriores y también recientes, aplicadas a carreras como Ingenierías, Bioquímica y también a Química y Farmacia.

No ha sido fácil recopilar la información ni menos poner cada problema en el editor LATEX, ni que decir de los gráficos, se hizo lo que se pudo. En el mismo sentido, si hay errores, no es intencionado, puede que ser que el dedo apretó la tecla equivocada. Piensalo así; descubrir errores es parte de la vida, aprende a trabajar en grupo, así tus errores y los de tus compañeros podrán ser detectados. Si te queda tiempo puedes enviar un correo al autor.

No puedo dejar de agradecer a quienes hojearon los apuntes previos (año 2000), hicieron correcciones y con ello mejoraron la redacción. En primer lugar mil gracias a la profesora Judith A. Vergara C. (la morena) quien se dió el trabajo de leer todo el texto. A mis colegas que lo usan, promocionan y me hacen sugerencias, entre ellos Ricardo Leal, Abdón Catalán.

La propiedad intelectual de este texto no es solo del autor, las pruebas se confeccionan en grupos de trabajo en forma semestral. Pero para no hacer conflictos, que mejor que sea el glorioso Departamento de Matemática y Estadística el dueño de todos los derechos, mal que mal, se pone con el billete.

Dedico este texto a todos mis ex alumnos que han tenido la “suerte” de haber sufrido en carne propia cada una de estas pruebas y sobrevivir a ellas. También se lo dedico a las nuevas generaciones, que con su “inmaculada inocencia” serán los mártires del mañana.

En Temuco querido, Enero de 2024

Índice general

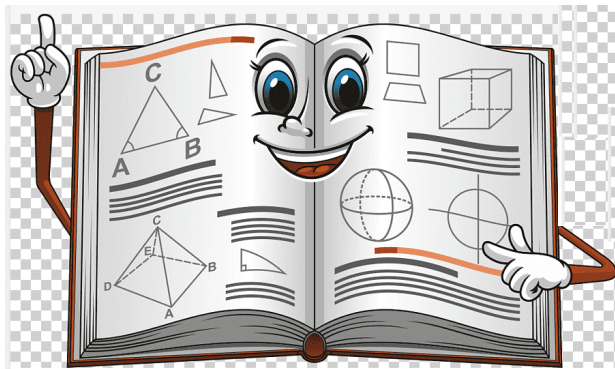
1	Los Reales: memorias de un mechón	1
1.1	Introducción	1
1.1.1	Axiomas de Cuerpo y Orden	2
1.2	La Fiesta de los Reales	4
1.3	Potencias, raíces y ecuaciones algebraicas	6
1.3.1	Factorización de polinomios	8
1.3.2	Fracciones algebraicas	12
1.3.3	Desigualdades	14
1.3.4	Cotas, supremo, ínfimo, máximo y mínimo	23
1.3.5	Factoriales - Inducción - Teorema del Binomio	25
1.3.6	Logaritmos	33
1.3.7	Topología	34
1.4	Problemas Propuestos	39
2	Analítica y Funciones	45
2.1	Introducción	45
2.1.1	Analítica	45
2.1.2	Transformaciones algebraicas de funciones	53
	Traslaciones horizontales y verticales de una función	53
2.1.3	Reflexiones	55
	Contracción y alargamiento	56
	Gráfico de $f(x)$ y de $f(kx)$	57
	Gráfico de $f(x)$ y de $f(x)$	58

	Gráfico de $f(x)$ y de $ f(x) $	58
2.1.4	Trigonometría	59
	Gráfica de $y = A \cdot \cos[\omega(x - \alpha)] + C$	63
2.2	Problemas Propuestos	68
	Geometría Analítica	68
2.2.1	Funciones lineales y cuadráticas	70
2.2.2	Funciones racionales y radicales	71
2.2.3	Funciones exponencial y logaritmo	72
	Trigonometría	74
3	Límite y Continuidad ...	77
3.1	Introducción	77
3.2	Sucesiones	77
	Algebra de infinitos	78
3.3	Límite de Funciones	87
3.3.1	Infinitésimos	100
3.4	Continuidad	102
3.5	Problemas Varios	104
3.5.1	Funciones	106
3.5.2	Continuidad	108
4	Derivadas y Aplicaciones	111
4.1	Introducción	111
4.1.1	Derivadas	112
4.1.2	Tangentes ... y otras cositas	122
4.1.3	Rolle, TVM ... y algo más	127
4.1.4	Gráficas.. con derivadas	133
4.1.5	Reglas de L'Hôpital	140
4.1.6	Problemas de Optimización	143
4.2	Problemas Propuestos	148
5	Pruebas resueltas y más	155
5.1	Pruebas sin desarrollo	249
	Soluciones a los Ejercicios	292

1. Los Reales: memorias de un mechón



1.1 Introducción



*Cuando se es mechón, ¡qué tiempos aquellos!, casi todo en la Universidad sorprende, en primer lugar la **libertad** casi absoluta, los grandes espacios, la cantidad de gente. etc. Dicen que después de la tempestad (“mechoneo”) viene la calma, no es para tanto, **primera clase de Cálculo o Matemática** según sea el caso, los Números Reales, con el solo título uno cree que son de verdad, que el profe los va a mostrar uno tras otro desfilando en la pizarra, pero no, que ingenuidad. El profe saluda, como que nos dá la bendición*

*por haber entrado a la Universidad, y lo primero relacionado con Matemática que nos deja caer es el término **AXIOMA**, para decirnos que un tal Hilbert axiomatizó el conjunto de los números reales lo cual distingue su estudio entre el Cálculo y el Algebra.*

AXIOMA: verdad absoluta, infalible, verdad sin demostración pero verdad, verdad porque sí

En una semana se fueron los reales con sus intervalos, valor absoluto, desigualdades, supremo e ínfimo, teorema del binomio y la famosa topología.

Me puse a estudiar con ahínco y me armé unos apuntes a la pinta. Busqué varios libros, entre ellos, por supuesto el “Fundamentos de matemática universitaria”, con éste ni me moví de mi escritorio, está

toda la materia “a la pata”. Me transformé en un **ph2**, y lo que resultó de esto fueron los siguientes ejemplos que de alguna manera me orientaron en la resolución de problemas, ya que después de haber estudiado y crearme listo para la prueba, me asaltó la siguiente duda ¿Qué tipo de problemas son los que me pueden preguntar sobre números reales y como me debo preparar para responder? Saqué la cuenta y anoté, lo primero que debo saber manejar son las propiedades de los reales, que se resumen en una frase ¡ $\mathbb{R}$ **cuerpo ordenado y completo**!!, así lo hice.

1.1.1 Axiomas de Cuerpo y Orden

En este tipo de problemas lo único que te pueden preguntar es un “probar” o “demostrar”, palabras que producen, en cualquier mortal, ansias por salir arrancando de la prueba. Veamos entonces de que se trata todo esto.

Problema 1.1 Probar que $(a^{-1})^{-1} = a$

En toda demostración se debe partir de uno de los lados de la igualdad para, mediante definiciones, axiomas, teoremas y proposiciones, llegar al otro. Las formas de demostrar son directa o indirecta ¹.

En esta primera parte de los reales se está muy limitado en las demostraciones pues sólo se debe hacer uso de lo visto en este contexto. Es cierto que alguien puede ver en el problema como -una potencia elevada a potencia- y ya está, pero nos salimos del contexto por que aún no se han visto potencias. Como a^{-1} es el inverso de a , entonces debemos iniciar nuestro trabajo apuntando a ese hecho puntual. La propiedad dice que para todo elemento, no nulo, $a \in \mathbb{R}$ existe un elemento a^{-1} tal que

$$a \cdot a^{-1} = 1$$

Como ello es válido **para todo** número real $a \neq 0$, debe quedar claro que cualquiera sea el a la propiedad se sigue cumpliendo. No hay que tener “miedo”, el a puede tener muchos disfraces, por ejemplo, con $a = x + y$, $x, y \in \mathbb{R}$, la propiedad toma la forma

$$(x + y) \cdot (x + y)^{-1} = 1$$

Si observamos bien el problema, uno de los a con el que nos conviene experimentar es $a = x^{-1}$, ya que entonces la propiedad toma la forma

$$x^{-1} \cdot (x^{-1})^{-1} = 1$$

una mirada serena y lúcida nos hace ver que “apareció” el miembro izquierdo de la igualdad original en esta última expresión. Para dejarle solo hacemos lo que sigue

$$\begin{aligned} x^{-1} \cdot (x^{-1})^{-1} &= 1 \\ (x \cdot x^{-1}) \cdot (x^{-1})^{-1} &= x \cdot 1, & x \text{ a la izquierda} \\ 1 \cdot (x^{-1})^{-1} &= x, & \text{propiedad del 1} \\ (x^{-1})^{-1} &= x, \end{aligned}$$

Al considerar $x = a$ se prueba la proposición.

¹Fundamentos de matemática universitaria-pág 20

Problema 1.2 Probar que $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$.

De nuevo aparecen involucrados los inversos. Si se observa bien, el inverso de $(a \cdot b)^{-1}$ es $(a \cdot b)$. Luego, por propiedad de inverso multiplicativo se tiene

$$(a \cdot b) \cdot (a \cdot b)^{-1} = 1$$

Se sigue que

$$\begin{aligned} (a \cdot b) \cdot (a \cdot b)^{-1} &= 1 \\ a^{-1} \cdot (a \cdot b) \cdot (a \cdot b)^{-1} &= a^{-1} \cdot 1 && a^{-1} \text{ a la izquierda} \\ (a^{-1} \cdot a) \cdot b \cdot (a \cdot b)^{-1} &= a^{-1} && \text{asociatividad y propiedad del 1} \\ 1 \cdot b \cdot (a \cdot b)^{-1} &= a^{-1} && \text{inverso multiplicativo} \\ b \cdot (a \cdot b)^{-1} &= a^{-1} && \text{propiedad del 1} \\ (b^{-1} \cdot b) \cdot (a \cdot b)^{-1} &= b^{-1} \cdot a^{-1} && b^{-1} \text{ por izquierda} \\ 1 \cdot (a \cdot b)^{-1} &= b^{-1} \cdot a^{-1} && \text{inverso multiplicativo} \\ (a \cdot b)^{-1} &= b^{-1} \cdot a^{-1} && \text{propiedad del 1} \end{aligned}$$

Problema 1.3 Probar que $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$.

Esta es la ley de la suma de fracciones, es fácil de recordar, para igualar denominadores la primera fracción se multiplicó por $1 = \frac{d}{d}$ y la segunda por $1 = \frac{b}{b}$ y después se suman fracciones de igual denominador. Otra forma común de recordar esto es por medio de la multiplicación cruzada.

La notación de fracciones es equivalente a la de inversos. Se tiene

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} + \frac{c}{d} &= a \cdot b^{-1} + c \cdot d^{-1} && \text{definición} \\ &= (a \cdot b^{-1}) \cdot (d \cdot d^{-1}) + (c \cdot d^{-1}) \cdot (b \cdot b^{-1}) && \text{axioma} \\ &= (a \cdot b^{-1}) \cdot (d^{-1} \cdot d) + (c \cdot d^{-1}) \cdot (b^{-1} \cdot b) && \text{axioma} \\ &= a(b^{-1} \cdot d^{-1})d + c(d^{-1} \cdot b^{-1})b && \text{axioma} \\ &= (a \cdot d)(b^{-1} \cdot d^{-1}) + (b \cdot c)(d^{-1} \cdot b^{-1}) && \text{axioma} \\ &= (a \cdot d)(d^{-1} \cdot b^{-1}) + (b \cdot c)(d^{-1} \cdot b^{-1}) && \text{axioma} \\ &= [(a \cdot d) + (b \cdot c)] \cdot (d^{-1} \cdot b^{-1}) && \text{axioma} \\ &= [(a \cdot d) + (b \cdot c)] \cdot (b \cdot d)^{-1} && \text{Problema 2} \\ &= [(a \cdot d) + (b \cdot c)] \cdot \frac{1}{bd} && \text{definición} \\ &= \frac{ad + bc}{bd} && \text{definición} \end{aligned}$$

Problema 1.4 Demostrar que $x \neq 0 \implies x^2 > 0$.

Las demostraciones de la forma $P \implies Q$ se pueden hacer en forma directa o indirecta, todo depende de lo que sea más sencillo. Hacemos una demostración directa. La ley de tricotomía establece que cualquier número real tiene sólo tres alternativas: O es positivo, O es negativo, O es el cero. Como $x \neq 0$, le quedan dos alternativas, que sea $x < 0$ o bien que $x > 0$. La demostración es por casos:

caso $x < 0$:

$$\begin{array}{ll} x < 0 \implies -x > 0 & \text{propiedad} \\ -x > 0 \wedge -x > 0 \implies (-x)(-x) > 0 & \text{clausura de } \mathbb{R}^+ \end{array}$$

Se deduce que $(-x)(-x) = x^2 > 0$. En este paso está aplicada la ley de los signos

caso $x > 0$:

$$x > 0 \implies (x > 0) \cdot (x > 0) = x^2 > 0 \quad \text{clausura de } \mathbb{R}^+$$

De esta forma, en ambos casos, se cumple que $x^2 > 0$. En consecuencia, la afirmación es verdadera.

1.2 La Fiesta de los Reales



¡Hoy estamos de fiesta!, quiero invitar a las potencias, raíces y fracciones a compartir un agradable momento con el común denominador, el factor común, la suma, la resta, la multiplicación y la división. Tú puedes participar ordenando y distribuyendo a estos invitados, asignando labores que deben cumplir, etc. Como se trata de una fiesta de seguro que te traerá más de algún recuerdo.

EJERCICIO 1. Los siguientes invitados entraron “disfrazados”. Tu tarea es descubrir quienes son:

- | | |
|--|--|
| (a) Un número cualquiera | (b) El cuadrado de la resta de dos números |
| (c) El producto de x y 10 disminuído en 20 | (d) La suma del cuadrado de dos números |
| (e) El cuadrado de la suma de dos números | (f) El inverso multiplicativo de un número |
| (g) El recíproco de la suma de dos números | (h) El número dos elevado a un número |
| (i) la raíz cuadrada de la suma de dos números | (j) Un número mayor o igual que 20 |
| (k) El cuadrado del triple de un número | (l) El triple del cuadrado de un número. |

EJERCICIO 2. En un momento de la fiesta entran un montón de invitados. Te corresponde identificarlos por separado, desarrollando:

- | | |
|---------------------------------------|---|
| (a) $(p + 5n)^2 = \dots\dots\dots$ | (b) $(2a + 3b)^2 = \dots\dots\dots$ |
| (c) $(a - 7b)^2 = \dots\dots\dots$ | (d) $(2a + b)(2a - b) = \dots\dots\dots$ |
| (e) $(x - y + 2)^2 = \dots\dots\dots$ | (f) $(x + 5)(x + 3) = \dots\dots\dots$ |
| (g) $(x + 5)^3 = \dots\dots\dots$ | (h) $(x - 4) \cdot (x + 4) = \dots\dots\dots$ |

EJERCICIO 3. Cuando la fiesta estaba en lo mejor la orquesta llamó a un concurso de baile por parejas. Identifica las parejas que se juntaron, factorizando:

(a) $8xz + 12xw = \dots\dots$

(b) $12ab + 18ac - 30ad = \dots\dots$

(c) $9x^2 - 16y^2 = \dots\dots\dots$

(d) $a^2b^4 - w^2 = \dots\dots\dots$

(e) $ax + ay - x - y = \dots\dots\dots$

(f) $x^2 + 4y^2 + 4xy + x + 2y = \dots\dots$

EJERCICIO 4. En un momento algunos invitados se ponen “revoltosos”. El único remedio es **reducirlos** por la fuerza.

(a) $\frac{ax - ay - x + y}{ax + ay - x - y} =$

(b) $\frac{(a-b)^2 - c^2}{a^2 - (b+c)^2} =$

(c) $\left(1 - \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}\right) \cdot \left(\frac{x-y}{x+y} - \frac{x+y}{x-y}\right)^{-1}$

EJERCICIO 5. Por lo general, las orquestas son super revoltosas. En otro momento pidieron que se juntaran de a tres para formar un cuadrado perfecto. Adivina quienes se juntaron:

(a) $y^2 - 18y + \dots = \dots$

(b) $a^2 + \dots + 64b^2 = \dots$

(c) $\dots - 30y + 25 = \dots$

EJERCICIO 6. En un rincón se juntaron un “lote” de irracionales y empezaron a hacer desorden. Trata de **reducirlos** al máximo

(a) $24x^2\sqrt{45a^3} + 6x\sqrt{5a}$

(c) $\sqrt{\frac{2(a^2 + b^2)^2}{c^2} - \frac{2(a^2 - b^2)^2}{c^2}} =$

(b) $\sqrt{xy} \left(\sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}} \right) =$

(d) $\left(\sqrt{\frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{y}} \right) \left(\sqrt{\frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{y}} \right) =$

EJERCICIO 7. Tal como ocurre en toda fiesta, llegó el momento de hacer un “trecito”. Encuentra a los “desordenados” x que comandaban el lote.

(a) $\frac{7}{2x} - \frac{8}{3x} + \frac{9}{4x} - \frac{1}{3} = \frac{31 - 7x}{6x} \implies$

(b) $(2x - 9)^2 + (3x - 14)^2 = (x - 1)^2 \implies$

(c) $\sqrt{1 + 4\sqrt{x}} = 1 + \sqrt{x} \implies$

EJERCICIO 8. Al terminar la fiesta, el locutor da a conocer una adivinanza, quien le acierte tendrá entrada liberada en la próxima.

- (a) Un grupo de amigos pertenecientes a los números **enteros** se divirtieron y lo pasaron super bacán. A la hora de pedir la cuenta decidieron pagarla en partes iguales (¡qué buen ejemplo!). Aquí empezaron los problemas, pues, si cada uno colocaba \$ 8000 faltan \$ 2000, y si cada uno ponía \$ 9000 sobran \$ 4000 ¿Cuántos amigos eran y cuál el monto a pagar?

1.3 Potencias, raíces y ecuaciones algebraicas

Los axiomas de cuerpo permiten trabajar todo lo referente a expresiones algebraicas.

Problema 1.5 Simplificar $\left(\frac{3}{2} - \frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{4}\right)^{-1}$

Hay que trabajar primero los paréntesis

$$\left(\frac{3}{2} - \frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{4}\right)^{-1} = \left(\frac{9-4}{6}\right) \cdot \left(\frac{6+1}{4}\right)^{-1}$$

Por tratarse de fracciones, recordar que ellas se puede sumar o restar si tienen igual denominador. Por ello se saca el mínimo común múltiplo. Nos queda

$$\left(\frac{9-4}{6}\right) \cdot \left(\frac{6+1}{4}\right)^{-1} = \frac{5}{6} \cdot \left(\frac{7}{4}\right)^{-1} = \frac{20}{42} = \frac{10}{21}$$

Se usó la propiedad de invertir el denominador para dividir fracciones y transformarla en un producto.

Problema 1.6 Desarrollar y luego simplificar el producto $(x+1)(x+2)(x+3)$

La ley asociativa dice que primer puedo multiplicar dos expresiones, y su resultado multiplicarlo por la tercera. Tenemos

$$(x+1)(x+2)(x+3) = [(x+1)(x+2)](x+3) = [x^2 + 3x + 2] \cdot (x+3)$$

Aplicamos ley distributiva

$$\begin{aligned} (x+1)(x+2)(x+3) &= [x^2 + 3x + 2] \cdot x + [x^2 + 3x + 2] \cdot 3 \\ &= x^3 + 3x^2 + 2x + 3x^2 + 9x + 6 \\ &= x^3 + 6x^2 + 11x + 6 \end{aligned}$$

Problema 1.7 Simplificar al máximo las siguientes expresiones:

$$\blacksquare \frac{\sqrt[3]{a^{5/7}} \cdot \sqrt{a}}{\sqrt[5]{a^{2/3}} \cdot \sqrt[4]{a^{2/5}}} \quad \blacksquare \frac{1}{a} \sqrt{\frac{ab^2}{4}} + 3b \sqrt{\frac{1}{4a}} - \frac{1}{a} \sqrt{ab^2}$$

(1) Le tengas o no temor a las raíces, lo mejor es trabajar con potencias. Recuerda que $\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$

$$\frac{\sqrt[3]{a^{5/7}} \cdot \sqrt{a}}{\sqrt[5]{a^{2/3}} \cdot \sqrt[4]{a^{2/5}}} = \frac{(a^{5/7})^{1/3} \cdot a^{1/2}}{(a^{2/3})^{1/5} \cdot (a^{2/5})^{1/4}}$$

Ahora, multiplicación de potencias de igual base suma los exponentes y mantiene la base.

$$\frac{(a^{5/7})^{1/3} \cdot a^{1/2}}{(a^{2/3})^{1/5} \cdot (a^{2/5})^{1/4}} = \frac{a^{5/21} \cdot a^{1/2}}{a^{2/5} \cdot a^{2/20}} = \frac{a^{5/21+1/2}}{a^{2/5+1/10}}$$

Sacando comunes denominadores en los exponentes tenemos que

$$\frac{a^{5/21+1/2}}{a^{2/5+1/10}} = \frac{a^{31/42}}{a^{5/10}}$$

Que aún podemos reducir utilizando el hecho de que la base es la misma y que al dividir se restan los exponentes

$$\frac{a^{31/42}}{a^{5/10}} = a^{31/42-1/2} = a^{52/42} = a^{26/21}$$

(2) Pasamos todo a potencia

$$\frac{1}{a} \sqrt{\frac{ab^2}{4}} + 3b \sqrt{\frac{1}{4a}} - \frac{1}{a} \sqrt{ab^2} = \frac{1}{a} \left(\frac{ab^2}{4} \right)^{1/2} + 3b \left(\frac{1}{4a} \right)^{1/2} - \frac{1}{a} (ab^2)^{1/2}$$

Ahora usamos la propiedad $\frac{1}{x} = x^{-1}$ para tener

$$\frac{1}{a} \left(\frac{ab^2}{4} \right)^{1/2} + 3b \left(\frac{1}{4a} \right)^{1/2} - \frac{1}{a} (ab^2)^{1/2} = a^{-1} \cdot \frac{(ab^2)^{1/2}}{2} + 3b \cdot (4a)^{-1/2} - a^{-1} \cdot (ab^2)^{1/2}$$

de lo cual,

$$a^{-1} \cdot \frac{(ab^2)^{1/2}}{2} + 3b \cdot (4a)^{-1/2} - a^{-1} \cdot (ab^2)^{1/2} = \frac{1}{2} a^{-1/2} b + 3 \cdot 4^{-1/2} b a^{-1/2} - a^{-1/2} b$$

Problema 1.8 Simplificar las siguientes expresiones radicales.

1. $\sqrt{12x} + \sqrt{75x} - \sqrt{27x} + \sqrt{48x}$

2. $\sqrt{18x} + \sqrt{50x} - \sqrt{32x} + \sqrt{72x}$

a) En esta clase de problemas hay que escribir la cantidad subradical de manera que se pueda obtener su raíz.

$$\sqrt{12x} + \sqrt{75x} - \sqrt{27x} + \sqrt{48x} = \sqrt{4 \cdot 3 \cdot x} + \sqrt{25 \cdot 3 \cdot x} - \sqrt{9 \cdot 3 \cdot x} + \sqrt{16 \cdot 3 \cdot x}$$

Ahora escribimos calculando las raíces correspondientes

$$\sqrt{4 \cdot 3 \cdot x} + \sqrt{25 \cdot 3 \cdot x} - \sqrt{9 \cdot 3 \cdot x} + \sqrt{16 \cdot 3 \cdot x} = 2\sqrt{3x} + 5\sqrt{3x} - 3\sqrt{3x} + 4\sqrt{3x}$$

Tenemos términos semejantes; todas las raíces tiene en común $\sqrt{3x}$. Luego,

$$\sqrt{12x} + \sqrt{75x} - \sqrt{27x} + \sqrt{48x} = 8\sqrt{3x}$$

b) De manera análoga, escribimos la expresión en forma adecuada para extracción de raíces

$$\sqrt{18x} + \sqrt{50x} - \sqrt{32x} + \sqrt{72x} = 3\sqrt{2x} + 5\sqrt{2x} - 4\sqrt{2x} + 6\sqrt{2x}$$

Al reducir se encuentra que

$$\sqrt{18x} + \sqrt{50x} - \sqrt{32x} + \sqrt{72x} = 10\sqrt{2x}$$

Problema 1.9 Simplificar la expresión $\frac{25 \cdot 8 \cdot 7^7 \cdot 5^4}{3^5 \cdot 25^2 \cdot 5^3 \cdot 49^3}$

Para simplificar una expresión con potencias, deben aplicarse las propiedades de las potencias con el fin agrupar las potencias con la misma base y, posteriormente, eliminar aquellas potencias repetidas tanto en el numerador, como en el denominador.

$$\frac{25 \cdot 8 \cdot 7^7 \cdot 5^4}{3^5 \cdot 25^2 \cdot 5^3 \cdot 49^3} = \frac{5^2 \cdot 2^3 \cdot 7^7 \cdot 5^4}{3^5 \cdot (5^2)^2 \cdot 5^3 \cdot (7^2)^3} = \frac{\cancel{5^6} \cdot 2^3 \cdot \cancel{7^7}}{3^5 \cdot \cancel{5^4} \cdot \cancel{7^6}} = \frac{2^3 \cdot 7}{3^5 \cdot 5}$$

Problema 1.10 Sumar los polinomios $3x^4 + 12x^3 - 4x^2 + 12x + 1$ y $x^4 - x^3 + 3x - 5$

Una forma sencilla y práctica de sumar o restar polinomios es ubicarlos uno debajo del otro, dejando los términos semejantes en la misma columna.

$$\begin{array}{r} 3x^4 + 12x^3 - 4x^2 + 12x + 1 \\ x^4 - x^3 + 0 \cdot x^2 + 3x - 5 \\ \hline 4x^4 + 11x^3 - 4x^2 + 15x - 4 \end{array}$$

Problema 1.11 Hallar el resultado de $(3x+6)(5x^2+3x-10)$

Se hace uso de la propiedad distributiva

$$(3x+6)(5x^2+3x-10) = 3x \cdot (5x^2+3x-10) + 6 \cdot (5x^2+3x-10)$$

Multiplicar polinomios también implica aplicar las reglas de los exponentes.

$$(3x+6)(5x^2+3x-10) = (15x^3+9x^2-30x) + (30x^2+18x-60)$$

Reduciendo términos semejantes

$$(3x+6)(5x^2+3x-10) = 15x^3 + 39x^2 - 12x - 60$$

1.3.1 Factorización de polinomios

Uno de los métodos más empleados es el de *sacar factor común*, que consiste en aplicar la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma, otros, el usar *productos notables*, *teorema del resto*, *regla de Ruffini*.

El teorema del resto afirma que,

el resto r que resulta al dividir un polinomio $p(x)$ entre $x - a$ es igual a $p(a)$

Una consecuencia directa del teorema del resto es que

$(x - a)$ es un factor del polinomio $p(x)$ si y sólo si $p(a) = 0$

El teorema de la **raíz racional** indica que, si existen raíces de la ecuación polinomial con coeficientes enteros:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0, \quad a_n \neq 0, a_0 \neq 0$$

entonces, estas probables raíces, son de la forma $\frac{p}{q}$, en donde

1. p es divisor de a_0

2) q es divisor de a_n

El teorema de la **raíz entera**, caso particular del teorema de la raíz racional, afirma que si el coeficiente principal $a_n = 1$, entonces las raíces enteras, si existen, se hallan entre los divisores de a_0 .

Los problemas más sencillos son factorizar polinomios cuadráticos. Tienes la fórmula que proporciona las raíces

$$ax^2 + bx + c = 0 \implies x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

O bien, si $a = 1$, hallar constantes k_1 y k_2 tales que la suma sea el coeficiente del término que acompaña a x , y el producto de ellos el término constante de la ecuación cuadrática

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \implies x^2 - 3x + 2 = (x - \boxed{2})(x - \boxed{1})$$

Problema 1.12 Hallar el valor de k para que el polinomio $p(x) = x^3 - kx^2 + x - 3$ sea divisible por $x + 2$

Que un polinomio sea divisible por otro significa que el resto de la división es cero. En este caso, es suficiente hallar $p(-2)$.

$$p(-2) = -8 - 4k - 2 - 3 = 0 \implies k = \frac{13}{4}$$

Problema 1.13 Calcular los valores de a y b en el polinomio $p(x) = x^2 + ax + b$ sabiendo que es divisible por $x - 1$ y se anula para $x = -2$.

Hay dos incógnitas, debemos tener dos ecuaciones. La primera proviene del hecho que el polinomio es divisible por $x - 1$

$$p(1) = 1 + a + b = 0 \implies a + b = -1$$

La segunda se saca de la hipótesis de que el polinomio se anula en $x = -2$

$$p(-2) = 0 \implies 4 - 2a + b = 0 \implies 2a - b = 4$$

Al resolver el sistema formado por $a + b = -1$ y $2a - b = 4$, se halla que $a = 1$ y $b = -2$.

Problema 1.14 Calcular los valores de a , b y c en el polinomio $p(x) = ax^3 + 5x^2 + bx + c$, sabiendo que es divisible por $x + 1$, que se anula para $x = 1$, y que el resto de su división por $x - 2$ es 21.

Tenemos tres datos para hallar las 3 incógnitas:

- $p(-1) = -a + 5 - b + c = 0 \implies a + b - c = 5$
- $p(1) = a + 5 + b + c = -5 \implies a + b + c = -5$
- $p(2) = 8a + 20 + 2b + c = 21 \implies 8a + 2b + c = 1$

Al resolver el sistema se halla $a = 1$, $b = -1$ y $c = -5$

Problema 1.15 Factorizar $2x^2 + 3x - 2$

La aplicación de la fórmula nos proporciona la respuesta.

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4}$$

Simplificando; $x = \frac{1}{2}$ y $x = -2$ son las raíces. Luego, la factorización es

$$(x - \frac{1}{2}) \cdot (x + 2) = 0$$

O bien, su equivalente

$$(2x - 1)(x + 2) = 0$$

Problema 1.16 Factorizar $x^3 + 2x^2 - x - 2$

El coeficiente de x^3 es 1, luego, buscamos una raíz entera entre los divisores de -2 . Ellos son $\pm 1, \pm 2$. Ahora usamos teorema del resto

$$p(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2 \implies p(1) = 0$$

El teorema del factor nos dice que $(x - 1)$ es un factor del polinomio dado. Esto significa que la división entre $x^3 + 2x^2 - x - 2$ y $x - 1$ es **exacta** (resto cero). Al dividir tendremos que el polinomio cúbico se ha descompuesto en el producto de un cuadrático y un lineal. En este paso podemos usar Ruffini o hacer la división sintética. te hago las dos y tu eliges.

Para Ruffini el esquema es el siguiente:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & & 1 & 3 & 2 \\ \hline & 1 & 3 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

Para que lo recuerdes, en la primera línea van los coeficientes del polinomio a factorizar, el 1 que antecede a la tabla es el valor que hace cero el polinomio. Abajo, en la segunda columna de la tabla se copia el coeficiente de la máxima potencia, a continuación se procede a multiplicar el 1 que antecede por el 1 de la segunda columna y su resultado (1) se anota en la tercera columna bajo el 2. Luego se suman estos números y su resultado se coloca bajo ellos en la tercera fila, se repite este proceso de ir multiplicando al número que antecede por cada resultado de la suma. Al final, en la última fila aparece el cero, que indica el resto que esperábamos.

Mirando la última fila obtenemos los coeficiente, y por ende, el polinomio cuadrático que es factor del cúbico, esto es, $x^2 + 3x + 2$. Así,

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x - 1) \cdot (x^2 + 3x + 2)$$

Ahora queda ver si el cuadrático tiene raíces reales

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} \implies x = -1 \quad x = -2$$

Estamos listos, factorización completa.

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x - 1)(x + 1)(x + 2)$$

La división sintética es como sigue:

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 2x^2 - x - 2 & : \quad x - 1 \\ \hline -x^3 + x^2 & \\ \hline 3x^2 - x - 2 & \\ -3x^2 + 3x & \\ \hline 2x - 2 & \\ -2x + 2 & \\ \hline 0 & 0 \end{array}$$

Esto significa que podemos escribir

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x - 1)(x^2 + 3x + 2)$$

La cuadrática se puede descomponer como $(x + 1)(x + 2)$. Luego, la factorización total es

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x - 1)(x + 1)(x + 2)$$

Problema 1.17 Dividir $2x^4 - x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ entre $x - 1$

El esquema es

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 2 & -1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & & 2 & 1 & 3 & 0 \\ \hline & 2 & 1 & 3 & 0 & \boxed{1} \end{array}$$

Se deduce que la división no es exacta, pues el resto es 1. Se tiene

$$2x^4 - x^3 + 2x^2 - 3x + 1 = (2x^3 + x^2 + 3x)(x - 1) + 1$$

Problema 1.18 Factorizar $4x^3 + 3x^2 + 8x + 6$

Los divisores de 6 son $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$, y los divisores de 4 son $\pm 1, \pm 2, \pm 4$. Luego, las posibles raíces racionales se encuentran en el conjunto

$$\text{divisores de } \frac{6}{4} = \left\{ \pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}, \pm 2, \pm 3, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{3}{4}, \pm 6, \pm \right\}$$

Como esto es de acierto y error, se halla que $x = -\frac{3}{4}$ es un cero o raíz. Luego, el factor presente es $4x + 3$. Se tiene

$$(4x^3 + 3x^2 + 8x + 6) : (4x + 3) = x^2 + 2 \implies 4x^3 + 3x^2 + 8x + 6 = (4x + 3)(x^2 + 2)$$

La cuadrática es irreducible en los reales, no se puede seguir factorizando en $\mathbb{R}$.

Problema 1.19 Factorizar $x^5 - 7x^4 + 10x^3 + 14x^2 - 24x$

Lo primero que se observa es que es posible factorizar por x

$$x^5 - 7x^4 + 10x^3 + 14x^2 - 24x = x(x^4 - 7x^3 + 10x^2 + 14x - 24)$$

El polinomio de cuarto grado puede tener raíces enteras en el conjunto de divisores de 24, esto es, $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 24\}$. Se halla que $x = 3$ es un cero, de lo cual $(x - 3)$ es un factor. Se tiene

$$x^4 - 7x^3 + 10x^2 + 14x - 24 : x - 3 = x^3 - 4x^2 - 2x + 8$$

Nos queda factorizar la cúbica. En ella podemos agrupar términos

$$x^3 - 4x^2 - 2x + 8 = x^2(x - 4) - 2(x - 4) = (x - 4)(x^2 - 2)$$

Ahora tenemos la factorización completa

$$x^5 - 7x^4 + 10x^3 + 14x^2 - 24x = x(x - 3)(x - 4)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$$

Problema 1.20 Factorizar $x^4 - 5x^2 + 4$

Podemos usar el método anterior, o bien, hacer $z = x^2$ para reducir el polinomio dado en cuadrático.

$$z = x^2 \implies z^2 - 5z + 4 = 0 \implies (z - 4)(z - 1) = 0$$

De esto se sigue que; $z = x^2 = 4 \implies x = \pm 2$. Tenemos los factores $(x - 2)$ y $(x + 2)$. Análogamente $z = x^2 = 1 \implies x = \pm 1$. Tenemos los factores $(x - 1)$ y $(x + 1)$. Por tanto, la factorización es

$$x^4 - 5x^2 + 4 = (x - 2)(x + 2)(x - 1)(x + 1)$$

1.3.2 Fracciones algebraicas

Mostramos como sumar, multiplicar, dividir y simplificar fracciones algebraicas.

Problema 1.21 Hallar $\frac{x^2 + 1}{x - 2} + \frac{x + 1}{x - 1}$

El principio básico y fundamental para poder sumar fracciones es tener un mismo denominador. Igualamos denominadores amplificando la primera fracción por $x - 1$, y la segunda por $x - 2$. Se tiene

$$\frac{x^2 + 1}{x - 2} + \frac{x + 1}{x - 1} = \frac{x^2 + 1}{x - 2} \cdot \frac{x - 1}{x - 1} + \frac{x + 1}{x - 1} \cdot \frac{x - 2}{x - 2}$$

Ahora se puede sumar

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + 1}{x - 2} + \frac{x + 1}{x - 1} &= \frac{(x^2 + 1)(x - 1)}{(x - 2)(x - 1)} + \frac{(x + 1)(x - 2)}{(x - 1)(x - 2)} \\ &= \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{(x - 2)(x - 1)} + \frac{x^2 - x - 2}{(x - 1)(x - 2)} \\ &= \frac{(x^3 - x^2 + x - 1) + (x^2 - x - 2)}{(x - 2)(x - 1)} \\ &= \frac{x^3 - 3}{(x - 2)(x - 1)} \end{aligned}$$

Problema 1.22 Simplificar la expresión $\frac{2x^4 + x^3 - 11x^2 + 11x - 3}{2x^3 + 3x^2 - 8x + 3}$

Esta clase de problemas requiere conocer las raíces racionales o enteras de los polinomios que aparecen en el numerador y denominador. Al tomar $x = 1$ en el numerador, éste lo hace cero, es decir $x = 1$ es una raíz del polinomio del numerador. de igual forma se encuentra que $x = \frac{1}{2}$ y $x = -3$ son raíces. La descomposición del numerador es

$$2x^4 + x^3 - 11x^2 + 11x - 3 = (x + 3)(x - 1)^2(2x - 1)$$

para el denominador se tiene que

$$2x^3 + 3x^2 - 8x + 3 = (x + 3)(x - 1)(2x - 1)$$

Por tanto,

$$\frac{2x^4 + x^3 - 11x^2 + 11x - 3}{2x^3 + 3x^2 - 8x + 3} = \frac{(x + 3)(x - 1)^2(2x - 1)}{(x + 3)(x - 1)(2x - 1)} = x - 1$$

Problema 1.23 Simplificar al máximo la expresión $\left[\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x+1} \right) \div \left(x - \frac{1}{x+1} \right) \right] \cdot x$

Hay que trabajar, en primer lugar, las expresiones encerradas en paréntesis

$$\begin{aligned} \left[\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x+1} \right) \div \left(x - \frac{1}{x+1} \right) \right] \cdot x &= \left[\left(\frac{2(x+1)+x}{x(x+1)} \right) \div \left(\frac{x^2+x-1}{x+1} \right) \right] \cdot x \\ &= \left[\left(\frac{3x+2}{x(x+1)} \right) \div \left(\frac{x^2+x-1}{x+1} \right) \right] \cdot x \\ &= \left(\frac{3x+2}{x(x+1)} \right) \cdot \left(\frac{x+1}{x^2+x-1} \right) \cdot x \\ &= \frac{3x+2}{x^2+x-1} \end{aligned}$$

Problema 1.24 Hallar la suma simplificada de $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-3} - \frac{x-1}{x^2-4x+3}$

Como se trata de sumar fracciones, veamos la descomposición de la cuadrática

$$x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$$

Así, el común denominador es $(x-1)(x-3)$. Se tiene

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-3} - \frac{x-1}{x^2-4x+3} = \frac{(x-3) + (x-1) - (x-1)}{(x-1)(x-3)} = \frac{\cancel{x-3}}{(x-1)\cancel{(x-3)}} = \frac{1}{x-1}$$

Problema 1.25 Simplificar $\frac{\frac{x^2+6x+9}{9-x^2} \cdot \frac{3x^2-x^3}{3x^2+x^3}}{\frac{2x-4}{3/4+2/8} \div \frac{2x^2-8x+8}{x-2}}$

Operemos primero con el numerador, simplificándolo al máximo

$$\frac{x^2+6x+9}{9-x^2} \cdot \frac{3x^2-x^3}{3x^2+x^3} = \frac{(x+3)^2}{(3-x)(3+x)} \cdot \frac{x^2(3-x)}{x^2(3+x)} = \frac{\cancel{(x+3)}\cancel{(x+3)}}{\cancel{(3-x)}(3+x)} \cdot \frac{\cancel{x^2}\cancel{(3-x)}}{\cancel{x^2}(3+x)} = 1$$

Veamos ahora el denominador

$$\frac{2x-4}{3/4+2/8} \div \frac{2x^2-8x+8}{x-2} = \frac{2x-4}{1} \cdot \frac{x-2}{2x^2-8x+8} = \frac{2\cancel{(x-2)}}{2\cancel{(x-2)}^2} = 1$$

En consecuencia;

$$\frac{\frac{x^2+6x+9}{9-x^2} \cdot \frac{3x^2-x^3}{3x^2+x^3}}{\frac{2x-4}{3/4+2/8} \div \frac{2x^2-8x+8}{x-2}} = 1$$

Problema 1.26 Simplificar $\frac{\frac{3}{x+1} - \frac{2}{x^2-1} + \frac{x}{x-1}}{\frac{x^2-6x+5}{x^2-1}}$

Trabajemos el numerador usando el común denominador

$$\frac{3}{x+1} - \frac{2}{x^2-1} + \frac{x}{x-1} = \frac{3(x-1) - 2 + x(x+1)}{x^2-1} = \frac{x^2+4x-5}{x^2-1} = \frac{(x-1)(x+5)}{x^2-1}$$

En el denominador tenemos lo siguiente

$$\frac{x^2-6x+5}{x^2-1} = \frac{(x-5)(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x-5}{x+1}$$

Armos el cociente

$$\frac{\frac{3}{x+1} - \frac{2}{x^2-1} + \frac{x}{x-1}}{\frac{x^2-6x+5}{x^2-1}} = \frac{\frac{(x-1)(x+5)}{x^2-1}}{\frac{x-5}{x+1}} = \frac{(x-1)(x+5)}{x^2-1} \cdot \frac{x+1}{x-5} = \frac{x+5}{x-5}$$

1.3.3 Desigualdades

¡Cómo les encanta a los profes preguntar este clase de problemas!

La metodología para resolverlos es muy variada. En particular me la juego con la más fácil, la aplicación de la **ley de tricotomía**.

Problema 1.27 Hallar el conjunto solución de $x^2 + x < 2$.

Otra forma de enunciar esta clase de problemas es mediante el uso del término **resolver** la desigualdad. Vamos al grano, se trata de hallar todos los elementos $x \in \mathbb{R}$ de modo que al sumarlo con su cuadrado sea menor que 2. Estos problemas son equivalentes a agrupar en un sólo miembro todos los elementos y resolver para mayores o menores que 0. En nuestro caso, $x^2 + x - 2 < 0$.

Sea $A = x^2 + x - 2$ este número real, queremos hallar los valores de x para que A sea negativo. Para ello es conveniente, primero, saber que valores le hacen cero, y a partir de allí determinar los valores que le hacen positivo o negativo. Se tiene

$$x^2 + x - 2 = 0 \iff (x+2)(x-1) = 0 \iff x = -2 \vee x = 1$$

Ahora, los valores que anulan A se anotan sobre la recta real

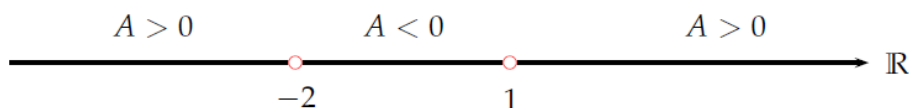


Figura 1.1

Siendo $x = -2$ y $x = 1$ los únicos valores donde A es cero, entonces en cualquier otra parte de $\mathbb{R}$ es positivo o negativo en forma excluyente. ¿Cómo se verifica esto? Muy sencillo, basta con darse un valor en el intervalo y ese es el signo que tiene A en todo el intervalo.

Intervalo $(-\infty, -2)$: $x = -3 \implies (-3)^2 + (-3) - 2 = 4 > 0$ ¡no hay solución!

Intervalo $(-2, 1)$: $x = 0 \implies (0)^2 + (0) - 2 = -2 < 0$ ¡hay solución!

Intervalo $(1, \infty)$: $x = 2 \implies (2)^2 + (2) - 2 = 2 > 0$ ¡no hay solución!

En consecuencia, el conjunto solución es

$$S = \{x \in \mathbb{R} / -2 < x < 1\} = (-2, 1)$$

Problema 1.28 Hallar el conjunto solución de $x^2 + x + 1 > 0$.

Como se trata de una cuadrática veamos su discriminante

$$b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$$

¡Qué bonito!, no hay ceros reales, jamás la expresión será igual a cero, luego, le quedan dos alternativas, o es positiva o es negativa pero no ambas. ¿Como se sabe?, se proporciona un valor a la variable x y listo. Por ejemplo. $x = 0 \implies 0^2 + 0 + 1 = 1 > 0$. Por tanto, el conjunto solución de esta desigualdad es $S = \mathbb{R}$

Problema 1.29 Hallar el conjunto solución de $\frac{x+4}{x+1} < \frac{2}{x-1}$.

Obviamente que el grado de dificultad ha subido. Manejamos el problema llevando todo al primer miembro. Nos queda

$$\frac{x+4}{x+1} - \frac{2}{x-1} < 0$$

Al sacar común denominador y simplificar tenemos

$$\frac{x^2 + x - 6}{(x+1)(x-1)} < 0$$

O bien

$$\frac{(x+3)(x-2)}{(x+1)(x-1)} < 0$$

Al igual que los problemas anteriores busquemos primero los puntos donde la expresión se anula. Como es una fracción se mira el numerador, se encuentra que $x = 2$ y $x = -3$ lo anulan, mientras que mirando el denominador, $x = 1$ y $x = -1$ lo anulan, en este último caso ello significa que no están permitidos estos valores, en consecuencia se descartan. La situación en la recta real es la siguiente.

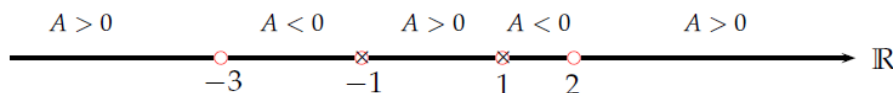


Figura 1.2

Estos cuatro puntos han generado que la recta real se descomponga en 5 subintervalos, en cada uno de los cuales deberemos buscar si hay solución. Tenemos:

Intervalo $(-\infty, -3)$: $x = -4 \implies \frac{(-4+3)(-4-2)}{(-4+1)(-4-1)} > 0$. **No hay solución**

Intervalo $(-3, -1)$: $x = -2 \implies \frac{(-2+3)(-2-2)}{(-2+1)(-2-1)} < 0$. **Hay solución**

Intervalo $(-1, 1)$: $x = 0 \implies \frac{(0+3)(0-2)}{(0+1)(0-1)} > 0$. **No hay solución**

Intervalo $(1, 2)$: $x = \frac{3}{2} \implies \frac{(3/2+3)(3/2-2)}{(3/2+1)(3/2-1)} < 0$. **Hay solución**

Intervalo $(2, \infty)$: $x = 3 \implies \frac{(3+3)(3-2)}{(3+1)(3-1)} > 0$. **No hay solución**

Hemos encontrado que el conjunto solución de esta desigualdad es $S = (-3, -1)$.

Veamos un ejemplo más de este tipo, y luego vamos con valores absolutos.

Problema 1.30 Hallar el conjunto solución de $\frac{x^2 - 6x - 7}{x^2 + 2x + 1} \geq 3$.

Trabajamos poniendo todo en un sólo lado de la desigualdad, generalmente el izquierdo. Se tiene

$$\frac{x^2 - 6x - 7}{x^2 + 2x + 1} \geq 3 \iff \frac{x^2 - 6x - 7}{x^2 + 2x + 1} - 3 \geq 0$$

Lo que al reunir en términos semejante se reduce a

$$\frac{x^2 + 6x + 5}{x^2 + 2x + 1} \leq 0$$

Se observa que esto equivale a

$$\frac{(x+1)(x+5)}{(x+1)^2} \leq 0$$

se puede cancelar para dejarlo reducido a

$$\frac{x+5}{x+1} \leq 0$$

El numerador se anula para $x = -5$ y el denominador para $x = -1$. En la recta real tenemos

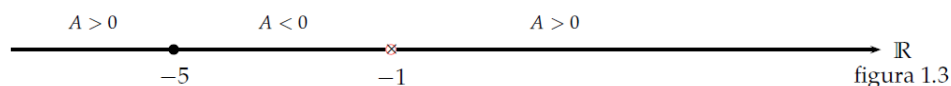


Figura 1.3

Se observa que $x = -5$ está encerrado en óvalo ennegrecido, ello por que es solución de la desigualdad. El problema pide los x que hacen la desigualdad menor o igual a cero. En cada uno de los tres intervalos tenemos:

Intervalo $(-\infty, -5)$: $x = -6 \implies \frac{-6+5}{-6+1} > 0$. **No hay solución**

Intervalo $(-5, -1)$: $x = -2 \implies \frac{-2+5}{-2+1} < 0$. **Hay solución**

Intervalo $(-1, \infty)$: $x = 0 \implies \frac{0+5}{0+1} > 0$. **No hay solución**

En consecuencia, el conjunto solución es $S = [-5, -1)$.

Problema 1.31 Resolver la desigualdad $\left| \frac{3x+1}{3x-2} \right| \geq 1$.

Para las desigualdades con valor absoluto tenemos tres alternativas para resolverlas, aplicando la definición, usando alguna propiedad, o bien empleando la ley de tricotomía (dos versiones).

Por tricotomía (igualando)

Sea $A = \left| \frac{3x+1}{3x-2} \right|$. Se buscan aquellos puntos que producen la igualdad

$$\begin{aligned} \left| \frac{3x+1}{3x-2} \right| = 1 &\implies \frac{3x+1}{3x-2} = 1 \quad \vee \quad \frac{3x+1}{3x-2} = -1 \\ &\implies 3x+1 = 3x-2 \quad \vee \quad 3x+1 = -3x+2 \\ &\implies 1 = -2 \quad \text{¡jamás!} \quad \vee \quad x = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Hemos encontrado que $x = \frac{1}{6}$ es el único punto donde hay igualdad. En los valores restantes, salvo el $x = \frac{2}{3}$ que anula el denominador, el valor absoluto de la fracción es estrictamente mayor o menor que 1. Veamos esto en la recta numérica, en donde se han elegido $x = 0$, $x = \frac{5}{12}$ y $x = 1$ para ver el signo de A .

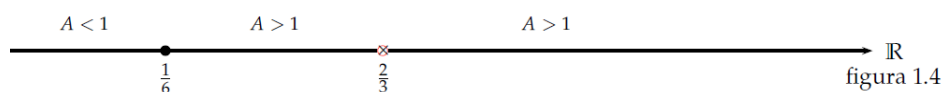


Figura 1.4

Se sigue que el conjunto solución es

$$S = \left[\frac{1}{6}, \frac{2}{3} \right) \cup \left(\frac{2}{3}, \infty \right)$$

Por tricotomía (puntos de quiebre)

En esta versión se buscan, en primer lugar, los puntos de quiebre del valor absoluto, es decir, aquellos puntos que lo anulan (tanto en numerador como en denominador, si los hay). Ello permite trabajar, en la recta real, la expresión sin valor absoluto. Se tiene que

$$\left| \frac{3x+1}{3x-2} \right| = \frac{|3x+1|}{|3x-2|} \implies x = -\frac{1}{3} \quad \text{y} \quad x = \frac{2}{3}$$

Se ubican estos sobre la recta real y se trabaja en cada subintervalo la expresión dada, pero ahora, **sin valor absoluto**. Por ejemplo, en el intervalo $(-\infty, -\frac{1}{3})$, el valor absoluto del numerador y el del

denominador tienen signos negativos, razón por la cual se debe resolver la desigualdad

$$\frac{3x+1}{3x-2} \geq 1$$

Aquí se debe poner atención a los valores de x que hacen la igualdad (si los hay en el intervalo). Si tales valores de x no existen en este intervalo, entonces un valor arbitrario de x en este intervalo proporciona la respuesta inmediata. Observar como queda todo en la recta, listo para trabajar.

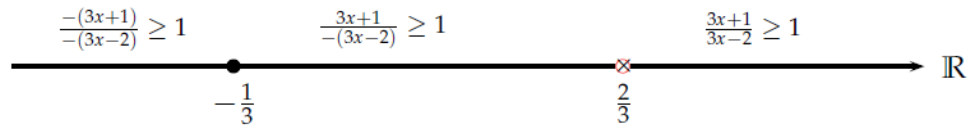


Figura 1.5

- En $(-\infty, -\frac{1}{3})$ resolvemos $\frac{3x+1}{3x-2} \geq 1$.

Vemos si puede haber igualdad

$$\frac{3x+1}{3x-2} = 1 \implies 3x+1 = 3x-2$$

Como esto es imposible, entonces un sólo valor decide si $A = \frac{3x+1}{3x-2}$ es mayor o igual que 1 en este intervalo. Con $x = -1$ se tiene que

$$\left. \frac{3x+1}{3x-2} \right|_{x=-1} = \frac{-3+1}{-3-2} = \frac{-2}{-5} = \frac{2}{5} \not\geq 1$$

Se tiene que no hay solución en este intervalo.

- En $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ resolvemos $-\frac{3x+1}{3x-2} \geq 1$.

Vemos primero si existe algún valor de x que hace la igualdad.

$$-\frac{3x+1}{3x-2} = 1 \implies -3x-1 = 3x-2 \implies 6x = 1 \implies x = \frac{1}{6}$$

Este x se considera “un invitado” o un “paracaidista” y hay que agregarlo en este intervalo. Además, él forma parte del conjunto solución. Así,

$$\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right) \cup \left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right)$$

En este caso, un valor de x en cada intervalo y estamos listos:

$$\begin{aligned} x = 0 \text{ en } \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right) &\implies -\left. \frac{3x+1}{3x-2} \right|_{x=0} = \frac{1}{2} \not\geq 1 \\ x = \frac{1}{3} \text{ en } \left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right) &\implies -\left. \frac{3x+1}{3x-2} \right|_{x=\frac{1}{3}} = 2 > 1 \end{aligned}$$

Se concluye que tenemos solución en $\left[\frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right)$.

- En $(2, \infty)$ resolvemos $\frac{3x+1}{3x-2} \geq 1$.

No hay valores que hagan la igualdad. Con un valor de x se ve todo. Con $x = 1$ tenemos

$$\left. \frac{3x+1}{3x-2} \right|_{x=1} = \frac{4}{1} = 4 > 1$$

Así, en este intervalo hay solución. En consecuencia, el intervalo solución es

$$S = \left[\frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, \infty\right)$$

Por definición

Se aplica la definición de valor absoluto a las expresiones en juego.

$$\left| \frac{3x+1}{3x-2} \right| = \begin{cases} \frac{3x+1}{3x-2} & \text{si } \frac{3x+1}{3x-2} \geq 0 \\ -\frac{3x+1}{3x-2} & \text{si } \frac{3x+1}{3x-2} < 0 \end{cases}$$

a) Tenemos que resolver entonces ambas alternativas. La primera es

$$\frac{3x+1}{3x-2} \geq 0 \quad \text{y} \quad \left| \frac{3x+1}{3x-2} \right| = \frac{3x+1}{3x-2} \geq 1$$

Vamos a ir haciendo ambas en paralelo y mostrando su desarrollo.

$$\frac{3x+1}{3x-2} \geq 0 \quad \wedge \quad \frac{3x+1}{3x-2} \geq 1 \implies \frac{x}{3x-2} \geq 0$$



Figura 1.6

El conjunto solución, de la primera parte, es la intersección.

$$S_1 = \left[(-\infty, -\frac{1}{3}] \cup (\frac{2}{3}, \infty)\right] \cap \left(\frac{2}{3}, \infty\right) = \left(\frac{2}{3}, \infty\right)$$

b) Resolvemos ahora la restante alternativa.

$$\frac{3x+1}{3x-2} < 0 \quad \text{y} \quad \left| \frac{3x+1}{3x-2} \right| = -\frac{3x+1}{3x-2} \geq 1$$

De nuevo vemos esto en paralelo para hacer notar que la intersección es el conjunto solución.

$$\frac{3x+1}{3x-2} < 0 \quad \wedge \quad -\frac{3x+1}{3x-2} \geq 1 \implies \frac{6x-1}{3x-2} \leq 0$$



Figura 1.7

El conjunto solución, de la segunda parte, es

$$S_2 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \cap \left[\frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right) = \left[\frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right)$$

En consecuencia, el conjunto solución de la desigualdad original es, la **unión** de las soluciones de la primera y segunda parte, esto es

$$S = S_1 \cup S_2 = \left[\frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, \infty\right)$$

¡uff! se sudó la gota gorda para resolver por definición, que uniones, que intersecciones, espero que si queda algún porfiado, empiece a darse cuenta de la potencia del método de la tricotomía.

Por propiedad

Por este camino el trabajo es menor que por definición. En efecto, la propiedad es la siguiente

$$\left| \frac{3x+1}{3x-2} \right| \geq 1 \iff \frac{3x+1}{3x-2} \geq 1 \quad \vee \quad \frac{3x+1}{3x-2} \leq -1$$

Resolvemos separadamente esta disyunción.

$$\text{a) } \frac{3x+1}{3x-2} \geq 1 \implies \frac{3x+1}{3x-2} - 1 \geq 0 \implies \frac{3}{3x-2} \geq 0$$

De aquí, a la recta

$$\begin{array}{c} < 0 & & > 0 \\ & \circ & & \\ & \frac{2}{3} & & \end{array} \quad \mathbb{R} \quad \implies \quad S_1 = \left(\frac{2}{3}, \infty\right)$$

$$\text{b) } \frac{3x+1}{3x-2} \leq -1 \implies \frac{3x+1}{3x-2} + 1 \leq 0 \implies \frac{6x-1}{3x-2} \leq 0$$

De aquí, a la recta

$$\begin{array}{c} > 0 & & < 0 & & > 0 \\ & \bullet & & \circ & & \\ & \frac{1}{6} & & \frac{2}{3} & & \end{array} \quad \mathbb{R} \quad \implies \quad S_2 = \left[\frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right)$$

El conjunto solución es la unión de ambas soluciones. Esto es,

$$S = S_1 \cup S_2 = \left[\frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, \infty\right)$$

Problema 1.32 Resolver la desigualdad $|x^2 - x| < |x|$.

El problema se puede resolver tal como está, o llevándolo a la forma

$$|x|(|x - 1| - 1) < 0$$

Este camino es más rápido. Obsérvese como lo hacemos por tricotomía

$$|x|(|x - 1| - 1) = 0 \iff |x| = 0 \vee |x - 1| - 1 = 0$$

Es sencillo ver que los puntos que satisfacen son $x = 0, x = 2$. Se tiene así que los únicos puntos donde es posible la igualdad son esos, en cualquier otro punto la cosa es mayor o menor que cero. Nuestra “amiga” la recta real nos dice al instante si $|x^2 - x| < |x|$ o no, para ello basta tomar un valor en ese intervalo, reemplazar en $|x^2 - x| < |x|$ y ¡ya!

$$\begin{array}{c} \geq \quad \circ \quad < \quad \circ \quad > \\ 0 \quad \quad \quad 2 \end{array} \rightarrow \mathbb{R} \quad \implies \quad S = (0, 2)$$

Los símbolos $>$ y $<$ sobre la recta indican que $|x^2 - x| < |x|$ o bien que $|x^2 - x| > |x|$. ¡Hey mechón!, estarás de acuerdo conmigo que no vale la pena hacerlo por otro método.

Problema 1.33 Resolver la desigualdad $\frac{|x+1|-x}{x^2-1} \leq 0$.

A la tricotomía dan ganas de “rezarle”. Usemósla de nuevo en este problema. Se trata de una fracción, por tanto hay que mirar el denominador y sacar los elementos que le anulan. En este caso, $x = \pm 1$. Veamos entonces cuando se produce la igualdad

$$\frac{|x+1|-x}{x^2-1} = 0 \iff |x+1|-x = 0 \implies |x+1| = x$$

Los puntos que hacen la igualdad en $x+1 = x$ no existen, y para $x+1 = -x$ se encuentra $x = -\frac{1}{2}$, que realmente no es solución. Así, no hay puntos que hagan la igualdad. Pero existen puntos que están prohibidos. Luego, la situación en la recta es la siguiente

$$\begin{array}{c} \geq 0 \quad \circ \quad < 0 \quad \circ \quad > 0 \\ -1 \quad \quad \quad 1 \end{array} \rightarrow \mathbb{R} \quad \implies \quad S = (-1, 1)$$

Problema 1.34 Probar que $|x-3| < 1 \implies \frac{1}{8} < \frac{1}{x+4} < \frac{1}{6}$.

Este tipo de problemas es del tipo $P \implies Q$, de los cuales sabemos que se trabaja P para formar Q . Veamos esto

$$|x-3| < 1 \implies -1 < x-3 < 1 \quad / +7$$

$$\implies 6 < x+4 < 8 \quad / ()^{-1}$$

$$\implies \frac{1}{6} > \frac{1}{x+4} > \frac{1}{8}$$

$$\implies \frac{1}{8} < \frac{1}{x+4} < \frac{1}{6}$$

Salió más fácil de lo esperado. Veamos otro

Problema 1.35 Probar que $|x| < 1 \implies \left| \frac{x+1}{x-2} \right| < 2$.

El problema es del mismo tipo anterior, pero ahora aparece un valor absoluto. Tenemos

$$\begin{aligned} |x| < 1 &\implies -1 < x < 1 \quad / +1 \\ &\implies 0 < x+1 < 2 \\ &\implies -2 < 0 < x+1 < 2 \\ &\implies |x+1| < 2 \end{aligned}$$

Veamos que sucede con el denominador

$$\begin{aligned} |x| < 1 &\implies -1 < x < 1 \quad / -2 \\ &\implies -3 < x-2 < -1 \quad / \cdot (-1) \\ &\implies 3 > 2-x > 1 \\ &\implies 1 < 2-x < 3 \quad / ()^{-1} \\ &\implies 1 > \frac{1}{2-x} > \frac{1}{3} \\ &\implies \frac{1}{3} < \frac{1}{2-x} < 1 \end{aligned}$$

Para formar el valor absoluto se considera el mayor de los números extremos (en valor absoluto) que aparecen en la desigualdad y se agrega su opuesto aditivo. Recordar que

$$|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$$

Por tanto,

$$\frac{1}{3} < \frac{1}{2-x} < 1 \implies -1 < \frac{1}{3} < \frac{1}{2-x} < 1$$

Se sigue que

$$\left| \frac{1}{2-x} \right| = \left| \frac{1}{x-2} \right| < 1$$

De nuestras dos conclusiones, a saber,

$$|x+1| < 2 \quad \text{y} \quad \left| \frac{1}{x-2} \right| < 1$$

se obtiene, para el producto, que

$$|x+1| \cdot \left| \frac{1}{x-2} \right| = \left| \frac{x+1}{x-2} \right| < 2$$

Problema 1.36 Demostrar que $x^3 + x^{-3} \geq x^2 + x^{-2}$, $\forall x > 0$.

Que quede claro que en este problema no se pide hallar el conjunto solución. Se afirma que la desigualdad es válida para todo $x > 0$, y nos piden probar eso. El mejor camino para esto es trabajar la desigualdad bajo el supuesto que es verdadera y llegar a un punto en que se aflore una verdad **irrefutable**. ¡Ver para creer dijo Santo Tomás!

$$\begin{aligned} x^3 + x^{-3} \geq x^2 + x^{-2} &\iff x^3 + \frac{1}{x^3} \geq x^2 + \frac{1}{x^2} \\ &\iff \frac{x^6 + 1 - x^5 - x}{x^3} \geq 0 \\ &\iff \frac{(x-1)(x^5-1)}{x^3} \geq 0 \\ &\iff \frac{(x-1)^2(x^4+x^3+x^2+x+1)}{x^3} \geq 0 \end{aligned}$$

Hemos hallado el punto de partida. En efecto,

$$x > 0 \implies \begin{cases} x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 > 0 \\ x^3 > 0 \\ (x-1)^2 \geq 0 \end{cases}$$

Ahora empezamos con la demostración (¡como si la inspiración nos hubiese venido del cielo!)

punto de partida

$$(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 > 0) \cdot x^3 \cdot \frac{1}{(x-1)^2} \geq 0$$

Al desarrollar esta expresión se tiene

$$\frac{x^6 + 1 - x^5 - x}{x^3} \geq 0$$

de lo cual,

$$x^3 + \frac{1}{x^3} - x^2 - \frac{1}{x^2} \geq 0$$

y finalmente

$$x^3 + \frac{1}{x^3} \geq x^2 + \frac{1}{x^2} \quad \text{¡genial!}$$

1.3.4 Cotas, supremo, ínfimo, máximo y mínimo

Hay que tener presente que en toda desigualdad se puede pedir encontrar estos elementos. De hecho los problemas anteriores pueden servir como entrenamiento.

Problema 1.37 Hallar supremo, ínfimo, máximo y mínimo del conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R} / \frac{7}{x-1} - \frac{6}{x^2-1} > 5\}$$

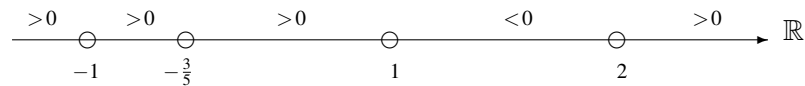
La respuesta al problema la entrega el conjunto solución, que debemos encontrar.

$$\begin{aligned} \frac{7}{x-1} - \frac{6}{x^2-1} > 5 &\implies \frac{7}{x-1} - \frac{6}{x^2-1} - 5 > 0 \\ &\implies \frac{7x - 5x^2 + 6}{x^2-1} > 0 \\ &\implies \frac{5x^2 - 7x - 6}{x^2-1} < 0 \end{aligned}$$

Ahora, ¡bienvenida tricotomía! Veamos si hay puntos que hacen la igualdad. Recordar que estamos en presencia de una fracción, y que para ser cero sólo cuenta el numerador. Se tiene

$$5x^2 - 7x - 6 = 0 \iff x = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 120}}{10}$$

se deduce que $x = 2$ y $x = -\frac{3}{5}$ son ceros. Veamos entonces que nos dice la recta real en los subintervalos que se han formado con los ceros y los ceros “prohibidos” del denominador.



Así, el conjunto solución es $S = \{x \in \mathbb{R} / 1 < x < 2\} = (1, 2)$. Se deduce que el $\sup A = 2$, $\inf A = 1$, y como el conjunto solución es un intervalo abierto, entonces no hay máximo ni mínimo.

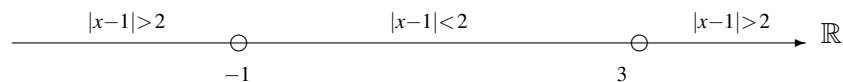
Problema 1.38 Hallar máximo, mínimo, supremo e ínfimo del conjunto

$$S = \{x \in \mathbb{R} / |x-1| < 2 < |x+1|\}$$

El problema se divide en dos partes; $|x-1| < 2$ y $2 < |x+1|$

Primera parte: $|x-1| < 2$

De acuerdo con la tricotomía buscamos los valores que hacen la igualdad. Ellos son, $x = 3$, $x = -1$. La recta real nos dice de inmediato que es lo que está pasando



Este es uno de los pocos casos en que la definición le “gana” a la tricotomía. La solución es casi inmediata. En efecto,

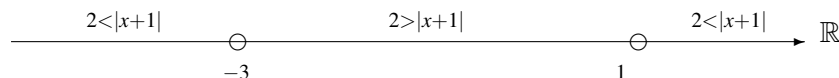
$$|x-1| < 2 \implies -2 < x-1 < 2 \implies -1 < x < 3$$

De cualquier forma, el conjunto solución es

$$S_1 = \{x \in \mathbb{R} / -1 < x < 3\} = (-1, 3)$$

Segunda parte: $2 < |x+1|$

Una vez más, por tricotomía buscamos los valores que hacen la igualdad. Ellos son, $x = -3$, $x = 1$. La situación sobre la recta real es la siguiente.



Luego, el conjunto solución de esta segunda parte es

$$S_2 = (-\infty, -3) \cup (1, \infty)$$

En consecuencia, el conjunto solución, que corresponde a la intersección de la primera y segunda parte, es

$$S = S_1 \cap S_2 = (-1, 3) \cap [(-\infty, -3) \cup (1, \infty)] = (1, 3)$$

Las respuestas están a la vista, $\sup S = 3$, $\inf S = 1$, máximo y mínimo no hay por ser el conjunto solución abierto.

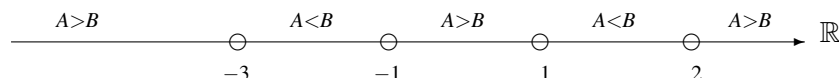
Problema 1.39 Hallar supremo, ínfimo, máximo y mínimo del conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R} / \frac{x+4}{x+1} < \frac{2}{x-1}\}$$

Observar que no se puede multiplicar por los denominadores, pues los signos de $(x+1)$ y de $(x-1)$ dependen de x . Por método de tricotomía comparamos las fracciones $A = \frac{x+4}{x+1}$ y $B = \frac{2}{x-1}$, buscando en primer lugar si hay puntos donde se produce la igualdad, para luego decidir que valores de x dan origen a la desigualdad. Tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{x+4}{x+1} = \frac{2}{x-1} &\implies \frac{x+4}{x+1} - \frac{2}{x-1} = 0 \implies \frac{(x+3)(x-2)}{(x+1)(x-1)} = 0 \\ &\implies x = -3, \quad x = 2 \end{aligned}$$

Los valores no permitidos del denominador son, $x = 1$ y $x = -1$, ellos juntos a los que anulan el numerador se agregan a la recta real para decidir que valores de x hacen la desigualdad requerida.



De esta manera el conjunto solución es

$$S = (-3, -1) \cup (1, 2) \quad \text{¡acotado!}$$

se deduce que $\sup S = 2$, $\inf S = -3$

1.3.5 Factoriales - Inducción - Teorema del Binomio

El factorial de un entero positivo n , que se anota $n!$, se define como el producto de todos los números enteros positivos desde 1 hasta n . Esto es,

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$$

El factorial de n representa el número de formas distintas de ordenar n objetos distintos (elementos sin repetición).

La inducción es un método de demostración que se puede usar sólo si actúan números naturales. Se aplica en igualdades, desigualdades, divisibilidad y otros.

El teorema del binomio es una fórmula que permite escribir los términos del desarrollo de una potencia entera y positiva de un binomio.

Problema 1.40 Simplificar la expresión $\left(\frac{83!}{81!+82!}\right)\left(\frac{40!+41!}{42!}\right)$

En el primer factor se observa que 81 es el menor factorial. Factorizamos por él

$$\frac{83!}{81!+82!} = \frac{81! \cdot 82 \cdot 83}{81!+81! \cdot 82} = \frac{81! \cdot 82 \cdot 83}{81!(1+82)} = \frac{82 \cdot 83}{83} = 82$$

En el segundo factor 40! es el menor factorial

$$\frac{40!+41!}{42!} = \frac{40!(1+41)}{42!} = \frac{40! \cdot 42}{40! \cdot 41 \cdot 42} = \frac{1}{41}$$

Ahora hacemos la multiplicación

$$\left(\frac{83!}{81!+82!}\right)\left(\frac{40!+41!}{42!}\right) = 82 \cdot \frac{1}{41} = 2$$

Problema 1.41 Simplificar la expresión $\frac{(n-5)!+(n-4)!+(n-3)!}{n^4-15n^3+83n^2-201n+180}$

El numerador se factoriza por $(n-5)!$

$$\begin{aligned} \frac{(n-5)!+(n-4)!+(n-3)!}{n^4-15n^3+83n^2-201n+180} &= \frac{(n-5)! [1+(n-4)+(n-4)(n-5)]}{n^4-15n^3+83n^2-201n+180} \\ &= \frac{(n-5)!(n^2-6n+9)}{n^4-15n^3+83n^2-201n+180} = \frac{(n-5)!(n-3)^2}{n^4-15n^3+83n^2-201n+180} \end{aligned}$$

El denominador se puede factorizar

$$n^4-15n^3+83n^2-201n+180 = (n-3)^2(n-4)(n-5)$$

Luego,

$$\frac{(n-5)!+(n-4)!+(n-3)!}{n^4-15n^3+83n^2-201n+180} = \frac{(n-5)!(n-3)^2}{(n-3)^2(n-4)(n-5)} = \frac{(n-5)!}{(n-4)(n-5)}$$

Podemos hacer una última simplificación

$$\frac{(n-5)!+(n-4)!+(n-3)!}{n^4-15n^3+83n^2-201n+180} = \frac{1 \cdot 2 \cdot (n-6) \cdot (n-5)}{(n-4)(n-5)} = \frac{(n-6)!}{n-4}$$

Problema 1.42 Resolver la ecuación $12x! + 5(x+1)! = (x+2)!$

Debemos tratar de simplificar la escritura de factoriales

$$12x! + 5(x+1)! = (x+2)! \implies 12x! + 5x!(x+1) = x!(x+1)(x+2)!$$

Ahora se factoriza por $x!$

$$x![12 + 5(x+1) - (x+1)(x+2)] = x![15 + 2x - x^2] = x!(x+3)(x-5) = 0$$

Tenemos 2 soluciones

$$x = 5 \quad \wedge \quad x = -3$$

Pero el factorial se define sólo para enteros positivos, por tanto $x = 5$ es la única solución.

Problema 1.43 Demostrar que es válido para todo número natural que

$$1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + \cdots + (2n-1)2n = \frac{n(n+1)(4n-1)}{3}$$

El método de inducción consta de tres pasos. El primero es verificar que la propiedad se cumple para el primer natural que se indica, (no necesariamente el 1), el segundo es suponer que la propiedad se verifica hasta el número natural k , y finalmente el tercer paso, probar que se sigue verificando para el natural $k+1$, que es el siguiente de k .

$[n = 1]$: En este caso, que se trata de una igualdad, lo único que hay que hacer es reemplazar n por 1, tanto en el miembro izquierdo como en el derecho y verificar que se cumple la igualdad. Pero “ojo”, en el miembro de la izquierda, el último sumando es el que genera todos los anteriores por simple reemplazo de n . Por ejemplo, con $n = 1$ se obtiene $1 \cdot 2$, con $n = 2$ se tiene $1 \cdot 2 + 3 \cdot 4$ y así sucesivamente, con $n = k$ se tiene en el primer miembro,

$$1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + \cdots + (2k-1)2k$$

En consecuencia, para $n = 1$ el miembro izquierdo es $1 \cdot 2$, y el de la derecha $\frac{1(1+1)(4-1)}{3} = 2$. Se tiene entonces igualdad para $n = 1$. Dado que se verifica para el primer natural seguimos.

$[n = k]$: Se **supone verdadero** que

$$1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + \cdots + (2k-1)2k = \frac{k(k+1)(4k-1)}{3}$$

$[n = k+1]$: Hay que **demostrar que**

$$1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + \cdots + (2k+1)(2k+2) = \frac{(k+1)(k+2)(4k+3)}{3}$$

Observar que tanto en el caso $n = k$ como en el $n = k+1$ se hizo un simple reemplazo. Para probar la validez en el paso $n = k+1$ se debe necesariamente hacer uso del paso anterior, es decir, del supuesto para $n = k$.

$$1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + \cdots + (2k+1)(2k+2) = [1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + \cdots + (2k-1)2k] + (2k+1)(2k+2)$$

Este es quizás el paso más importante, descomponer en los anteriores más el último para usar la hipótesis (el supuesto). Esto conduce a tener

$$1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + \cdots + (2k+1)(2k+2) = \frac{k(k+1)(4k-1)}{3} + (2k+1)(2k+2)$$

Ahora sólo hay que sumar las expresiones a la derecha para tener

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + \cdots + (2k+1)(2k+2) &= \frac{k+1}{3} [k(4k-1) + 6(2k+1)] \\ &= \frac{k+1}{3} [4k^2 + 11k + 6] \end{aligned}$$

es probable que se esté “atorado” con la cuadrática, ¡tranquilo!, veamos sus ceros

$$4k^2 + 11k + 6 = 0 \implies x = \frac{-11 \pm \sqrt{121 - 96}}{8}$$

de donde, $k_1 = -2$ y $k_2 = -\frac{3}{4}$, lo que equivale a tener, $k+2 = 0$ y $4k+3 = 0$. Con esto tenemos la descomposición

$$4k^2 + 11k + 6 = (4k+3)(k+2)$$

con lo cual, volviendo a la demostración para $n = k+1$, se tiene

$$1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + \cdots + (2k+1)(2k+2) = \frac{k+1}{3} (4k+1)(k+2) = \frac{(k+1)(k+2)(4k+3)}{3}$$

Problema 1.44 Demostrar que es válido para todo número natural que.

$$1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1} = \frac{3^n - 1}{2}$$

$[n = 1]$: Se reemplaza $n = 1$ en ambos miembros de la igualdad

$$3^{1-1} = 1 = \frac{3^1 - 1}{2} \quad \text{se verifica para } n = 1$$

$[n = k]$: Se **supone verdadero** que

$$1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1} = \frac{3^n - 1}{2}$$

$[n = k+1]$: Hay que **demostrar que**

$$1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{k+1-1} = \frac{3^{k+1} - 1}{2}$$

Para probar esto, el procedimiento no difiere mucho del anterior. Se tiene

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^k &= \left[1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{k-1} \right] + 3^k \\ &= \frac{3^k - 1}{2} + 3^k \quad \text{se usó hipótesis} \\ &= \frac{3^k - 1 + 2 \cdot 3^k}{2} = \frac{3^{k+1} - 1}{2} \end{aligned}$$

lo que prueba la proposición.

Veamos ahora desigualdades que se prueban usando inducción

Problema 1.45 Demostrar que $2^n > n^2, \forall n \geq 5$.

En este problema el primer natural a partir del cual se cumple la propiedad es el 5. Se tiene.

[n = 5]: Es evidente que $2^5 = 32 > 5^2 = 25$

De esta forma la proposición se cumple para el primer natural que se afirma.

[n = k]: Se **supone** válido que $2^k > k^2, \forall k \geq 5$

[n = k + 1]: Se **demostrará** que $2^{k+1} > (k+1)^2, \forall k \geq 5$

Como siempre, partimos de lo que hay que probar.

$$\begin{aligned} 2^{k+1} &= 2^k \cdot 2 > k^2 \cdot 2 = k^2 + k^2 \\ &> k^2 + (2k + 1), \quad \text{se usó que } k^2 > 2k + 1, \forall x \geq 5 \\ &> (k+1)^2 \end{aligned}$$

Problema 1.46 Demostrar que $4^n > n^4, \forall n \geq 5$.

De nuevo el $n = 5$ es el primer natural.

[n = 5]: Es evidente que $4^5 = 1024 > 5^4 = 625$

[n = k]: Se **supone** válido que $4^k > k^4, \forall k \geq 5$

[n = k + 1]: Se **demostrará** que $4^{k+1} > (k+1)^4, \forall k \geq 5$

$$\begin{aligned} 4^{k+1} &= 4^k \cdot 4 \\ &> k^4 \cdot 4 = k^4 + k^4 + k^4 + k^4 \\ &> k^4 + 4k^3 + 6k^2 + (4k + 1), \quad \text{se usó: } k^4 > 4k^3, k^4 > 6k^2, \\ &> (k+1)^4, \quad k^4 > (4k + 1) \forall x \geq 5 \end{aligned}$$

se aceptan todo tipo de críticas.

Problema 1.47 Demostrar que $5^n \geq 4n + 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

Como siempre, los pasos clásicos:

[n = 1]: $5^1 = 5 = 4 \cdot 1 + 1$ ¡verdadero!

[n = k]: $5^k \geq 4 \cdot k + 1$ ¡supuesto!

[n = k + 1]: $5^{k+1} \geq 4(k+1) + 1 = 4k + 5$ ¡por demostrar!

Para esto último tenemos

$$\begin{aligned} 5^{k+1} &= 5^k \cdot 5 \\ &\geq (4k + 1) \cdot 5 \quad \text{hipótesis} \\ &\geq 20k + 5 \\ &\geq 4k + 5 \end{aligned}$$

Todos estos problemas que tienen que ver con desigualdades tienen un final “truculento”. Para quedar con el ánimo arriba veamos uno de divisibilidad.

Problema 1.48 Demostrar que $4^n - 1$ es divisible por 3, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Seguramente la palabra *divisible* cause una pequeña dificultad para empezar con el problema. Nos os afligáis, recordad que “el 10 es divisible por 5 pues existe el 2 que hace que $2 \cdot 5 = 10$ ”. La idea aquí es la misma.

$$[n = 1]: \quad 4^1 - 1 = 3 = 3 \cdot 1 \quad \text{¡divisible!}$$

$$[n = k]: \quad 4^k - 1 = 3 \cdot p(k) \quad \text{¡supuesto!}$$

el $p(k)$ es una expresión algebraica que contiene términos con k

$$[n = k + 1]: \quad 4^{k+1} - 1 = 3 \cdot q(k) \quad \text{¡supuesto!}$$

Vamos por la prueba de esto.

$$\begin{aligned} 4^{k+1} - 1 &= 4^k \cdot 4 - 1 = \underbrace{4^k - 1}_{= 3 \cdot p(k)} + 3 \cdot 4^k \\ &= 3 \cdot p(k) + 3 \cdot 4^k = 3 \cdot [p(k) + 4^k] \\ &= 3 \cdot q(k) \end{aligned}$$

Problema 1.49 Demostrar que $a^n > a$, $\forall n > 1$ $n \in \mathbb{N}$, $a > 1$.

Es evidente que el primer n es el 2.

$$[n = 2]: \quad a - 1 > 0 \wedge a > 0 \implies a^2 - a > 0 \implies a^2 > a$$

¡verdadero!

$$[n = k]: \quad a^k > a \quad \text{¡supuesto!}$$

$$[n = k + 1]: \quad a^{k+1} > a \quad \text{¡por demostrar!}$$

Para esto último tenemos

$$\begin{aligned} a^{k+1} &= a^k \cdot a > a \cdot a && \text{supuesto } a^k > a \\ &> a \cdot 1, && \text{hipótesis } a > 1 \\ &> a \end{aligned}$$

Problema 1.50 Demostrar que $0 < a < 1 \implies a^n < 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

El primer n es el 1.

$$[n = 1]: \quad a^1 < 1 \quad \text{¡verdadero!}$$

$$[n = k]: \quad a^k < 1 \quad \text{¡supuesto!}$$

$$[n = k + 1]: \quad a^{k+1} < 1 \quad \text{¡por demostrar!}$$

Para esto tenemos

$$\begin{aligned} a^{k+1} &= a^k \cdot a < 1 \cdot a && \text{supuesto } a^k < 1 \\ &< a \\ &< 1 && \text{hipótesis } a < 1 \end{aligned}$$

Problema 1.51 Demostrar que $0 < a < b \implies a^n < b^n, \forall n \in \mathbb{N}$.

El primer n es el 1

$[n = 1]: a^1 < b^1$ ¡verdadero!

$[n = k]: a^k < b^k$ ¡supuesto!

$[n = k + 1]: a^{k+1} < b^{k+1}$ ¡por demostrar!

Para esto último tenemos

$$\begin{aligned} a^{k+1} &= a^k \cdot a < a \cdot b^k && \text{supuesto } a^k < b^k \\ &< b \cdot b^k && \text{hipótesis } a < b \\ &< b^{k+1} \end{aligned}$$

Veamos ahora algo del teorema del binomio. Las preguntas clásicas son: Hallar el término central, el que no contiene la variable, hallar cualquier término haciendo algunas consideraciones previas. La forma del binomio es

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Problema 1.52 Hallar el término que no contiene x en

$$\left(3x - \frac{1}{6x^2}\right)^{150}$$

No es la gracia ir sacando uno por uno los términos, y darse cuenta que cuando se va en el 40 todavía no se le encuentra. La “clave” está en saber que forma tienen los términos, esto es, usar el famoso T_k .

$$T_k = \binom{n}{k-1} x^{n-k+1} y^{k-1}$$

Para el problema que estamos viendo esto equivale a

$$\begin{aligned} T_k &= \binom{150}{k-1} (3x)^{150-k+1} \left(-\frac{1}{6x^2}\right)^{k-1} \\ &= \binom{150}{k-1} 3^{151-k} \cdot x^{151-k} \cdot (-1)^{k-1} \cdot (6^{-1})^{k-1} \cdot (x^{-2})^{k-1} \\ &= \binom{150}{k-1} 3^{151-k} \cdot (-1)^{k-1} \cdot (6^{-1})^{k-1} \cdot x^{151-k} \cdot (x^{-2})^{k-1} \\ &= \binom{150}{k-1} 3^{151-k} \cdot (-1)^{k-1} \cdot (6^{-1})^{k-1} \cdot x^{151-k-2k+2} \\ &= \binom{150}{k-1} 3^{151-k} \cdot (-1)^{k-1} \cdot (6^{-1})^{k-1} \cdot x^{153-3k} \end{aligned}$$

Se debe anular el exponente de x . Luego, $153 - 3k = 0 \implies k = 51$. Esto significa que el término de orden 51 es el que no lleva x . La comprobación es sencilla

$$T_{51} = \binom{150}{50} (3x)^{100} \left(-\frac{1}{6x^2}\right)^{50} = \binom{150}{50} (3)^{100} \frac{1}{6^{50}} = \binom{150}{50} \left(\frac{3}{2}\right)^{50}$$

Problema 1.53 Hallar el término central en el desarrollo de

$$\left(\frac{3x}{4} + \frac{2y}{3}\right)^8$$

Aquí es cosa de saber contar, $n = 8$ implica que hay nueve términos en el desarrollo. Separando 4 a la izquierda y 4 a la derecha, el quinto término, el T_5 , es el central.

$$T_5 = \binom{8}{4} \left(\frac{3x}{4}\right)^4 \left(\frac{2y}{3}\right)^4$$

Problema 1.54 En el desarrollo del binomio $\left(2\sqrt{x} + \frac{y^2}{3}\right)^8$ hallar:

1. el séptimo término
2. el término que contiene a x^3y^4

Para hallar el séptimo término, el T_k no falla

$$T_7 = \binom{8}{6} a^{8-7+1} b^{7-1} = \binom{8}{6} a^2 b^6$$

Veamos el cálculo del número combinatorio

$$\binom{8}{6} = \frac{8!}{3! \cdot 6!} = \frac{7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{28}{3}$$

En consecuencia

$$T_7 = \frac{28}{3} (2\sqrt{x})^2 \cdot \left(\frac{y^2}{3}\right)^6 = \frac{112}{3} x \cdot \left(\frac{y^2}{3}\right)^6$$

Para responder la segunda interrogante, de nuevo el T_k proporciona la respuesta. Sabemos que

$$T_k = \binom{n}{k-1} a^{n-k+1} b^{k-1}$$

reemplazando los valores del problema

$$T_k = \binom{8}{k-1} a^{8-k+1} b^{k-1} = \binom{8}{k-1} (2\sqrt{x})^{9-k} \cdot \left(\frac{y^2}{3}\right)^{k-1}$$

se debe hallar el valor de k para que se obtenga x^3y^4

Interesa entonces hallar las potencias de x y las potencias de y (no interesan las constantes).

- $(\sqrt{x})^{9-k} = x^3 \implies \frac{9-k}{2} = 3 \implies k = 3$
- $(y^2)^{k-1} = y^4 \implies 2k-2 = 4 \implies k = 3$

Se concluye que el T_3 contiene x^3y^4 .

1.3.6 Logaritmos

El logaritmo en base $\boxed{a}$ de un **número** $\boxed{b}$ es el exponente x al que hay que elevar la base $\boxed{a}$ para producir este número $\boxed{b}$. En símbolos

$$\log_a b = x \iff a^x = b$$

Problema 1.55 Resolver la ecuación $e^{x+2} = \sqrt{e}$

Aplicamos logaritmos en ambos lados de la igualdad

$$e^{x+2} = \sqrt{e} \implies \ln(e^{x+2}) = \ln(\sqrt{e})$$

Usemos la propiedad $\ln x^k = k \ln x$

$$\ln(e^{x+2}) = \ln(\sqrt{e}) \implies (x+2) \ln e = \frac{1}{2} \ln e$$

Dado que $\ln e = 1$, se tiene

$$x+2 = \frac{1}{2} \implies x = -2 + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$

Problema 1.56 Resolver la ecuación $\log 2 + \log(11 - x^2) = 2 \log(5 - x)$

Se hace uso de las propiedades del logaritmo

$$\log 2 + \log(11 - x^2) = 2 \log(5 - x) \implies \log 2(11 - x^2) = \log(5 - x)^2$$

A partir de la última ecuación

$$2(11 - x^2) = (5 - x)^2 \implies 22 - 2x^2 = 25 - 10x + x^2 \implies 3x^2 - 10x + 3 = 0$$

Al resolver la cuadrática se halla que $x = 3$ y $x = \frac{1}{3}$

Problema 1.57 Resolver $\log_2(x+1) = \log_4(x+3)$

Lo primero que se observa es logaritmo en bases distintas. Esto es igual al problema de sumar fracciones, deben tener igual denominador. En este caso debemos reducir a una misma base. La fórmula

$$\log_a b = \frac{\log a}{\log b} = \frac{\ln a}{\ln b}$$

de esta forma;

$$\log_4(x+3) = \frac{\log_2(x+3)}{\log_2 4}$$

Se tiene

$$\log_2(x+1) = \frac{\log_2(x+3)}{2} \implies 2 \log_2(x+1) = \log_2(x+3) \implies \log_2(x+1)^2 = \log_2(x+3)$$

de lo cual

$$(x+1)^2 = x+3 \implies x^2 + x - 2 = 0 \implies (x+2)(x-1) = 0$$

Las soluciones son $x = -2$ y $x = 1$. Un consejo, cuando se trabaja con ecuaciones cuadráticas y también con logaritmos, hay que chequear las soluciones, pues, puede que alguna no funcione. Puedes ver que la solución $x = -2$, hace negativo el argumento de $\log(x+1)$. Luego, la única solución es $x = 1$.

Problema 1.58 Resolver $\frac{\log(35-x^3)}{\log(5-x)} = 3$

Eliminamos el denominador multiplicando

$$\frac{\log(35-x^3)}{\log(5-x)} = 3 \implies \log(35-x^3) = 3\log(5-x)$$

Ecuación de la cual

$$35-x^3 = (5-x)^3 \implies 15x^2 - 75x + 90 = 0$$

Las soluciones de esta cuadrática son $x = 2$ y $x = 3$. Ambas son soluciones.

1.3.7 Topología

La palabra *logos* significa ciencia o saber, el término *topos* es lugar, extensión o posición. De esta manera, **Topología** viene a ser la ciencia de la extensión o del lugar. He rescatado la siguiente definición

Topología: *Parte de la matemática que estudia los conjuntos estructurados mediante relaciones que permiten decir cuando un elemento del conjunto es “contiguo” o “próximo” a una parte del mismo.*

Los problemas que se pueden presentar son del tipo: Hallar determinada clase de puntos del conjunto, interiores, exteriores, frontera, adherentes, de acumulación. Determinar si el conjunto dado es abierto, cerrado o ninguna de estas alternativas, y probar alguna propiedad entre estos puntos. La idea básica para entender estos elementos es el concepto de **vecindad**. Se me viene a la memoria uno de los más divertidos programas de televisión, “El Chavo del 8”, ahí tenemos un ejemplo, **la vecindad del Chavo**, un conjunto de personas que viven todas juntas pero no revueltas en un cierto espacio. Es sencillo verificar quienes viven o son miembros de esa vecindad. En matemática es casi lo mismo, la noción de **distancia** proporciona aquí la respuesta.

Distancia : La distancia entre dos puntos $x, y \in \mathbb{R}$ es el valor absoluto de su diferencia.

$$d(x, y) = |x - y|$$

La distancia entre los números reales -2 y 5 es

$$d(-2, 5) = |-2 - 5| = |-7| = 7$$

de igual modo, la distancia entre el 1 y el 7 es

$$d(1, 7) = |1 - 7| = |-6| = 6$$

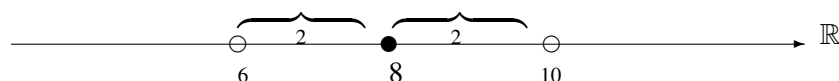
Veamos entonces vecindad y como la distancia allí juega un papel fundamental.

Vecindad : Una vecindad abierta centrada en el punto $x_0 \in \mathbb{R}$ de radio $r > 0$ es el conjunto formado por todos los puntos que se encuentran a una distancia estrictamente menor de dicho punto que el valor del radio.

$$V(x, r) = \{y \in \mathbb{R} / d(x, y) < r\}$$

Problema 1.59 Para escribir la vecindad de centro 8 y radio 2, debemos encontrar todos los puntos $y \in \mathbb{R}$ que se encuentren a una distancia del 8 menor que 2. esto es

$$\begin{aligned} V(8, 2) &= \{y \in \mathbb{R} / d(y, 8) < 2\} = \{y \in \mathbb{R} / |y - 8| < 2\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} / -2 < y - 8 < 2\} = \{y \in \mathbb{R} / 6 < y < 10\} \end{aligned}$$



Problema 1.60 El conjunto A de números reales es tal que

$$A = (-3, 0) \cup \left(\frac{1}{2}, 7\right] \cup \{49\}$$

Si se pone en la recta real resulta como en la figura



Una primera definición sobre “proximidad” guarda relación con aquellos puntos que son **adherentes** a un conjunto.

Punto adherente : Un punto x es **adherente** a un conjunto A , si **toda** vecindad de x contiene puntos del conjunto A . La colección de todos los puntos adherentes a A se llama **Adherencia** de A y se anota $\bar{A}$ o bien $adh(A)$.

Es claro, en nuestro ejemplo, que cualquier punto ubicado a la izquierda del -3 no es punto adherente, por ejemplo -4 no lo es pues la vecindad $V(-4; \frac{1}{10}) \cap A = \emptyset$. La idea de contiguo tiene que ver con el significado que tiene en el léxico habitual, “cercano a”. Pensemos en el -3 , hacemos cualquier vecindad de radio mayor que cero, es obvio de $V(-3, r) \cap A \neq \emptyset$, el -3 está en la intersección, por lo menos. Si hacemos esto con todo elemento que esté en el conjunto A , la vecindad con centro en ese punto tendrá intersección no vacía con A pues al menos ese punto está en la intersección. Esto significa que todo elemento que esté en el conjunto es adherente o contiguo. Los puntos que están entre el 7 y el 49 no son adherentes. El 49 si lo es pues está en el conjunto A y al tomar vecindad con centro en 49 , el 49 está en la intersección. El caso del 0 y del $\frac{1}{2}$ es análogo al del -3 . En consecuencia, la Adherencia del conjunto A es

$$\bar{A} = [-3, 0] \cup \left[\frac{1}{2}, 7\right] \cup \{49\}$$

Se aprecia que existen diferentes grados de “contiguidad”, el -3 no está en A y sin embargo es contiguo, el 7 pertenece al conjunto A y también lo es, ambos elementos se encuentran en los extremos del intervalo. El 4 es adherente o contiguo y se encuentra bien hacia el “interior” de A .

Punto interior : Un punto x es **interior** a un conjunto A , si es posible hallar **una** vecindad con centro en x que sea subconjunto de A . La colección de todos los puntos interiores a A se llama **Interior** de A y se anota A° .

Estos puntos no son complicados, es lo mismo que estar en una pieza, si una persona está dentro es por que se halla en el interior y si se está afuera, es por que se encuentra en el exterior. En nuestro ejemplo, cualquier número que esté a la izquierda del -3 en la recta no es punto interior, lo mismo para los que están entre 0 y $\frac{1}{2}$, entre 7 y 49 , y los están a la derecha del 49 . ¿Qué nos queda?, los puntos en los extremos y entre los extremos. De los extremos ninguno es interior, pues al hacer la vecindad en uno de esos puntos, hay una parte de la vecindad (izquierda en el -3 , derecha en el 7) que queda fuera de A , con lo cual no se cumple que $V(x, r) \subset A$. El caso del 49 es más simpático, al hacer una vecindad pequeña con centro en 49 (pensar en un compás) y trazar a derecha e izquierda para marcar el radio, todo queda fuera de A , con lo cual $V(49, r) \not\subset A$. Todos los puntos entre los extremos de los intervalos

$(-3, 0)$ y $(\frac{1}{2}, 7)$ son interiores, pues se puede mostrar una vecindad que queda enteramente contenida en A . A ver, pensar en el 6,9. La vecindad de centro 6,9 y radio $r = 0,01$ queda como subconjunto de A y ello es suficiente para probar que el 6,9 es punto interior. Lo mismo para el resto de los puntos. En consecuencia, el interior de A es

$$A^\circ = (-3, 0) \cup (\frac{1}{2}, 7)$$

Punto frontera : Un punto x es **frontera** de un conjunto A , si en **toda** vecindad con centro en x se encuentran puntos de A y de su complemento A^c . El conjunto de todos los puntos frontera de A se llama **frontera** de A y se anota $Fr(A)$.

Estos puntos son sencillos de identificar, ya que están forzados a un doble trabajo, uno con A y el otro con A^c . Se tiene

$$x \text{ es punto frontera} \iff V(x, r) \cap A \neq \emptyset \quad \wedge \quad V(x, r) \cap A^c \neq \emptyset$$

Volviendo al ejemplo, los puntos a la izquierda del -3 no tienen ninguna posibilidad, pues vecindad de radio pequeño en cualquiera de esos puntos no intersecta al conjunto A . Lo mismo para los puntos interiores, vecindad “chiquitita” y no hay intersección con el A^c . Nos van quedando los puntos extremos y un aislado (el 49). El -3 es frontera pues al tomar cualquier vecindad con centro en -3 hay intersección con el complemento hacia la izquierda e intersección con A hacia la derecha. Algo similar ocurre con el 0, el $\frac{1}{2}$ y el 7. El caso del 49 otra vez es simpaticón. Toda vecindad con centro en 49 (generalmente se consideran sólo vecindades de radio pequeño) intersecta elementos del complemento, tanto a izquierda como derecha, y siempre al 49 como elemento de A . En consecuencia la frontera del conjunto es

$$Fr(A) = \{-3, 0, \frac{1}{2}, 7, 49\}$$

Punto exterior : Un punto x es **exterior** a un conjunto A , si es posible hallar **una** vecindad con centro en x que no contenga a ningún elemento del conjunto. El conjunto de todos los puntos con esta propiedad se llama **exterior** de A y se anota $Ex(A)$.

Cuando un punto no es adherente a un conjunto, entonces se puede hallar al menos una vecindad del punto que no tiene ni un sólo punto del conjunto. Eso es punto exterior. En el caso del ejemplo, **todos** los puntos a la izquierda del -3 son exteriores, así como los que están entre 0 y $\frac{1}{2}$, entre 7 y 49, y todos los posteriores a 49. Es claro que el 49 no es exterior, toda vecindad centrada en 49 contiene al 49 que es elemento de A . Luego, el exterior del conjunto es

$$Ex(A) = (-\infty, -3) \cup (0, \frac{1}{2}) \cup (7, 49) \cup (49, \infty)$$

Hay que tener presente que complemento y exterior no son lo mismo. El complemento de A en $\mathbb{R}$ es

$$A^c = (-\infty, -3] \cup [0, \frac{1}{2}] \cup (7, 49) \cup (49, \infty)$$

corresponde entonces que $Ext(A) \subset A^c$

La última clase de puntos tiene que ver con el concepto de límite y por ende con el de continuidad

Punto de acumulación : Un punto x es de **acumulación** a un conjunto A si **toda** vecindad de centro en x , excluido x , contiene elementos del conjunto A . La colección de todos los puntos con esta propiedad se llama **conjunto derivado** de A y se anota A' .

En lenguaje simbólico esto se anota

$$x \text{ es punto de acumulación} \iff (V(x, r) - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$$

En nuestro ejemplo, todo punto interior no tiene problema en ser de acumulación, tampoco los extremos de los intervalos que aparecen. El 49 no es de acumulación, pues vecindad pequeña centrada en 49, sin el 49, no intersecta puntos de A . Además, los puntos exteriores nunca tendrán interés en ser de acumulación. En consecuencia, el conjunto de puntos de acumulación es

$$A' = [-3, 0] \cup [\frac{1}{2}, 7]$$

Con esta clase de puntos es posible caracterizar a los conjuntos como abiertos, cerrados, o ni abierto ni cerrado.

Conjunto abierto : Un conjunto A es **abierto** si todo punto de A es **interior**. Esto es,

$$A \text{ abierto} \iff A = A^\circ$$

Conjunto cerrado : Un conjunto A es **cerrado** si todo punto de A es **adherente**. Esto es,

$$A \text{ cerrado} \iff A = \bar{A}$$

El conjunto $A = [0, 1)$ no satisface ninguna de estas condiciones, por tanto no es abierto ni cerrado.

Problema 1.61 Determinar si el conjunto dado es abierto o cerrado

$$A = \{x \in \mathbb{R} / |x^2 + 1| > 2\}$$

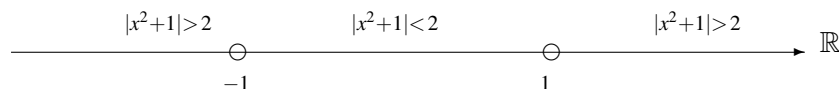
De acuerdo a lo establecido en las definiciones, debemos hallar interior y/o adherencia para responder al problema, pero ello está referido al conjunto solución, a saber quienes son realmente los puntos que están en el conjunto, eso se sabe sólo por el conjunto solución.

Conjunto solución

¡Oh que sorpresa! nuestra vieja y querida amiga tricotomía nos viene a visitar

$$|x^2 + 1| = 2 \iff x = \pm 1$$

Ahora le corresponde a la recta real hacer su tarea



Se tiene entonces que el conjunto solución es

$$S = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$$

Los que están dentro interiores y los que no están chao. Veamos el interior

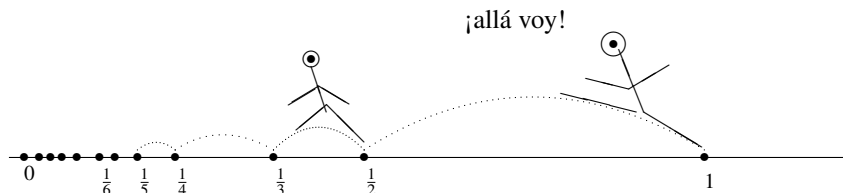
$$S^\circ = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$$

Con esto, $S = S^\circ$, lo que implica que S es un conjunto abierto. No es necesario sacar adherencia, los únicos conjuntos abierto y cerrados al mismo tiempo son el espacio total, en este caso $\mathbb{R}$ y el conjunto vacío.

Problema 1.62 Determinar si el conjunto dado es abierto o cerrado

$$H = \{x \in \mathbb{R} / x = \frac{1}{n}, n \in (\mathbb{N} - \{0\})\}$$

Obsérvese que este conjunto está constituido sólo de puntos aislados. La recta real muestra algunos de ellos en círculo ennegrecido. Es como ir jugando al “luche”, se va saltando de una a otra baldosa.



Veamos primero el asunto de los puntos interiores. De los candidatos analicemos algún punto que esté en el conjunto, de los otros sabemos que no se interesan en ser puntos interiores. Por ejemplo, el $\frac{1}{2}$. Le hacemos vecindad con centro en él, radio r pequeñín, y ¡fuera!, no es interior, la vecindad no es subconjunto de H . Lo mismo pasa con cada punto que esté en H . En consecuencia, no hay puntos interiores. Ello significa que $H^\circ = \emptyset$. Con ello el conjunto H ya no es abierto. Respecto de la adherencia tenemos varios candidatos entre ellos el $\frac{1}{2}$ que si es adherente pues al hacer vecindad centrada en él, con cualquier radio siempre se intersecta con el $\frac{1}{2}$. Con esta lógica, todos los puntos de H son adherentes. Hay un candidato “contiguo”, cercano, próximo, vecino a H que es el 0 (cero). Este “bicho” es adherente, a pesar de no ser elemento del conjunto, pero ello no le impide ser contiguo, ya que cualquier vecindad centrada en el 0 de radio arbitrario y “chico” intersecta hacia la derecha elementos del conjuntos H , pues todos los elementos de H se encuentran “pegados” camino al 0. En consecuencia, la adherencia de H es

$$\overline{H} = \{0\} \cup H$$

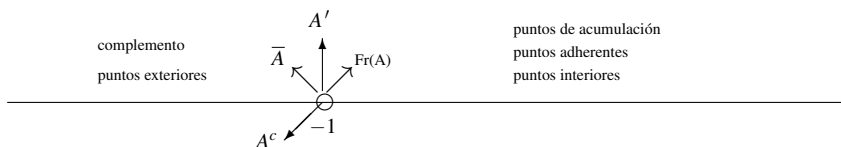
No se satisface la condición para que H sea cerrado. Por tanto, H no es abierto ni cerrado.

Problema 1.63 Hallar interior, exterior, frontera y adherencia del conjunto. Decidir si este conjunto es abierto o cerrado

$$A = \{x \in \mathbb{R} / -1 < x < \infty\}$$

Respecto de los puntos interiores es claro que todo punto x tal que $-1 < x < \infty$ es interior, ya que siempre es posible hacer vecindad centrada en x subconjunto de A . El único punto frontera es el -1. Además, el -1 es punto adherente y de acumulación. En resumen tenemos:

$$\begin{aligned} A^\circ &= -1 < x < \infty, & \overline{A} &= [-1, \infty), & Ext(A) &= (-\infty, -1) \\ Fr(A) &= \{-1\}, & A' &= [-1, \infty), & A^c &= (-\infty, -1] \end{aligned}$$



La recta muestra la ubicación de los puntos, se resalta que el -1 tiene cuatro categorías, es punto frontera, punto adherente, punto de acumulación y pertenece al complemento de A . ¡pierdete una!

1.4 Problemas Propuestos

Todos los problemas que se plantean a continuación han sido puestos en pruebas a los mechones de Ingeniería, ¡la firme!, no es chiva. Me costó harto recopilarlas. Te recomiendo hacer lo más que puedas. Aprovecha al máximo a los ayudantes.

1. Sea $x \in \mathbb{R}$ tal que $0 < x < 1$. Determinar validez de:

$$a) \quad x^2 < x \quad b) \quad x < \frac{1}{x} \quad c) \quad 3x < 3$$

2. Hallar el séptimo término de $(a+b)^{15}$. Resp. $5005 a^9 b^6$

3. Hallar el valor de n si los coeficientes del sexto y décimo término del desarrollo de $(a+b)^n$ son iguales. Resp. $n = 20$

4. Probar que $x^{2n-1} + y^{2n-1}$ es divisible por $x+y$

5. Probar que $2^{4n} - 1$ es divisible por 15

6. Probar que $3^{2n-1} - 1$ es divisible por 8

7. Probar que $7^n + 1$ es divisible por 8, siempre que n sea impar

8. Probar que $2^{2n} + 1$ es divisible por 5, siempre que n sea impar

9. Hallar el término central y el término independiente de x en el desarrollo de $\left(2x^2 - \frac{1}{2x}\right)^{18}$

10. Hallar el coeficiente de x^6 en el desarrollo de $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{10}$

11. Probar que $\binom{6}{3} + 2\binom{6}{4} + \binom{6}{5} = \binom{8}{5}$

12. Considerar el desarrollo de $\left[\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{x}\right)^2 + 1\right]^4$

- a) Hallar el coeficiente del término de grado 13

- b) Hallar el término independiente de x

- c) Hallar la cantidad de términos que tiene el desarrollo **completo**

13. Probar que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

14. Probar que $0 < a < b \implies a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b$

15. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$. Probar que $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \implies \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$

16. Sean $a, b \in \mathbb{R}^+$. Probar que $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$

17. Verificar si las afirmaciones siguientes son verdaderas o falsas. (las verdaderas se demuestran, la falsas un contraejemplo)

$$a) \quad a = b \implies a^2 = b^2 \quad b) \quad a^2 = b^2 \implies a = b \quad c) \quad a = b \implies a^3 = b^3$$

$$d) \quad a^3 = b^3 \implies a = b \quad e) \quad a^2 > 0 \implies a > 0 \quad f) \quad a < b \implies ac < bc$$

18. Probar que $x < 0 \implies x + \frac{1}{x} \leq -2$
19. Probar que $|x - 4| < 1 \implies \frac{1}{3} < \frac{1}{x-2} < 1$
20. Probar que $|x - 3| < 1 \implies \frac{1}{8} < \frac{1}{x+4} < \frac{1}{6}$
21. Probar que $|7 - 2x| < 5 \implies 0 \leq |x - 5| < 4$
22. Resolver la desigualdad $\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} > 0$ Resp. $S = (0, 1)$
23. Resolver la desigualdad $6x - 5 \leq x^2 + 3 < 4x + 3$
24. Resolver la desigualdad $||x - 2| + |x - 1|| \geq 1$
25. Resolver la desigualdad $\left| \frac{x(5-3x)}{x^2-2x+8} \right| < 3$
26. Probar, usando propiedades de $\mathbb{R}$, que $\frac{(-a)}{(-b)} = \frac{a}{b}$, $b \neq 0$
27. Resolver para x la ecuación $\frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}} = y$
28. Sea $A = \{x \in \mathbb{R} / x < x^2 - 12 \leq 4x\}$. Determinar si este conjunto es acotado superior e inferiormente. Hallar (si existen) supremo, máximo, mínimo e ínfimo.
29. Sea $A = \{x \in \mathbb{R} / x = \frac{7}{1+3n}, n \in \mathbb{N}\}$. Determinar supremo, máximo, mínimo e ínfimo. Hallar interior, exterior, frontera y conjunto de puntos de acumulación.
30. Sea $A = \{x \in \mathbb{R} / \frac{1}{1-x} \leq 1 + 3x\}$. Determinar supremo, máximo, mínimo e ínfimo. Hallar interior, exterior, frontera y conjunto de puntos de acumulación.
31. Probar que $|x| < 2 \implies \left| \frac{x-3}{x+4} \right| < \frac{5}{2}$
32. Determinar el coeficiente que no contiene x en el desarrollo de $\left(3x - \frac{1}{6x^2}\right)^{150}$
33. Sea $A = \{x \in \mathbb{R} / \left|x + \frac{6}{x}\right| \geq 5\}$. Determinar supremo, máximo, mínimo e ínfimo. Hallar interior, exterior, frontera y conjunto de puntos de acumulación
34. Sea $H = \{x \in \mathbb{R} / x = \frac{1}{n} n \in \mathbb{N}\} \cup (2, 3) \cup \{4, 5\} \cup [6, 7]$. Determinar supremo, máximo, mínimo e ínfimo. Hallar interior, exterior, frontera y conjunto de puntos de acumulación
35. Un lado de un triángulo es 2 cms más corto que la base, el otro lado es 3 cms más largo que la base. Hallar la longitud de la base si se sabe que el perímetro del triángulo es mayor que 19 cms.

36. Hallar el término que contiene x^2 en el desarrollo de $(x^2 - 2x^{-4})^{28}$

37. Hallar el valor de x que satisface la ecuación $\log x^2 - \log_x 10 = 1$

38. Demostrar las dos siguientes proposiciones en $\mathbb{R}$

$$a) a - b < 0, \quad c < 0 \implies ac > bc$$

$$b) |a| - |b| \leq |a + b|$$

39. Resolver las siguientes desigualdades:

$$a) |x + 1| < -x^2$$

$$b) |x^2 + 2x - 35| = -(x^2 + 2x - 35)$$

40. Probar que $|x - 8| < 2 \implies \frac{1}{6} < \frac{1}{x - 4} < \frac{1}{2}$

41. Probar que $|x| - |y| \leq |x - y|$

42. Resolver la desigualdad $\frac{x^2 - x - 12}{x^2 + x - 2} < 0$

43. Determinar todos los números reales que satisfacen:

$$a) \frac{x}{x - 3} > 0$$

$$b) 1 - x \geq 2x^2$$

$$c) \left| \frac{3 - 2x}{2 + x} \right| \leq 4$$

$$d) \{x \in [5, 9] / 5x - 3 \geq 0, \quad \wedge \quad 3x - 12 \geq 0\}$$

44. Hallar un número real M tal que $x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}] \implies \left| \frac{x + 2}{x - 2} \right| \leq M$

45. Sean $x, y \in \mathbb{R}^+$ distintos. Probar que $\frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2} > \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

46. Demostrar por inducción que $\sum_{k=1}^n \frac{k 2^k}{(k+2)!} = 1 - \frac{2^{k+1}}{(n+2)!}$

47. Probar que el coeficiente del término central en el desarrollo de $(1+x)^{2n}$ es igual a la suma de los coeficientes de los términos centrales en el desarrollo de $(1+x)^{2n-1}$

48. Determinar supremo, máximo, mínimo e ínfimo. Hallar interior, exterior, frontera y conjunto de puntos de acumulación de los siguientes conjuntos:

$$A_1 = \{x \in \mathbb{R} / \frac{(x+4)(x-1)}{(x-2)(x+3)} > 0\}$$

$$A_2 = \{x \in \mathbb{R} / |3 - 2x| \leq |x + 4|\}$$

$$A_3 = \{x \in [3, 9] / 16 + 6x > x^2\}$$

$$A_4 = \{x \in \mathbb{R} / |3x - 1| > 2x + 5\}$$

$$A_5 = \{x \in [-1, \frac{1}{2}] / \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} > 0\}$$

$$A_6 = \{x \in \mathbb{R} / \frac{4}{x} - 3 > \frac{2}{x} - 7\}$$

$$A_7 = \{x \in \mathbb{R} / 10 + 3x \geq x^2\}$$

$$A_8 = \{x \in (-5, 2) / x + |x| < 1\}$$

49. Resolver las siguientes inecuaciones, indicando supremo, máximo, mínimo e ínfimo. Hallar interior, exterior, frontera y conjunto de puntos de acumulación:

$$a) |x^2 - x| + x > 1$$

$$b) (x - a)(x - b)(x - c) > 0, a < b < c$$

50. Decidir si las proposiciones dadas a continuación son verdaderas o falsas.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \sqrt{a} \geq \sqrt{\frac{1}{a}}, \quad \forall a > 0 & \text{b) } -1 < x \leq 2 \implies |x-1| < 2 \\ \text{c) } \sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b} & \text{d) } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \implies \frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d}, b, d \neq 0 \end{array}$$

51. Demostrar usando inducción:

$$\begin{array}{l} \text{a) } 1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}, \quad \forall n \geq 0 \in \mathbb{N}, x \neq 1. \\ \text{b) } (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\cdots(1+x^{2^n}) = \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}, \quad x \neq 1 \\ \text{c) } \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \\ \text{d) } \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{array}$$

52. Resolver en $\mathbb{R}$, $\sqrt{10-3x} - \sqrt{6-15x} = 2$

53. Determinar si las proposiciones dadas son o no verdaderas (demostración y contraejemplo)

$$\begin{array}{ll} \text{a) } a < 0 \implies \sqrt{-a} \in \mathbb{R} & \text{c) } \sqrt{a^2+2a+1} = a+1, \quad \forall a \in \mathbb{R} \\ \text{b) } x < -1 \implies \frac{3x+1}{x} > 2 & \text{d) } |2-x| \leq 3 \implies \left| \frac{2x-4}{x+\frac{5}{2}} \right| \leq 4 \end{array}$$

54. Determinar si existe un real x para el cual $|x-5| + |1-x| < 4$

55. Determinar supremo, máximo, mínimo e ínfimo. Hallar interior, exterior, frontera y conjunto de puntos de acumulación de los siguientes conjuntos:

$$B_1 = \left\{ x \in \mathbb{R} / \frac{5+4x-2x^2}{2x-3-x^2} < 1 \right\} \quad B_2 = \left\{ x \in \mathbb{R} / \left| \frac{5}{2x-1} \right| \leq \left| \frac{1}{2-x} \right| \right\}$$

56. Probar que

$$\log_a \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)^{1/2} + \log_a \sqrt{x+1} + \log_a x = 0$$

57. Simplificar la expresión $\log_a (\log_a a^{a^k})$

58. Hallar, en términos de x y y el valor de $\log \sqrt{ac}$, si se sabe que $\log \frac{a}{b} = x$, y $\log bc = y$

59. Sean $a > b$, $c > d$, con $a, b \in \mathbb{R}^+$, $c, d \in \mathbb{R}^-$. De las afirmaciones:

$$\text{I) } \frac{a}{c} > \frac{b}{d} \quad \text{II) } \frac{a}{c} < \frac{b}{d} \quad \text{III) } ac > bd$$

Son verdaderas:

- sólo I • sólo II • sólo III • II y III • N.A

60. Si $(5x + 3) \in [-2, 10]$. De las afirmaciones:

$$\text{I) } \frac{1}{5-3x} \in \left[-\frac{5}{4}, -\frac{1}{8}\right] \quad \text{II) } \frac{1}{5-3x} \in \left[\frac{1}{8}, \frac{5}{4}\right] \quad \text{III) } (5-3x) \in \left[2, \frac{46}{5}\right]$$

son verdaderas:

- sólo I • sólo II • sólo I y III • II y III • N.A

61. Sean $a < b$ y $ab > 0$. de las proposiciones:

$$\text{I } \frac{1}{a} > \frac{1}{b} \quad \text{II } \frac{1}{a} < \frac{1}{b} \quad \text{III } -\frac{1}{a} > -\frac{1}{b} \quad \text{IV } -\frac{1}{a} < -\frac{1}{b}$$

son verdaderas:

- sólo I ■ sólo II ■ I y III ■ II y IV ■ N.A.

62. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Si $a < 0$, $b < 0$, $c < b$, $d > 0$, de las proposiciones:

$$\text{I } d > a \quad \text{II } dc > ac \quad \text{III } dc > ab$$

son verdaderas:

- sólo I ■ I y II ■ I y III ■ II y III ■ N.A.

63. Sean x e y números reales.

$$\text{I } x > 0 \wedge y \neq 0 \quad \text{II } x \leq 0 \wedge y < 0 \quad \text{III } x \geq y \wedge y > 0$$

Son suficientes para que $\sqrt{x \cdot y^{-1}}$ sea un número real:

- sólo III ■ I y II ■ II y III ■ I y III ■ N.A.

64. Sean x e y números reales negativos. De las proposiciones:

$$\text{I } -x^2 - y^2 \quad \text{II } -3x - 3y \quad \text{III } -(x+y)^3$$

Son números negativos:

- sólo I ■ sólo II ■ sólo III ■ I y II ■ todos

65. Si $|x - 8| < 2$, entonces es correcto que:

$$\text{I } \frac{1}{6} < \frac{1}{x-4} < \frac{1}{2} \quad \text{II } |x+5| < 15 \quad \text{III } -\frac{1}{6} < \frac{1}{4-x} < -\frac{1}{2}$$

- sólo I ■ I y II ■ I y III ■ II y III ■ todos

2. Analítica y Funciones ...



(... encontrando mi alma gemela)

2.1 Introducción

Seguimos en la senda del Cálculo, pero ahora voy acompañado, esto de ser bueno para la Matemática hace que “se fijen en uno”, una “mechoncita”, morenaza de ojos grandes fijóse en este “matador”, así que tengo alumna particular, por eso debo ponerle más “pino” al estudio, uno nunca sabe,... puede que sea mi alma gemela.

En el Liceo el profe le daba harto color, la Geometría Analítica y la Trigonometría. Acá en la Universidad una semana y adiós Analítica. Con las funciones reales, incluida la Trigonometría tienen un poco más de piedad con los alumnos, ¡dos semanas y chao! La verdad es que si uno viene bien de la Media no hay tanto drama con estas materias, pero si el compadre viene del último Liceo de “Chuchunco” y no le “cruje” hasta ahí no más llega. La primera prueba a veces la tiran sólo con los reales y en otros casos la acompañan con Geometría Analítica, de hecho en algunas pruebas resueltas queda esto en evidencia.

2.1.1 Analítica

En Analítica hay que saber todo lo de la recta, que es fácil, y las ecuaciones de las circunferencias, parábolas, elipses e hipérbolas con sus asíntotas, pero últimamente los profes se están “paletiendo” y hasta dan en las pruebas un pequeño formulario. ¡por fin se están dando cuenta que no todo puede ser memoria!, ¡alabadas sean las nuevas metodologías de enseñanza!

Problema 2.1 Hallar el lugar geométrico (LG) de un punto (x, y) cuyo producto de las pendientes de las rectas que unen (x, y) con los puntos fijos $(3, -2)$ y $(-2, 1)$ es igual -6 .

Una de las primeras sugerencias que se escuchan de los profesores de Matemática a sus alumnos es que *lean* bien el problema. Ello es válido acá en la Universidad y en todas partes. Hay que saber distinguir entre las hipótesis (los datos que entrega el problema) y la tesis (lo que hay que probar). Intentaremos descifrar el problema.

Lo primero que se lee es hallar un **lugar geométrico**, que es *un conjunto de puntos cuyas coordenadas satisfacen una ecuación de la forma $F(x, y) = 0$* . Veamos entonces qué elementos nos entregan para poder determinar la ecuación. La lectura sigue con cuyo **producto**, ello significa que algo debemos multiplicar ... de **pendientes** de las rectas, ¡hay que sacar pendientes de rectas! ¿cuáles rectas? ... *las que unen el punto (x, y) con los puntos fijos $(3, -2)$ y $(-2, 1)$* . ¡Ya!, hasta aquí debieramos poder sacar el problema. Finalmente la lectura concluye que con que este producto de pendientes es -6 . A continuación los datos y su puesta en práctica.

pendiente de la recta que une (x, y) con $(3, -2)$ es: $m_1 = \frac{-2-y}{3-x}$

pendiente de la recta que une (x, y) con $(-2, 1)$ es: $m_2 = \frac{1-y}{-2-x}$

Ahora que tenemos las pendientes ¿qué debemos hacer? Multiplicarlas y hacer que este producto sea igual a -6 . Esto es

$$\frac{-2-y}{3-x} \cdot \frac{1-y}{-2-x} = -6 \implies \frac{-(y+2)}{-(x-3)} \cdot \frac{-(y-1)}{-(x+2)} = -6$$

A partir de esto,

$$\begin{aligned}(y+2)(y-1) &= -6(x-3)(x+2) \\ y^2 + y - 2 &= -6(x^2 - x - 6) \\ (y + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} - 2 &= -6 \left[(x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} - 6 \right]\end{aligned}$$

si eres buen observador, viste una completación de cuadrados.

$$\begin{aligned}(y + \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4} &= -6 \left[(x - \frac{1}{2})^2 - \frac{25}{4} \right] \\ (y + \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4} &= -6(x - \frac{1}{2})^2 + 6 \cdot \frac{25}{4} \\ (y + \frac{1}{2})^2 + 6(x - \frac{1}{2})^2 &= \frac{159}{4} \quad \text{¡elipse!}\end{aligned}$$

en su forma normal esta elipse tiene la forma

$$\frac{(x - \frac{1}{2})^2}{\frac{159}{24}} + \frac{(y + \frac{1}{2})^2}{\frac{159}{4}} = 1$$

Problema 2.2 Identificar el lugar geométrico de todos los puntos (x, y) cuya suma de distancias a los puntos fijos $(4, 2)$ y $(-2, 2)$ es igual a 8. Graficar este lugar identificando centro vértice, focos.

De la sola lectura del problema se desprende que el lugar es una elipse. Veamos esto.

$$d[(x, y), (4, 2)] + d[(x, y), (-2, 2)] = 8$$

$$\sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2} + \sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2} = 8$$

$$\sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2} = 8 - \sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2} \quad (.)^2$$

$$(x-4)^2 = 64 - 16\sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2} + (x+2)^2$$

$$4\sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2} = 13 + 3x \quad / (.)^2$$

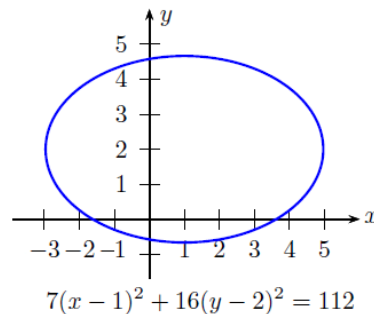


Figura 2.1

Al desarrollar

$$16 [(x+2)^2 + (y-2)^2] = 169 + 78x + 9x^2$$

al reducir

$$7(x-1)^2 + 16(y-2)^2 = 112$$

La forma canónica es

$$\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{7} = 1 \quad \text{¡¡elipse!!}$$

El eje mayor es paralelo al eje x . El centro es $(1, 2)$, $a^2 = 16$, de manera que $a = 4$. De igual modo, $b^2 = 7$ implica $b = \sqrt{7}$. En la elipse $c < a$, entonces $a^2 - c^2 = b^2 \implies c^2 = 9$, de donde $c = 3$. Luego, las coordenadas del foco son $(1+3, 2) = (4, 2)$ y $(1-3, 2) = (-2, 2)$. La elipse se muestra en la figura 2.1.

Problema 2.3 Identificar y señalar algunos elementos notables (radio, centro vértice, focos) de las siguientes curvas:

$$\text{a) } x^2 + 3y^2 - 4x + 8y + 1 = 0 \quad \text{b) } 2x^2 - 3y^2 - 4x - 6y - 13 = 0 \quad \text{c) } 4x^2 + 3y + 8x - 5 = 0$$

Respuestas

a) En este tipo de problemas hay que **completar cuadrados**.

$$\begin{aligned} x^2 + 3y^2 - 4x + 8y + 1 &= 0 \implies (x^2 - 4x) + (3y^2 + 6y) + 1 = 0 \\ &\implies (x-2)^2 + 3(y+1)^2 = 6 \\ &\implies \frac{(x-2)^2}{6} + \frac{(y+1)^2}{2} = 1 \end{aligned}$$

tal como se ve, es una linda y hermosa elipse con centro $(2, -1)$, $a^2 = 6$, $b^2 = 2$ (figura 2.1). Esto hace que $a = \sqrt{6}$ y que $b = \sqrt{2}$. Dado que en la elipse $c < a$, entonces $a^2 - c^2 = b^2$. Al reemplazar se encuentra que $c^2 = 4$, y de aquí $c = 2$. Esto es, **la distancia del centro al foco es 2**. Así, los focos son $(2 + \sqrt{6}, -1)$ y $(2 - \sqrt{6}, -1)$

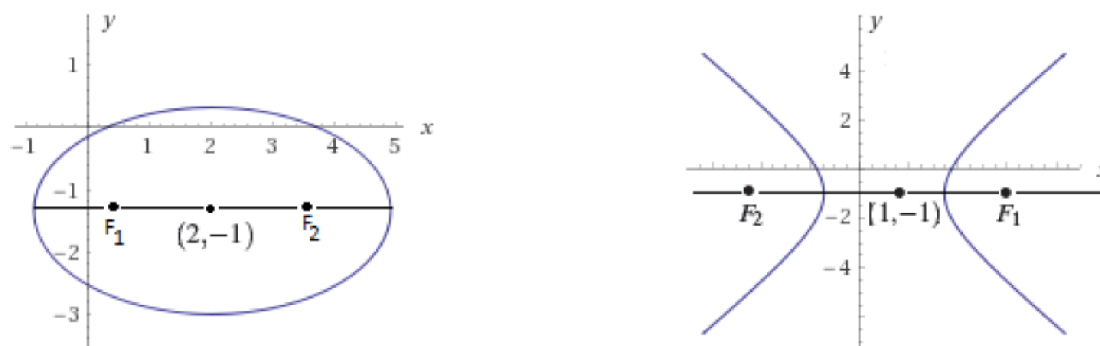


Figura 2.2

b) La completación de $2x^2 - 3y^2 - 4x - 6y - 13 = 0$ es:

$$\begin{aligned}
 2x^2 - 3y^2 - 4x - 6y - 13 = 0 &\implies (2x^2 - 4x) - (3y^2 + 6y) = 13 \\
 &\implies 2(x - 1)^2 - 3(y + 1)^2 = 12 \\
 &\implies \frac{(x - 1)^2}{6} - \frac{(y + 1)^2}{4} = 1
 \end{aligned}$$

¡¡qué preciosura de hipérbola!! (figura 2.2). Su centro es $(1, -1)$, el eje real paralelo al eje x , además, $a^2 = 6$, $b^2 = 4$, se obtiene $a = \sqrt{6}$, $b = \sqrt{2}$. En la hipérbola $c > a$, luego $c^2 - a^2 = b^2$. Al reemplazar se encuentra que $c^2 = 10$, de donde $c = \sqrt{10}$. De nuevo, la distancia entre centro y foco es c , ello hace que, ubicado el centro sumemos y restemos el valor de c para estar en los focos. Los focos son $(1 + \sqrt{10}, -1)$ y $(1 - \sqrt{10}, -1)$

c) En el caso de la ecuación $4x^2 + 3y + 8x - 5 = 0$, tenemos

$$\begin{aligned}
 4x^2 + 3y + 8x - 5 = 0 &\implies (4x^2 + 8x) + 3y - 5 = 0 \\
 &\implies 4(x + 1)^2 + 3y - 9 = 0 \\
 &\implies 3(y - 3) = -4(x + 1)^2 \\
 &\implies y - 3 = -\frac{4}{3}(x + 1)^2
 \end{aligned}$$

¡qué hermosa parábola exclamó la princesa! (figura 2.3). La forma general es

$$y - k = -4a(x - h)^2$$

al comparar con lo obtenido se deduce que el vértice es $(-1, 3)$, se abre hacia abajo. $4a = \frac{4}{3} \implies a = \frac{1}{3}$.

Como a es la **distancia entre vértice y foco** entonces el foco tiene coordenadas $(-1, \frac{8}{3})$. La directriz es

la recta $y = \frac{10}{3}$

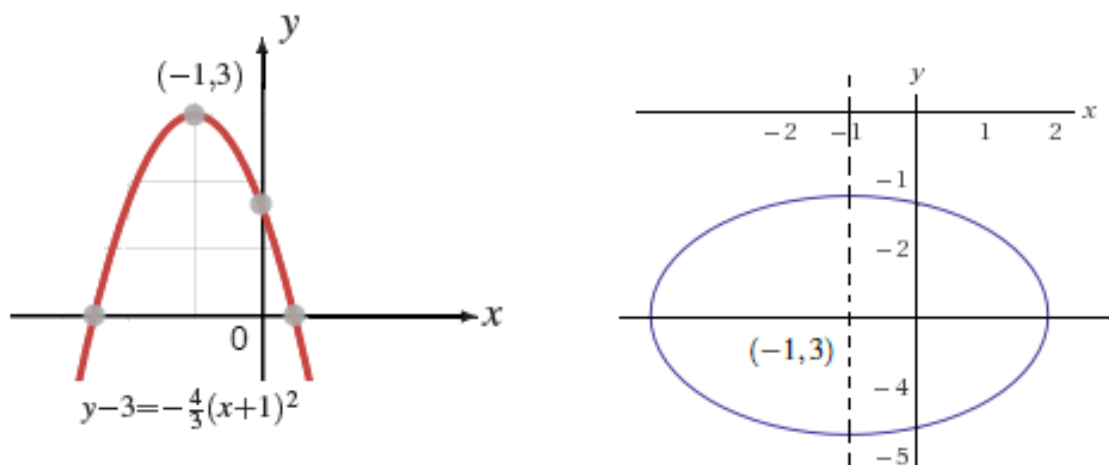


Figura 2.3

Problema 2.4 Identificar cada lugar geométrico siguiente, indicando foco, centro vértices. Graficar

1. $9x^2 + 25y^2 + 18x + 150y + 159 = 0$

2. $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 13 = 0$

Respuestas:

$$9x^2 + 25y^2 + 18x + 150y + 159 = 0 \implies 9(x^2 + 2x) + 25(y^2 + 6y) + 159 = 0$$

$$\implies 9(x+1)^2 + 25(y+3)^2 = 75$$

$$\implies \frac{(x+1)^2}{25/3} + \frac{(y+3)^2}{5} = 1$$

Se trata de una elipse (figura 2.3) de centro $(-1, -3)$, eje mayor paralelo al eje x , $a^2 = \frac{25}{3}$, $b^2 = 5$. Como $a > b$, entonces, de $a^2 - c^2 = b^2$ se deduce que $c = \sqrt{\frac{10}{3}}$. Teniendo c tenemos los focos; $(-1 + \sqrt{\frac{10}{3}}, -3)$ y $(-1 - \sqrt{\frac{10}{3}}, -3)$

b) Para la ecuación $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 13 = 0$, tenemos

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y + 13 = 0 \implies (x^2 - 6x) + (y^2 - 4y) + 13 = 0$$

$$\implies (x-3)^2 + (y-2)^2 = 0$$

Se trata de un punto, el $(3, 2)$. Otros dirán circunferencia de centro $(3, 2)$ y radio cero (0) .

Problema 2.5 Eliminar el término xy e identificar el lugar geométrico de la ecuación $x^2 + 2xy + y^2 - 2\sqrt{2}x + 6\sqrt{2}y = 6$

Cualquier término xy en la cuadrática se elimina por rotación de coordenadas. Para esto lo primero que se debe hacer es determinar el ángulo que es necesario rotar los ejes. Ello se hace a partir de la expresión

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{B}{A - C}$$

una vez hecho esto se recurre a las ecuaciones de rotación que son

$$\begin{aligned}x &= u \cos \alpha - v \sin \alpha \\y &= u \sin \alpha + v \cos \alpha\end{aligned}$$

Para el problema que tenemos que estudiar se tiene:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2}{1-1} \Rightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

las ecuaciones de rotación toman la forma

$$\begin{aligned}x &= u \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - v \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\y &= u \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + v \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

Estas x y estas y se reemplazan en la ecuación dada. Tenemos

$$\frac{1}{2}(u-v)^2 + (u-v)(u+v) + \frac{1}{2}(u+v)^2 - 2(u-v) + 6(u+v) = 6$$

$$(u-v)^2 + 2(u-v)(u+v) + (u+v)^2 - 4(u-v) + 12(u+v) = 12$$

$$4u^2 - 16u + 16v - 12 = 0$$

$$4(u-2)^2 + 16v - 28 = 0$$

$$v - \frac{7}{4} = -\frac{1}{4}(u-2)^2$$

Esta ecuación representa una parábola tal como indica la figura 2.4. El centro es $(2, \frac{7}{4})$, $4a = \frac{1}{4} \Rightarrow a = \frac{1}{16}$, con esto tenemos el foco en $(2, \frac{7}{4} - \frac{1}{16}) = (2, \frac{27}{16})$

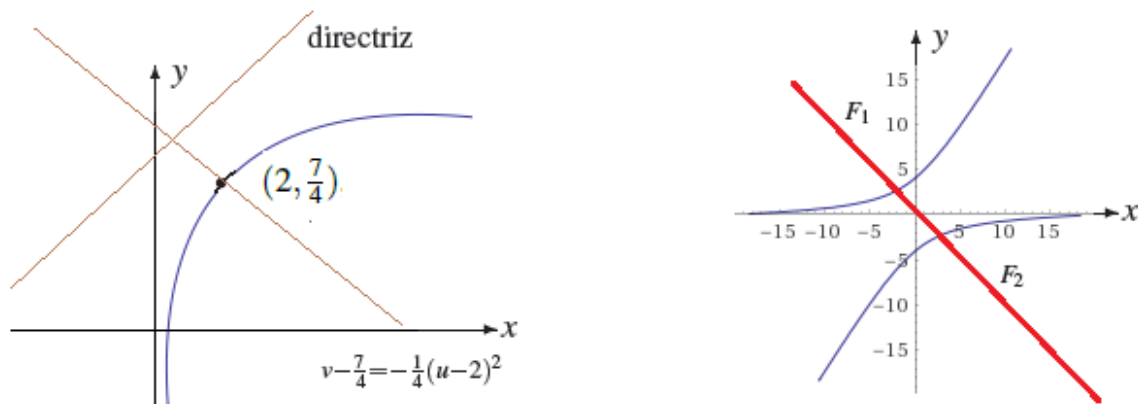


Figura 2.4

Problema 2.6 Eliminar, por rotación de coordenadas, el término xy en la ecuación $x^2 - 24xy\sqrt{3} + 25y^2 - 407 = 0$. Identificar el lugar geométrico y graficar.

En primer lugar veamos el ángulo de rotación

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{B}{A-C} \Rightarrow \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{-24\sqrt{3}}{1-25} = \sqrt{3} \Rightarrow 2\alpha = 60^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

Ahora vamos a las ecuaciones de rotación, a reemplazar este valor del ángulo

$$\begin{aligned} x &= u \cos 30^\circ - v \sin 30^\circ = \frac{1}{2} (u\sqrt{3} - v) \\ y &= u \sin 30^\circ + v \cos 30^\circ = \frac{1}{2} (u + v\sqrt{3}) \end{aligned}$$

Con estas ecuaciones la expresión original $x^2 - 24xy\sqrt{3} + 25y^2 - 407 = 0$ se transforma en

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4} (u\sqrt{3} - v)^2 - 24\sqrt{3} \cdot \frac{1}{4} (u\sqrt{3} - v) (u + v\sqrt{3}) + \frac{25}{4} (u + v\sqrt{3})^2 - 407 \\ &(u\sqrt{3} - v)^2 - 24\sqrt{3} (u\sqrt{3} - v) (u + v\sqrt{3}) + 25 (u + v\sqrt{3})^2 - 1628 \\ &37v^2 - 11u^2 - 407 = 0 \Rightarrow \frac{v^2}{11} - \frac{u^2}{37} = 1 \quad \text{¡hipérbola!!} \end{aligned}$$

El centro es $(0,0)$, $a^2 = 11$, $b^2 = 37$. Como $c > a$, entonces de $c^2 - a^2 = b^2$ se deduce que $c = 4\sqrt{3}$. Teniendo c sabemos que los focos son $(0, -4\sqrt{3})$ y $(0, 4\sqrt{3})$ pero esto es los ejes uv . Si se reemplazan estos valores en las ecuaciones de rotación se encuentra que los focos tienen coordenadas xy de la forma $(2\sqrt{3}, -6)$ y $(-2\sqrt{3}, 6)$ Esta hipérbola se muestra en la figura 2.4.

Problema 2.7 Se rotan los ejes coordenados en un ángulo de 60° . Determinar cuáles son las coordenadas primitivas del punto $(\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$

De las hipótesis del problema se deduce que $u = \sqrt{3}$, $v = 2\sqrt{3}$, $\alpha = 60^\circ$. Luego, las ecuaciones de rotación son

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{3} \cos 60^\circ - 2\sqrt{3} \sin 60^\circ \\ y &= \sqrt{3} \sin 60^\circ + 2\sqrt{3} \cos 60^\circ \end{aligned}$$

al evaluar seno y coseno en 60° esto equivale a

$$\begin{cases} x = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} - 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2} - 3 \\ y = \frac{3}{2} + \sqrt{3} \end{cases}$$

Problema 2.8 Hallar la distancia entre las rectas paralelas $3x - 4y + 8 = 0$ y $6x - 8y + 9 = 0$

Desde tiempos inmemoriales hablar de distancia entre dos rectas o dos objetos, o lo que sea, se refiere a la *distancia más corta*, obviamente en línea recta. La figura 2.5 muestra la situación.

Dado que las rectas son paralelas, tomando un punto sobre una de las rectas, por ejemplo, en $3x - 4y + 8 = 0$, se calcula la distancia entre el punto y la otra recta. La expresión que define la distancia **punto - recta** es

$$d[(x_0, y_0), Ax + By + C = 0] = \frac{|x_0 A + y_0 B + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Un punto sobre la recta $3x - 4y + 8 = 0$ es $(0, 2)$. Luego,

$$d[(0, 2), 6x - 8y + 9 = 0] = \frac{|0 \cdot 6 - 2 \cdot 8 + 9|}{\sqrt{100}} = \frac{7}{10}$$

Poner atención a que no se pueden elegir dos puntos cualesquiera, uno en cada recta y medir distancia entre dos puntos, saque sus propias conclusiones.

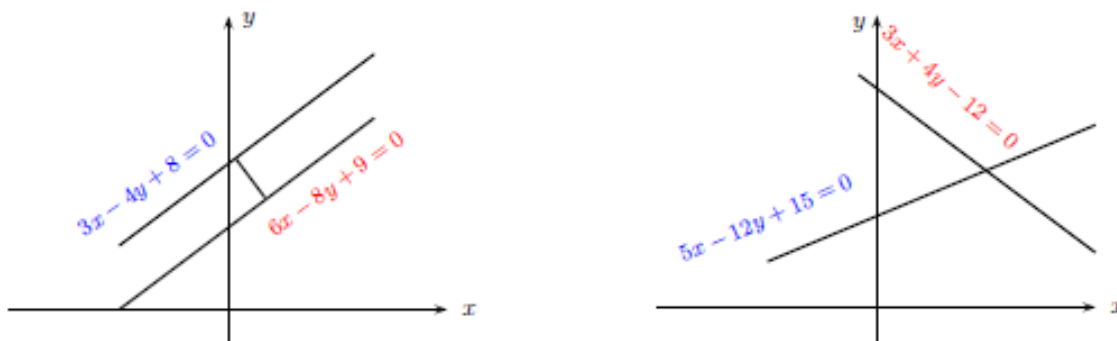


Figura 2.5

Problema 2.9 Hallar dos puntos en la recta $5x - 12y + 15 = 0$ cuya distancia a la recta $3x + 4y - 12 = 0$ sea 3

De nuevo, una ilustración de la situación (figura 2.5) nos puede sacar de apuro. Las rectas dadas no son paralelas por tanto se deben intersectar.

Es claro que los puntos a encontrar deben estar ubicados sobre la recta $5x - 12y + 15 = 0$, pero simétricamente respecto de la otra recta que es $3x + 4y - 12 = 0$. Sea (x_0, y_0) el punto por determinar, entonces satisface la ecuación de la recta, esto es,

$$5x_0 - 12y_0 + 15 = 0 \quad (2.1)$$

Su distancia a la recta $3x + 4y - 12 = 0$ es,

$$d[(x_0, y_0), 3x + 4y - 12 = 0] = \frac{|x_0 \cdot 3 - y_0 \cdot 4 + 12|}{\sqrt{25}} = 3$$

al reducir queda la ecuación

$$3x_0 + 4y_0 = 27 \quad (2.2)$$

Las ecuaciones 2.1 y 2.2 forman un sistema que al resolver entrega, $x = \frac{21}{29}$ e $y = \frac{180}{29}$. Queda como tarea hallar el otro punto.

Problema 2.10 El ángulo que forma la recta $L_1 : 3x - 2y + 5 = 0$ con la recta L_2 que pasa por la intersección de la recta $6x + y - 8 = 0$ con $2x - 3y - 6 = 0$ es de 225° . Hallar la ecuación de L_2 .

En primer lugar, la intersección de las rectas se halla al resolver

$$\begin{array}{l} 6x + y - 8 = 0 \\ 2x - 3y - 6 = 0 \end{array}$$

resulta el punto $(\frac{3}{2}, -1)$. Si ponemos m_2 a la pendiente de la recta L_2 , entonces su ecuación es de la forma

$$y + 1 = m_2 \left(x - \frac{3}{2} \right)$$

Falta usar el dato del ángulo que forman L_1 con L_2 . La fórmula es

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

reemplazando los elementos conocidos tenemos

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m_2 - \frac{3}{2}}{1 + \frac{3}{2} m_2} = \operatorname{tg}(180^\circ + 45^\circ) = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$$

al despejar resulta $m_2 = -1$. En consecuencia, la ecuación de L_2 es

$$y + 1 = -\left(x - \frac{3}{2} \right)$$

2.1.2 Transformaciones algebraicas de funciones

Vamos a estudiar los cambios que se producen en la gráfica de una función real de variable real cuando se sustituye cualquiera de las incógnitas por ella misma sumada o multiplicada por una constante. Este proceso se conoce como transformación de funciones.

Entre estas transformaciones están; traslaciones, reflexiones, expansión y comprensión.

Si tienes un tiempo, puedes visitar

<http://www.slideboom.com/presentations/542059/Transformaciones-Funciones>

El objetivo de esta sección es que, a partir del conocimiento de la gráfica de una función f , y mediante traslaciones, contracciones y reflexiones, se obtenga un bosquejo de la gráfica de una función de la forma

$$g(x) = k \cdot f(ax - b) + c$$

Traslaciones horizontales y verticales de una función

Las traslaciones verticales y horizontales son los desplazamientos de una función en el sistema cartesiano. Al trasladar la gráfica de una función dada se obtiene, siempre, la gráfica de la función original. Visita la página <https://www.geogebra.org/m/dBVVx6y9>

- Con una traslación vertical la gráfica se mueve en el sentido del eje y , es decir, hacia arriba o hacia abajo.
- Con una traslación horizontal la gráfica se mueve en el sentido del eje x , es decir, hacia la derecha o hacia la izquierda.

De este modo, dada una función f con gráfica conocida podemos obtener la gráfica de nuevas funciones. De hecho, las gráficas de las funciones

$$\blacksquare y = f(x) + a \quad \blacksquare y = f(x) - a \quad \blacksquare y = f(x + a) \quad \blacksquare y = f(x - a)$$

se obtienen desplazando o trasladando convenientemente la gráfica de f . La primera se obtiene por una traslación vertical, positiva hacia arriba (a unidades). La segunda por una traslación negativa hacia abajo (a unidades). La tercera y la cuarta son traslaciones horizontales, a izquierda y derecha, respectivamente.

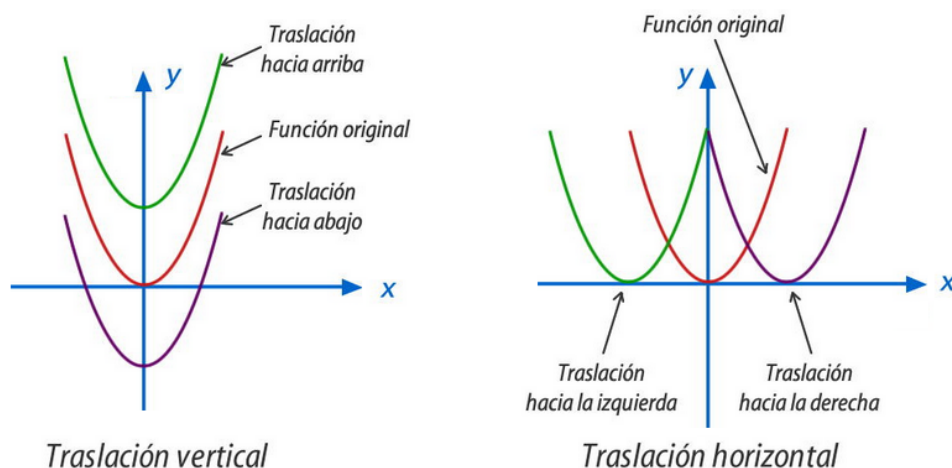


Figura 2.6

Ejemplo 2.1.1 Usar la gráfica de $f(x) = x^2$ para trazar la gráfica de $g(x) = x^2 + 1$ y $h(x) = x^2 - 1$

La gráfica de $g(x) = x^2 + 1 = f(x) + 1$ es un desplazamiento vertical de 1 unidad a partir de la función original. Esto significa que para graficar g se desplaza la gráfica de f hacia arriba una unidad, figura 2.7.

En el caso de la función $h(x) = x^2 - 1 = f(x) - 1$, se tiene también un desplazamiento vertical, pero en este caso, la gráfica de $h(x)$ se desplaza 1 unidades hacia abajo, figura 2.7.

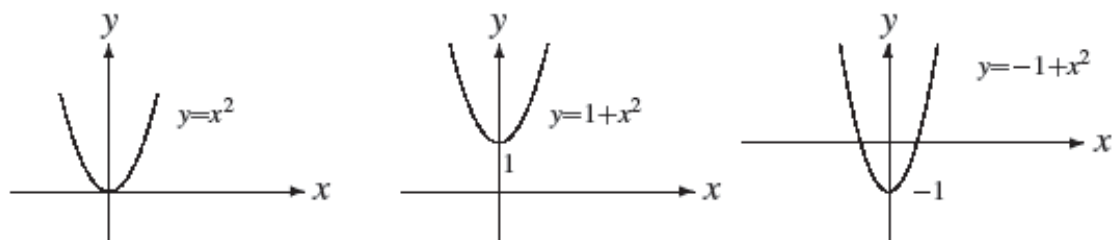


Figura 2.7

Ejemplo 2.1.2 Usar la gráfica de $f(x) = x^2$ para trazar la gráfica de $g(x) = (x + 1)^2$ y $h(x) = (x - 1)^2$

En este caso la función f tiene la siguiente relación con g y h , respectivamente

$$g(x) = (x + 1)^2 = f(x + 1) \quad \text{y} \quad h(x) = (x - 1)^2 = f(x - 1)^2$$

La gráfica de $g(x) = (x+1)^2$ es un desplazamiento horizontal de 1 unidad hacia la izquierda a partir de la función original. Esto significa que para graficar g se desplaza la gráfica de f hacia la izquierda una unidad, figura 2.8.

En el caso de la función $h(x) = (x-1)^2$, se tiene también un desplazamiento horizontal, pero en este caso, la gráfica de $h(x)$ se desplaza 1 unidad hacia la derecha, figura 2.8.

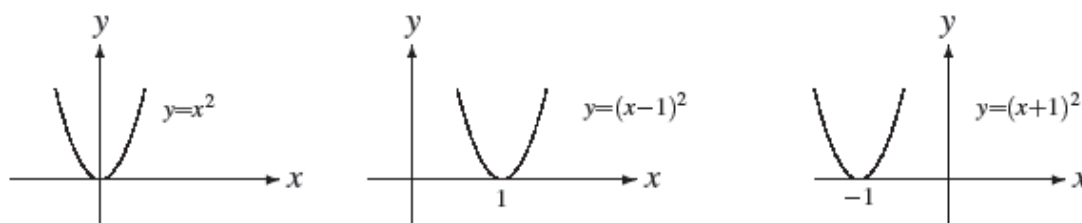


Figura 2.8

2.1.3 Reflexiones

Esta transformación funciona como un espejo. Las reflexiones sobre los ejes coordenados de la gráfica de $y = f(x)$ se representan como sigue:

- **Reflexión** con respecto al eje x : $g(x) = -f(x)$
- **Reflexión** con respecto al eje y : $g(x) = f(-x)$

La figura 2.9 muestra reflexiones, con respecto al eje x , de gráficas de una función f . La línea punteada es la función original y la reflexión en línea completa.

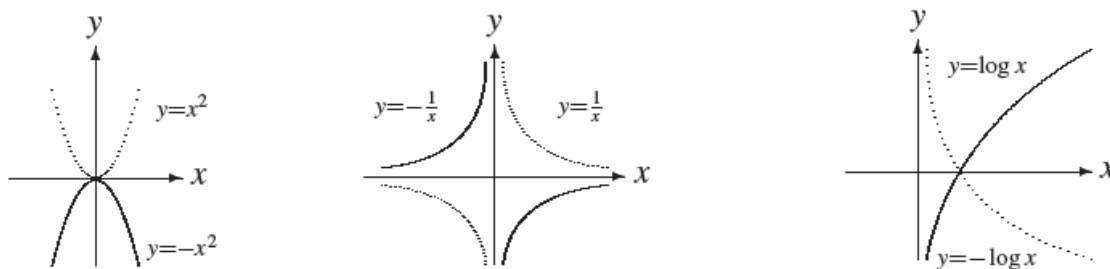


Figura 2.9

Problema 2.11 Compare las gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ con:

1. $g(x) = -\sqrt{x}$

2. $h(x) = \sqrt{-x}$

3. $m(x) = -\sqrt{x+1}$

En la figura 2.10 mostramos la reflexión con respecto al eje y .

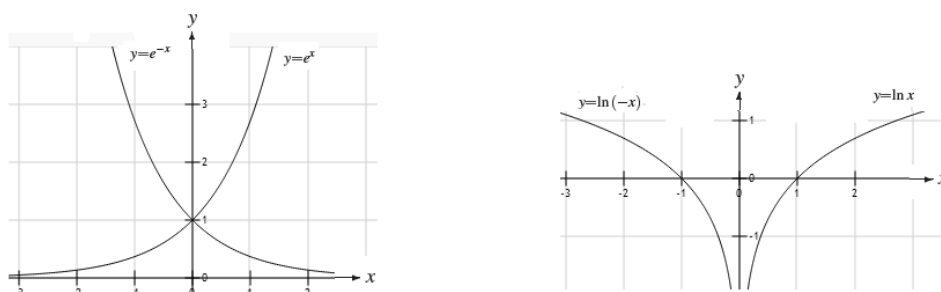


Figura 2.10

Contracción y alargamiento

En este caso, estudiamos que sucede con $kf(x)$ si es dada la gráfica de $f(x)$ para $k \neq 0$. Si $k = 1$ tenemos la misma función. ¡no me simpatiza! Luego, los casos $k = 0$ y $k = 1$ no presentan ningún interés. Si $k = -1$, tenemos una reflexión en el eje x . Veamos otros valores para k .

Ejemplo 2.1.3 Si $f(x) = x^2$, la figura 2.11 muestra los casos $k = 2, k = -2$ y $k = \frac{1}{2}$

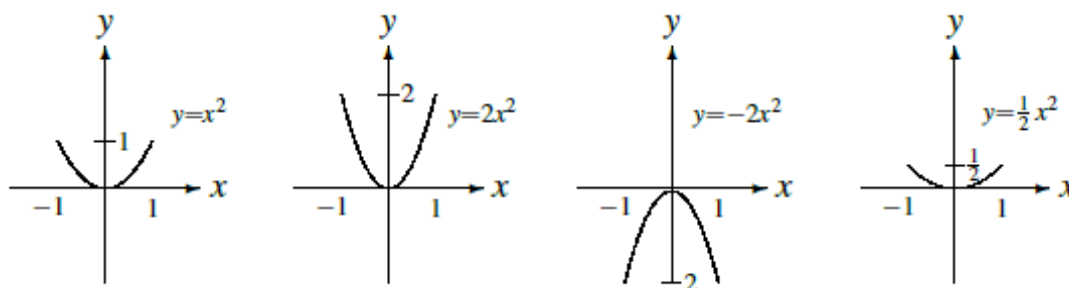


Figura 2.11

Así, la gráfica de $f(x) = 2x^2$ corresponde a la gráfica de $f(x) = x^2$ estirada o alargada 2 veces en la dirección vertical. La gráfica de $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ corresponde a la de $f(x) = x^2$ comprimida 2 veces en la dirección vertical. La gráfica restante es la reflexión de gráfica de $f(x) = x^2$ estirada o alargada 2 veces.

Ejemplo 2.1.4 Si $y = e^x$, entonces la figura 2.12 muestra los casos $k = 2$ y $k = -2$

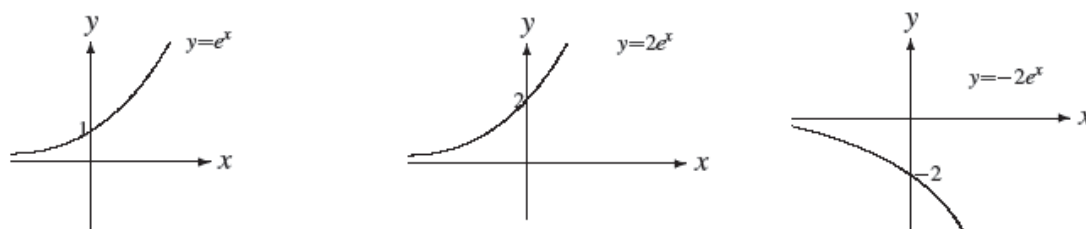


Figura 2.12

De los ejemplos podemos deducir que la gráfica de $g(x) = k \cdot f(x)$ es la gráfica de f :

- alargada verticalmente si $k > 1$.
- comprimida verticalmente si $0 < k < 1$.
- Si $k < 0$, reflejamos la gráfica con respecto al eje de las x .

Gráfico de $f(x)$ y de $f(kx)$

Este caso está dentro del alargamiento o compresión de funciones.

Ejemplo 2.1.5

1. La gráfica de $g(x) = (4x)^2$ es la gráfica de $f(x) = x^2$ comprimida horizontalmente 4 veces.
2. La gráfica de $g(x) = (\frac{1}{4}x)^2$ es la gráfica de $f(x) = x^2$ alargada horizontalmente 4 veces.
3. La gráfica de $g(x) = (-x)^3$ es la gráfica de $f(x) = x^3$ reflejada con respecto al eje y .

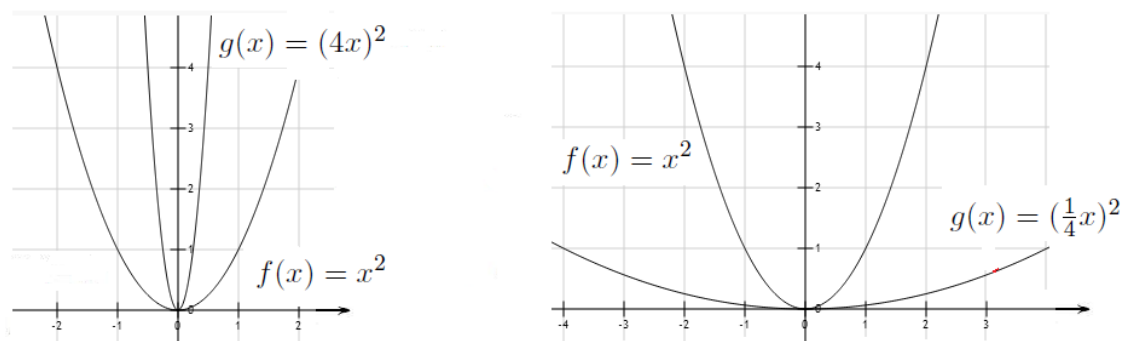


Figura 2.13

Ejemplo 2.1.6 La figura 2.14 muestra el caso de la función exponencial.

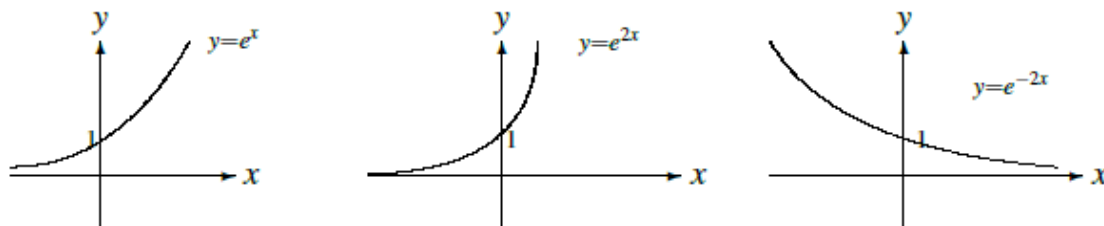


Figura 2.14

Ejemplo 2.1.7 La figura 2.15 muestra el caso de la función logaritmo.

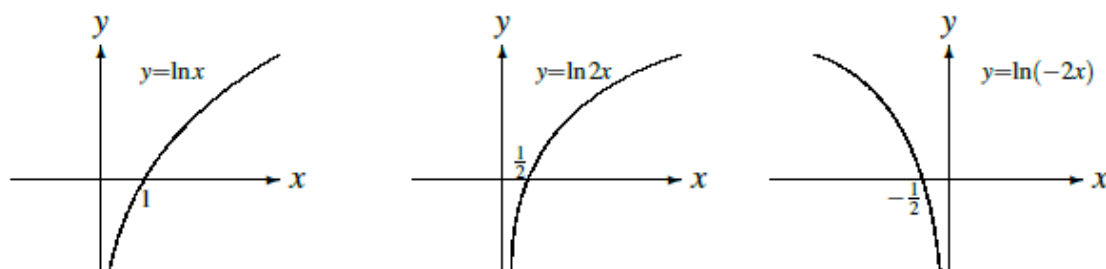


Figura 2.15

De los ejemplos podemos deducir que la gráfica de $g(x) = f(kx)$ es la gráfica de f :

- comprimida horizontalmente si $k > 1$.
- alargada horizontalmente si $0 < k < 1$.
- Si $k < 0$, reflejamos la gráfica con respecto al eje de las y .

Gráfico de $f(x)$ y de $f(|x|)$

En este caso las imágenes pueden adoptar posiciones diversas dependiendo ello de la función. Ver figura 2.15.

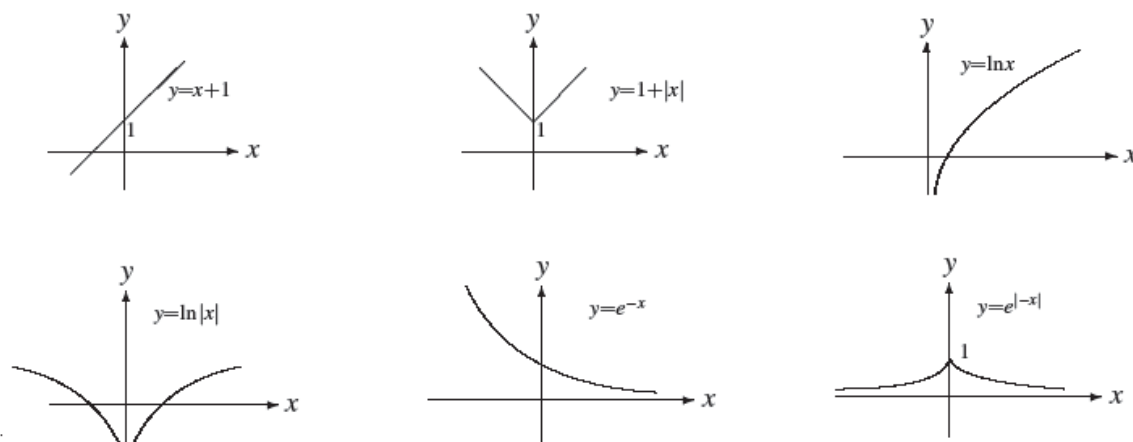


Figura 2.16

Gráfico de $f(x)$ y de $|f(x)|$

Por tratarse de un valor absoluto, la gráfica de este tipo de funciones debe encontrarse totalmente sobre el eje de las x . Respecto de $f(x)$, la parte negativa hace una reflexión sobre el eje x . Vean las siguientes funciones

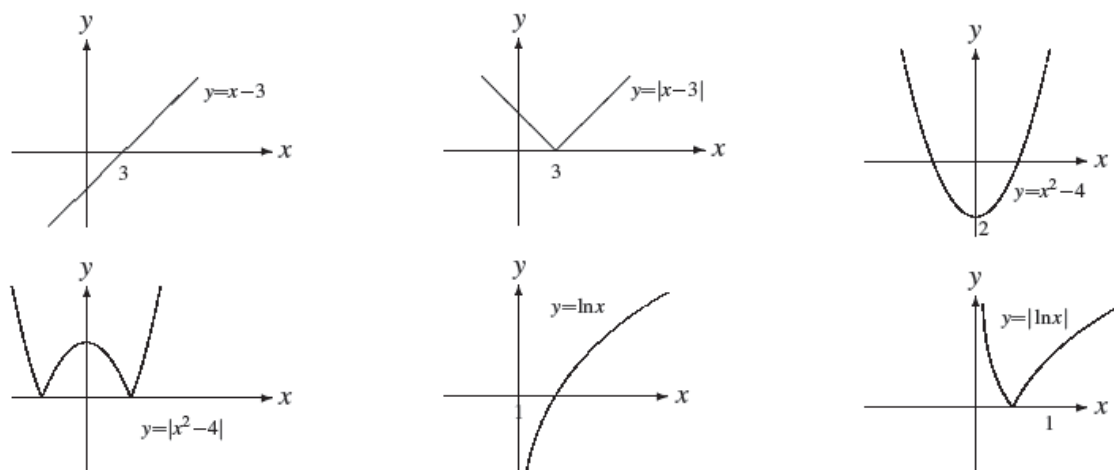


Figura 2.17

2.1.4 Trigonometría

Veremos problemas de identidades, ecuaciones y transformaciones aplicadas a las funciones seno y coseno.

Una senoide se la describe en forma analítica por medio de la siguiente ecuación:

$$y = A \operatorname{sen}[\omega(x - \alpha)] + C$$

Vamos a estudiar de qué manera A , ω , α y C afectan el comportamiento de la gráfica de la función seno.

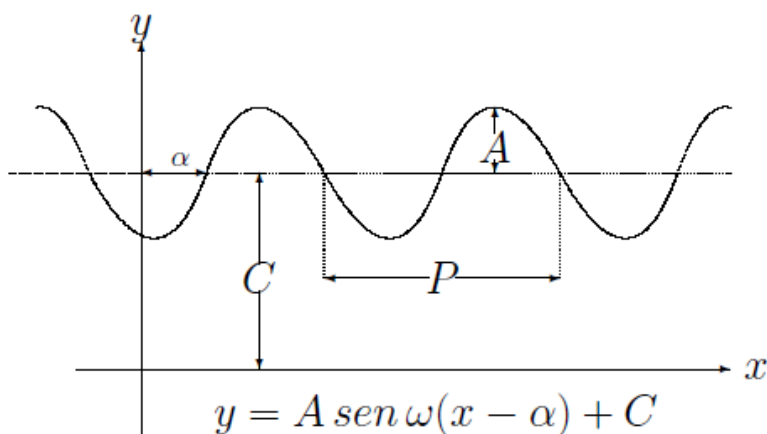


Figura 2.18

■ Eje de Referencia

El eje de referencia, $y = C$, es la recta horizontal que divide a la senoide en dos porciones equivalentes. Se conoce también como desplazamiento vertical.

■ Amplitud

Es la distancia vertical que existe entre el eje de referencia y la parte más alta o la parte más baja de la senoide (cambia el tamaño de la función)

■ El periodo

P es el **periodo** o **longitud de onda**, esto es, el tiempo necesario para que la función ejecute un ciclo completo.

$$P = \frac{2\pi}{\omega}$$

En las funciones base, $y = \sin x$ e $y = \cos x$, el ciclo tiene un período de 2π .

■ Frecuencia

La letra ω es la **frecuencia angular**, cambia el valor del período de la senoide (modifica el grado de repetición).

$$\omega \cdot P = 2\pi$$

■ Ángulo de Fase

El ángulo de fase α es donde la curva cruza la recta $y = C$, o bien, el desplazamiento que sufre la función por una traslación horizontal. En otras palabras, el ángulo de fase es el valor de x desde donde comienza a dibujarse el ciclo.

■ Fin del ciclo

La gráfica de la función periódica termina en $\alpha + P$

Problema 2.12 Probar que $f(x) = A \sin(\omega x + \alpha)$ tiene periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Se sabe que la función seno tiene periodo 2π . Esto es, se satisface

$$\sin(2\pi + \theta) = \sin \theta$$

por tanto,

$$A \sin(\omega x + \alpha + 2\pi) = A \sin(\omega x + \alpha) \quad (2.3)$$

Si T es el periodo de f entonces se verifica que

$$f(x+T) = f(x), \quad \forall x$$

$$A \sin(\omega(x+T) + \alpha) = A \sin(\omega x + \alpha)$$

$$A \sin(\omega x + \alpha + \omega T) = A \sin(\omega x + \alpha), \quad (2)$$

comparando esta última expresión con la ecuación 2.3 tenemos que

$$\omega T = 2\pi \implies T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Problema 2.13 Graficar $f(x) = \sin 2x$

Al comparar con la ecuación general se deduce que $A = 1$, que el desfase $\alpha = 0$, y que el periodo es $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$. Esto último significa que es suficiente con estudiar el comportamiento de esta función en un intervalo de longitud π , por ejemplo, en $[0, \pi]$. Para graficar sólo se deben tener en cuenta aquellos puntos donde la función se hace cero y aquellos puntos en los cuales alcanza sus valores máximos y

mínimos. Tenemos

$$\sin 2x = 1 \implies 2x = \frac{\pi}{2} \implies x = \frac{\pi}{4}$$

$$\sin 2x = -1 \implies 2x = \frac{3\pi}{2} \implies x = \frac{3\pi}{4}$$

$$\sin 2x = 0 \implies 2x = \begin{cases} 2x = 0 \implies x = 0 \\ 2x = \pi \implies x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

La figura 2.19 muestra en línea gruesa la función $\sin 2x$ y en línea punteada la función $\sin x$. Hay dos cosas que pueden quedar claras después de mirar la figura. La amplitud $A = 1$, ella es la mitad de la distancia entre su máximo y su mínimo, la otra es el desfase, es claro que es cero pues la función $\sin 2x$ y $\sin x$ pasan ambas por el origen bajo el mismo ángulo.

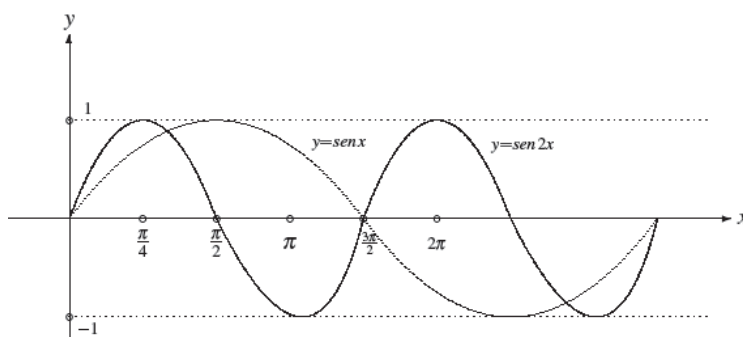


Figura 2.19

Problema 2.14 La figura 2.20 muestra las gráficas de $y = \sin x$ y de su perturbación $y = 2 \sin 3x$, y de $y = \sin x$ con su perturbación $y = \frac{1}{2} \sin(2x + \frac{\pi}{4})$

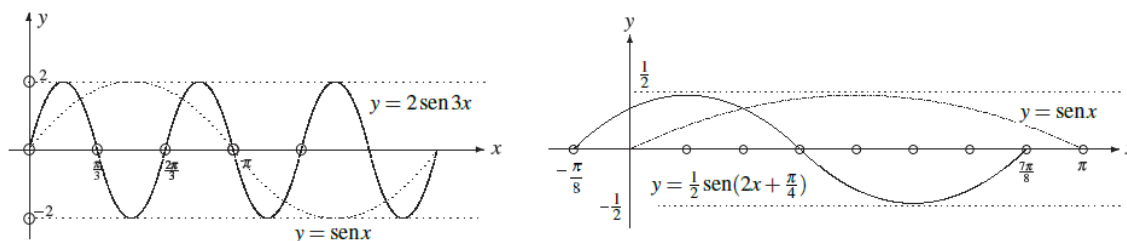


Figura 2.20

La función $y = 2 \sin 3x$ tiene amplitud $A = 2$, desfase $\alpha = 0$, frecuencia $\omega = 3$, y periodo $T = \frac{2\pi}{3}$. La función $y = \frac{1}{2} \sin(2x + \frac{\pi}{4})$ tiene amplitud $A = \frac{1}{2}$, desfase $\alpha = \frac{\pi}{8}$, frecuencia $\omega = 2$, y periodo $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$. No olvidar que la magnitud del desfase en expresiones del tipo $y = A \sin(\omega x + \alpha)$ es $\frac{\alpha}{\omega}$. Los cortes con el eje x, en la segunda función, se obtienen de

$$2x + \frac{\pi}{4} = n\pi \implies 2x = n\pi - \frac{\pi}{4} \implies x = \frac{\pi}{8}(4n - 1)$$

con $n = 0$ se obtiene $-\frac{\pi}{8}$, con $n = 1$ y $n = 2$ se encuentran $\frac{3\pi}{8}$ y $\frac{7\pi}{8}$

Problema 2.15 Probar que $f(x) = B \cos(vx + \delta)$, $B \neq 0$, $v \neq 0$ es senoidal

Si probamos esto quiere decir que la función **seno** es la más importante, ya que todo se puede reducir a ella.

Es sabido que $\cos z = \sin(\frac{\pi}{2} + z)$, de modo que ya nuestra función se puede escribir en la forma

$$f(x) = B \sin(vx + \delta + \frac{\pi}{2})$$

al comparar con

$$f(x) = A \sin(\omega x + \alpha)$$

se concluye que $A = B$, $v = \omega$, $\alpha = \delta + \frac{\pi}{2}$. En consecuencia, f es senoidal.

Problema 2.16 Probar que $f(x) = a \sin kx + b \cos kx$, $a \neq 0$, o bien $b \neq 0$, $k \neq 0$, $a, b, k \in \mathbb{R}$ es senoidal

Partimos exigiendo igualdad entre esta función y la que define la senoidal. Tenemos

$$\begin{aligned} a \sin kx + b \cos kx &= A \sin(\omega x + \alpha) \\ &= A \sin \omega x \cdot \cos \alpha + A \sin \alpha \cdot \cos \omega x \end{aligned}$$

se necesita que, $\omega = k$, $A \cos \alpha = a$, $A \sin \alpha = b$. Elevando al cuadrado estas dos últimas ecuaciones y sumándolas se obtiene $A = \sqrt{a^2 + b^2}$. Para hallar la relación que cumple α , de las mismas ecuaciones con que se obtuvo A , se dividen miembro a miembro para tener

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{b}{a} \implies \alpha = \arctg \frac{b}{a}$$

De esta forma. $A \neq 0$ pues $a \vee b \neq 0$, $\omega \neq 0$ ya que $k \neq 0$. Se sigue que f es senoidal.

Problema 2.17 Graficar la función $f(x) = 2 \cos(\frac{x-\pi}{2}) + 2 \cos(\frac{x}{2})$

Podemos graficar directamente esta función o bien transformándola a una expresión senoidal. Hacemos esto último. En primer lugar, de

$$2 \cos(\frac{x-\pi}{2}) = A \sin(\omega x + \alpha)$$

se obtiene $A = 2$, $\omega = \frac{1}{2}$, $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$. De modo que la ecuación a graficar se puede escribir

$$f(x) = 2 \sin \frac{x}{2} + 2 \cos \frac{x}{2}$$

comparando esto con

$$f(x) = a \sin kx + b \cos kx$$

se tiene que $a = 2$, $b = 2$, $\omega = \frac{1}{2}$. Con esto, $A = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{8}$, $\alpha = \arctg \frac{b}{a} = \arctg 1 = \frac{\pi}{4}$. En consecuencia, la forma senoidal de la función dada es

$$f(x) = 2\sqrt{2} \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

Con el periodo estamos listos para iniciar el gráfico de f .

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$$

Los ceros y los máximos y mínimos se obtienen, en un intervalo de longitud 4π .

$$\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \implies \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} = \begin{cases} 0 \implies x = -\frac{\pi}{2} \\ \pi \implies x = \frac{3\pi}{2} \\ 2\pi \implies x = \frac{7\pi}{2} \end{cases}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \implies \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \implies x = \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = -1 \implies \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{2} \implies x = \frac{5\pi}{2}$$

que son los únicos valores en $(-\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{2})$

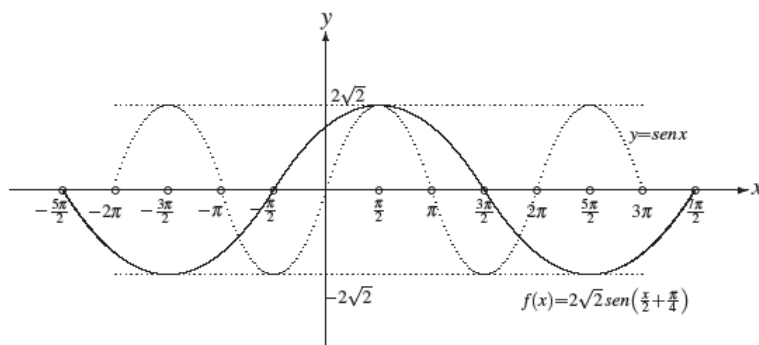


Figura 2.21

Gráfica de $y = A \cdot \cos[\omega(x - \alpha)] + C$

La figura 2.22 muestra la curva general del coseno. En ella, A es la *amplitud*, C el *desplazamiento vertical*, P el *periodo* o longitud de onda, ω la *frecuencia angular* ($\omega \cdot P = 2\pi$), y α el *desplazamiento de fase* (la distancia entre el eje y y su valor máximo)

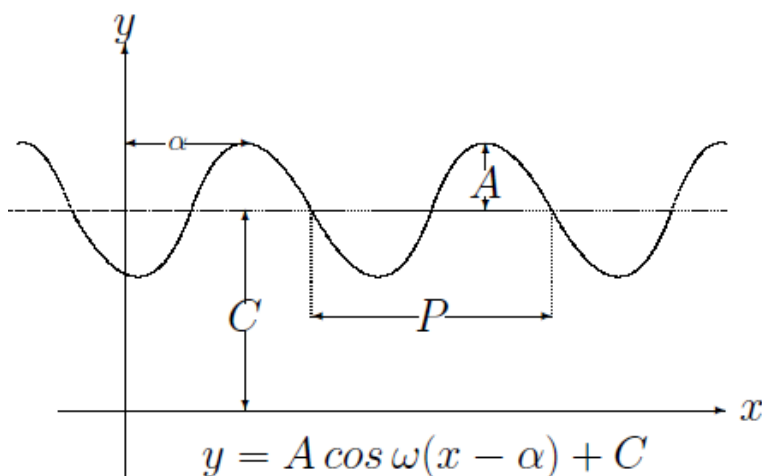


Figura 2.22

Problema 2.18 Graficar $f(x) = \cos \frac{x}{2}$ sin pasar a senoidal.

Al mirar la función, resulta evidente que la amplitud es $A = 1$, la frecuencia $\omega = \frac{1}{2}$, el ángulo de desfase $\alpha = 0$, y el periodo $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$. De estos datos, la gráfica se hace en un intervalo de longitud 4π y luego se prolonga periódicamente. Calculando los ceros elegimos el intervalo

$$\cos \frac{x}{2} = 0 \implies \frac{x}{2} = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \implies x = -\pi \\ \frac{\pi}{2} \implies x = \pi \\ \frac{3\pi}{2} \implies x = 3\pi \end{cases}$$

Si no se entiende el procedimiento, vea este otro. Los ceros del coseno están siempre en los puntos de la forma $(2n-1)\frac{\pi}{2}$. Luego, igualando con nuestro argumento del coseno se tiene

$$\frac{x}{2} = (2n-1)\frac{\pi}{2} \implies x = (2n-1)\pi$$

partiendo con $n = 0$ se obtienen los ceros del intervalo que queremos, en este caso, $[-\pi, 3\pi]$. Los extremos los vemos como sigue.

El coseno es 1 en todos los puntos de la forma $2n\pi$, con $n = 0, 1, 2, \dots$. De esta forma, $n = 0 \implies \frac{x}{2} = 0$, de donde $x = 0$, $n = 1 \implies \frac{x}{2} = 2\pi$, de donde, $x = 4\pi$, con lo que nos salimos del intervalo. Se acabaron los 1. El coseno es -1 en los puntos de la forma $(2n-1)\pi$ con $n = 1, 2, 3, \dots$. Luego, si $n = 1$, entonces $\frac{x}{2} = \pi$, con lo cual $x = 2\pi$. Si $n = 2$, entonces $\frac{x}{2} = 3\pi$, de lo cual $x = 6\pi$, de nuevo nos salimos del intervalo que estamos considerando, por lo que también se acabaron los -1 en el intervalo. La gráfica es como la figura 2.23.

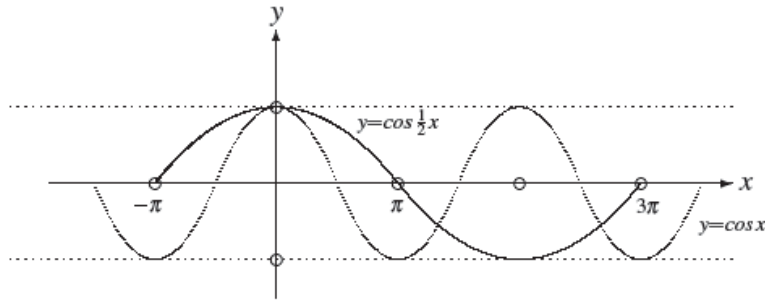


Figura 2.23

Problema 2.19 Probar que si $A + B + C = \pi$, entonces $\cos A + \cos B + \cos C = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$
 En primer lugar sumemos dos elementos

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

pero,

$$A + B + C = \pi \Rightarrow \frac{A+B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2} \Rightarrow \cos \frac{A+B}{2} = \sin \frac{C}{2}$$

Además,

$$\cos \frac{A-B}{2} = \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} + \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \cos A + \cos B &= 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \\ &= 2 \sin \frac{C}{2} \left(\cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} + \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \right) \\ &= 2 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} + 2 \sin \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \end{aligned}$$

Como $\cos C = \cos 2 \cdot \frac{C}{2} = \cos^2 \frac{C}{2} - \sin^2 \frac{C}{2} = 1 - 2 \sin^2 \frac{C}{2}$, entonces

$$\begin{aligned} \cos A + \cos B + \cos C &= 2 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} + 2 \sin \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} + \cos C \\ &= 2 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} + 2 \sin \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} + 1 - 2 \sin^2 \frac{C}{2} \\ &= 2 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} + 2 \sin \frac{C}{2} \left[\cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} - \sin \frac{C}{2} \right] + 1 \end{aligned}$$

Se sabe que $\cos \frac{A+B}{2} = \sin \frac{C}{2}$, entonces en el paréntesis de la última ecuación se tiene

$$\left[\cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} - \cos \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} + \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \right]$$

con lo cual

$$\begin{aligned}\cos A + \cos B + \cos C &= 2 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} + 2 \sin \frac{C}{2} \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} + 1 \\ &= 4 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} + 1\end{aligned}$$

Problema 2.20 Probar que si $A + B + C = \pi$, entonces $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C$
En primer lugar sumemos dos elementos

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B = \frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}{1 - \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B} \implies \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B = (1 - \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B) \operatorname{tg}(A + B)$$

pero,

$$A + B + C = \pi \implies A + B = \pi - C \implies \operatorname{tg}(A + B) = -\operatorname{tg} C$$

En consecuencia,

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = -\operatorname{tg} C \cdot (1 - \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B) + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C$$

Problema 2.21 Un camión que pesa 8926 kilos sube una rampa que está inclinada $8^\circ 32'$ respecto a la horizontal. Hallar la presión del camión sobre la rampa (perpendicular a la rampa).
La figura 2.24 ilustra la situación.

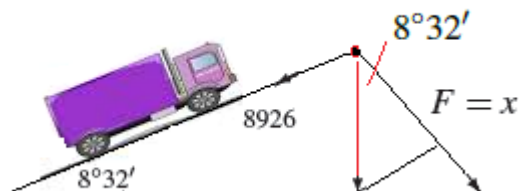


Figura 2.24

Hacemos uso de la función coseno.

$$\cos 8^\circ 32' = \frac{x}{8926} \implies x = \cos 8^\circ 32' \cdot 8926 = 8827,6$$

Problema 2.22 Resolver la ecuación $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 7x = 0$

Recordemos que la tangente es una función impar y de periodo π , luego,

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 7x &= 0 \implies \operatorname{tg} x = -\operatorname{tg} 7x \implies \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(-7x) \\ &\implies \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(k\pi - 7x) \implies x = k\pi - 7x \implies x = \frac{k\pi}{8}\end{aligned}$$

Como k es el contador, entonces $k = 0, 1, 2, 3, \dots, 16$ hace que esos sean todos los valores en el intervalo $[0, \pi]$, con excepción de aquellos valores que anulen el coseno que es denominador de la tangente. Queda como tarea ver esto.

Problema 2.23 Resolver la ecuación $2(\cos^4 x + 1 - \sin^4 x) = 3$

Dentro del paréntesis se observa que la diferencia del coseno y el seno es una suma por diferencia. Por tanto,

$$\begin{aligned} 2(\cos^4 x + 1 - \sin^4 x) = 3 &\implies \cos^4 x - \sin^4 x = \frac{1}{2} \\ &\implies (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x) = \frac{1}{2} \\ &\implies \cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1}{2} \\ &\implies 2\cos^2 x = \frac{3}{2} \implies \cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

El “viejo truco” de conocer primero el valor del primer cuadrante nos permite determinar todos los valores de x . En efecto,

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \implies x = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$$

Ahora con los *teoremas* de 180° y 360° más menos ángulo agudo, tenemos que el coseno vuelve a ser positivo en el cuarto cuadrante, luego,

$$x = 360^\circ - 30^\circ = 330^\circ = \frac{11\pi}{6}$$

Los valores negativos están en el segundo y tercer cuadrante, de manera que

$$x = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ = \frac{5\pi}{6} \quad x = 180^\circ + 30^\circ = 210^\circ = \frac{7\pi}{6}$$

Problema 2.24 Resolver la ecuación $\sin x + \cos 3x = 0$

Ahora este no nos asusta. El seno es impar y el coseno par, y ambas de periodo 2π , luego,

$$\begin{aligned} \sin x + \cos 3x = 0 &\implies \sin x = -\cos 3x \\ &\implies \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos 3x, \quad (*) \\ &\implies \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(\pi - 3x) \\ &\implies \frac{\pi}{2} - x = 2k\pi \pm (\pi - 3x) \\ &\implies x = \frac{\pi}{4}(4k + 1) \end{aligned}$$

El $(*)$ es para poner atención al hecho que el coseno es negativo. El k para $k = 0$ entrega $\frac{\pi}{4}$, para $k = 1$ es $\frac{5\pi}{4}$, después de este valor de k el ángulo es mayor de 2π , y no nos interesa.

Este problema se puede resolver elevando al cuadrado el $\sin x$ y el $\cos 3x$, y usar luego la identidad $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Problema 2.25 Resolver la ecuación $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 0$

No conviene seguir el procedimiento anterior, es más simple lo que sigue

$$\sin x + \sqrt{3} \cos 3x = 0 \implies \sin x = -\sqrt{3} \cos x \implies \operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$$

La tangente vale $\sqrt{3}$ en 30° . Como es negativa en el segundo y cuarto cuadrante, entonces los ángulos son, $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ y $360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$

2.2 Problemas Propuestos

Geometría Analítica

- Hallar el lugar geométrico del punto (x, y) que equidista de los puntos $(-2, 3)$ y $(6, -3)$
- Uno de los extremos de un segmento es el punto $(7, 8)$ y su punto medio $(4, 3)$. Hallar el otro extremo.
- Los extremos de un segmento son los puntos $(7, 4)$ y $(-1, -4)$. Hallar la razón en que el punto $(1, -2)$ divide al segmento.
- Una recta de pendiente 3 pasa por el punto $(3, 2)$. La abscisa de otro punto de la recta es 4. Hallar su ordenada.
- Una recta de pendiente -2 pasa por el punto $(2, 7)$ y por los puntos A y B . Si la ordenada de A es 3 y la abscisa de B es 6, hallar la abscisa de A y la ordenada de B .
- Identificar, ¡¡no haga nada más!!
 a) $5x + 4y = 20$ b) $3x^2 + 3y^2 = 10$ c) $4x^2 - 9y^2 = 36$ d) $16y^2 = x$
 e) $x^2 - y^2 = 9$ f) $x^2 + y^2 - 2x = 14$ g) $xy = 3$ h) $4x^2 + 9y^2 = 36$
- Determinar el valor de k para que la recta $k^2x + (k + 1)y + 3 = 0$ sea perpendicular a la recta $3x - 2y - 11 = 0$
- Determinar el valor de k para que la recta $kx + (k - 1)y - 18 = 0$ sea paralela a la recta $4x + 3y + 7 = 0$
- Determinar el valor de k para que la recta $2x + 3ky - 13 = 0$ pase por el punto $(-2, 4)$
- Determinar el valor de k para que la recta $3x - ky - 8 = 0$ forme un ángulo de 45° con la recta $2x + 5y - 17 = 0$
- Hallar la ecuación de la perpendicular a la recta $2x + 7y - 3 = 0$ en su punto de intersección con la recta $3x - 2y + 8 = 0$
- Hallar la ecuación de la recta que pasa por $(3, 1)$ y tal que la distancia de esta recta al punto $(-1, 1)$ sea $2\sqrt{2}$
- Hallar la distancia comprendida entre las rectas paralelas $3x - 4y + 8 = 0$ y $6x - 8y + 9 = 0$
- Hallar dos puntos en la recta $5x - 12y + 15 = 0$ cuya distancia a la recta $3x + 4y - 12 = 0$ sea 3.
- Hallar las ecuaciones de las paralelas a la recta $8x - 15y + 34 = 0$ que distan 3 unidades del punto $(-2, 3)$
- Una recta pasa por la intersección de las rectas $3x + 2y + 8 = 0$ y $2x - 9y - 5 = 0$. Hallar su ecuación si se sabe que es paralela a la recta $6x - 2y + 11 = 0$
- Una recta pasa por la intersección de las rectas $7x - 2y = 0$ y $4x - y - 1 = 0$. y es perpendicular a la recta $3x + 8y - 19 = 0$. Hallar su ecuación
- Hallar la ecuación de la circunferencia de centro $(0, -2)$ y tangente a la recta $5x - 12y + 2 = 0$
- Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por $(7, -5)$ y cuyo centro es el punto de intersección de las rectas $7x - 9y - 10 = 0$ y $2x - 5y + 2 = 0$
- La ecuación de una circunferencia es $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 36$. Probar que el punto $(2, -5)$ es interior a la circunferencia y que el punto $(-4, 7)$ es exterior.
- Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $(11, 2)$ y que es tangente a la recta $2x + 3y - 18 = 0$ en el punto $(3, 4)$
- Hallar la ecuación de la circunferencia que es tangente a las rectas $x - 2y + 4 = 0$ y $2x - y - 8 = 0$ y que pasa por el punto $(4, -1)$
- Hallar la ecuación de la circunferencia tangente a las rectas $x - 3y + 9 = 0$ y $3x + y - 3 = 0$ y con centro en la recta $7x + 12y - 32 = 0$

24. La directriz de una parábola es la recta $x + 5 = 0$, su vértice es el punto $(0, 3)$. Hallar la ecuación de la parábola.
25. Dadas las parábolas siguientes, hallar vértice y foco. Graficar

$$a) 9x^2 + 24x + 72y + 16 = 0, \quad b) y^2 + 4x = 7, \quad c) 4x^2 + 48y + 12x = 159$$

26. Hallar el lugar geométrico de los puntos cuya distancia al punto fijo $(-2, 3)$ es igual a su distancia a la recta $x + 6 = 0$
27. Hallar la ecuación de la parábola de vértice $(4, -1)$, eje de simetría la recta $y + 1 = 0$, y que pasa por $(3, -3)$
28. Hallar e identificar el lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia a la recta $x + 3 = 0$ es siempre 2 unidades mayor que su distancia al punto $(1, 1)$
29. El cable de suspensión del puente colgante de Carahue tiene la forma de una parábola. Los pilares que lo soportan tienen una altura de 60 metros y están separados una distancia de 500 mts. quedando el punto más bajo del cable a una altura de 10 mts sobre la calzada del puente. Hallar la ecuación que describe el cable. Calcular la altura de un punto situado a 80 mts del centro del puente.
30. Para las elipses siguientes hallar vértice, focos, excentricidad. Graficar

$$\begin{array}{lll} a) 4x^2 + 9y^2 = 36 & b) 9x^2 + 4y^2 + 72x - 48y + 144 = 0 & c) 12x^2 + 8y^2 = 96 \\ d) 9x^2 + 4y^2 - 8y - 32 = 0 & e) 4x^2 + 9y^2 + 32x - 18y + 37 = 0 & f) 16x^2 + 25y^2 = 400 \\ g) 5x^2 + 15y^2 = 75 & h) x^2 + 4y^2 - 6x + 16y + 21 = 0 & \end{array}$$

31. Hallar las ecuaciones de elipse que cumplen:
- a) Focos en $(\pm 4, 0)$, vértices $(\pm 5, 0)$
 - b) Focos en $(0, \pm 6)$, semieje menor 8
 - c) Focos en $(\pm 5, 0)$, excentricidad $\frac{5}{8}$
32. Hallar la ecuación de la elipse de centro el origen de coordenadas, uno de los vértices en $(0, -7)$ y pasa por el punto $(\sqrt{5}, \frac{14}{3})$
33. Hallar el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a los puntos fijos $(3, 1)$ y $(-5, 1)$ es igual a 10
34. Hallar el lugar geométrico de los puntos cuya distancia al punto fijo $(3, 2)$ sea la mitad de la correspondiente a la recta $x + 2 = 0$
35. Los vértices de una elipse son los puntos $(1, 1)$ y $(7, 1)$ y su excentricidad es $\frac{1}{3}$. Hallar la ecuación de la elipse y las coordenadas de los focos. Graficar.
36. Los focos de una elipse son los puntos $(3, 8)$ y $(3, 2)$, y la longitud de su eje menor es 8. Hallar la ecuación de la elipse, coordenadas del vértice y excentricidad. Graficar
37. El centro de una elipse es el punto $(2, -4)$ y el vértice y el foco del mismo lado $(-2, -4)$ y $(-1, -4)$, respectivamente. Hallar la ecuación de la elipse, coordenadas del vértice y foco, excentricidad. Graficar
38. Para las hipérbolas siguientes hallar vértice, focos, excentricidad. Graficar

$$\begin{array}{lll} a) 49y^2 - 16x^2 = 784 & b) 4x^2 - 9y^2 + 32x + 36y + 64 = 0 & c) x^2 - 9y^2 - 4x + 36y = 41 \\ d) x^2 - y^2 = 25 & e) x^2 - 4y^2 - 2x + 1 = 0 & f) x^2 - 4y^2 = 4 \\ g) 9y^2 - 4x^2 = 36 & h) 49x^2 - 4y^2 + 54x + 16y + 29 = 0 & \end{array}$$

39. Hallar las ecuaciones de las hipérbolas que satisfacen:
- a) eje real 8, focos $(\pm 5, 0)$

- b) eje imaginario 24, focos $(0, \pm 13)$
 c) centro $(0, 0)$, un foco $(8, 0)$, un vértice $(6, 0)$
40. Los vértices de una hipérbola son $(0, \pm 4)$ y su excentricidad $\frac{3}{2}$. Hallar la ecuación y los focos. Graficar
41. Hallar el lugar geométrico de los puntos cuya distancia al punto fijo $(0, 6)$ sea igual a $\frac{3}{2}$ de la correspondiente a la recta $3y - 8 = 0$
42. Hallar la ecuación de la hipérbola de centro el origen, ejes sobre los de coordenadas, y que pase por los puntos $(3, 1)$ y $(9, 5)$

2.2.1 Funciones lineales y cuadráticas

1. El ánimo de lucro (en miles de dólares) de una empresa está dada por.

$$P(x) = 5000 + 1000x - 5x^2$$

donde x es la cantidad (en miles de dólares) que la empresa gasta en publicidad.

- a) Encuentre la cantidad, x , que la empresa tiene que pasar para maximizar su beneficio.
 Resp. 100 mil dólares
- b) Encuentre el máximo beneficio. Resp. 55.000
2. Camila se encuentra sobre un edificio a 60 pies del suelo, lanza una pelota hacia arriba con una velocidad de 30 pies por segundo. Usar la fórmula

$$h = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h_0$$

en donde $g = -32$, $v_0 = 30$, $h_0 = 60$. Responder lo siguiente:

- a) A partir de su lanzamiento ¿cuánto tiempo tardará la pelota en estar a 25 pies respecto del suelo? Resp. 27 seg,
- b) A partir de su lanzamiento ¿cuánto tiempo tardará la pelota en golpear el suelo? Resp. 3,1 seg despues del lanzamiento
3. Si la demanda d se relaciona con el precio p de acuerdo con

$$d = 5p^2 - 2000p + 200000$$

y la oferta f con el precio p de acuerdo con

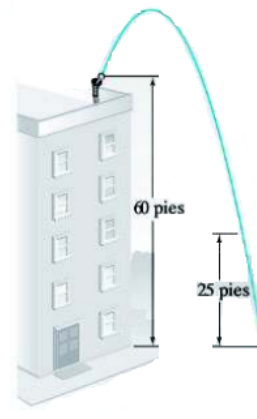
$$f = 3p^2 + 200p$$

determinar el precio para el cual la demanda se iguala con la oferta.

4. El crecimiento en diámetro de una variedad de manzana en función del número de días desde la plena flor, está dado por

$$d = 0,9t - 0,002t^2$$

en donde d es el diámetro ecuatorial (mm) y t es el tiempo en días desde plena flor. Si la plena flor para esta variedad en la presente temporada fue el 10 de septiembre de 2010,



- a) ¿Cuánto debería medir aproximadamente un fruto el 15 de diciembre de 2010? Resp. 68 mm
- b) Si la cosecha se puede iniciar cuando los frutos midan aproximadamente 88 mm, ¿En qué fecha se espera iniciar la cosecha? Resp. 1 de febrero de 2011
5. En las plantas de cierta especie A, el número de frutos por planta esta relacionado con el crecimiento vegetativo según la relación:

$$F = 20 - \frac{10}{c - 9}$$

en donde, F es el número de frutos, c el crecimiento vegetativo expresado en cm y $10 \leq c < 89$. Determine:

- a) Dominio y recorrido de F
- b) Gráfico de F
- c) El máximo número de frutos obtenibles
6. Una compañía utiliza funciones de ingresos y costos para predecir sus ganancias de la venta de ciertos artículos. Si los ingresos se obtienen de la ecuación $I(x) = 55x$ y los costos de $C(x) = 50000 + 12x$, hallar los valores de x (cuántos artículos) para que se produzcan ganancias. Resp. 1163
7. Se ha demostrado experimentalmente que la temperaturas T en grados Fahrenheit, es una función lineal del número de chirridos de grillos por minuto t . Cuando los grillos chirrian 60 veces por minuto, la temperatura es de 55° y cuando chirrian 88 veces por minuto, la temperatura es de 62° .
- a) Hallar una función lineal que se ajuste a los datos. Resp. $T = \frac{1}{4t} + 40$
- b) Hallar la temperatura cuando hay 76 chirridos por minuto y 100 por minuto. Resp. 59° y 65°
8. Un cultivador de naranjas encuentra que obtiene un rendimiento promedio de 40 kg por árbol cuando planta 20 árboles por acre. Cada árbol agregado por acre disminuye el rendimiento por árbol en 1 kg. ¿Cuántos árboles por acre se deben plantar para que la producción por acre sea máxima? (Hint: considere que x es la cantidad de árboles a agregar. Su respuesta debe dar una ecuación de parábola). Resp. $R = (20 + x)(40 - x)$
9. Considere las siguientes funciones de ingreso y costo en donde x representa el numero de unidades producidas:

$$I(x) = 15x + 200, \quad C(x) = 100 + x^2$$

- a) Hallar una función para la Ganancia en términos de x . Grafique los ingresos, los costos y las utilidades. Resp. $G(x) = -x^2 + 15x + 100$
- b) Hallar el punto de equilibrio en que los ingresos se igualan con los costos. Muestre este valor en el grafico. Resp. $x = 20$.
- c) Hallar los valores de x que producen ganancias y los que generan perdidas.

2.2.2 Funciones racionales y radicales

1. Considerar la función $y = \frac{2x^2}{x^2 - 16}$. Graficar f . Hallar la función inversa para la parte de la gráfica que queda en el **segundo** cuadrante. Dibujar esa inversa basándose en la gráfica de f
2. Considerar la función $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$. Graficar f . Hallar la función inversa para la parte de la gráfica que queda en el **primer** cuadrante. Dibujar esa inversa basándose en la gráfica de f

3. Hallar el dominio de cada una de las siguientes funciones, y sus asíntotas verticales, horizontales y oblicuas (si tienen):

$$a) \frac{x^2 + 1}{x}$$

$$b) \frac{x^3}{x^2 - 4}$$

$$c) \frac{x - 1}{x^2 - 5x + 6}$$

$$d) \frac{2x + 3}{x - 5}$$

4. En una clase de psicología se realizó el siguiente experimento de memorización. A cada estudiante se le dio una lista de 40 palabras y un día para memorizarlas. Durante 20 días seguidos cada estudiante escribía todas las palabras de la lista que era capaz de recordar. Se halló la media de aciertos y se determinó que una buena aproximación de esta media venía dada por la función

$$f(x) = \frac{5x + 30}{x}, \quad x = \text{días}$$

- a) ¿Cuántos aciertos se producen el cuarto día?
 b) Dibujar la gráfica de esta función y estudiar sus características.
 c) Si el número de días sigue aumentando, ¿qué tendencia se observa en el número de aciertos?
5. Los experimentos realizados por A. Clark sugieren que la respuesta $R(x)$ (en %) del músculo del corazón de una rana al inyectar x unidades de acetilcolina queda aproximada por la función

$$R(x) = \frac{100x}{b + x}$$

- a) Calcular el valor de la constante b de modo que una concentración de 40 unidades de acetilcolina produzca una respuesta del corazón de 50 % para una cierta rana.
 b) Graficar la función R para $b < 0$ y $b > 0$.
6. En una población de 5 mil personas se está transmitiendo una infección estomacal por bacterias. Sea

$$p(t) = \frac{5000t}{t + 100}$$

el número de personas infectadas t semanas después del comienzo de la epidemia. ¿Después de cuántas semanas el número de infectados es aproximadamente 400 persona?

2.2.3 Funciones exponencial y logaritmo

1. Una población de aves, cuenta inicialmente con 50 individuos y se triplica cada 2 años.
- a) ¿Cuál es la fórmula de la función que representa el crecimiento de la población de aves?
 Resp. $50 \cdot 3^{\frac{x}{2}}$
- b) ¿Cuántas aves hay después de 4 años? Resp. 450
- c) ¿Después de cuanto tiempo la población de aves será de 1000 individuos? Resp. 5,4 años
2. Las poblaciones animales no pueden crecer sin restricción debido a la limitación de hábitat y suministros de alimentos. En tales condiciones la población sigue un modelo de crecimiento del tipo

$$P(t) = \frac{a}{1 + be^{-kt}}$$

donde a , b y k son constantes positivas

Para cierta población de peces, en un pequeño estanque $a = 120$, $b = 11$, $k = 0,2$ y t se mide en años. Los peces se introdujeron en el estanque en el tiempo $t = 0$.

- a) ¿Cuántos peces se introdujeron en el estanque?

- b) Calcular la población luego de 10, 20 y 30 años.
 c) Evaluar $P(t)$ para valores grandes de t .
 d) Graficar la función usando 80 como valor máximo de x y 1300 como valor máximo de y . Usar 0 como valor mínimo para cada variable.
3. Suponga que la función f mide la masa presente de carbono 14 (en gramos) el cual tiene una vida media es 5715. La cantidad de carbono 14 presente después de t años está dada por

$$f(t) = 10 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{5715}}$$

- a) Determine la cantidad inicial.
 b) Determine la cantidad presente luego de 2000 años.
 c) Trace la gráfica de esta función en el intervalo desde $t = 0$ hasta $t = 10000$
4. Se tiene un cultivo de bacterias en un laboratorio y se sabe que su crecimiento es exponencial de la forma $f(x) = y_0 \cdot a^{\frac{x}{b}}$, en donde x representa el número de minutos transcurridos, y_0 es la cantidad inicial y a el factor de crecimiento. El conteo del cultivo de bacterias fue de 800 después de 1 minutos y 1280 después de 2 minutos.
- a) ¿Cuál es la fórmula de la función que representa el crecimiento del cultivo de bacterias?
 Resp. $500 \cdot 1,6^x$
 b) ¿Cuántas bacterias hay después de 5 minutos? Resp. 5242.88
 c) ¿Después de cuanto tiempo el número de bacterias será de 10000? Resp. 6,37 min
5. En una investigación científica, una población de moscas crece exponencialmente. Si después de 2 días hay 100 moscas y después de 4 días hay 300 moscas.
- a) ¿Cuál es la fórmula de la función que representa el crecimiento de la población de moscas?
 Resp. $\frac{100}{3} 3^{x/2}$
 b) ¿Cuántas moscas hay después de 5 días? Resp. 520
 c) ¿Después de cuanto tiempo la población de moscas será de 1000 individuos? Resp. 6,19 días
6. La ecuación $f(x) = \frac{12000}{1 + 499(1,09)^{-x}}$ proporciona las ventas totales x días después del lanzamiento del juego "Math terminator". Determinar el día en que se vendieron 6000 juegos.
7. Después que la televisión se introdujo en cierto país, la proporción de jefes de familia que poseían televisor t años después se encontró que estaba dado por la fórmula:

$$T = 1 - e^{-0,1t}$$

Encontrar el crecimiento T entre $t = 3$ y $t = 6$. Resp. 19/100

8. La población de cierta isla como función del tiempo t se encuentra que está dado por la fórmula:

$$y = \frac{20000}{1 + 6 \cdot 2^{-0,1t}}$$

Hallar el incremento entre $t = 10$ y $t = 20$. Resp. 3000

9. Un medicamento se elimina del cuerpo a través de la orina. La dosis inicial es de 10 mg y la cantidad $A(t)$ que queda en el cuerpo t horas después está dada por $A(t) = 10 \cdot 0,8^t$. Para que el fármaco haga efecto debe haber en el cuerpo por lo menos 2 mg.
- a) Determinar cuándo quedan sólo 2 mg. Resp. 7 horas aprox.
 b) ¿Cuál es la semivida (o vida media) del medicamento.

10. El número de bacterias que hay en cierto cultivo en el tiempo t está dado por $Q(t) = 2 \cdot 3^t$, en donde t se mide en horas y $Q(t)$ en miles.
- ¿Cuál es el número inicial de bacterias? Resp. 2 mil.
 - ¿Cuál es el número después de 10 minutos? Resp. 2,4 mil.
 - ¿Después de 30 minutos? Resp. 3,46 mil.
 - ¿Después de 1 hora? Resp. 6000
11. Considerar la función $y = \ln(x^2 - 9)$. Graficar f . Hallar la función inversa para la parte de la gráfica que queda en el **primer** y **cuarto** cuadrante cuadrante. Dibujar esa inversa basándose en la gráfica de f
12. Resolver las ecuaciones:
- $3 \log x - \log 32 = \log x - \log 2$
 - $2 \log^2 x + 7 \log x - 9 = 0$
 - $\log_3(3x - 1) - \log_3(x + 1) = 2$
 - $7^{1+2x} - 50 \cdot 7^x + 7 = 0$
 - $5^{2x} - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$
 - $3^{4\sqrt{x}} - 4 \cdot 3^{2\sqrt{x}} + 3 = 0$

Trigonometría

- Hallar los ángulos agudos A y B de un triángulo rectángulo si $\sen 2A = \cos 3A$
- Hallar el ángulo agudo x tal que $\tg(30^\circ - x) = \cotg(3x + 30^\circ)$
- Probar que $\sen 32^\circ - \cos 58^\circ = 0$
- Probar que $\operatorname{cosec} 12^\circ + \sec 38^\circ = 2 \operatorname{cosec} 12^\circ = 2 \sec 58^\circ$
- Si x es ángulo del cuarto cuadrante y $\cos x = \frac{1}{2}$, hallar

$$B = \frac{2 \sen x + 3 \tg x}{\sen x - \operatorname{cosec} x}$$

6. Hallar el valor de $\frac{\tg 150^\circ - \tg 120^\circ}{1 + \tg 150^\circ \cdot \tg 120^\circ}$

7. Verificar gráficamente que:

$$a) \cos x = \sen\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \quad b) -\sen x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

8. Determinar periodo, frecuencia, amplitud, ángulo de fase, y graficar:

$$a) y = \cos 2x + 2 \sen x \quad b) y = 2 \sen \frac{x}{3} \quad c) y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$d) y = \sen 2x + 2 \cos x \quad e) y = 2 \sen 3x \quad f) y = 3 \cos \frac{(x-1)\pi}{2}$$

9. Verificar las siguientes identidades:

$$a) \frac{\sen x + \cos x - 1}{\sen x - \cos x + 1} = \frac{\cos x}{1 + \sen x}$$

$$c) \frac{\sen 33^\circ + \sen 3^\circ}{\cos 33^\circ + \cos 3^\circ} = \tg 18^\circ$$

$$b) \frac{\sen^2 x + 2 \cos x - 1}{2 + \cos x - \cos^2 x} = \frac{1}{1 + \sec x}$$

10. Verificar que:

$$a) \cos 130^\circ + \cos 110^\circ + \cos 10^\circ = 0$$

$$c) \sin 32^\circ + \sin 28^\circ = \cos 2^\circ$$

$$b) \cos 20^\circ - \sin 10^\circ - \sin 50^\circ = 0$$

11. Si x es ángulo del cuarto cuadrante y $\sin x = -\frac{5}{13}$, hallar:

$$a) \operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

$$b) \sin 2x + \operatorname{cotg} \frac{x}{2}$$

$$c) \sin \left(90^\circ + \frac{x}{2} \right)$$

12. Probar las siguiente igualdades:

$$a) \sin \left(\arcsin \frac{15}{13} + \arcsin \frac{4}{5} \right) = \frac{63}{65}$$

$$e) \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$$

$$b) \sin \left(\arcsin \frac{1}{2} - \arccos \frac{1}{3} \right) = \frac{1 - 2\sqrt{6}}{6}$$

$$f) \arcsin \frac{4}{5} + \operatorname{arctg} \frac{3}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$c) \operatorname{tg} \left(\arcsin \frac{-3}{5} - \arccos \frac{5}{13} \right) = \frac{63}{16}$$

$$g) 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{7} = \frac{\pi}{4}$$

$$d) \sin \left(2 \arcsin \frac{4}{5} - \arccos \frac{12}{3} \right) = \frac{323}{325}$$

$$h) \operatorname{arctg} a + \operatorname{arctg} \frac{1}{a} = \frac{\pi}{2}, \quad a > 0$$

13. Resolver para ángulos entre 0 y 2π :

$$a) \cos x + \cos 2x = 0$$

$$b) 2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0$$

$$c) (\operatorname{tg} x - 1)(2 \sin x + 1) = 0$$

$$d) 2 \sin^2 x + 3 \cos x = 0$$

$$e) \sin^2 x - 2 \cos x + \frac{1}{4} = 0$$

$$f) 2 \operatorname{tg}^2 x + \sec x = 0$$

$$g) \sin(2x - \pi) = \cos x$$

$$h) \cos^2 x + 2 \sin x = 0$$

$$i) \sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$$

3. Límite y Continuidad ...



(... sigo con mis tres amores)

3.1 Introducción

Ahora empieza lo que uno poco conoce de la Media, **El Cálculo**, una de las ramas más bonitas de la Matemática y con cualquier cantidad de aplicaciones en, Física, Ingeniería, Economía, Biología y otras ciencias, que no son nada sin los modelos que les proporciona la Matemática, y en particular el Cálculo.

Seguro que más de alguien lo quiere saber. Sigo con mis tres amores, en orden cronológico, el albo por siempre, la matemática en el límite y ... por supuesto, la morena con continuidad y velocidad uniformemente acelerada

3.2 Sucesiones

La variable es la letra n y **siempre** va al infinito. Calcular un límite y probar que el límite es determinado número no son la misma cosa.

Calcular es determinar cuánto vale el límite, y para ello se emplean teoremas y otros "trucos"

Probar o **demostrar** que el límite es determinado número significa emplear la **definición** para hallar el $N \in \mathbb{N}$. Recordemos que

$$\lim a_n = L \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{ tal que } n \geq N \implies |a_n - L| < \varepsilon$$

El **probar** es relativamente sencillo, pero aún así asusta. Mostramos las dos formas de probar, con acotamiento superior y sin ese acotamiento.

El **calcular** un límite requiere de más *astucia*. Primero uno tiene que observar de que forma es ese límite y cuál es su *máscara*.

■ MÁSCARA



Expresión que resulta después de reemplazar el valor al que tiende la variable en la función a la que se busca el límite; si del reemplazo resulta un número real, entonces ¡ese es el límite!, si no es así hay que emplear herramientas matemáticas para “desenmascarar” a ese límite.

Algebra de infinitos

Lo primero, es recordar que infinito, ∞ , no es un número, es solo un símbolo que se usa para indicar crecimiento sin cota. Sin embargo, en el contexto del cálculo de límites, es posible operar con este símbolo y otros, tal como sigue:

$$\infty + \infty = \infty$$

$$-\infty - \infty = -\infty$$

$$\infty \cdot \infty = \infty$$

$$\frac{1}{\infty} = 0$$

$$\frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\frac{1}{0^+} = \infty$$

$$a^\infty = \begin{cases} \infty, & a > 1 \\ 0, & -1 < a < 1 \end{cases}$$

$$k \cdot \infty = \begin{cases} \infty, & k > 0 \\ -\infty, & k < 0 \end{cases}$$

Las siguientes son máscaras que no están definidas, por eso que es necesario modificarlas con argumentos matemáticos para obtener el límite,

$$1^\infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \infty - \infty, \quad \infty^0, \quad 0^0, \quad \frac{0}{0}, \quad 0 \cdot \infty, \quad 0^\infty$$

Cabe preguntarse ¿y cómo se calculan estas cosas? Depende del problema:

- Si la máscara es 1^∞ se usa el límite de la exponencial, en una de sus dos versiones:

$$\lim_{n \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$$

La mejor técnica de cálculo de estos límites es la “cajita”

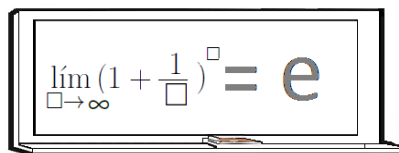
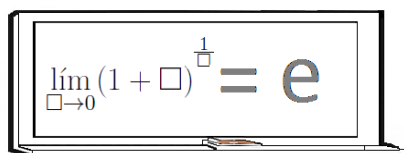


Figura 3.1

- Si la máscara es $\frac{\infty}{\infty}$ se observa el grado del numerador y del denominador. Si es posible determinarlos el problema está resuelto:
 1. grado numerador menor que grado denominador el límite es cero.
 2. grado numerador mayor que grado denominador el límite es infinito.
 3. grado numerador igual que grado denominador el límite es el cociente entre los coeficientes de mayor grado.

- Si no se puede determinar el grado, lo que ocurre a menudo, nos puede salvar **Stolz** o algunas de sus consecuencias.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1} - u_n}{v_{n+1} - v_n}, \quad v_n \rightarrow \infty$$

Tal vez uno puede determinar el grado pero queda una máscara del tipo $\infty - \infty$. En tal caso puede ayudar un conjugado.

- Límite de funciones trigonométricas

En la mayoría de estos límites se debe usar el límite notable $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, aunque puedes recordarlo mejor con las “cajitas”

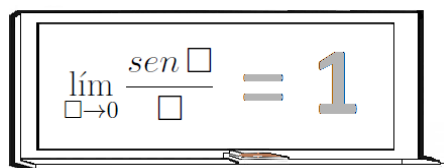


Figura 3.2

Lo mejor es ver esto en la práctica, dicho de otro modo *en la cancha se ven los gallos*.

Problema 3.1 Considerar la sucesión $\left(\frac{3n-1}{4n-5}\right)$. Escribir los 5 primeros términos. Determinar si ella es creciente o decreciente. Decidir si está o no acotada. Hallar el límite L de la sucesión. Determinar, para $\varepsilon = 0,05$ la cantidad de términos de la sucesión que se quedan fuera $V(L, \varepsilon)$.

Los cinco primeros términos son, $\{-2, \frac{5}{3}, \frac{8}{7}, 1, \frac{14}{15}\}$. Se observa que su comportamiento permite *sospechar*, que excluyendo el primer término, ella es decreciente. Para asegurarse de esto se emplea uno de los dos criterios, la **diferencia** o el **cociente**. Veamos la diferencia

$$\begin{aligned} a_n - a_{n+1} &= \frac{3n-1}{4n-5} - \frac{3(n+1)-1}{4(n+1)-5} = \frac{3n-1}{4n-5} - \frac{3n+2}{4n-1} \\ &= \frac{3n-1}{(4n-1)(4n-5)} \end{aligned}$$

mirando numerador y denominador se observa que si $n > 1$, entonces el cociente es positivo, con lo cual la sucesión es decreciente. Para determinar el acotamiento se usa el límite.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-1}{4n-5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{1}{n}}{4 - \frac{5}{n}} = \frac{3}{4}$$

y se calcula el primer término, que es -2 . Por tanto, la sucesión esta acotada y sus valores se encuentran en el intervalo $[-2, \frac{3}{4})$.

¡¡siempre!! límite + 1^{er} término $\implies$ acotamiento

Para saber la cantidad de términos que quedan fuera de cualquier vecindad del límite, hay que usar la definición para así hallar el $N \in \mathbb{N}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{ tal que } n \geq N \implies |a_n - L| < \varepsilon$$

Tenemos:

$$\begin{aligned} |a_n - L| < \varepsilon &\implies \left| \frac{3n-1}{4n-5} - \frac{3}{4} \right| = \left| \frac{11}{4(4n-5)} \right| < \varepsilon \\ &\implies \frac{4(4n-5)}{11} = \frac{1}{4} \left(\frac{11}{4\varepsilon} + 5 \right) > \frac{1}{\varepsilon} \end{aligned}$$

Ahora, cualquier ε que nos den se reemplaza en esta expresión y listo. Veamos $\varepsilon = 0,05$

$$\varepsilon = 0,05 \implies n > \frac{1}{4} \left(\frac{11}{4 \cdot 0,05} + 5 \right) = \frac{60}{4} = 15$$

está clarísimo, $N = 16$. Esto significa que a partir del término a_{16} , **todos** los términos de ahí para adelante se encuentran en la $V(\frac{3}{4}, \varepsilon)$. Los términos que queda fuera son los que van del a_1 al a_{15} , en total 15 términos. Para los que siguen la máxima de Santo Tomás *ver para creer*, chequeamos el a_{15} .

La vecindad $V(\frac{3}{4}; 0,05)$ equivale al intervalo $(\frac{7}{10}, \frac{4}{5})$. La sucesión es $\left(\frac{3n-1}{4n-5}\right)$. El $a_{15} = \frac{44}{55}$. Para saber si está en la vecindad sólo tenemos que medir su distancia al centro de la vecindad, si sobrepasa al radio de esa vecindad **está afuera**.

$$d\left(\frac{44}{55}, \frac{3}{4}\right) = \frac{11}{4(4 \cdot 15 - 5)} = \frac{11}{220} = 0,05$$

como el intervalo es abierto, está fuera. Efectivamente, desde el a_{16} en adelante **todos** los términos se la sucesión quedan en la vecindad del límite.

Observación 3.2.1 Si la sucesión contiene términos lineales, o si el N puede ser encontrado sin acotamiento, entonces este N es el primero.

Problema 3.2 Considerar la sucesión $\left(\frac{1+n^2}{3+2n^2}\right)$. Escribir los 5 primeros términos. Determinar si ella es creciente o decreciente. Decidir si está o no acotada. Hallar el límite L de la sucesión. ¿es posible asegurar que hallado el N , sean $N-1$ los términos que quedan fuera de la vecindad del límite para $\varepsilon = 0,05$?

Vamos por parte, los 5 primeros términos son, $\frac{2}{5}, \frac{5}{11}, \frac{10}{21}, \frac{17}{35}, \frac{26}{53}$. Veamos el límite por acotamiento

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+n^2}{3+2n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2} + 1}{\frac{3}{n^2} + 2} = \frac{1}{2}$$

partió de $\frac{2}{5}$ para llegar cerquita del $\frac{1}{2}$. Con esto vemos que es **decreciente** y además que está acotada. Para la última interrogante se emplea la definición. La distancia entre cualquier término de la sucesión y su límite es

$$|a_n - L| = \left| \frac{1+n^2}{3+2n^2} - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2(3+2n^2)}$$

Para sucesiones con término cuadráticos, y en general, no lineales, el procedimiento para hallar el N (no

el primero) es, por lo general, por **acotamiento** superior. Veamos si se puede hallar el N directamente.

$$|a_n - L| < \varepsilon \implies \frac{1}{2(3+2n^2)} < \varepsilon \implies 2(3+2n^2) > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\implies n^2 > \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\varepsilon} - 6 \right)$$

$$\implies n > \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 6}, \quad \text{con } \frac{1}{\varepsilon} - 6 \geq 0$$

Ahora, tomemos un $\varepsilon = 0,1$, entonces $n > \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{0,1} - 6} = 1$. Esto significa que a partir de $n = 2$ se cumple que todos los términos se quedan en la vecindad $V(\frac{1}{2}, \frac{1}{10})$. Se puede verificar y resulta verdadero. Con esto hemos encontrado el primer N que hace lo que tiene que hacer.

Si en lugar de hallar N como lo hicimos empleamos acotamiento, entonces

$$|a_n - L| < \varepsilon \implies \frac{1}{2(3+2n^2)} < \frac{1}{(3+2n^2)} < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n} < \varepsilon \implies n > \frac{1}{\varepsilon}$$

se observa una cadena de acotamientos, y nos quedamos con el que da menos problemas, el que es más simple de trabajar, el $\frac{1}{n}$. En este caso, si $\varepsilon = 0,1$, entonces $n > 10$, con lo cual $N = 11$. Como hicimos acotamiento este N no es el primero, pero con este N o con cualquier otro se prueba que el límite de la sucesión es el obtenido. La definición no pide el primero sino sólo que **exista** uno.

Observación 3.2.2 En todo problema de cálculo de límite de sucesiones, lo primero a tener en cuenta, en caso de fracciones, son los grados del numerador y denominador.

En los primeros dos problemas, el numerador y el denominador eran del mismo grado, por eso se dividió por el más alto grado, pero con la práctica es cuestión de mirar y saber de inmediato cual el límite. Mostramos algunos ejemplos a continuación.

Problema 3.3 Verifica los siguientes límites:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 5n}{5n^2 + 2n - 6} = \frac{3}{5}$$

$$(d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-3) \cdot n^2}{n+6} = \infty$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n^3 - 1}{n^2 + n^3} \right)^{1/2} = 2$$

$$(e) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^{15} - 1)(n^{15} + 1)}{n^{30}} = 1$$

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{27n^4 - 5n^2 + 1}{5n^2 + n^4 - 1} \right)^{1/3} = 3$$

$$(f) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{11}(n-2)^{12}}{(n+3)^{15}(n-4)^{30}} =$$

(a) La máxima potencia en el numerador y denominador es 2, de modo que el valor del límite es el coeficiente del $3n^2$ dividido por el coeficiente de $5n^2$. Así, el límite es $\frac{3}{5}$.

(b) El límite de la base es $\frac{4}{1} = 4$, el exponente es un número, así, el límite es $4^{1/2} = 2$.

(c) El límite de la base es 27, el exponente es un número, así, el límite es $27^{1/3} = 3$.

(d) El grado del numerador es 3, el grado del denominador es 1, luego el límite es ∞ .

- (e) El grado del numerador es 30, el grado del denominador es 30, luego el límite es $\frac{1}{1} = 1$.
 (f) El grado del numerador es 23, el grado del denominador es 45, luego el límite es 0.

Problema 3.4 Hallar los siguientes límites:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0 & \text{(c)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^3 - 3n^2 + 1}{n^3 + 1} \right)^{\frac{n+1}{2n+1}} \\ \text{(b)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{4n^3 - n^2 + 1}{n^3 + n^2 + n + 1} \right) & \text{(d)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n^3 + 1}{n^3 - 5} \right)^{\frac{n^2+1}{n+1}} \end{array}$$

(a) La sucesión tiene sólo términos positivos. la fracción tiene n términos en el numerador y n términos en el denominador. desarrollando el factorial y la potencia:

$$0 < \frac{n!}{n^n} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1}{n \cdot n \cdot n \cdots n} = \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdots \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n}$$

como $\frac{1}{n}$ tiende a cero, por el teorema del sandwich tenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

(b) Este es el límite de un logaritmo, usamos la propiedad de que $\lim_{x \rightarrow x_0} \ln[f(x)] = \ln[\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{4n^3 - n^2 + 1}{n^3 + n^2 + n + 1} \right) = \ln 4$$

(c) Aquí, el límite de la base es 2, y el límite del exponente $\frac{1}{2}$. Luego el límite es $2^{1/2} = \sqrt{2}$

(d) El límite de la base es 4, y el límite del exponente ∞ . Luego el límite es $4^\infty = \infty$

Problema 3.5 Hallar $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - 3n + 10)$

Este es un caso “raro”. La máscara tiene la forma $\infty^2 - 3\infty + 10 \sim \infty - \infty$. la reducimos como sigue

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - 3n + 10) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(1 - \frac{3n}{n^2} + \frac{10}{n^2} \right) = \infty \cdot 1 = \infty$$

Problema 3.6 Resolvemos:

$$\text{(a)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2 + 3n - 2}} = 2$$

Este es un límite de fracciones, hay que ver los grados. El numerador tiene grado 1, y el denominador también. Observar que la variable n se va al infinito, por tanto, el comportamiento allá de $n^2 + 3n - 2$ es el mismo que n^2 . Luego, el límite que estamos calculando equivale a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2 + 3n - 2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n} = 2$$

Da exactamente lo mismo que se divida por la máxima potencia, que en este caso es 1.

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-3}{2n+5} \right)^{\frac{n^2+1}{n-1}} = e^{-4}$$

El límite es de la forma 1^∞ , por tanto el resultado es una exponencial. El “viejo truco” de sumar y restar 1 es la clave. Se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-3}{2n+5} \right)^{\frac{n^2+1}{n-1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2n-3}{2n+5} - 1 \right)^{\frac{n^2+1}{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-8}{2n+5} \right)^{\frac{n^2+1}{n-1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{2n+5}{-8}} \right)^{\frac{n^2+1}{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{2n+5}{-8}} \right)^{\frac{2n+5}{-8}} \right]^{\frac{n^2+1}{n-1} \cdot \frac{-8}{2n+5}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{n-1} \cdot \frac{-8}{2n+5} = e^{-4} \end{aligned}$$

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+3n}{n^2-1} \right)^{5n-1} = e^{15}$$

Repita el procedimiento anterior. Si lo entendió, no haga más, dedique su tiempo a otro tipo más complicado de límites.

Problema 3.7 Estos son “más ingeniosos”:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n} \operatorname{sen} n!}{n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{n+2} \cdot \operatorname{sen} n! = 0 \cdot \text{acotada} = 0$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = \max\{a, b\}, \quad a, b > 0$$

Si $a > b$, entonces $0 < \frac{b}{a} < 1$. Luego,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a \sqrt[n]{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n} = a$$

Si $a < b$, entonces $0 < \frac{a}{b} < 1$. Luego,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} b \sqrt[n]{1 + \left(\frac{a}{b}\right)^n} = b$$

Luego, es el máximo entre a y b

$$(c) (a_n) \text{ y } (b_n) \text{ son sucesiones tales que } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n^2} = 2, \text{ entonces}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

Sólo hay que reescribir el límite, en función de lo que se entrega como hipótesis.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a_n}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a_n}{n} \cdot \frac{1}{n}}{\frac{n^2}{n^2}} = \frac{1 \cdot 0}{2} = 0$$

$$(d) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0$$

$$(e) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{n} - \sqrt[3]{n+1} \right) = 0$$

Veamos como es esto. El conjugado de la cúbica tiene su origen en el cubo del binomio

$$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$$

Sean $A = n^{1/3}$, $B = (n+1)^{1/3}$, entonces reemplazando

$$n - (n+1) = (n^{1/3} - (n+1)^{1/3}) \left[(n^{2/3} + n^{1/3}(n+1)^{1/3} + (n+1)^{2/3}) \right]$$

se observa que esto cumple el objetivo de eliminar el $\infty - \infty$ que aparece en el numerador. De esta forma, este es el conjugado de la cúbica. Tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^{1/3} - (n+1)^{1/3} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^{1/3} - (n+1)^{1/3} \right) \cdot \frac{n^{2/3} + n^{1/3}(n+1)^{1/3} + (n+1)^{2/3}}{n^{2/3} + n^{1/3}(n+1)^{1/3} + (n+1)^{2/3}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{2/3} + n^{1/3}(n+1)^{1/3} + (n+1)^{2/3}} = 0 \end{aligned}$$

Problema 3.8 Estos son de Stoltz y sus consecuencias

$$(a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(n+1)^n}{n!}} = e$$

Una de las consecuencias del teorema de Stolz es

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n} = a, \quad a > 0, \quad a_n > 0$$

el a puede ser finito o infinito, vale igual.

Para usar esta consecuencia, observar que los términos anteriores a $(n+1)^2$ son: (es cosa de desarrollar partiendo de $n = 1$)

$$2^1, 3^2, 4^3, \dots, n^{n-1}$$

justo el que sigue es $(n+1)^n$. Con este hecho volvemos a la raíz para amplificar por todos los

anteriores a $(n+1)^n$.

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(n+1)^n}{n!}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2^1 \cdot 3^2 \cdots n^{n-1} \cdot (n+1)^n}{2^1 \cdot 3^2 \cdots n^{n-1} \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n)}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2}{1} \cdot \frac{3^2}{2^2} \cdot \frac{4^3}{3^3} \cdots \frac{(n+1)^n}{n^n}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2}{1}\right)^1 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^3 \cdots \left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e
 \end{aligned}$$

(b) Hallar $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$

Se observa que si se separa este límite como el cociente entre el numerador y denominador, se tiene que la máscara es de la forma $\frac{\infty}{\infty}$. Hay que transformar esto considerando otra de las consecuencias del teorema de Stolz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = L \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L, \quad a_n > 0$$

al comparar se tiene que $a_n = \frac{n!}{n^n}$. Luego,

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n!}{n^n} \cdot \frac{(n-1)^{n-1}}{(n-1)!} = n \cdot \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}$$

Ahora estamos en condiciones de calcular el límite

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\boxed{-n}}\right)^{\boxed{-n}} \right]^{\frac{n-1}{-n}} \\
 &= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{-n}\right)} = e^{-1}
 \end{aligned}$$

(c) Hallar $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\ln n}$, $n > 2$

La máscara es de la forma $\frac{\infty}{\infty}$. Hay que transformar esto de nuevo por las consecuencias de Stolz. Ahora, $a_n = \ln n$. Luego,

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{\ln n}{\ln(n-1)}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\ln n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln(n-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+1) - \ln n}{\ln n - \ln(n-1)}, \quad \text{¡¡Stolz!!} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{n \cdot \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)^n} \\
 &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{\lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n} \\
 &= \frac{\ln e}{\lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left[\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{n-1}}\right]^{\frac{n}{n-1}}} = \frac{\ln e}{\ln e} = 1
 \end{aligned}$$

(d) Hallar $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{(k+1)(k+2) \cdots (k+n)}$, $k > 0$

Entramos el n a la raíz, y empleamos la misma consecuencia de Stolz. Se tiene

$$\begin{aligned}
 \frac{a_n}{a_{n-1}} &= \frac{(k+1)(k+2) \cdots (k+n)}{n^n} \cdot \frac{(n-1)^{n-1}}{(k+1) \cdots (k+n-1)} \\
 &= \frac{k+n}{n} \cdot \frac{(n-1)^{n-1}}{n^{n-1}} = \left(1 + \frac{k}{n}\right) \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}
 \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{(k+1)(k+2) \cdots (k+n)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right) \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} \\
 &= 1 \cdot e^{-1} = e^{-1}
 \end{aligned}$$

(e) Hallar $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2) \cdots (n+n)}$

El problema es análogo al anterior

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{(n+1)(n+2) \cdots (n+n-1)(n+n)}{n^n} \cdot \frac{(n-1)^{n-1}}{n(n+1) \cdots (n+n-2)}$$

después de simplificar

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{a_{n-1}} &= \frac{(n+n-1)(n+n)}{n^n} \cdot \frac{(n-1)^{n-1}}{n} \\ &= \frac{(n+n-1)(n+n)}{n \cdot n^{n-1}} \cdot \frac{(n-1)^{n-1}}{n} \\ &= \frac{(n+n-1)(n+n)}{n^2} \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1) \cdots (n+n)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n(2n-1)}{n^2} \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} \\ &= 4 \cdot e^{-1} = \frac{4}{e}\end{aligned}$$

(f) Hallar $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n!}{n \ln n}$

Este tiene cara de Stolz directo. Sean $u_n = \ln n!$ y $v_n = n \ln n$, con esto el v_n es creciente y tiene límite ∞ .

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n!}{n \ln n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1} - u_n}{v_{n+1} - v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+1)! - \ln n!}{(n+1) \ln(n+1) - n \ln n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+1)}{n \ln \frac{n+1}{n} + \ln(n+1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n+1)} + 1} \sim \frac{1}{\frac{\ln e}{\infty} + 1} \sim \frac{1}{0+1} = 1\end{aligned}$$

3.3 Límite de Funciones

Los problemas que, generalmente, se piden guardan relación con **probar** o **calcular** límites. Existen 9 clase de límites, que son:

$$\begin{array}{lll} 1) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L & 2) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty & 3) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \\ 4) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L & 5) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty & 6) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty \\ 7) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L & 8) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty & 9) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \end{array}$$

Para **probar** un límite se usa siempre la definición, por ejemplo,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon)$$

El problema de calcular límites, cuando la variable $x \rightarrow \infty$, tiene un comportamiento similar al de una sucesión para $n \rightarrow \infty$. Luego, lo que vale para n vale para x . La máscara del tipo 1^∞ da como resultado una exponencial

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e$$

La máscara $\frac{0}{0}$ cuando hay funciones trigonométricas requiere saber

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

Cuando hay cociente de polinomios se requiere sacar el factor que hace el cero en el numerador y en el denominador para cancelar y ver si se fue el problema. Si aparece una fracción con expresiones irracionales convienen las sustituciones.

Observación 3.3.1 SIEMPRE, como primer paso, saca la **máscara** (reemplaza el valor al cual tiende el límite en la expresión a la que se le quiere calcular el límite). Después, pasa cualquier cosa, puede terminar el problema, o bien queda una máscara que hay que seguir trabajando.

Dos cosas finales antes de pasar a resolver problemas. Stolz no tiene nada que decir en límite de funciones, y la otra es que hay límites ¡imposibles! de sacar, por ahora, que necesitan de las llamadas “reglas de *L'Hôpital*” que se ven al final con derivadas. Los profes no las dejan usar por que si no casi todos los límites salen con una sola mano.

Problema 3.9 Probar que $\lim_{x \rightarrow 2} (2x^3 - 3x^2 - 1) = 3$

Un buen uso de la definición y esto es *pan comido*. Es súper importante tener presente que $x \rightarrow 2$, en la definición, equivale a $|x - 2| < \delta$. Lo otro a tener en cuenta es que si el límite es el que se dice, entonces la expresión $|f(x) - L|$ es divisible por $(x - 2)$. Veamos esto. La definición entrega el ε , lo que uno tiene que hallar es el δ y listo, se acabó todo el problema. Siempre se parte de $|f(x) - L| < \varepsilon$ pero manteniendo alejado al *pequeño* ε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon)$$

Partimos.

$$\begin{aligned} |f(x) - L| &= |(2x^3 - 3x^2 - 1) - 3| = |2x^3 - 3x^2 - 4| \\ &= |(x - 2)(2x^2 + x + 2)|, \quad \{\text{divida } 2x^3 - 3x^2 - 4 : x - 2\} \\ &< \delta \cdot |2x^2 + x + 2|, \quad \{\text{vea definición, } |x - 2| < \delta\}, (*) \end{aligned}$$

Ahora, hay que acotar $|2x^2 + x + 2|$, primero, usando desigualdad triangular.

$$|2x^2 + x + 2| \leq 2|x|^2 + |x| + 2, \quad \{\text{desigualdad triangular}\}$$

A continuación se considera que $|x - 2| < \delta$, tomando $\delta = 1$ con el fin de simplificar los cálculos.

$$|x - 2| < 1 \implies -1 < x - 2 < 1 \implies 1 < x < 3 \implies |x| < 3$$

con este dato volvemos a la primera ecuación acotada, para tener

$$|2x^2 + x + 2| \leq 2|x|^2 + |x| + 2 < 2 \cdot 3^2 + 3 + 2 = 23$$

Reemplazamos esto en donde quedamos (*)

$$|f(x) - L| < \delta \cdot |2x^2 + x + 2|$$

con lo cual,

$$|f(x) - L| < 23\delta$$

Si observa bien, el ε en $|f(x) - L| < \varepsilon$ no ha sido considerado, lo traemos ahora cuando es necesario. Nos dieron $|f(x) - L| < \varepsilon$ y hemos encontrado $|f(x) - L| < 23\delta$, por tanto, podemos considerar $23\delta = \varepsilon$, de donde $\delta = \frac{\varepsilon}{23}$. Estamos casi listos. En cierta parte de la búsqueda del δ se consideró $\delta = 1$. En consecuencia, el δ que se debe elegir es

$$\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{23}\}$$

Todos los problemas de este tipo que involucran polinomios son iguales. Haga uno más y *a otra cosa mariposa*.

Problema 3.10 Probar que $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x-3} = -1$

La definición a emplear es la misma anterior, pues tanto el x como la función se aproximan a un número real. Veamos como resulta esto.

$$\begin{aligned} |f(x) - L| &= \left| \frac{x+1}{x-3} + 1 \right| = \left| \frac{2x-2}{x-3} \right| = \frac{2|x-1|}{|x-3|} \\ &< \frac{2\delta}{|x-3|}, \quad \text{no olvides, } |x-1| < \delta \end{aligned}$$

Lo que falta es **acotar** el $\frac{1}{|x-3|}$. Tienes que darte cuenta que estamos en un cociente donde la importancia mayor está en el denominador. También aquí se considera $\delta = 1$. Se tiene

$$|x-1| < 1 \implies -1 < x-1 < 1 \implies 0 < x < 2 \implies -3 < x-3 < -1$$

Formando $(x-3)$ podemos obtener su recíproco $\frac{1}{x-3}$. Como salió todo negativo se multiplica por (-1) , para en lugar de formar $(x-3)$, armar $(3-x)$, ya que en valor absoluto son la misma cosa.

$$\begin{aligned} |x-1| < 1 &\implies -3 < x-3 < -1 \implies 3 > 3-x > 1 \\ &\implies 1 < 3-x < 3 \implies 1 > \frac{1}{3-x} > \frac{1}{3} \\ &\implies \frac{1}{3} < \frac{1}{3-x} < 1, \quad (a, b \in \mathbb{R}^+, a < b \implies \frac{1}{a} > \frac{1}{b}) \\ &\implies \left| \frac{1}{3-x} \right| < 1, \quad \text{el mayor extremo en valor absoluto} \\ &\implies \frac{1}{|3-x|} = \frac{1}{|x-3|} < 1 \end{aligned}$$

Teniendo el factor acotado volvemos al punto donde dejamos la búsqueda.

$$|f(x) - L| < \frac{2\delta}{|x-3|} < 2\delta \cdot 1 = 2\delta$$

Ahora, con $2\delta = \varepsilon$ se tiene $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, con lo cual el δ apropiado es

$$\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

con hallar el δ se termina la demostración.

Problema 3.11 Probar que $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 1}{x - 2} = +\infty$

La definición apropiada se obtiene de observar que x tiende al número real 2, por derecha. Esto significa que hay que trabajar en la vecindad derecha de 2 con radio δ . De igual forma, como el límite va al infinito, es necesario considerar una vecindad del infinito positivo, ella es de la forma (M, ∞) . Se tiene

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \iff (\forall M > 0)(\exists \delta > 0)(0 < |x - x_0| < \delta \implies f(x) > M)$$

Lo que tenemos que hacer en nuestro problema es entonces darnos el M y hallar el δ .

$$\begin{aligned} f(x) > M &\implies \frac{x^2 - 1}{x - 2} > M \\ &\implies \frac{x - 2}{x^2 - 1} < \frac{1}{M} \\ &\implies 0 < x - 2 < \frac{x^2 - 1}{M}, \quad x^2 - 1 > 0, x > 2 \\ &\implies |x - 2| < \frac{x^2 - 1}{M} = \delta \end{aligned}$$

acotando el factor cuadrático estamos listos. Hemos dicho que, por lo general, se toma $\delta = 1$, pero que si hay problemas se debe tomar uno más chico. Miremos el $\delta = 1$

$$|x - 2| < 1 \implies -1 < x - 2 < 1 \implies 1 < x < 3$$

de esto, $1 < x^2 < 9$, siguiéndose que $x^2 - 1 < 8$. Se concluye que

$$\delta = \min\left\{1, \frac{8}{M}\right\}$$

Geométricamente, esto significa que cualquier número comprendido en el intervalo $(2, 2 + \delta)$ produce imágenes mayores que M . Por ejemplo, con $M = 100$ se obtiene $\delta = 0,08$. Con cualquier número en $(2; 2,08)$ las imágenes sobrepasan el valor 100. Como todos manejan calculadora no está demás chequear 0,07, e incluso el 0,08. Cuando se encuentra el δ por acotamiento no se está determinando ni el menor ni el mayor, sólo se está asegurando que a contar de ése encontrado, todos los demás en la vecindad cumplen.

Problema 3.12 El cálculo de los siguientes límites te aclara muchas dudas.

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 5}{x^4 - 3} = 0$, x^4 máxima potencia, máscara $\frac{\infty}{\infty}$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{x+1}}{x} = -\frac{1}{2}$, ¿qué te parece el conjugado? máscara $\frac{0}{0}$
3. $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - x + 2)^3 = 8$, ¡no problems!, máscara real

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{25x^2 + 5}{50x^4 - 1} = -5$, ¡directo, máscara real!

Problema 3.13 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x - 1} = 1$

La máscara de este límite es $\frac{0}{0}$. Siempre en cociente de polinomios de máscara $\frac{0}{0}$ se busca el factor que hace el cero, al mismo tiempo, al numerador y al denominador. Se cancela y listo.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x - 1)(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (2x - 1) = 1$$

Problema 3.14 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{2} \right)$

La máscara es $\infty \cdot 0$. En estos problemas hay que *trabajar* el límite. Las máscaras $\infty \cdot 0$ se transforman a $\frac{1}{0} \cdot 0 = \frac{0}{0}$ reduciendo factores comunes o reescribiendo la expresión.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{-x}{x+2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{x+2} = -\frac{1}{2}$$

Problema 3.15 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2} = \frac{1}{2}$

La máscara es $\frac{0}{0}$. Como aparece una raíz, lo lógico es que el conjugado haga aparecer el factor que hace el cero en el numerador, que tiene que ser el mismo que está en el denominador, x^2 , con el fin de simplificarlo.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2} \cdot \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{1 + \sqrt{1 - x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - x^2)}{x^2(1 + \sqrt{1 - x^2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2(1 + \sqrt{1 - x^2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Problema 3.16 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9x^2 - 3}}{\sqrt[3]{8x^3 + 1}} = \frac{3}{2}$

La máscara es $\frac{\infty}{\infty}$. En estos casos es sencillo saber los grados del numerador, 1, y del denominador 1, por tanto el límite es el cociente de los coeficientes de los más altos grados. Esto es $\frac{\sqrt{9}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{3}{2}$

Problema 3.17 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right) = -1$

La máscara es $\infty - \infty$. En este tipo de máscaras hay que reducir a una sola expresión. Veamos que pasa

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{(1-x)(1+x+x^2)} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x-2}{(1-x)(1+x+x^2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)(x-1)}{(1-x)(1+x+x^2)} \\
 &= - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{1+x+x^2} = -1
 \end{aligned}$$

Problema 3.18 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{2}{3}$

La máscara es $\frac{0}{0}$. Si bien es cierto, aparecen raíces y uno se tienta por los conjugados, es más fácil un cambio de variable para eliminar las raíces. En efecto, para que la cúbica y la cuadrática se desaparezcan, el cambio $z = x^6$, el 6 salió del común denominador de ambas raíces, hace que cuando $x \rightarrow 1$ el $z \rightarrow 1$. De esta manera, la expresión original se transforma en

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1} &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^2-1}{z^3-1}, \quad \text{máscara } \frac{0}{0} \\
 &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)(z+1)}{(z-1)(z^2+z+1)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z+1}{z^2+z+1} = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

Problema 3.19 $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2+1}-x) = \frac{1}{2}$

La máscara es $\infty(\infty - \infty)$. Lo primero es reducir la máscara. Se tiene

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2+1}-x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2+1}-x) \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}, \quad \text{máscara } \frac{\infty}{\infty}
 \end{aligned}$$

como numerador y denominador tienen iguales grados (1), entonces

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2+1}-x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Problema 3.20 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{2-\sqrt{x+4}}$

Lo primero es la máscara. En este caso es $\frac{0}{0}$. Como hay raíces racionalicemos el numerador

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{2-\sqrt{x+4}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{2-\sqrt{x+4}} \cdot \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{(\sqrt{x+1}+1)(2-\sqrt{x+4})}$$

Si sacamos máscara, de nuevo aparece $\frac{0}{0}$. Racionalizamos el denominador

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{(\sqrt{x+1}+1)(2-\sqrt{x+4})} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{(\sqrt{x+1}+1)(2-\sqrt{x+4})} \cdot \frac{2+\sqrt{x+4}}{2+\sqrt{x+4}} \\
 &= - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2+\sqrt{x+4}}{1+\sqrt{x+1}} = -2
 \end{aligned}$$

Vamos a cambiar ahora a otra clase de límites, como ser aquellos en donde aparecen funciones exponenciales y trigonométricas, y algún otro límite novedoso

Problema 3.21 $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$

Si se mira desde el punto de vista de la máscara, este límite es del tipo $0 \cdot$ (algo acotado). Esta es una propiedad y define esta máscara como 0 (cero). Pero no nos confiemos en eso, veamos otra forma de salir del paso. En la mayoría de los límites con funciones trigonométricas se deben tener presente dos hechos.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

El cambio de variable, $z = \frac{1}{x} \implies z \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow 0$. Luego,

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin z}{z} = 0$$

Problema 3.22 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$

Apareciendo cálculo de límites de funciones trigonométricas, seguro debes construir el límite notable

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \boxed{x}}{\boxed{x}}$$

En este caso se multiplica por el conjugado

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x(1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cdot \frac{\sin \boxed{x}}{\boxed{x}} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} \end{aligned}$$

Se muestra el límite notable con su cajita. Ahora es cosa de usar la propiedad que asegura que “si los límites existen, entonces existe su producto”. Claramente obtenemos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

Problema 3.23 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin 2(x-1)}{x^3 - 1} = 0$

Una vez más aparece el seno. Hay que buscar entonces el límite notable. Que aparezca el $x \rightarrow 1$ no puede asustar, basta con un cambio de variable y tenemos el límite que va a 0 (cero). Tomar $x - 1 = z$, entonces $z \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow 1$. Veamos como queda el límite

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin 2(x-1)}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin 2(x-1)}{(x-1)(x^2 + x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin 2(x-1)}{2(x-1)} \cdot \frac{2}{x^2 + x + 1}$$

Separamos en dos el límite, bajo el supuesto que existen, si no es así, nos devolvemos y hacemos otra cosa. Al primero le aplicamos el cambio de variable del que hablamos, y el segundo es de cálculo inmediato, vale $\frac{2}{3}$. Trabajemos el primero

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin 2(x-1)}{2(x-1)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin 2z}{2z} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1, \quad y = 2z$$

En consecuencia

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin 2(x-1)}{x^3 - 1} = 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

Problema 3.24 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 3x} = \frac{2}{3}$

Nos disfrazamos de *carpinteros* para armar el límite notable

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 3x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\cos 2x} \cdot \frac{1}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} \cdot \frac{1}{\cos 2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 2x}{2x} \cdot 2}{\frac{\sin 3x}{3x} \cdot 3} \cdot \frac{1}{\cos 2x} \end{aligned}$$

Por el problema anterior sabemos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 1$$

como $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos 2x} = 1$, entonces $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 3x} = \frac{2}{3}$

Problema 3.25 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right) = 0$

La máscara es $\infty - \infty$. Hay que juntar todo en una sola expresión

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{\sin x (1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{0}{1 + 1} = 0 \end{aligned}$$

Problema 3.26 $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\cos x - \sin x}{\cos 2x} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

La máscara es $\frac{0}{0}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\cos x - \sin x}{\cos 2x} &= \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\cos x - \sin x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\cos x - \sin x}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{1}{\cos x + \sin x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Problema 3.27 $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4) \sin \frac{1}{x-2} = 0$

La máscara es $0 \cdot (\text{algo acotado})$. Debe dar cero. Hacemos $x - 2 = z$ para tener que $z \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4) \operatorname{sen} \frac{1}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2} (x-2)(x+2) \operatorname{sen} \frac{1}{x-2} = \lim_{z \rightarrow 0} z(z+4) \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{z} \\
&= \lim_{z \rightarrow 0} z \operatorname{sen} \frac{1}{z} \cdot (z+4) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{z}}{\frac{1}{z}} \cdot (z+4), \quad h = \frac{1}{z} \\
&= \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen} h}{h} \cdot \lim_{z \rightarrow 0} (z+4) = 0 \cdot 4 = 0
\end{aligned}$$

Problema 3.28 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{1}{4\sqrt{2}}$

La máscara es $\frac{0}{0}$. Busquemos el límite notable por conjugado.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\operatorname{sen}^2 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\operatorname{sen}^2 x} \cdot \frac{\sqrt{2} + \sqrt{1 + \cos x}}{\sqrt{2} + \sqrt{1 + \cos x}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen}^2 x (\sqrt{2} + \sqrt{1 + \cos x})} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{(1 + \cos x) \operatorname{sen}^2 x (\sqrt{2} + \sqrt{1 + \cos x})} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{(1 + \cos x) \operatorname{sen}^2 x (\sqrt{2} + \sqrt{1 + \cos x})} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(1 + \cos x) (\sqrt{2} + \sqrt{1 + \cos x})} = \frac{1}{4\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Problema 3.29 $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[x]{\frac{1+x}{1-x}} = e^2$

Para ver bien la máscara conviene escribir $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{1/x} \sim 1^\infty$. ¡Oh que alivio! es una exponencial

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/x}}{(1-x)^{1/x}} = \frac{e}{e^{-1}} = e^2$$

conviene recordar que

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Problema 3.30 $\lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{1 - 2\cos x}{\operatorname{sen}(x - \frac{\pi}{3})} = \sqrt{3}$

La máscara es $\frac{0}{0}$. Hacemos una sustitución para llevar el límite a cero. Si $z = x - \frac{\pi}{3}$, entonces $z \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{1 - 2 \cos x}{\sin(x - \frac{\pi}{3})} &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - 2 \cos(z + \frac{\pi}{3})}{\sin z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - 2(\cos z \cos \frac{\pi}{3} - \sin z \sin \frac{\pi}{3})}{\sin z} \\
&= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - 2(\cos z \cdot \frac{1}{2} - \sin z \cdot \frac{\sqrt{3}}{2})}{\sin z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z + \sin z \cdot \sqrt{3}}{\sin z} \\
&= \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos z}{\sin z} + \sqrt{3} \right) = \sqrt{3} + \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z}{\sin z} \\
&= \sqrt{3} + \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin^2 z}{\sin z (1 + \cos z)} = \sqrt{3} + \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{1 + \cos z} = \sqrt{3}
\end{aligned}$$

Problema 3.31 $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} = -\frac{2}{\pi}$

La máscara es $0 \cdot \infty$. Llevamos a cero el límite con $z = x - 1$, ya que entonces $z \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} &= \lim_{z \rightarrow 0} z \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \cdot (z+1) = \lim_{z \rightarrow 0} z \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} z \right), \quad \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) = -\cotg \alpha \\
&= \lim_{z \rightarrow 0} -z \cdot \cotg \frac{\pi}{2} z = -\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z \cdot \cos \frac{\pi}{2} z}{\sin \frac{\pi}{2} z} \\
&= -\lim_{z \rightarrow 0} \cos \frac{\pi}{2} z \cdot \left(\frac{\sin \frac{\pi}{2} z}{z} \right)^{-1} = -1 \cdot \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{2} z}{\frac{\pi}{2} z} \cdot \frac{\pi}{2} \right)^{-1} \\
&= -1 \cdot 1 \cdot \left(\frac{\pi}{2} \right)^{-1} = -\frac{2}{\pi}
\end{aligned}$$

Problema 3.32 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{2}$

La máscara es $\frac{0}{0}$. Con serrucho y martillo construimos el famoso límite notable.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin x \cdot \cos x}{x^3 \cdot \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (1 - \cos x)}{x^3 \cdot \cos x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (1 - \cos x) (1 + \cos x)}{x^3 \cdot \cos x (1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 x}{x^3 \cdot \cos x (1 + \cos x)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 x}{x^3} \cdot \frac{1}{\cos x (1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^3 \cdot \frac{1}{\cos x (1 + \cos x)} \\
&= 1^3 \cdot \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Problema 3.33 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \cos a$

La máscara es $\frac{0}{0}$. Los cambios de variable valen oro. Si $x - a = z$, entonces $z \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin(z+a) - \sin a}{z} \\
&= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(\sin z \cdot \cos a + \sin a \cdot \cos z) - \sin a}{z} \\
&= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z \cdot \cos a}{z} - \frac{\sin a (1 - \cos z)}{z} \\
&= \cos a - \sin a \cdot 0 = \cos a
\end{aligned}$$

Problema 3.34 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{x} \right)^{x+1} = 2$

La máscara es 2^1 . ¡oh que sorpresa!, es directo, no hay trucos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{x} \right)^{x+1} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{2x} \cdot 2 \right)^{x+1} = 2^1 = 2$$

Problema 3.35 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{2x+1} \right)^{x^2} = 0$

La máscara es $(\frac{1}{2})^\infty$. ¡siguen las sorpresa!, vale cero.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{2x+1} \right)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+\frac{1}{x}}{2+\frac{1}{x}} \right)^{x^2} \sim \left(\frac{1}{2} \right)^\infty = 0$$

Problema 3.36 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} mx}{\operatorname{tg} nx} = \frac{m}{n}$

La máscara es $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} mx}{\operatorname{tg} nx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\operatorname{tg} mx}{mx} \cdot m}{\frac{\operatorname{tg} nx}{nx} \cdot n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin mx}{\cos mx} \cdot \frac{m}{\cos mx}}{\frac{\sin nx}{\cos nx} \cdot \frac{n}{\cos nx}} = \frac{1 \cdot m}{1 \cdot n} = \frac{m}{n}$$

Problema 3.37 $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\ln(1+x) - \ln x) = 1$

La máscara es $\infty \cdot (\infty - \infty)$. Hay que arreglar esa diferencia

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x[\ln(1+x) - \ln x] &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln \frac{1+x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\ln \left(\frac{1+x}{x} \right)^x \right] \\ &= \ln \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+x}{x} \right)^x \right] = \ln \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x \right] \\ &= \ln e = 1 \end{aligned}$$

Problema 3.38 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2} = e^{-1/2}$

La máscara es 1^∞ , de modo que este es un e . Arreglamos con el *viejo truco* del $1 + (-1) = 0$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} [1 + (\cos x - 1)]^{1/x^2} \sim 1^\infty \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left([1 + (\cos x - 1)]^{1/(\cos x - 1)} \right)^{\frac{\cos x - 1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(1 - \cos x)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2(1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = e^{-1/2} \end{aligned}$$

Problema 3.39 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2+x}{3-x} \right)^x = 1$

La máscara es $(\frac{2}{3})^0$, de modo que esto vale 1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2+x}{3-x} \right)^x = \left(\frac{2+0}{3-0} \right)^0 = \left(\frac{2}{3} \right)^0 = 1$$

Problema 3.40 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x} = 1$

La máscara es $\frac{\infty}{\infty}$, de modo que ¡a trabajar!

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln e^x (1+e^{-x})}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln e^x + \ln(1+e^{-x})}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \ln e + \ln(1+e^{-x})}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\ln(1+e^{-x})}{x} \right) \\ &= 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(1+e^{-x})^{\frac{1}{x}} = 1 + \ln \left[\lim_{x \rightarrow \infty} (1+e^{-x})^{\frac{1}{x}} \right] \\ &= 1 + \ln \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{e^x} \right)^{e^x} \right]^{\frac{1}{xe^x}} = 1 + \ln e^0 = 1 \end{aligned}$$

Problema 3.41 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, a > 0$

La máscara es $\frac{0}{0}$. La sustitución $z = a^x - 1$ hace que $z \rightarrow 0$, y que $x = \frac{\ln(z+1)}{\ln a}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\frac{\ln(z+1)}{\ln a}} = \ln a \cdot \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\ln(z+1)} \\ &= \ln a \cdot \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\ln(z+1)}{z}} = \ln a \cdot \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(z+1)^{1/z}} \\ &= \ln a \cdot \frac{1}{\ln e} = \ln a \cdot 1 = \ln a \end{aligned}$$

Problema 3.42 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

La máscara es del tipo $\frac{0}{0}$. ¿Se parece este problema al anterior? Por supuesto, es el mismo al cambiar a por e . Se hace $z = e^x - 1$ para tener que $z \rightarrow 0$ y que $x = \ln(z+1)$. Luego,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\ln(z+1)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\ln(z+1)}{z}} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(z+1)^{1/z}} = \frac{1}{\ln e} = 1$$

Problema 3.43 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-x}}{\sin x} = 1$

La máscara es del tipo $\frac{0}{0}$. Haremos un pequeño truco de escritura

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1 - e^{-x}}{x}}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-x}}{x}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}}$$

El límite del denominador vale 1. Para el numerador hacemos $z = 1 - e^{-x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{-\ln(1-z)} = -\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\ln(1-z)}{z}} = -\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1-z)^{1/z}}$$

La máscara de este nuevo denominador, $(1-z)^{1/z} \sim 1^\infty$, de modo que es un e

$$\lim_{z \rightarrow 0} (1-z)^{1/z} = \lim_{z \rightarrow 0} \left[(1+(-z))^{1/(-z)} \right]^{-1} = e^{-1}$$

como $\ln e^{-1} = -1$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-x}}{\sin x} = -(-1) = 1$$

Problema 3.44 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+x^2}{|x|} = ?$ no existe!

La máscara es del tipo $\frac{0}{0}$. Pero, poner más atención, hace su aparición el *temido valor absoluto*, y por lo que sabemos tiene doble militancia, es positivo cuando el argumento es mayor o igual a cero, y es negativo cuando el argumento es negativo. Más claro

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

La presencia del valor absoluto conduce, necesariamente a los llamados **límites laterales**

límite por derecha: $x \rightarrow 0^+$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+x^2}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(1+x)}{x} = 1$$

límite por izquierda: $x \rightarrow 0^-$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+x^2}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+x^2}{-x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(1+x)}{-x} = -1$$

Se concluye que no existe el límite por que los laterales no son iguales.

Problema 3.45 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x > 0 \\ 1 - x, & x < 0 \end{cases} = 1$

Estos problemas con llaves son del mismo tipo que los valores absolutos. Hacen su aparición los límites laterales.

límite por derecha: $x \rightarrow 0^+$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 1) = 1$$

límite por izquierda: $x \rightarrow 0^-$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 - x) = 1$$

Se concluye que el límite es igual a 1, por ser los laterales iguales.

Problema 3.46 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ 2x + 1, & x > 1 \end{cases}$ ¡no existe!

Los límites laterales son los que mandan.

límite por derecha: $x \rightarrow 1^+$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x + 1) = 3$$

límite por izquierda: $x \rightarrow 0^-$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1$$

Se concluye que el límite **no existe**.

Problema 3.47 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - |x^2|}{x} = 0$

La máscara es del tipo $\frac{0}{0}$. Se tiene

límite por derecha: $x \rightarrow 0^+$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(1 - x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - x) = 1$$

límite por izquierda: $x \rightarrow 0^-$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x - x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(1 - x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 - x) = 1$$

Se concluye que el límite es 1.

3.3.1 Infinitésimos

Esta es una forma alternativa de cálculo de límites. Más adelante veremos como éstos (los infinitésimos) están conectados con las reglas de L'Hopital, que en verdad si son el instrumento más rápido, simple y eficaz para calcular límites con ciertas indeterminaciones. Podemos agregar que ellos provienen de los desarrollos de Taylor de cada función.

Una función $f(x)$ se dice que es un infinitésimo en el punto $x = a$, si se verifica que su límite cuando x tiende a a es igual a 0. Es decir:

$$f \text{ es un infinitésimo en } x = a \iff \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$$

La función $f(x) = \sin x$ es un infinitésimo en el punto $x = 0$, pues $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$

La función $g(x) = 1 - \cos x$ es un infinitésimo en $x = 0$, pues $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) = 0$

Definición 3.3.2 Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos infinitésimos en el punto $x = a$, es decir:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

Se dice que $f(x)$ y $g(x)$ son infinitésimos equivalentes en el punto $x = a$ si ocurre que:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Es términos sencillos, la equivalencia significa que f va a 0 con la “misma rapidez” con que lo hace su aproximación g . Y si la forma analítica de g es más sencilla que la forma de f , entonces puede ser sencillo emplear g en lugar de f en cálculos de límites.

La siguiente es una lista de los infinitésimos más usados para $x \rightarrow 0$:

- $\sin x \sim x \sim x - \frac{x^3}{3!}$
- $\ln(1+x) \sim x$
- $\cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2}$
- $\operatorname{tg} x \sim x \sim x - \frac{1}{3}x^3$
- $a^x \sim 1 + x \ln a$
- $e^x \sim 1 + x$
- $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x \sim x \sim x - \frac{1}{3}x^3$
- $(1+ax)^{\frac{1}{x}} \sim e^a$
- $(1+x)^k - 1 \sim kx$
- $\operatorname{arc} \sin x \sim x$

No perder de vista que la variable se puede mover a un punto diferente de cero y ser, en ese nuevo punto, un infinitésimo, por ejemplo

- $\sin(x-1) \sim x-1$ en un vecindad de $x = 1$.
- $\ln x \sim x-1$ en un vecindad de $x = 1$.

Observación 3.3.3 ¿Cuándo aplicar infinitésimos? Si f se encuentra multiplicando o dividiendo en un límite con $x \rightarrow a$, podemos sustituir $f(x) \sim g(x)$. Pero si f se encuentra sumando o restando, por lo general, la aproximación a g no será válida. Solo en casos muy concretos se puede sustituir f por su aproximación g dentro de una suma o una resta (Si la aproximación tiene sentido al comparar g con el resto de sumandos).

Problema 3.48 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + e^x - 1}{x}$

Tiene sentido reemplazar $\sin x \sim x$ y $e^x - 1 \sim x$ pues se están sumando infinitésimos del mismo orden.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + e^x - 1}{x} \sim \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x}{x} = 2$$

Problema 3.49 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^4}$

En este caso $\sin x \sim x$ es lineal, y no se puede comparar con el cuadrático que le antecede. Por tanto, aquí no se puede usar ese infinitésimo, pero si se puede usar $\sin x \sim x - \frac{x^3}{3!}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - (x - \frac{x^3}{3!})^2}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - (x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{36}x^6)}{x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{36}x^6}{x^4} \end{aligned}$$

Factorizando por x^4 el numerador se puede simplificar y obtener

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^4} = \frac{1}{3}$$

Problema 3.50 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x - 5x^2}$

El límite se está trabajando en la vecindad del 0. La máscara del límite es $\frac{0}{0}$. En la vecindad del cero, $\sin x \sim x$, y no está sumando ni restando. Luego podemos reemplazar en el numerador y tener

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x - 5x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{3x - 5x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{3 - 5x} = \frac{2}{3}$$

Problema 3.51 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctg x}{x^3}$

La máscara del límite es $\frac{0}{0}$. En la vecindad del cero, es $\arctg x \sim x - \frac{1}{3}x^3$, de modo que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctg x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (x - \frac{1}{3}x^3)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}x^3}{x^3} = \frac{1}{3}$$

Aquí se debe observar que no se puede usar $\arctg x \sim x$ a pesar de ser ambos lineales

Problema 3.52 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsen\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)}{\ln(1-x)}$

Es claro que la máscara es $\frac{0}{0}$. Los infinitésimos equivalentes son

$$\arcsen\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) \sim \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{y} \quad \ln(1-x) \sim -x$$

Luego,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsen\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)}{\ln(1-x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{-x} = -1$$

Problema 3.53 Verificar los siguientes límites, mediante infinitésimos:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} = 5$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\operatorname{tg}(x^2 - 9)}{\sin(x - 3)} = 6$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{2 - 2x} = -\frac{1}{2}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{1 - e^x} = -1$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \operatorname{tg} x}{1 - \cos x} = 2$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{\operatorname{tg} 4x} = 2$$

3.4 Continuidad

Este concepto tiene que ver con el límite y con el valor que toma la función en el punto. Si al comparar los resultados estos son iguales, se dice que la función es continua en ese punto. En términos matemáticos esto se formula como sigue.

$$f \text{ continua en } x_0 \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(0 \leq |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

Si el punto x_0 en el cual se analiza la continuidad es punto de acumulación de la función, entonces la continuidad se formula del modo que sigue.

$$f \text{ continua en } x_0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Habitualmente se presentan dos tipos de problemas; uno determinar si una función tiene puntos donde no es continua, y el otro es ver si esa discontinuidad se puede reparar, en ambos casos se emplea la definición con el límite.

Problema 3.54 Estudiar continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ en $x = 2$.

De partida, la función no aparece definida en $x = 2$, con lo cual tenemos de inmediato discontinuidad. Si el límite existe para $x \rightarrow 2$, entonces la discontinuidad será reparable. Tenemos

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4$$

El diagnóstico es: La discontinuidad se repara si se define la función como sigue

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & \text{si } x \neq 2 \\ 4, & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

Problema 3.55 Averiguar continuidad en $x = 1$ de la función

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{si } x \leq 1 \\ 3x + 1, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Se observa que el único punto conflictivo es justamente $x = 1$. Basta hallar los límites laterales para tener la respuesta.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 4 \text{ y } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 \implies \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ no existe}$$

siendo así, la discontinuidad es **irreparable**

Problema 3.56 Hallar las constantes a, b para que sea continua

$$f(x) = \begin{cases} ax + 3, & \text{si } x > 5 \\ 8, & \text{si } x = 5 \\ x^2 + bx + 1, & \text{si } x < 5 \end{cases}$$

Es claro que el punto sospechoso es el 5. Con los límites laterales sabemos todo

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = 5a + 3, \quad \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = 26 + 5b, \quad f(5) = 8$$

de esto se deduce que deben ser $5a + 3 = 8$ y $26 + 5b = 8$. Se obtiene $a = 1$, $b = -\frac{18}{5}$

En el contexto de las funciones continuas aparecen ciertas propiedades que ellas cumplen, que es necesario manejar, por que de repente aparecen sus preguntitas en las pruebas. Por ejemplo:

- El teorema del **valor intermedio** asegura, que bajo condiciones de continuidad, *la función debe tomar todos sus valores a lo menos una vez en el intervalo de definición*. Podemos hacer una analogía; la vida es un proceso continuo, con principio y fin. Si tienes, 18 años, de seguro en algún momento tuviste 5 años, eso es el teorema del valor intermedio.
- El teorema de **Bolzano** asegura que, si f tiene signos contrarios en sus extremos, entonces la función tiene al menos un cero en el intervalo conformado por sus extremos.
- Una función que es continua sobre un conjunto cerrado es acotada y tiene supremo e ínfimo.

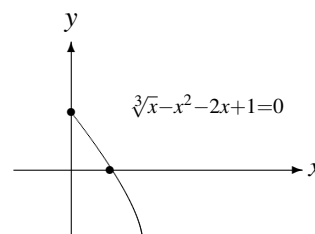
Ilustremos con mayor precisión estos hechos.

Problema 3.57 Probar que la ecuación $\sqrt[3]{x} = x^2 + 2x - 1$ tiene al menos un cero en $[0, 1]$

El buscador de estos ceros es el teorema de Bolzano. Hay que ver los signos en los extremos del intervalo. Pero primero, la ecuación debe ser escrita igual a cero, es decir,

$$\sqrt[3]{x} - x^2 - 2x + 1 = 0$$

tenemos, $f(0) = 1 > 0$, $f(1) = -1 < 0$. Como la función es **continua**, suma de funciones continuas, entonces Bolzano asegura que hay en $[0, 1]$ un cero.



Problema 3.58 Determinar si existen soluciones reales de la ecuación $x^3 + \sqrt{x} + \ln x = 0$

Usaremos Bolzano, en primer lugar consideremos la función

$$f(x) = x^3 + \sqrt{x} + \ln x = 0$$

Ella es continua para todo $x > 0$ en $\mathbb{R}$ (en este caso, el logaritmo manda). Debemos hallar un intervalo $[a, b]$ de modo que f tenga signos contrarios en los extremos. Este trabajo es de prueba y error. Si $x = 1$, entonces $f(1) = 2 > 0$. Cualquier valor superior a 1 que tomemos hace $f > 0$. Para $0 < x < 1$ elegimos $x = \frac{1}{10}$, así, $f(\frac{1}{10}) = -1,98$ (usar calculadora). En consecuencia, Bolzano afirma que en $[\frac{1}{10}, 1]$ hay una raíz real de la ecuación.

Problema 3.59 Determinar si existe un valor de x tal que $x^2 \sin x = \ln x$

Podemos formular el problema como, determinar si existe un cero de la función $f(x) = x^2 \sin x - \ln x$. En esto, Bolzano nos ayuda. Observar que la función construida es continua en cualquier intervalo $[a, b]$ donde a y b sean positivas. Con $x = 1$ se tiene

$$1^2 \sin 1 - \ln 1 = \sin 1 = 0,84 > 0$$

Con $x = 0,1$ se tiene $\ln 0,1 = -2,3$ y $(0,1)^2 \sin 0,1 = 0,0009$. Luego,

$$(0,1)^2 \sin 0,1 - \ln 0,1 = 0,0009 - 2,3 < 0$$

En consecuencia, existe un cero en el intervalo $[\frac{1}{10}, 1]$.

3.5 Problemas Varios

La siguiente lista de ejercicios es para que disfrutes la matemática

1. Considere las sucesiones que se indica. Hallar los 5 primeros términos. Estudiar acotamiento monotonía y límite de cada sucesión. Como entretenimiento demuestre que el límite es el encontrado, y determine la cantidad de términos que quedan fuera de la $V(L, \frac{1}{10})$

$$\begin{array}{lll} a) a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1} & b) a_n = \frac{2n-1}{n+1} & c) a_n = \frac{3n^2-5n}{5n^2+2n-6} \\ d) a_n = \frac{n^2+1}{2n^2+3} & e) a_n = \frac{2n+3}{2n-1} & f) a_n = \frac{5n^2-4n+1}{n^3+n+1} \end{array}$$

2. Considerar la sucesión $a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}$

- a) Calcular los 3 primeros términos
- b) Probar que a_n es decreciente estricta
- c) Probar que a_n es acotada
- d) ¿Cuál es la conclusión?

3. Se sabe que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$. Hallar N tal que

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < 0,01, \text{ si } n > N$$

4. Calcular los límites de las sucesiones siguientes, usando propiedades, teoremas y una *pizca* de ingenio.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{n} \right)^2$ b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2+1}{4-2n^2} \right)^{2/3}$ c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{2n^2+n}{3n^2-n+1}}$

5. Aquí te quiero ver *matador* de límites

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln(na)}{\ln(nb)} \right)^{\ln n} = \frac{a}{b}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n!)}{n \ln(n)} = 1$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n^3+2n-1)^{1/2} - (3n^3-2n-1)^{1/2}}{(n^3+n^2+3n)^{1/2} - (n^3+n^2-3n)^{1/2}} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2}{1^2+2^2+\cdots+n^2} = 4$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 \cdot 2^1 + 2^2 \cdot 2^2 + 3^2 \cdot 2^3 + \cdots + n^2 \cdot 2^n}{n^2 2^n} = 2$

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n+3)^{n+2} (2n+1)^{-n-2} = e$

g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+5)^{2n+5} \cdot n^{n-3}}{(4n+1)^{n+2} (n+3)^{2n}} = 2e^{-5/4}$

h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+1^2)^{1/2} + (1+2^2)^{1/2} + \cdots + (1+n^2)^{1/2}}{3n^2+5n-2} = \frac{1}{6}$

i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1^{1/2}}{2} + \frac{2^{1/2}}{3} + \cdots + \frac{n^{1/2}}{n+1} + \frac{(n+1)^{1/2}}{n+2}}{(n+1)^{1/2}} = 2$

6. Este problema es sólo para aquellos que la piensan, que se dan neurona contra neurona y les cruje. Si no está en esta clase de equivalencia, espere que el ayudante lo haga.

*Dos sucesiones (a_n) y (b_n) se dicen **equivalentes por cociente** si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$*

Por ejemplo, (n) y $(n+1)$ son equivalentes por cociente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

Se pide determinar si los siguientes pares son o no equivalentes por cociente, en caso de no serlo, ponga el contraejemplo. Se supone que (a_n) y (b_n) lo son

- | | | |
|--|------------------------------|-------------------------------|
| a) (a_n^2) y (b_n^2) | c) $(a_n)^n$ y $(b_n)^n$ | f) (a_n) y $((-1)^n + a_n)$ |
| b) $(\frac{1}{a_n})$ y $(\frac{1}{b_n})$ | d) $(\ln a_n)$ y $(\ln b_n)$ | g) (a_n) y $(a_n)^2$ |
| | e) (a_n) y $(-a_n)$ | h) (a_n) y $((-1)^n a_n)^n$ |

7. Usar el teorema del “sandwich” para probar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) = 1$$

hint: $(\frac{n}{\sqrt{n^2+1}})$ y $(\frac{n}{\sqrt{n^2+n}})$ le pueden hacer very happy

8. Comiéndote un *sandwich* prueba que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n} \right] = 1$$

9. ¡Relájate!, calcula estos que son últimos de fácil. Se da el resultado

- | | |
|---|---|
| a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} + \sqrt{n} + \sqrt{n}} = 1$ | (f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n^3} \right]^{1/n} = 1$ |
| b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sqrt{n^2+an+1} - \sqrt{n^2+bn-1} \right] = \frac{a-b}{2}$ | |
| c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n^3} \right]^{1/n} = 1$ | (g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} = 4$ |
| d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2\sqrt{2} + 3\sqrt[3]{3} + \cdots + n\sqrt[n]{n}}{n^2} = \frac{1}{2}$ | |
| e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sin^4 \frac{(n+1)\pi}{3n^2}} = 1$ | (h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n+1}{n^2+n} \right]^{\frac{1}{1-3\ln n}} = e^{\frac{1}{3}}$ |

10. Sea (a_n) sucesión de números reales definida por recurrencia

$$a_{n+1} = \sqrt{2a_n}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad x_1 = 1$$

Probar que (a_n) es acotada y creciente estricta, con límite 2.

3.5.1 Funciones

1. Usa la definición apropiada para **demostrar** que la función dada tiene límite.

- | | | |
|--|--|---|
| a) $\lim_{x \rightarrow 2} (5x+4) =$ | b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2} =$ | c) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2-16}{x+4} =$ |
| d) $\lim_{x \rightarrow \infty} (5x+4) =$ | e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-4}{x-2} =$ | f) $\lim_{x \rightarrow -4^+} \frac{1}{x+4} =$ |
| g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (5x+4) =$ | h) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2+4} =$ | i) $\lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{1}{x+4} =$ |

2. Calcula los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^3 + 4}{5x^4 - 2}$$

$$b) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{h+4} - 2}{h}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+3)(2x-1)}{x^2 + 3x - 2}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 3)^5$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}}{x}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x}(\sqrt{x+a} - \sqrt{x})$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{x+2}}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x-a}$$

$$i) \lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2+1} - x)$$

3. Calcula usando todo tu power

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{x^2}$$

$$b) \lim_{h \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{x+2}}{\sqrt{x+7} - 3}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{1-x^3}{1-x^2}}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \operatorname{sen} x}}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^3 x}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{|x|}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{1-x}}{x}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{x - \frac{\pi}{2}}{\sqrt{1 - \operatorname{sen} x}}$$

4. Hallar $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, si

$$a) f(x) = \begin{cases} \ln(x - \sqrt{x^2 - 3}), & x \leq 2 \\ x, & x > 2 \end{cases}$$

$$c) f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ 2x+1, & x > 1 \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 0 \\ 1 - x, & x > 0 \end{cases}$$

$$d) f(x) = \begin{cases} |x|, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$$

5. Hallar $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \cdot g(x)$, si

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & x \leq 1 \\ 2x, & x > 1 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 2x^3 + 2x, & x \leq 1 \\ 3, & x > 1 \end{cases}$$

6. Si $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = L$, halle $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(kx)}{x} = L$, k es una constante

7. Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{sen} x} - \sqrt{1 - \operatorname{sen} x}}{\operatorname{tg} x}$

8. Calcular $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{n}{1-x^n} - \frac{m}{1-x^m} \right)$

9. Calcular los siguientes límites

$$a) \lim_{x \rightarrow \pi} (\pi - x) \cdot \cos \frac{1}{x}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{\operatorname{sen} \pi x}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+2^{1/x}}{3+2^{1/x}}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\operatorname{tg} \pi x}{x+2}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos \pi x}{1 - \sqrt{x}}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt{x} + 1}{(x-1)^2}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x+1}{2x+1} \right]^{x^2}$$

$$i) \lim_{x \rightarrow \pi/2} (\operatorname{sen}^2 x)^{\operatorname{tg}^2 x}$$

10. Hallar los límites laterales para $x = 0$ en

$$f(x) = \frac{2x - \operatorname{sen} x}{\sqrt{1 - \cos x}}$$

11. Hallar los límites siguientes:

$$\begin{array}{lll} a) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\cos x - 1} + \frac{2}{\operatorname{sen}^2 x} \right) & b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{arc} \operatorname{tg}(\frac{x}{2})}{(\operatorname{sen} 2x)^2 \cdot \cos(\operatorname{sen} x)} & c) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \operatorname{sen} \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2} (\cos \frac{x}{4} - \operatorname{sen} \frac{x}{4})} \\ d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x \operatorname{sen} x} - \sqrt{\cos 2x}}{\operatorname{tg}^2(\frac{x}{2})} & e) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{sen} x)^{\operatorname{cosec} x} & f) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} \right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}} \end{array}$$

3.5.2 Continuidad

1. Estudiar continuidad en el punto “sospechoso” de:

$$a) \begin{cases} 3 - x, & -5 \leq x < 2 \\ x - 2, & 2 \leq x < 5 \end{cases} \quad b) \begin{cases} 2 - x, & -5 \leq x < 2 \\ x - 2, & 2 \leq x < 5 \end{cases}$$

2. Estudiar continuidad de las siguientes funciones en $x = 1$

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} & (c) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases} \\ b) f(x) = \begin{cases} \frac{x+3}{x-1}, & x \neq 1 \\ 4, & x = 1 \end{cases} & (d) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 4, & x = 1 \end{cases} \end{array}$$

3. Hallar los intervalos de continuidad de las funciones:

$$a) f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4} \quad b) f(x) = |x^2 - 4|$$

4. Verificar que cada función siguiente es discontinua, y que su suma si es una función continua

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 2x, & x \neq 0 \\ -1, & x = 0 \end{cases}$$

5. Determinar el valor de las constantes (x es la única variable) para que exista continuidad en cada función siguiente.

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = \begin{cases} ax + 3, & x > 5 \\ 8, & x = 5 \\ x^2 + bx + 1, & x < 5 \end{cases} & c) f(x) = \begin{cases} -2 \operatorname{sen} x, & x \leq -\frac{\pi}{2} \\ a \operatorname{sen} x + b, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \cos x, & x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases} \\ b) f(x) = \begin{cases} x + 2a, & x < -2 \\ 3ax + b, & -2 \leq x \leq 1 \\ 3x - b, & x > 1 \end{cases} & d) f(x) = \begin{cases} ax + 3, & x < 1 \\ 2, & x = 1 \\ x^2 + b, & x > 1 \end{cases} \end{array}$$

6. Hallar las constantes a y b para que sea continua la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(ax)}{x}, & x < 0 \\ 3, & x = 0 \\ x + b, & x > 0 \end{cases}$$

7. Dar un ejemplo de dos funciones definidas para todo x , de modo que ninguna de ellas sea continua en $x = 2$, pero que si lo sea su suma.

8. Estudiar continuidades laterales de $f(x) = \begin{cases} x^2, & x > 2 \\ x + 1, & x \leq 2 \end{cases}$

9. Estudiar continuidad de $f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ x + 1, & 0 \leq x < 1 \\ x^2 - 4x + 2, & 1 \leq x < 3 \\ x - 4, & x \geq 3 \end{cases}$

10. Definir las funciones siguientes en el punto *conflictivo* para que exista continuidad.

$$a) f(x) = \frac{(1+x)^{n+1} - 1}{x} \quad (b) f(x) = \frac{\ln(1+x) - \ln(1-x)}{x}$$

11. Averiguar si son continuas las funciones

$$a) f(x) = \frac{x^2}{x-2} \quad b) f(x) = \frac{\sqrt{x+7} - 3}{x^2 - 4} \quad c) f(x) = \ln(\cos x) \quad b) f(x) = e^{\frac{1}{x+1}}$$

12. Determinar continuidad de las funciones

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x, & 1 < x \leq 2 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

13. Investigar la continuidad de las funciones compuestas, $f \circ g$ y $g \circ f$ para

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \quad g(x) = 1 + x^2$$

14. Se define la función $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \leq c \\ ax + b, & x > c \end{cases}$, con a, b, c constantes.

Si son conocidos a y b , hallar todos los valores de c para los cuales f es continua.

15. Hallar los valores de x para los que $h(x) = f(g(x))$ es continua, si

$$f(x) = \frac{x + |x|}{2} \quad g(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

16. Investigar continuidad en $x = 0$ de la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{4|x|}, & x < 0 \\ \frac{1}{4}, & x = 0 \\ \frac{\sqrt{x+4}-2}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

17. Probar que la ecuación $\cos x - \sin x = x$ tiene al menos un cero en $[0, \frac{\pi}{2}]$
18. Sea $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 9$. Probar que hay, al menos, un número a entre 0 y 10 tal que $f(a) = 500$. ¿Cuál es el teorema que asegura esto?
19. Sea $f : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^3 - 2x^2 - 10x$. Verificar que existe un punto $a \in [1, 3]$ tal que $f(a) = -15$. ¿Cuál es el teorema que asegura esto?
20. Probar que la ecuación $x + \sin x = \frac{1}{\sqrt{x}+3}$ tiene al menos un cero en $[0, \pi]$
21. Determinar un intervalo de longitud $\frac{1}{2}$ que contenga a una raíz de la ecuación $x^3 + 2x + 4 = 0$.
22. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & -2 \leq x < 0 \\ -x^2 - 2, & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

- a) Calcular $f(2)$ y $f(-2)$.
- b) Determinar si existe $a \in (-2, 2)$ tal que $f(a) = 0$. (sugerencia: graficar)
23. Considere la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{x^6}{6} + \frac{x^4}{4} - x^2 - 1$. Probar que esta función tiene al menos una raíz positiva y otra negativa.

4. Derivadas y Aplicaciones



LOCOS DE
AMOR

(... el amor es MAXIMO)

4.1 Introducción

Estamos llegando al final de los problemas de **Cálculo Diferencial** en una variable. Lo de ahora son las derivadas, algo terriblemente fácil, le gusta a todo el mundo. Si uno se aprende las reglas de derivación está al otro lado. Como aplicaciones de la derivada veremos graficas de curvas, cálculo de algunos límites *cototos* que no salen si no le aplicamos reglas de *L'Hôpital*, ¡calma'o! ya vienen, no sean apurones. Se concluye con problemas aplicados de optimización.

Para los que siguieron la teleserie de la morena, les contaré que ya estamos *derivando*, pero se me corre por la *tangente*. Estoy *cachando* que el amor es MAXIMO por que la segunda (derivada) es negativa.

Las funciones compuestas son las preferidas en las pruebas. Cuando a uno le entregan una expresión para derivar, lo primero que debe hacer es ver que es lo que dan, pero en grande, mirando desde lejos. Por ejemplo,

$$f(x) = \text{sen}\left(\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)\right) + e^{x^2}$$

échate para atrás, lo que **se debe** ver es **una suma** de funciones, por tanto haremos derivada de una suma, lo que significa derivar separadamente cada sumando para al final sumar esos resultados. Mira que pasa con lo siguiente

$$f(x) = \text{sen}\left(\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) + e^{x^2}\right)$$

Si ves que esto es una **suma**, anda ya al oculista, ¡¡no puede ser!! Es la función **seno** con un argumento un tanto extraño, pero es sólo función seno. Estas se llaman **funciones compuestas**. Te cuento que TODA función puede ser considerada compuesta. Así, $f(x) = \text{sen } x$ la puedes considerar una función compuesta

$$f(x) = \text{sen } x, g(x) = x \implies (f \circ g)(x) = f(g(x)) = \text{sen } x$$

También lo son; las funciones $f(x) = \sin x^2$, $f(x) = \sin(x+1)$, etc.

Te proporciono una tabla de derivadas al estilo compuestas. Si aprendes a usarla, no tendrás problemas que te asusten.

Fórmulas de derivación

	Función	Derivada
1	$y = \sin f(x)$	$y' = \cos f(x) \cdot f'(x)$
2	$y = \cos f(x)$	$y' = -\sin f(x) \cdot f'(x)$
3	$y = \operatorname{tg} f(x)$	$y' = \sec^2 f(x) \cdot f'(x)$
4	$y = \operatorname{cotg} f(x)$	$y' = -\operatorname{cosec}^2 f(x) \cdot f'(x)$
5	$y = \sec f(x)$	$y' = \sec f(x) \cdot \operatorname{tg} f(x) \cdot f'(x)$
6	$y = \operatorname{cosec} f(x)$	$y' = -\operatorname{cosec} f(x) \cdot \operatorname{cotg} f(x) \cdot f'(x)$
7	$y = f(x)^k$	$y' = k f(x)^{k-1} \cdot f'(x)$
8	$y = a^{f(x)}$	$y' = a^{f(x)} \cdot f'(x)$
9	$y = \ln f(x)$	$y' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$
10	$y = \arcsin f(x)$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-f^2(x)}} \cdot f'(x)$
11	$y = \arccos f(x)$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-f^2(x)}} \cdot f'(x)$
12	$y = \operatorname{arctg} f(x)$	$y' = \frac{1}{1+f^2(x)} \cdot f'(x)$
13	$y = \operatorname{arccotg} f(x)$	$y' = -\frac{1}{1+f^2(x)} \cdot f'(x)$
14	$y = u(x)^{v(x)}$	$y' = u(x)^{v(x)} \left(v' \cdot \ln u + \frac{v}{u} \cdot u' \right)$

Todas éstas son funciones compuestas, y se derivan como tal. Para entender mejor el funcionamiento de las reglas, se sugiere interpretar, por ejemplo, la regla 12 como sigue

$$[\operatorname{arctg}(\text{argumento})]' = \frac{1}{1 + (\text{argumento})^2} \cdot (\text{derivada de argumento})$$

4.1.1 Derivadas

Veamos ejemplos de como derivar funciones. Se muestran explícitas, implícitas, y paramétricas.

Problema 4.1 Hallar derivada de $y = (x^2 + 3)^5$

Es claro que la función dada es compuesta, no interesa cuales son las funciones que hacen la composición, lo interesante es saber que es compuesta. Mirándola bien, se trata de una **potencia**, hay una base $(x^2 + 3)$ y un exponente 5. La derivada se asemeja a una máquina *aniquiladora* de funciones, de modo que en una potencia, hay que ir aniquilando primero la potencia como tal y luego la base, siendo la derivada el producto de ambas. A ver si se entiende, una potencia genérica tiene la forma $y = x^k$, su

derivada es $y = k \cdot x^{k-1}$. Si se pone $X = x^2 + 3$, entonces nuestro problema es de la forma

$$y = X^5$$

que es una expresión de la familia de las potencias. Su derivada es $y' = 5 \cdot X^4$. Esto es lo que se llama *aniquilar* la potencia como tal. La base $x^2 + 3$ es una suma de funciones con derivada $2x$. Por lo tanto, la derivada total es

$$y' = 5 \cdot (x^2 + 3)^4 \cdot 2x = 10x(x^2 + 3)^4$$

Problema 4.2 Hallar derivada de $y = \text{sen}(x^2 + 3)^5$

Tu mirada habrá ya descifrado que se trata de derivar la función seno compuesta, ya que su argumento es $(x^2 + 3)^5$. Por lo tanto, hay que *matar* el seno y luego su argumento. El producto de esto es la derivada que andamos buscando. Así que la derivada de la función seno, $y = \text{sen} x$ es $y' = \cos x$. La derivada del argumento, $(x^2 + 3)^5$ es la derivada de la potencia; que es $5(x^2 + 3)^4 \cdot 2x$. Por tanto,

$$y = \text{sen}(x^2 + 3)^5 \implies y' = \cos(x^2 + 3)^5 \cdot 5(x^2 + 3)^4 \cdot 2x$$

La mayoría de los profes piden dejar la derivada expresada sin simplificaciones, eso le permite ver si el o la estudiante sabe derivar.

Problema 4.3 Hallar derivada de $y = \ln[\text{sen}(x^2 + 3)^5]$

El buen ojo nos dice que es la derivada de un logaritmo natural con argumento compuesto. Estos son más fáciles de derivar por que se aniquila de izquierda a derecha. Mira lo que sigue:

derivada del ~~ln~~ X es $\frac{1}{X}$ se mata el logaritmo

derivada del ~~sen~~ Y es $\cos Y$ se mata el seno

derivada de la potencia ~~Z^5~~ es $5Z^4$ se mata la potencia

derivada de la suma ~~$H = x^2 + 3$~~ es $2x$ se mata la base

En consecuencia, la derivada pedida es el producto de todas estas funciones con sus argumentos respectivos. Esto es

$$y = \ln[\text{sen}(x^2 + 3)^5] \implies y' = \frac{10x(x^2 + 3)^4 \cos(x^2 + 3)^5}{\text{sen}(x^2 + 3)^5}$$

Problema 4.4 Hallar derivada de $y = \text{sen}^2(x + 3) + e^{x^3 - 1}$

¡Muy bien!, captaste al tiro que es una suma. Se saca la derivada de cada sumando por separado

$y_1 = \text{sen}^2(x + 3)$ es una **potencia** pues equivale a $y_1 = [\text{sen}(x + 3)]^2$ su derivada es

$$y_1' = 2\text{sen}(x + 3) \cdot \cos(x + 3) \cdot 1$$

no olvides que la potencia (al derivar) baja el exponente y después se multiplica por la derivada de la base, que es la función seno compuesta en argumento $(x + 3)$ el que tiene derivada 1.

$y_2 = e^{x^3 - 1}$ es una **exponencial**, su derivada es la misma, multiplicada por la derivada del exponente. Esto es

$$y_2 = e^{x^3 - 1} \implies y_2' = e^{x^3 - 1} \cdot 3x^2$$

En consecuencia, la derivada buscada es la suma de la derivada de ambos sumandos

$$y = \sin^2(x+3) + e^{x^3-1} \implies y' = 2\sin(x+3) \cdot \cos(x+3) + 3x^2 e^{x^3-1}$$

Problema 4.5 Hallar derivada de $y = \frac{\arctg(x^2+3)}{e^{\sin^3(x^2)}}$

¡Qué bien!, tienes todo claro, este es el último. La derivada que se pide es la de un **cociente**, hay que derivar de acuerdo con la regla del cociente. Vamos viendo

$$[\arctg(x^2+3)]' = \frac{1}{1+(x^2+3)^2} \cdot 2x$$

$$[e^{\sin^3(x^2)}]' = e^{\sin^3(x^2)} \cdot 3\sin^2(x^2) \cdot \cos(x^2) \cdot 2x$$

si te perdiste con la derivada del exponente, mira esto

$$z = \sin^3(x^2) = [\sin(x^2)]^3 \implies z' = 3[\sin(x^2)]^2 \cdot \cos(x^2) \cdot 2x$$

la expresión del exponente es una **potencia** con base función seno. Armemos entonces la derivada del cociente. Pero antes, recuerda que

$$\left[\frac{u}{v}\right]' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$$

con esto a la vista se hace más sencillo entender el problema

$$\begin{aligned} \left[\frac{\arctg(x^2+3)}{e^{\sin^3(x^2)}}\right]' &= \frac{\frac{2x}{1+(x^2+3)^2} \cdot e^{\sin^3(x^2)} - 6x\sin^2(x^2)\cos(x^2)e^{\sin^3(x^2)}}{(e^{\sin^3(x^2)})^2} \\ &= \frac{\frac{2x}{1+(x^2+3)^2} - 6x\sin^2(x^2)\cos(x^2)}{e^{\sin^3(x^2)}} \end{aligned}$$

Así está bien. no es necesario simplificar. Ello se hace cuando se pide verificar una relación que tiene derivadas.

Problema 4.6 Verificar que la función $y = e^x + xe^x$ satisface la ecuación diferencial $y'' - 2y' + y = 0$

En estos problemas sólo hay que derivar una o más veces, según indique la ecuación, y reemplazar para ver si se cumple lo pedido.

$$y = e^x + xe^x \implies y' = 2e^x + xe^x \implies y'' = 3e^x + xe^x$$

al reemplazar,

$$y'' - 2y' + y = (3e^x + xe^x) - 2(2e^x + xe^x) + (e^x + xe^x) = 0$$

como ejercicio mental se puede reducir todo y queda cero, no se necesita ni lápiz ni papel. El siguiente es más “jodido” (salió en una prueba)

Problema 4.7 Verificar que la función $y = \frac{1}{2} \ln(\operatorname{tg}(\frac{x}{2})) - \frac{\cos x}{2 \operatorname{sen}^2 x}$ satisface la ecuación diferencial $y' = \operatorname{cosec}^3 x$

Cualquier ecuación que contenga derivadas se denomina ecuación diferencial. Para ver que se verifica sólo hay que sacar la derivada, reducirla un poco y ver que es exactamente la cosecante al cubo.

La derivada a obtener es la de una diferencia, se procede con cada sumando por separado y al final se restan. Se tiene

$$\begin{aligned} y = \frac{1}{2} \ln(\operatorname{tg}(\frac{x}{2})) &\Rightarrow y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}(\frac{x}{2})} \cdot \sec^2(\frac{x}{2}) \cdot \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow y' = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}(\frac{x}{2})} \cdot \sec^2(\frac{x}{2}) \\ &\Rightarrow y' = \frac{1}{4} \cdot \frac{\cos(\frac{x}{2})}{\operatorname{sen}(\frac{x}{2})} \cdot \frac{1}{\cos^2(\frac{x}{2})} \\ &\Rightarrow y' = \frac{1}{4 \operatorname{sen}(\frac{x}{2}) \cos(\frac{x}{2})} = \frac{1}{2 \operatorname{sen} x} \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} y = \frac{\cos x}{2 \operatorname{sen}^2 x} &\Rightarrow y' = \frac{-\operatorname{sen} x \cdot 2 \operatorname{sen}^2 x - \cos x \cdot 2 \cdot (2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x)}{(2 \operatorname{sen}^2 x)^2} \\ &\Rightarrow y' = \frac{-2 \operatorname{sen}^3 x - 4 \operatorname{sen} x \cos^2 x}{(2 \operatorname{sen}^2 x)^2} \\ &\Rightarrow y' = -\frac{\operatorname{sen}^2 x + 2 \cos^2 x}{2 \operatorname{sen}^3 x} = -\frac{\operatorname{sen}^2 x + 2(1 - \operatorname{sen}^2 x)}{2 \operatorname{sen}^3 x} \end{aligned}$$

Se concluye que

$$y' = -\frac{2 - \operatorname{sen}^2 x}{2 \operatorname{sen}^3 x}$$

Ahora hacemos la diferencia de las derivadas.

$$\begin{aligned} y = \frac{1}{2} \ln(\operatorname{tg}(\frac{x}{2})) - \frac{\cos x}{2 \operatorname{sen}^2 x} &\Rightarrow y' = \frac{1}{2 \operatorname{sen} x} - \left(-\frac{2 - \operatorname{sen}^2 x}{2 \operatorname{sen}^3 x} \right) \\ &\Rightarrow y' = \frac{1}{2} \left(\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^3 x} + \frac{2 - \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^3 x} \right) \\ &\Rightarrow y' = \frac{1}{\operatorname{sen}^3 x} = \operatorname{cosec}^3 x \end{aligned}$$

Esto prueba que se satisface la ecuación.

Problema 4.8 Calcular $y' = \frac{dy}{dx}$ en $(1, 1)$ si $2y - 1 - xy^3 = 0$

Esta es la derivada de una función dada en forma implícita. La derivada es respecto de x , pero se supone

que $y = f(x)$, es decir, y es función de x . Se toma entonces derivada respecto de x en ambos miembros.

$$\begin{aligned} 2y - 1 - xy^3 &= 0 \implies \frac{d}{dx}(2y - 1 - xy^3) = \frac{d}{dx}(0) \\ &\implies \frac{d}{dx}(2y) - \frac{d}{dx}(1) - \frac{d}{dx}(xy^3) = 0 \\ &\implies 2 \frac{dy}{dx} - 0 - \left(\frac{d}{dx}(x) \cdot y^3 + x \cdot \frac{d}{dx}(y^3) \right) = 0 \\ &\implies 2 \frac{dy}{dx} - (1 \cdot y^3 + x \cdot 3y^2 \cdot \frac{dy}{dx}) = 0 \\ &\implies 2 \frac{dy}{dx} - y^3 - 3xy^2 \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \end{aligned}$$

Al factorizar se llega a

$$\frac{dy}{dx}(2 - 3xy^2) = y^3 \implies \frac{dy}{dx} = \frac{y^3}{2 - 3xy^2} \implies \frac{dy}{dx} \Big|_{(1,1)} = -1$$

De la expresión final de la derivada se deduce que ella puede ser calculada en cualquier punto, con excepción de aquéllos para los que $2 - 3xy^2 = 0$.

Debe quedar claro que cuando se escribe $\frac{dy}{dx}$ se está diciendo que se deriva y respecto de x , y que cuando se escribe $\frac{d}{dx}$ se está queriendo decir que se va a aplicar la operación de tomar derivada a alguna expresión. Más claro, $\frac{d}{dx}(x^2) = 2x$, lo mismo para $\frac{d}{dx}(y) = \frac{dy}{dx}$ esta se queda así por que no sabemos que cosas con la variable x se guarda la función $y = f(x)$.

Problema 4.9 Calcular $\frac{dy}{dx}$ en $(3, 1)$ si $(x + y)^{1/2} \cdot (x - 2y)^2 = 2$

Este tuvo la *suerte* de salir en una prueba. En todos los problemas de este tipo, incluido el anterior se emplea la regla de la cadena, o bien el teorema de la función implícita para hallar su derivada. Con la finalidad de mostrar ambos métodos, resolvemos el problema de las dos formas, al final, de seguro, te quedarás con el teorema.

■ por regla de la cadena

Se sabe que $y = f(x)$, de modo que $\frac{dy}{dx} = y' = f'(x)$. Derivamos $(x + y)^{1/2} \cdot (x - 2y)^2 = 2$ con respecto a x , teniendo claro que vamos a derivar un producto de funciones en el primer miembro, y una constante en el segundo.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[(x + y)^{1/2} \cdot (x - 2y)^2 \right] &= \frac{d}{dx}(2) \\ \frac{d}{dx} \left[(x + y)^{1/2} \right] \cdot (x - 2y)^2 + (x + y)^{1/2} \cdot \frac{d}{dx} \left[(x - 2y)^2 \right] &= 0 \quad (*) \end{aligned}$$

Veamos la derivada de los corchetes:

$$\frac{d}{dx} \left[(x + y)^{1/2} \right] = \frac{1}{2} (x + y)^{-1/2} \cdot (1 + y')$$

Para el segundo corchete;

$$\frac{d}{dx} \left[(x - 2y)^2 \right] = 2(x - 2y) \cdot (1 - 2y')$$

Reemplazamos las derivadas de los corchetes en (*)

$$\frac{1}{2}(x+y)^{-1/2}(1+y')(x-2y)^2 + 2(x+y)^{1/2}(x-2y)(1-2y') = 0$$

Multiplicamos por $2(x+y)^{1/2}$

$$(1+y')(x-2y)^2 + 4(x+y)(x-2y) \cdot (1-2y') = 0$$

Dividiendo por $(x-2y)$, siempre que $x \neq 2y$

$$(1+y')(x-2y) + 4(x+y) \cdot (1-2y') = 0$$

Al factorizar por y' y despejando

$$y' = -\frac{5x+2y}{1-8(x+y)}$$

Al reemplazar en el punto $(3, 1)$ se obtiene

$$y'(3, 1) = -\frac{5 \cdot 3 + 2 \cdot 1}{1 - 8(3 + 1)} = \frac{17}{31}$$

Se acepta que se tilde de “fome” a esta clase de problemas, ¡pero atención!, tiene su gracia, si no te has dado cuenta, mira bien, hemos encontrado la derivada de y respecto de x sin saber quién es realmente y .

■ por teorema de la implícita

La hacemos cortita, $F(x, y) = 0$ es una ecuación implícita para la cual existe un punto (a, b) en el cual $F(a, b) = 0$, $F_x(a, b)$ y $F_y(a, b)$ son continuas, $F_y(a, b) \neq 0$. Entonces existe una única función $y = f(x)$ tal que

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

Las notaciones F_x y F_y corresponden a las derivadas de F respecto de x y de y , respectivamente. Al derivar F_x se considera que x es la única variable, el resto son constantes, lo mismo para F_y . Veamos entonces como sale por este método el problema. Recordemos que

$$F(x, y) = (x+y)^{1/2} \cdot (x-2y)^2 - 2 = 0$$

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{1}{2}(x+y)^{-1/2} \cdot 1 \cdot (x-2y)^2 + (x+y)^{1/2} \cdot 2 \cdot (x-2y) \cdot 1 \\ &= \frac{1}{2}(x+y)^{-1/2} \cdot (x-2y)^2 + 2(x+y)^{1/2} \cdot (x-2y) \\ F_y &= \frac{1}{2}(x+y)^{-1/2} \cdot 1 \cdot (x-2y)^2 + (x+y)^{1/2} \cdot 2 \cdot (x-2y) \cdot (-2) \\ &= \frac{1}{2}(x+y)^{-1/2} \cdot (x-2y)^2 - 4(x+y)^{1/2} \cdot (x-2y) \end{aligned}$$

Luego, la derivada es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{2}(x+y)^{-1/2} \cdot (x-2y)^2 + 2(x+y)^{1/2} \cdot (x-2y)}{\frac{1}{2}(x+y)^{-1/2} \cdot (x-2y)^2 - 4(x+y)^{1/2} \cdot (x-2y)}$$

de esto, por reemplazo se obtiene directamente la derivada en el punto

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= -\frac{\frac{1}{2}(3+1)^{-1/2} \cdot (3-2 \cdot 1)^2 + 2(3+1)^{1/2} \cdot (3-2 \cdot 1)}{\frac{1}{2}(3+1)^{-1/2} \cdot (3-2 \cdot 1)^2 - 4(3+1)^{1/2} \cdot (3-2 \cdot 1)} \\ &= -\frac{\frac{1}{4} \cdot 1 + 4 \cdot 1}{\frac{1}{4} \cdot 1 - 4 \cdot 2 \cdot 1} = -\frac{\frac{17}{4}}{\frac{-31}{4}} = \frac{17}{31}\end{aligned}$$

Se puede pensar en obtener derivadas de ordenes superiores en implícitas, pero como es una *lata* sólo se llega a las de orden 2. Veamos una de éstas.

Problema 4.10 Calcular $\frac{d^2y}{dx^2}$ en $(1, 1)$ si $2y - 1 - xy^3 = 0$

La primera derivada es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^3}{2 - 3xy^2}$$

Tomando derivada con respecto de x en ambos miembros

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{y^3}{2 - 3xy^2} \right)$$

Por notación, el primer miembro es $\frac{d^2y}{dx^2}$. El segundo miembro es la derivada de un **cociente**. Como siempre, se debe tener presente que las derivadas de y con respecto de x son y'

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3y^2y' \cdot (2 - 3xy^2) - y^3 \cdot (0 - 3y^2 - 6xyy')}{(2 - 3xy^2)^2} = \frac{y'(6y^2 - 3xy^4) + 3y^5}{(2 - 3xy^2)^2}$$

Ahora evaluamos en $(1, 1)$

$$\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{(1,1)} = \frac{y'(1,1)(6-3)+3}{(2-3)^2} = \frac{(-1) \cdot 3 + 3}{1} = 0$$

Problema 4.11 Calcular $\frac{d^2y}{dx^2}$ en la función paramétrica $x = \frac{3t}{1+t^2}$, $y = \frac{3t^2}{1+t^2}$

Si nos piden segunda derivada lo lógico es tener primero la derivada de orden 1. Una vez más la regla de la cadena es la que permite estos cálculos.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

Se usa el parámetro t como nexo para hacer la derivada. Calculemos entonces cada expresión por separado

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= \frac{6t \cdot (1+t^2) - 2t \cdot 3t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{6t}{(1+t^2)^2} \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{3 \cdot (1+t^2) - 2t \cdot 3t}{(1+t^2)^2} = \frac{3-3t^2}{(1+t^2)^2} \\ \frac{dt}{dx} &= \frac{(1+t^2)^2}{3-3t^2}\end{aligned}$$

de donde,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6t}{(1+t^2)^2} \cdot \frac{(1+t^2)^2}{3-3t^2} = \frac{2t}{1-t^2}$$

Ahora viene lo mejor, la segunda derivada es la derivada de la derivada, por eso anotamos

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right)$$

pero estamos en paramétricas, así que traemos la primera derivada $\frac{dy}{dx}$ para reemplazarla en esta última ecuación.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{2t}{1-t^2} \right)$$

Mira la analogía para el uso de la regla de la cadena. Tenemos un “saco de manzanas” $\left(\frac{2t}{1-t^2} \right)$ del cual debemos obtener “jugo de peras” $\left(\frac{d}{dx} \right)$. Por supuesto que no se puede, pero podemos hacer funcionar la astucia, saquemos “jugo de manzanas” $\left(\frac{d}{dt} \right)$ y después le agregamos algún “saborizante” permitido por la ley $\left(\frac{dt}{dx} \right)$ para que le dé gustito a “pera”. Escribimos esta analogía en términos matemáticos.

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{2t}{1-t^2} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{2t}{1-t^2} \right) \frac{dt}{dx} \\ &= \frac{2 \cdot (1-t^2) - (-2t) \cdot 2t}{(1-t^2)^2} \cdot \frac{(1+t^2)^2}{3-3t^2} \\ &= \frac{2+2t^2}{3-3t^2} \end{aligned}$$

Te sugiero poner ojo a este problema y a los de su especie, porque salen en pruebas.

Una clase de problema que por lo general sorprende a los más astutos guarda relación con la **derivada en un punto**. Por lo general, y por eso a uno lo *hacen picar*, se saca la derivada y luego se reemplaza en el punto. Por eso ahora van un par de ejemplos para que no le pillen desprevenido. La definición de derivada en un punto es

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Problema 4.12 Calcular $f'(0)$ si $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Un buen uso de la definición y listo.

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \operatorname{sen} \frac{1}{h}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} h \operatorname{sen} \frac{1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{h}}{\frac{1}{h}}, \quad z = \frac{1}{h}, \quad z \rightarrow \infty \\ &= \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen} z}{z} = 0 \end{aligned}$$

Problema 4.13 Calcular $f'(1)$ si $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$

Aquí hay dos cosas que se pueden hacer, una es aplicar la definición y chao. Queda como sigue.

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{(1+h)^2-1}{(1+h)-1} - 2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2h+h^2}{h} - 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1 \end{aligned}$$

En consecuencia, la derivada en el punto $x = 1$ es 1. Esto significa que la pendiente de la recta tangente a la curva $f(x)$ es 1. Se puede agregar que como f es diferenciable (tiene derivada) en $x = 1$, entonces f es continua en $x = 1$.

Otra cosa que se puede hacer, y eso lo da la práctica, es ver que para $x \neq 1$ la expresión $\frac{x^2-1}{x-1}$ se puede simplificar, y quedar sólo como $x+1$. Con esto la función original puede escribirse en la forma

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$$

que es bastante más simple que la que hicimos. Ahora, la aplicación de la definición queda como

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)+1-2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1$$

Otro problema de cálculo es aquél que tiene que ver con las derivadas laterales. Es sencillo, por lo que un par de ejemplos estarás como avión. Algo que los profes dicen en voz baja o a veces no lo mencionan es que para que la función sea derivable, primero debe ser continua. Esto significa que, si la función **no** es continua en un punto x_0 **no** hay ni siquiera que plantearse el problema de su derivabilidad en ese punto.

Problema 4.14 Hallar las derivadas laterales de la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x < 1 \\ x+1, & x \geq 1 \end{cases}$$

Es claro que los límites laterales existen y cada uno vale 2, lo que coincide con el valor de la función en el punto. Ello indica **continuidad**. El paso que sigue es derivar en el conjunto abierto (descartando la igualdad).

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x < 1 \\ x+1, & x \geq 1 \end{cases} \implies f'(x) = \begin{cases} 2x, & x < 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

Observación 4.1.1 Si pidieran la derivada en $x = 1$, a partir de las derivadas laterales se tiene

$$f'(1^-) = 2 \quad \text{y} \quad f'(1^+) = 1$$

de lo cual afirmamos que no existe.

Problema 4.15 Hallar $f'(0)$ si $f(x) = x^2 - x[x]$

$[x]$ es la parte entera, definida por $[x] = \max\{k \in \mathbb{Z} / k \leq x\}$. Como es la derivada en un punto, no hay otra que usar la definición.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 - h[h]}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h - [h])$$

Veamos que sucede con los límites laterales

$$f'(0^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} (h - [h]) = 0 - 0 = 0$$

$$f'(0^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} (h - [h]) = 0 - (-1) = 1$$

Cabe una explicación para quienes no le gusta la parte entera. Si $x \rightarrow 0^+$, entonces x viene aproximándose por valores positivos y pequeños de 0 (ceros positivos), por lo que $[x] = 0$. Para los valores de 0 que vienen por la izquierda, ellos son negativos y pequeños (ceros negativos), y su parte entera $[x] = -1$.

Los siguientes problemas usan y abusan de la pobre derivada para satisfacer sus exigencias

Problema 4.16 Probar que si f es una función par y derivable, entonces f' es impar.

La definición de derivada es

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Hay que probar que $f'(-x) = -f'(x)$.

$$\begin{aligned} f'(-x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-(x-h)) - f(-x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((x-h)) - f(x)}{h}, \quad f \text{ par} \implies f(x) = f(-x) \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f((x+k)) - f(x)}{-k}, \quad h = -k \implies k \rightarrow 0 \\ &= -\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f((x+k)) - f(x)}{k} = -f'(x) \end{aligned}$$

Efectivamente la derivada de una f par es impar.

Problema 4.17 Probar que la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$ es continua en $x = 0$ pero no es diferenciable allí.

La continuidad se ve con el valor de la función en el punto y que los límites laterales sean iguales a ese valor. La función tiene el valor $f(0) = \sqrt[3]{0} = 0$. Veamos el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{x} = 0$$

por tanto, coinciden y hay continuidad. ¿Qué pasa con la derivada en $x = 0$?

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{0+h} - \sqrt[3]{0}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{2/3}} = \infty \end{aligned}$$

Dado que no existe el límite como número real, $f'(0)$ no existe. Por lo tanto la función no es diferenciable en $x = 0$

El siguiente problema versa sobre la regla de la cadena, es sencillo pero muy ilustrativo.

Problema 4.18 Hallar f' en términos de g' , en cada caso siguiente:

$$1) f(x) = g(x + g(a)) \implies f'(x) = g'(x + g(a))$$

$$2) f(x) = g(x \cdot g(a)) \implies f'(x) = g'(x \cdot g(a)) \cdot g(a)$$

$$3) f(x) = g(x + g(x)) \implies f'(x) = g'(x + g(x)) \cdot (1 + g'(x))$$

$$4) f(x) = g(x) \cdot (x - a) \implies f'(x) = g'(x)(x - a) + g(x)$$

$$5) f(x) = g(a) \cdot (x - a) \implies f'(x) = g(a)$$

$$6) f(x + 3) = g(x^2) \implies f(x) = g((x - 3)^2) \implies f'(x) = g'((x - 3)^2) \cdot 2(x - 3)$$

Problema 4.19 Si f es derivable y periódica, demostrar que f' es periódica.

El que f sea periódica significa que

$$f(x) = f(x + t), \forall x \in \mathbb{R}$$

Para efectos de la demostración, si $h(t) = x + t$, entonces podemos escribir

$$f(x) = (f \circ h)(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

a partir de lo cual

$$f'(x) = (f \circ h)'(x) = f'(h(x)) \cdot h'(x) = f'(x + t) \cdot 1 = f'(x + t)$$

Por tanto, f' es periódica.

4.1.2 Tangentes ... y otras cositas

Cuando se parte con la derivada se dice que su interpretación geométrica corresponde a la *pendiente de la recta tangente* a la gráfica de la curva dada por $y = f(x)$. Se dice también, que en términos físicos la derivada representa la *velocidad instantánea* de un móvil en cualquier tiempo t .

Problema 4.20 Hallar la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ en el punto $(0, r)$, considerando $y = f(x)$.

La ecuación de la recta tangente en el punto $(x_0, f(x_0))$ es

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

al reemplazar para la circunferencia queda

$$y - r = f'(x_0)(x - 0)$$

Buscaremos la pendiente en x_0 .

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} \implies y' = \frac{1}{2\sqrt{r^2 - x^2}} \cdot (-2x)$$

de donde

$$y'(0) = f'(0) = \frac{1}{2r} \cdot 0 = 0$$

En consecuencia, la ecuación de la recta tangente en $(0, r)$ es

$$y = r$$

Problema 4.21 Hallar la ecuación de la recta tangente y de la normal a la curva $f(x) = \frac{x^2 + 5x}{x + 2}$ en $x = 0$

Lo primero es sacar la derivada para obtener la pendiente de la recta tangente en el punto.

$$f(x) = \frac{x^2 + 5x}{x + 2} \implies f'(x) = \frac{(2x + 5)(x + 2) - (x^2 + 5x)}{(x + 2)^2}$$

Si al reemplazar x por 0 en $f'(x)$ ocurre que $f'(0)$ existe estamos listos, no es necesario usar la definición de derivada en un punto.

$$f'(0) = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

La ecuación de la recta tangente se pide en $x = 0$, por lo que su ordenada es $f(0) = 0$. Se tiene

$$y - 0 = \frac{5}{2}(x - 0)$$

lo que equivale a $y = \frac{5}{2}x$

La ecuación de la recta normal en el mismo punto es aquella con pendiente recíproca y de signo contrario a la de la tangente, en este caso, $m(\text{normal}) = -\frac{2}{5}$, con lo cual, la ecuación de la normal es

$$y = -\frac{2}{5}x$$

Problema 4.22 Hallar a, b, c de manera que las funciones $f(x) = x^2 + ax + b$ y $g(x) = x^3 + cx$ tengan punto de tangencia en $(2, 2)$.

Si $(2, 2)$ es punto de tangencia entonces este punto debe estar en ambas curvas, $f(2) = 2$, $g(2) = 2$, y además la pendiente en ese punto debe ser la misma. Esto da origen a las siguientes ecuaciones:

$$f(2) = 2 \implies 4 + 2a + b = 2$$

$$g(2) = 2 \implies 8 + 2c = 2 \implies c = -3$$

$$f'(2) = g'(2) \implies 4 + a = 12 + c \implies a = 5$$

con el valor de $a = 5$ en la primera ecuación se obtiene $b = -12$.

Problema 4.23 Probar que se cortan en ángulo recto, en el origen, las curvas, $5y - 2x + y^3 - x^2y = 0$ y $2y + 5x + x^4 - x^3y^2 = 0$

Se observa, que efectivamente se cortan en el $(0,0)$, pues este punto satisface las coordenadas de ambas ecuaciones. Que se corten en ángulo recto eso lo deciden las pendientes que son dadas por la derivada.

$$\begin{aligned} 5y - 2x + y^3 - x^2y &= 0 \implies 5y' - 2 + 3y^2y' - 2xy - x^2y' = 0 \\ &\implies y' = \frac{2 + 2xy}{5 + 3y^2y - x^2} \\ 2y + 5x + x^4 - x^3y^2 &= 0 \implies 2y' + 5 + 4x^3 - 3x^2y^2 - 2x^3yy' = 0 \\ &\implies y' = \frac{3x^2y^2 - 4x^3 - 5}{2 - 2x^3y} \end{aligned}$$

Ahora que tenemos las derivadas reemplazamos $x = 0, y = 0$ en ellas para obtener $y' = \frac{2}{5}$ y $y' = -\frac{5}{2}$, respectivamente. Como se puede ver, el producto de pendientes es -1, lo que quiere decir que las rectas tangentes son perpendiculares, o bien que ellas se cortan formando un ángulo de 90° (recto)

Problema 4.24 Hallar la ecuación de la tangente, en cualquier punto a la curva parametrizada $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$

Partimos por el cálculo de la pendiente

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = (3a \sin^2 t \cdot \cos t) \cdot [3a \cos^2 t \cdot (-\sin t)]^{-1} \\ &= \frac{3a \sin^2 t \cos t}{-3a \cos^2 t \sin t} = -\frac{\sin t}{\cos t} \end{aligned}$$

Como no dan el punto para armar la ecuación de la recta tangente, usemos la ecuación $y = mx + n$, con los datos dados en el problema podemos hallar el n . Luego, la ecuación tiene la forma

$$y = -\frac{\sin t}{\cos t} x + n$$

para hallar el n se reemplazan en esta ecuación los valores de x e y

$$y = -\frac{\sin t}{\cos t} x + n \implies a \sin^3 t = -\frac{\sin t}{\cos t} \cdot a \cos^3 t + n \implies n = a \sin t$$

En consecuencia, la ecuación de la recta tangente es

$$y = -\frac{\sin t}{\cos t} x + a \sin t$$

Problema 4.25 Hallar todos los puntos $P(x, y)$ tales que por ellos pasen 2 tangentes, a la parábola $y = x^2$, que sean perpendiculares entre sí.

Calculemos la ecuación de la tangente en un punto cualquiera de la parábola (x_0, x_0^2) . La pendiente se obtiene de derivar $y = x^2$ y evaluar en x_0 , resulta, $m = 2x_0$. De esta manera, la ecuación es

$$y - x_0^2 = 2x_0 (x - x_0) \implies \boxed{y = 2xx_0 - x_0^2}$$

La parábola dada se abre hacia arriba y tiene vértice en $(0,0)$, por lo que resulta claro que el punto, o los puntos que andamos buscando se encuentran bajo la curva.

$$\begin{aligned} y = 2xx_0 - x_0^2 &\implies x_0^2 - 2xx_0 + y = 0 \implies x_0 = x \pm \sqrt{x^2 - y}, \quad x^2 > y \\ (*) &\implies x_1 = x + \sqrt{x^2 - y} \quad \vee \quad x_2 = x - \sqrt{x^2 - y} \end{aligned}$$

Se tienen dos puntos por donde pasan tangentes, ellos satisfacen

$$\begin{aligned} y &= 2xx_1 - x_1^2 \\ y &= 2xx_2 - x_2^2 \end{aligned}$$

Despejando x en ambas ecuaciones

$$x = \frac{y + x_1^2}{2x_1}, \quad x = \frac{y + x_2^2}{2x_2}$$

resolviendo para y ,

$$(y + x_1^2) \cdot 2x_2 = (y + x_2^2) \cdot 2x_1$$

$$2x_2y + 2x_2^2x_1^2 = 2x_1y + 2x_1x_2^2$$

$$y(x_2 - x_1) = x_1x_2(x_2 - x_1) \implies \boxed{y = x_1x_2} \quad (**)$$

Dentro de las hipótesis está que las tangentes tienen que ser perpendiculares. Como las pendientes se obtienen de $y = x^2$, ellas son, $m_1 = 2x_1$ en el primer punto, y $m_2 = 2x_2$ en el segundo. Para que sean perpendiculares debe ocurrir que

$$m_1 \cdot m_2 = 2x_1 \cdot 2x_2 = -1 \implies x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{4}$$

reemplazando esto en $(**)$ se llega a que $y = -\frac{1}{4}$. Para el correspondiente valor de la abscisa x , ver $(*)$, satisface que

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \implies x = \frac{x_1 - \frac{1}{4x_1}}{2} = x = \frac{4x_1^2 - 1}{8x_1}$$

En consecuencia, el punto tiene coordenadas $(\frac{4x_1^2 - 1}{8x_1}, -\frac{1}{4})$. Figura 4.1(a).

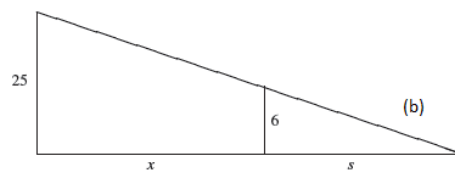
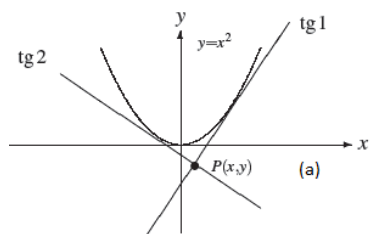


Figura 4.1

Problema 4.26 Una pareja de *amantes*, pero de la Matemática, sale a dar un paseo por la plaza de armas de Temuco. Entre tantas cosas que dos enamorados pueden descubrir ellos ven un farol encendido sobre sus cabezas y calculan que está a 25 pies del suelo. Ella le pide a él, que mide 6 pies (1,82 mts.), que camine alejándose del farol en línea recta. Cuando se encuentra a 40 pies de distancia ella le pregunta ¿Cuál es la longitud de tu sombra? Después de pensarlo un poco él le responde correctamente. Como toda mujer que se valora no puede creer que tenga a su lado un hombre tan inteligente, por eso le plantea una segunda prueba, si caminaste a razón de 5 pies por segundo, ¿a qué velocidad aumenta tu sombra en ese punto? ¿Cómo crees tu que contestó ese prototipo de hombre?, por supuesto, en forma correcta. He aquí, las respuestas correctas de ese *genio*.

La figura 4.1(b) ilustra la situación descrita en el enunciado.

Planteamos la relación

$$\frac{25}{x+s} = \frac{6}{s} \implies 19s = 6x \implies s = \frac{6x}{19}$$

Cuando $x = 40$, se tiene que $s = \frac{6 \cdot 40}{19} = \frac{240}{19}$ pies, es la longitud de la sombra. Para el asunto de la velocidad se tiene

$$\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{6}{19} \cdot 5 = \frac{30}{19} \text{ pies por seg}$$

Problema 4.27 El área de un círculo aumenta a una tasa desconocida, pero tal que si su radio es de 6 cms, la tasa de variación es 4.

1. Hallar la tasa de variación del área en ese instante.
2. Si el círculo es en realidad la sección transversal de una esfera, hallar la tasa de variación del volumen.
3. Suponer que la tasa de variación del área de la sección transversal es 5 si $r = 3$. Hallar la tasa de variación del volumen cuando $r = 3$

a) Sea $A(t)$ el área del círculo en el instante t , y sea $r(t)$ su radio en ese momento, entonces

$$A(t) = \pi [r(t)]^2 \implies \frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$$

como $r = 6$ y $\frac{dr}{dt} = 4$, entonces $\frac{dA}{dt} = 2\pi \cdot 6 \cdot 4 = 48\pi$

b) Sea $V(t)$ el volumen de la esfera en el tiempo t

$$V(t) = \frac{4}{3} \pi r^3 \implies \frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} = 4\pi \cdot 36 \cdot 4 = 576\pi$$

c) En esta situación tenemos lo siguiente:

$$V(t) = \frac{4}{3} \pi r^3 \implies \frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

$$A(t) = \pi [r(t)]^2 \implies \frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$$

La tasa de variación del área es 5 cuando $r = 3$, reemplazamos en esta última ecuación.

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt} \implies 5 = 2\pi \cdot 3 \cdot \frac{dr}{dt} \implies \frac{dr}{dt} = \frac{5}{6\pi}$$

con este dato nos vamos a la ecuación del $V(t)$

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} \implies \frac{dV}{dt} = 4\pi 3^2 \frac{5}{6\pi} = 30$$

Los problemas de móviles, partículas, y todos esos entes raros, no le gustan mucho a los profes de Cálculo. Mostramos un sólo ejemplo por si acaso alguna vez se les ocurriera preguntar.

Problema 4.28 La trayectoria de una partícula está descrita por la ecuación $s(t) = 3t^2 + 2t + 4$. Entonces:

- La posición inicial de la partícula es $s(0) = 4$
- La posición al cabo de 2 segs es $s(2) = 20$
- La velocidad en cada instante está dada por $s'(t) = 6t + 2$
- En el punto de partida la velocidad es $v(0) = s'(0) = 2$ m/seg
- En el tiempo $t = 2$ la velocidad es $v(2) = s'(2) = 14$ m/seg
- La aceleración en cualquier instante es $a(t) = v'(t) = s''(t) = 6$.

En particular, $a(0) = 6$ constante

Se recomienda poner atención a lo siguiente:

1. $v > 0$ la partícula se mueve en dirección creciente de s
2. $v < 0$ la partícula se mueve en dirección decreciente de s
3. $v = 0$ la partícula está en reposo en ese instante
4. $a > 0$ la partícula aumenta su rapidez
5. $a < 0$ la partícula disminuye su rapidez
6. $a = 0$ la partícula tiene rapidez constante

4.1.3 Rolle, TVM ... y algo más

Lo que viene tiene relación con los teoremas de Rolle y del Valor Medio (TVM). Son algunas demostraciones que ejemplifican el uso de estos resultados.

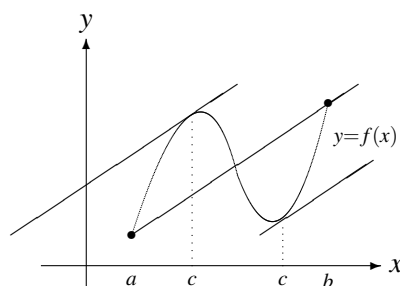


Ilustración TVM

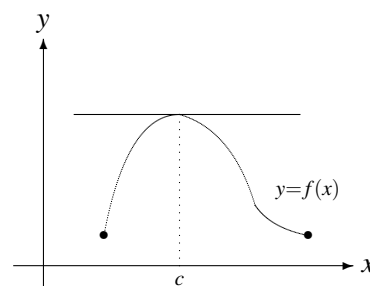


Ilustración Rolle

El teorema de Rolle dice que,

si f es continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b) , con $f(a) = f(b)$, entonces **existe** un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Geométricamente esto asegura que, al menos, en c , la recta tangente es paralela al eje x .

El teorema del valor medio (TVM) es más general que el de Rolle, afirma que

si f es continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b) , entonces **existe** un punto $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Geométricamente esto asegura que, al menos, en c , la recta tangente es paralela a la cuerda que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

Problema 4.29 Determinar si existe algún punto c que satisfaga el TVM para la función $f(x) = x^3 - 5x^2 - 3x$ en el intervalo $[1, 3]$. ¿Qué pasa con Rolle?

Vamos viendo esto con calma, la función es polinomial, por tanto es continua y diferenciable en todas partes, en particular en el intervalo dado. Se sigue que el TVM debe ser satisfecho por al menos un punto, nuestra tarea es encontrarle.

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

De $f(x) = x^3 - 5x^2 - 3x$ obtenemos $f'(x) = 3x^2 - 10x - 3$, de donde $f'(c) = 3c^2 - 10c - 3$. Por otra parte, $a = 1$, $b = 3$, de manera que $f(1) = -7$, $f(3) = -27$. Poniendo estos datos en la ecuación del TVM tenemos

$$3c^2 - 10c - 3 = \frac{-27 - (-7)}{3 - 1} = -10$$

al reducir queda la ecuación $3c^2 - 10c + 7 = 0$ con soluciones $c = 1$, $c = \frac{7}{3}$. Sólo sirve este último valor, pues $c \in (a, b)$

Problema 4.30 Verificar que la función $f(x) = |\cos x| - 1$, satisface el teorema de Rolle en $[-\pi, \pi]$.

Apareció el valor absoluto, *terror* de la mayoría de los alumnos. ¡Qué va!, aplica la definición y pasa a ser inofensivo. Veamos que es así

$$f(x) = \begin{cases} -\cos x - 1, & -\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{2} \\ \cos x - 1, & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ -\cos x - 1, & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Ahora se trabaja separadamente en cada intervalo, para ver si existe el c de Rolle. La función es claramente continua y derivable, luego, no hay que preocuparse de andar demostrando eso. Como se trata de Rolle, hay que chequear la igualdad de las imágenes.

$f(-\pi) = 0$, $f(-\frac{\pi}{2}) = -1$. En este intervalo decimos **no** a Rolle.

$f(-\frac{\pi}{2}) = -1$, $f(\frac{\pi}{2}) = -1$. Aquí hay un c de Rolle.

$f(\frac{\pi}{2}) = -1$, $f(\pi) = 0$. Aquí **no** a Rolle

Observe que no es contradictorio decir que en $[-\pi, \pi]$ se verifica Rolle, pues se verifica igualdad en los extremos. Lo que pasa es que hemos sido más específicos al decir que el c está en $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Hallemos el c

$$f(x) = \cos x - 1 \implies f'(x) = -\sin x \implies f'(c) = -\sin c$$

de $\sin c = 0$ en $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ se obtiene que $c = 0$.

Problema 4.31 Usar TVM para probar que $|b - a| \geq |\cos b - \cos a|$, $a \neq b$

Como anda metido el coseno, tomamos $f(x) = \cos x$, función que es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) . Luego el TVM ¡va!.

$$\begin{aligned} f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} &\implies -\operatorname{sen} c = \frac{\cos b - \cos a}{b - a} \\ &\implies -\operatorname{sen} c \cdot (b - a) = \cos b - \cos a \\ &\implies |\cos b - \cos a| = |\operatorname{sen} c| |b - a| \\ &\implies |\cos b - \cos a| \leq |b - a|, \quad |\operatorname{sen} x| \leq 1 \end{aligned}$$

Problema 4.32 Sea $f(0) = 0$ y $f'(x)$ creciente. Demostrar que la función $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ es creciente en $(0, \infty]$.

Una función es creciente si su derivada es mayor que cero. Luego, hay que probar que $g'(x) > 0$, $\forall x > 0$. Algunas cosas previas e importantes que se conocen. La función f es derivable, lo mismo que la función $h(x) = x$, ello implica que el cociente entre ambas sea derivable. Es decir, g es derivable. Con esto tenemos

$$g(x) = \frac{f(x)}{x} \implies g'(x) = \frac{x f'(x) - f(x)}{x^2}$$

como $x^2 > 0$, sólo falta probar que el numerador, $x f'(x) - f(x)$ es positivo, o bien, que $f'(x) > \frac{f(x)}{x}$

Ahora usemos el TVM para la función f en $[0, x]$

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \implies f'(c) = \frac{f(x)}{x}$$

sabemos que este c pertenece al intervalo abierto $(0, x)$, por tanto,

$$0 < c < x \implies f'(c) < f'(x), \quad \text{pues } f' \text{ es creciente}$$

En consecuencia,

$$f'(c) = \frac{f(x)}{x} < f'(x), \quad \forall x > 0$$

con lo que termina la demostración.

Problema 4.33 Si $f'(x) > g'(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(a) = g(a)$, probar que $\begin{cases} f(x) > g(x), & \text{si } x > a \\ g(x) > f(x), & \text{si } x < a \end{cases}$

Apliquemos TVM a la función $(f - g)$ en $[a, x]$

$$f'(c) - g'(c) = \frac{(f(x) - g(x)) - (f(a) - g(a))}{x - a}$$

dado que $f(a) = g(a)$, entonces esto equivale a

$$f'(c) - g'(c) = \frac{f(x) - g(x)}{x - a}$$

pero, $f'(x) > g'(x)$ para todos los x , en particular para el c , por tanto, $f'(c) - g'(c) > 0$. Luego,

$$\frac{f(x) - g(x)}{x - a} = f'(c) - g'(c) > 0$$

Si ahora imponemos la condición que sea $x > a$, entonces obligamos al numerador anterior a ser mayor que cero. Esto es, $f(x) - g(x) > 0$, o lo que es lo mismo, $f(x) > g(x)$. Si fuera $x < a$, equivalente con $x - a < 0$, entonces el numerador debe ser también menor que cero para cumplir que el cociente sea mayor que cero. Por tanto, $f(x) - g(x) < 0$, de donde $f(x) < g(x)$

Problema 4.34 Probar que $(1+x)^\alpha < 1 + \alpha x$, $x \in [(-1, \infty) - \{0\}]$, $\alpha < 1$

Hay que considerar dos partes en esta demostración, la primera es probar para $x > 0$ y la segunda probar para $x < 0$. Para ver la primera parte le aplicamos TVM a la función $f(x) = (1+x)^\alpha$ en $[0, x]$.

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}, \quad c \in (0, x)$$

la derivada en c es

$$f(x) = (1+x)^\alpha \implies f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} \implies f'(c) = \alpha(1+c)^{\alpha-1}$$

reemplazando en la expresión que define el TVM

$$\alpha(1+c)^{\alpha-1} = \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x}$$

aquí viene un acotamiento, el c del TVM debe cumplir que $0 < c < x$, de esto, $1 < c + 1$. Agregando el hecho que $\alpha < 1$, la expresión

$$\alpha(1+c)^{\alpha-1} < 1$$

Si no entendió, vea esto mismo como sigue, el factor potencia $(1+c)^{\alpha-1}$ con el hecho de ser $\alpha - 1 < 0$ y $(1+c > 1$ hace que sea una fracción, que es menor que 1. Esto hace que α multiplicado por el factor sea un número menor que α . Es hora de volver a donde estábamos antes de esta aclaración.

$$\alpha(1+c)^{\alpha-1} = \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} < \alpha$$

como $x > 0$ se puede multiplicar y luego reducir esta expresión para llegar a

$$(1+x)^\alpha < 1 + \alpha x$$

Para probar la segunda parte se aplica el TVM a la función $f(x) = (1+x)^\alpha$ en $[x, 0]$, con $-1 < x < 0$. Se tiene

$$f'(c) = \frac{f(0) - f(x)}{0 - x}, \quad c \in (x, 0)$$

la derivada es conocida, así que reemplazamos en esta ecuación

$$\alpha(1+c)^{\alpha-1} = \frac{1 - (1+x)^\alpha}{-x}$$

Hacemos acotamientos, el c del TVM debe cumplir ahora que $-1 < c < 0$, de esto, $0 < c + 1 < 1$, como además, $\alpha < 1$, la expresión

$$\alpha(1+c)^{\alpha-1} > 1$$

Si no entendió, vea esto mismo como sigue, $0 < c + 1 < 1$ es una fracción, pero $\alpha - 1 < 0$ la invierte y la hace ser mayor que 1. ¡that is all!

$$\alpha(1+c)^{\alpha-1} = \frac{1-(1+x)^\alpha}{-x} > \alpha$$

como $-x > 0$ se puede multiplicar y reducir para tener

$$(1+x)^\alpha < 1 + \alpha x, \quad \forall x \in (-1, 0)$$

Problema 4.35 Sea $f(x) = (x-a)^m(x-b)^n$. Probar que existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$, y que dicho punto divide al intervalo $[a, b]$ en la razón $\frac{m}{n}$.

El teorema de Rolle nos saca del paso, acordarse que es este teorema el que asegura, bajo condiciones de continuidad en el cerrado y diferenciabilidad en el abierto, que existe c en (a, b) tal que $f'(c) = 0$. Veamos esto. Si $f(x) = (x-a)^m(x-b)^n$, entonces su derivada en c es

$$f'(c) = m(c-a)^{m-1}(c-b)^n + n(c-a)^m(c-b)^{n-1}$$

según Rolle, resolviendo esto igualado a cero hallamos el c

$$m(c-a)^{m-1}(c-b)^n + n(c-a)^m(c-b)^{n-1} = 0$$

se puede factorizar

$$(c-a)^{m-1}(c-b)^{n-1} [m(c-b) + n(c-a)] = 0$$

como $c \neq a$, $c \neq b$, entonces se puede dividir por los factores de potencia $m-1$ y $n-1$ para tener

$$m(c-b) + n(c-a) = 0 \implies c = \frac{mb+na}{m+n}$$

$$m(c-b) + n(c-a) = 0 \implies \frac{m}{n} = \frac{c-a}{b-c}$$

con esto se ha encontrado el c y se ha probado que la razón de división es $\frac{m}{n}$

Problema 4.36 Sea $f(x) = x^3 - 3x + m$. Probar que f no tiene 2 raíces reales en $[0, 1]$ para cualquier m .

Mirando la función, polinomial, uno se da cuenta que es continua y derivable. Todos estos problemas se hacen por reducción al absurdo. Suponemos entonces que sí tiene dos raíces (¡Jalisco nunca pierde!). Sea a y b esas raíces en $[0, 1]$, entonces $f(a) = f(b) = 0$. ¿Rolle?, por supuesto.

Rolle nos asegura que existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$. Aquí vale la pena hacer notar que, dicho de otra forma, el Teorema de Rolle afirma que *entre dos raíces consecutivas de la función existe una raíz de la función derivada*. Mira bien, por ejemplo, $y = x^2 - 4$ tiene por raíces al 2 y al -2. La derivada es $y' = 2x$, la cual tiene por raíz al 0. Si uno mira al teorema de Rolle con otros ojos, se da cuenta que efectivamente lo dice. El hecho que $f(a) = f(b) = 0$ ya habla de dos raíces para f , luego afirma que existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$ (raíz de la derivada).

Después de esta reflexión *de alto nivel*, volvemos a encontrarnos con Rolle.

$$f(x) = x^3 - 3x + m \implies f'(c) = 3c^2 - 3 = 0 \implies c = \pm 1$$

¡sorpresa!, el c de Rolle debe estar en $(0, 1)$ y ninguno de los dos supuestos c cumple con esto. ¡¡**Contradicción**!! Están todas las condiciones de Rolle y no existe el c . ¿Cuál es la causa?, sencillo, el suponer la existencia de esas raíces. En consecuencia, la ecuación no tiene dos raíces en $[0, 1]$.

Problema 4.37 Sea f continua y derivable en $[0, 1]$, satisfaciendo:

1. $f(x) \in (0, 1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$
2. $f'(x) \neq 1$, $\forall x \in [0, 1]$.

Demostrar que existe un único $x \in [0, 1]$ tal que $f(x) = x$

Cuando se pide probar que algo existe, hay que justificar la existencia. En este caso, consideremos la función

$$h(x) = f(x) - x$$

Es claro que h es continua en $[0, 1]$, por que tanto $f(x)$ como la función $g(x) = x$ lo son. Más aún, se verifica que, $h(0) = f(0) - 0 = f(0) > 0$, pues $f(x) \in (0, 1)$ para todo $x \in [0, 1]$. Y también se cumple que $h(1) = f(1) - 1 < 0$, por la misma razón anterior. De esta forma h tiene signos opuestos en los extremos del intervalo, Bolzano asegura la existencia de un $c \in (, 1)$ tal que $h(c) = 0$, o lo que es lo mismo, $f(c) - c = 0$, de donde $f(c) = c$. En consecuencia, de que existe, existe ese x .

Para probar que es único, se hace lo de siempre, se supone que existen 2, llamándolos a y b , $a \neq b$, entonces ellos cumplen que, $h(a) = h(b) = 0$. Por esas cosas que tiene la vida, estamos en las condiciones del teorema de Rolle, que dice entonces, que existe un $c_1 \in (a, b)$ tal que $h'(c_1) = 0$, o lo que equivalente, $f'(c_1) - 1 = 0$, de donde se obtiene $f'(c_1) = 1$. ¡Contrario a la hipótesis! de que $f'(x) \neq 1$, $\forall x \in [0, 1]$. Con esta contradicción se prueba que ¡¡campeóoon campeóooooon campeóooooon hay uno sólo!!., perdón, se me salió el *albo*. Repito, ... se prueba que hay un único x que hace lo que dice el problema.

Problema 4.38 Probar que $\frac{x}{1-x^2} < \arctg x < x$, $\forall x > 0$

Se considera $f(x) = \arctg x$ en $[0, x]$ y se aplica el TVM. Tenemos

$$\begin{aligned} f'(c) &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \implies \frac{1}{1+c^2} = \frac{\arctg x - \arctg 0}{x - 0} \\ &\implies \arctg x = x \cdot \frac{1}{1+c^2} \end{aligned}$$

como $0 < c < x$, entonces $\frac{1}{1+c^2} < 1$, en consecuencia,

$$\arctg x < x$$

Para la otra parte de la inecuación se tiene

$$\begin{aligned} 0 < c < x &\implies c^2 < x^2 \implies 1 + c^2 < 1 + x^2 \\ &\implies \frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{1+c^2} \\ &\implies \arctg x > \frac{x}{1+x^2} \end{aligned}$$

Estamos listos, con esto se tiene

$$\frac{x}{1-x^2} < \arctg x < x, \quad \forall x > 0$$

4.1.4 Gráficas.. con derivadas

Cambiamos de folio, igual que los diarios, nos dedicamos ahora a mostrar como la derivada es un excelente aporte para graficar funciones. Pongan atención que este tipo de problema no falla en una prueba. Como dicen los huasos en el rodeo, hay que asegurarse con unos cuantos *puntos buenos*.

Problema 4.39 Estudiar; dominio, intersecciones con los ejes, puntos críticos, valores extremos, monotonía, concavidad y convexidad, asíntotas y gráfico, de la función

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$$

Dominio: $\{x \in \mathbb{R} / x > 1\}$

Intersecciones: Si el dominio son los $x > 1$, no hay intersecciones con los ejes.

Asíntotas: Se ve de inmediato que $x = 1$ es asíntota vertical, pues

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{\sqrt{x-1}} \sim \frac{1}{0^+} = \infty$$

Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x-1}} = \infty$$

Como $x \rightarrow \infty$, entonces los grados del numerador y denominador proporcionan la respuesta. El grado del numerador es 1, mientras el del denominador es $\frac{1}{2}$, así, el límite es infinito.

Asíntotas oblicuas

Las oblicuas son de la forma $y = mx + n$, con:

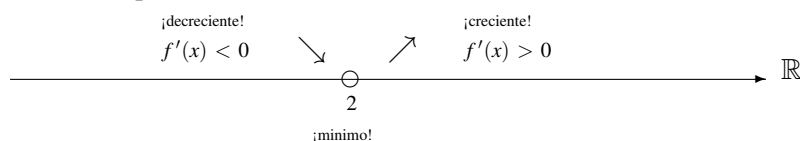
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = m &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = 0 = m \\ \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = n &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x-1}} = \infty = n \end{aligned}$$

se concluye que no hay oblicuas.

Con la derivada respondemos todo lo restante.

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}} \Rightarrow f'(x) = \frac{x-2}{(x-1)^{3/2}}$$

Al igualar a cero esta derivada se obtiene $x = 2$ como **punto crítico**. Mirando lo que pasa a izquierda y derecha del 2 sabemos que sucede con la monotonía.

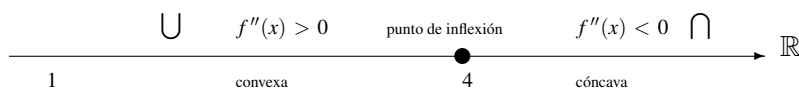


Para ser más precisos, f es creciente en $(2, \infty)$ y decreciente en $(1, 2)$. Es claro que aprovechamos esto para establecer que en $x = 2$ hay un mínimo, y que el valor de éste es $f(2) = 2$.

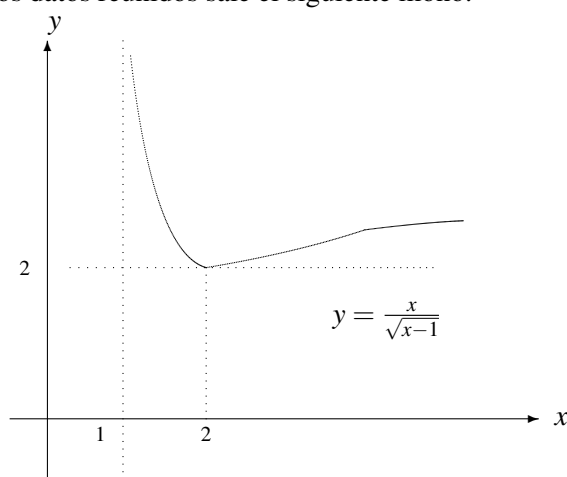
La concavidad pertenece exclusivamente a la segunda derivada.

$$f'(x) = \frac{x-2}{(x-1)^{3/2}} \implies f''(x) = \frac{4-x}{(x-1)^{5/2}}$$

Listo, $x = 4$ punto crítico para la segunda derivada. Ponemos todo en la recta



De esta forma, f es convexa (cóncava hacia arriba) en $(1, 4)$ y es cóncava (hacia abajo) en el intervalo $(4, \infty)$. De *yapa* sacamos que el punto $x = 4$ es de inflexión, pues hay cambio en la concavidad, antes de 4 y después de 4. Con todos los datos reunidos sale el siguiente mono.



Problema 4.40 Estudiar la función $f(x) = 3x^4 + 4x^3$

Dominio: $\mathbb{R}$

Intersecciones: $x = 0 \implies y = 0$. $y = 0 \implies x^3(4 + 3x) = 0$, de donde, $x = 0$, $x = -\frac{4}{3}$

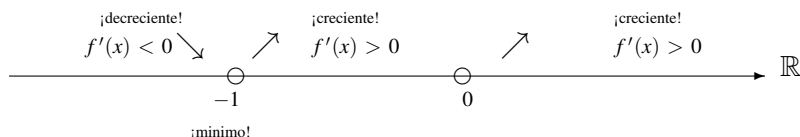
asíntotas: Se ve de inmediato que verticales, **no hay**. Para ver si hay oblicuas, $\frac{f(x)}{x} = 3x^3 + 4x^2$ su límite se va al infinito cuando $x \rightarrow \infty$, por tanto no hay oblicuas ni horizontales.

Observación. En un polinomio, **JAMÁS** hay asíntotas (de ningún tipo).

La derivada responde lo restante.

$$f(x) = 3x^4 + 4x^3 \implies f'(x) = 12x^3 + 12x^2$$

Al igualar a cero esta derivada se obtiene $x = 0$ o $x = -1$, que son los puntos críticos. Estudiemos que pasa a izquierda y derecha del 0 y del -1.

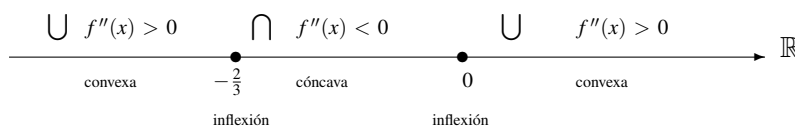


Así, f es creciente en $(-1, \infty)$ y decreciente en $(-\infty, -1)$. En $x = -1$ hay un mínimo, y ese valor $f(-1) = 12$. La razón de esto es el cambio que sufre la derivada, o más bien la pendiente que de venir positiva antes del -1. pasa a ser negativa a la derecha del -1.

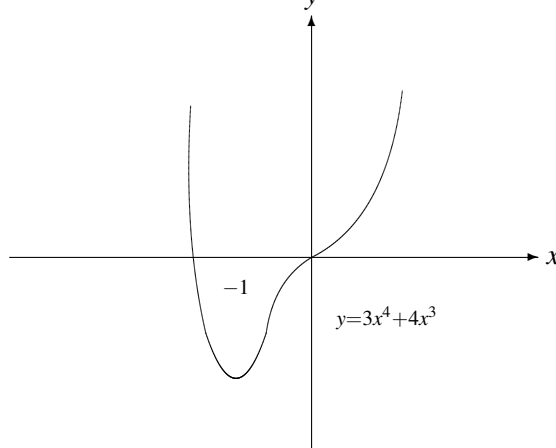
La concavidad es algo que compete a la segunda derivada.

$$f'(x) = 12x^3 + 12x^2 \implies f''(x) = 36x^2 + 24x = 12x(3x + 2)$$

Al igualar a cero esta segunda derivada se obtienen $x = 0$ y $x = -2/3$ como puntos críticos para la segunda derivada. Ponemos esto en la recta



Las respuestas están a la vista en la recta real. Con todo, el gráfico de f es el siguiente



Problema 4.41 Estudiar la función $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$

Dominio: $\{x \in \mathbb{R} / x \neq 1\}$

Intersecciones: $x = 0 \iff y = 0$. La curva pasa por el $(0, 0)$

Paridad: $f(x) = f(-x) \implies f$ par

asíntotas: $x = 1$ y $x = -1$ son asíntotas verticales, pues

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{x^2 - 1} \sim \frac{1}{0^+} = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2}{x^2 - 1} \sim \frac{1}{0^+} = \infty$$

Las oblicuas son de la forma $y = mx + n$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = m \implies \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 - 1} = 0 = m$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = n \implies \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = 1 = n$$

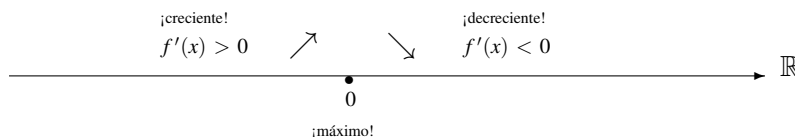
se concluye que $y = 1$, en lugar de asíntota oblicua, es horizontal.

¡atención!, sacamos asíntota en la rama del $+\infty$, falta la rama $-\infty$. Pero da exactamente lo mismo

Con la derivada respondemos todo lo restante.

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1} \implies f'(x) = -\frac{2x}{(x^2 - 1)^2}$$

Al igualar a cero se obtiene $x = 0$ como **punto crítico**. Miramos lo que pasa a izquierda y derecha del 0, en la recta

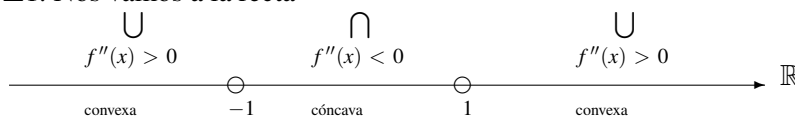


En $x = 0$ hay máximo cuyo valor es $f(0) = 0$.

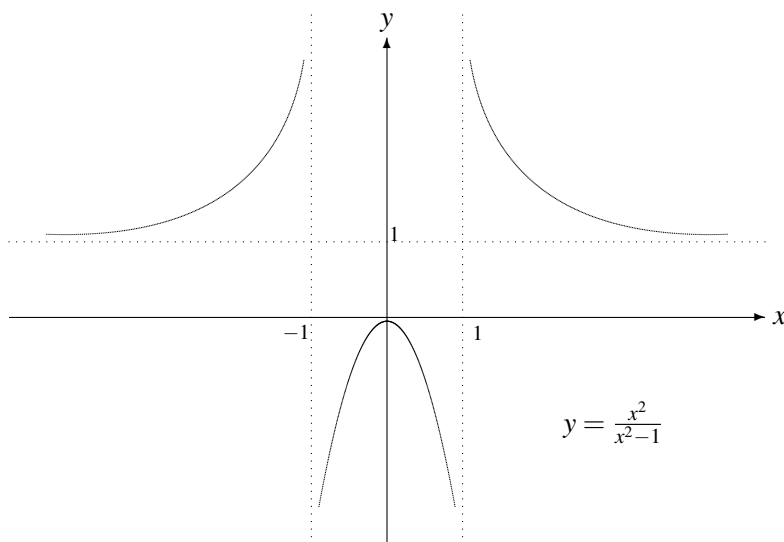
La concavidad es propiedad de la segunda derivada.

$$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2 - 1)^2} \implies f''(x) = \frac{2 + 6x^2}{(x^2 - 1)^3}$$

No hay puntos donde la segunda derivada sea igual a cero, pero hay puntos que la vuelven infinita, que son el $x = 1$ y el $x = -1$, lo que hay que hacer, es analizar la segunda derivada en los subintervalos que producen el $x = \pm 1$. Nos vamos a la recta



Observa que **no hay** punto de inflexión, pues a pesar de haber cambio en la concavidad, antes y después de los puntos ± 1 , esos puntos ya eran asíntotas. La gráfica a continuación.



Problema 4.42 Estudiar la función $f(x) = x \cdot e^{1/x}$

Dominio: $\{x \in \mathbb{R} / x \neq 0\}$

Intersecciones: $x \neq 0 \iff y$ no tiene ceros.

Paridad: $f(x) \neq f(-x)$, $f(x) \neq -f(-x)$. Luego, f no es par ni impar.

asíntotas: Las verticales aparecen cuando hay problemas con un denominador. ¡Oh que sorpresa!, el exponente, en la función, tiene la fracción $\frac{1}{x}$. Veamos que pasa con el límite para $x \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{1/x} &\sim 0 \cdot e^\infty = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{1/x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{e^z}{z} = \infty, \quad z = \frac{1}{x} \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} x e^{1/x} &\sim 0 \cdot e^{-\infty} = 0 \cdot 0 = 0\end{aligned}$$

Esto significa que el eje y , por derecha, es asíntota vertical.

Las horizontales se calculan con la variable al infinito en la función. Esto es,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x e^{1/x} \sim \infty \cdot 1 = \infty$$

no hay horizontal. Veamos si existen oblicuas

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} &= m \implies \lim_{x \rightarrow \infty} e^{1/x} = 1 = m \\ \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) &= n \implies \lim_{x \rightarrow \infty} (x e^{1/x} - x) = \infty \cdot 0 = n\end{aligned}$$

Este límite se calcula por *L'Hôpital*

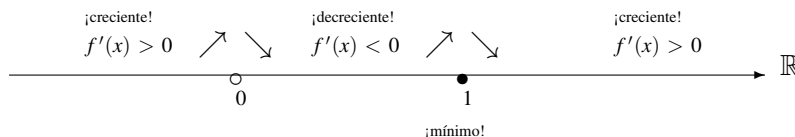
$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x e^{1/x} - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{1/x} - 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{x^2} e^{1/x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{1/x} = 1$$

se concluye que $y = x + 1$ es **oblicua**. En la rama del $-\infty$ es lo mismo.

Armados con la derivada vamos por los máximos y mínimos.

$$f(x) = x e^{1/x} \implies f'(x) = e^{1/x} - x \cdot \frac{1}{x^2} e^{1/x} = e^{1/x} \left(1 - \frac{1}{x} \right)$$

Al igualar a cero la derivada se obtiene $x = 1$ como **punto crítico**. Miramos lo que pasa a izquierda y derecha del 1, en la recta



En $x = 1$ hay mínimo cuyo valor es $f(1) = e$.

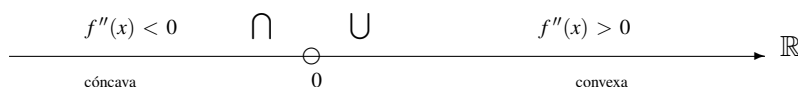
Vayamos en busca de la concavidad

$$f'(x) = e^{1/x} - \frac{1}{x} e^{1/x} \implies f''(x) = -\frac{1}{x^2} e^{1/x} + \frac{1}{x^2} e^{1/x} + \frac{1}{x^3} e^{1/x}$$

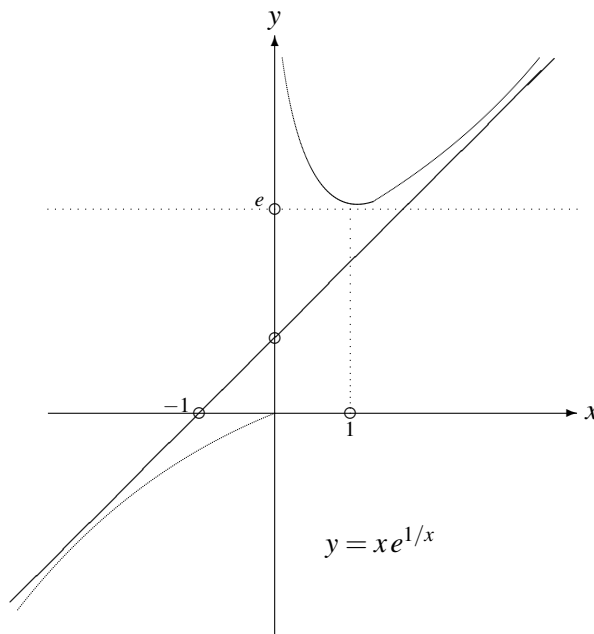
Reducimos esta segunda derivada y la igualamos a cero

$$f''(x) = \frac{1}{x^3} e^{1/x} = 0$$

No hay puntos donde la segunda derivada sea igual a cero, pero hay puntos que la vuelven infinita, que es $x = 0$. Analizamos la segunda derivada en los subintervalos que produce el $x = 0$. Nos vamos a la recta.



Observa que **no hay** punto de inflexión, pues a pesar de haber cambio en la concavidad, antes y después del punto $x = 0$, ese punto es de asíntota. La gráfica de esta función a continuación



Problema 4.43 Estudiar la función $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + 1}{x^2}$

Dominio: $\{x \in \mathbb{R} / x \neq 0\}$

Intersecciones: $x \neq 0$. Con $y = 0$ se tiene $x^3 + 2x^2 + 1 = 0$, una calculadora dice que hay dos ceros complejos, y que el cero real, el que sirve es, aproximadamente 2,2. Luego, la curva corta en $(2,2;0)$

Paridad: $f(x) \neq f(-x)$, $f(x) \neq -f(-x)$. Luego, f no es par ni impar

asíntotas: El problema es en $x = 0$. Veamos el límite para $x \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 2x^2 + 1}{x^2} \sim \frac{1}{0} = \infty$$

de modo que tenemos asíntota vertical en $x = 0$

Con la variable al infinito se calculan las horizontales

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x^2 + 1}{x^2} = \infty$$

no hay horizontal. Veamos las oblicuas

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = m \implies \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x^2 + 1}{x^3} = 1 = m$$

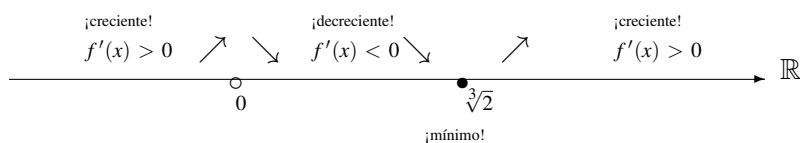
$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = n \implies \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 + 2x^2 + 1}{x^2} - x \right) = 2 = n$$

se concluye que $y = x + 2$ es **oblicua**. En la rama del $-\infty$ es lo mismo.

Ahora le pedimos ayuda a la derivada

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + 1}{x^2} \implies f'(x) = \frac{x^3 - 2}{x^3} = 0 \implies x = \sqrt[3]{2}$$

Veamos que sorpresa nos tiene el punto crítico $x = \sqrt[3]{2}$.



En $x = \sqrt[3]{2}$ hay mínimo cuyo valor aproximado es $f(\sqrt[3]{2}) \sim 3,9$.

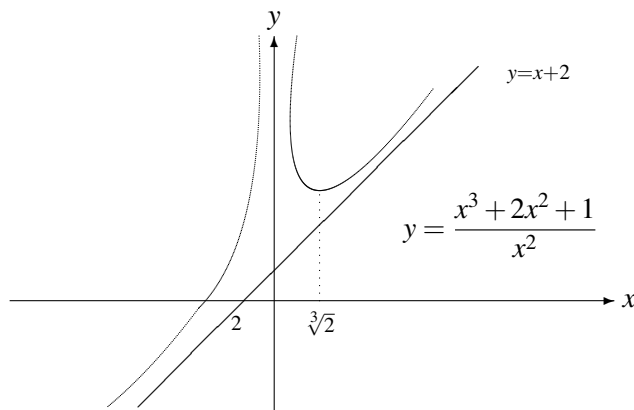
Con la concavidad terminamos y graficamos la curva.

$$f'(x) = \frac{x^3 - 2}{x^3} \implies f''(x) = \frac{6}{x^4}$$

No hay puntos donde la segunda derivada sea igual a cero, pero hay puntos que la vuelven infinita, que es $x = 0$. Analizamos la segunda derivada en los subintervalos que produce el $x = 0$. Nos vamos a la recta



La gráfica de esta función se muestra a continuación



4.1.5 Reglas de L'Hôpital

Esto es un gran aporte al cálculo de límites. Una anécdota, estas reglas no son obra del intelecto de L'Hôpital (1661-1704), él era Marqués de la localidad de L'Hôpital en Francia, y un enamorado de la Matemática, tanto que contrató como profesor particular al famoso Johan Bernouilli, quien le tomó como discípulo y le enseñó todo esto del cálculo de límites, que en esa época recién se empezaba a conocer. El muy *patudo* de L'Hôpital una vez que aprendió y terminó sus clases particulares, recopiló las enseñanzas recibidas y publicó un texto. Como se dice en Chile, no le salió ni por "cura'o" por este plagio.

De lo que hay que preocuparse en estos límites es de su máscara. Las reglas funcionan para indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$. Hay otras indeterminaciones que se pueden transformar a estas dos formas básicas. Iremos de a poco viendo como es el comportamiento de cada cual. La regla es, para cualquiera de las dos formas

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \sim \frac{0}{0} = \frac{\infty}{\infty} \sim \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Problema 4.44 Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$

La máscara es de la forma $\frac{0}{0}$, de modo que L'Hôpital viene en camino

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{2x} - 0}{1} = 2$$

Problema 4.45 Calcular $\lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-x}$

La máscara es de la forma $\infty \cdot 0$, de modo que se puede transformar a la forma $\frac{0}{0}$, simplemente escribiendo $\infty = \frac{1}{0}$ o bien a la forma $\frac{\infty}{\infty}$, escribiendo, $0 = \frac{1}{\infty}$. Preferimos esta última.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} \sim \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

Problema 4.46 Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^2}$

La máscara es de la forma $\frac{0}{0}$. Directo a L'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^2} \sim \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2x} \sim \frac{1}{0}, \quad \text{¡¡no existe!!}$$

ni siquiera podemos decir que es ∞ . Cuando la variable x se acerca a cero por derecha tenemos límite $+\infty$, y por la izquierda de cero $-\infty$.

Problema 4.47 Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^{1/3}}$

La máscara es de la forma $\frac{0}{0}$. Se nos viene L'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^{1/3}} \sim \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{\frac{1}{3}x^{-2/3}} = \lim_{x \rightarrow 0} 3x^{2/3} \cos x = 0$$

Problema 4.48 Calcular $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin 2x}{x}$

La máscara es de la forma $\frac{\sin 2}{1}$. ¡me pongo de pie! para exclamar **no** es de L'Hôpital. Como se dice, *a veces las apariencias engañan*. En este caso la máscara es un real, no hay indeterminación, el valor del límite es ese

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin 2x}{x} \sim \frac{\sin 2}{1} = \sin 2 = 0,03...$$

Problema 4.49 Calcular $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$

La máscara es de la forma $\infty - \infty$. Hay que modificar para llevarla a una de las dos máscaras de L'Hôpital

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) &\sim \infty - \infty = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - x}{x \sin x} \sim \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x} \sim \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin x}{\cos x + \cos x - x \sin x} \\ &= \frac{0}{2} = 0 \end{aligned}$$

Problema 4.50 Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) \sin 2x}{x^3 \cos x}$

La máscara es de la forma $\frac{0}{0}$. Está directo para L'Hôpital. Pero **atención**, a veces es conveniente hacer simplificaciones o separaciones de límites. Observa lo que sigue

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) \sin 2x}{x^3 \cos x} &\sim \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) 2 \sin x \cos x}{x^3 \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) 2 \sin x}{x^3} \sim \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1 - \cos x)(1 + \cos x) \sin x}{x^3(1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^3 x}{x^3(1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^3 \frac{1}{(1 + \cos x)} \\ &= 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

Si lo quieres hacer por L'Hôpital, sin ninguna simplificación, debes armarte de paciencia, son cuatro las veces a derivar y con calma para no equivocarte.

Problema 4.51 Calcular $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x - \cos x}$

Observa bien, la máscara es de la forma $\frac{\infty + \text{algo acotado}}{\infty - \text{algo acotado}} \sim \frac{\infty}{\infty}$. Veamos que sucede si aplicamos L'Hôpital.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x - \cos x} \sim \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \cos x}{1 + \sin x}$$

!!!El límite de la derecha no existe !!! (el seno y el coseno oscilan entre -1 y 1 cuando la variable va al infinito). Luego, L'Hôpital **no es aplicable**. ¿Qué se hace?, simple se vuelve a lo de antes

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x - \cos x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{\sin x}{x}}{1 - \frac{\cos x}{x}} \sim \frac{1 + 0}{1 - 0} = 1$$

Problema 4.52 Calcular $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$

La máscara es ∞^0 . Esta es una de las máscaras que se reducen a una de L'Hôpital, mediante el uso de logaritmos

$$\begin{aligned} z = \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} &\implies \ln z = \sin x \ln \frac{1}{x} \\ &\implies \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln z) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\sin x \cdot \ln \frac{1}{x} \right) \sim 0 \cdot \infty \\ &\implies \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln z) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \frac{1}{x}}{\frac{1}{\sin x}} \sim \frac{\infty}{\infty} \quad L'Hôpital \\ &\implies \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln z) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \cdot \frac{-1}{x^2}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{x \cos x} \\ &\implies \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln z) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = 1 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Observa bien, no se ha terminado con el problema, hasta aquí tenemos

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln z) = 0$$

como el logaritmo es una función continua, se puede conmutar con el límite. Esto es,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln z) = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} z \right) = 0$$

de donde,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} z = e^0 = 1$$

lo que equivale a

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} = 1$$

Problema 4.53 Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\cos x + \frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{x(\sin x - x)}}$

La máscara es 1^∞ , si tienes buena memoria, este es un e . Esta máscara se reduce a una de L'Hôpital, mediante logaritmos.

$$z = \left(\cos x + \frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{x(\sin x - x)}} \implies \ln z = \frac{1}{x(\sin x - x)} \cdot \ln\left(\cos x + \frac{x^2}{2}\right)$$

Ahora aplicamos límite en cada lado para tener

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \ln z &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x(\sin x - x)} \cdot \ln\left(\cos x + \frac{x^2}{2}\right) \sim \infty \cdot 0 \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\cos x + \frac{x^2}{2}\right)}{x(\sin x - x)} \sim \frac{0}{0} \end{aligned}$$

cada vez que aparece un logaritmo hay que tratar de dejarle como numerador, pues si se traslada al denominador tiene la forma de fracción con denominador logaritmo, lo que complica todos los cálculos. Volvemos a la última ecuación aplicando L'Hôpital.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \ln z &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos x + \frac{x^2}{2}} \cdot (-\sin x + x)}{\sin x - x + x(\cos x - 1)} \sim \frac{0}{0} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x + x}{(\cos x + \frac{x^2}{2}) \cdot (\sin x - 2x + x \cos x)} \sim \frac{0}{0} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x + \frac{x^2}{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x + x}{\sin x - 2x + x \cos x}\end{aligned}$$

El primero de estos límites vale 1, así que *chao*. Nos preocupamos sólo del segundo.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \ln z &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x + x}{\sin x - 2x + x \cos x} \sim \frac{0}{0} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x + 1}{\cos x - 2 + \cos x - x \sin x} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2 \cos x - 2 - x \sin x} \sim \frac{0}{0} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{-2 \sin x - \sin x - x \cos x} \sim \frac{0}{0} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{-3 \sin x - x \cos x} \sim \frac{0}{0} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{-3 \cos x - \cos x + x \sin x} = -\frac{1}{4}\end{aligned}$$

En conclusión, el límite buscado es

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\cos x + \frac{x^2}{2} \right)^{\frac{1}{x(\sin x - x)}} = e^{-1/4}$$

4.1.6 Problemas de Optimización

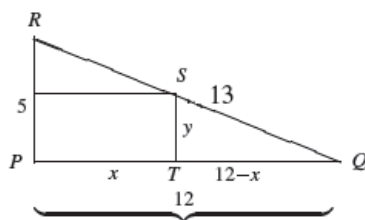
Estos son uno de los problemas que más sale en la última prueba, junto con las gráficas y uno que otro de L'Hôpital.

Son muchos los fenómenos que se pueden modelar matemáticamente a partir de la información entregada, llegándose por lo general a un problema de **optimización** (minimizar o maximizar) una

función objetivo expresada en términos de una sola variable. Las restricciones que se imponen al problema permiten reducir el número de variables a una sola.

Problema 4.54 Determinar el área del mayor rectángulo que se puede inscribir en un triángulo rectángulo de lados 5, 12 y 13, si un vértice del rectángulo está sobre la hipotenusa del triángulo.

La mayor dificultad es saber, **que hay que plantear como problema**. La respuesta se encuentra en la lectura del problema.



El problema dice:

Hallar el área del mayor rectángulo...

Con esta lectura se infiere que hay que plantear el **área de un rectángulo**, y además, como debe ser el mayor de todos, entonces el problema es de **maximización**. La medida de los lados del triángulo sirven para determinar otras variables. El hecho que uno de los vértices del rectángulo esté sobre la hipotenusa es una restricción. Bien, “vamos arando dijo la mosca...”

El área de un rectángulo de lados x e y es $A = x \cdot y$. ¿Cuál es el problema?, que hay dos variables, la x y la y . Debemos, por algún mecanismo matemático expresar una de ellas en función de la otra. Por algo dieron un triángulo, de esos datos debemos hallar el nexo entre la x y la y .

Los profes del Liceo le dan harto color a la congruencia y la semejanza, y como dice Xuxa “es la hora es la hora...” de aplicar semejanza de triángulos. Los triángulos PQR y TQS son semejantes. Luego,

$$\frac{ST}{PR} = \frac{TQ}{PQ} \iff \frac{y}{5} = \frac{12-x}{12} \implies y = \frac{5}{12}(12-x)$$

tenemos la y en términos de la x . Se reemplaza en el área del rectángulo

$$A = x \cdot y \implies A = x \cdot \frac{5}{12}(12-x)$$

Esta es la función objetivo, la función a optimizar. ¿Cómo se hace esto de optimizar? En este caso el proceso es maximizar, pero el caso minimizar es análogo, se usa la derivada, se encuentran los puntos críticos y se ve si son de máximo o de mínimo. ¡that is all!

$$A = \frac{5}{12}(12x - x^2) \implies A' = \frac{5}{12}(12 - 2x)$$

Ahora, $A' = 0 \implies x = 6$ ¡punto crítico! Lo más probable es que esta sea la respuesta correcta, salvo que el problema esté mal planteado. Verifiquemos que en $x = 6$ hay máximo. Usemos el criterio de la segunda derivada

$$A' = \frac{5}{12}(12 - 2x) \implies A'' = \frac{5}{12} \cdot (-2) = -\frac{5}{6} < 0 \quad \text{máximo}$$

La segunda derivada en el punto $x = 6$ es $A(6) < 0$, por tanto es máximo. Este valor corresponde a un lado del rectángulo. Para hallar el valor de y se reemplaza y ya.

$$y = \frac{5}{12}(12 - x) \Big|_{x=6} \implies y = \frac{5}{2}$$

con esto, el área más grande es $A = 6 \cdot \frac{5}{2} = 15$

Problema 4.55 Una empresa de Pucón tiene un **ingreso** por cada unidad de su producto “pan de huevo” que vende a \$250. El costo total de producir x unidades del producto es

$$C = 0,1x^2 + 50x + 150$$

Hallar las unidades que se deben producir para que las **utilidades** sean máximas.

Observar con atención la lectura del problema. Se deben maximizar las utilidades, esa es nuestra función objetivo. Sólo debemos saber qué es **utilidad**. Este término es común en Economía, y corresponde a

$$\text{UTILIDAD} = \text{INGRESOS} - \text{COSTOS}$$

El **Ingreso** es (precio unitario) por (número de unidades). En este caso, son de $250x$. El costo total lo entrega C , por tanto, la ecuación de la utilidad es

$$U = 250x - (0,1x^2 + 50x + 150) = 200x - 0,1x^2 - 150$$

ahora derivamos esta utilidad

$$U' = 200 - 0,2x = 0 \implies x = 1000$$

La segunda derivada

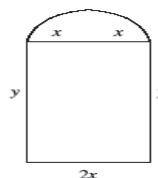
$$U'' = -0,2 < 0, \quad \text{máximo}$$

de esta forma, el empresario debe producir 1000 unidades diarias para obtener la máxima ganancia o utilidad, que en este caso llega a ser $U = 99850$.

Problema 4.56 Una ventana semi-circular prolongada en forma rectangular debe tener 4 mts de perímetro total. Hallar las dimensiones de la ventana que proporciona la máxima cantidad de luz.

El problema es de maximización del área de la ventana. Falta plantear la función objetivo. Hay dos áreas, la del rectángulo y la semicircular que lo corona. Se llama x al radio de la semi-circunferencia, con lo cual un lado del rectángulo es $2x$, y el otro es y .

La función objetivo es la suma de ambas áreas.



$$A = 2xy + \frac{\pi r^2}{2}$$

pero $r = x$, y del perímetro que satisface

$$P = 4 = 2x + 2y + \pi x \implies y = 2 - x - \frac{\pi x}{2}$$

se obtiene que el área, en función de una sola variable se escribe

$$A = 2xy + \frac{\pi r^2}{2} = 2x(2 - x - \frac{\pi x}{2}) + \frac{\pi x^2}{2} = 4x - 2x^2 - \frac{\pi x^2}{2}$$

Esta función objetivo hay que derivarla para encontrarle el punto crítico

$$A = 4x - 2x^2 - \frac{\pi x^2}{2} \Rightarrow A' = 4 - 4x - \pi x$$

la derivada es cero si $x = \frac{4}{4+\pi}$. Con la segunda derivada evaluada en este punto crítico sabremos que ocurre

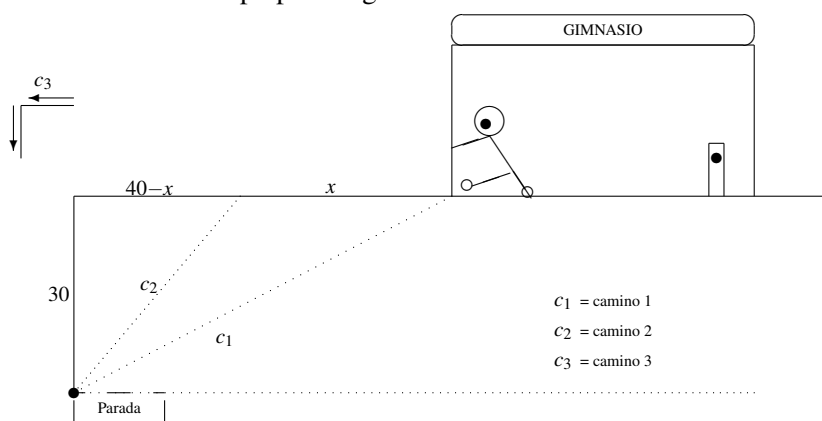
$$A''(x) = -4 - \pi < 0 \Rightarrow A''\left(\frac{4}{4+\pi}\right) < 0$$

Así, este punto es de máximo. Como consecuencia, las dimensiones de la ventana son

$$x = \frac{4}{4+\pi} \quad y = \frac{6+\pi}{4+\pi}$$

Problema 4.57 Un mechón de ingeniería se encuentra afuera del Gimnasio Olímpico Regional y desea llegar lo más pronto posible al paradero de la micro, ubicado en la Avenida Francisco Salazar (calle paralela a la que se encuentra). Le pregunta a un compañero como puede hacerlo para llegar en el menor tiempo posible. El compañero le responde que si camina por la calle donde está, rumbo al sur, debe recorrer 40 mts, y luego ir hacia el este otros 30 mts, o bien, que puede atravesar la Universidad en línea recta, pero le dice que tenga ojo con el transito y las condiciones de la ruta. Por la calle se puede correr a 5 mts por segundo y atravesar la Universidad a 3 mts por segundo. Eso sería todo mechón, ahora saca tus propias cuentas. Y se mandó a cambiar. Si tu te encontráras en una situación similar ¿cómo resolverías el problema? en términos matemáticos.

En cualquier problema que sea factible, hay que hacer un esquema gráfico de la situación, eso ayuda bastante a plantear la función objetivo. Al leer ya sabemos que hay que optimizar el tiempo, luego el problema es encontrar el **mínimo** tiempo para llegar a la micro.



Estos problemas de minimizar distancias son todos iguales, hay que saber que la velocidad es el cociente entre camino y el tiempo. Esto es, $v = \frac{s}{t}$. La figura muestra tres alternativas por donde el "mechón" puede dirigirse al paradero. El camino 1 y el camino 3 son alternativas obvias. La ruta 2, en

cambio, presenta la novedad de poder mezclar caminos, y en una de esas, es la solución buscada (eso pasa a menudo). Veamos entonces el cálculo por los caminos 1 y 3. Se necesita optimizar el tiempo, de modo que la función objetivo es

$$t = \frac{s}{v}$$

Camino c_1 : Hipotenusa del triángulo: $H^2 = 40^2 + 30^2$

$$t = \frac{c_1}{v} \Rightarrow t = \frac{\sqrt{40^2 + 30^2}}{3} \sim 16,6 \text{ segundos}$$

De esta manera, atravesando la Universidad es un *balazo* se demora 16,6".

Camino c_3 : Los Catetos: $C = 40 + 30$

$$t = \frac{c_3}{v} \Rightarrow t = \frac{40 + 30}{5} = 14''$$

Por este camino se demora exactamente 14 segundos, ¡más rápido que **Flash!**!. Nos estamos quedando con este camino.

Camino $z = x + c_2$: $z = x + \sqrt{(40-x)^2 + 30^2}$

$$t = \frac{x + c_2}{v} \Rightarrow t = \frac{x}{5} + \frac{\sqrt{(40-x)^2 + 30^2}}{3}$$

derivamos t respecto de x , e igualamos a cero para hallar puntos críticos.

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dx} &= \frac{1}{5} - \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt{(40-x)^2 + 30^2}} \cdot (40-x) = 0 \\ &= \frac{3\sqrt{(40-x)^2 + 30^2} - 5(40-x)}{15\sqrt{(40-x)^2 + 30^2}} = 0 \end{aligned}$$

Sólo se acepta que el numerador sea cero, es decir,

$$3\sqrt{(40-x)^2 + 30^2} - 5(40-x) = 0$$

$$3\sqrt{(40-x)^2 + 30^2} = 5(40-x)$$

$$9[(40-x)^2 + 30^2] = 25(40-x)^2$$

$$30^2 = 16(40-x)^2 \Rightarrow x_1 = \frac{65}{2}, x_2 = \frac{95}{2}$$

Estos x_1 y x_2 son puntos críticos, pero no vale la pena saber analizar si son de máximo o de mínimo, ya que $x_1 = \frac{65}{2} \sim 32,5$ segundos, y $x_2 = \frac{95}{2} \sim 47,5$ segundos. Se encuentran lejos, pero lejos del tiempo empleado en el camino anterior. En conclusión, el camino por el cual llega más rápido es el c_3 .

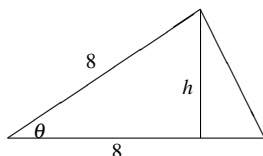
Problema 4.58 En un triángulo dos lados miden 8 cms cada uno. Hallar el ángulo entre ellos para que el área del triángulo sea máxima.

La función a optimizar es el área del triángulo que como sabemos es

$$A = \frac{1}{2} \cdot \text{base} \cdot \text{altura}$$

con la altura estamos al otro lado.

$$\text{sen } \theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{h}{8} \implies h = 8 \text{ sen } \theta$$



Luego, el área tiene la forma

$$A = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \text{ sen } \theta = 32 \text{ sen } \theta$$

Derivando,

$$A' = 32 \cos \theta = 0 \implies \theta = \frac{\pi}{2}$$

Esto significa que es el triángulo rectángulo el de mayor área.¹

4.2 Problemas Propuestos

La mayoría de los problemas que se plantean a continuación han sido considerados en pruebas. Al final se plantean en formato original por que están previamente digitadas en el computador, pero las más antiguas forman parte de los problemas previos.

1. Usar la **definición** para hallar f' si $f(\theta) = \text{sen}^2 \theta$

2. Hallar las derivadas que se indican:

a) $\frac{dy}{dx}$, $f(x) = x^{\ln(\text{sen}(2x+1)^3)} + (2x-1)^{e^{\arctg \frac{1}{x}}}$

b) $\frac{d^2y}{dx^2}$, $y = \cos(x+y)$ en el punto $(\frac{\pi}{2}, 0)$

Resp 0

c) $\frac{d^3y}{dx^3}$ para la paramétrica,
$$\begin{cases} y = \frac{3at}{1+t^2} \\ x = \frac{3at^2}{1+t^2} \end{cases}$$

d) $f(x) = \frac{3|x|-2}{1-x}$

3. Hallar la derivada de la función g que se indica, si $f(x) = \text{sen } x^2 + (1-x) \cos x$.

a) $g(x) = e^{f(x)}$ b) $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ c) $g(x) = \frac{1+xf(x)}{f'(x)}$ d) $g(x) = \frac{f(x) \cdot f'(x)}{x}$

¹más problemas resueltos, vea Algebra+Cálculo

4. Hallar una fórmula para la derivada n -ésima de la función (Ayuda: separar en fracciones parciales)

$$y = \frac{2x+5}{x^2-3x+2}$$

5. Hallar una fórmula para la n -ésima derivada de $f(x) = xe^x$

6. Sea $f(x^2) = x^3$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$. Calcular $f'(4)$

Resp. 3

7. Hallar funciones reales f y g diferenciables, tales que

$$g'(0) = 1, \quad g(x) = x + \left(\frac{x^3}{3} + 1\right)f(x), \quad \text{Resp. } f(x) = x^n$$

8. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = |x^2 - |1 - x^2|| + 2|$. Calcular las derivadas laterales en los puntos conflictivos. Ayuda: escriba en llaves

$$\text{Resp. } f'_d(1) = f'_l(-1) = 0, \quad f'_l(1) = f'_d(-1) = 2$$

9. Decidir si las proposiciones siguientes son verdaderas o falsas. Justifique la respuesta

$$a) \quad f(x) = \begin{cases} 5-6x, & x \leq 3 \\ -4-x^2, & x > 3 \end{cases} \implies f'(x) = f''(x) \quad (\text{F})$$

$$b) \quad f(x) = x|x| \implies f'(x) = |x| + x \quad (\text{F})$$

$$c) \quad \begin{cases} x = a \cos 2t \\ y = b \sin^2 t \end{cases} \implies \frac{d^2y}{dx^2} = 0 \quad (\text{V})$$

10. Hallar las derivadas que se indican:

$$a) \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{(1,1)} \quad \text{si } 3x^2y^3 + 4xy^2 = 6\sqrt{y}$$

$$b) \quad \frac{dy}{dx} \quad \text{si } y = \arctg \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$$

$$c) \quad \frac{dy}{dp} \quad \text{si } y = x \arcsen(e^{px}) + \cos x$$

$$d) \quad \frac{dz}{du} \quad \text{si } z = \ln(3t^2 \sqrt{u}) - 2u^x$$

$$e) \quad \frac{dw}{dz} \quad \text{si } w = \frac{\sqrt{z-1}}{\sin^3(x+z)}$$

$$f) \quad \frac{du}{dv} \quad \text{si } \frac{u}{u-v} = \frac{1}{u+v}$$

$$g) \quad \frac{dy}{dt} \quad \text{si } y = (4e^t)^{3t} + (\sen t)^t$$

$$h) \quad \frac{dr}{dk} \quad \text{si } r = \ln \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{k} + \log_3(k+\pi) \right]$$

11. Probar que $y = [\arcsen x]^2$ satisface las ecuaciones:

$$a) \quad (1-x^2) \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 4y$$

$$b) \quad (1-x^2) \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right) - x \frac{dy}{dx} - 2 = 0$$

12. Hallar $\frac{d^3y}{dx^3}$ si $x^2 + 2xy + y^2 - 4x - 2 = 0$

13. Si $z = xy + x \phi\left(\frac{y}{x}\right)$, demostrar que $x \frac{dz}{dx} + y \frac{dz}{dy} - z = xy$

14. Hallar y'' en $(1, 1)$ si $x^2 + 5xy + y^2 - 2x + y - 6 = 0$

sol. $\frac{111}{256}$

15. Determinar los valores de a, b, c para que tenga segunda derivada en x_0 la función

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & x \leq x_0 \\ ax^2 + bx + c, & x > x_0 \end{cases} \quad \text{sol. } \begin{cases} a = 3x_0, & b = -3x_0^2, \\ c = x_0^3 \end{cases}$$

16. Hallar los puntos en que las tangentes a la curva $y = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 20$ sean paralelas al eje de abscisas. sol. $(80, 20), (1, 15), (-2, -12)$
17. Hallar la ecuación de la parábola $y = x^2 + bx + c$, que es tangente a la recta $y = x$ en $(1, 1)$. sol. $b = -1, c = 1$
18. Escribir las ecuaciones de la tangente y de la normal a la curva $y = \sqrt{x}$ en $(4, 2)$ sol. $x - 4y + 4 = 0, 4x + y - 18 = 0$
19. Escribir las ecuaciones de la tangente y de la normal en el punto $(2, 2)$ a la curva $x = \frac{1+t}{t^3}, y = \frac{3}{2t^2} + \frac{1}{2t}$ sol. $7x - 10y + 6 = 0, 10x + 7y - 34 = 0$
20. Probar que las ecuaciones paramétricas $x = 2t + 3t^2, y = t^2 + 2t^3$, satisfacen la ecuación

$$y = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^3$$

21. Hallar las derivadas de las funciones implícitas

a) $x^3 + y^3 = a^3$

sol. $y' = -\frac{x^2}{y^2}$

b) $x^3 + x^2y + y^2 = 0$

sol. $y' = -\frac{x(3x+2y)}{x^2+2y}$

c) $y^3 = \frac{x-y}{x+y}$

sol. $y' = \frac{2y^2}{3(x^2-y^2)+2xy}$

d) $\operatorname{tg} y = xy$

sol. $y' = \frac{y \cos^2 y}{1 - x \cos^2 y}$

22. Hallar la derivada en $x = 0$ de $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

sol. $f'(0) = 0$

23. Hallar los valores de a y b para los que es derivable en $x = m$ la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq m \\ ax + b, & x > m \end{cases}$$

sol. $a = 2m, b = -m^2$

24. La ecuación del movimiento de un punto es $x = 100 + 5t - \frac{t^3}{1000}$. Hallar velocidad y aceleración en $t = 0$. sol. $v = 5, a = 0$
25. Sea $f(x) = x^2 + ax + b$. Hallar los valores de las constantes a y b para que la recta $y = 2x$ sea tangente a esta curva en $(2, 4)$
26. Hallar un polinomio $g(x)$ de grado menor o igual que 5, tal que $g(0) = 1, g(1) = 2, g'(0) = g''(0) = g'(1) = g''(1) = 0$
27. La función f satisface:

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad f(x) = 1 + xg(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$$

Probar que $f'(x) = f(x)$

28. Hallar los puntos en la curva $y = x^3 + x$ en los que la tangente es paralela a la recta $y = 4x$
29. Probar que las parábola $y^2 = 2px + p^2$ y $y^2 = p^2 - 2px$ se cortan en ángulo recto
30. Hallar el ángulo con que la recta $y = 2x$ corta a la curva $x^2 - xy + 2y^2 = 28$
31. Hallar los valores de las constantes a y b de manera que el punto más bajo en la gráfica de la función $f(x) = ax^2 + bx$ sea el $(3, -8)$
32. Suponga que $f = g \circ h, h(2) = 6, h'(2) = -10, g'(6) = -\frac{1}{2}$. Hallar $f'(2)$
33. Hallar los máximos y mínimos absolutos de las funciones:

a) $f(x) = (x-1)^{2/3} + 3, \quad x \in [0, 9]$

b) $f(x) = \sin x + \cos x, \quad x \in [0, 2\pi]$

c) $f(x) = \begin{cases} 3x-4, & -3 \leq x < 1 \\ x^2-2, & 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$

34. Hallar el c del teorema de Rolle para las funciones: (si existe)

a) $f(x) = x^2 - 4x + 3, \quad [1, 3]$

b) $f(x) = \cos x, \quad [0, \pi]$

c) $f(x) = x^3 - 16x, \quad [-4, 0]$

35. Sea $f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x - x$. Usar el teorema de Rolle para probar que la ecuación $4x^3 - 6x^2 + 4x - 1 = 0$ tiene al menos un cero en $(0, 1)$

36. Demostrar que la ecuación $x^5 + 3x^3 + 2x - 3 = 0$ tiene exactamente un cero (raíz) en $(0, 1)$

37. Hallar el c del TVM para las funciones: (si existe)

a) $f(x) = x^{2/3}, \quad [0, 1]$

b) $f(x) = \sqrt{100 - x^2}, \quad [-6, 8]$

c) $f(x) = \frac{2}{x-3}, \quad [\frac{31}{10}, \frac{32}{10}]$

38. Probar que si, $\frac{a_0}{1} + \frac{a_1}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n+1} = 0$, entonces existe un $x \in (0, 1)$ tal que

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = 0$$

Ayuda: Aplicar Rolle a $f(x) = \frac{a_0x}{1} + \frac{a_1x^2}{2} + \cdots + \frac{a_nx^{n+1}}{n+1}$ en $[0, 1]$

39. Estudiar extremos, monotonía, asíntotas, concavidad y graficar:

a) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+50}, \quad x \geq 0$

b) $f(x) = 2x\sqrt{3-x}$

c) $f(x) = -5x^3 + 14x^2 + 32x - 3$

d) $f(x) = x^2 2^{-x}$

e) $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad x > 0$

f) $(y+2)^3 = x-1$

g) $f(x) = 4x^2 + \frac{1}{x}$

h) $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{4x^2+1}}$

40. Determinar los valores de a, b, c, d de forma tal que la curva $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ sea tangente al eje x en $(2, 0)$ y que tenga un punto de inflexión en $(0, 4)$

41. Trazar la gráfica de la función con las propiedades indicadas: Es continua en todas partes, $f(2) = -3$, $f(6) = 1$, $f'(2) = 0$, $f'(x) > 0$ para $x \neq 2$ y $f'(6)$. Además, $f''(6) = 0$, $f''(x) > 0$ para $2 < x < 6$, y $f''(x) < 0$ para $x > 6$

42. Trazar la gráfica de la función con las propiedades indicadas: Es continua en todas partes, $f(-3) = 1$, $f'(x) < 0$ para $x < -3$ y $f'(x) > 0$ para $x > -3$. Además, $f''(x) < 0$ para $x \neq -3$

43. Estudiar, usando la derivada, la función $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 4}$

44. Hallar dos números cuya suma sea 10 y cuyo producto sea máximo
45. Hallar dos números positivos cuyo producto sea 20, y la suma de sus cuadrados sea mínima.
46. Hallar las dimensiones del rectángulo de área máxima que se puede inscribir en un semicírculo de radio 10
47. Hallar las dimensiones del rectángulo de área máxima que se puede inscribir en la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
48. Un tanque de forma cilíndrica, circular recto, sin tapa debe contener 400 m^3 de material. El material de la base cuesta el doble que el de los lados. Hallar las dimensiones del tanque más económico
49. Un terreno tiene la forma de un triángulo rectángulo, de lados 80, 120 y 140 mts. Hallar las dimensiones del máximo rectángulo que se puede inscribir en el triángulo
50. Se ha de construir una ventana de forma rectangular, coronada con un semicírculo cuyo diámetro es igual al ancho del rectángulo. Si el perímetro de la ventana es de 16 mts. Hallar las dimensiones que permiten la entrada de la máxima cantidad de luz.
51. Si a y b son los lados de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es 1, hallar el máximo valor de $a + b$
52. Una ventana tiene la forma de un rectángulo coronado por un triángulo rectángulo isósceles. Probar que si el perímetro es de p mts, entonces la mayor cantidad de luz entra cuando los lados del rectángulo son iguales a los catetos del triángulo
53. Usar reglas de L'Hôpital para calcular:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{\sin x}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x)^{\ln(1 - \frac{1}{x})}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + x^{-2})}{\arctg(\frac{1}{x})}$$

$$j) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{(\pi - 2x)^{-2}}$$

$$m) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10^x}{x^{10}}$$

$$p) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg x - x}{8x^3}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\ln(\sin x)}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x \cos x}$$

$$k) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{\frac{1}{x^2}}$$

$$n) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \sin x - 1}{\ln(1 + y)}$$

$$q) \lim_{x \rightarrow \pi/2} (1 - \sin x)^{\cos x}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{x}{\ln x} \right)$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

$$i) \lim_{x \rightarrow 0} (\cotg x)^{\sin x}$$

$$l) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - \operatorname{cosec} x}{7 + \cotg x}$$

$$o) \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln\left(1 + \sin \frac{1}{x}\right)$$

$$r) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x-1) - x}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2x}}$$

54. Analizar si el teorema de Rolle y/o el TVM se pueden aplicar a las funciones dadas en el intervalo indicado:

$$a) f(x) = x + \frac{1}{x}, \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

$$(b) f(x) = \frac{x+1}{x-1}, [2, 3]$$

55. Estudiar, usando la derivada y graficar:

$$a) f(x) = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x}$$

$$b) f(x) = \ln\left(\frac{6x}{x^2 + 9}\right)$$

56. Hallar extremos absolutos de $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$ en $[-4, 0]$

57. Determinar si es aplicable Rolle, si lo es hallar el c tal que $f'(c) = 0$

$$a) f(x) = x^4 - 4x^3 + 10 \text{ en } [0, 4]$$

b) $f(x) = (x-3)(x+1)^2$ en $[-1, 3]$

c) $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x+2}$ en $[-1, 3]$

58. Determinar si es aplicable el TVM, si lo es hallar el valor de c .

a) $f(x) = \sqrt{x-2}$ en $[2, 6]$

c) $f(x) = \frac{x^2 + 4x}{x-7}$ en $[2, 6]$

b) $f(x) = 1 - x^{2/3}$ en $[0, 1]$

d) $f(x) = x(x-1)(x-2)$, en $[0, \frac{1}{2}]$

59. Usar el TVM para probar que

a) $\sin x \leq x, \quad \forall x \geq 0$

b) $e^x > x+1, \quad \forall x > 0$

60. Hallar intervalos de monotonía de las funciones

a) $f(x) = (x-1)^2(x+2)$

b) $\frac{x^3 - x^2 + 1}{x}$

61. Hallar los valores extremos de:

a) $f(x) = x - \ln x$

b) $\frac{x^5 - 5x}{5}$

62. Hallar a, b, c de modo que $f(x) = ax^2 + bx + c$ tenga un máximo relativo en $(5, 20)$ y pase por el punto $(2, 10)$

63. Analizar concavidad y puntos de inflexión de las curvas:

a) $f(x) = x^3 - 4x$

b) $x\sqrt{x+3}$

64. Hallar toda clase de asíntotas de las curvas:

a) $f(x) = \frac{5x^2}{(x-1)^2}$

b) $\frac{3x^2 - 1}{x-3}$

65. Graficar las siguientes curvas, con extremos, concavidad, asíntotas, etc

a) $\frac{2x}{x+1}$

c) $\frac{\ln|x|}{x^2}$

b) $f(x) = xe^{-\sqrt{x}}$

d) $f(x) = 5x^3 + 2x^2 - 4x + 7$

66. Hallar las dimensiones del rectángulo de área máxima que se puede inscribir en una semi circunferencia de radio r

67. Hallar la distancia más corta desde el punto $(\frac{9}{2}, 0)$ a la curva $y = \sqrt{x}$

68. Calcular el área del máximo rectángulo que tiene su base inferior sobre el eje x , y sus otros dos vértices en la curva $y = 12 - x^2$

69. El **costo** de un producto es de \$C. Si se vende a \$x se pueden vender un número de

$$n = \frac{a}{x-C} + b(100-x)$$

siendo a, b dos constantes positivas. Hallar el precio de venta de modo que el **beneficio** sea máximo.

70. Te encuentras parado en el techo de un edificio y lanzas una pelota verticalmente hacia arriba. Después de 2 segundos, la pelota pasa frente a ti en su trayectoria hacia abajo y 2 segundos después choca con el suelo. La ecuación que proporciona la altura en función del tiempo es

$$H(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + H_0$$

H_0 = altura inicial, v_0 = velocidad inicial.

- Hallar la velocidad inicial de la pelota.
 - Hallar la altura del edificio.
 - Hallar la velocidad de la pelota cuando pasa frente a ti en su trayectoria hacia abajo.
 - Hallar la velocidad de la pelota cuando choca con el suelo.
71. Probar que $(a-bx)e^{y/x} = x$ satisface $\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{y}{x} + be^{y/x}$
72. Averiguar tipo de continuidad y aprovechar de ver diferenciabilidad de

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 1 \\ -x^2 + 4x - 2, & 1 < x \leq 3 \\ 4 - x, & x > 3 \end{cases}$$

73. Hallar $\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{a/x}$

74. Hallar $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xf'(x)}{f(x)}$ si f verifican:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xf'''(x)}{f(x)} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f''(x) = \infty$$

75. Probar que $y = \tan 2x$ satisface la ecuación $\frac{d^2y}{dx^2} - 4y \frac{dy}{dx} = 0$

76. Hallar $f'(x)$, en cada caso, si se sabe que $f(x)$ satisface

a) $x^2 + [f(x)]^2 = R^2$

b) $3 + f(x) = \sin^2\left(\frac{x}{5}\right)$

c) $x^3 + x[f(x)]^3 + \sin(f(x)) = 0$

5. Pruebas resueltas y más



No me he podido resistir a los encantos de la morena. El límite entre ella y yo tiende a cero cada día más rápido (usé L'Hôpital), he verificado que el amor es continuo, que tiene un máximo absoluto y que puedo graficar un corazón usando la derivada. Descubrí además, que tengo una asíntota horizontal con la morena y por siempre, ya que saqué el límite tendiendo al infinito y me dió un número real.

Ahora se resuelven algunos problemas aplicados en pruebas de la asignatura. Se entrega su enunciado tal como fué presentado a esas generaciones. Muchos de los problema anteriores también formaron parte de pruebas, pero estas de ahora son las que me ha tocado participar directamente.

Prueba # 1 Introducción al Cálculo - 080494

1. Resolver los siguientes tres problemas:

a) Hallar los valores de x que satisfacen la desigualdad

$$| |2x - 3| - x | > x + 1$$

b) Hallar la cantidad de términos que tiene el desarrollo de $(x - y)^n$ si se sabe que uno de sus términos es $x^2 y^4$.

c) Hallar la relación que debe existir entre los números r y n para que los **coeficientes** de lugares $3r$ y $r + 2$ de $(1 + x)^{2n}$ sean iguales.

2. Demostrar la siguiente relación, válida $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \cdots + \frac{1}{(4n - 3)(4n + 1)} = \frac{n}{4n + 1}$$

3. Hallar el supremo, ínfimo, máximo y mínimo de los conjuntos

a) $A = \left\{ x \in \mathbb{R} / \frac{x+6}{x-2} - \frac{x+3}{x-10} \leq \frac{11}{x^2 - 12x + 20} \right\}$

b) $A = \left\{ x \in \mathbb{R} / \left| \frac{x-1}{x+3} \right| + |x+2| \leq 3 \right\}$

4. Demostrar que se satisface, para $x, y > 0$, $x \neq y$, la relación

$$\frac{2xy}{x+y} \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$$

Puntaje : $(6 \times 3) + (9) + (9+12) + (12) = 60$ puntos

Respuestas

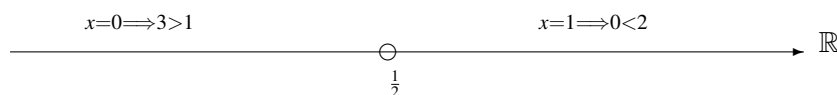
1) $|2x-3|-x > x+1$

Trabajamos con la tricotomía, es decir, vemos primero donde existe la igualdad.

$$|2x-3|-x = x+1 \implies \begin{cases} |2x-3|-x = x+1 \\ |2x-3|-x = -(x+1) \end{cases}$$

$$\text{i) } |2x-3|-x = x+1 \implies |2x-3| = 2x+1 \implies \begin{cases} 2x-3 = 2x+1 \\ 2x-3 = -2x-1 \end{cases}$$

De la ecuación $2x-3 = 2x+1$ se deduce que no hay solución, al cancelar $2x$ queda $-3 = 1$ ¡imposible! La otra ecuación, $2x-3 = -2x-1$, implica que $x = \frac{1}{2}$. Esto significa que sólo en $x = \frac{1}{2}$ se produce la igualdad. Esto puesto en la recta para analizar es



Todos los reemplazos han sido hechos en $|2x-3|-x > x+1$. Por lo tanto, el conjunto solución de esta parte es

$$S_1 = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$$

2i) $|2x-3|-x = -x-1 \implies |2x-3| = -1$ ¡¡jamás!!

Así, el conjunto solución de esta parte es $S_2 = \emptyset$. En consecuencia, el conjunto solución del problema es

$$S = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \emptyset = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$$

b) La cantidad de términos que contiene el desarrollo de $(x-y)^n$, si se sabe que uno de sus términos es x^2y^4

Más simple que esto no hay dijo Mackay. Del término x^2y^4 la suma de exponentes es $n = 6$, luego, la cantidad de términos que tiene este desarrollo es 7

c) Hallar la relación que debe existir entre los números r y n enteros positivos para que los **coeficientes** de lugares $3r$ y $r+2$ de $(1+x)^{2n}$ sean iguales.

En primer lugar veamos quienes son T_{3r} y T_{r+2} .

$$T_{3r} = \binom{2n}{3r-1} x^{3r-1}, \quad T_{r+2} = \binom{2n}{r+1} x^{r+2}$$

Igualando los coeficientes binomiales

$$T_{3r} = T_{r+2} \Rightarrow \binom{2n}{3r-1} = \binom{2n}{r+1}$$

Los coeficiente binomiales satisfacen la propiedad

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Luego,

$$\binom{2n}{3r-1} = \binom{2n}{r+1} \Leftrightarrow \binom{2n}{3r-1} = \binom{2n}{2n-3r+1} = \binom{2n}{r+1}$$

de donde, $2n - 3r + 1 = r + 1 \Rightarrow n = 2r$

2) Demostrar que es válido para todo número natural que

$$\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \cdots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}$$

El método de inducción consta de tres pasos. El primero es verificar que la propiedad se cumple para el primer natural que se indica, (no necesariamente el 1), el segundo es suponer que la propiedad se verifica hasta el número natural k , y finalmente el tercer paso, probar que se sigue verificando para el natural $k+1$, que es el siguiente de k .

$[n = 1]$:

En este caso, que se trata de una igualdad, lo único que hay que hacer es reemplazar n por 1, tanto en el miembro izquierdo como en el derecho y verificar que se cumple la igualdad. Pero “ojo”, en el miembro de la izquierda, el último sumando es el que genera todos los anteriores por simple reemplazo de n . Por ejemplo, con $n = 1$ se obtiene

$$\frac{1}{1 \cdot 5}$$

con $n = 2$ se obtienen

$$\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9}$$

y así sucesivamente, con $n = k$ se tiene

$$\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \cdots + \frac{1}{(4k-3)(4k+1)}$$

En consecuencia, para $n = 1$ el miembro izquierdo es $\frac{1}{5}$, y el de la derecha $\frac{1}{4 \cdot 1 + 1} = \frac{1}{5}$. Se tiene entonces igualdad para $n = 1$. Dado que se verifica para el primer natural seguimos con el procedimiento.

$[n = k]$: Se **supone verdadero** que

$$\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \cdots + \frac{1}{(4k-3)(4k+1)} = \frac{k}{4k+1}$$

$[n = k+1]$: Hay que **demostrar que**

$$\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \cdots + \frac{1}{(4k+1)(4k+5)} = \frac{k+1}{4k+5}$$

Observar que tanto en el caso $n = k$ como en el $n = k + 1$ se hizo un simple reemplazo. Para probar la validez en el paso $n = k + 1$ se debe necesariamente hacer uso del paso anterior, es decir, del supuesto para $n = k$. Jamás se olvida si hacemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(4k+1)(4k+5)} &= \left[\frac{1}{1 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(4k-3)(4k+1)} \right] + \frac{1}{(4k+1)(4k+5)} \\ &= \frac{k}{4k+1} + \frac{1}{(4k+1)(4k+5)} = \frac{k(4k+5) + 1}{(4k+1)(4k+5)} \\ &= \frac{(k+1)(4k+1)}{(4k+1)(4k+5)} = \frac{k+1}{4k+5} \end{aligned}$$

$$3(a) A = \left\{ x \in \mathbb{R} / \frac{x+6}{x-2} - \frac{x+3}{x-10} \leq \frac{11}{x^2-12x+20} \right\}$$

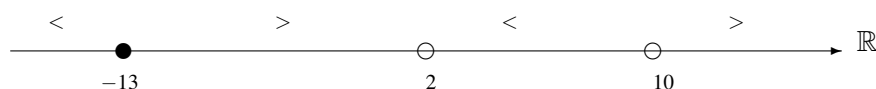
Como dice la canción “en la vida hay $\cdots \heartsuit \cdots$ que nunca pueden olvidarse”, eso es la tricotomía.

$$\frac{x+6}{x-2} - \frac{x+3}{x-10} = \frac{11}{x^2-12x+20} \implies \frac{5x+65}{(x-2)(x-10)} = 0$$

$$\implies \frac{x+13}{(x-2)(x-10)} = 0$$

$$\implies x = -13$$

no hay que olvidar que todo lo “prohibido” atrae, por eso se agregan $x = 2$, $x = 10$ a la recta real



Los signos $<$ y $>$ sobre la recta indican lo que sucede entre el primer y segundo miembro de la desigualdad dada. Se concluye que el conjunto solución es

$$S = (-\infty, -13] \cup (2, 10)$$

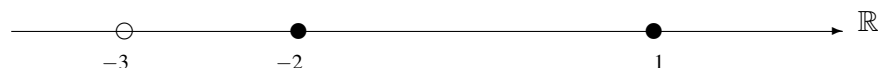
Se deduce, del conjunto solución, que no hay máximo, ni mínimo, ni ínfimo, y que el supremo es 10.

$$3(b) A = \left\{ x \in \mathbb{R} / \left| \frac{x-1}{x+3} \right| + |x+2| \leq 3 \right\}$$

¡no te mueras nunca tricotomía! Veamos la igualdad

$$\left| \frac{x-1}{x+3} \right| + |x+2| = 3$$

Hay varias alternativas para la igualdad, los puntos de “corte” o cambio de signo de los valores absolutos son, $x = -2$, $x = 1$, $x = -3$, este último punto no está permitido. La recta luce en la siguiente forma



Veamos que sucede en cada subintervalo de la recta

Caso $x \in (-\infty, -3)$:

En este caso, $|x-1| = -(x-1)$, $|x+3| = -(x+3)$, $|x+2| = -(x+2)$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \left| \frac{x-1}{x+3} \right| + |x+2| &= \iff \frac{-(x-1)}{-(x+3)} - (x+2) = 3 \\ &\iff \frac{x-1}{x+3} - x - 2 = 3 \\ &\iff x^2 + 7x + 16 = 0 \end{aligned}$$

El discriminante $b^2 - 4ac < 0$ nos dice que no hay solución real, por tanto, todo en este subintervalo es menor o mayor que cero. Un “inocente” punto tal como $x = -4$ reemplazado en la ecuación original dada nos dice que

$$\left| \frac{-4-1}{-4+3} \right| + |-4+2| = 7 > 3$$

lo que significa ¡¡no hay solución!!

Caso $x \in (-3, -2)$:

Ahora, $|x-1| = -(x-1)$, $|x+3| = x+3$, $|x+2| = -(x+2)$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \left| \frac{x-1}{x+3} \right| + |x+2| &= \iff \frac{-(x-1)}{x+3} - (x+2) = 3 \\ &\iff x^2 + 9x - 14 = 0 \end{aligned}$$

El discriminante $b^2 - 4ac > 0$ dice que hay solución real, pero ellas son $x \sim -0,5$ y $x \sim -8,5$. Como se encuentran fuera del intervalo de trabajo no sirven. Por tanto, no hay solución, y de nuevo todo es mayor o menor que 3. Para $x = -2,5$ tenemos

$$\left| \frac{-5/2-1}{-5/2+3} \right| + |-5/2+2| = 7,5 > 3$$

lo que significa ¡¡no hay solución!!

Caso $x \in (-2, 1)$:

Aquí, $|x-1| = -(x-1)$, $|x+3| = x+3$, $|x+2| = x+2$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \left| \frac{x-1}{x+3} \right| + |x+2| &= \iff \frac{-(x-1)}{x+3} + x + 2 = 3 \\ &\iff x^2 + x - 2 = 0 \\ &\iff (x+2)(x-1) = 0 \end{aligned}$$

De esta forma, $x = 1$ y $x = -2$, justo los extremos. Se tiene

$$\begin{aligned} x = -2 &\iff 3 = 3 && \text{solución} \\ x = 1 &\iff 3 = 3 && \text{solución} \end{aligned}$$

Veamos que pasa en el interior del intervalo. Elegimos $x = 0$

$$x = 0 \implies \left| \frac{0-1}{0+2} \right| + |0+2| = \frac{7}{3} < 3$$

lo que significa ¡¡solución!! En consecuencia, el conjunto solución es

$$S_1 = [-2, 1]$$

Caso $x > 1$:

Aquí, $|x-1| = x-1$, $|x+3| = x+3$, $|x+2| = x+2$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \left| \frac{x-1}{x+3} \right| + |x+2| &= \iff \frac{x-1}{x+3} + x+2 = 3 \\ &\iff x^2 + 3x - 4 = 0 \\ &\iff (x+4)(x-1) = 0 \end{aligned}$$

De esta forma, $x = 1$ y $x = -4$. El caso $x = 1$ ya fue analizado, además que no corresponde al intervalo. El caso $x = -4$ se trata de un punto que no pertenece al intervalo, ¡no se pesca! Esto nos está diciendo que aquí todo es mayor o menor que cero. Con $x = 2$ sabremos todo

$$x = 2 \implies \left| \frac{2-1}{2+3} \right| + |2+2| = \frac{10}{5} > 3$$

Finalmente, después de haber visto todos los casos llegamos a establecer que el conjunto solución de la desigualdad es

$$S_1 = [-2, 1]$$

Cualquier persona con buena vista se da cuenta que -2 es ínfimo y mínimo. Así como el 1 es supremo y máximo.

4) Para probar que $\frac{2xy}{x+y} \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$, se necesita trabajar dos desigualdades.

a) Probar que $\frac{2xy}{x+y} \leq \sqrt{xy}$

El método que se empleará, a algunos les simpatiza y a otros no. Queda al criterio del lector decidir si emplea este u otro. Trabajamos la propiedad a demostrar pensando que es verdadera, si lo es, entonces al desarrollarla, esto es, simplificando, factorizando, reduciéndola, se llega necesariamente a una expresión más simple y **verdadera**. ¡Este será nuestro punto de partida! para hacer la demostración, después es cosa de ir hacia atrás en lo encontrado y está listo ¡manos a la obra!

$$\begin{aligned} \frac{2xy}{x+y} \leq \sqrt{xy} &\implies 2xy \leq (x+y) \sqrt{xy}, \quad x > 0, y > 0 \\ &\implies 4x^2y^2 \leq (x+y)^2 xy \\ &\implies 4x^2y^2 \leq xy(x)^2 + 2x^2y^2 + xy(y)^2 \\ &\implies xy(x)^2 - 2x^2y^2 + xy(y)^2 \geq 0 \\ &\implies (x-y)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

de acuerdo a las hipótesis del problema, $x > 0, y > 0, x \neq y$. Luego, $(x - y)^2 \geq 0$ es una verdad más grande que una casa. Ahora ponemos cara de intelectual y procedemos a la demostración que les gusta a los profes.

Dado que $x > 0, y > 0, x \neq y$, entonces $(x - y)^2 \geq 0$. A partir de esto se tiene lo siguiente.

$$\begin{aligned}(x - y)^2 \geq 0 &\implies x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 / + 4xy \\ &\implies (x + y)^2 \geq 4xy / \cdot xy > 0 \\ &\implies (x + y)^2 \cdot xy \geq 4x^2y^2 / \sqrt{\cdot} \\ &\implies (x + y) \cdot \sqrt{xy} \geq 2xy / \\ &\implies \frac{2xy}{x + y} \leq \sqrt{xy}, x > 0, y > 0\end{aligned}$$

b) Probar que $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$

El camino es el mismo anterior, hallemos la aguja en el pajar.

$$\begin{aligned}\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} &\implies 2\sqrt{xy} \leq x + y \quad /(\cdot)^2 \\ &\implies 4xy \leq x^2 + 2xy + y^2 \\ &\implies x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \\ &\implies (x - y)^2 \geq 0 \quad \text{¡verdadero!}\end{aligned}$$

Ha coincidido que el punto de partida sea el mismo en ambos casos. La demostración formal es entonces.

$$\begin{aligned}(x - y)^2 \geq 0 &\implies x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 / + 4xy \\ &\implies x^2 + 2xy + y^2 \geq 4xy \\ &\implies (x + y)^2 \geq 4xy \\ &\implies (x + y) \geq 2\sqrt{xy} \\ &\implies \sqrt{xy} \leq \frac{x + y}{2}\end{aligned}$$

Prueba # 1 Introducción al Cálculo

2 de Abril de 1999

Los números reales planificaron la fiesta numérica del año. No cualquiera pudo asistir. La historia es la siguiente:

1. En la puerta del recinto se instaló el 0 (cero) por que es imparcial y neutro. Éste dejó entrar gratis a **todos** los $x \in \mathbb{R}$ que cumplieran la desigualdad

$$\frac{|x - 2|}{x + 3} - \frac{|x - 1|}{x - 3} > 0$$

Averiguar quienes entraron gratis.

2. A los irracionales le correspondió preparar un cóctel de bienvenida. Al más famoso de ellos, al $\sqrt{2}$, se le ocurrió la siguiente receta:

*En la licuadora vierta **todos** los números reales x que cumplen la condición que $x^2 < 9$. Aprete el botón para revolver y al cabo de un par de minutos saque de la licuadora **todos** los $x \in \mathbb{Z}$. Agregue a continuación, a lo que quedó en la licuadora, las soluciones de la ecuación $x^2 - 49 = 0$. Bata nuevamente y luego retire para poner todo sobre la recta real*
Identifique los componentes del cóctel

El e^π (el *espinita* del jefe) antes de que su jefe probara este cóctel exige respuestas a las siguientes interrogantes:

- ¿ Quién preparó el cóctel? (puntos frontera)
 - ¿ Qué contiene este cóctel? (puntos interiores)
 - ¿Cuál es el *sabor* o adherencia que tiene el cóctel?
 - ¿ Hay puntos de acumulación en este cóctel tan explosivo?
3. Una vez que fueran seleccionados los *más pulentos*, el locutor oficial, el 1, con su clásica frase *porrrrr que los reales tienennnn festival* dio inicio al show presentando al binomio internacional

$$\left(\frac{x^2}{3} - \frac{1}{x}\right)^6$$

- Identificar al vocalista (el término central)
 - Identificar al “colado” en la fiesta (el término independiente de x)
 - Identificar al *igualito* al “Rumpi” (coeficiente del término que tiene grado 3)
4. A los naturales les dieron la tarea de “inducir” al consumo. Para ello pusieron como *prueba del sabor* la siguiente fórmula, mezcla de varias frutas tropicales

$$P(n) : \frac{3}{4} + \frac{5}{36} + \cdots + \frac{2n+1}{[n(n+1)]^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$$

- Pruebe que este trago lo puede tomar el locutor (el 1)
- Suponga que los primeros k “catadores” dieron su visto bueno a esta mezcla. Pruebe que este es un trago sano y que lo pueden tomar todos los concurrentes

Puntaje: (15) + (15) + (15) + (15) = 60 puntos

Respuestas

- 1) Observando la expresión $\frac{|x-2|}{x+3} - \frac{|x-1|}{x-3} > 0$, uno se da cuenta que los puntos “críticos”, aquellos donde se produce algún conflicto, son, $x = -3$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$. Con esto la recta real queda dividida como muestra la figura



Veamos si en cada subintervalo existen puntos que hagan la igualdad

Intervalo $(-\infty, -3)$

Para $|x-2| = -(x-2)$, $|x-1| = -(x-1)$. Se tiene

$$\begin{aligned}\frac{|x-2|}{x+3} - \frac{|x-1|}{x-3} = 0 &\implies \frac{-(x-2)}{x+3} - \frac{-(x-1)}{x-3} = 0 \\ &\implies \frac{7x-9}{(x+3)(x-3)} = 0 \\ &\implies x = \frac{9}{7}\end{aligned}$$

Como $x = \frac{9}{7} \notin (-\infty, -3)$, entonces no hay puntos que hagan igualdad. En consecuencia, en este intervalo, la diferencia es mayor o menor que cero. Como ya sabemos un sólo valor, por ejemplo $x = -4$, reemplazado en $\frac{|x-2|}{x+3} - \frac{|x-1|}{x-3}$, nos entrega la respuesta. En efecto,

$$\frac{|-4-2|}{-4+3} - \frac{|-4-1|}{-4-3} = -\frac{37}{7} < 0$$

Por tanto, en este intervalo la desigualdad no tiene solución.

Intervalo $(-3, 1)$

$|x-2| = -(x-2)$, $|x-1| = -(x-1)$. Se tiene

$$\begin{aligned}\frac{|x-2|}{x+3} - \frac{|x-1|}{x-3} = 0 &\implies \frac{-(x-2)}{x+3} - \frac{-(x-1)}{x-3} = 0 \\ &\implies \frac{7x-9}{(x+3)(x-3)} = 0 \\ &\implies x = \frac{9}{7}\end{aligned}$$

Como $x = \frac{9}{7} \notin (-3, 1)$, entonces no hay puntos que hagan igualdad. En consecuencia, en este intervalo, la diferencia es mayor o menor que cero. Como ya sabemos un sólo valor, por ejemplo $x = 0$, reemplazado en $\frac{|x-2|}{x+3} - \frac{|x-1|}{x-3}$, entrega la respuesta.

$$\frac{|0-2|}{0+3} - \frac{|0-1|}{0-3} = 1 > 0$$

Por tanto, en este intervalo la desigualdad tiene solución. Aprovechemos de ver que sucede en los extremos del intervalo $(-3, 1)$. El punto $x = -3$ está prohibido. para $x = 1$ se tiene

$$\frac{|1-2|}{1+3} - \frac{|1-1|}{1-3} = \frac{1}{4} > 0$$

Así, el $x = 1$ es solución. Tenemos entonces

$$S_1 = (-3, 1]$$

Intervalo $(1, 2)$

Si $|x-2| = -(x-2)$, $|x-1| = x-1$, entonces

$$\begin{aligned}\frac{|x-2|}{x+3} - \frac{|x-1|}{x-3} = 0 &\implies \frac{-(x-2)}{x+3} - \frac{(x-1)}{x-3} = 0 \\ &\implies \frac{3x-3}{(x+3)(x-3)} = 0\end{aligned}$$

Se deduce que $x = 1$ el extremo del intervalo, pero esto ya fué visto y sabemos que es solución. Para el punto $x = 2$ se tiene

$$\frac{|2-2|}{2+3} - \frac{|2-1|}{2-3} = 1 > 0$$

Así, el $x = 2$ es solución. Veamos que pasa en todo el intervalo con $x = \frac{3}{2}$.

$$\frac{|x-2|}{x+3} - \frac{|x-1|}{x-3} \implies \frac{|3/2-2|}{3/2+3} - \frac{|3/2-1|}{3/2-3} = \frac{4}{9} > 0$$

De este modo, hemos encontrado solución en este intervalo, ella es

$$S_2 = [1, 2]$$

Intervalo $(2, 3)$

$|x-2| = x-2$, $|x-1| = x-1$. Luego

$$\frac{|x-2|}{x+3} - \frac{|x-1|}{x-3} = 0 \implies \frac{x-2}{x+3} - \frac{x-1}{x-3} = 0 \implies \frac{-3x+9}{(x+3)(x-3)} = 0$$

Se deduce que $x = 3$, valor que es imposible por estar prohibido. Veamos que pasa en el intervalo con $x = \frac{5}{2}$.

$$\frac{|x-2|}{x+3} - \frac{|x-1|}{x-3} \implies \frac{|5/2-2|}{5/2+3} - \frac{|5/2-1|}{5/2-3} = \frac{34}{11} > 0$$

De este modo, hemos encontrado solución en este intervalo, ella es

$$S_3 = [2, 3)$$

Intervalo $(3, \infty)$

$|x-2| = x-2$, $|x-1| = x-1$. Luego

$$\frac{|x-2|}{x+3} - \frac{|x-1|}{x-3} = 0 \implies \frac{x-2}{x+3} - \frac{x-1}{x-3} = 0 \implies \frac{-7x+93}{(x+3)(x-3)} = 0$$

Se deduce que $x = \frac{7}{9}$ no tiene nada que hacer aquí porque no pertenece al intervalo. Para el intervalo, con $x = 4$, es suficiente.

$$\frac{|x-2|}{x+3} - \frac{|x-1|}{x-3} \implies \frac{|4-2|}{4+3} - \frac{|4-1|}{4-3} = -\frac{19}{3} < 0$$

De este modo, no hay solución. Se concluye finalmente que el conjunto solución de la desigualdad original es

$$S = (-3, 1] \cup [1, 2] \cup [2, 3) = (-3, 3)$$

2) La primera condición, $x^2 < 9$ significa que $-3 < x < 3$. Si le sacamos los enteros, estamos sacando el conjunto finito $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Ahora, si agregamos al conjunto que va quedando las soluciones de $x^2 = 49$, entonces el conjunto para análisis es

$$A = (-3, 3) \cup \{-2, -1, 0, 1, 2\} \cup \{-7, 7\}$$

a) $Fr(A) = \{-3, 3, -2, -1, 0, 1, 2, -7, 7\}$

b) $A^\circ = (-3, 3)$

c) $\bar{A} = [-3, 3] \cup \{-2, -1, 0, 1, 2, -7, 7\}$

d) $A' = [-3, 3]$

3) En el binomio es $\left(\frac{x^2}{3} - \frac{1}{x}\right)^6$, el término central es el cuarto pues hay 7 términos.

$$T_3 = \binom{6}{2} \left(\frac{x^2}{3}\right)^4 \left(-\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{5}{27} x^4$$

b) Para hallar el término independiente de x , debemos hacer que el exponente de la x sea 0 (cero). Se tiene

$$T_k = \binom{6}{k-1} \left(\frac{x^2}{3}\right)^{6-k+1} \left(-\frac{1}{x}\right)^{k-1} = A \cdot x^{15-3k}$$

se obtiene que $k = 5$. Es decir, el T_5 no contiene x

c) Para hallar el de grado 3, se tiene que tener x con exponente 3

$$T_k = \binom{6}{k-1} \left(\frac{x^2}{3}\right)^{6-k+1} \left(-\frac{1}{x}\right)^{k-1} = A \cdot x^{15-3k}$$

se tiene que $15 - 3k = 3$, de donde $k = 4$. Es decir, el T_4 contiene x^3

¡calma'o loco, aún no termina la fiesta! Nos queda el último problema.

4) Teniendo a la vista el hermoso cóctel

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{36} + \cdots + \frac{2n+1}{[n(n+1)]^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$$

veamos si el vocalista lo puede probar

$$\underline{n=1/} \quad \frac{3}{4} + = 1 - \frac{1}{2^2} = \frac{3}{4}, \quad \text{¡perfesto!}$$

$$\underline{n=k/} \quad \frac{3}{4} + \frac{5}{36} + \cdots + \frac{2k+1}{[k(k+1)]^2} = 1 - \frac{1}{(k+1)^2}, \quad \text{supuesto}$$

$$\underline{n=k+1/} \quad \frac{3}{4} + \frac{5}{36} + \cdots + \frac{2k+3}{[(k+1)(k+2)]^2} = 1 - \frac{1}{(k+2)^2}, \quad \text{por demostrar}$$

Tenemos los siguiente:

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{36} + \cdots + \frac{2k+3}{[(k+1)(k+2)]^2} = \left[\frac{3}{4} + \frac{5}{36} + \cdots + \frac{2k+1}{[k(k+1)]^2} \right] + \frac{2k+3}{[(k+1)(k+2)]^2}$$

Ahora apliquemos el supuesto o hipótesis

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{36} + \cdots + \frac{2k+3}{[(k+1)(k+2)]^2} = 1 - \frac{1}{(k+1)^2} + \frac{2k+3}{[(k+1)(k+2)]^2}$$

Al sumar, en el segundo miembro queda

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{(k+1)^2} + \frac{2k+3}{[(k+1)(k+2)]^2} &= 1 - \frac{1}{(k+1)^2} \left[1 - \frac{2k+3}{(k+2)^2} \right] \\ &= 1 - \frac{(k+2)^2 - 2k - 3}{(k+1)^2(k+2)^2} = 1 - \frac{k^2 + 2k + 1}{(k+1)^2(k+2)^2} \\ &= 1 - \frac{1}{(k+2)^2} \end{aligned}$$

Esto prueba que el cóctel era pura agua y que lo podía tomar cualquiera de los asistentes.



Prueba # 1: Introducción al Cálculo

Carreras: Ingenierías

fecha: 080598

Responder las preguntas en el cuadernillo adjunto.

1. Ingresar a los archivos secretos en el computador de su profesor de Cálculo requiere de gran astucia y habilidad. El computador de su *profe* tiene doble código de seguridad dado por las inecuaciones

$$\frac{|x-1|+x+1}{x+2} \geq 4 \quad y \quad \frac{1}{x+1} \leq \frac{2}{3x-1}$$

- a) Si halla el conjunto solución de una de ellas Ud. se encuentra ya en el computador del Departamento de Matemática
 - b) Si quiere continuar determine si ese conjunto solución tiene máximo o mínimo.
 - c) Resuelva ahora el segundo código de seguridad. Si encuentra el conjunto solución de este segundo código, entonces llegó al computador del *profe*.
 - d) Hallando supremo e ínfimo de este segundo código Ud ha logrado su objetivo ¡¡felicitaciones!! tiene buen futuro grandioso como *hacker*.
2. Hallar la ecuación de la parábola que pasa por los puntos $(7,3)$ y $(-1,-5)$, cuyo foco está en $(11,0)$ y con eje paralelo al eje de las y
 3. Considerar las rectas de ecuaciones $2x+y-1=0$, $x-2y-3=0$
 - a) Hallar la ecuación de la circunferencia tangente a ambas rectas y cuyo centro se encuentra sobre el eje x

- b) Hallar la ecuación de la hipérbola cuyo centro es el punto de intersección de las rectas, que tiene eje real paralelo al eje x , tiene uno de sus vértices sobre el eje y . Además, uno de sus focos está en $(-2, -1)$
4. La suma de las distancias de un punto P de una elipse a los focos es 16 y la distancia entre los focos es 6. Hallar la excentricidad. ($e = c/a$)

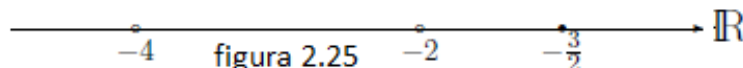
Puntaje: $(8+2+8+2) + (8) + (6) + (8) = 42$ puntos

Respuestas

Resolvemos la igualdad para el primer código.

$$\begin{aligned} \frac{|x-1|+x+1}{x+2} = 4 &\implies |x-1|+x+1 = 4x+8 \\ &\implies |x-1| = 3x+7 \\ &\implies \begin{cases} x-1 = 3x+7 \\ x-1 = -(3x+7) \end{cases} \\ &\implies x = -4 \vee x = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

La recta real queda dividida como



Sea $A = \frac{|x-1|+x+1}{x+2}$, entonces con $x = -5$ vemos que $A < 0$, lo que implica que no hay solución en $(-\infty, -4)$. El punto extremo $x = -4$ tampoco verifica la desigualdad. En el intervalo $(-4, -2)$ tomando $x = -3$ se tiene $A < 0$, con lo cual tampoco hay solución en este intervalo. En $(-2, -\frac{3}{2})$ elegimos $x = -\frac{7}{4}$ para tener que $A > 4$, lo que significa que en este intervalo hay solución. En el extremo $x = -\frac{3}{2}$ tiene lugar la igualdad, es decir, $A = 4$, con lo que es solución. Por último, en el intervalo $(-\frac{3}{2}, \infty)$ el valor $x = 0$ nos dice que no hay solución. En consecuencia, el conjunto solución es

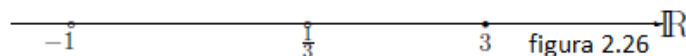
$$S = \left(-2, -\frac{3}{2}\right]$$

Este conjunto no tiene mínimo, pero tiene máximo que es $x = -\frac{3}{2}$

Resolvemos ahora el segundo código

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+1} = \frac{2}{3x-1} &\implies \frac{1}{x+1} - \frac{2}{3x-1} = 0 \implies \frac{x-3}{(x+1)(3x-1)} = 0 \\ &\implies x = 3 \end{aligned}$$

La recta real, con $x = 3$, $x = -1$, $x = \frac{1}{3}$, queda



Si $A = \frac{x-3}{(x+1)(3x-1)}$, entonces con $x = -2$ es $A < 0$, lo que implica solución en $(-\infty, -1)$. En el intervalo $(-1, \frac{1}{3})$ tomando $x = 0$ se tiene $A < 0$, con lo cual no hay solución en este intervalo. En $(\frac{1}{3}, 3)$ elegimos $x = 1$ para tener $A < 4$, lo que significa que en este intervalo hay solución. En el extremo

$x = 3$ tiene lugar la igualdad, es decir, $A = 0$, con lo que es solución. Por último, en el intervalo $(3, \infty)$ el valor $x = 4$ nos dice que $A > 0$ y no hay solución. En consecuencia, el conjunto solución es

$$S = (-\infty, -1) \cup \left(\frac{1}{3}, 3\right]$$

Este conjunto no tiene mínimo, pero su máximo es $x = 3$

2) La figura ilustra la situación, de la cual se deduce que la parábola se abre hacia abajo, con lo que la ecuación es de la forma

$$(x - h)^2 = -4a(y - k)$$

Es claro que $h = 11$. Usemos los datos de la hipótesis

pasa por $(7, 3)$, entonces $(7 - 11)^2 = -4a(3 - k)$

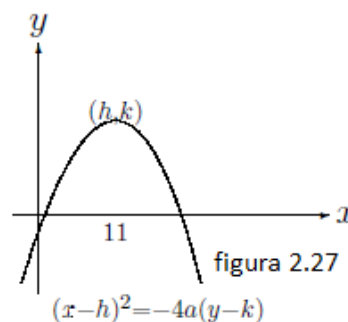
pasa por $(-1, -5)$, entonces $(-1 - 11)^2 = -4a(-5 - k)$

Al dividir miembro a miembro estas dos últimas igualdades, se cancelan las $-4a$, quedando

$$9 = \frac{5 + k}{k - 3} \Rightarrow k = 4$$

al reemplazar este valor de k en cualesquiera de las dos igualdades, se tiene que $a = 4$. Esto coincide con el hecho conocido que la distancia entre foco y vértice es a . Así, la ecuación buscada es

$$(x - 11)^2 = -16(y - 4)$$



3a) La ecuación general de la circunferencia es $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$. Dado que el centro se encuentra sobre el eje x , entonces $k = 0$, de modo que la ecuación se reduce a

$$(x - h)^2 + y^2 = r^2$$

Si el centro es $(h, k) = (h, 0)$, entonces la distancia a cada recta es el radio. Se tiene

$$d[(h, 0), 2x + y - 1 = 0] = \frac{|2h + 0 - 1|}{\sqrt{5}} = r$$

$$d[(h, 0), x - 2y - 3 = 0] = \frac{|h - 0 - 3|}{\sqrt{5}} = r$$

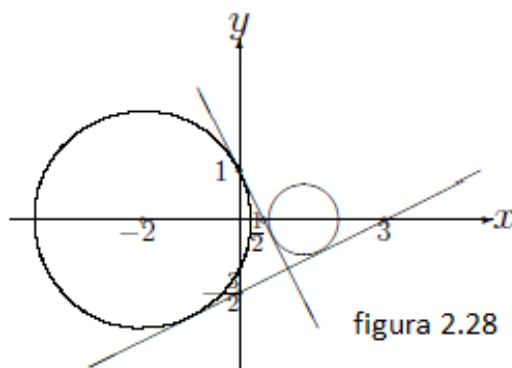
al igualar queda

$$\frac{2h - 1}{\sqrt{5}} = \pm \frac{h - 3}{\sqrt{5}} \Rightarrow h = -2 \vee h = \frac{4}{3}$$

Con los valores de h se encuentran dos valores de r , en efecto,

$$h = -2 \Rightarrow r = \sqrt{5}, \quad h = \frac{4}{3} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

Así, tenemos dos soluciones. Una es $(x+2)^2 + y^2 = 5$, y la otra $(x-\frac{4}{3})^2 + y^2 = \frac{5}{9}$. La figura muestra ambas soluciones.



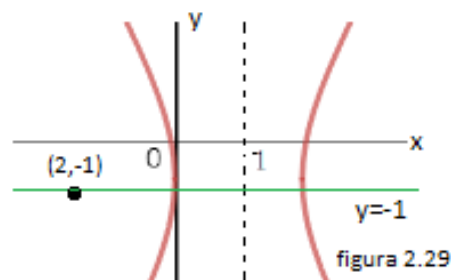
3b) La intersección de ambas rectas es el punto $(1, -1)$. Esto sale después de resolver el sistema formado por las ecuaciones de ambas rectas.

El eje de simetría de la parábola es la recta $y = -1$. Como el eje real es paralelo al eje de las x , entonces la ecuación es de la forma

$$\frac{(x-1)^2}{a^2} - \frac{(y+1)^2}{b^2} = 1$$

La distancia entre centro y vértice es $a = 1$, como $c = 3$, entonces $c^2 - a^2 = b^2 = 8$. Con esto la ecuación de la hipérbola es

$$\frac{(x-1)^2}{1} - \frac{(y+1)^2}{8} = 1$$



La figura 2.29 muestra la hipérbola y la situación geométrica.

4) Por definición de elipse la suma de las distancias de un punto P a los focos es $2a$. Luego, $2a = 16 \Rightarrow a = 8$. Además, la distancia entre los focos de la elipse es $2c$, se sigue que $2c = 6 \Rightarrow c = 3$. En consecuencia, la excentricidad es $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{8}$



Prueba # 1

Introducción al Cálculo

Carreras: Ingenierías

fecha: 220497

Responder las preguntas en el cuadernillo adjunto

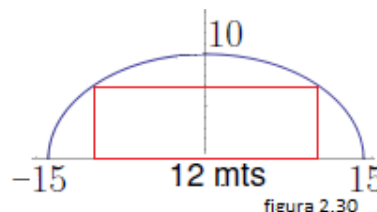
1. Los números reales tienen planificada una gran fiesta. El requisito para asistir es que

$$\frac{x}{x+1} - \frac{2-x}{1-x} \geq 1$$

Encontrar **todos** los reales x que pueden asistir a la fiesta. Determinar quien se encarga del bar (el ínfimo) y quien pone la música (el supremo). ¿Quién bailó con el cero?

- Determinar la ecuación de la circunferencia cuyo centro se encuentra sobre la recta $y = 2x + 4$, y que es tangente a las rectas $x = 3$ y $x = 7$.
- Identificar las siguientes ecuaciones, indicando elementos tales como, centro, vértice, radio, foco, directriz, asíntotas (cuando corresponda):
 - $4x^2 + y^2 - 8x + 4y + 7 = 0$
 - $9x^2 - 4y^2 - 54x - 16y + 29 = 0$
 - $x^2 - 3x + 2y - 4 = 0$
- Un punto se mueve de forma que el producto de las pendientes que lo unen con $(-a, 0)$ y $(a, 0)$ es constante e igual a k
 - Demostrar que la ecuación del lugar geométrico es $y^2 - kx^2 = -ka^2$.
 - Analizar los casos: $k > 0$, $-1 < k < 0$

5. El frente de un galpón tiene la forma de un arco semi elíptico, con 30 mts de ancho en la base y 10 mts de alto en la parte central. Determinar la máxima altura del portón de 12 mts de ancho que se puede instalar en el frente del galpón.



Puntaje: $(12) + (10) + (15) + (5+8) + (10) = 60$ puntos

Respuestas

- 1) El conjunto solución de $\frac{x}{x+1} - \frac{2-x}{1-x} \geq 1$ lo hallamos por tricotomía:

$$\frac{x}{x+1} - \frac{2-x}{1-x} = 1 \implies \frac{-2}{1-x^2} = 1 \implies \frac{x^2 - 3}{1-x^2} = 0$$

Los puntos críticos son, $x = \sqrt{3}$, $x = -\sqrt{3}$, $x = 1$, $x = -1$. La recta real queda como en la figura

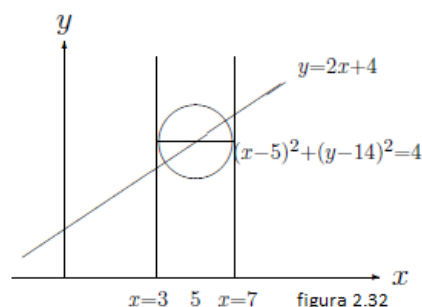


Veamos que sucede en estos subintervalos; con $x = -2$ la desigualdad original es menor que 1, por lo que aquí en $(-\infty, -\sqrt{3})$ no hay solución. El extremo $x = \sqrt{3}$ produce la igualdad, luego es solución. En el intervalo $(-\sqrt{3}, -1)$ el valor $x = -1,5$ nos dice que **hay solución**. El valor $x = 0$ en el intervalo $(-1, 1)$ establece que no hay solución en este intervalo. Con $x = 1,5$ se verifica que hay solución en $(1, \sqrt{3})$. Finalmente, con $x = 2$ se prueba que no hay solución en $(\sqrt{3}, 1)$. En consecuencia, el conjunto solución es

$$S = [-\sqrt{3}, -1) \cup (1, \sqrt{3}]$$

Las respuestas a las interrogantes planteadas son: El $-\sqrt{3}$ está encargado del bar (cuidado con él, es ¡muy irracional!). El Dj de la música es el $\sqrt{3}$. Respecto del 0, obvio, no estaba en la fiesta, con quien iba a bailar.

2) El centro de la circunferencia debe estar sobre la recta $y = 2x + 4$, y debe ser tangente con las rectas $x = 3$ y $x = 7$. Mira la figura 2.32.



3a) La ecuación $4x^2 + y^2 - 8x + 4y + 7 = 0$ es una **elipse**. Complete los cuadrados.

$$4x^2 + y^2 - 8x + 4y + 7 = 0 \implies 4(x-1)^2 + (y+2)^2 = 1 \implies \frac{(x-1)^2}{\frac{1}{4}} + \frac{(y+2)^2}{1} = 1$$

de esta forma, se trata de una elipse de centro $(1, -2)$, focos en los puntos $(1, -2 + \frac{\sqrt{3}}{2})$ y $(1, -2 - \frac{\sqrt{3}}{2})$, los vértices $(1, -1)$ y $(1, -3)$. Figura 2.33(a)

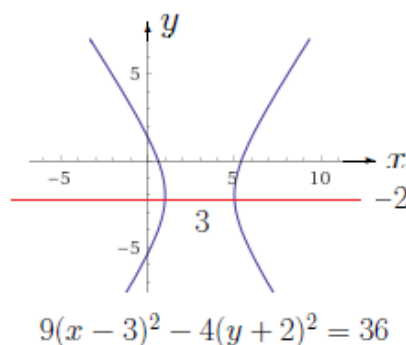
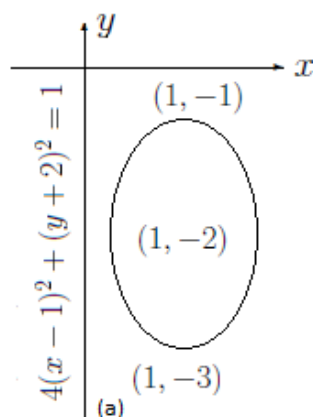


figura 2.33

3b) La ecuación $9x^2 - 4y^2 - 54x - 16y + 29 = 0$ es una **hipérbola**, (figura 2.33(b)).

$$9(x-3)^2 - 4(y+2)^2 = 36 \implies \frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1$$

Se trata de una hipérbola de centro $(3, -2)$, focos en $(3 + \sqrt{13}, -2)$ y $(3 - \sqrt{13}, -2)$, los vértices $(5, -2)$ y $(1, -2)$. Las asíntotas son $y - 2 = \pm \frac{3}{2}(x - 3)$

3c) La ecuación $x^2 - 3x + 2y - 4 = 0$ es una **parábola**. Vemos su forma normal

$$\begin{aligned} x^2 - 3x + 2 - 4 &= 0 \implies (x - \frac{3}{2})^2 = -2y + \frac{25}{4} \\ &\implies (x - \frac{3}{2})^2 = -2(y - \frac{25}{8}) \end{aligned}$$

es una parábola que se abre hacia abajo, su vértice es $(\frac{3}{2}, \frac{25}{8})$, foco en $(\frac{3}{2}, \frac{21}{8})$. La directriz de ecuación $y = \frac{25}{8} + \frac{1}{2} = \frac{29}{8}$.

4) Sea (x, y) el punto que hace eso. Calculemos las pendientes al punto $(-a, 0)$ y $(a, 0)$.

$$\begin{aligned} \text{pendiente } (x, y) - (-a, 0) &= \frac{-y}{-a-x}, & \text{pendiente } (x, y) - (a, 0) &= \frac{-y}{a-x} \\ \text{producto de pendientes} &= \frac{-y}{-a-x} \cdot \frac{-y}{a-x} = k \end{aligned}$$

al reducir se obtiene la ecuación

$$y^2 - kx^2 = -ka^2$$

Si $k > 0$ representa una hipérbola. En tal caso la ecuación se expresa en la forma

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{ka^2} = 1$$

Si $-1 < k < 0$, entonces la ecuación es una elipse (verificar con $k = \frac{1}{2}$). Su ecuación es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2/2} = 1$$

5) Si el ancho es 30, entonces $a = 15$. Del alto 10 se deduce que $b = 10$. Con ello tenemos la elipse

$$\frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{100} = 1$$

con $x = 6$ se obtiene que $y = \frac{2}{3} \sqrt{189} \sim 9, 16$. Esta es la máxima altura del portón.



Prueba # 2

Introducción al Cálculo- 200597

1. Dadas las funciones f y g por medio de las expresiones

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 9}, \quad g(x) = \log_3(1 - x)$$

- a) Determinar los dominios de ambas funciones
 - b) Hallar $(g \circ f)$, indicando su dominio.
 - c) Restringir dominio y/o recorrido de la función f para que exista la función inversa f^{-1} .
Hallar la inversa y graficar f y f^{-1}
 - d) Graficar la función $g \circ f$.
2. Resolver, para valores de $x \in [0, 2\pi]$, la ecuación $\operatorname{tg}^2 x - \cos 2x - 1 = 0$
3. Hallar el valor de la expresión $\cos \left(\arcsen \frac{4}{5} + \operatorname{arctg} \frac{3}{4} \right)$

4. Un grupo de alumnos de la UFRO viene de celebrar su primera nota de Matemática. Se encuentran ubicados en un punto A de las calles Caupolicán y San Martín. De pronto, entre ¡atónitos! y ¡perplejos! observan un objeto volador no identificado (OVNI) sobre el cielo de Temuco. El OVNI proyecta un rayo de luz sobre un punto C ubicado en la calle Caupolicán hacia el sur. Con ese espíritu creador y ganador que los caracteriza deciden determinar la altura h a la que se encuentra dicho objeto sobre el punto C . Para ello miden el ángulo de elevación de A al OVNI (α). Caminan en línea recta hacia C una distancia de k metros, deteniéndose en un punto B . Miden el ángulo de elevación de B al OVNI (β). Su profesor de Cálculo confía en que Ud. no tendrá ningún drama para hallar una fórmula correcta para la altura del OVNI.
5. Probar que en todo triángulo ABC es válida la relación

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\sin \frac{1}{2}C}$$

Puntaje: $(4+6+6+4) + (10) + (8) + (12) + (10) = 60$ puntos

Respuestas

- 1a) El dominio de la función $f(x) = \frac{x^2}{x^2-9}$ es el conjunto de todos los números reales menos aquellos elementos que anulan el denominador. Esto es

$$\text{dom}(f) = \mathbb{R} - \{\pm 3\}$$

El dominio de cualquier función logarítmica se determina considerando que su argumento debe ser necesariamente positivo. En este caso, el dominio de $g(x) = \log_3(1-x)$, requiere que $1-x > 0$, de donde $x < 1$. Luego,

$$\text{dom}(g) = \{x \in \mathbb{R} / x < 1\}$$

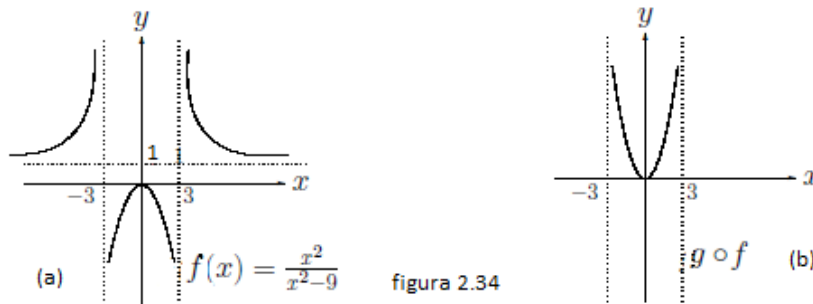
- 1b) El cálculo de la compuesta $g \circ f$ es como sigue.

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g\left(\frac{x^2}{x^2-9}\right) \\ &= \log_3\left(1 - \frac{x^2}{x^2-9}\right) = \log_3\left(\frac{9}{9-x^2}\right) \end{aligned}$$

su dominio es

$$\text{dom}(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} / \frac{9}{9-x^2} > 0\} = \{x \in \mathbb{R} / -3 < x < 3\}$$

- 1c) La gráfica de la función f la muestra la figura 2.34



Es claro que hay que restringir para que exista inversa. Las alternativas son:

- 1) $f : (3, \infty) \rightarrow (1, \infty)$
- 2) $f : (-\infty, -3) \rightarrow (1, \infty)$
- 3) $f : [0, 3) \rightarrow (-\infty, 0)$
- 4) $f : (-3, 0] \rightarrow (-\infty, 0)$
- 5) $f : [0, 3) \cup (3, \infty) \rightarrow (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$

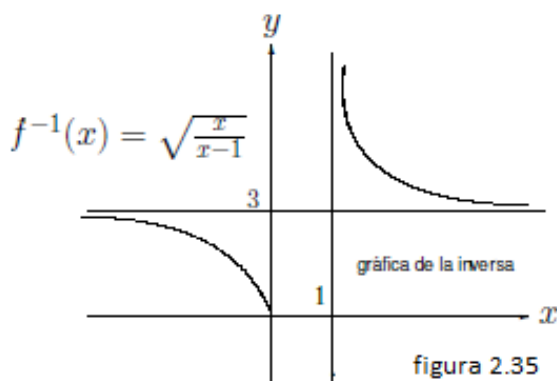
Veamos cual es la inversa.

$$\frac{x^2}{x^2 - 9} = z \implies x^2 = \frac{9z}{z - 1} \implies x = 3\sqrt{\frac{z}{z - 1}}$$

se concluye que la inversa es

$$f^{-1}(x) = 3\sqrt{\frac{x}{x - 1}}, \quad x \neq 1$$

la figura siguiente muestra la inversa



2) Las ecuaciones trigonométricas son válidas para algunos valores del ángulo.

$$\operatorname{tg}^2 x - \cos 2x - 1 = 0 \implies \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} - (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) = 1$$

se sigue que

$$\operatorname{sen}^2 x - (1 - 2 \operatorname{sen}^2 x) \cos^2 x = \cos^2 x$$

Al reducir queda la ecuación

$$2 \operatorname{sen}^4 x - 5 \operatorname{sen}^2 x + 2 = 0$$

ecuación que haciendo $z = \operatorname{sen}^2 x$ se transforma en

$$2z^2 - 5z + 2 = 0$$

Ecuación cuadrática que al resolverla entrega:

$$\operatorname{sen}^2 x = z = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4}$$

Que equivale a

$$\operatorname{sen}^2 x = 2 \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}$$

La primera ecuación no tiene solución. La segunda proporciona cuatro valores:

$$x = \{45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ\}$$

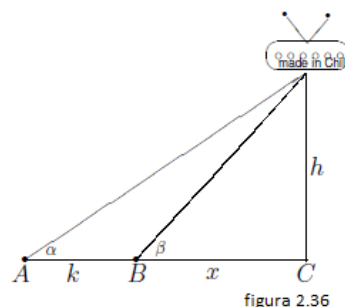
3) Como se trata de funciones inversas, la forma de trabajo consiste en resolver por separado cada expresión, y luego evaluar lo que se pide. Tenemos:

$$\begin{aligned} \arcsen \frac{4}{5} = \alpha &\Rightarrow \sen \alpha = \frac{4}{5}, \quad \cos \alpha = \frac{3}{5} \\ \arctg \frac{3}{4} = \beta &\Rightarrow \tg \beta = \frac{3}{4}, \quad \sen \beta = \frac{3}{5}, \quad \cos \beta = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} \cos \left(\arcsen \frac{4}{5} + \arctg \frac{3}{4} \right) &= \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sen \alpha \cdot \sen \beta \\ &= \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} - \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} = 0 \end{aligned}$$

4) Una anécdota de esta prueba, estando en la prueba un alumno que no sabía como resolver este problema le dice a su profe que él no es de Temuco y que no sabe donde queda Caupolicán con San Martín, que le dé una pista. ¡La risotada fue grandiosa! La figura 2.36 ilustra la situación “vivida” por esos alumnos.



Para hallar h trabajemos las tangentes. Tenemos

$$\tg \alpha = \frac{h}{k+x} \Rightarrow h = (k+x) \tg \alpha$$

$$\tg \beta = \frac{h}{x} \Rightarrow h = x \tg \beta$$

Al igualar estos valores de h obtenemos

$$(k+x) \tg \alpha = x \tg \beta \Rightarrow x = \frac{k \tg \alpha}{\tg \beta - \tg \alpha}$$

Ahora se reemplaza este valor de x en $\tg \beta = \frac{h}{x}$ para tener

$$h = \frac{k \tg \alpha}{\tg \beta - \tg \alpha} \cdot \tg \beta = \frac{k \tg \alpha \tg \beta}{\tg \beta - \tg \alpha} = \frac{k}{\cotg \alpha - \cotg \beta}$$

5) Esta clase de problemas conlleva el teorema del seno o el teorema del coseno.

$$\begin{aligned}
\frac{a+b}{c} &= \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} C} + \frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} C} = \frac{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} C} \\
&= \frac{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(A+B) \cdot \cos \frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{sen} 2 \cdot \frac{C}{2}} \\
&= \frac{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(A+B) \cdot \cos \frac{1}{2}(A-B)}{2 \operatorname{sen} \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}} \\
&= \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(A+B) \cdot \cos \frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{sen} \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}} \\
&= \frac{\cos \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{sen} \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}}, \quad (*) \\
&= \frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{sen} \frac{C}{2}}
\end{aligned}$$

En (*) se usó que, si $A+B+C = \pi$, entonces $A+B = \pi - C$. De esto, $\frac{A+B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$. Luego,

$$\operatorname{sen} \left(\frac{A+B}{2} \right) = \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2} \right) = \cos \frac{C}{2}$$



Prueba # 2

Introducción Cálculo - 15052000

Una redacción clara y precisa facilita la corrección

1. Demuestre que $\frac{\cos 50^\circ - \cos 40^\circ}{\cos 25^\circ - \cos 35^\circ} = -\sqrt{2}$
2. Identificar cada ecuación cuadrática siguiente, graficarlas e identificar elementos notables, tales como; radio, vértice, foco, centro.

$$\text{a) } 9x^2 + 4y^2 - 18x - 16y - 11 = 0 \quad \text{b) } y^2 + 2ay - 12x + a^2 - 12b = 0 \quad \text{c) } 4x^2 - 4y^2 + 20x - 16y + 25 = 0$$

$$3. \text{ Considere las funciones } f(x) = \begin{cases} x+1, & x \geq 1 \\ 2x^2, & x < 1 \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} x+2, & x < 2 \\ x^2, & x \geq 2 \end{cases}$$

a) Graficar la funciones f y g

b) Calcular $g \circ f$ y graficarla

4. Sean A, B, C ángulos de un triángulo cualesquiera. Demostrar que

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

5. Una hormiga, ingeniosa y buena para la matemática sale a dar su acostumbrado paseo dominical. Se ubica en el $A = (0, 0)$ y clava su mirada en lontananza en el punto $B = (3, 2)$. Su meta es ir desde A a B en línea recta. Cuando se encuentra en el punto C que divide al segmento AB en la razón 2 es a 3 observa que algo se mueve en el $(3, 2)$, y se vira hacia su derecha en forma perpendicular. Apreta... los dientes y sale corriendo en forma rauda y ligera por esa recta perpendicular hasta llegar al punto D en que esta recta intersecta la recta L de ecuación $y - 2x + 4 = 0$. Jadeante y aún asustada saca fuerzas de flaqueza para mirar hacia el punto B , ahora ve bien, ¡¡horror!! es el famoso cazahormigas, ella quiere gritar pero no puede, una lágrima en la garganta se lo impide.
- Determinar el punto C en el cual se vira la hormiga
 - Determinar el punto D donde queda atónita la hormiga
 - Hallar la mínima distancia entre el punto B y la recta L y determinar el punto E sobre la recta L que hace esta mínima distancia.
 - Calcular el ángulo que forma la recta L con la recta perpendicular que pasa por el punto C .
 - Hallar la ecuación de la circunferencia tangente a las rectas L y la que une los puntos B y E
 - Si la hormiga en su desesperación arranca por la recta L en dirección del punto E . Determine si por esa recta existe algún punto donde el *Cazahormigas* pille a la hormiga.

Puntaje: $(6) + (18) + (4+6) + (10) + (2+2+4+2+4+2) = 60$ puntos

Respuestas

1) Donde aparezca una suma o resta, ya sea de senos con cosenos o bien entre senos-senos o cosenos -cosenos, siempre hay una fórmula que simplifica su escritura. En este caso

$$\cos x - \cos y = -2 \operatorname{sen} \frac{x+y}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{x-y}{2}$$

con esto tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\cos 50^\circ - \cos 40^\circ}{\cos 25^\circ - \cos 35^\circ} &= \frac{-2 \operatorname{sen} \frac{90^\circ}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{10^\circ}{2}}{-2 \operatorname{sen} \frac{60^\circ}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{-10^\circ}{2}} \\ &= \frac{\operatorname{sen} 45^\circ \cdot \operatorname{sen} 5^\circ}{\operatorname{sen} 30^\circ \cdot \operatorname{sen} (-5^\circ)} = -\frac{\operatorname{sen} 45^\circ \cdot \operatorname{sen} 5^\circ}{\operatorname{sen} 30^\circ \cdot \operatorname{sen} 5^\circ} \\ &= -\frac{\operatorname{sen} 45^\circ}{\operatorname{sen} 30^\circ} = -\sqrt{2} \end{aligned}$$

2a) Las cuadráticas las identificamos por completación de cuadrados

$$\begin{aligned} 9x^2 + 4y^2 - 18x - 16y &= 11 \implies 9(x-1)^2 + 4(y-2)^2 = 36 \\ &\implies \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1 \end{aligned}$$

Una elipse de centro $(1, 2)$, eje mayor paralelo al eje y . Como $a > c$, entonces de $a^2 - c^2 = b^2$ se obtiene $c = \sqrt{5}$. Con esto los focos son, $(1, 2 + \sqrt{5})$ y $(1, 2 - \sqrt{5})$.

2b) Se ve que $y^2 + 2ay - 12x + a^2 - 12b = 0$ es una parábola.

$$y^2 + 2py - 12x + a^2 - 12b = 0 \implies (y+a)^2 - 12x - 12b = 0 \implies (y+a)^2 = 12(x-b)$$

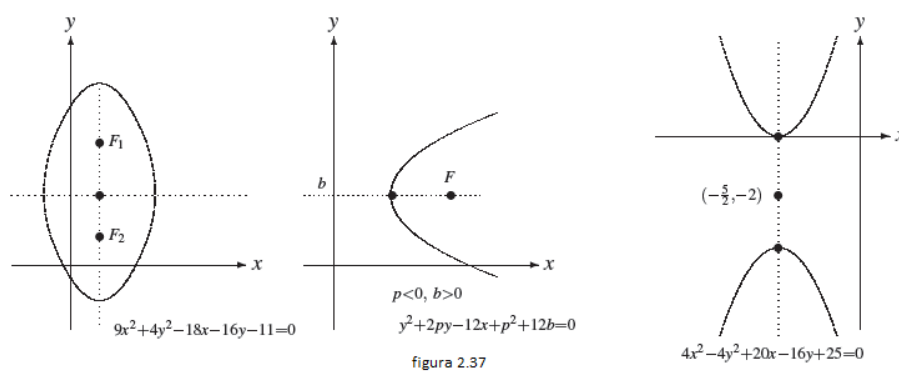
Es una parábola de centro $(b, -a)$. Como $4a = 12$, entonces $a = 3$. Este a es la distancia entre foco y vértice, por tanto, el foco es $(b + 3, -a)$

2c) Veamos que es la ecuación $4x^2 - 4y^2 + 20x - 16y + 25 = 0$

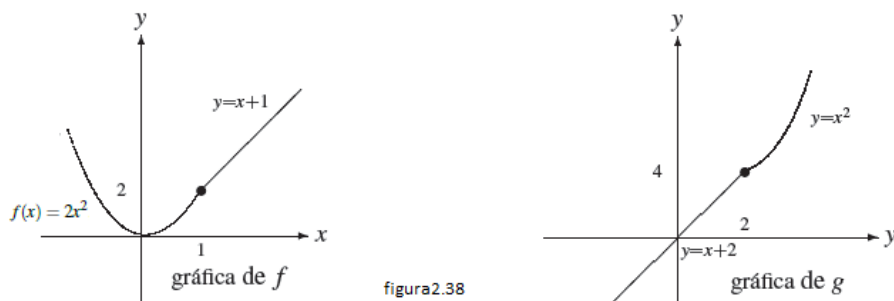
$$4x^2 - 4y^2 + 20x - 16y = -25 \implies (y + 2)^2 - (x + \frac{5}{2})^2 = 4$$

$$\implies \frac{(y + 2)^2}{4} - \frac{(x + \frac{5}{2})^2}{4} = 1$$

Una hipérbola de centro $(-\frac{5}{2}, -2)$, eje real paralelo al eje y . Vértices en $(-\frac{5}{2}, 0)$ y $(-\frac{5}{2}, -4)$. Como $c > a$, entonces de $c^2 - a^2 = b^2$ se obtiene $c = \sqrt{8}$. Con esto los focos son, $(-\frac{5}{2}, -2 + \sqrt{8})$ y $(-\frac{5}{2}, -2 - \sqrt{8})$.



3) Las gráficas de f y g son



Para hallar la función compuesta $g \circ f$ se debe poner mucho ojo en el recorrido de f , ya que la condición necesaria para existencia de este tipo de compuesta es que el recorrido de f sea un subconjunto del dominio de g .

En primer lugar, nótese que g , por una parte, puede recibir valores "menores que 2", y por otra valores "mayores o iguales a 2". Primero hay que ver cuáles son los x que son llevados por f a valores que son **menores que 2**.

caso $f(x) = x + 1$, $x \geq 1$

$$x + 1 < 2 \implies x < 1, \text{ pero } x \geq 1, \text{ luego no hay } x \text{ que haga esto}$$

pero si entonces ocurre que $x + 1 \geq 2$ para todo $x \geq 1$. De modo que la compuesta es

$$(g \circ f)(x) = g(x+1) = (x+1)^2, \quad \forall x \geq 1$$

caso $f(x) = 2x^2, \quad x < 1$

$$2x^2 < 2 \implies x^2 < 1$$

Resolvemos la igualdad, $x^2 = \pm 1$. Veamos la recta real con esta división



con $x = -2$ se ve que en el intervalo $(-\infty, -1)$ no hay solución. Si elegimos $x = 0$, entonces el intervalo $(-1, 1)$ es solución. Si $x = 2$, entonces $(1, \infty)$ no es solución. Ahora ponemos sobre la mesa la hipótesis que $x < 1$ para tener que el conjunto solución es

$$S = (-1, 1)$$

La compuesta para estos valores de x es entonces

$$(g \circ f)(x) = g(2x^2) = 2x^2 + 2, \quad \forall x \in (-1, 1)$$

Dentro de este mismo caso ocurre que hay valores de x cuya imagen por f sobrepasa al 2. Luego, esos valores entran en la composición. Se tiene

$$2x^2 \geq 2 \implies x^2 \geq 1 \implies x > 1 \vee x < -1$$

El conjunto solución, agregando la hipótesis que $x < 1$, es

$$S = [(-\infty, -1) \cup (1, \infty)] \cap \{x \in \mathbb{R} / x < 1\} = (-\infty, -1)$$

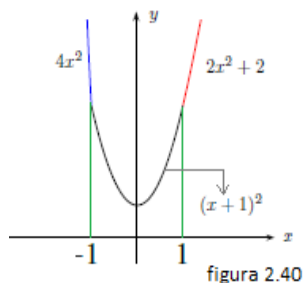
Para estos valores la compuesta resulta ser

$$(g \circ f)(x) = g(2x^2) = 4x^4, \quad \forall x \in (-\infty, -1)$$

En resumen, la compuesta es

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} 2x^2 + 2, & \forall x \in (-1, 1) \\ (x+1)^2, & \forall x \geq 1 \\ 4x^4, & \forall x \in (-\infty, -1) \end{cases}$$

La figura muestra la gráfica de la composición



4) La hipótesis es que $A + B + C = 180^\circ$

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2 \operatorname{sen} \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

de $A + B = 180^\circ - C$, tenemos

$$\operatorname{sen} \frac{A+B}{2} = \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2} \right) = \cos \frac{C}{2}$$

de esta forma,

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{sen} \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} &= 2 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} \\ &= 2 \cos \frac{C}{2} \left(\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} + \operatorname{sen} \frac{A}{2} \operatorname{sen} \frac{B}{2} \right) \end{aligned}$$

Ahora,

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C = 2 \cos \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} + 2 \cos \frac{C}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{B}{2} + \operatorname{sen} C, (*)$$

Como

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} C &= \operatorname{sen} 2 \cdot \frac{C}{2} = 2 \operatorname{sen} \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{B}{2} \\ &= 2 \operatorname{sen} \frac{\pi - A - B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} \\ &= 2 \cos \frac{C}{2} \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A+B}{2} \right) \\ &= 2 \cos \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{A+B}{2} \\ &= 2 \cos \frac{C}{2} \left(\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} - \operatorname{sen} \frac{A}{2} \operatorname{sen} \frac{B}{2} \right) \end{aligned}$$

al reemplazar esto en (*) se obtiene

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

5) Lo primero es leer bien el problema, después ir poniendo todo en un esquema gráfico. La situación descrita se muestra en la figura

a) Si $r = \frac{AC}{AB} = \frac{2}{3}$ es la razón de división entre los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) , entonces el punto (x, y) que “hace la gracia” tiene coordenadas

$$x = \frac{x_1 + r x_2}{1 + r} \quad y \quad y = \frac{y_1 + r y_2}{1 + r}$$

En este caso,

$$x = \frac{0 + \frac{2}{3} \cdot 3}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{6}{5}, \quad y = \frac{0 + \frac{2}{3} \cdot 2}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{4}{5}$$

De esta manera, el punto es $(\frac{6}{5}, \frac{4}{5})$

b) La recta que pasa por AB tiene ecuación $y = \frac{2}{3}x$, o bien $3y - 2x = 0$. La recta perpendicular a ésta debe tener pendiente m_2 recíproca y con signo contrario, esto es, $m_2 = -\frac{3}{2}$. Dado que tiene que pasar por el punto $(\frac{6}{5}, \frac{4}{5})$, su ecuación es

$$y - \frac{4}{5} = -\frac{3}{2}\left(x - \frac{6}{5}\right)$$

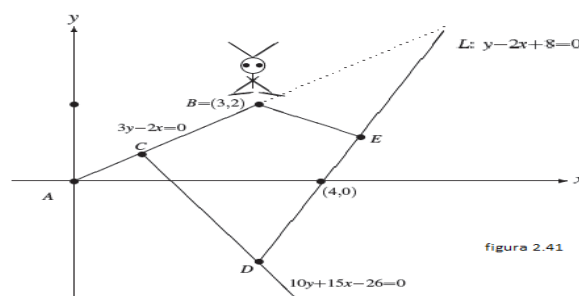
o en su defecto,

$$10y + 15x - 26 = 0$$

Ahora, la otra recta es $y - 2x + 8 = 0$. Luego,

$$\begin{array}{r} 10y + 15x - 26 = 0 \\ 2x + 8 = 0 \end{array}$$

al resolver este sistema se encuentra que el punto de intersección es $D = (\frac{106}{35}, -\frac{68}{35})$



c) Se trata de la distancia entre un punto y una recta

$$d[(a,b), Ax + By + C = 0] = \frac{|aA + bB + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

como $(a,b) = (3,2)$ y la recta tiene ecuación $y - 2x + 8 = 0$, entonces

$$d[(3,2), -2x + y + 8 = 0] = \frac{|3(-2) + 2(1) + 8|}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

Para determinar el punto (a,b) sobre la recta L , tenemos

$$\begin{aligned} d[(3,2), (a,b)] &= \sqrt{(3-a)^2 + (2-b)^2} = \frac{4}{\sqrt{5}} \\ &= (3-a)^2 + (2-b)^2 = \frac{16}{5} \end{aligned}$$

El punto (a,b) pertenece a la recta, luego, satisface su ecuación. Es decir, $-2a + b + 8 = 0$, de donde $b = 2a - 8$. Reemplazando este valor de b en la última ecuación cuadrática se tiene

$$\begin{aligned} (3-a)^2 + (2-b)^2 &= \frac{16}{5} \implies (3-a)^2 + (2-(2a-8))^2 = \frac{16}{5} \\ &\implies (3-a)^2 + (10-2a)^2 = \frac{16}{5} \\ &\implies 25a^2 - 230a + 529 = 0 \\ &\implies (5a-23)^2 = 0 \implies a = \frac{23}{5} \end{aligned}$$

de esto se obtiene $b = \frac{6}{5}$. Así, el punto que hace la menor distancia entre B y la recta es $E = (\frac{23}{5}, \frac{6}{5})$

d) Si se mira la figura, se trata de hallar el ángulo en D . Es un ángulo formado por dos rectas. El ángulo entre las rectas L_1 de pendiente m_1 y la recta L_2 de pendiente m_2 se calcula por la expresión

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

La primera recta que se menciona es L , luego, $m_1 = 2$. La otra recta, $10y + 15x - 26$ tiene pendiente $m_2 = -\frac{3}{2}$. Luego,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{-\frac{3}{2} - 2}{1 + 2 \cdot (-\frac{3}{2})} = \frac{7}{4} \Rightarrow \alpha = 66,95^\circ$$

e) La ecuación de la circunferencia que pasa por B y E tiene centro en el punto medio del segmento que une $B = (3, 2)$ con $E = (\frac{23}{5}, \frac{6}{5})$. Para saber esto aplicamos la expresión que determina el punto de división con $r = 1$. Esto es,

$$x = \frac{3 + \frac{23}{5}}{2}, \quad y = \frac{2 + \frac{6}{5}}{2}$$

de donde, $x = \frac{19}{5}$, $y = \frac{8}{5}$. El radio es la mitad de la distancia entre los puntos B y E , luego,

$$d(B, E) = d \left[(3, 2), \left(\frac{23}{5}, \frac{6}{5} \right) \right] = \sqrt{\left(3 - \frac{23}{5} \right)^2 + \left(2 - \frac{6}{5} \right)^2} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

la mitad de esta distancia es $d = \frac{2}{\sqrt{5}} = r$. Por tanto, la ecuación de la circunferencia pedida es

$$\left(x - \frac{19}{5} \right)^2 + \left(y - \frac{8}{5} \right)^2 = \frac{4}{5}$$

f) Se trata de hallar la intersección entre las rectas $3y - 2x = 0$ y $-2x + y + 8 = 0$. Se encuentra que $x = 6$, $y = 4$. Así que no le conviene a la hormiga arrancar en esa dirección, si no, el “cazahormigas” se la hace *papilla*.



Prueba # 2 Introducción al Cálculo

1) **Probar** la siguiente identidad

$$\frac{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} 2A + \operatorname{sen} 3A}{\operatorname{cos} A + \operatorname{cos} 2A + \operatorname{cos} 3A} = \operatorname{tg} 2A$$

2) **Resolver** la ecuación $\cotg^2 B \cdot \cos B - 3 \cos B + \cotg^2 B - 3 = 0$

3a) **Verificar** que $\arccos \frac{1}{2} + \arcsen \frac{1}{2} = \frac{2\pi}{3}$

3b) **Hallar** el valor de la expresión $\arctg x + \arctg \frac{1}{x}$, para $x > 0$

- 4) Bosquejar la gráfica de la función $y = 2 + e^{x+1}$ y de su inversa (si existe), indicando para ambas funciones, su dominio, rango, monotonía, acotamiento y paridad o imparidad.
- 5) Un lápiz de 15 cms de longitud está inclinado 15° respecto a la vertical. Determinar en cuanto aumentaría su altura si estuviera vertical.
- 6) Dado el triángulo ABC de lados a, b, c . Demostrar que

$$2 \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}$$

Respuestas

1) Es claro, evidente y lógico que se debe partir de aquél lado que tenga la mayor cantidad de expresiones, pues es más sencillo ir simplificando que amplificando sin saber cómo. Partimos entonces del lado izquierdo para tener.

$$\begin{aligned} \frac{\sin A + \sin 2A + \sin 3A}{\cos A + \cos 2A + \cos 3A} &= \frac{\sin A + \sin 3A + \sin 2A}{\cos A + \cos 3A + \cos 2A} \\ &= \frac{2 \sin A \cdot \cos(-2A) + \sin 2A}{2 \cos 2A \cos A + \cos 2A} \\ &= \frac{\sin 2A (1 + 2 \cos 2A)}{\cos 2A (1 + 2 \cos 2A)} \\ &= \frac{\sin 2A}{\cos 2A} = \operatorname{tg} 2A \end{aligned}$$

2) Las ecuaciones trigonométricas se resuelven igual que una algebraica.

$$\cotg^2 B \cdot \cos B - 3 \cos B + \cotg^2 B - 3 = 0 \implies \cos B (\cotg^2 B - 3) + (\cotg^2 B - 3) = 0$$

Podemos factorizar

$$(\cotg^2 B - 3)(1 + \cos B) = 0$$

de lo cual

$$\begin{cases} \cotg^2 B - 3 = 0 \implies \cotg B = \sqrt{3} \\ \vee \\ 1 + \cos B = 0 \implies \cos B = -1 \end{cases} \implies \begin{cases} B = \{30^\circ, 210^\circ, 150^\circ, 330^\circ\} \\ \vee \\ B = \{\pi\} \end{cases}$$

De esta forma, el conjunto solución de la ecuación es

$$S = \{30^\circ, 150^\circ, 180^\circ, 210^\circ, 330^\circ\}$$

3a) Esta clase de ecuaciones, que contienen trigonométricas inversas, se resuelven pasando cada término a la función trigonométrica respectiva. Se tiene

$$u = \operatorname{Arccos} \frac{1}{2} \implies \cos u = \frac{1}{2}$$

$$v = \operatorname{Arcsen} \frac{1}{2} \implies \sin v = \frac{1}{2}$$

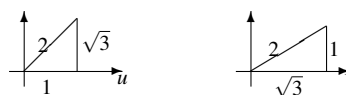


figura 2.42

Con estos reemplazos la ecuación original es

$$u + v = \frac{2\pi}{3}$$

Apliquemos a esta ecuación la función seno. Se tiene

$$\sin(u + v) = \sin u \cdot \cos v + \sin v \cdot \cos u = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1 \neq \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Esto significa que no se cumple la igualdad.

3b) En este problema se pide hallar el valor de una expresión.

$$\operatorname{Arctg} x + \operatorname{Arctg} \frac{1}{x} = z$$

El procedimiento es análogo al anterior,

$$u = \operatorname{Arctg} x \implies \operatorname{tg} u = x \quad \text{y} \quad v = \operatorname{Arctg} \frac{1}{x} \implies \operatorname{tg} v = \frac{1}{x}$$

como hay puras tangentes, lo lógico es que usemos esa función

$$\operatorname{tg}(u + v) = \frac{\operatorname{tg} u + \operatorname{tg} v}{1 - \operatorname{tg} u \cdot \operatorname{tg} v} = \frac{x + \frac{1}{x}}{1 - 1} = \infty \implies u + v = \frac{\pi}{2}$$

Esto es, el valor de la suma es $z = \frac{\pi}{2}$

4) La gráfica de $f(x) = 2 + e^{x+1}$, y de su inversa se muestran en la figura 2.43.

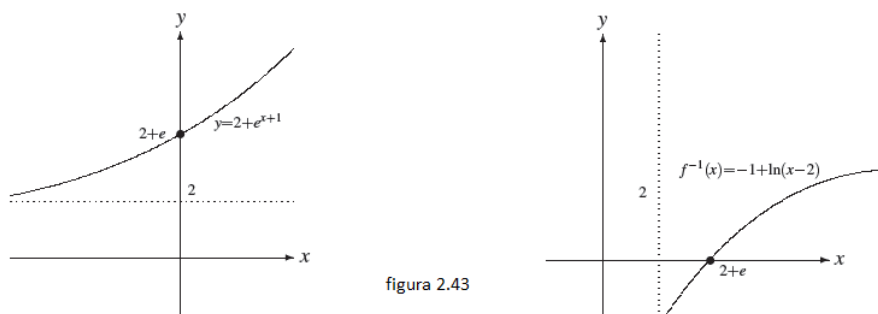


figura 2.43

Se observa que la función $y = 2 + e^{x+1}$ es creciente en todo su dominio que es $\mathbb{R}$, su rango es $\operatorname{rang}(f) = \{y > 2\}$. Está acotada inferiormente por la recta $y = 2$. No lo está superiormente. No es función par ni impar. El hecho que f sea estrictamente creciente hace que sea inyectiva. Para que sea sobreyectiva debemos restringir el codominio al rango. Se tiene

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \{y > 2\} \subset \mathbb{R} \\ x &\mapsto y = 2 + e^{x+1} \end{aligned}$$

en estas condiciones f es sobreyectiva. Por tanto, existe inversa, que calculamos por el truco de la compuesta

$$f(f^{-1}(x)) = x \implies 2 + e^{f^{-1}(x)+1} = x \implies e^{f^{-1}(x)+1} = x - 2$$

aplicando logaritmo natural en la última igualdad se tiene que la inversa es

$$f^{-1}(x) = -1 + \ln(x - 2)$$

Observando la gráfica de la inversa se ve que su dominio es el conjunto $\{x > 2\}$, que su recorrido o rango es $\mathbb{R}$. Se trata de una función no acotada, que no es par ni impar, y que es creciente.

5) Estos son los problemitas en los que siempre un “monito” es una buena ayuda.

De acuerdo con la figura 2.44, lo que aumenta el lápiz si se encuentra vertical es x . Para hallar x , el seno y el coseno ayudan

$$\text{sen } 75^\circ = \frac{x}{15} \Rightarrow x = 15 \text{ sen } 75^\circ$$

$$\text{cos } 15^\circ = \frac{x}{15} \Rightarrow x = 15 \text{ cos } 15^\circ$$

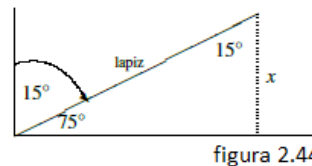


figura 2.44

Ahora, el $\cos \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$. Luego, $\cos 15^\circ = \cos \frac{30}{2} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}$. Al reducir, $x = 15 \cdot \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$ es lo que aumenta el lápiz.

6) Las demostraciones siempre son las más jodidas. Las de este tipo, ya lo he dicho son para usar teorema del seno o del coseno. Uno ve lo que sirve mirando lo que tiene que probar. El teorema del coseno afirma que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

de esto,

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Hay que probar que

$$2 \text{ sen}^2 \frac{A}{2} = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}$$

Tenemos el $\cos A$, de esto hay que pasar al $\text{sen}^2 A$. Para ello tenemos la identidad

$$\cos A = 1 - 2 \text{ sen}^2 \frac{A}{2}$$

de donde

$$\begin{aligned} 2 \text{ sen}^2 \frac{A}{2} &= 1 - \cos A \\ &= 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ &= \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc} \\ &= \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc} \end{aligned}$$



Prueba # 2

Introducción al Cálculo

130598

1. Considerar la función $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$

a) Demostrar que esta función satisface

$$f(a) + f(b) = f\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)$$

b) Graficar la función f , destacando: dominio, ceros, monotonía, acotamiento y asíntotas

c) Restringir dominio y/o recorrido de la función f , con la finalidad de que exista la función inversa f^{-1} . Hallar la inversa.

d) Hacer la gráfica de la función inversa f^{-1} , indicando dominio y recorrido.

2. Probar que $\operatorname{tg} x + \sec x = 2 \implies \operatorname{sen} x = \frac{3}{5}$, para $0 < x < \frac{\pi}{2}$

3. Probar que $\operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{3}{5} + \operatorname{arc} \cos \frac{15}{17} = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{77}{85}$

4. En un conocido local de Temuco se lleva a cabo una grandiosa fiestoca de fin de semana. En lo mejor de la noche el animador anuncia que otorgará un premio consistente en entrada y consumo gratuito para el fin de semana siguiente, a quien calcule lo más rápido posible y sin calculadora el valor de $\operatorname{sen} 105^\circ + \operatorname{sen} 15^\circ$. Cuatro amigos de Ingeniería (plenamente identificados por su profe de Cálculo) se encuentran participando de esta *movida*, y como es de suponer algo tenían que decir, como se iban a quedar callados, ¡imposible! Para resumir, se ganaron el premio. Diga Ud. cual es la respuesta correcta que dieron.

5. Probar que $\frac{\operatorname{sen}^2 x + 2 \cos x - 1}{2 + \cos x - \cos^2 x} = \frac{1}{1 + \sec x}$

Puntaje: $(3+9+3+3) + (10) + (10) + (10) + (12) = 60$ puntos

Respuestas

1) $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$, entonces

$$\begin{aligned} f(a) + f(b) &= \ln \frac{1-a}{1+a} + \ln \frac{1-b}{1+b} = \ln \frac{(1-a)(1-b)}{(1+a)(1+b)} \\ &= \ln \frac{1-a-b+ab}{1+a+b+ab} \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$f\left(\frac{a+b}{1+ab}\right) = \ln \frac{1 - \frac{a+b}{1+ab}}{1 + \frac{a+b}{1+ab}} = \ln \frac{1-a-b+ab}{1+a+b+ab}$$

se concluye que ambas expresiones son iguales.

2) Para el dominio se debe tener argumento del logaritmo mayor que cero. Esto es

$$\frac{1-x}{1+x} > 0$$

nuestra vieja aliada la tricotomía nos dice que veamos donde esto es cero

$$A = \frac{1-x}{1+x} = 0 \implies x = 1$$

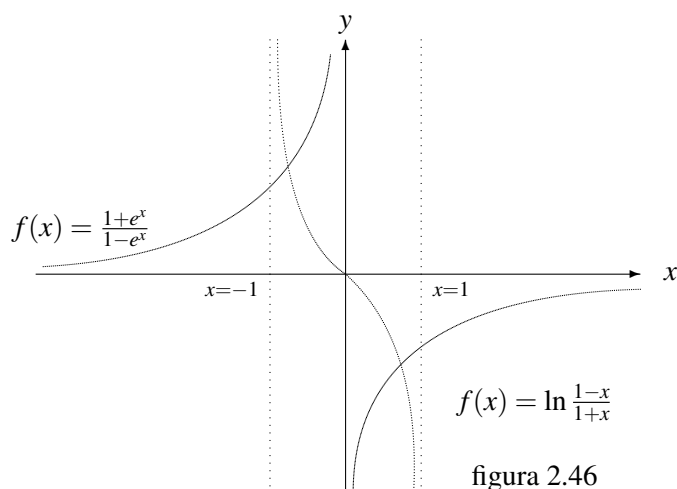
uniendo a este punto el valor $x = -1$, no permitido tenemos a la recta real como muestra la figura 2.45.



con $x = -2$ es $A < 0$, no sirve. Con $x = 0$ es $A > 0$ tenemos solución en el intervalo $(-1, 1)$. Finalmente, si $x = 2$ es $A < 0$ con lo cual acá no hay solución. Luego, el dominio de f es $\text{dom}(f) = (-1, 1)$. La función es cero sólo en $x = 0$. El recorrido es todo $\mathbb{R}$ (se ve de la gráfica). Es claro que $x = -1$ es asíntota vertical, al aproximarse x a -1 por la derecha, esos valores son mayores que -1 , con lo cual el denominador tiene la máscara $1 + (-1^+) = 0^+$. El numerador queda en la forma $1 - (-1^+) > 0$. De esta forma la fracción queda con máscara $\frac{\text{algo} > 0}{0^+} = \infty$. Esto es, la función al aproximarse por derecha al -1 crece sin cota. Los valores a izquierda de -1 no están permitidos (dominio). Falta ver que pasa si x se acerca al 1 por la izquierda. En este caso la fracción $\frac{1-x}{1+x}$ toma la máscara

$$\frac{1 - 1^{-1}}{1 + 1^{-1}} = \frac{0^+}{2} = 0^+$$

y sabemos que la función logaritmo se va hacia el $-\infty$ si x se acerca a cero por derecha (0^+). Esto también prueba que el recorrido o rango de nuestra función es $\mathbb{R}$. Además se obtiene que f es decreciente.



b) La función inversa f^{-1} existe a condición que f tenga dominio $(-1, 1)$, pues allí, f es biyección. El calculo de la inversa, es como siempre, con ayuda del truquito $f(f^{-1})(x) = x$. Tenemos

$$f(f^{-1})(x) = x \implies \ln \frac{1 - f^{-1}}{1 + f^{-1}} = x$$

al tomar exponencial

$$\frac{1-f^{-1}}{1+f^{-1}} = e^x \implies f^{-1} = \frac{1+e^x}{1-e^x}$$

Es claro, de la gráfica de la inversa, que el dominio es $\mathbb{R} - \{0\}$, y que el rango o recorrido es $\mathbb{R} - \{0\}$

2) Para probar que $\operatorname{tg} x + \sec x = 2 \implies \operatorname{sen} x = \frac{3}{5}$ hacemos lo que sigue.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x + \sec x = 2 &\implies \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{1}{\cos x} = 2 \implies \frac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos x} = 2 \\ &\implies 1 + \operatorname{sen} x = 2 \cos x \implies (1 + \operatorname{sen} x)^2 = 4 \cos^2 x \\ &\implies 5 \operatorname{sen}^2 x + 2 \operatorname{sen} x - 3 = 0 \implies \operatorname{sen} x = \frac{3}{5} \quad \vee \quad \operatorname{sen} x = -1 \implies \operatorname{sen} x = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

Debe ser $x \neq \frac{3\pi}{2}$ pues la tangente y la secante tienen problemas allí.

3) Las demostraciones de este tipo, $\operatorname{Arcsen} \frac{3}{5} + \operatorname{Arcos} \frac{15}{17} = \operatorname{Arcsen} \frac{77}{85}$, son todas calcadas.

$$u = \operatorname{Arcsen} \frac{3}{5}, v = \operatorname{Arcos} \frac{15}{17} \implies \operatorname{sen} u = \frac{3}{5}, \cos v = \frac{15}{17}$$

De la identidad $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, se deduce que $\cos u = \frac{4}{5}$ y que $\operatorname{sen} v = \frac{8}{17}$. Tenemos:

$$\operatorname{sen}(u+v) = \operatorname{sen} u \cdot \cos v + \operatorname{sen} v \cdot \cos u = \frac{3}{5} \cdot \frac{15}{17} + \frac{8}{17} \cdot \frac{4}{5} = \frac{9}{17} + \frac{32}{85} = \frac{77}{85}$$

Por lo tanto la proposición dada se cumple.

4) Este problema es más fácil que quitarle un dulce a un cabro chico. Usemos la identidad

$$\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b = 2 \operatorname{sen} \left(\frac{a+b}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{a-b}{2} \right)$$

como hay que calcular $\operatorname{sen} 105^\circ + \operatorname{sen} 15^\circ =$, entonces

$$\operatorname{sen} 105^\circ + \operatorname{sen} 15^\circ = 2 \operatorname{sen} 60^\circ \cdot \cos 45^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

5) Se trata de probar la identidad $\frac{\operatorname{sen}^2 x + 2 \cos x - 1}{2 + \cos x - \cos^2 x} = \frac{1}{1 + \sec x}$.

Partimos del lado izquierdo para ver si llegamos al de la derecha.

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen}^2 x + 2 \cos x - 1}{2 + \cos x - \cos^2 x} &= \frac{1 - \cos^2 x + 2 \cos x - 1}{-(\cos^2 x - \cos x - 2)} = \frac{(2 - \cos x) \cdot \cos x}{-(\cos x - 2)(\cos x + 1)} \\ &= \frac{\cos x}{(\cos x + 1)}, \quad \text{dividir por } \cos x = \frac{1}{1 + \sec x} \end{aligned}$$



Prueba # 2 - Int. Cálculo

240599

1. Halle el valor de la constante A para que la ecuación

$$A y^2 - 4x^2 + 24x - 36y = 36$$

represente una hipérbola de eje real paralelo al eje y , con centro en el punto $(3, 2)$. Graficar.

2. Hallar $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ si se tienen los siguientes datos:

a) $\operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, donde α es ángulo del segundo cuadrante.

b) $\operatorname{cos} \beta = -\frac{1}{2}$, donde β es ángulo del tercer cuadrante.

3. Probar que

$$\frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos^2 x} + \frac{2 \cos x}{1 + \operatorname{sen} x} = 2 \sec x$$

4. Resolver la ecuación trigonométrica

$$\cos x - \cos 2x = 0 \quad x \in [0, 2\pi]$$

5. **Problema del “gato maula” y del “mísero ratón”** El gato maula se encuentra dormitando (con un ojo alerta) en el punto $G(1, 2)$ del plano cartesiano. De pronto observa que un ratón aparece en el punto $A(0, 9)$. El gato le pregunta que pretende, a lo que el ratón responde que desea llegar, en línea recta, al punto $B(9, 0)$ en donde está su guarida. El felino se sonríe y le interpela ¿con qué ropa?, estás perdido ratoncito, papá mono no falla, pero te propongo un trato. El ratón sabe que no podrá llegar a menos que acepte el desafío del gato y le contesta, ¿que querís amermelado? Por sus conocimientos previos de cálculo y por su naturaleza juguetona el gato le propone responder ciertas interrogantes matemáticas. El ratón que es bastante choro le responde afirmativamente. ¡Echale no más!.

- a) Mira ratoncito, te puedo cazar con facilidad en el punto P sobre la recta en el cual la distancia al punto donde me encuentro es mínima. ¿Cuál es ese punto?

El ratón se sonríe de forma picarona y responde correctamente. El gato lo mira enojado y le manda la segunda pregunta.

- b) Mira ratón, sobre la recta que quieres seguir hay un punto Q , entre P y B , para el cual se cumple que $3PQ = 2QB$. ¿cómo te quedó el ojo? ¿Cuáles son las coordenadas de Q ?

El ratón infla el pecho, se pega un suspiro, se peina con la mano y responde acertadamente. El gato no lo puede creer, y con sus bigotes mustios de rabia le hace la última pregunta.

- c) Mira ratón de pacotilla, estoy cachando que vienes de la biblioteca y que te gusta la matemática. Calcula el ángulo que se forma en mi posición cuando miro el punto P y el punto Q .

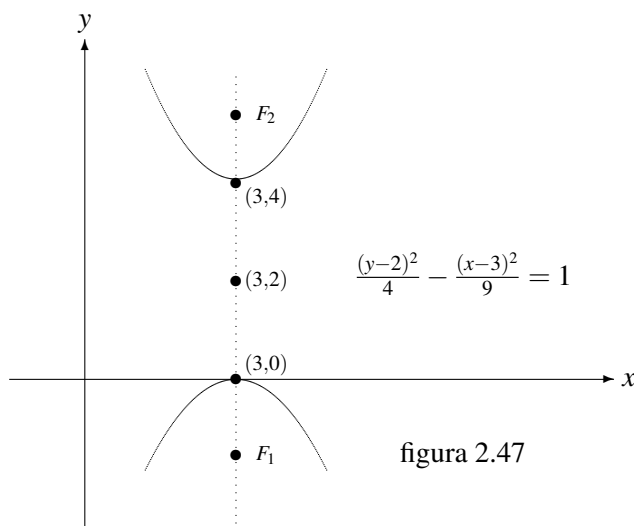
El ratón se pega un tiritón, piensa un momento, saca cuentas y contesta en forma perfecta. El gato que es un felino de palabra, felicita al ratón y lo deja pasar a su *raticueva*.

Debes dar a conocer las respuestas que permitieron al ratón salvar su pellejo.

6. Demostrar que en cualquier triángulo ABC se cumple que

$$a(b \cos C - c \cos B) = b^2 - c^2$$

Puntaje : 10 puntos cada problema = 60 puntos



Respuestas

1) Se completan cuadrados en ambas variables

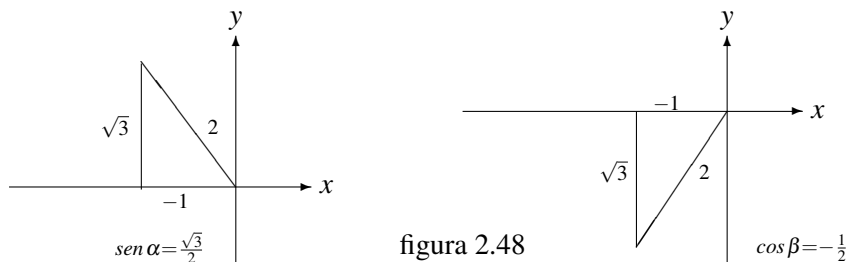
$$Ay^2 - 4x^2 + 24x - 36y = 36 \implies A \left(y - \frac{18}{A} \right)^2 - 4(x-3)^2 = \frac{324}{A}$$

como el centro debe ser $(3, 2)$, entonces $\frac{18}{A} = 2 \implies A = 9$. Con esto la hipérbola en su forma normal es

$$\frac{(y-2)^2}{4} - \frac{(x-3)^2}{9} = 1$$

dato que que la hipérbola es $c > a$, entonces $c^2 - a^2 = b^2 \implies c^2 - 4 = 9 \implies c = \sqrt{13}$. Así, las coordenadas de los focos son $(3, 2 + \sqrt{13})$ y $(3, 2 - \sqrt{13})$. La figura 2.47 muestra la posición de esta cónica.

2) Un par de triángulos ubicados donde deben estar nos proporciona la información que necesitamos



Observando la figura conocemos todas las funciones trigonométricas de esos ángulos.

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} = \frac{-\sqrt{3} + \sqrt{3}}{1 - (-3)} = \frac{0}{4} = 0$$

3) Para probar que $\frac{\sen 2x}{\cos^2 x} + \frac{2 \cos x}{1 + \sen x} = 2 \sec x$ tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\sen 2x}{\cos^2 x} + \frac{2 \cos x}{1 + \sen x} &= \frac{\sen 2x}{\cos^2 x} + \frac{2 \cos x(1 - \sen x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\sen 2x + 2 \cos x(1 - \sen x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{2 \sen x \cos x + 2 \cos x(1 - \sen x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{2 \cos x(\sen x + 1 - \sen x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{2 \cos x}{\cos^2 x} = \frac{2}{\cos x} = 2 \sec x \end{aligned}$$

4) La ecuación es $\cos x - \cos 2x = 0$. ¡un regalo!

$$\begin{aligned} \cos x - \cos 2x = 0 &\implies \cos x - (\cos^2 x - \sen^2 x) = 0 \\ &\implies 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0 \\ &\implies \cos x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} \\ &\implies \cos x = 1 \quad \text{o} \quad x = \frac{1}{2} \\ &\implies x = \{0^\circ, 120^\circ, 240^\circ, 360^\circ\} \end{aligned}$$

5) Esto forma parte de un tango, ese que dice "... como juega el gato maula con el mísero ratón". Una vez que se lee el problema se ubican los datos en la figura.

a) La ecuación de la recta que pasa por AB es $x + y = 9$, forma simétrica. La distancia entre el punto $(1, 2)$ y la recta por AB es

$$d[(1, 2), x + y - 9 = 0] = \frac{|1 + 2 - 9|}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

Ahora bien, para hallar el punto $P = (a, b)$ tenemos que

$$\begin{aligned} d[(1, 2), (a, b)] &= \sqrt{(1-a)^2 + (2-b)^2} = 3\sqrt{2} \\ &= (1-a)^2 + (2-b)^2 = 18 \end{aligned}$$

como el punto (a, b) está en la recta, entonces satisface esa ecuación, esto es, $a + b = 9$, de donde $b = 9 - a$. Reemplazando en la anterior ecuación tenemos

$$(1-a)^2 + (2-(9-a))^2 = 18 \implies (a-4)^2 = 0 \implies a = 4$$

de esta forma, $b = 5$. El punto $P = (4, 5)$.

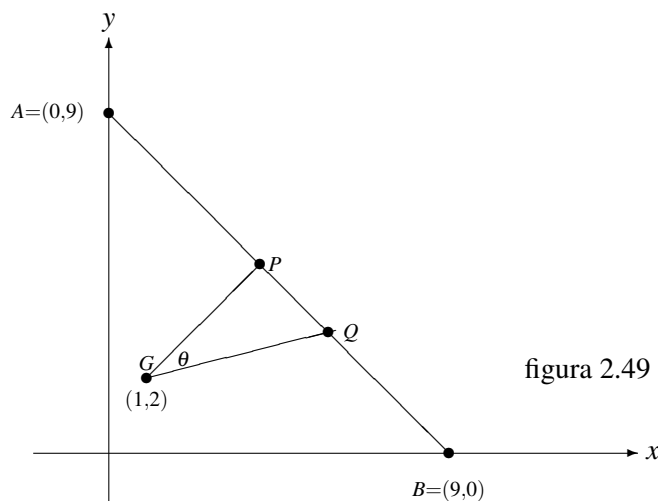


figura 2.49

b) Esto consiste en la división de un segmento en una razón dada. En este caso $r = \frac{2}{3}$. Para $(x_1, y_1) = (4, 5)$ y $(x_2, y_2) = (9, 0)$ se tiene

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1+r} = \frac{4 + \frac{2}{3} \cdot 9}{1 + \frac{2}{3}} = 6$$

$$y = \frac{y_1 + ry_2}{1+r} = \frac{5 + \frac{2}{3} \cdot 0}{1 + \frac{2}{3}} = 3$$

Se concluye que el punto es $Q = (6, 3)$.

c) Un simple ángulo entre dos rectas. La que pasa por $P = (4, 5)$ y $Q = (6, 3)$ que tiene pendiente $m_1 = -1$, de ecuación

$$x + y + 3 = 0$$

y la recta que pasa por $P = (4, 5)$ y $G = (6, 3)$, de pendiente $m_2 = 1$, y de ecuación

$$x - y + 1 = 0$$

Luego,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2} = \frac{1 - (-1)}{1 - 1} = \frac{2}{0} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$$

6) Demostrar que $a(b \cos C - c \cos B) = b^2 - c^2$, significa usar teorema del coseno. Se tiene

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$b^2 - c^2 = c^2 - b^2 - 2ac \cos B + 2ab \cos C$$

$$b^2 - c^2 = -ac \cos B + ab \cos C$$

$$b^2 - c^2 = a(b \cos C - c \cos B)$$

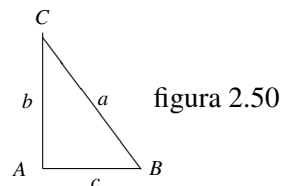


figura 2.50



Prueba # 3 - Introducción Al Cálculo

270698

Puntaje: $(24) + (24) + (1+2+1+2+2+(3+2)) = 60$ puntos

ITEM I: ALTERNATIVAS: Este ítem **no** admite corrección.

1. Se sabe que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$. De las afirmaciones:

I $x_n \geq 0, \forall n$

II $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = 0$

III $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - 1) = +\infty$

son verdaderas:

- [a] I [b] I y II [c] **II y III** [d] II [e] N.A.

2. Se sabe que la sucesión $x_{2n} \rightarrow L$ para $n \rightarrow \infty$. De las siguientes afirmaciones, es correcta:

[a] $x_{6n} \rightarrow 3L$ [b] $x_{4n} \rightarrow 4L$ [c] $x_{5n} \rightarrow 5L$ [d] $x_n \rightarrow \frac{L}{2}$ [e] **NA**

3. Se tiene $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$, e (y_n) acotada, entonces para $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n)$, se puede afirmar que es:

[a] no existe [b] **$-\infty$** [c] ∞ [d] 0 [e] N.A.

4. Considerar la función $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \text{ racional} \\ 0, & \text{si } x \text{ irracional} \end{cases}$. Si se verifica que:

I) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$ II) f discontinua en $x = 1$ III) f acotada

entonces es cierto que:

- [a] I [b] I y II [c] **II y III** [d] II [e] N. A.

5. Sea f función continua en la $V(a)$ (vecindad de a). Si se establece que:

I) f acotada en $V(a)$ II) $\exists x_0$ tal que $f(x_0) = 0$ III) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe

entonces es cierto que:

- [a] I [b] I, II y III [c] I y II [d] **I y III** [e] N. A.

6. Sea f función continua en $I = (-a, a)$. Si $f[(-a, a)]$ es tal que:

I) es un conjunto abierto II) $f(x) = 0, \forall x \in (-a, a)$ III) f acotada

entonces es cierto que:

- [a] I [b] II [c] **III** [d] II y III [e] N. A.

7. Si f es una función acotada en $[0, 1]$, entonces satisface que:

a) f es creciente b) $f(x) > 0, \forall x \in [0, 1]$ c) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existe $\forall x_0 \in (0, 1)$
d) f es continua en $(0, 1)$ e) **N.A**

8. Sea f estrictamente creciente y continua en $(-1, 1)$, entonces

a) f tiene máximo b) $f(x) > 0, \forall x \in (-1, 1)$ c) $\exists x_0 \in (-1, 1)$ tal que $f(x_0) = 0$

d) f es inyectiva e) N.A

ITEM II DESARROLLO: Describir los procedimientos.

1. Calcular los siguientes límites:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} 3^n \sin(3^{-n} \pi) \quad b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\sin(x-1)} \quad c) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg}^2 \sqrt{x})^{1/2x} \quad d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{1}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{3} + \dots + \frac{\sqrt{n}}{n+1}}{\sqrt{n}}$$

Respuestas

a) Se hace $m = \frac{1}{3^n}$, del cual $m \rightarrow 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 3^n \sin(3^{-n} \pi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{3^n}}{\frac{1}{3^n}} = \lim_{m \rightarrow 0} \frac{\sin \pi m}{\pi m} \cdot \pi = \pi$$

b) Tenemos la máscara $\frac{0}{0}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\sin(x-1)} &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\ln(1+z)}{\sin z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(z+1)}{z}}{\frac{\sin z}{z}}, \quad z = x-1 \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\ln(z+1)^{\frac{1}{z}}}{\frac{\sin z}{z}} = \frac{\ln e}{1} = 1 \end{aligned}$$

c) Se observa una máscara de la forma 1^∞ . Debemos construir el límite.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \operatorname{tg}^2 \sqrt{x})^{\frac{1}{2x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[(1 + \operatorname{tg}^2 \sqrt{x})^{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \sqrt{x}}} \right]^{\frac{\operatorname{tg}^2 \sqrt{x}}{2x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{tg}^2 \sqrt{x}}{x}}$$

Para el límite del exponente es mejor el uso de infinitésimos ($\operatorname{tg} x \sim x$). Se tiene:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{tg}^2 \sqrt{x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}}{2x} = \frac{1}{2}$$

d) En este caso hacemos uso del teorema de Stolz

Teorema 5.0.1 (Criterio de Stolz)

Si las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ verifican uno de los siguientes apartados:

1. $\{b_n\}$ es monótona creciente con $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$,
2. $\{b_n\}$ es monótona decreciente, con $b_n \neq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = L$ existe para L finito o infinito, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$$

Aplicamos Stolz a nuestro problema.

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{1}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{3} + \dots + \frac{\sqrt{n}}{n+1}}{\sqrt{n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{n}}{n+1}}{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{(n+1)(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \sqrt{n^2 - n}}{n+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{n}{n^2}}}{1 + \frac{1}{n}} = 2\end{aligned}$$

2) Considere la función $f(x) = \frac{3x+2}{x+1}$

- Calcular el límite de f cuando $x \rightarrow \infty$
- Calcular los límites laterales de f en $x = -1$
- Determinar si la discontinuidad de f en $x = -1$ es evitable.
- Calcular el límite de f cuando $x \rightarrow -\infty$
- Demostrar, usando la definición, que el límite de f cuando $x \rightarrow \infty$ es el de la parte (a).
Ilustrar gráficamente este hecho con $\varepsilon = 0, 1$.
- Graficar la función f

Respuestas

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = 3$

b) $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3x+2}{x+1} \sim \frac{-3+2}{0^+} = -\infty,$

$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3x+2}{x+1} \sim \frac{-3+2}{0^-} = \infty$

c) La discontinuidad es **inevitable**, pues los límites son infinitos

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 + \frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = 3$

e) La definición apropiada es

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{R})(x > N \implies |f(x) - L| < \varepsilon)$$

Es cosa de poner en esta definición la función dada y prepararse a encontrar el N . ¡manos a la obra!

$$|f(x) - L| = \left| \frac{3x+2}{x+1} - 3 \right| = \left| \frac{1}{x+1} \right| = \frac{1}{|x+1|} < \varepsilon$$

A partir de esto, $|x+1| > \frac{1}{\varepsilon}$. Por propiedad del valor absoluto, y dado que vamos para el infinito, elegimos $x+1 > \frac{1}{\varepsilon}$. Se tiene

$$x+1 > \frac{1}{\varepsilon} \implies x > \frac{1}{\varepsilon} - 1 = N$$

Listo, se acabó la demostración. Para responder al significado geométrico, con $\varepsilon = 0,1$ el $N = 9$, decimos que para los $x > 9$ todas las imágenes de la función f se encuentran en la vecindad $V(3, \frac{1}{10}) = (2,9; 3,1)$. Por ejemplo, para dejar satisfecho al más escéptico y porfiado, si $x = 9,2$, entonces

$$f(x) = \frac{3x+2}{x+1} \implies f(9,2) = \frac{3 \cdot 9,2 + 2}{9,2 + 1} \implies f(2,9) = 2,901960$$

f) La gráfica de la función la muestra la figura 3.3.

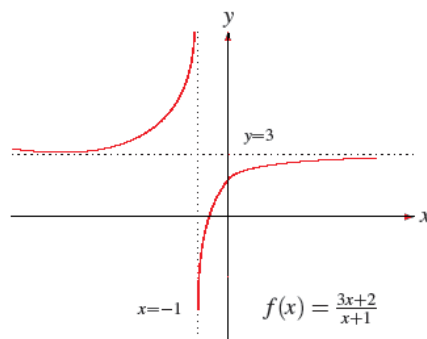


Figura 5.1

FIN DEL TEST

Prueba # 3 Introducción al Cálculo

210799

ITEM 1: Responder cada pregunta con una V para verdadero siempre, o con una F para Falso.

1. Sea (a_n) sucesión real tal que $a_{n+1} < a_n < 0$ para todo n , entonces
 - a) (a_n) convergente V F
 - b) (a_n) acotada V F
2. Sea (b_n) sucesión real acotada, entonces
 - a) (b_n) convergente V F
 - b) (b_n) monótona V F
3. Sea (c_n) sucesión real monótona creciente y $c_n \leq M$ para todo n , entonces
 - a) $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \frac{M}{2}$ V F
 - b) (c_n) convergente V F
4. Se sabe que $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = L$, entonces
 - a) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ siempre existe V F
 - b) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < L$ y $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) < L$ V F
5. Se sabe que $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$, entonces
 - a) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ V F
 - b) $\lim_{x \rightarrow x_0} (g(x) - h(x)) = 0$ V F
6. Sea f función continua en $[a, b]$, salvo en $x_0 \in (a, b)$, entonces
 - a) existe siempre un punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$ V F
 - b) existe siempre un punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) > 0$ V F

ITEM II Este Item es de desarrollo claro y legible

Calcular los siguientes límites:

$$1. \lim_{x \rightarrow 3} (7 - 2x)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{6}}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^3}}{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x + a \operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen} x}$$

Respuestas

a) Se nota a un kilómetro de distancia que la máscara es 1^∞ . Escribimos $7 - 2x = 1 + (6 - 2x)$. Hacemos $z = 6 - 2x$, con ello tenemos $z \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 3} (7 - 2x)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{6}} = \lim_{z \rightarrow 0} (1 + z)^{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi z}{12})} = \lim_{z \rightarrow 0} (1 + z)^{\operatorname{cotg} \frac{\pi z}{12}} = \lim_{z \rightarrow 0} \left[(1 + z)^{1/z} \right]^{z \cdot \operatorname{cotg} \frac{\pi z}{12}}, \quad (*)$$

Es claro que hemos construido el límite e en la base. Para el exponente se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} z \cdot \operatorname{cotg} \frac{\pi z}{12} &= \lim_{z \rightarrow 0} \cos \frac{\pi z}{12} \cdot \frac{z}{\operatorname{sen} \frac{\pi z}{12}} = 1 \cdot \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{\pi z}{12}}{\operatorname{sen} \frac{\pi z}{12}} \cdot \frac{12}{\pi} \right) \\ &= 1 \cdot \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{\pi z}{12}}{\frac{\pi z}{12}} \right)^{-1} \cdot \frac{12}{\pi} = \frac{12}{\pi} \end{aligned}$$

De esta forma, volviendo a donde estabamos $(*)$

$$\lim_{x \rightarrow 3} (7 - 2x)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{6}} = e^{12/\pi}$$

b) Este límite contiene una expresión irracional y funciones trigonométricas. Su máscara es $\frac{0}{0}$. Luego, necesita algunos arreglos como multiplicar por el conjugado y buscar después el famoso del seno.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^3}}{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sqrt{1 - x^3})(1 + \sqrt{1 - x^3})}{(\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x)(1 + \sqrt{1 - x^3})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{(\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x)(1 + \sqrt{1 - x^3})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \cos x}{\operatorname{sen} x(1 - \cos x)} \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{1 - x^3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \cos x(1 + \cos x)}{\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen}^2 x} \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{1 - x^3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\operatorname{sen}^3 x} \cdot \frac{\cos x(1 + \cos x)}{1 + \sqrt{1 - x^3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \right)^{-3} \cdot \frac{\cos x(1 + \cos x)}{1 + \sqrt{1 - x^3}} = 1 \end{aligned}$$

c) La máscara de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x + a \operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen} x} \sim \frac{0}{0}$. Tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x + a \operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen} x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \ln(\cos x + a \operatorname{sen} x)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} \\ &= \ln \left(\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + a \operatorname{sen} x)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} \right) \\ &= \ln \left(\lim_{x \rightarrow 0} [\cos x (1 + a \operatorname{tg} x)]^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} \right) \\ &= \ln \left(\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} \cdot (1 + a \operatorname{tg} x)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} \right) \end{aligned}$$

ambos límites tienen máscara 1^∞ : Los calculamos por separado.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} (1 + (\cos x - 1))^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 + (\cos x - 1))^{\frac{1}{\cos x - 1}} \right]^{\frac{\cos x - 1}{\operatorname{sen} x}} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\operatorname{sen} x}} = e^{-\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{\operatorname{sen} x (1 + \cos x)}} \\ &= e^{-\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x (1 + \cos x)}} = e^{-\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x}} = e^{\frac{0}{2}} = 1 \end{aligned}$$

El otro límite lo calculamos de la forma que sigue

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (1 + a \operatorname{tg} x)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 + a \operatorname{tg} x)^{\frac{1}{a \operatorname{tg} x}} \right]^{\frac{a \operatorname{tg} x}{\operatorname{sen} x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \operatorname{tg} x}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a}{\cos x} = e^a \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x + a \operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen} x} = \ln(1 \cdot e^a) = \ln e^a = a$$

ITEM III: Demostrar usando la definición pertinente

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+3)(n+1)}{n^2+3} \qquad b) \lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + x^2 - x) = 1$$

a) Se trata de una sucesión. Dado el ε debemos hallar el N

$$|a_n - L| = \left| \frac{(2n+3)(n+1)}{n^2+3} - 2 \right| = \left| \frac{5n-6}{n^2+3} \right| < \left| \frac{5n}{n^2} \right| = \frac{5}{n}$$

Estamos casi listos, la definición estipula que $|a_n - L| < \varepsilon$ y hemos encontrado que $|a_n - L| < \frac{5}{n}$, por consiguiente, considerando $\frac{5}{n} = \varepsilon$ se tiene $n = \frac{5}{\varepsilon}$. En consecuencia, el $N = \left[\frac{5}{\varepsilon}\right] + 1$ es el que andabamos buscando. Esto significa que

$$n > N = \left[\frac{5}{\varepsilon}\right] + 1 \implies \left| \frac{(2n+3)(n+1)}{n^2+3} - 2 \right| < \varepsilon$$

b) Ahora tenemos una función, la demostración incluye δ y ε .

$$\begin{aligned} |(x^3 + x^2 - x) - 1| &= |x^3 + x^2 - x - 1| = |(x^3 - x) + (x^2 - 1)| \\ &= |x(x^2 - 1) + (x^2 - 1)| = |(x^2 - 1)(x + 1)| \\ &= |(x - 1)(x + 1)^2| = |x - 1| |x + 1|^2 < \delta \cdot |x + 1|^2 \end{aligned}$$

Acotando el factor $|x + 1|^2$ estamos listos. Para ello se toma $\delta = 1$

$$|x - 1| < 1 \implies -1 < x - 1 < 1 \implies 1 < x + 1 < 3$$

se sigue que $|x + 1|^2 < 9$. Con $\delta = 1$ se obtiene

$$|(x^3 + x^2 - x) - 1| < 9\delta = \varepsilon \implies \delta = \frac{\varepsilon}{9}$$

Así, $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{9}\}$.

finished.

FIN DEL TEST

Prueba # 3 - Int. al Cálculo

020600

- Calcular $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3} + \dots + n\sqrt{n}}{n^2 \sqrt{n}}$
- Hallar límite de la sucesión convergente (a_n) tal que $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{2}{a_n}$, $n \in \mathbb{N}$, $a_1 > 0$
- Usar la definición δ, ε para probar que $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{\sqrt{x^2+7}} = \frac{3}{2}$
- Hallar las constantes a y b para que sea continua la función $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-a}{x-1}, & x \neq 1 \\ b, & x = 1 \end{cases}$
- Calcular los siguientes límites (m, n naturales):

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2 + \sqrt{x^4 + 1}} - x\sqrt{2})$

c) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{1 - \sin x}^2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan^2 \sqrt{x})^{\frac{1}{2x}}$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[n]{x} - 1}{\sqrt[m]{x} - 1}$

6. Sean $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas tal que $f(1) = g(0)$. Muestre la continuidad de la función $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$h(x) = \begin{cases} f(2x), & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ g(2x-1), & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

Puntaje: $(6) + (5) + (10) + (5) + (6 \times 4) + (8) + (2) = 60$ puntos

Respuestas

- 1).- Por la forma del límite y por tratarse de una sucesión, nuestro “héroe” es Stolz.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2\sqrt{2} + \cdots + n\sqrt{n}}{n^2 \sqrt{n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n - u_{n-1}}{n^2 \sqrt{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{n}}{n^2 \sqrt{n} - (n-1)^2 \sqrt{n-1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{n}(n^2 \sqrt{n} + (n-1)^2 \sqrt{n-1})}{n^5 - (n-1)^5} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + n(n-1)^2 \sqrt{n^2 - n}}{n^5 - (n-1)^5} \end{aligned}$$

Hay que recordar que

$$\begin{aligned} (n-1)^5 &= \binom{5}{0}n^5 - \binom{5}{1}n^4 + \binom{5}{2}n^3 - \binom{5}{3}n^2 + \binom{5}{4}n^1 - \binom{5}{5} \\ &= n^5 - 5n^4 + 10n^3 - 10n^2 + 5n - 1 \end{aligned}$$

de esta forma,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2\sqrt{2} + \cdots + n\sqrt{n}}{n^2 \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + n(n-1)^2 \sqrt{n^2 - n}}{5n^4 - 10n^3 + 10n^2 - 5n + 1}$$

la máxima potencia está dada por n^4 , luego, el cociente de los coeficientes es el resultado. Esto es,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2\sqrt{2} + \cdots + n\sqrt{n}}{n^2 \sqrt{n}} = \frac{1+1}{5} = \frac{2}{5}$$

- 2) Suponemos que el límite de la sucesión (a_n) es L , entonces

$$\begin{aligned} a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{2}{a_n} &\implies L = \frac{L}{2} + \frac{2}{L} \implies L^2 = 4 \\ &\implies L = 2, \quad (a_n > 0, \forall n) \end{aligned}$$

- 3) El trabajo consiste en hallar el δ dado el ε .

$$|f(x) - L| = \left| \frac{x+3}{x^2+7} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{2x-x^2-1}{x^2+7} \right| = \left| \frac{(x-1)^2}{x^2+7} \right| = \frac{|x-1|^2}{|x^2+7|}, \quad (*)$$

sabemos que $|x-1| < \delta$. Luego falta acotar $\frac{1}{x^2+7}$. Pero, ¿Y ahora quién podrá ayudarnos?, justamente, el δ . Veamos si $\delta = 1$ nos puede ayudar.

$$|x-1| < 1 \implies 0 < x < 2 \implies 0 < x^2 < 4 \implies 0 < x^2 + 7 < 8$$

Ya que aparece el 0 resulta **imposible** invertir para acotar. ¿cuál es el remedio?, un δ más chico, por ejemplo $\delta = \frac{1}{4}$.

$$\begin{aligned} |x-1| < \frac{1}{4} &\implies \frac{3}{4} < x < \frac{5}{4} \implies \frac{9}{16} < x^2 < \frac{25}{16} \\ &\implies \frac{121}{16} < x^2 + 7 < \frac{137}{16} \\ &\implies \frac{16}{121} > \frac{1}{x^2 + 7} > \frac{16}{137} \\ &\implies \frac{16}{137} < \frac{1}{x^2 + 7} < \frac{16}{121} \end{aligned}$$

Al reemplazar en (*) tenemos

$$|f(x) - L| = \frac{|x-1|^2}{|x^2+7|} < \delta^2 \cdot \frac{16}{121} = \varepsilon$$

de donde $\delta = \frac{11}{4}\sqrt{\varepsilon}$. Finalmente, el δ a elegir es

$$\delta = \min\left\{\frac{1}{4}, \frac{11}{4}\sqrt{\varepsilon}\right\}$$

4) Todos estos problemas de continuidad son sencillos, y siguen el mismo patrón. Se calculan los límites laterales y se comparan con el valor de la función en el punto conflictivo. Mira bien tu función, ella está definida como $f(1) = b$. Veamos el límite

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - a}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x} - a)(\sqrt{x} + a)}{(x - 1)(\sqrt{x} + a)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - a^2}{(x - 1)(\sqrt{x} + a)}$$

para que exista este límite, es necesario que sea $a = 1$, con ello se puede cancelar el factor $(x - 1)$. Si $a = -1$, tenemos problemas en el denominador (se indetermina $(\sqrt{x} + a)$). Luego

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - a}{x - 1} = \frac{1}{1 + a} = \frac{1}{2}$$

Ahora igualamos (requisito de la continuidad) el límite con el valor de la función en el punto.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \implies \frac{1}{2} = b$$

con esto hemos hallado el $a = 1$ y el $b = \frac{1}{2}$ pedidos.

5a) La máscara de este límite es $\infty \cdot (\infty - \infty)$. Racionalizamos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2 + \sqrt{x^4 + 1}} - x\sqrt{2}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(x^2 + \sqrt{x^4 + 1} - 2x^2)}{\sqrt{x^2 + \sqrt{x^4 + 1}} + x\sqrt{2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(\sqrt{x^4 + 1} - x^2)}{\sqrt{x^2 + \sqrt{x^4 + 1}} + x\sqrt{2}}$$

Volvemos a multiplicar por el conjugado, del numerador, para tener

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(x^4 + 1 - x^4)}{(\sqrt{x^2 + \sqrt{x^4 + 1}} + x\sqrt{2})(x^2 + \sqrt{x^4 + 1})}$$

lo que al simplificar equivale a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{(\sqrt{x^2 + \sqrt{x^4 + 1}} + x\sqrt{2})(x^2 + \sqrt{x^4 + 1})}$$

como el grado del numerador es uno y del denominador es tres, se fué todo para cero. Esto es,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2 + \sqrt{x^4 + 1}} - x\sqrt{2}) = 0$$

5b) La máscara de este límite es 1^∞ ¡más fácil!

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg}^2 \sqrt{x})^{1/2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 + \operatorname{tg}^2 \sqrt{x})^{1/\operatorname{tg}^2 \sqrt{x}} \right]^{\operatorname{tg}^2 \sqrt{x}/2x}$$

tenemos que el límite de la base es la exponencial e . Veamos el límite del exponente

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 \sqrt{x}}{2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^2 \sqrt{x}}{2x \cos^2 \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{sen} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)^2 \cdot \frac{1}{2 \cos^2 \sqrt{x}} \\ &= 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg}^2 \sqrt{x})^{1/2x} = e^{1/2}$$

5c) La máscara es $\frac{0}{0}$. Si aparece el seno, anda cerca el notable $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{(1 - \operatorname{sen} x)^2}} &= \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos x}{(1 - \operatorname{sen} x)^{2/3}} = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos x (1 + \operatorname{sen} x)^{2/3}}{\cos^4 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{(1 + \operatorname{sen} x)^{2/3}}{\cos^{1/3} x} \sim \frac{2^{2/3}}{0} = \infty \end{aligned}$$

5d) Aparecen irracionales, ¡¡cuidado son todos locos!! Una sustitución puede eliminarlos, $z = \sqrt[m]{x}$.

Con esto $z \rightarrow 1$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[n]{x} - 1}{\sqrt[m]{x} - 1} &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^m - 1}{z^n - 1}, \quad z - 1 = h \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^m - 1}{(1+h)^n - 1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\binom{m}{0}h^m + \binom{m}{1}h^{m-1} + \dots + \binom{m}{m}h^0 - 1}{\binom{n}{0}h^n + \binom{n}{1}h^{n-1} + \dots + \binom{n}{n}h^0 - 1} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\binom{m}{0}h^m + \binom{m}{1}h^{m-1} + \dots + \binom{m}{m-1}h}{\binom{n}{0}h^n + \binom{n}{1}h^{n-1} + \dots + \binom{n}{n-1}h} = \frac{\binom{m}{m-1}}{\binom{n}{n-1}} = \frac{m}{n}\end{aligned}$$

6) Suficiente con sacar los límites laterales y comparar con el valor de la función en el punto conflictivo.

$$\lim_{x \rightarrow 1/2} h(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow (1/2)^-} f(2x) = f(1) = g(0) \\ \lim_{x \rightarrow (1/2)^+} g(2x-1) = g(0) = f(1) \end{cases}$$

De esta manera, $\lim_{x \rightarrow 1/2} h(x) = f(1) = g(0) = h(\frac{1}{2})$. Por tanto, la función h es continua en el punto.

FIN DEL TEST

Prueba # 3 Int. Cálculo

100697

Puede serle útil saber que hoy es miércoles y que $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$

1. Hallar los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow \pi} (2 \sin x - \sin 2x) \operatorname{tg} \frac{x}{2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + a \sin bx)^{1/x}$

2. Hallar los siguientes límites

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3} + \dots + n\sqrt{n}}{n^2 \sqrt{n}}$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + e^n)}{n}$

3. Determinar los valores de las constantes α y β para que la función f que se indica sea continua.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 + 2x)}{x}, & x < 0 \\ \alpha x + \beta, & 0 \leq x \leq 5 \\ \frac{2x^2 - 15x + 25}{x^2 - 25}, & x > 5 \end{cases}$$

4. Demostrar, usando δ, ε que $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-2} = 1$

Puntaje: (10+10)+(10+10)+(10)+(10)=60 puntos

Respuestas

1a) La máscara es $0 \cdot \infty$. Hay que modificar esto

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \pi} (2 \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x) \operatorname{tg} \frac{x}{2} &= \lim_{x \rightarrow \pi} (2 \operatorname{sen} x - 2 \operatorname{sen} x \cos x) \operatorname{tg} \frac{x}{2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \pi} 2 \operatorname{sen} x (1 - \cos x) \frac{\operatorname{sen} \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \\
 &= 4 \lim_{x \rightarrow \pi} \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} (1 - \cos x) \frac{\operatorname{sen} \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \\
 &= 4 \lim_{x \rightarrow \pi} \operatorname{sen} \frac{x}{2} (1 - \cos x) \cdot \operatorname{sen} \frac{x}{2} \\
 &= 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 8
 \end{aligned}$$

1b) La máscara es 1^∞ . Una exponencial. Veamos cual

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + a \operatorname{sen} bx)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + (\cos x + a \operatorname{sen} bx - 1))^{\frac{1}{x}}$$

con el fin de simplificar escritura, sea $H = \cos x + a \operatorname{sen} bx - 1$, entonces este límite equivale a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 + H)^{\frac{1}{H}} \right]^{\frac{H}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{H}{x}}$$

pero el límite de esto último es sencillo

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{H}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + a \operatorname{sen} bx - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x - 1}{x} + \frac{a \operatorname{sen} bx}{x} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x(1 + \cos x)} + \frac{ab \operatorname{sen} bx}{bx} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} + \frac{ab \operatorname{sen} bx}{bx} \right) \\
 &= -1 \cdot \frac{0}{2} + ab = ab
 \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + a \operatorname{sen} bx)^{1/x} = e^{ab}$$

2a) Cada vez que aparecen sumas en el numerador, Stolz nos está mirando.

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2\sqrt{2} + \cdots + n\sqrt{n}}{n^2 \sqrt{n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1} - u_n}{v_{n+1} - v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)\sqrt{n+1}}{(n+1)^2 \sqrt{n+1} - n^2 \sqrt{n}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{3/2}}{(n+1)^2 \sqrt{n+1} - n^2 \sqrt{n}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{3/2}((n+1)^2 \sqrt{n+1} + n^2 \sqrt{n})}{(n+1)^5 - n^5} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{8/2} + (n+1)^{3/2} n^2 \sqrt{n}}{(n+1)^5 - n^5} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4 + (n+1)^{3/2} n^{5/2}}{(n+1)^5 - n^5} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4 + (n+1)^{3/2} n^{5/2}}{5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1}
 \end{aligned}$$

cualquier mortal, incluso el *Rumpy*, puede ver que el numerador y denominador son de **grado 4**. Luego, dividimos los coeficientes de las máximas potencias.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2\sqrt{2} + \cdots + n\sqrt{n}}{n^2 \sqrt{n}} = \frac{2}{5}$$

2b) Aquí la máscara es $\frac{\infty}{\infty}$. Usemos Stolz

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + e^n)}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1} - u_n}{v_{n+1} - v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + e^{n+1}) - \ln(1 + e^n)}{(n+1) - n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\ln \frac{1 + e^{n+1}}{1 + e^n} \right) = \ln \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + e \cdot e^n}{1 + e^n} \right) \\
 &= \ln \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{e^n} + e}{\frac{1}{e^n} + 1} \right) = \ln e = 1
 \end{aligned}$$

3) Hay problemas en 0 y en 5. Los límites y los valores de la función en los puntos conflictivos y estamos listos.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(x^2 + 2x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x(x+2)}{x(x+2)} \cdot (x+2) = 2$$

Ahora, $f(0) = \beta = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. Por tanto, $\boxed{\beta = 2}$

Hemos impuesto a los límites laterales cumplir con su obligación, “ser iguales”. En el punto $x = 5$ tenemos

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{2x^2 - 15x + 25}{x^2 - 25} = \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{(2x - 5)(x - 5)}{(x - 5)(x + 5)} = \frac{1}{2}$$

como $f(5) = 5\alpha + \beta$, y $\beta = 2$, entonces $\boxed{\alpha = -\frac{3}{10}}$

4) Esta clarísimo, debemos hallar el δ de la definición.

$$|f(x) - L| = \left| \frac{1}{x-2} \right| = \left| \frac{x-3}{x-2} \right|$$

De $x \rightarrow 3$ sabemos que estamos trabajando en la vecindad del 3 con radio δ , esto es, en $|x - 3| < \delta$. Falta acotar $\frac{1}{|x-2|}$ y se acaba la demostración. Como siempre, partimos con $\delta = 1$, para tener

$$|x - 3| < 1 \implies -1 < x - 3 < 1 \implies 0 < x - 2 < 2$$

El $\delta = 1$ es muy grande, provoca un cero en el extremo del intervalo, lo que impide invertir para el acotamiento. Tratemos $\delta = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} |x - 3| < \frac{1}{2} &\implies -\frac{1}{2} < x - 3 < \frac{1}{2} \implies \frac{1}{2} < x - 2 < \frac{3}{2} \\ &\implies 2 > \frac{1}{x-2} > \frac{2}{3} \implies \frac{2}{3} < \frac{1}{x-2} < 2 \\ &\implies \frac{1}{|x-2|} < 2 \end{aligned}$$

De esta manera tenemos

$$|f(x) - L| = \left| \frac{x-3}{x-2} \right| < 2\delta = \varepsilon \implies \delta = \frac{\varepsilon}{2}$$

En consecuencia, con $\delta = \min\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\}$ se prueba que el límite de f es 1 cuando $x \rightarrow 3$.

FIN DEL TEST

Prueba # 4 Int. Cálculo

191294

1. La flexión F de una viga de longitud L viene dada por

$$F = 2x^4 - 5Lx^3 + 3L^2x^2$$

donde x se mide la distancia a un extremo de la viga. Hallar el valor de x que produce la máxima flexión.

2. Sea $f(x) = \frac{2(x^2 - 9)}{x^2 - 4}$. Indicar: dominio, simetrías, monotonía, concavidad, puntos de inflexión, asíntotas, valores máximos y mínimos. Graficar f con los datos anteriores
3. Hallar los valores de las constantes a, b, c , para que tenga un mínimo relativo en $(0, 0)$ y un máximo relativo en $(2, 2)$ la función

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

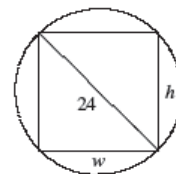
4. Hallar los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x + x)^{1/x}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{3}{\ln x} - \frac{2}{x-1} \right)$

5. Una viga de madera tiene sección rectangular como muestra la figura.

La resistencia R de la viga es directamente proporcional al ancho w y al cuadrado de la altura h . Hallar las dimensiones de la viga más resistente que puede cortarse de un tronco de 24 pulgadas de diámetro.



Puntaje $(4) + (8) + (6) + (6) + (6) = 30$ puntos

Respuestas

El problema está absolutamente directo, es cosa de derivar y ver que pasa

$$F = 2x^4 - 5Lx^3 + 3L^2x^2 \implies F' = 8x^3 - 15Lx^2 + 6L^2x$$

hacemos cero la derivada

$$F' = 0 \implies x(8x^2 - 15Lx + 6L^2) = 0$$

se deduce que $x = 0$, **no sirve** para máximo. De la cuadrática se obtiene dos valores

$$x_1 = \frac{15L + L\sqrt{33}}{16} \sim 1,3L; \quad x_2 = \frac{15L - L\sqrt{33}}{16} \sim 0,6L$$

Cada vez que hay valores que no son numéricos conviene usar la segunda derivada para determinar si es máximo o mínimo.

$$F' = 8x^3 - 15Lx^2 + 6L^2x \implies F'' = 24x^2 - 30Lx + 6L^2$$

se reemplazan los puntos críticos en la segunda derivada

$$\begin{aligned} F''(1,3L) &= 24 \cdot 1,69L^2 - 30L \cdot 1,3L + 6L^2 \\ &= 40,56L^2 - 39L^2 + 6L^2 > 0, \quad \text{mínimo} \end{aligned}$$

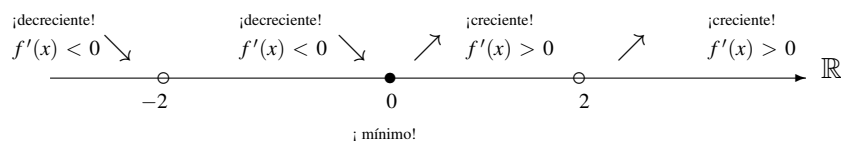
$$\begin{aligned} F''(0,6L) &= 24 \cdot 0,36L^2 - 30L \cdot 0,6L + 6L^2 \\ &= 8,64L^2 - 18L^2 + 6L^2 < 0, \quad \text{máximo} \end{aligned}$$

Luego, el x que produce la máxima flexión es $x = 0,6$

2) Para la función $f(x) = \frac{2(x^2 - 9)}{x^2 - 4}$, su dominio es $\mathbb{R} - \{\pm 2\}$. Se cumple que $f(x) = f(-x)$ pues la variable x se encuentra elevada sólo a exponentes pares. Por tanto, la función es **par**. Veamos ahora la derivada

$$f(x) = \frac{2(x^2 - 9)}{x^2 - 4} \implies f'(x) = \frac{20x}{(x^2 - 4)^2}$$

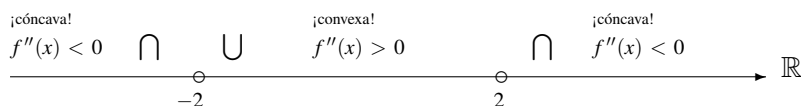
al igualar a cero, se obtiene que $x = 0$ es el único punto crítico. Por otra parte, dado que anulan el denominador, las rectas $x = 2$ y $x = -2$ son asíntotas verticales. Con todo, la recta tiene la siguiente forma



Se tiene que la función es decreciente en $(-\infty, -2)$ y en $(-2, 0)$. Creciente en $(0, 2)$ y en $(2, \infty)$. Las rectas $x = 2$ y $x = -2$ son asíntotas, no confundirse. El punto crítico $x = 0$ es de mínimo, cuyo valor es $f(0) = \frac{9}{2}$. Sigamos con la segunda derivada

$$f'(x) = \frac{20x}{(x^2 - 4)^2} \implies f'' = -\frac{20(3x^2 + 4)}{(x^2 - 4)^3}$$

Dado que no hay valores de x que anulen la segunda derivada, vemos la concavidad directamente en la recta real

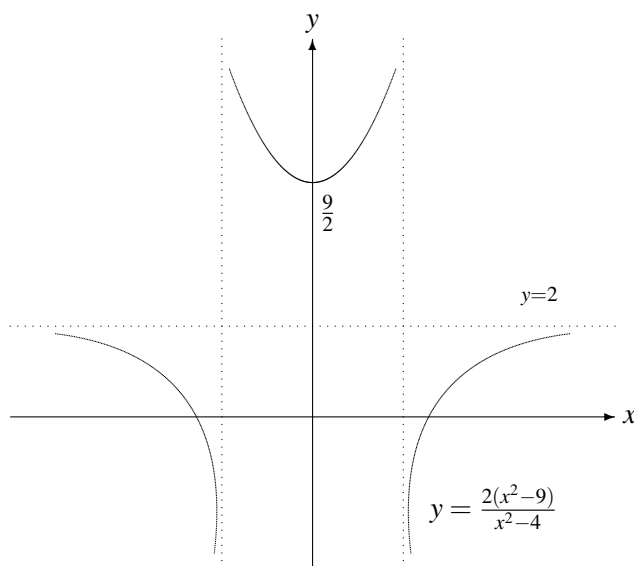


Faltan las asíntotas oblicuas y estamos listos.

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2(x^2 - 9)}{x(x^2 - 4)} = 0$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2(x^2 - 9)}{x^2 - 4} = 2$$

se concluye que $y = 2$ es asíntota horizontal. Con todo lo que hemos obtenido la gráfica se muestra a continuación



3) Después de leer hay que ir poniendo cada dato en su lugar, si lo haces bien es porque la materia ha sido entendida. Por ejemplo, dice que hay mínimo relativo en $(0, 0)$, entonces, una de las conclusiones

que se obtiene es que el punto ese está en la gráfica, y que $f(0) = 0$, lo mismo pasa con el $(2, 2)$, con esta condición tenemos que $f(2) = 2$. Anotemos lo que se tiene.

$$\begin{aligned} f(0) = 0 &\implies d = 0 \\ f(2) = 2 &\implies 8a + 4b + 2c = 2, \quad (*) \end{aligned}$$

Ahora agregamos la condición que los puntos dados son de mínimo y máximo respectivamente.

$$\begin{aligned} f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c = 0 &\implies f'(0) = 0 \implies c = 0 \\ &\implies f'(2) = 0 \implies 12a + 4b = 0 \quad (**) \end{aligned}$$

con $c = 0$ nos vamos a $(*)$ para quedar con la ecuación reducida, $4a + 2b = 1$, y al considerar el sistema formado por ésta y la ecuación $(**)$ y resolverlo se halla que $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{2}$. Se acabó el problema, lista la función

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2$$

4) Un buen trabajo algebraico y estos límites por L'Hôpital son *pan comido*.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [e^x + x]^{1/x} \sim 1^\infty \implies z = [e^x + x]^{1/x} \implies \ln z = \frac{1}{x} \ln[e^x + x]$$

Aplicamos límite en ambos lados de la última expresión para tener

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln z] &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \cdot \ln[e^x + x] \implies \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln[e^x + x]}{x} \sim \frac{0}{0} \\ &\xrightarrow{L'H} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{e^x + x} \cdot (e^x + 1)}{1} = 2 \end{aligned}$$

Luego,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln z = 2 \implies \lim_{x \rightarrow 0^+} z = e^2$$

$$\begin{aligned} b) \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{3}{\ln x} - \frac{2}{x-1} \right] &\sim \infty - \infty = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3(x-1) - 2 \ln x}{(x-1) \ln x} \sim \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3 - \frac{2}{x}}{\ln x + \frac{x-1}{x}} \sim \frac{1}{0} \end{aligned}$$

Luego,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{3}{\ln x} - \frac{2}{x-1} \right] = \infty$$

5) De la lectura del problema se plantea directamente la función objetivo. Al decir que *La resistencia R* de una viga es directamente proporcional al ancho, se está diciendo que es igual al producto de una constante k por el ancho w , pero hay más aún, la lectura sigue con ... y al cuadrado de la altura h , ello significa que R es también directamente proporcional con el cuadrado de h . Todo esto se escribe

$$R = k w h^2$$

k es una constante de proporcionalidad, que no interesa calcular. La fórmula de la resistencia tiene dos variables, w y h , debemos escribir una de ellas en función de la otra. ¿Cómo?, fácil, mirando la figura se ve que muy escondida se encuentra una foto de Pitágoras.

$$h^2 + w^2 = 24^2 = 576 \implies h^2 = 576 - w^2$$

Ahora si que tenemos a la resistencia en función de una sola variable

$$R = k w (576 - w^2) \implies R' = 576k - 3w^2k = 0 \implies w = \sqrt{\frac{576}{3}}$$

aproximando, este $w = 13,85$. La segunda derivada entra ahora en acción

$$R'' = -6wk \implies R''(13,85) = -6wk < 0$$

Así, este es un máximo. El valor de $h = 9,6$

¿Qué tal la prueba?, larga, ¡cierto! Hay que hacerse el ánimo, es casi siempre así, hay que venir fortacho, bien alimentado a la prueba. Sigamos revisando otras.



Prueba # 4 - Int. Cálculo

220496

- Sea $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x}$. Hallar: Dominio, intersecciones con los ejes, asíntotas, puntos críticos, extremos, intervalos de monotonía, intervalos de concavidad, puntos de inflexión. Con todo, hacer la gráfica de la función.
- Escriba en forma clara y legible la respuesta a los siguientes problemas:
 - Hallar $g'(x) = \frac{dg}{dx}$ si, $g(x) = f(x^{f(\arctg(x^{3/2}))})$
 - Hallar $g'(2)$ si $g(x) = x^2 f(\frac{x}{x-1})$, $f(2) = -3$, $f'(x) = \sqrt{x^2 + 5}$,
 - Hallar y'' si $x^2 + y^2 - 6y + 10 = 0$
- Suponga que su profesor de Cálculo se puede pasear solamente por el eje y , y que Ud. lo puede hacer por la curva $x^2 = 4y$. El *profe* está siempre sobre un punto del tipo $(0, b)$, hallar la menor distancia entre Ud. y su *profe*. Analizar todos los casos.
- Calcular los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} x^4 \left(\cos \frac{1}{x} - 1 + \frac{1}{2x^2} \right)$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 - 2^x)^{\sin x}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\operatorname{tg} x - 5}{\sec x + 4}$$

Puntaje: (15) + (15) + (14) + (16) = 60 puntos

Respuestas

1) Es claro que para $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x}$, $\text{dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$. Dado que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$ y que $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$, se sigue que la recta $x = 0$ es asíntota vertical. Veamos las oblicuas

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = 1$$

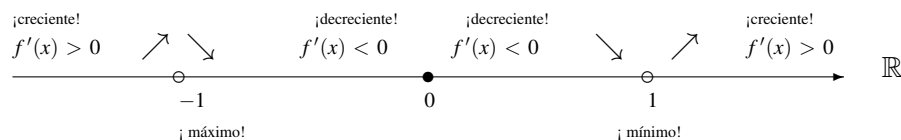
$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(x - 1 + \frac{1}{x}\right) - x\right] = -1$$

se concluye que $y = x - 1$ es asíntota oblicua.

Ahora hace su aparición la derivada

$$f(x) = x - 1 + \frac{1}{x} \implies f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

Los valores que anulan la derivada son $x = 1$ y $x = -1$. Ponemos todo en la recta

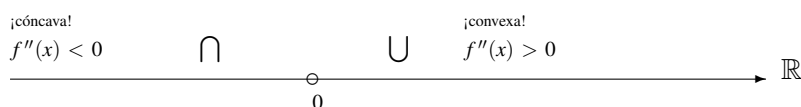


Se tiene que la función es decreciente en $(-1, 0)$ y $(0, 1)$. Creciente en $(-\infty, -1)$ y $(1, \infty)$. El punto crítico $x = -1$ es de máximo, y su valor $f(-1) = -3$. El punto $x = 1$ es de mínimo, su valor es $f(1) = 1$.

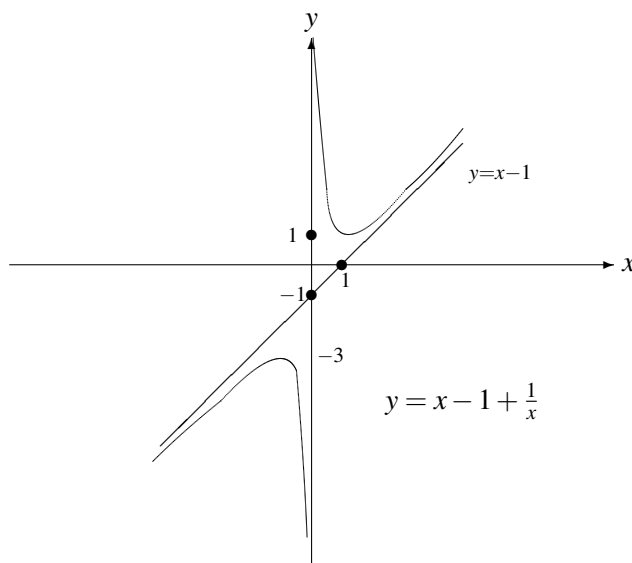
Veamos la segunda derivada

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \implies f''(x) = \frac{2}{x^3}$$

Como no hay valores de x que anulen la segunda derivada, vemos la concavidad directamente en la recta real



Ahora estamos en condiciones de hacer una buena gráfica. Ve la figura



2a) La función $g(x) = f(x^{f(\arctg(x^{3/2}))})$ es compuesta y está dada en términos de otra función, f . Con el fin de simplificar escritura, sea $z = x^{f(\arctg(x^{3/2}))}$, entonces, mirando con buenos ojos, empezamos a matar de izquierda a derecha. Lo primero que se ve es la f , la ¡destrozamos!

$$g'(x) = f'(z) \cdot z'$$

Ahora, $z = x^{f(\arctg(x^{3/2}))}$ es una **función elevada a función**. esta clase de funciones se derivan usando logaritmo.

$$z = x^{f(\arctg(x^{3/2}))} \implies \ln z = f(\arctg(x^{3/2})) \cdot \ln x$$

veamos como sale la derivada

$$\frac{1}{z} \cdot z' = f'(\arctg(x^{3/2})) \cdot \frac{\frac{3}{2}x^{1/2}}{1+x^3} \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot f(\arctg(x^{3/2}))$$

Hacemos $h = \arctg(x^{3/2})$. Al despejar z' se tiene

$$z' = x^{f(h)} \left(f'(h) \cdot \frac{\frac{3}{2}x^{1/2}}{1+x^3} \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot f(h) \right)$$

Ahora estamos listoco, volvemos al primer intento de derivada que hicimos para reemplazar allí este z' .

$$g'(x) = f'(z) \cdot \left[f'(h) \cdot \frac{\frac{3}{2}x^{1/2}}{1+x^3} \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot f(h) \right]$$

2b) $g(x) = x^2 f\left(\frac{x}{x-1}\right)$ es el producto entre una potencia y una función compuesta. Hallemos la derivada y después le aplicamos las condiciones dadas.

$$g'(x) = 2x f\left(\frac{x}{x-1}\right) + x^2 f'\left(\frac{x}{x-1}\right) \cdot \frac{-1}{(x-1)^2}$$

de esto,

$$g'(2) = 4f(2) + 4f'(2) \cdot (-1) = 4 \cdot (-3) + 4 \cdot 3 \cdot (-1) = -24$$

si hizo uso de las hipótesis, $f(2) = -3, f'(2) = 3$

2c) Para llegar a la segunda derivada es obvio que debemos tener la primera.

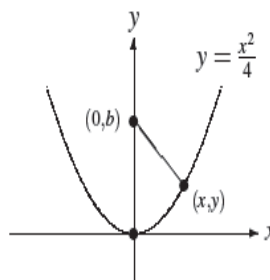
$$x^2 + y^2 - 6y + 10 = 0 \implies 2x + 2yy' - 6y' = 0 \implies y' = \frac{x}{3-y}$$

Ahora hay que derivar la implícita de la implícita

$$\begin{aligned} y' = \frac{x}{3-y} &\implies y'' = \frac{(3-y) - x \cdot (-y')}{(3-y)^2} \\ &\implies y'' = \frac{3-y + xy'}{(3-y)^2} \\ &\implies y'' = \frac{3-y + x \cdot \frac{x}{3-y}}{(3-y)^2} \\ &\implies y'' = \frac{(3-y)^2 + x^2}{(3-y)^3} \end{aligned}$$

3) La situación gráfica la muestra la figura

Hay tres casos; el primero es que el profe esté en el $(0,0)$ al mismo tiempo que el alumno, ¡qué suerte!, es como “pillarlo” en la oficina para ir a hacerle consultas. En este caso la distancia es cero (0). Una segunda situación es que el profe esté en un punto $(0,b)$ con $b > 0$ por supuesto, y el alumno lo mire desde el $(0,0)$, en tal caso la distancia es b .



El tercer caso es el de la figura, en algún punto (x,y) existe la menor distancia al punto $(0,b)$. Este problema es de optimización, se resuelve usando la derivada.

La función objetivo es la distancia entre los dos puntos, y se debe optimizar la distancia. El planteamiento del problema es

$$d[(x,y), (0,b)] = \sqrt{x^2 + (y-b)^2}, \quad x^2 = 4y$$

$$d^2[(x,y), (0,b)] = 4y + (y-b)^2, \quad \text{mejor al cuadrado}$$

Hemos tomado la distancia al cuadrado, resulta más simple y es lo mismo, pues andamos buscando el punto que hace la menor la distancia. Cuando queramos evaluar esa menor distancia ahí le sacamos la raíz. Para no confundir las cosas, sea $h = d^2$, entonces, la derivada de h con respecto de y es

$$h = 4y + (y-b)^2 \implies h' = 4 + 2(y-b)$$

al igualar a cero esta derivada se encuentra que

$$h' = 0 \implies y = b - 2$$

¿será de mínimo? Yo creo que sí, pero mejor usemos el dicho *Juan Segura vivió muchos años*, así que verifiquemos.

$$h' = 4 + 2(y - b) \implies h'' = 2 > 0, \quad \text{mínimo}$$

De esta forma, la menor distancia entre discípulo y maestro es

$$d = \sqrt{4y + (y - b)^2} \implies \sqrt{4(b - 2) + ((b - 2) - b)^2} = 2\sqrt{b - 1}$$

5) De seguro todos estos límites requieren L'Hôpital, pero no hay que olvidar que, entre medio uno puede arreglar el problema y usar L'Hôpital sólo cuando es estrictamente necesario.

$$\begin{aligned} a) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) &\sim \infty \cdot (\infty - \infty) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \sin x}{x^{3/2} \sin x} \sim \frac{0}{0} \text{ cr } = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{x^{3/2} \cos x + \frac{3}{2}x^{1/2} \sin x} \end{aligned}$$

observa que aquí tienes una variante, es cierto que la máscara del último límite es $\frac{0}{0}$, pero también es cierto que uno puede multiplicar por el conjugado de $1 - \cos x$ para producir el $\sin x$. Veamos esto último.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{x^{3/2} \cos x + \frac{3}{2}x^{1/2} \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{x^{1/2}(1 + \cos x)[x \cos x + \frac{3}{2} \sin x]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{3/2} \sin^2 x}{x^2(1 + \cos x)[x \cos x + \frac{3}{2} \sin x]} \end{aligned}$$

de nuevo hacemos una pausa para contarte que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{x^2} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + \cos x} = \frac{1}{2}$$

de modo que ya tenemos algo calculado. Vamos por lo que falta

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{3/2}}{x \cos x + \frac{3}{2} \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{3}{2}x^{1/2}}{\cos x - x \sin x + \frac{3}{2} \cos x} = \frac{0}{1 + \frac{3}{2}} = 0$$

Con esto se ha llegado a que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = 0$$

si no se hubiese optado por la variante, se tendría que haber aplicado como 5 veces más la regla de L'Hôpital. Esta es una de las sorpresitas que nos tienen los profes y que salen cuando nos creemos capos para cualquier L'Hôpital. Pero eso no es nada, mira el siguiente que hasta tiene cara de *maldito*.

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} x^4 \left(\cos \frac{1}{x} - 1 + \frac{1}{2x^2} \right) \sim \infty \cdot 0$$

Si “inocentemente” sigues el camino tradicional de aplicar la regla de L'Hôpital, verás que es un cuento de nunca acabar. Hay que aplicar, con toda la *lata* que eso produce ¡8 veces! la regla de L'Hôpital,

pero no en forma sencilla, sino que haciendo un montón de arreglos algebraicos que generalmente complican hasta al más avezado. Por eso te aconsejo que cada vez que aparezca el $\frac{1}{x}$ cambiarlo por un z , ¡jamás uses la letra u !, es de mala suerte, casi ningún límite sale bien. Veamos entonces como resulta este límite con el cambio de variable $z = \frac{1}{x}$.

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \infty} x^4 \left(\cos \frac{1}{x} - 1 + \frac{1}{2x^2} \right) &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z^4} \left[\cos z - 1 + \frac{z^2}{2} \right] \\
 &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2 \cos z - 2 + z^2}{2z^4} \sim \frac{0}{0} \\
 &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-2 \sin z + 2z}{8z^3} \sim \frac{0}{0} \\
 &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-\cos z + 1}{12z^2} \sim \frac{0}{0} \\
 &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{24z} \sim \frac{0}{0} \\
 &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cos z}{24} = \frac{1}{24}
 \end{aligned}$$

se usó 4 veces la regla de L'Hôpital, pero en cositas sencillas de derivar, y sin hacer arreglos algebraicos.

$$5c) \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 - 2^x)^{\sin x} \sim 0^0$$

Estos son los que se arreglan para usar L'Hôpital

$$z = (1 - 2^x)^{\sin x} \implies \ln z = \sin x \cdot \ln(1 - 2^x)$$

Ahora aplicamos límite

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0^-} \ln z &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \sin x \cdot \ln(1 - 2^x) \sim 0 \cdot (-\infty) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1 - 2^x)}{\operatorname{cosec} x} \sim \frac{\infty}{\infty} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1}{1-2^x} \cdot (-2^x) \ln 2}{-\operatorname{cosec} x \cdot \cotg x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2^x \ln 2 \cdot \sin^2 x}{(1 - 2^x) \cos x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2^x \ln 2}{\cos x} \cdot \frac{\sin^2 x}{1 - 2^x}
 \end{aligned}$$

Con los ojos bien abiertos, te das cuenta que

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2^x \ln 2}{\cos x} = \ln 2$$

por tanto, se nos reduce el problema a lo siguiente

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin^2 x}{1 - 2^x} \sim \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 \sin x \cdot \cos x}{-2^x \ln 2} = -\frac{0}{\ln 2} = 0$$

Tenemos entonces

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \ln z = 0 \implies \lim_{x \rightarrow 0^-} z = e^0 = 1$$

O, para ser más precisos

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (1 - 2^x)^{\sin x} = 1$$

$$5d) \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\operatorname{tg} x - 5}{\sec x + 4} \sim \frac{\infty}{\infty}$$

Este si que es fácil, ojalá vuelva a salir en prueba

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\operatorname{tg} x - 5}{\sec x + 4} = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sec^2 x}{\sec x \cdot \operatorname{tg} x} = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sec x}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1}{\sin x} = 1$$



Prueba # 4 - Int. Cálculo

190497

1. Dada la curva $y^2 - x = \ln\left(\frac{y}{x}\right)$. Hallar la ecuación de la recta tangente en el punto $(1, 1)$
2. Se estima que dentro de t meses, la población del pueblo de los “canibales” será de $P(t) = t^2 + 20 + 8000$ individuos.
 - a) Hallar la **razón de cambio** de la población con respecto al tiempo dentro de 15 años.
 - b) Hallar en cuánto cambia la población durante el mes 16.
3. Analizar la derivabilidad de la función f dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+x^2}, & x \leq 1 \\ (x-1)^3, & 1 < x < 3 \\ 1 + 2x + e^{x^2-9}, & x \geq 3 \end{cases}$$

4. Hallar la derivada que se indica
 - a) $\frac{dy}{dz}$, si $y = \arctg\left[\ln\left(\frac{1+\sin \frac{z^2}{2z}}{1-\cos \frac{z^2}{2z}}\right)\right] + x^z$
 - b) $\frac{d^2y}{dx^2}$, si $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$
 - c) $\frac{du}{dv}$, $u = f(v)$, si $u = \sin[v^{\cos v} + 2^{x-1}] - \ln \frac{1+v}{1-v^x}$, x es constante.
 - d) $\frac{dy}{dt}$, donde $3x^2y - 4xy^2 + 7y^3 = 0$, $2x^3 - 3xt^2 + t^3 = 1$
5. Hallar $g'(0)$, si f es función **par** y derivable, y g es función derivable tal que

$$g(x) = x + \left(1 + \frac{x^3}{3}\right) \cdot f(x)$$

Puntaje: $(8) + (5+5) + (12) + (20) + (10) = 60$ puntos

Respuestas

1) Es claro que la función dada es de la forma implícita. La ecuación que debemos formar es del tipo

$$y - y_0 = m(x - x_0), \quad m = y'(x_0, y_0)$$

El punto (x_0, y_0) corresponde a $(1, 1)$, de manera que sólo falta hallar la derivada.

$$\begin{aligned} y^2 - x - \ln\left(\frac{y}{x}\right) &= 0 \implies 2yy' - 1 - \frac{x}{y} \cdot \frac{y' \cdot x - y}{x^2} = 0 \\ \implies y'(2x^2y - x^2) &= x^2y - xy \\ \implies y' &= \frac{xy(x-1)}{x^2(2y-1)}, \quad x \neq 0, y \neq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

se obtiene que $y'(1, 1) = 0$. Por tanto, la ecuación de la recta tangente es $y = 1$.

2) La población es $P(t) = t^2 + 20t + 8000$, con t medido en meses.

a) La razón de cambio dentro de 15 años (180 meses), o en cualquier tiempo lo proporciona la derivada

$$P(t) = t^2 + 20t + 8000 \implies P'(t) = 2t + 20 \implies P'(180) = 380$$

así, la razón de crecimiento al cabo de 15 años es de 380.

b) Para saber el cambio experimentado por la población en un mes, hay que saber que pasa el mes anterior.

$$P(15) = 225 + 300 + 8000 = 8525$$

$$P(16) = 256 + 320 + 8000 = 8576$$

$$P(16) - P(15) = 51 \text{ habitantes}$$

3) Los problemas de derivabilidad tienen que ver con las derivadas laterales en un punto. Pero ¡atención!, ha sido dicho que para estudiar derivabilidad o diferenciabilidad, es requisito indispensable que primero haya continuidad, si no hay continuidad, no hay **nada que estudiar** respecto de diferenciabilidad. Veamos que sucede con la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+x^2}, & x \leq 1 \\ (x-1)^3, & 1 < x < 3 \\ 1+2x+e^{x^2}-9, & x \geq 3 \end{cases}$$

Los problemas se presentan en $x = 1$ y en $x = 3$. Se estudian separadamente.

Primer Caso $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1)^3 = 0$$

¡Oh sorpresa!, **no hay continuidad**, entonces la función **no es derivable** en $x = 1$.

Segundo Caso $x = 3$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1)^3 = 8$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (1 + 2x + e^{x^2-9}) = 8$$

Hay continuidad, entonces podemos pensar en derivabilidad.

Derivada izquierda

$$\begin{aligned} f'_-(3) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(x-1)^3 - 8}{x - 3} \sim \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3(x-1)^2}{1} = 12, \quad \text{L'Hôpital} \end{aligned}$$

Derivada derecha

$$\begin{aligned} f'_+(3) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1 + 2x + e^{x^2-9} - 8}{x - 3} \sim \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2 + 2xe^{x^2-9}}{1} = 8, \quad \text{L'Hôpital} \end{aligned}$$

De esta manera, la función **no es derivable** en $x = 3$

4a) La función a derivar es $y = \arctg \left[\ln \left(\frac{1 + \operatorname{sen} z^2}{1 - \cos 2z} \right) \right] + x^z$

para simplificar escritura, sea $h(z) = \ln \left(\frac{1 + \operatorname{sen} z^2}{1 - \cos 2z} \right)$

con esto la función original equivale a

$$y = \arctg h(z) + x^z = y_1 + y_2$$

hay que derivar una suma, se deriva cada sumando por separado

$$y'_1 = \frac{1}{1 + h^2(z)} \cdot h'(z)$$

veamos quien es $h'(z)$

$$h'(z) = \frac{1 - \cos 2z}{1 + \operatorname{sen} z^2} \cdot \frac{2z \cos z^2 (1 - \cos 2z) + 2 \operatorname{sen} 2z (1 + \operatorname{sen} z^2)}{(1 - \cos 2z)^2}$$

de esta forma,

$$y'_1 = \frac{1 - \cos 2z}{1 + \operatorname{sen} z^2} \cdot \frac{2z \cos z^2 (1 - \cos 2z) + 2 \operatorname{sen} 2z (1 + \operatorname{sen} z^2)}{(1 + h^2(z))(1 - \cos 2z)^2}$$

Por otra parte,

$$y_2 = x^z \implies y'_2 = x^z \cdot \ln x$$

La derivada de este tipo es semejante a derivar respecto de x la expresión a^x , que es como sabemos, $a^x \ln a$. En el caso de x^z se pide derivada respecto de z (exponente), la x juega aquí el papel de constante, como la a en a^x . Se concluye que la derivada es

$$y' = \frac{1 - \cos 2z}{1 + \sin z^2} \cdot \frac{2z \cos z^2 (1 - \cos 2z) + 2 \sin 2z (1 + \sin z^2)}{(1 + h^2(z))(1 - \cos 2z)^2} + x^z \ln x$$

4b) Es una paramétrica. Se usa regla de la cadena

$$x = f(t), \quad y = g(t) \implies \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

En este caso, $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$. Se tiene

$$\frac{dy}{dt} = e^t \cos t - e^t \sin t \quad \frac{dx}{dt} = e^t \sin t + e^t \cos t$$

como $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{e^t(\sin t + \cos t)}$, se concluye que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^t(\cos t - \sin t)}{e^t(\sin t + \cos t)} = \frac{\cos t - \sin t}{\sin t + \cos t}$$

Bien, ahora hay que ir por la segunda derivada, ¿recuerdas lo del *saco de manzanas y el jugo de peras*?

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\cos t - \sin t}{\sin t + \cos t} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\cos t - \sin t}{\sin t + \cos t} \right) \cdot \frac{dt}{dx} \\ &= \frac{-(\sin t + \cos t)^2 - (\cos t - \sin t)^2}{(\sin t + \cos t)^2} \cdot \frac{1}{e^t(\sin t + \cos t)} \\ &= \frac{-(\sin t + \cos t)^2 - (\cos t - \sin t)^2}{e^t(\sin t + \cos t)^3} \\ &= \frac{-2}{e^t(\sin t + \cos t)^3} \end{aligned}$$

4c) No hay que confundirse con la letras, siempre la pregunta debe ser clara. En este caso se dice que $u = f(v)$, es decir, que u es función v . Se pide encontrar derivada $\frac{du}{dv}$, que es de u respecto de v . ¡que no os asusten, que no os amedrenten con otras letras!

$$u = \sin [v^{\cos v} + 2^{x-1}] - \ln \frac{1+v}{1-v^x}$$

es una simple diferencia de funciones lo que hay que derivar. Se pueden cambiar las letras, eso no es pecado. Sea $u = y$, $v = x$, $x = m$, entonces

$$y = \sin [x^{\cos x} + 2^{m-1}] - \ln \frac{1+x}{1-x^m}$$

para efectos de derivadas, el comportamiento de la x en la ecuación original es el de una constante, en esta última se ha cambiado por m otra constante. Además, ahora es $y = f(x)$. Se tiene

$$y = \sin [x^{\cos x} + 2^{m-1}] - \ln \frac{1+x}{1-x^m} = y_1 - y_2$$

derivamos cada sumando en forma separada. Sea $z = [x^{\cos x} + 2^{m-1}]$, entonces

$$y_1 = \operatorname{sen} z \implies y'_1 = \cos z \cdot z'$$

para z' tenemos,

$$\begin{aligned} z = [x^{\cos x} + 2^{m-1}] &\implies z' = (x^{\cos x})' + (2^{m-1})' \\ &\implies z' = (x^{\cos x})' + 0 \end{aligned}$$

Nótese que 2^{m-1} es constante respecto de x , luego su derivada es cero. Para hallar la derivada del primer sumando nos fijamos que se trata de derivar función elevada a función. Usando logaritmos tenemos

$$\begin{aligned} H = x^{\cos x} &\implies \ln H = \cos x \cdot \ln x \\ &\implies \frac{1}{H} \cdot H' = -\operatorname{sen} x \cdot \ln x + \cos x \cdot \frac{1}{x} \\ &\implies H' = H \left[-\operatorname{sen} x \cdot \ln x + \frac{\cos x}{x} \right] \\ &\implies H' = x^{\cos x} \left[-\operatorname{sen} x \cdot \ln x + \frac{\cos x}{x} \right] \end{aligned}$$

de la expresión original recién tenemos la derivada del primer sumado. Nos falta la del segundo, que viene ahora

$$\begin{aligned} y_2 = \ln \frac{1+x}{1-x^m} &\implies y'_2 = \frac{1-x^m}{1+x} \cdot \frac{1+x^{m-1}}{(1-x^m)^2} \\ &\implies y'_2 = \frac{1+x^{m-1}}{(1-x^m)(1+x)} \end{aligned}$$

Con esto estamos terminando, finalmente, la derivada de

$$y = \operatorname{sen} [x^{\cos x} + 2^{m-1}] - \ln \frac{1+x}{1-x^m}$$

es

$$y' = x^{\cos x} \cos [x^{\cos x} + 2^{m-1}] \left[\frac{\cos x}{x} - \operatorname{sen} x \cdot \ln x \right] - \frac{1+x^{m-1}}{(1-x^m)(1+x)}$$

$$4d) 3x^2y - 4xy^2 + 7y^3 = 0, \quad 2x^3 - 3xt^2 + t^3 = 1$$

Hay que observar que la relación entre x e y viene dada en forma implícita, lo mismo que la relación entre x y t . Se pide $\frac{dy}{dt}$, es evidente que hay que pasar por x para llegar a t . Se tiene

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

Sacamos cada derivada por separado usando el Teorema de la función implícita, $\frac{dw}{dz} = -\frac{F_z}{F_w}$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\frac{F_x}{F_y} = \frac{6xy - 4y^2}{3x^2 - 8xy + 21y^2} = \frac{2y(3x - 2y)}{3x^2 - 8xy + 21y^2} \\ \frac{dx}{dt} &= -\frac{F_t}{F_x} = \frac{-6xt + 3t^2}{6x^2 - 3t^2} = \frac{3t(t - 2x)}{3(x^2 - t^2)} \end{aligned}$$

De esta forma,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y(3x-2y)}{3x^2-8xy+21y^2} \cdot \frac{t(t-2x)}{(x^2-t^2)}$$

5) Para hallar $g'(0)$ se usa la definición o bien se calcula $g'(x)$ y luego se reemplaza x por 0. Hacemos el intento directamente en la derivada

$$g(x) = x + \left(1 + \frac{x^3}{3}\right) \cdot f(x) \implies g'(x) = 1 + x^2 f(x) + \left(1 + \frac{x^3}{3}\right) f'(x)$$

a partir de esto $x = 0$ para tener $g'(0) = 1 + f'(0)$. Como f entonces $f(x) = f(-x)$. Derivando se obtiene $f'(x) = -f'(-x)$, de lo cual

$$f'(0) = -f'(0) \implies f'(0) = 0$$

En consecuencia, $g'(0) = 1$.



Prueba # 4 - Int. Cálculo

1. Calcular $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$

2. Hallar $y'' = \frac{d^2 y}{dx^2}$ si $y = \ln(1+t^2)$, $x = \arctg t$

3. Hallar la derivada y' (sin simplificar) de:

a) $y = \sin^4 \sqrt[3]{\ln^5 (x^5 + 4^x)^2}$

b) $(x-1)^{y+1} + \sin(x+y^2) = (y+1)^{x+1}$

4. Considerar la función $y = \frac{1+x^2}{x+1}$

- a) Hallar dominio e intersecciones con los ejes coordenados
- b) Calcular puntos críticos y su naturaleza (máximos o mínimos)
- c) Determinar intervalos de monotonía y concavidad
- d) Encontrar asíntotas y puntos de inflexión.

5. Sobre la parábola $y = x^2$ se pasea un insecto *odioso* que le hace morisquetas a una araña que sólo puede moverse sobre la recta $y = x - 3$. Pero ¡atención!, la araña es súper sabia en geometría, no olvide sus telarañas, de aquí que se va a instalar “estratégicamente” en un punto (x, y) de la recta en donde exista la **mínima** distancia a la parábola y esperar pacientemente que pase el insecto para cazarlo y servírselo a la *plancha*. Hallar la distancia mínima entre la araña y el insecto.

Puntaje: $(6) + (12) + (12) + (20) + (10) = 60$ puntos

Respuestas

1) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) \sim \infty - \infty$

Estas son las máscaras que le gustan a L'Hôpital.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x - x + 1}{(x-1) \ln x} \sim \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\ln x + \frac{x-1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x}{x \ln x + x - 1} \sim \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \ln x}{2 + \ln x} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

2) Segunda derivada de la paramétrica, $y = \ln(1+t^2)$, $x = \arctan t$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2t}{1+t^2} \quad y \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{1+t^2} \implies \frac{dy}{dx} = \frac{2t}{1+t^2} \cdot (1+t^2) = 2t$$

la segunda derivada necesita regla de la cadena

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} (2t) = \frac{d}{dt} (2t) \cdot \frac{dt}{dx} = 2(1+t^2)$$

3a) $y = \sin^4(\sqrt[3]{\ln^5(x^5 + 4^x)^2})$

Todos vemos una *potencia* del seno compuesto. Hay que matar primero esa potencia

$$y' = 4 \sin^3(\sqrt[3]{\ln^5(x^5 + 4^x)^2}) \cdot \cos(\sqrt[3]{\ln^5(x^5 + 4^x)^2}) \cdot \left[\sqrt[3]{\ln^5(x^5 + 4^x)^2} \right]'$$

Para derivar el factor que falta, lo escribimos como potencia

$$\sqrt[3]{\ln^5(x^5 + 4^x)^2} = [\ln(x^5 + 4^x)^2]^{5/3}$$

Derivando esta potencia

$$[(\ln(x^5 + 4^x)^2)^{5/3}]' = \frac{5}{3} (\ln(x^5 + 4^x)^2)^{2/3} \cdot \frac{1}{(x^5 + 4^x)^2} \cdot 2(x^5 + 4^x) \cdot (5x^4 + 4^x \ln 4)$$

se concluye que

$$y' = \frac{40}{3} \sin^3(\sqrt[3]{\ln^5(x^5 + 4^x)^2}) \cdot \cos(\sqrt[3]{\ln^5(x^5 + 4^x)^2}) \cdot (\ln(x^5 + 4^x)^2)^{2/3} \cdot \frac{x^5 + 4^x}{(x^5 + 4^x)^2} \cdot (5x^4 + 4^x \ln 4)$$

3b) $(x-1)^{y+1} + \sin(x+y^2) = (y+1)^{x+1}$

Una linda y hermosa implícita, que resolvemos por el teorema del mismo nombre. Para resolver escribimos

$$F(x, y) = (x-1)^{y+1} + \sin(x+y^2) - (y+1)^{x+1} = 0$$

a partir de esto se tiene que

$$F_x = (y+1)(x-1)^y + \cos(x+y^2) - (y+1)^{x+1} \ln(y+1)$$

$$F_y = (x-1)^{y+1} \ln(x-1) + 2yy' \cos(x+y^2) - (x+1)(y+1)^x$$

con esto formamos la derivada buscada, $y' = -\frac{F_x}{F_y}$, que es

$$y' = -\frac{(y+1)(x-1)^y + \cos(x+y^2) - (y+1)^{x+1} \ln(y+1)}{(x-1)^{y+1} \ln(x-1) + 2yy' \cos(x+y^2) - (x+1)(y+1)^x}$$

4) La función $y = \frac{1+x^2}{x+1}$, tiene $\text{dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$, la recta $x = 1$ es asíntota vertical, la función no es par ni impar. Para ver intersecciones con los ejes, si $x = 0$, entonces $y = 1$, con lo que la curva pasa por el punto $(0, 1)$. Cuando $y = 0$, no hay valores de x , lo que significa que no hay cortes con el eje y . Veamos asíntotas oblicuas.

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+x^2}{x(x+1)} = 1$$

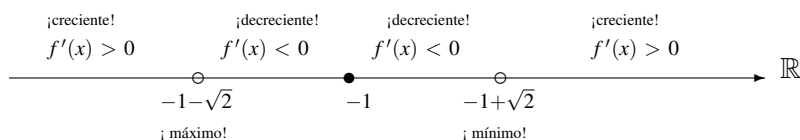
$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{1+x^2}{x+1} - x \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-x}{x+1} = -1$$

se concluye que $y = x - 1$ es asíntota oblicua.

La derivada proporciona otros antecedentes.

$$y = \frac{1+x^2}{x+1} \implies y' = \frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}$$

esta derivada se anula si $x^2 + 2x - 1 = 0$. Al resolver se encuentra que $x_1 = -1 + \sqrt{2}$, $x_2 = -1 - \sqrt{2}$. Ponemos estos puntos críticos más el *prohibido* en la recta.



Se tiene que la función es:

- decreciente en $(-1 - \sqrt{2}, -1)$ y $(-1, -1 + \sqrt{2})$.
- creciente en $(-\infty, -1 - \sqrt{2})$ y $(-1 + \sqrt{2}, \infty)$.
- el punto crítico $-1 - \sqrt{2}$ es de máximo, y su valor es $f(-1 - \sqrt{2}) \sim -4,8$.
- el punto $-1 + \sqrt{2}$ es de mínimo, su valor es $f(-1 + \sqrt{2}) \sim 0,8$.

Veamos la segunda derivada

$$f'(x) = \frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2} \implies f'' = \frac{4}{(x+1)^3}$$

No hay valores de x que anulen la segunda derivada, vemos la concavidad directamente en la recta real



La figura (a) siguiente es la gráfica de la función.

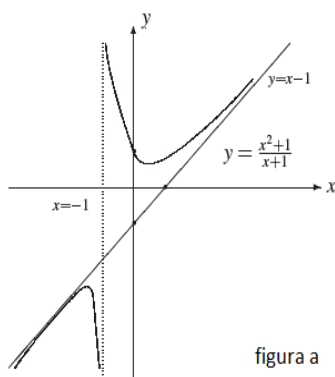


figura a

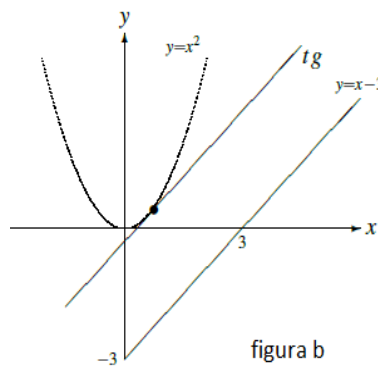


figura b

5) Este problema de optimización se plantea con mayor precisión si hacemos un bosquejo (figura b) de la situación.

Busquemos la ecuación de la recta tangente a la parábola que tenga la misma pendiente de la recta. Esto con el fin de tener que optimizar distancia entre punto de la parábola y la recta.

$$y = x^2 \implies y' = 2x = 1 \implies x = \frac{1}{2} \implies y = \frac{1}{4}$$

Hemos encontrado el punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ en la parábola. Lo que viene ahora es optimizar la distancia entre este punto y la recta de ecuación $x - y - 3 = 0$. Recordar que

$$d[(x_0, y_0), ax + by + c = 0] = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

En el caso que estamos analizando esto equivale a

$$d\left[\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right), x - y - 3 = 0\right] = \frac{|\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - 3|}{\sqrt{2}} = \frac{11}{4\sqrt{2}}$$

esta es la mínima distancia entre la araña y el insecto. No se pide determinar el punto (x, y) sobre la recta donde se para la araña. Dejémosle como una simple entretenición para un fin de semana ocioso. La respuesta es $(\frac{11}{8}, -\frac{5}{8})$



Examen - Int. Cálculo

1. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(1 - \cos \frac{1}{x}\right)$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{1}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} + \dots + \frac{\sqrt{n}}{n+1}}{(n+1)^{1/2}}$

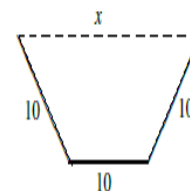
2. Dada la función $y = x + 3 + \frac{x}{x-4}$. Graficar, indicando:

a) Dominio e intersecciones con los ejes coordenados

- b) Puntos críticos y su naturaleza (máximos o mínimos)
- c) Intervalos de monotonía y concavidad
- d) Asíntotas y puntos de inflexión.

3.

La Intendencia solicita a la Facultad de Ingeniería construir un canal de regadío con las siguientes características: Abierto, la base y los lados del canal deben ser de 10 cms. de ancho, además, los costados han de estar igualmente inclinados respecto a la base para que el canal tenga volumen máximo.



Determinar el ancho superior del canal. El Decano solicita a los profes de cálculo plantear el problema a sus alumnos de primer año los que sin duda resolverán el problema y sale gratis (eso piensa el Decano ... y nosotros también)

Puntaje: 20 puntos cada problema = 60 puntos

Respuestas

1a) Si tienes buena memoria recordarás que en alguna parte, en algún lugar o en alguna ocasión se dijo que cada vez que aparezca un $\frac{1}{x}$, de inmediato hay que cambiarlo por un z . Mira que fácil resulta el cálculo.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(1 - \cos \frac{1}{x} \right) &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z^2} \cdot (1 - \cos z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z}{z^2} \sim \frac{0}{0} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{2z} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

1b) Este problema uno lo mira, y sabe que tiene que rezarle a Stolz.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{1}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} + \dots + \frac{\sqrt{n}}{n+1}}{(n+1)^{1/2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n - u_{n-1}}{v_n - v_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{n}}{n+1}}{(n+1)^{1/2} - n^{1/2}}$$

Ahora, en el denominador se produce un $\infty - \infty$, eso hace necesario multiplicar por el conjugado para salir de la situación

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{n}}{n+1}}{(n+1)^{1/2} - n^{1/2}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}[(n+1)^{1/2} + n^{1/2}]}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n(n+1)} + n}{n+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{1+1}{1} = 2\end{aligned}$$

2) La función $y = x + 3 + \frac{x}{x-4}$ tiene dominio todos los reales, excepto el 4, no es par ni impar, tiene por asíntota vertical la recta $x = 4$. Veamos intersecciones con los ejes, si $x = 0$, entonces $y = 3$, con lo que la curva pasa por el punto $(0, 3)$. Si $y = 0$, entonces $x = \pm\sqrt{3}$, lo que significa que la curva corta en $(-\sqrt{3}, 0)$ y en $(\sqrt{3}, 0)$.

Veamos asíntotas oblicuas.

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x-4}\right) = 1$$

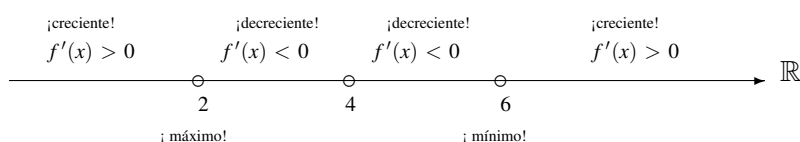
$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[3 + \frac{x}{x-4}\right] = 4$$

se concluye que $y = x + 4$ es asíntota oblicua.

Ahora empieza a trabajar la derivada.

$$y = x + 3 + \frac{x}{x-4} \Rightarrow y' = 1 - \frac{4}{(x-4)^2} = \frac{(x-4)^2 - 4}{(x-4)^2}$$

al igualar a cero se obtiene $x = 2$, $x = 6$ como puntos críticos. Nos situamos en la recta



Se tiene que la función es decreciente en $(2, 4)$ y $(4, 6)$. Creciente en $(-\infty, 2)$ y $(6, \infty)$. El punto crítico $x = 2$ es de máximo, y su valor es $f(2) = 4$. El punto $x = 6$ es de mínimo, su valor es $f(6) = 12$.

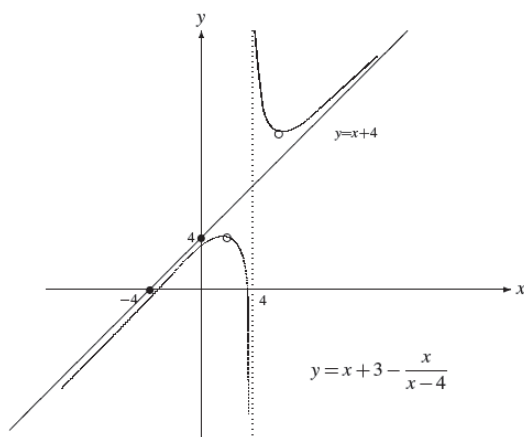
La segunda derivada

$$f'(x) = \frac{(x-4)^2 - 4}{(x-4)^2} \Rightarrow f'' = \frac{8}{(x-4)^3}$$

No hay valores de x que anulen la segunda derivada, veamos la concavidad en la recta

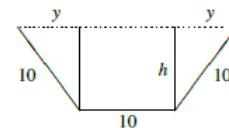


La gráfica resulta como muestra la figura



5) La figura ayuda n . Se muestra un corte plano del canal, piensa que es la boca del canal, mientras mayor sea la abertura de ésta, mayor será la capacidad (volumen). En la lectura dice ... *el canal tenga volumen máximo*.

Esto significa que debe pasar un caudal de agua lo más grande posible, esto ya es entonces un problema de optimización. Ahora bien, las paredes del canal juegan un papel fundamental ya que inciden en el ancho superior. La **función objetivo** es el **área** del corte (figura). Veamos como plantear el problema.



Al trazar las dos rectas verticales que muestra la figura, el área queda como la suma de dos triángulos y un cuadrado. Con esto podemos plantear la función objetivo

$$A = 2 \cdot \frac{h}{2} \sqrt{100 - h^2} + 10h$$

Al simplificar y derivar se tiene

$$\begin{aligned} A = h \sqrt{100 - h^2} + 10h &\Rightarrow A' = \sqrt{100 - h^2} - \frac{h^2}{\sqrt{100 - h^2}} + 10 \\ &\Rightarrow A' = \frac{100 - 2h^2 + 10\sqrt{100 - h^2}}{\sqrt{100 - h^2}} \end{aligned}$$

igualamos a cero esta derivada

$$\begin{aligned} A' = 0 &\Rightarrow 100 - 2h^2 + 10\sqrt{100 - h^2} = 0 \\ &\Rightarrow h^2 - 50 = 5\sqrt{100 - h^2} \quad /(\cdot)^2 \\ &\Rightarrow h^4 - 75h^2 = 0 \Rightarrow h^2(h^2 - 75) = 0 \\ &\Rightarrow h = 5\sqrt{3} \end{aligned}$$

Veamos, con la primera derivada que clase de punto es éste. Por si acaso, el uso de la segunda derivada es más complicado porque tiene un montón de cálculos. El punto $x = 5\sqrt{3} \sim 8,66$. Considerando $x = 8$ y $x = 9$ lo sabemos todo

$$\begin{aligned} A'(8) &= \frac{100 - 128 + 60}{6} \sim 5,33 > 0 \\ A'(9) &= \frac{100 - 162 + 10\sqrt{19}}{\sqrt{19}} \sim -18,41 < 0 \end{aligned}$$

como la pendiente pasa, de positiva a la izquierda de $x = 5\sqrt{3}$, a negativa a la derecha del mismo punto, entonces estamos en presencia de un máximo. Para este valor de h , el valor de y es

$$y = \sqrt{100 - h^2} = \sqrt{100 - 75} = 5$$

En consecuencia, la parte superior debe tener una abertura (no confunda con *obertura*) de $x = 20$ centímetros

Como era de suponer, no faltó el *cerebritito* que resolvió el problema, lo que no defraudó la tremenda confianza depositada por el Decano en el profe de Cálculo y sus boys.



Universidad de la Frontera

Facultad de Ingeniería y Ciencias

Departamento de Matemática y Estadística

Test 1: Matemáticas- Corona virus 2021

actividad 1 Se sabe que $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x - \sqrt{4x^2 + kx - 1}) = 4$, el valor de $k = \dots$

Respuesta:

La máscara del límite es $\infty - \infty$. Hacemos uso del conjugado

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (2x - \sqrt{4x^2 + kx - 1}) = \lim_{x \rightarrow \infty} (2x - \sqrt{4x^2 + kx - 1}) \cdot \frac{2x + \sqrt{4x^2 + kx - 1}}{2x + \sqrt{4x^2 + kx - 1}}$$

al operar

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (2x - \sqrt{4x^2 + kx - 1}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - (4x^2 + kx - 1)}{2x + \sqrt{4x^2 + kx - 1}}$$

al simplificar

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (2x - \sqrt{4x^2 + kx - 1}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-kx + 1}{2x + \sqrt{4x^2 + kx - 1}}$$

miramos los grados. Uno arriba y uno abajo. Dividimos los coeficientes

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-kx + 1}{2x + \sqrt{4x^2 + kx - 1}} = \frac{-k}{2 + \sqrt{4}} = \frac{-k}{4} = 4$$

El valor de $k = -16$

actividad 2 Se sabe que $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2x + 3}{2x + 1} + ax + b \right) = 0$. El valor de $a =$ el valor de $b =$

La máscara del límite es $\infty + \infty$. Hacemos uso de un común denominador

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2x + 3}{2x + 1} + ax + b \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2x + 3 + (2x + 1)(ax + b)}{2x + 1} \right)$$

se puede escribir

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2x + 3 + 2ax^2 + 2bx + ax + b}{2x + 1} \right)$$

que es equivalente con

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2(1 + 2a) + x(2 + b + a) + (3 + b)}{2x + 1} \right)$$

Como el límite es al infinito, miramos los grados

- Para que exista límite, el acompañante de x^2 debe ser cero. Esto es,

$$1 + 2a = 0 \implies a = -\frac{1}{2}$$

lo que queda es

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x(2+b+a) + (3+b)}{2x+1} \right)$$

Tenemos iguales los grados del numerador y denominador. Dividimos los coeficientes

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x(2+b+a) + (3+b)}{2x+1} \right) = \frac{2+b+a}{2}$$

pero $a = -\frac{1}{2}$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x(2+b+a) + (3+b)}{2x+1} \right) = \frac{2+b-\frac{1}{2}}{2}$$

al reducir

$$\frac{4+2b-1}{4} = 0 \implies 2b = -3 \implies b = -\frac{3}{2}$$

actividad 3 Verdadero o Falso.

1. La asíntota horizontal de la función $f(x) = \frac{e^x - 2}{e^x - 1}$ es $y = 2$.

Respuesta:

Se debe calcular el límite para la variable tendiendo al infinito

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - 2}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{e^x}}{1 - \frac{1}{e^x}} = 1$$

Por tanto, la recta $y = 2$ **NO** es asíntota horizontal

2. La asíntota **vertical** de la función $f(x) = \frac{e^x - 2}{e^x - 1}$ es $x = 1$

Respuesta:

FALSO

$$f(x) = \frac{e^x - 2}{e^x - 1} \text{ anula el denominador para } x = 0$$

Pero este $x = 0$ no anula el numerador, por tanto $x = 0$ es asíntota vertical.

actividad 4 La asíntota oblicua de la función $f(x) = -\frac{x^2}{x+1}$ es:

Recordar que la asíntota es de la forma $y = mx + n$

$$\blacksquare m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x(x+1)} = -1$$

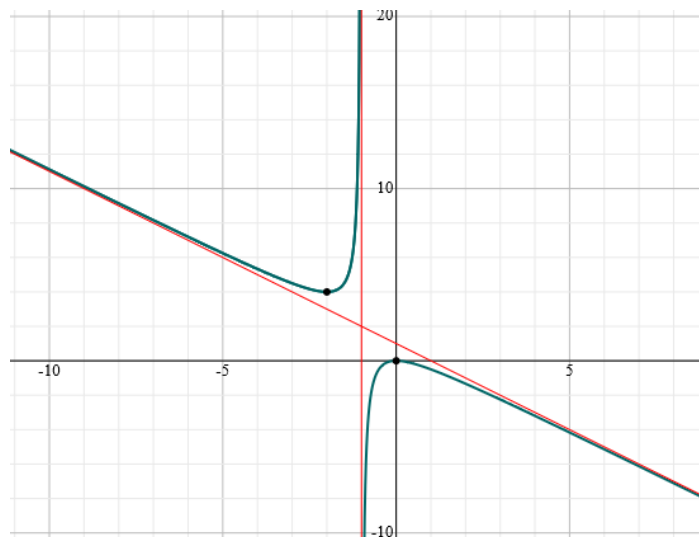
$$\blacksquare n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{x^2}{x+1} + x \right)$$

al operar

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-x^2}{x+1} + x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+1} \right) = 1$$

En consecuencia, la asíntota oblicua es

$$y = -x + 1$$



actividad 5 Anotar los límites laterales de la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{5-x}-2}{x^2-1} & , \text{ si } x < 1 \\ \frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1} & , \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

Esto es;

- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \text{-----}$
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \text{-----}$

Respuesta:

El límite por izquierda se toma para $x < 1$. Se tiene

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{5-x}-2}{x^2-1} \sim \frac{0}{0}$$

El conjugado o L'Hopital

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{5-x}-2}{x^2-1} \stackrel{LH}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-\frac{1}{2\sqrt{5-x}}}{2x}$$

al evaluar

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-\frac{1}{2\sqrt{5-x}}}{2x} = -\frac{1}{8}$$

El límite por derecha es, para $x > 1$. Se tiene

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1} \sim \frac{0}{0}$$

El conjugado o L'Hopital

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1} \stackrel{LH}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+3}}}{2x}$$

al evaluar

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{2\sqrt{x+3}} = \frac{1}{8}$$

actividad 7 La población de insectos en una laguna evoluciona con el paso de x días según la siguiente función:

$$f(x) = \frac{15,000x + \sqrt{\frac{20,000x+8,000}{3}}}{x+1}$$

1. Indica la población que existe al comienzo del período considerado.
2. Halla la población de insectos al décimo día.
3. Si la población sigue la ley indicada de forma indefinida, ¿en qué valor aproximado se estabilizará?

Respuesta:

1. en $t = 0$ es el inicio

$$f(0) = \frac{\sqrt{\frac{8000}{3}}}{1} = \sqrt{\frac{8000}{3}} = 52 \text{ insectos}$$

2. En este caso se calcula $f(10)$

$$f(10) = \frac{15000 \cdot 10 + \sqrt{\frac{20000 \cdot 10 + 8,000}{3}}}{10+1} = 13660 \text{ insectos}$$

3. Para esto se debe hallar el límite para la variable tendiendo al infinito.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{15000x + \sqrt{\frac{20000x+8000}{3}}}{x+1} =$$

Es suficiente trabajar los grados del numerador y denominador

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{15000x + \sqrt{\frac{20000x+8000}{3}}}{x+1} = \frac{15000}{1} = 15000$$

No olvidar que el grado de la raíz es $\frac{1}{2}$.



Test 1: Matemáticas II - Química y Farmacia

Actividad 1 Considera la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 5x + a}{x + 1}, & x < -1 \\ x + b, & -1 \leq x < 0 \\ x^2 + 2x - 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{x - 1}, & x > 1 \end{cases}$$

1. Para que la función sea continua en $x = -1$, deben ser: $a = \text{-----}, b = \text{-----}$
2. Todas las asíntotas de la función son: -----

Respuestas:

- Se debe estudiar el límite por izquierda a $x = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + 5x + a}{x + 1} \sim \frac{1 - 5 + a}{0}$$

Este límite no existe a menos que el numerador también sea cero. Esto es, $a = 4$. Se tiene

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + 5x + 4}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(x+1)(x+4)}{x+1} = 3$$

- El límite por la derecha en $x = -1$ es

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} (x + b) = -1 + b$$

- Para que exista el límite en $x = -1$, los límites laterales deben ser iguales

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} = 3 = \lim_{x \rightarrow -1^+} = -1 + b$$

Se deduce que

$$b = 4$$

- ASÍNTOTAS de la función

1. En $x = -1$ NO hay asíntota vertical, pues

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + 5x + 4}{x + 1} = 3 \neq \infty$$

lo mismo ocurre si se elige el límite por derecha

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} (x + 4) = 3 \neq \infty$$

2. En $x = 1$ hay asíntota vertical pues,

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x - 1} \sim \frac{1}{0} = \infty$$

3. No hay asíntotas horizontales ni oblicuas en ningún polinomio (segunda y tercera línea de la función)
4. En racionales hay horizontales si tienen el mismo grado numerador y denominador (no es el caso)
5. Las oblicuas aparecen, si no hay horizontales, y en funciones racionales si el grado del numerador es uno más que el denominador (aquí no hay oblicuas)

Actividad 2 True or False. No justification needed.

- — La asíntota oblicua de la función $f(x) = \frac{1-x^3}{5+2x^2}$ es $y = \frac{1}{2}x$
- — La asíntota vertical de la función $f(x) = \frac{x^3-1}{x-1}$ es $x = 1$

La primera afirmación es falsa. Si bien el grado del numerador es uno más que el denominador, al dividir el numerador por el denominador queda

$$1-x^3 : 5+2x^2 = -\frac{1}{2}x + \dots$$

La segunda afirmación es FALSA

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = 3 \neq \infty$$

Actividad 3 Determinar las constantes:

- El valor de la constante k para que $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+k}{x-k} \right)^x = 4$ es: —
- El valor de las constantes a y b para que $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-x^2+ax+b}{x^3-7x^2+16x-12} = -5$ es: —

Respuestas

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+k}{x-k} \right)^x \sim 1^\infty$$

se usa la fórmula

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - 1) \cdot g(x)}$$

En este caso, $f(x) = \frac{x+k}{x-k}$ y $g(x) = x$. Luego

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+k}{x-k} \right)^x &= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+k}{x-k} - 1 \right) \cdot x} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2k}{x-k} \right) \cdot x} \\ &= e^{2k} \end{aligned}$$

Ahora, este resultado debe cumplir con

$$e^{2k} = 4 \implies 2k = \ln 4 \implies k = \ln 2$$

- El valor de las constantes a y b .

La máscara de este límite es

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - x^2 + ax + b}{x^3 - 7x^2 + 16x - 12} \sim \frac{4 + 2a + b}{0}$$

Para que este límite exista, su numerador debe ser igual a cero, Esto es

$$4 + 2a + b = 0 \implies b = -4 - 2a$$

Con esto, el límite inicial toma la forma

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - x^2 + ax - 2a - 4}{x^3 - 7x^2 + 16x - 12} \sim \frac{0}{0}$$

Se puede usar la regla de L'Hopital

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - x^2 + ax - 2a - 4}{x^3 - 7x^2 + 16x - 12} \stackrel{LH}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 2x + a}{3x^2 - 14x + 16} \sim \frac{8 + a}{0}$$

Esto obliga a que $a = -8$. Reemplazamos y aplicamos de nuevo L'Hopital

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 2x - 8}{3x^2 - 14x + 16} \stackrel{LH}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{6x - 2}{6x - 14} = \frac{10}{2} = 5$$

Para hallar el valor de b

$$b = -4 - 2a \implies b = -4 + 16 = 12$$

Actividad 4 Calcular los siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x^3 - x^2 - 8x + 12}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - 3}{4 - \sqrt{x+13}}$$

Respuestas

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x^3 - x^2 - 8x + 12} \sim \frac{0}{0} \stackrel{LH}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x + 3}{3x^2 - 2x - 8}$$

Esta última expresión tiene máscara

$$\frac{7}{0}$$

Siempre que se tiene este tipo de máscara se recurre a límites laterales

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x + 3}{3x^2 - 2x - 8} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x + 3}{(x - 2)(3x + 4)}$$

el factor $(x - 2)$ es positivo, luego

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x + 3}{(x - 2)(3x + 4)} = +\infty$$

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x+3}{3x^2-2x-8} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x+3}{(x-2)(3x+4)}$$

el factor $(x-2)$ es **negativo**, luego

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x+3}{(x-2)(3x+4)} = -\infty$$

Se puede afirmar que el límite cuando $x \rightarrow 2$ de la función, NO existe.

Para calcular $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6}-3}{4-\sqrt{x+13}}$ también se puede usar L'Hopital, pues

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6}-3}{4-\sqrt{x+13}} \sim \frac{0}{0}$$

se tiene

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6}-3}{4-\sqrt{x+13}} \stackrel{LH}{=} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+6}}}{-\frac{1}{2\sqrt{x+13}}} = -\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{8}} = -\frac{4}{3}$$

Actividad 5 El servicio de traumatología del Hospital de Temuco va a implementar un nuevo sistema que pretende reducir a corto plazo las listas de espera. Se estima que a partir de ahora la siguiente función indicará en cada momento (t , medido en meses) el porcentaje de pacientes que podrá ser operado sin necesidad de entrar en lista de espera:

$$P(t) = \begin{cases} t^2 - 8t + 50, & \text{si } 0 \leq t \leq 10 \\ \frac{38t - 100}{0,4t}, & \text{sit } > 10 \end{cases}$$

Por mucho tiempo que pase, ¿a qué porcentaje no se llegará nunca?

Respuesta

De la lectura del problema se deduce que están pidiendo calcular el límite de la función para $t \rightarrow \infty$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{38t - 100}{0,4t} = \frac{38}{0,4} = 95\%$$

Actividad 6 Se estima que la población de un barrio periférico de la ciudad de Perquenco evolucionará siguiendo este modelo:

$$P(t) = \frac{240 + 20t}{16 + t}$$

en miles de habitantes, donde t indica los años transcurridos desde su creación en el año 2005.

1. Indicar el dominio de la función.
2. Indicar la población en el instante de su creación.
3. Población que tenía el año 2015.
4. Indicar en que año se duplica la población inicial.
5. Indicar que sucede con la población a largo plazo.

Respuestas

1. El dominio de la función es $\text{dom}(P) = \{t \geq 0\}$

2. $t = 0 \implies P(0) = 15,000$
3. El año 2015 equivale a $t = 10 \implies P = 16,923$
4. Duplicar es llegar a 30.000,

$$\begin{aligned} P(t) = \frac{240 + 20t}{16 + t} &\implies 30,000 = \frac{240 + 20t}{16 + t} \\ &\implies 30,000(16 + t) = 240 + 20t \\ &\implies 30,000(16 + t) = 240 + 20t \end{aligned}$$

Al resolver se encuentra un t **negativo**. Esto significa que Jamás se duplica la población inicial.

5. Población a largo plazo. Esto significa hallar límite para $t \rightarrow \infty$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{240 + 20t}{16 + t} = 20$$

Por tanto, la población se acota en 20.000



Test 1: Matemáticas - corona virus

Actividad 1 Al calcular $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x)$ se halla que este vale: —

Respuesta:

Se multiplica por el conjugado

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x) \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 3x} + x}{\sqrt{x^2 + 3x} + x}$$

al multiplicar los conjugados

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x - x^2}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 3x} + x}$$

Al mirar los grados, numerador y denominador son iguales. Luego

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{3}{x}} + 1} = \frac{3}{2}$$

Actividad 1 True or False. No justification needed.

1. — Se abre el desagüe de una piscina, y ésta se comienza a vaciar según la función

$$v(t) = \frac{\sqrt{t+3} - 2}{t - 1}$$

donde t es el tiempo de vaciado en horas, y $v(t)$ es el volumen de agua expresado en m^3 . Si al inicio la piscina tenía 1000 litros de agua, la cantidad aproximada que queda al cabo de una hora es 500 litros

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + 5x + a}{x + 1} \sim \frac{1 - 5 + a}{0} \sim \frac{a - 4}{0}$$

Para que este límite exista, debe ser $\boxed{a = 4}$. Se calcula este límite con este valor

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + 5x + 4}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\cancel{(x+1)}(x+4)}{\cancel{x+1}} = 3$$

Se calcula ahora el límite por derecha

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow -1^+} (x + b) = -1 + b$$

El límite por derecha y el por izquierda deben ser iguales.

$$3 = -1 + b \implies b = 4$$

2. Anota TODAS las asíntotas de esta función: —

Respuesta:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 5x + a}{x + 1} & , \text{ si } x < -1 \\ x + b & , \text{ si } -1 \leq x < 0 \\ x^2 + 2x - 1 & , \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{x - 1} & , \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

■ Para $x < -1$ veamos vertical, horizontal y oblícua.

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 5x + 4}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(x + 4)}{x + 1} = 3 \neq \infty \quad \text{NO hay vertical}$$

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 5x + 4}{x + 1} = \infty \quad \text{NO hay horizontal}$$

■ Para la oblícua se tiene que calcular

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = m, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx)$$

en cada caso se tiene

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 5x + 4}{x(x + 1)} = 1 = m$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 + 5x + 4}{x + 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x + 4}{x + 1} = 4$$

La asíntota oblícua es $y = x + 4$.

■ En el caso $x > 1$ se puede estudiar las tres;

• **SI** hay asíntota Vertical:

$$f(x) = \frac{1}{x - 1} \implies \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x - 1} \sim \frac{1}{0} = \infty$$

- **SI** hay asíntota Horizontal:

$$f(x) = \frac{1}{x-1} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x-1} = 0$$

Habiendo horizontal **NO** hay asíntota oblícua.

Actividad 4 Considerar las funciones f y g definidas por $f(x) = x - 2$ y $g(x) = x^2 + x$. Escribir el valor del siguiente límite

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(f \circ g)(x-1)}{(g \circ f)(x)} = \text{---}$$

En el numerador y denominador se trata de funciones compuestas.

Respuesta:

Las funciones compuestas son:

- $(f \circ g)(x-1) = f(g(x-1)) = f((x-1)^2 + (x-1)) = (x-1)^2 + (x-1) - 2$
- $(g \circ f)(x) = g(x-2) = (x-2)^2 + (x-2)$

Al reemplazar en el límite a calcular se tiene:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)^2 + (x-1) - 2}{(x-2)^2 + (x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x + 1 + x - 1 - 2}{(x-2)[x-2+1]}$$

al reunir términos semejantes

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x + 1 + x - 1 - 2}{(x-2)[x-2+1]} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{(x-2)[x-1]}$$

el numerador se puede escribir

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+1)}{\cancel{(x-2)}(x-1)} = 3$$

Actividad 5 Los números reales $a = \text{---}$ y $b = \text{---}$ que satisfacen

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{ax+b}-2}{x} = 1$$

Respuesta:

Problema típico de conjugado

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{ax+b}-2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{ax+b}-2}{x} \cdot \frac{\sqrt{ax+b}+2}{\sqrt{ax+b}+2}$$

al operar los numeradores

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{ax+b}-2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax+b-4}{x(\sqrt{ax+b}+2)}$$

La máscara de este límite es

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax+b-4}{x(\sqrt{ax+b}+2)} \sim \frac{b-4}{0}$$

Para que exista este límite, es necesario que el numerador sea cero, esto es

$$\boxed{b=4}$$

Usamos este valor para calcular el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{x(\sqrt{ax+4}+2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a}{\sqrt{ax+4}+2} = \frac{a}{4}$$

Se sabe que este límite debe valer 1, entonces

$$\frac{a}{4} = 1 \implies a = 4$$

Actividad 6 Estudiar la continuidad de la función

$$f(x) = \frac{(\sqrt[3]{x}-1)(1-\cos x)}{(\sqrt{x}-1) \cdot x \operatorname{sen} x}$$

1. Anota los puntos x de estudio: _____
2. En los puntos x de estudio, hallar el límite.

Respuesta:

- Los puntos a estudiar son: $x = 0$, $x = 1$, $x = n\pi$ con $n \in \mathbb{Z}$
- Los límites en cada uno de estos puntos son:

Límite en $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{x}-1)(1-\cos x)}{(\sqrt{x}-1) \cdot x \operatorname{sen} x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{1-\cos 1}{\operatorname{sen} 1}$$

Nos queda calcular

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^{1/3}-1)}{(\sqrt{x}-1)}$$

usamos L'Hopital

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)} \stackrel{LH}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{3}x^{-2/3}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \frac{2}{3}$$

Límite en $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{x}-1)(1-\cos x)}{(\sqrt{x}-1) \cdot x \operatorname{sen} x} = \frac{-1}{-1} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x \operatorname{sen} x}$$

Nos queda por calcular

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x \operatorname{sen} x}$$

La máscara es $\frac{0}{0}$, aparece L'Hopital

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x \operatorname{sen} x} \stackrel{LH}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x + x \cos x} = \frac{0}{0}$$

de nuevo L'Hopital

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x + x \cos x} \stackrel{LH}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{\cos x + \cos x - x \operatorname{sen} x} = \frac{1}{2}$$

Límite en $x = n\pi$

Aquí se ven 2 casos: Uno es si n es impar, en tal caso

$$\lim_{x \rightarrow n\pi} \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x} \sim \frac{1 - \cos(n\pi)}{\operatorname{sen} n\pi} = \frac{2}{0}$$

el coseno en los impares de n vale siempre -1 , pero el seno siempre es cero

El caso n par se ve así:

$$\lim_{x \rightarrow 2n\pi} \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x} \sim \frac{1 - \cos(2n\pi)}{\operatorname{sen} 2n\pi} \sim \frac{0}{0}$$

se aplica L'Hopital

$$\lim_{x \rightarrow 2n\pi} \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x} \stackrel{LH}{=} \lim_{x \rightarrow 2n\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \sim \frac{0}{1} = 0$$

Universidad de la Frontera

Facultad de Ingeniería y Ciencias

Departamento de Matemática y Estadística

Test 2 - Matemáticas I

Química y Farmacia - 2021 - ... en pandemia

Actividad 1 Considera la función $f(x) = (x - 2)^2 + 1$.

1. El dominio de la función es: ... todos los reales
2. El recorrido (rango) de la función es: ... $[-1, \infty)$
3. La función inversa de f es: ... La función f no tiene inversa

Actividad 2 True or False.

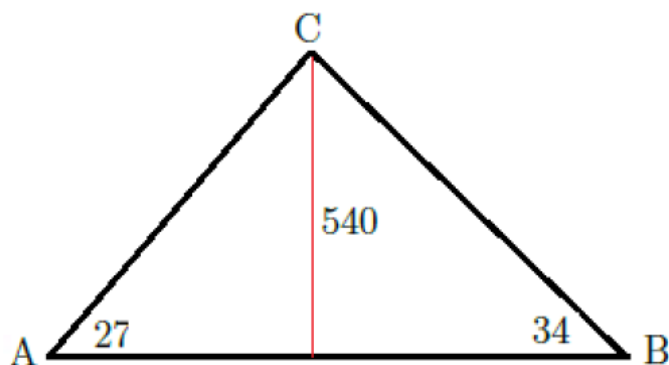
1. Una solución de $\log -\frac{1}{2}(x - 2)^6 = -18$ es: $x = -6$ Verdadero
2. La función inversa de $f(x) = -3 + \log_4(x + 2)$ es $f^{-1}(x) = 4^{x+2} - 3$ Falso

Actividad 3 Sea $P(t)$ la población de células cancerosas en un cultivo sometido a cierto fármaco. Un grupo de estudiantes de la carrera de Química y Farmacia descubrió que la ecuación que describe la población como función de los días transcurridos es

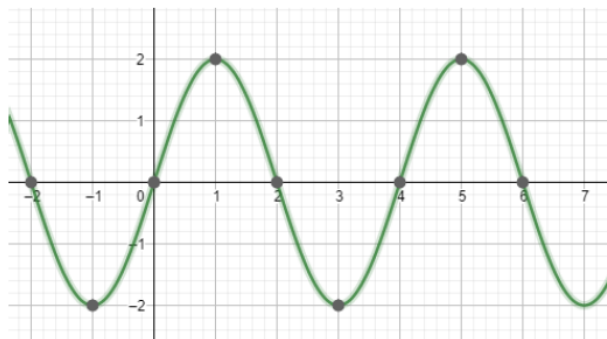
$$P(t) = -0,3t^2 + 24t + 500$$

1. La totalidad de las células desaparece en: 97,15 días.
2. La población crece en el intervalo $[0, 40]$
3. La población es máxima al cabo de 40 días y esta población es de 980 células.

Actividad 4 Una montaña (figura) de 540 m de altura separa 2 pueblos A y B. Desde A, se ve la cima C de la montaña con un ángulo de elevación de 27° . Desde B el ángulo de elevación es de 34° . La distancia entre los pueblos es: 1860 metros



Actividad 5 Observa la gráfica y luego determina:



1. Amplitud: $A = 2$

2. Periodo: $P = 4$

3. Ecuación de la función: $y = \sin \frac{\pi x}{2}$

Actividad 6 Las soluciones, en $[0, 2\pi]$, de la ecuación $\cos(x + 30^\circ) = \sin x$ son:

$$\{30^\circ, 210^\circ\}$$

Universidad de la Frontera

Facultad de Ingeniería y Ciencias

Departamento de Matemática y Estadística

Test 3 - Matemática

Tecnología Médica - 2021 - ... en pandemia

Actividad 1 La PDI hizo un estudio donde da cuenta que el número de robos en viviendas, por año, en Temuco, decrece según una función del tipo

$$N(t) = A - B \log(t + 2)$$

Se sabe que en el año 2000, que es cuando se inició el estudio, el número de robos fue de 520 y en el año 2003 fueron 476.

1. Determina A y B .

$$A = 553, B = 111$$

2. Calcula el número de robos que se esperan en 2020.

$$405 \text{ robos}$$

3. Halla la función inversa de la encontrada.

$$f^{-1}(t) = 10^{(A-t)/B} - 2$$

Actividad 2 True or False.

1. El dominio de la función $f(x) = \sqrt{x-1} \log_3(x+1)$ es $(1, \infty)$

falso

2. Un cero de la función $f(x) = \sqrt{x-1} \log_3(x+1)$ es $x = 0$

falso

Actividad 3 El número de recetas para medicamentos genéricos emitidas por los médicos del servicio de salud ha crecido exponencialmente desde 2005. La función es del tipo $f(t) = ke^{at}$.

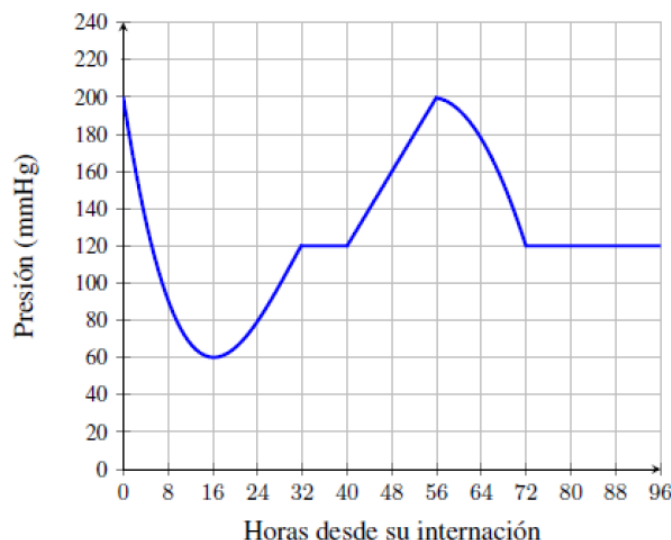
1. Calcula k y a sabiendo que en 2005 ($t = 0$) se emitieron 6 mil de recetas y en el 2008 fueron 9 mil.

$$k=6000, a=0,135$$

2. Determinar en que año se llegará a emitir 50 mil recetas

2020

Actividad 4 El gráfico en la figura representa los registros de la presión arterial (en milímetros de mercurio, denotados como mmHg) de un paciente durante un período de tiempo medido en horas. En el eje horizontal se representan las horas transcurridas desde su internación, y en el vertical, la presión del paciente en cada instante de tiempo (en mmHg). Las mediciones comienzan un lunes a las 7 de la mañana (lo que consideramos como tiempo $t = 0$), momento en que el paciente queda internado. Observando el gráfico, determinar:



1. presión del paciente al momento de su internación

200

2. tiempo durante el cual se tomaron las mediciones.

96 horas

3. presión del paciente el miércoles a las siete de la mañana.

160

4. momentos en los cuales tuvo la misma presión.

[32,40] y [72,96]

5. presión mínima y máxima del paciente.

60 y 200

6. intervalos en que la presión fue en aumento.

[16,32] y [40,56]

7. momentos en que la presión se mantuvo constante.

[32,40] y [72,96]

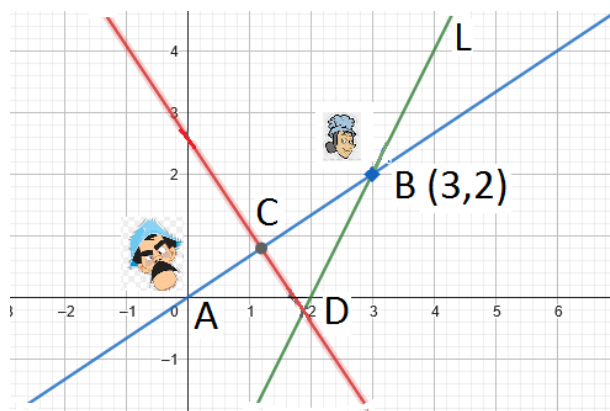
Universidad de la Frontera
Facultad de Ingeniería y Ciencias
Departamento de Matemática y Estadística

Prueba de Cátedra # 2 - Fundamentos

26 de mayo de 2009

Atención: Debe ser claro y redactar lo mejor posible sus respuestas. Sugiero relatar paso a paso lo que se está haciendo y con buena letra.

Actividad 1 Don Ramón, ingenioso y bueno para la matemática sale a dar su acostumbrado paseo dominical. Se ubica en el punto $A = (0,0)$ y clava su mirada en lontananza en el punto $B = (3,2)$. Su meta es ir desde A a B en línea recta. Cuando se encuentra en el punto C que divide al segmento AB en la razón 2 es a 3 observa que algo se mueve en el $(3,2)$, y se vira hacia su derecha en forma perpendicular. Sale en forma rauda y ligera por esa recta perpendicular hasta llegar al punto D en que esta recta interseca a la recta L de ecuación $y - 2x + 4 = 0$. Jadeante y aún asustado saca fuerzas de flaqueza para mirar hacia el punto B , ahora ve bien, ¡horror! es la famosa “bruja del 71”, quiere gritar pero no puede, una lágrima en la garganta se lo impide. (Usar la figura como guía)



1. Determinar el punto C en el cual se vira don Ramón.
2. Determinar el punto D donde queda atónito.
3. Hallar la mínima distancia entre el punto B y la recta L .
4. Calcular el ángulo que forma la recta L con la recta perpendicular que pasa por el punto C .

Respuestas

a) La razón de división de segmentos es

$$\frac{AC}{AB} = \frac{2}{3} \implies AC = \frac{2}{3}AB$$

suponemos que (x,y) son las coordenadas de C , entonces

$$\begin{cases} x = \frac{0 + \frac{2}{3} \cdot 3}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{6}{5} \\ y = \frac{0 + \frac{2}{3} \cdot 2}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{4}{5} \end{cases}$$

b) El punto D es la intersección de la recta dada $y - 2x + 4 = 0$ con la recta que pasa por CD . Para esta última recta se tiene

$$m(AB) = \frac{2}{3} \implies m(CD) = -\frac{3}{2} \text{ pendiente}$$

Con este dato la ecuación de la recta es

$$y - \frac{4}{5} = -\frac{3}{2}\left(x - \frac{6}{5}\right)$$

al eliminar denominadores, la ecuación es

$$15x + 10y - 26 = 0$$

Ahora intersectamos esta recta y la dada para tener el punto D

$$\begin{cases} 15x + 10y - 26 = 0 \\ -2x + y + 4 = 0 \end{cases}$$

al resolver se halla que

$$D = \left(\frac{66}{35}, -\frac{8}{35}\right)$$

c) La distancia es CERO pues B está en la recta L .

d) El ángulo entre la recta L y la recta perpendicular necesita conocer las pendientes de estas rectas

$$m_2(L) = 2, \quad m_1(CD) = -\frac{3}{2}$$

Así,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = \frac{2 + \frac{3}{2}}{1 - 3} = -\frac{7}{4}$$

el ángulo es

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(-\frac{7}{4}\right)$$

Actividad 2 Identificar el lugar geométrico de ecuación $16x^2 - 9y^2 + 96x + 72y + 144 = 0$. Hacer un bosquejo y determinar elementos más relevantes (foco, vértices, directriz, centro)

Respuesta

En este tipo de problemas siempre hay que completar cuadrados

$$16x^2 - 9y^2 + 96x + 72y + 144 = 0 \iff 16(x^2 + 6x) - 9(y^2 - 8y) + 144 = 0$$

se llega a

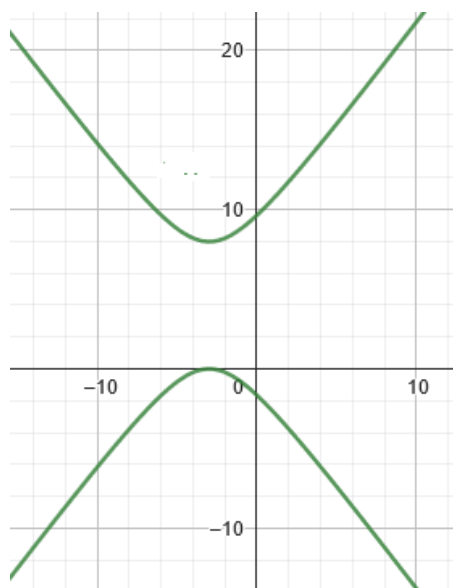
$$9(y-4)^2 - 16(x+3)^2 = 144$$

pero es mejor ver la ecuación en forma canónica

$$\frac{(y-4)^2}{16} - \frac{(x+3)^2}{9} = 1 \quad \text{¡hipérbola!}$$

De la forma canónica se deduce que;

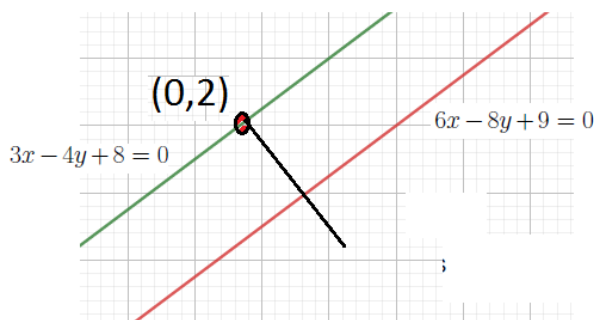
- El centro es $C(-3, 4)$
- Los vértices son $V_1(-3, 0)$ y $V_2(-3, 8)$
- $c^2 - a^2 = b^2 \implies c = 5$
- Los focos son $F_1(-3, -1)$ y $F_2(-3, 9)$



Actividad 3 Sin usar la fórmula de distancia, hallar la distancia que existe entre las rectas paralelas $3x - 4y + 8 = 0$ y $6x - 8y + 9 = 0$

Respuesta

Un esquema gráfico nunca está demás



Como las rectas son paralelas, se puede tomar un punto cualquiera en una de ellas, por ejemplo $(0, 2)$ en la recta $3x - 4y + 8 = 0$ y hallar la ecuación de la recta perpendicular a la otra recta.

La pendiente de $3x - 4y + 8 = 0$ es $m_1 = \frac{3}{4}$, luego la pendiente de la recta perpendicular debe ser $m(\perp) = -\frac{4}{3}$. Con esto formamos la ecuación de la recta buscada

$$y - 2 = -\frac{4}{3}(x - 0)$$

que al reducirla tiene la forma

$$4x + 3y - 6 = 0$$

Ahora buscamos el punto de intersección de esta recta con la recta $6x - 8y + 9 = 0$, resolviendo el sistema

$$\begin{cases} 4x + 3y - 6 = 0 \\ 6x - 8y + 9 = 0 \end{cases} \implies x = -\frac{21}{50}, y = \frac{384}{50}$$

Finalmente, la distancia entre dos puntos

$$d \left[(0, 2), \left(-\frac{21}{50}, \frac{384}{50}\right) \right] = \frac{1}{50} \sqrt{(21)^2 + (284)^2}$$

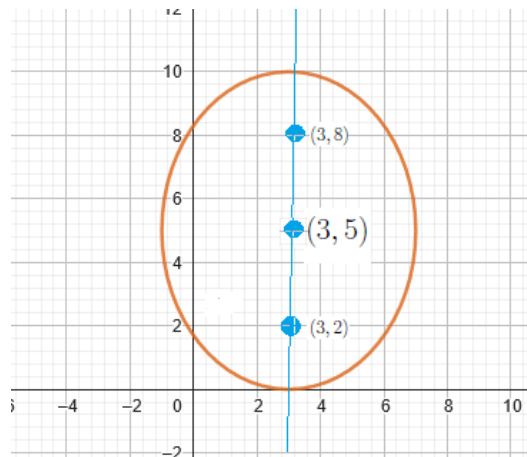
Actividad 4 Los focos de una elipse son los puntos $(3, 8)$ y $(3, 2)$. Si la longitud del eje menor es 8, hallar la ecuación, bosquejar la elipse y determinar centro, vértices y excentricidad.

Respuesta

De los datos se tiene lo siguiente:

- El eje mayor es $x = 3$.
- La distancia entre los focos $2c = 6 \Rightarrow c = 3$.
- La longitud del eje menor $2b = 8 \Rightarrow b = 4$.
- En la elipse $a > c \Rightarrow a^2 - c^2 = b^2 \Rightarrow a = 5$.
- El centro de la elipse es el punto $C(3, 5)$.
- Los vértices son $V_1(3, 10)$ y $V_2(3, 0)$.
- La excentricidad $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5}$.

La situación gráfica es la siguiente

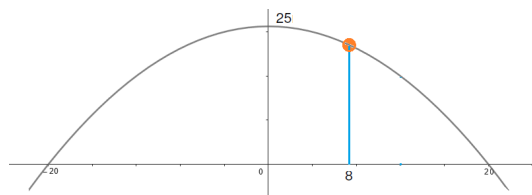


Con los datos obtenidos la ecuación de la elipse es

$$\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y-5)^2}{25} = 1$$

Actividad 5 Un arco parabólico tiene una altura de 25m y 40m de ancho. ¿Qué altura tiene el arco a 8m del centro? La ayuda es que ubiques convenientemente los datos en el plano.

Respuesta



La ubicación de la parábola es estratégica. La forma de la parábola tiene por ecuación

$$(x-h)^2 = -4a(y-k)$$

Podemos usar que el vértice es $(0, 25)$, con lo cual

$$(x-0)^2 = -4a(y-25)$$

de lo cual

$$x^2 = -4a(y-25)$$

Para determinar el valor de a usamos el hecho de que $(20, 0)$ está en la parábola

$$400 = -4a(20 - 25) \implies a = 4$$

En consecuencia, la ecuación de la parábola es

$$x^2 = -16(y - 25)$$

Finalmente, si $x = 8$, la altura en la elipse es

$$64 = -16(y - 25) \implies y = 21$$

Puntaje: $(5 \times 6) + (8) + (6) + (6) + (10) = 60$ puntos

Universidad de la Frontera

Facultad de Ingeniería y Ciencias

Departamento de Matemática y Estadística

Prueba 1 - Introducción al Cálculo

Ingenierías

Nuestro héroe tiene alma y corazón de ingeniero, su vida entera la ha dedicado al desarrollo del “ingenio” y la habilidad para plantear y resolver dilemas matemáticos. Sus historias, que son muchas, parecen sacadas de la vida real, ¡pero no! cualquier semejanza con personas o situaciones de la vida cotidiana son solo un “vil” coincidencia.

Lee la siguiente historia plagada de acertijos, resuélvelos y tal vez mañana seas un(a) brillante ingeniero(a).

Acto 1

Es el siglo XXX y nuestro guardian del intelecto ingenieril decide entrar a un “pub”. Ya en su interior observa con su acostumbrada sapiencia lo que ocurre a su alrededor, no bien se sienta aparece la “bar woman” que le ofrece disfrutar de un show gratuito de una clon de la JLO en un salón adyacente. Hombre al fin y al cabo “SuperCrazy” no lo piensa dos veces y pregunta ¿qué debo hacer? Fácil le contesta su interlocutora, resuelves el siguiente acertijo y podrás pasar al salón privado. *Pónte en el lugar de SuperCrazy y sigue con atención la history.*

Primer acertijo

Un individuo quiere ser el **supremo** del planeta “Scorpion” que se encuentra en la constelación Alfa-Centauro. Lo puedes indeficar si sabes que la clave de su pasaporte intergaláctico es

$$\left\{ x \in \mathbb{R} / \left| \frac{x(5-x)}{x^2-3x+2} \right| > 3 \right\}$$

Segundo acertijo

Si descubres los puntos **frontera** que presenta la clave de su pasaporte, te proporcionan una cena como premio a tu ingenio.

Acto 2

A las 5 am nuestro héroe sale del pub rumbo a casa. Para subirse a su auto, éste le pide la clave para ponerse en marcha, y se escucha por el parlante

“dime las coordenadas de tu casa que coinciden con el vértice V de una hipérbola cuyo centro es el punto $(2, 3)$, y sus focos están sobre la recta $y = 3$. Además, la distancia entre los focos es de 10 unidades, y la distancia entre sus vértices es de 8 unidades”

1. si tu respuesta es correcta, nuestro héroe, ya instalado en su auto, va camino a casa.
2. si trazas la gráfica y determinas los focos y las ecuaciones de las asíntotas habrás llegado a la mansión de SuperCrazy.

Acto 3

Son las 7 am y nuestro héroe se encuentra en las puertas de su casa tratando de dar la clave de ingreso. Hay que tener presente que la casa es un lugarsagrado y tiene que estar protegida a prueba de malandras. A través del parlante de entrada a la casa se escucha lo siguiente.

Antes de llegar a casa ¿pasaste un puente?, si responde SuperCrazy, y se escucha que el cierre magnético de la puerta gira una vuelta, pero sin que la puerta se abra. Luego se escucha; ese puente es colgante y su cable de suspensión tiene la forma de una parábola. Los pilares que lo soportan tienen una altura de 60 metros, y una distancia entre ellos de 500 metros, quedando el punto más bajo del cable 10 metros sobre el suelo

1. Dime cual es la ecuación de la parábola que describe la forma del cable
2. dame la altura de un punto situado a 80 metros de uno de los pilares.

Cansado y con sueño SuperCrazy entrega las respuestas correctas y entra a su mansión a disfrutar de un reparador descanso.

Si seguiste la historia con atención, diste las respuestas acertadas ¡¡felicitaciones !! vas camino a la fama, algún día serás idolo(a), y ...

¡¡No te mueras nunca SuperCrazy!!

5.1 Pruebas sin desarrollo**Examen Int. Cálculo**

270897

1. Hallar dominio y estudiar continuidad y derivabilidad para todo x de la función

$$f(x) = \begin{cases} \ln(1 + \sqrt{1 - 4x^2}), & x \leq \frac{1}{2} \\ x - \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} < x < 2 \\ e^{x-2}, & x \geq 2 \end{cases}$$

2. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 3/2} \sqrt{\frac{8t^3 - 27}{4t^2 - 9}}$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 |4x - 8|}{x - 2}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n + 3)^{2n+5} \cdot n^{n-3}}{(4n + 1)^{n+2} \cdot (n + 3)^{2n}}$

3. Hallar la derivada $\frac{dy}{dx}$ y expresarla en forma simplificada.

$$a) \cos(x+2y) + e^{x/y} = axy^2$$

$$b) y = \left(\frac{3x+1}{1-x} \right)^{\arctg \sqrt{x^2-1}}$$

Puntaje: $(8 \cdot 4) + (8) + (10) + (10) = 60$ puntos



Prueba # 4 - Int. Cálculo

030899

1. Determinar la derivada que se indica en cada caso:

$$a) y' \text{ si } y = \sin^5(\ln(\sqrt[4]{5+x^3})) + 2^{\pi x}$$

$$b) y' \text{ si } y^2 = \ln \frac{x+1}{x-1}$$

$$c) y' \text{ si } x^3 + y^4 + \operatorname{tg}(x^2 y^3) = xy$$

$$d) y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} \text{ si } y = 3 \sec(2t^2 + 1), x = 5 \cos(2t^2 + 1)$$

2. Hallar la derivada que se indica en cada caso:

$$a) y^{(25)} \text{ si } y = \frac{1}{1-x}$$

$$b) y^{(13)} \text{ si } y = x^{n-1} e^{1/x}$$

3. Determine si la función dada es derivable en $x = 0$. ¡¡Justifique!!

$$f(x) = \begin{cases} \ln(2x+1) & , -\frac{1}{2} < x \leq 0 \\ 2x & , x > 0 \end{cases}$$

4. Sean c_1, c_2, c_3, c_4, a constantes. Considerar la función

$$y = (c_1 + c_2 x) \cos ax + (c_3 + c_4 x) \sin ax$$

Determinar si se satisface la ecuación $y^{(4)} + 2a^2 y'' + a^4 y = 0$

5. Sean f y g funciones reales tales que $g(x) = x f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Si g es derivable probar que $g'(1) - f'(1) = 1$

Puntaje: $(20) + (12) + (8) + (8) + (12) = 60$ puntos



Recuperativa - Int. Cálculo

1. Calcular los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{f(\pi - x) \sin^2 x}, \quad f(x) = 2 \sin x - \sin 2x$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+3} \right)^{x+2}$$

$$d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2}{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}$$

2. Hallar el valor de las constantes A y B para que la función dada sea continua para todo valor de x

$$f(x) = \begin{cases} Ax^2 + 5x - 9, & x < 1 \\ B, & x = 1 \\ (3-x)(A-2x), & x > 1 \end{cases}$$

3. Sean $y = a^x \sin x$, $z = e^x \cos x$. Demostrar que

$$y'' = 2z, \quad z'' = -2y$$

4. Sea $x = (a - bx) \cdot e^{y/x}$. Averiguar si se satisface la ecuación

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = \left(x \frac{dy}{dx} - y \right)^2$$

Puntaje: $(8 \cdot 4) + (8) + (10) + (10) = 60$ puntos



Recuperativa - Int. Cálculo

1. Calcular los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^4}{x^2}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 4x + 2} \right)^x$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 + 2)^{500} (x + 1)^{100}}{(x^{50} + 1)^{20} (x^5 + 2)^{20}}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right)^{\frac{a}{x}}, \quad a > 0$$

2. Hallar $\frac{d^2 y}{dx^2}$ si $x = 1 + \frac{1}{t^2 + 1}$, $y = 1 + 2t^2 + t^4$

3. Determinar las constantes a y b para que tenga un extremo en $(2, -1)$ la curva de ecuación

$$y = \frac{ax+b}{(x-1)(x-4)}. \text{ Diga si este extremo es máximo o mínimo.}$$

4. Determinar el rectángulo de área máxima que se puede inscribir en una circunferencia de radio 4

Puntaje: $(20) + (10) + (15) + (15) = 60$ puntos



Recuperativa - Int. Cálculo

100899

1. Determinar la derivada que se indica en cada caso:

a) y' si $y^2 = (x-y)(x^2+y)$

b) y' si $y = (\sin^2 3x^4)^{1/x}$

2. Verifique si $y = 5 + x^2 - 4e^{3x}$ satisface la ecuación $y'' - 3y' = 2 - 6x$

3. Hallar los valores de x para los cuales es diferenciable la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sqrt{4-2x}, & x \geq 0 \\ \frac{4}{4-2x}, & x < 0 \end{cases}$$

4. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/\sin^2 x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 + \sin(x-4) - \sqrt{25-x^2}}{2x-8}$

5. Sean f y g funciones reales tales que $g(x) = xf(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Si g es derivable probar, usando sólo la definición que $g'(1) - f'(1) = f(1)$

Puntaje: $(14) + (8) + (10) + (16) + (12) = 60$ puntos



Prueba # 4 - Int. Cálculo

1. Calcular $\lim_{x \rightarrow \infty} (x + e^x)^{3/2}$

2. Sea f función con segunda derivada continua en una vecindad de a . Probar que

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{f(x) - f(a)} - \frac{1}{(x-a)f'(a)} \right) = -\frac{f''(a)}{2[f'(a)]^2}$$

3. La Municipalidad de Temuco debe construir un cartel de cartón que contenga exactamente 216 cm^2 de texto impreso con propaganda electoral, de manera que el cartel tenga márgenes de 2 cms. a los lados y de 4 cms. en las partes superior e inferior. Determinar las dimensiones del cartel que utilice la menor cantidad de cartón posible.

4. Hallar; intersecciones con los ejes, monotonía, extremos, concavidad, puntos de inflexión, asíntotas, y gráfica de la función $f(x) = \frac{x^3 - x}{x^4 - 3x^2 - 4}$.
5. Con el teorema de Rolle en la mano probar que la ecuación $x^5 + x^3 + 2x - 3 = 0$ tiene exactamente un cero en el intervalo $(0, 1)$

Puntaje: $(6) + (6) + (10) + (20) + (6) = 48$ puntos



Examen Int. Cálculo

211190

1. Hallar el valor de la constante k para que sea continua en $[0, \pi]$ la función

$$f(x) = \begin{cases} e^{3x}, & x \in [0, 1] \\ \frac{k \operatorname{sen}(x-1)}{x^2 - 5x + 4}, & x \in (1, \pi] \end{cases}$$

2. Estudiar dominio de continuidad y derivabilidad de $g(x) = x + |x - a|$
3. Si $f(x) = \arctg x - \arctg\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$, probar que $f'(x) = 0, \forall x \neq 1$
4. Hallar derivada de $g(x) = \frac{2x-1}{x^3} \cdot e^{\frac{x-1}{x}}$
5. Escribir la ecuación de la recta tangente, en $(2, 3)$, a la curva de ecuación implícita $F(x, y) = 3x^2 + 2y^2 - 5x - 3y - 11 = 0$

Puntaje: $(6) + (6) + (6) + (6) + (6) = 30$ puntos



Prueba # 4 - Int. Cálculo

121294

1. Graficar, indicando intersecciones con los ejes, concavidad, puntos de inflexión, extremos, monotonía, asíntotas, la función

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

2. La pendiente de la recta tangente a una curva es

$$f'(x) = 6(x-1)(x-2)^2(x-3)^2(x-4)^4$$

determinar: los valores de x para los que f es máximo, los valores de x para los que f es mínimo, los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f

3. Calcular los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x - \sin x)^{1/x}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x-1) - 1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2x}\right)}$$

4. Separar el número 20 en dos partes tales que el producto de una de ellas por el cuadrado de la otra sea máximo.

Puntaje: $(15) + (15) + (15) + (15) = 60$ puntos



Examen Int. Cálculo

180899

1. Calcular los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2}{x-2} - \frac{x+6}{x^2-4} \right)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt{6-x}}{x^2 - 2x}$$

$$c) \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t) - \ln(1-t)}{t}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \pi x - \cos \frac{\pi}{x}}{x^2}$$

2. Determinar el valor de A para que exista continuidad en

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+16}-4}{x}, & x < 0 \\ \frac{\operatorname{sen}(Ax)}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

3. Probar que existe un número real $c \in (1, 2)$ de modo que

$$\sqrt[5]{x-5} + \sqrt{x+1} = \frac{x}{x(x+1)}$$

4. Estudiar derivabilidad de

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x, & x < 0 \\ e^{2x} - 1, & 0 \leq x < 1 \\ 15 \ln(x+2), & x \geq 1 \end{cases}$$

5. Hallar la derivada $\frac{dy}{dx}$ en cada una de las siguientes funciones:

$$\blacksquare y = (x^2 + 3xy + 2)^5 = 7x^2y$$

$$\blacksquare x = 1 + \operatorname{tg} t, \quad y = \sec t$$

Puntaje: $(4 \times 4) + (7) + (7) + (7) + (7) + (4 \times 4) = 60$ puntos



Prueba # 4 - Int. Cálculo

280496

- Usando la derivada hallar la gráfica de la función $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$.
- Aplicar el TVM a la función $f(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2$ para demostrar que

$$\frac{\ln(x+1)}{x+1} < f(x+1) - f(x) < \frac{\ln x}{x}, \quad \forall x > e$$

Ayuda: ¡¡qué hermoso intervalo es el $(x, x+1)$ exclamó la princesa!!

- Calcular

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x}{x - \sin x} - \frac{e^{\sin x}}{x - \sin x} \right)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^3}}{\operatorname{tg} x - \sin x}$$

- Hallar los valores de las constantes a y b , de tal forma que la función

$$f(x) = \begin{cases} x + a, & x < 2 \\ 3ax + b, & -1 \leq x \leq 1 \\ 3x - b, & x > 1 \end{cases}$$

sea continua. A continuación, encuentre las derivadas laterales de f en los puntos *sospechosos*.

Puntaje: 15 puntos cada problema



Examen - Int. Cálculo

270700

- Usando la derivada bosquejar la función $f(x) = \frac{(x-1)^2(x+2)}{x^2}$.
- Calcular los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + \frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right]$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 5x^2}{x \sin x}$$

- Un ingeniero recién egresado, dejando de lado las comodidades terrenales de su casa paterna decide valerse por si mismo y presenta sus papeles a una empresa en Temuco. Después de pasar todas las selecciones, el Gerente de Relaciones Humanas, otro ex alumno del *itenerarium mentis ad veritaten* le plantea el último problema.

En nuestra empresa, producir dos artículos A y B , de unidades x e y , produce una ganancia G dada por

$$G(x, y) = 10xy - 5x^2 - 7y^2 + 40x$$

Si, en conjunto, se producen 13 unidades, ¿Cuál es la ganancia máxima?

La historia termina con el egresado contratado, y dejando muy en alto los colores de su *alma mater*.

Puntaje: $(5 + 5) + (20) + (15) + (15) = 60$ puntos

Prueba # 4 - Int. Cálculo

01097

- Hallar; dominio, intersecciones con los ejes, puntos críticos, valores máximos y mínimos. Intervalos de monotonía y concavidad. Puntos de inflexión. Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas, de la función $f(x) = x + 3 + \frac{x}{x-4}$.
- Hallar los siguientes límites:
 - $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{cosec}^2 x - x \operatorname{cosec}^3 x)$
 - $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) \ln(x-1)$
- El volumen V de una esfera es $V = \frac{32\pi}{3} \text{ mts}^3$. Si el radio se aumenta en 5 cms, hallar en cuánto aumenta el área de la esfera. Es bueno que sepas que $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, $A = 4\pi r^2$
- La empresa TATA BUS arrienda buses, con capacidad para 50 personas, a grupos de 35 o más personas. Si un grupo contiene exactamente 35 personas, cada una paga el equivalente a \$60,000. En grupos mayores la tarifa de **todos** se reduce en \$1000 por cada persona que sobrepase los 35. Determinar el tamaño del grupo para el cual los ingresos de la empresa sean máximos.
- Se inscribe un triángulo rectángulo en una semicircunferencia de radio 4. La hipotenusa corresponde al diámetro de la semicircunferencia. Hallar las dimensiones del triángulo de área máxima.
- Al toser el radio de la tráquea decrece y afecta la velocidad del aire en ella. Si r_0 es el radio normal de la tráquea, la relación entre la velocidad v del aire y el radio r de la tráquea cuando se produce la tos es

$$v(r) = ar^2 (r_0 - r)$$

a es una constante positiva. Hallar el radio r para el cual la velocidad del aire es mayor.

Puntaje: 10 puntos cada problema



Global Int. Cálculo

121292

- Calcular los siguientes límites:
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cos\left(h + \frac{x}{2}\right) \sin \frac{x}{2}$
 - $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \sin \frac{1}{x}\right)^x$
- Hallar la derivada $\frac{dy}{dx}$ en cada una de las siguientes:
 - $y^2 - x = \ln \frac{y}{x}$
 - $y = \arctg(3^x + \cos^2 a)^3$
 - $y = (x^3 + 5)^{2x^4 + 2x + 1}$
- Estudiar dominio de f , dominio de continuidad y derivabilidad de f , clase de continuidad (evitable o no). Graficar indicando intersecciones con los ejes, monotonía, concavidad, extremos, asíntotas, para

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{1-x^2}, & x \leq 0 \\ \frac{e^x - 1}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

4. Graficar, indicando intersecciones con los ejes, concavidad, puntos de inflexión, extremos, monotonía y asíntotas de la función $f(x) = x + 3 + \frac{4}{x^2}$.

Puntaje: $(15) + (14) + (15) + (16) = 60$ puntos



Prueba # 4 Int. Cálculo

120697

1. Demostrar que la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \arccos\left(\frac{a \cos x + b}{a + b \cos x}\right)$ tiene por derivada a la función $f'(x) = \frac{1}{a + b \cos x}$
2. Sea $f(x) = x + 3 + \frac{x}{x-4}$. Hallar; Dominio de f , intersecciones con los ejes coordenados, paridad o imparidad de la función, intervalos de monotonía, puntos críticos y valores extremos de f , intervalos de concavidad, asíntotas. Graficar f
3. Se sabe que la función $f(x) = \frac{ax+b}{(x-1)(x-4)}$ tiene un valor extremo en el punto $(2, -1)$
 - a) Hallar los valores de las constantes a y b
 - b) Probar que el valor extremo es un máximo.
4. Sea $f(x) = x^{\left(\frac{x+1}{x}\right)}$ función definida en el intervalo $[x, x+1]$. Hallar

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ (x+1)^{\left(\frac{x+2}{x+1}\right)} - x^{\left(\frac{x+1}{x}\right)} \right\}$$

5. Hallar $\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \left(\frac{2}{\pi - 2x} - \operatorname{tg} x \right)$
6. La fábrica de chicha de manzana “Te tomaí la otra” en Pitufquén City quiere lanzar su producto en latas cilíndricas, cada una de cierto volumen V_0 . Determinar en que razón deben estar la altura de la lata y el radio para que la cantidad de metal utilizada sea mínima. Se supone que el metal tiene el mismo espesor en todas partes. ! Salud !

Puntaje $(6) + (14) + (10) + (10) + (10) + (10) = 60$ puntos



Global Int. Cálculo

220794

1. Hallar $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots (2n-1)^2}{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots n^2}$
2. Hallar $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{(1/\sin^2 x)}$
3. Hacer la gráfica de la función $y = (x^2 - 4)(x - 1)^2$. Indicar; intervalos de monotonía, máximos y mínimos, concavidad, puntos de inflexión.
4. Sea $x^2 - xy + y^2 = 3$. Hallar $y''(1, 0)$
5. Sea $y = f(u)$, $u = g(x)$. Demostrar que

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2y}{du^2} \cdot \left(\frac{du}{dx}\right)^2$$

6. Dos pueblos A y B se encuentran a 10 y 15 kms del río Quepe. La proyección del segmento AB sobre el margen del río es de 20 kms. El único carro bomba del pueblo A debe ir hasta el pueblo B a apagar un incendio pero debe pasar a llenar su estanque en el río. Determinar el punto del río en que debe hacerlo para minimizar su recorrido.

Puntaje (6) + (6) + (10) + (6) + (6) + (8) = 42 puntos



Taller # 1 Matemática - Bioquímica

Actividad 1 Simplificar al máximo las siguientes expresiones:

1. $\frac{\sqrt[3]{16x^3y^8z^4}}{\sqrt{36y^4z^3}}$
2. $\frac{(x+1)^{1/2} - x[\frac{1}{2}(x+1)^{-1/2}]}{[(x+1)^{1/2}]^2}$
3. $\left(\frac{\sqrt{x+a}}{\sqrt{x-a}} - \frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}}\right) \cdot \frac{\sqrt{x^3-a^3}}{\sqrt{(x+a)^2-ax}}$
4. $\frac{9-x^2}{x^4+6x^3} \div \frac{x^3-2x^2-3x}{x^2+7x+6}$
5. $\left(\frac{a^{-1}-b^{-1}}{a^{-1}+b^{-1}} \div \frac{b^{-2}+a^{-2}}{b^{-2}-a^{-2}}\right)^{-1}$
6. $\sqrt{\left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{ab} \div \left[\frac{(x^{a-b})^a}{(x^{a+b})^b}\right]^b}$
7. $\frac{\frac{1}{3}(3x+1)^{-2/3} \cdot 3 \cdot (2x-3)^{1/2}}{[(2x-3)^{1/2}]^2} - \frac{(3x+1)^{1/3} [\frac{1}{2} \cdot (2x-3)^{-1/2} \cdot 2]}{[(2x-3)^{1/2}]^2}$

Actividad 2 Resolver las siguientes desigualdades y hallar supremo, ínfimo, máximo y mínimo:

- (1) $\frac{(3+2x)(x-1)}{3} \leq \frac{(x-1)^2-1}{4} + 1 - \frac{x+1}{2}$
- (2) $\frac{3x-2}{x-1} - 1 \geq \frac{2x-1}{x+1}$



Prueba # 1 Matemáticas I

Carrera: Bioquímica

Actividad 1 Simplificar $\frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2}$

Actividad 2 Calcula el resto al dividir el polinomio $P(x) = x^5 + 7x^3 - 5x + 1$ entre $x^3 + 2x$

Actividad 3 Resolver las desigualdades y hallar supremo, ínfimo, máximo y mínimo:

1. $\frac{x^3 + 3x^2 - 4x - 12}{x^2 - x - 6} < 1$

2. $|4 - x| + |x - 5| \leq x$

Actividad 4

1. Determinar el término que contiene $\frac{x^2}{y^2}$ en el desarrollo $\left(\frac{x}{y} - \frac{y^2}{2x^2}\right)^8$
2. Halla el valor de x sabiendo que $x! = 110(x-2)!$

THE END

Taller # 2 Matemática - Bioquímica

1. Hallar el valor de x que satisface:

a) $\log_{\sqrt{5}} \frac{1}{125} = x$

b) $\log_3 64 = x$

c) $7^{2x+3} - 8 \cdot 7^{x+1} + 1 = 0$

d) $\log 8 + (x^2 - 5x + 7) \cdot \log 3 = \log 24$

2. Determinar el valor del logaritmo que se indica:

a) $\log 2 = 0,3010 \implies \log 125 =$

b) $\frac{1+a}{b} = 1 \implies \log(b-a) =$

3. Evaluar las expresiones que se indican, en forma simplificada.

a) $\frac{b^{\frac{8}{3}}(b^{-1} - a^{-1})(a-b)^{-1} \cdot a}{\sqrt[6]{b^4} \sqrt[5]{b^{-2}}} =$

b) $\sqrt{\frac{2x^2 - 2x + 5}{2}} = x \implies x =$

c) $5 \sqrt[5]{125^{2x}} = \left(\frac{1}{25}\right)^{3x-1} \implies x =$

d) $x = \frac{1}{a-1} \implies \frac{1+(a+x)^{-1}}{1-(a-x)^{-1}} \cdot \left[1 - \frac{1-(a^2+x^2)}{2ax}\right] =$

4. El propietario de un sitio ha decidido subdividirlo para fines comerciales y así obtener una mejor rentabilidad. Vendió primero $\frac{3}{7}$ del mismo, luego la mitad de lo restante y todavía le quedaron 244 m^2 sin vender. Calcular la superficie total del sitio a subdividir.

Puntaje: $(5+5+5+5+5+5) + (5+5+5+5) + (4) = 54$ puntos

THE END

Prueba # 2 Matemática - Bioquímica

1. Reducir al máximo las siguientes expresiones:

$$a) \sqrt{72} - \sqrt{50} + \sqrt{18} - \sqrt{8} + \sqrt{200}$$

$$b) 2\sqrt{75} - 3\sqrt{12} + 5\sqrt{27} - 7\sqrt{48} + \sqrt{300}$$

$$c) (\sqrt{5\sqrt{2}+1} - \sqrt{5\sqrt{2}-1})^2 =$$

$$d) \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{5-2\sqrt{6}} =$$

2. Opera y simplifica

$$a) \frac{2}{x-1} \cdot \left(x + \frac{4x-1}{x-4}\right)$$

$$b) \left(\frac{1}{x^2-1} \frac{1}{x-2}\right) \div \left(1 + \frac{2}{x-2}\right)$$

$$c) \frac{3x+9}{x+6} \cdot \left(\frac{4}{3x-3} - \frac{x+2}{x^2+2x-3}\right)$$

$$d) \frac{2x^2+x}{x^2-1} \div \frac{2x+1}{3x^2-3}$$

3. Resuelve las siguientes inecuaciones y halla supremo, ínfimo, máximo y mínimo (si existen):

$$a) \frac{x-3}{4} \leq \frac{x-5}{6} - \frac{4x-3}{20}$$

$$b) 1 + \frac{6}{x^2+3x+2} \leq \frac{6}{x+2}$$

4. Resuelve

$$a) \log \sqrt{x} = 0,3495 \implies \log x^2 =$$

$$b) \log x = y \implies \log 10x^3 =$$

$$c) \log x + \log 3 = \log 60 - \log 20 \implies x =$$

$$d) 4^x + 4 = 2^{x+2} \implies x =$$

$$e) \log 16 - 2\log x = \log 100 \implies x =$$

5. Un escritor escribe una novela. El primer día escribe $\frac{1}{4}$ de la novela total, el segundo $\frac{1}{3}$ de lo restante, el tercero $\frac{1}{6}$ de lo que faltaba y el cuarto lo concluye, escribiendo 30 hojas. ¿Cuántas hojas tiene la novela?

Puntaje: $(5 \times 4) + (5 \times 4) + (5 \times 2) + (5 \times 5) + (6) = 66$ puntos



Taller # 1 - Matemática

primer semestre 2017

Carrera: Bioquímica

Actividad 1 Reducir al máximo las siguientes expresiones:

$$1. 2\sqrt{75} - 3\sqrt{12} + 5\sqrt{27} - 7\sqrt{48} + \sqrt{300}$$

$$2. (\sqrt{5\sqrt{2}+1} - \sqrt{5\sqrt{2}-1})^2 =$$

Actividad 2 Opera y simplifica

$$1. \frac{3x+9}{x+6} \cdot \left(\frac{4}{3x-3} - \frac{x+2}{x^2+2x-3}\right)$$

$$2. \frac{2x^2+x}{x^2-1} \div \frac{2x+1}{3x^2-3}$$

Actividad 3 Resuelve la inecuación y halla supremo, ínfimo, máximo y mínimo (si existen):

$$1 + \frac{6}{x^2 + 3x + 2} \leq \frac{6}{x + 2}$$

Actividad 4 Si uno de los términos en el desarrollo de $(2x^2 - \frac{1}{x})^{60}$ es de la forma ax^{-54} , Determinar el valor de a .



Prueba # 1: Números Reales: Fundamentos de Matemática Ingenierías Civiles

Actividad 1 En el cuerpo de los números reales se define $2 = 1 + 1$, $3 = 2 + 1$, $4 = 3 + 1$, $5 = 4 + 1$ y $6 = 5 + 1$. Usando sólo los axiomas de los números reales y el hecho que $2 \neq 0$, pruebe las siguientes afirmaciones, detallando todos los pasos y mencionando el axioma o definición que utiliza en cada uno de ellos:

a) $3 + 2 = 5$

b) $3 \cdot 2 = 6$

Actividad 2 Resolver la ecuación $\sqrt{x+6} - \sqrt{x+1} = \sqrt{2x-5}$

Actividad 3 Resolver, indicando existencia de supremo, máximo, mínimo, ínfimo.

1. $|x-2| + |x-1| > 1$

2. $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 12} \geq \frac{x+4}{x+3}$.

Actividad 4 Determinar a y b de modo que el resto de la división de $p(x) = ax^4 + bx^3 + 6x^2 - 12x + 4$ por $x^2 - 1$ sea $2x + 1$

Actividad 5 Dado $\left(\frac{5x^3}{3} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^{20}$. Hallar:

1. el término que ocupa el lugar 18 en el desarrollo.

3. el término central.

2. el coeficiente del séptimo término.

4. el término independiente de x .

Actividad 6 Usar inducción para probar que $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

Puntaje: $(4+4) + (8) + (10+10) + (8) + (2+2+2+2) + (8) = 60$ puntos



Prueba # 1 Matemáticas I

Carrera: Química y Farmacia

Actividad 1 Simplificar $\frac{x^3 + 3x^2 - 4x - 12}{x^2 + 2x - 3} \div \frac{4x - 2x^2}{x^3 - 2x^2 + x}$

Actividad 2 Calcula el valor de m y n para que el polinomio $P(x) = x^3 - 2x^2 - mx + n$ sea divisible por $(x - 5)$ y a la vez por $(x - 2)$

Actividad 3 Resolver las desigualdades y establecer existencia de supremo, ínfimo, máximo y mínimo:

$$1. \frac{x^3 + 3x^2 - 4x - 12}{x^2 + 6x} < 1$$

$$2. |4 - x| + |2x - 5| \leq 7 - x$$

Actividad 4

- Determinar el término que contiene x^{31} en el desarrollo de $\left(\frac{2x^2}{y} - \frac{y^2}{x}\right)^{20}$
- Hallar x que satisface $12x! + 5(x+1)! = (x+2)!$
- Resolver $5\binom{2x}{x} = \binom{2x-2}{x-1}$



Taller # 1: Números Reales: Fundamentos de Matemática

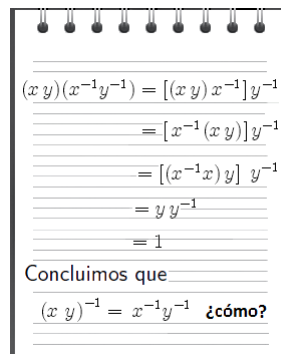
Ingenierías Civiles

Actividad 1

Se ha encontrado una hoja con la demostración de que $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$, con $x, y \neq 0$. Justificar cada paso empleado en su demostración.

Actividad 2 Resolver las siguientes ecuaciones:

- $\sqrt{2x-1} - \sqrt{2x+1} = \sqrt{x}$
- $\frac{1+x}{1-x} - \frac{1-x}{1+x} = 3$



Actividad 3 Factorizar en los números reales el polinomio

$$6x^5 + 25x^4 + 42x^3 + 10x^2 - 39x + 10$$

Actividad 4

- Simplificar la expresión

$$\frac{\frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x + 1} \cdot \frac{2x^2 - 8x - 10}{x - 1}}{\frac{2x + 2}{x^2 + x - 2} \div \frac{x + 1}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10}}$$

2. Racionalizar y hallar la suma de la expresión

$$\frac{3}{\sqrt{3}} + \frac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} - \frac{5}{\sqrt{2}}$$

Actividad 5 Resolver las desigualdades:

1. $\frac{3x^3 - 2x^2 + 3x - 2}{6 - x - x^2} \geq 0$

2. $|x^2 - x| + |x| \geq 1$



Taller # 1 Matemáticas I

Carrera: Química y Farmacia

Actividad 1

Simplificar cada expresión siguiente:

1. $\left(\frac{\sqrt{x+a}}{\sqrt{x-a}} - \frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}} \right) \cdot \frac{\sqrt{x^3 - a^3}}{\sqrt{(x+a)^2 - ax}}$

2. $\frac{9 - x^2}{x^4 + 6x^3} \div \frac{x^3 - 2x^2 - 3x}{x^2 + 7x + 6}$

Actividad 2 Resolver las desigualdades y establecer existencia de supremo, ínfimo, máximo y mínimo:

1. $\frac{3x^3 - 2x^2 + 3x - 2}{6 - x - x^2} \geq 0$

2. $|x^2 - x| + |x| \geq 1$

Actividad 3

- Factorizar en $\mathbb{R}$ el polinomio $p(x) = x^5 - x^4 - 10x^3 + 9x^2 + 9x$, indicando el procedimiento aplicado en cada paso.
- Determinar los coeficientes de a y b para que el polinomio $x^3 + ax^2 + bx + 5$ sea divisible por $x^2 + x + 1$.

Actividad 4

- Hallar el término central del desarrollo de $(\sqrt{2} - 3\sqrt{a}b^2)^{14}$
- Hallar n que satisfice $\frac{(n+3)!(n+4)!}{(n+3)! + (n+4)!} = 120 \cdot \frac{n+4}{n+5}$



Ficha de Trabajo # 1: Números Reales

Actividad I A continuación se presenta una situación didáctica para explicar “las reglas de los signos” en los números enteros:

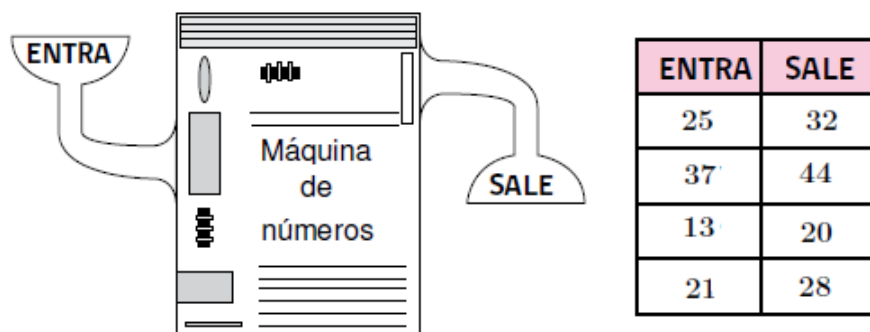
En la isla de San Lorenzo hay ciudadanos “buenos” a los que se les asigna el signo +, y ciudadanos “malos” a los que se les asigna el signo -. Se acuerda que: “salir” de la isla equivale al signo -, y “entrar” a la isla equivale al signo +.

- Si un ciudadano bueno (+) entra (+) a la isla de San Lorenzo, el resultado para la isla es positivo:
 $(+)(+) = (+)$

Completar la idea con las tres alternativas restantes

Actividad II Usa rectángulos (modelos de área) para probar que fracción es mayor entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{3}$

Actividad III Mira la máquina de números, piensa y responde



- ¿Cuál es una regla que usa la máquina para formar esta secuencia de números?
- Escribe una expresión algebraica que relacione un número cualquiera (N) que ENTRA con el número que SALE.
- Si ENTRA el número 10, ¿cuál es el número que SALE?
- ¿Cuál es el número que tiene que ingresar para que el número que salga sea 0?

Actividad IV Encuentra los valores de las figuras y completa las sumas verticales.

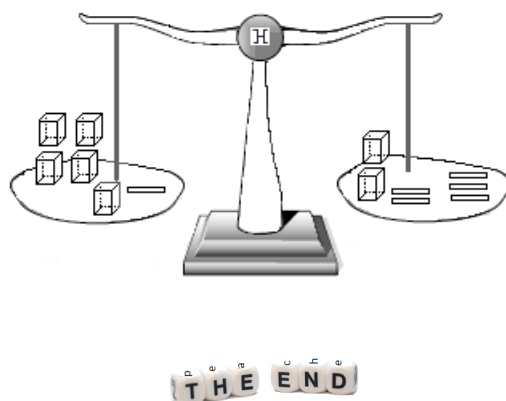
			21	 =  =  =
			33	
			29	
			25	
				

Actividad V Reducir justificando cada uno de los pasos

$$\frac{a^{-1} + b^{-1}}{a^{-2} - b^{-2}} \left(\frac{a^{-1}b^{-2}}{(ab)^{-3}} \right)^{-1} =$$

Actividad VI En un edificio, la comunidad emplea $\frac{1}{5}$ de los recursos en gas, $\frac{1}{3}$ en electricidad, $\frac{1}{12}$ en recogida de basura, $\frac{1}{4}$ en mantenimiento del edificio y el resto en limpieza. Determinar qué fracción del total se emplea en limpieza.

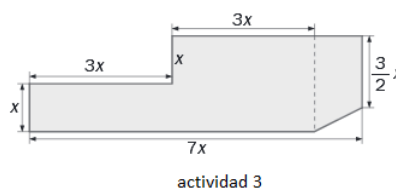
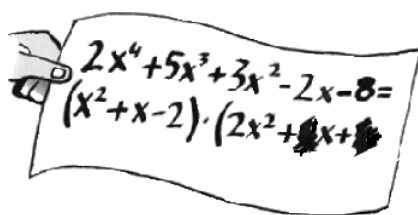
Actividad VII En el siguiente acertijo los cubos pueden contener fracciones de rectángulos. Escribe una ecuación que describa el acertijo y explica como hallaste la solución.



Ficha de Trabajo # 2: Números Reales

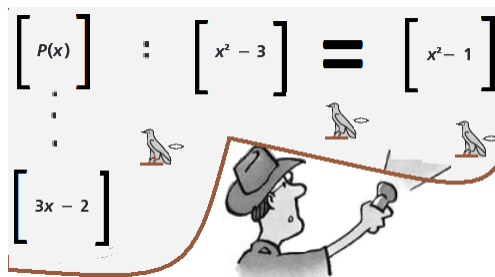
Actividad 1 Se supone que conoces la multiplicación usando rectas. Usa este método para hallar 21×113 . Por favor, respuesta clara y limpia

Actividad 2 Un estudiante recibe una “ayuda” para copiar su respuesta. Calcula los coeficientes que faltan para que la división sea exacta.



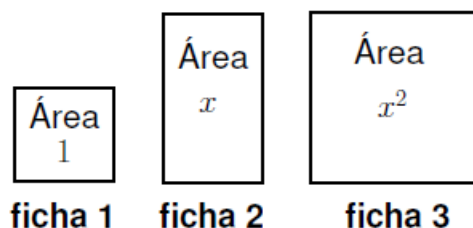
Actividad 3 Expresa mediante un polinomio el área de la figura. Anota tu procedimiento.

Actividad 4 Un estudiante de matemática viajó a Egipto, y en una pirámide descubrió la siguiente inscripción:



Al verla exclamó ¡Un polinomio! Halla ese polinomio $P(x)$ que aparece en la figura

Actividad 5 Considera las siguientes figuras y sus áreas.



Con las figuras, arma un rectángulo que represente al polinomio $5x^2 + 12x + 4$ y su factorización

Actividad 6 Simplificar $\frac{4x^3 - 2x^2 - 4x + 2}{2x^3 - 5x^2 + 4x - 1}$

Actividad 7 Encuentra la suma simplificada al máximo de

$$\frac{x^2 - x + 9}{x^3 - 9x} + \frac{1}{x^2 - 9} - \frac{1}{x - 3} + \frac{1}{x}$$



Examen - Matemática I

primer semestre 2017

Actividad 1 Resolver las siguientes ecuaciones:

1. $\sqrt{2x-1} - \sqrt{2x+1} = \sqrt{x}$

2. $\frac{1+x}{1-x} - \frac{1-x}{1+x} = 3$

Actividad 2 Factorizar en los reales el polinomio

$$6x^5 + 25x^4 + 42x^3 + 10x^2 - 39x + 10$$

Actividad 3 Simplificar las expresiones:

a) $\frac{\frac{x^2-1}{x^2+2x+1} \cdot \frac{2x^2-8x-10}{x-1}}{\frac{2x+2}{x^2+x-2} \div \frac{x+1}{x^3-4x^2-7x+10}} =$

b) $\sqrt[3]{\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^{-1} - \frac{1}{6}}{\sqrt[3]{\frac{3}{4} - 1 + \frac{1}{8}}}} \cdot \frac{10}{\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} + \frac{2}{3}} =$

Actividad 4 Racionalizar y hallar la suma de

$$\frac{3}{\sqrt{3}} + \frac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} - \frac{5}{\sqrt{2}}$$

Actividad 5 Resolver la desigualdad $\frac{3x^3 - 2x^2 + 3x - 2}{6 - x - x^2} \geq 0$



Prueba 1 - Matemática

Primer semestre 2016

1. Simplificar $\left(\frac{1}{1-x} - 1\right) \div \left(x + \frac{1-2x^2}{x-1} + 1\right)$

2. Calcular y simplificar el resultado

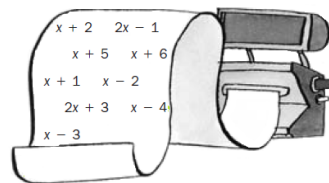
$$\left(\frac{a\sqrt{a+3}}{\sqrt{a-3}} - \frac{3\sqrt{a-3}}{\sqrt{a+3}} - \frac{18}{\sqrt{a^2-9}}\right) \div \sqrt[4]{(a^2-9)(a-3)}$$

3. Calcula el término que contiene x^{10} en el desarrollo de

$$\left(\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{x^3}{\sqrt[3]{4}}\right)^{25}$$

4. Sabiendo que el polinomio $P(x) = x^4 + 4x^3 + 11x^2 + 14x + k$ es divisible por el polinomio $x^2 + 2x + 4$, calcula el valor de k .

5. El profe de Matemática ha creado un factorizador de polinomios. Se trata de una máquina que proporciona un polinomio al azar y, a continuación, imprime una tarjeta con los posibles factores del polinomio. Si la persona que juega encuentra los factores del polinomio en la tarjeta obtiene un premio. Camila juega una vez y aparece en la pantalla el polinomio $2x^3 + 3x^2 - 8x - 12$, y se imprime una tarjeta como en la figura. Halla la combinación (factorización) que proporciona el premio.



6. Resolver y hallar supremo, ínfimo, máximo y mínimo (si existen): $1 + \frac{6}{x^2 + 3x + 2} \leq \frac{6}{x + 2}$

Puntaje: (10) + (10) + (10) + (10) + (10) + (10) = 60 puntos

THE END

Examen - Matemática

primer semestre 2013

1. Opera y simplifica

a) $\left(\frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{x-2}\right) \div \left(1 + \frac{2}{x-2}\right)$

b) $\frac{3x+9}{x+6} \cdot \left(\frac{4}{3x-3} - \frac{x+2}{x^2+2x-3}\right)$

2. Reducir al máximo:

a) $2\sqrt{75} - 3\sqrt{12} + 5\sqrt{27} - 7\sqrt{48} + \sqrt{300}$

b) $\left[\sqrt{5\sqrt{2}+1} - \sqrt{5\sqrt{2}-1}\right]^2 =$

3. Resolver $\frac{x-3}{4} \leq \frac{x-5}{6} - \frac{4x-3}{20}$

4. Resolver $\log(7x-9)^2 + 2 \log(3x-4)^2 = 2$

5. Probar que $\log \frac{75}{16} - 2 \log \frac{5}{9} + \log \frac{32}{243} = \log 2$

THE END

Taller Grupal- Matemática I

Bioquímica - primer semestre 2017

1. Reducir al máximo

a) $\sqrt{72} - \sqrt{50} + \sqrt{18} - \sqrt{8} + \sqrt{200}$

b) $\frac{\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt{a^3}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot a^{-2/3}}$

2. Factorizar $x^4 - 13x^2 + 36$

3. Simplifica $\frac{2}{x-1} \cdot \left(x + \frac{4x-1}{x-4}\right)$

4. Racionalizar $\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x + \sqrt{x^2 - y}}}$

5. Resolver y hallar supremo, ínfimo, máximo y mínimo de $\left|\frac{2-3x}{x+3}\right| \geq \frac{1}{4}$

6. Calcular

$$\left(\frac{a\sqrt{a+3}}{\sqrt{a-3}} - \frac{3\sqrt{a-3}}{\sqrt{a+3}} - \frac{18}{\sqrt{a^2-9}}\right) \div \sqrt[4]{(a^2-9)(a-3)}$$

7. Escribir el resto al dividir $2x^3 - 5x^2 - 2x + 3$ entre $3x^2 - 1$

8. Determinar las raíces enteras del polinomio $x^3 + x^2 - 9x - 9$

9. Calcular el término independiente de x en el desarrollo de $\left(\frac{x^2}{4} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}\right)^{13}$



Taller # 1: Números Reales

Actividad 1 Simplificar, al máximo, las siguientes expresiones:

a) $\frac{\sqrt[3]{a^{5/7}} \cdot \sqrt{a}}{\sqrt[5]{a^{2/3}} \cdot \sqrt[4]{a^{2/5}}}$

b) $\frac{1}{a}\sqrt{\frac{ab^2}{4}} + 3b\sqrt{\frac{1}{4a}} - \frac{1}{a}\sqrt{ab^2}$

c) $\frac{\frac{4}{x-y} \cdot \sqrt{\frac{2a}{x-y}}}{\sqrt{\frac{18a^3}{(x-y)^5}}}$

Actividad 2 Dividir $7x^5 - 2x^3 + 3x - 2$ entre $x^2 + 2$

Actividad 3 Factorizar $3x^3 + 2x^2 + 6x - 12 = 0$

Actividad 4 Reducir al máximo $\frac{1}{x^2 - 9x + 20} - \frac{1}{x^2 - 11x + 30} + \frac{1}{x^2 - 10x + 24} =$

Actividad 5 Resolver $\frac{2t}{t^2 - 4t + 3} \leq \frac{t+1}{1-t}$

Actividad 6 En un edificio, la comunidad emplea $\frac{1}{5}$ de los recursos en gas, $\frac{1}{3}$ en electricidad, $\frac{1}{12}$ en recogida de basura, $\frac{1}{4}$ en mantenimiento del edificio y el resto en limpieza. ¿Cuánto se emplea en limpieza?



Prueba 1 (Remedial) - Matemática I

Primer semestre 2017

1. Simplificar indicando todos los pasos, la expresión

$$\frac{4x^3 - 8x^2 - x + 2}{2x^3 - x^2 - 8x + 4}$$

2. Factorizar completamente y simplificar al máximo la expresión, indicando todos los pasos:

$$\frac{x^4 + 2x^3 - 3x^2}{x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 10x + 15}$$

3. Hallar la suma, simplificando el resultado en

$$\frac{x}{x^2 - 3x - 4} - \frac{2x}{x^2 - 1} + \frac{x^2 - 6x - 4}{x^3 - 4x^2 - x + 4}$$

4. Hallar la suma simplificada de la expresión

$$\sqrt{9xy} + \frac{xy}{\sqrt{4xy}} + \frac{\sqrt[6]{(xy)^{21}}}{x^3y^3}$$

FIN DEL TEST

Prueba Global - Matemática I

primer semestre 2016

1. Operar y simplificar

$$\text{a) } (\sqrt{5\sqrt{2}+1} - \sqrt{5\sqrt{2}-1})^2 = \quad \text{b) } \frac{3x+9}{x+6} \cdot \left(\frac{4}{3x-3} - \frac{x+2}{x^2+2x-3} \right)$$

2. En una población de 5 mil personas se está transmitiendo una infección estomacal por bacterias. Sea

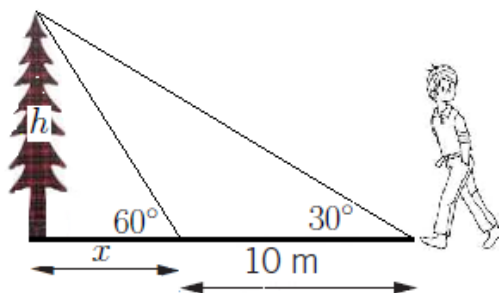
$$p(t) = \frac{5000t}{t+100}$$

el número de personas infectadas t semanas después del comienzo de la epidemia.

- Indicar dominio de p
 - Graficar la función en todo su dominio
 - Hallar después de cuántas semanas el número de infectados es aproximadamente 400 personas.
3. Resolver $\log (7x-9)^2 + 2 \log (3x-4)^2 = 2$
4. Usando propiedades (no calculadora), hallar el valor más simplificado de:

$$\log \frac{75}{16} - 2 \log \frac{5}{9} + \log \frac{32}{243} =$$

5. Diego quiere medir la altura de un árbol. Para ello ha medido algunos ángulos y distancias, como se muestra en la figura. Hallar la altura del árbol.



6. Resolver para $x \in [0, 2\pi]$ la ecuación $\sin 2x - \cos x = 6 \sin^3 x$
7. Al inyectar un determinado fármaco a una rata de laboratorio se observa que el animal presenta variaciones de temperatura en su sistema interno. Se logra establecer que dichas variaciones de temperatura, en grados Celsius, se modelan mediante la función

$$f(t) = 3 - \frac{1}{2} \sin(2t - \pi)$$

dónde t es el tiempo transcurrido desde que se inyecta el fármaco (en minutos). Graficar la función f indicando amplitud, período y desplazamiento de fase. A partir de la gráfica, indique al menos una información relevante del problema.

8. Escribir la ecuación, graficar y establecer sus elementos notables:

a) $9x^2 + 25y^2 + 18x + 50y = 191$

b) $9x^2 - y^2 - 36x - 6y + 18 = 0$

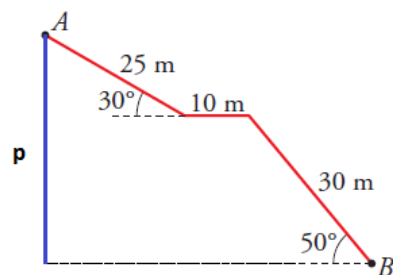
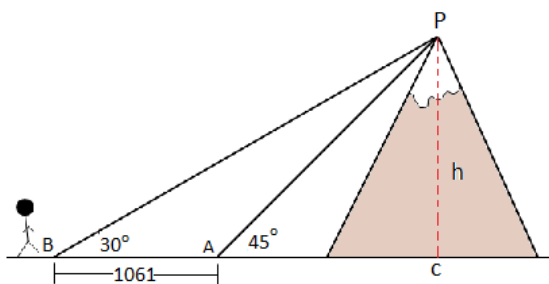
Recordar que $\sin 2t = 2 \sin t \cos t$, $\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t$, $\sin^2 t = (\sin t)^2$

THE END

Examen - Matemática I - Química y Farmacia

primer semestre 2016

1. Desde un lugar situado junto al pie de una montaña se observa el punto más alto de la misma con un ángulo de elevación de 45° . Si se retrocede 1061 metros, el ángulo es de 30° . Calcula la altura de la montaña. Resp $h = 1449,3527$ m



2. Una escalera para acceder a un túnel del metro tiene la forma y las dimensiones de la figura. El punto A está al nivel del suelo. Calcula la profundidad del punto B (distancia p que muestra la figura).
3. El peso W (en kg) de una población de elefantes africanos hembras está relacionado con la edad t (t en años) mediante:

$$W(t) = 2600 \left(1 - \frac{1}{2} e^{-0,075t} \right)^3$$

- a) ¿Cuánto pesa un elefante recién nacido? Resp. 325 kg.
 b) Suponiendo que una hembra adulta pesa 1800 kg estimar su edad. Resp. 20 años
4. Simplificar:
 a) $\frac{2x-8}{x^2-16} \cdot \frac{x^2+5x+4}{x^2+8x+16}$ b) $\frac{x^2+5x+4}{x^2+x-12} \div \frac{x^2-1}{2x^2-6x}$
5. Dividir $x^4 - 6x^3 - 25x^2 - 5x + 9$ entre $x + 3$
6. Sea $x = \frac{1}{a-1}$, $a \neq 1$. Calcular $\frac{1+(a+x)^{-1}}{1-(a+x)^{-1}} \cdot \left[1 - \frac{1-(a^2+x^2)}{2ax} \right]$

FIN DEL TEST

Prueba 1A - Matemática II - QF

segundo semestre 2016

Química y Farmacia

Actividad 1 Hallar los siguientes límites:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x}$ 3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x(x+1)}{5^x(3x+2)}$
 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3(e^x - 1)}{(1 - \cos 2x)^2}$ 4. $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49}$

Actividad 2 Estudiar continuidad en $x = 1$ de

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{sen} 3x} & , \text{ si } x < 0 \\ 1 & , \text{ si } x = 0 \\ 7x^2 - 3x - 3 & , x > 0 \end{cases}$$

Actividad 3 Hallar condiciones de las constantes a , b , c , de modo que sea derivable en $x = c$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , \text{ si } x \leq c \\ ax + b & , \text{ si } x > c \end{cases}$$

Actividad 4 Hallar las derivadas siguientes:

1. $y = \sqrt[3]{1 + \operatorname{tg}(\ln x)}$
 2. $\sec^6(x^2 + 1 - 2x \operatorname{sen} x)$
 3. $x = 2t - t^2$, $y = 3t - t^3$

Actividad 5 Se introduce una población de 500 bacterias en un cultivo, creciendo en número de acuerdo con la función

$$P(t) = 500 \left(1 + \frac{4t}{50 + t^2} \right)$$

donde t se mide en horas. Estudiar el comportamiento de esta población, indicando lo siguiente: Dominio, intersecciones con los ejes, puntos críticos, puntos de máximo y de mínimo. Intervalos de monotonía, puntos de inflexión, intervalos de concavidad y asíntotas. Bosquejar la gráfica de la función.

FIN DEL TEST

Prueba 1 - Matemática II - QF

segundo semestre 2016

Química y Farmacia

Actividad 1 Hallar los siguientes límites:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \operatorname{sen} x}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right)$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+9} \right)^{x+1}$$

Actividad 2 La población (en miles) de una colonia de bacterias t minutos después de la introducción de una toxina está dada por la función

$$P(t) = \begin{cases} t^2 + 7 & , \text{si } 0 < t < 5 \\ -8t + 72 & , \text{si } t > 5 \end{cases}$$

- ¿Cuál es la población pasados 2 minutos?
- ¿Cuándo muere la población?
- ¿Es continua la función $P(t)$? Justifique.

Actividad 3 La concentración C de cierto producto químico en la sangre, t horas después de ser inyectado en el tejido muscular es

$$C(t) = \frac{3t}{27 + t^2}$$

donde t es medido en minutos. Estudiar el comportamiento de esta función, indicando claramente lo siguiente: Dominio, intersecciones con los ejes, puntos críticos, puntos de máximo y de mínimo. Intervalos de monotonía, puntos de inflexión, intervalos de concavidad y asíntotas. Bosquejar la gráfica de la función.

Actividad 4 Hallar las siguientes derivadas:

$$1. y' \text{ si } y = 5 \operatorname{sen}^3(5x+1)^4$$

$$2. y' \text{ si } x^2y + 2y^3 = 3x + 2y \text{ y evalúela en } (2, 1)$$

$$3. y' \text{ si } y = \sqrt{5 + e^{x^3+2x^2}}$$

FIN DEL TEST

Prueba # 3 Matemática - Bioquímica

- La función $f(t) = \beta - \alpha e^{-kt}$, siendo α, β, k constantes reales positivas describe la relación entre la eficacia con que un individuo realiza una tarea y la cantidad de instrucción o experiencia que el individuo ha tenido. Esta curva se denomina “curva de aprendizaje” y es de amplio uso en Biología.

Estudie las características de la gráfica de esta función, considerando $\alpha = 1, \beta = 3, k = 2$

- Se acepta que el crecimiento de una población de bacterias, durante los primeros instantes, tiene un comportamiento exponencial. Es decir, si x_0 es el población inicial de

bacterias, entonces a tiempo t , el número de bacterias sería:

$$x(t) = x_0 e^{kt}$$

siendo $k > 0$ la tasa porcentual de crecimiento. ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que la población se duplique? Si, en particular, $k = 0,4$ para un tipo de bacterias y el tiempo se mide en horas, use su calculadora para

estimar el tiempo en que esa población se duplica.

3. En Medicina y en Biología las funciones periódicas, se utilizan, por ejemplo, para medir presión arterial. Trazar un bosquejo de la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{2} \text{sen}(2x - \frac{\pi}{4})$. Indicando; amplitud, periodo, frecuencia, desfase y desplazamiento vertical. Muestre claramente los puntos considerados en su gráfica.

FIN DEL TEST

Taller 1A - Matemática II - QF

segundo semestre 2016

Química y Farmacia

Actividad 1 Hallar los siguientes límites:

- $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x)$
- $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+5} - 2}{x^2 - 1}$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - 14x^2 + 12x}{x^3 - 10x^2 + 27x - 18}$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-1} \right)^{x+3}$

Actividad 2 Estudiar la continuidad de la función

$$f(x) = \frac{x+1}{3 - \sqrt{x^2 + 5}}$$

Actividad 3 Un biólogo realizó un experimento sobre la cantidad de individuos en una población de ranas en un medio nutritivo y obtuvo el modelo

$$g(t) = \ln(t^2 - 2t + 5)$$

donde t se mide en días y $g(t)$ es el número de individuos en el cultivo. Indique después de cuánto tiempo el número de individuos en la población es mínimo. Resp $t = 2$

FIN DEL TEST

Taller 1 - Matemática II - QF

segundo semestre 2016

Química y Farmacia

Actividad 1 Hallar los siguientes límites:

- $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+5} - 2}{x^2 - 1}$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - 14x^2 + 12x}{x^3 - 10x^2 + 27x - 18}$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x - 4}{\sqrt{x^4 + 1}}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{2 \text{sen}(2x - 1)}{4x - 2}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x + 1} \right)^{x^2 + 2x + 1}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x^2 - x)^{\frac{1}{x}}$$

Actividad 2 El desarrollo de cierta epidemia se caracteriza por tener un comportamiento dado por la función

$$f(t) = \frac{250}{1 + e^{-2t}}$$

que representa la cantidad de personas que adquieren la enfermedad en un tiempo t medido en sema-

nas.

1. ¿Cuántas personas están contagiadas al comienzo de la epidemia?

2. ¿Qué indica el valor del $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$?

Actividad 3 Determinar si existe el límite, en $x = 0$ de:

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 9} - 3}{x^2}, & \text{si } x < 0 \\ \frac{\sin x}{6x}, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

FIN DEL TEST

Taller Grupal # 2 Matemáticas I

- Es posible medir la concentración de alcohol en la sangre de una persona. Investigaciones médicas recientes sugieren que el riesgo R (dado como porcentaje) de tener un accidente automovilístico puede ser modelado mediante la ecuación:

$$R = 6e^{kx}$$

donde x es la concentración de alcohol en la sangre y k una constante.

- Al suponer una concentración de 0.04 de alcohol en la sangre produce un riesgo del 10% ($R = 10$) de sufrir un accidente, ¿cuál es el valor de la constante? Resp. $k = 12,77$
 - Con el mismo valor de k indique la concentración de alcohol correspondiente a un riesgo del 100%. Resp. $x = 0,22$
 - Si la ley establece que las personas con un riesgo del 20% o mayor de sufrir un accidente no deben conducir vehículos ¿con cuál concentración de alcohol en la sangre debe un conductor ser arrestado y multado? Resp. 0,094
- El beneficio esperado de una empresa, en millones de euros, en los próximos ocho años viene dado por la función B definida por

$$B(t) = \begin{cases} 7t - t^2, & \text{si } 0 \leq t < 5 \\ 10, & \text{si } 5 \leq t \leq 8 \end{cases}$$

donde t indica el tiempo transcurrido en años.

- Represente gráficamente la función B y explique cómo es la evolución del beneficio esperado durante esos 8 años.
 - Calcule cuándo el beneficio esperado es de 11,25 millones de euros
- Dadas las funciones $f(x) = x + 1$ y $g(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$, calcular:
 - La función compuesta $f \circ g$.
 - Graficar esta función compuesta indicando en forma clara: Dominio, recorrido, asíntotas (si las hay) horizontales, verticales y oblicuas, Interceptos. A partir de estos datos trace su gráfica.

- c) Para $x > 2$ determine si la compuesta $f \circ g$ tiene función inversa. Si su respuesta es positiva halle esa inversa y su dominio.
4. Dada la función $y = \log(x^2 - 25)$:
- a) Determinar dominio, recorrido y asíntotas (si existen). c) Trazar un bosquejo de la gráfica.
- b) Hallar la inversa para $x > 5$

FIN DEL TEST**Prueba # 1: Funciones Reales: Ingeniería Informática**

Actividad 1 Hallar dominio de $f(x) = \frac{1}{3 - \sqrt{x+5}}$

Actividad 2 Sea $f(x) = \frac{2x-1}{2x+1}$, $g(x) = \frac{1}{2x-1}$. Hallar $(f \circ g)(x)$ y su dominio.

Actividad 3 Sea $f(x) = x + |x-2|$. Graficar esta función y determinar en que intervalo tiene inversa.

Actividad 4 Sea $f(x) = \frac{2x-1}{1+2x}$. Hallar $f\left(\frac{1}{x}\right)$ y $f\left(\frac{1+x}{2-2x}\right)$

Actividad 5 Considerar la expresión $f(x) = \frac{3-x}{x-1}$:

- a) Hallar dominio y recorrido.
- b) Usar $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$ para probar que f es inyectiva.
- c) Para $x > 1$ hallar la inversa de f
- d) Graficar f y f^{-1}

Puntaje: $(10) + (10) + (6+4) + (6+6) + (4+4+4+[4+2]) = 60$ puntos

FIN DEL TEST**Prueba # 2 Matemática II - Bioquímica**

1. Considerar la función $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Determinar:

- a) dominio, intersecciones con los ejes coordenados
- b) máximos y mínimos, crecimiento y decrecimiento
- c) concavidad y puntos de inflexión
- d) asíntotas
- e) Hacer el gráfico de la función

2. Considerar la función $f(x) = \frac{x^2}{1-x^2}$. Determinar:

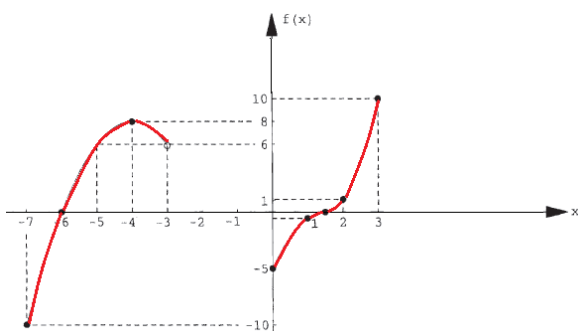
- a) dominio, intersecciones con los ejes coordenados
- b) máximos y mínimos, crecimiento y decrecimiento
- c) concavidad y puntos de inflexión
- d) asíntotas
- e) Hacer el gráfico de la función

Puntaje: $(20) + (20) + (20) = 60$ puntos

FIN DEL TEST

Prueba 2 - Matemática IME014

Primer semestre 2016



- Considerar la gráfica de la función f que se muestra en la figura superior, sabiendo que se trata de una función par.
 - Completar la gráfica de f , indicando en forma clara la nueva posición de los puntos que están ennegrecidos.
 - Hallar los intervalos donde f , completa, es creciente y/o decreciente
- Sea $f(x) = \begin{cases} -2x - 5 & \text{si } -4 \leq x \leq -2 \\ x^2 + 2 & \text{si } -2 < x \leq 3 \\ 7 & \text{si } x > 3 \end{cases}$
 - Realizar la gráfica de la función, indicando puntos de interés.
 - Indicar dominio y recorrido de la función.
 - Hallar intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- El ingreso mensual (en dolares) obtenido por vender x unidades de un producto está dado por:

$$I(x) = 4x - 0,025x^2$$

Determine el número de unidades que deben venderse al mes de modo de maximizar el ingreso. ¿Cuál es este ingreso máximo? Resp. 80 unidades Ingreso máximo: 180 dólares.

- La distancia d (en millones de Km) de un asteroide con respecto a la Tierra viene dada por

$$d = 5 \cdot 10^9 \cdot e^{-5t}, \quad (t \text{ en años})$$

- ¿A qué distancia estará ese asteroide dentro de 4 años? Resp. 10,3 millones de Km.
 - ¿Dentro de cuánto tiempo es asteroide estará a tan solo 1 millón de km de la Tierra? Resp. 4 años 170 días.
- La población de bacterias en el estómago de una persona que ha ingerido comida infectada crece de forma exponencial de acuerdo a la ley $y = y_0 e^{kt}$. Si inicialmente había 500 bacterias y luego de 5 minutos hay 2 500:
 - ¿Cuántas bacterias habrá luego de 15 minutos? Resp. 62 500 bacterias aprox.
 - ¿Después de cuántos minutos habrá 100 000 bacterias? Resp. 16,5 min.
 - Resolver:
 - $\log\left(\frac{x}{5}\right)^4 + \log\left(\frac{625}{4}\right) = \log x^2$
 - $4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 8 = 0$

FIN DEL TEST

Prueba # 2 - Matemática I

primer semestre 2017

Química y Farmacia

- Un medicamento se elimina del cuerpo a través de la orina. La dosis inicial es de 10 mg y la cantidad $A(t)$ que queda en el cuerpo t

horas después está dada por $A(t) = 10 \left(\frac{4}{5}\right)^t$. Para que el fármaco haga efecto debe haber en el cuerpo por lo menos 2 mg.

- a) Determine cuándo quedan solo 2 mg.
Resp. 7hrs aprox
- b) ¿Cuál es la semivida (o vida media) del medicamento. Resp. 3 horas aprox.
2. La ganancia trimestral en una compañía (en miles de dólares) está dada por la expresión

$$P = 7x - \frac{x^2}{3} + 30$$

donde x (en miles de dólares) es la cantidad de dinero que la compañía gasta en publicidad cada trimestre.

- a) Para que la compañía tenga una ganancia trimestral máxima, ¿cuánta canti-

dad de dinero debería invertir? Resp. 10,5 o 10.500 dólares.

- b) ¿cuál es la máxima ganancia trimestral que puede lograr la compañía? Resp. 66.750 dólares

3. Sean $f(x) = \frac{x}{x-2}$ y $g(x) = \frac{1+x^2}{2x-1}$.

- a) Hallar dominio de f y dominio de g
b) Hallar $f \circ g$, su dominio y graficarla.

4. Calcular x en las siguientes ecuaciones:

a) $\log_x(20x-4) - \log_x 25 = 2$

b) $\frac{\log_b(35-x^3)}{\log_b(5-x)} = 3$

FIN DEL TEST

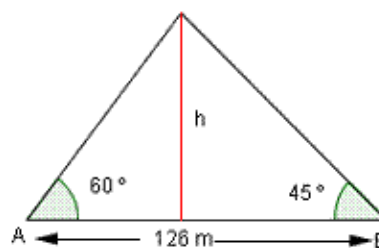
Prueba # 3 - Matemática I: primer semestre 2017

Química y Farmacia

1. Graficar la función $y = -2\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. Indicar; amplitud, frecuencia, periodo, desfase, desplazamiento vertical (C), inicio del ciclo (I_c) y fin de ciclo (F_c).
2. Resolver $1 + \cos x = \sin x$ para $x \in [0, 2\pi]$.
3. Considerar la ecuación $25x^2 + 9y^2 = 255$
- a) Identificar la cónica. Hallar centro, focos y vértices
- b) Hallar la ecuación de la hipérbola cuyos **focos** son los vértices de la cónica hallada en parte (a) y cuyos vértices son los **focos** de la cónica hallada en parte (a). Graficar y determinar centro, focos, vértices y asíntotas de esta

hipérbola.

4. Sara se halla ubicada en el punto A y Benicia en el punto B y ven una torre, bajo ángulos de 60° y 45° respectivamente. La distancia entre Sara y Benicia es de 126 m (ver figura). Hallar la altura de la torre. Resp. 79,88m



FIN DEL TEST

Prueba # 3 - Matemática I

primer semestre 2017

Química y Farmacia

1. Graficar la función $y = 2 \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$. Indicar; amplitud, frecuencia, periodo, desfase, desplazamiento vertical (C), inicio del ciclo y fin de ciclo.

2. Resolver para ángulos en $[0, 2\pi]$, la ecuación

$$\sin(2x) \cdot \cos(x) = 6 \sin^3(x)$$

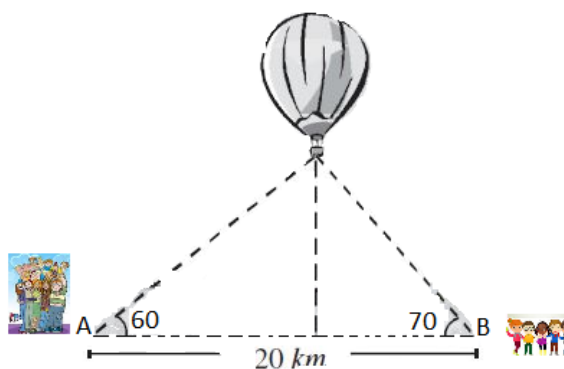
3. Considerar la ecuación $25x^2 + 9y^2 = 225$

a) Identificar la cónica. Hallar centro, focos y vértices

b) Hallar la ecuación de la hipérbola cuyos **focos** son los vértices de la cónica hallada en parte (a) y cuyos vértices son los **focos** de la cónica hallada en parte (a). Graficar y determinar centro, focos, vértices y asíntotas de esta hipérbola.

4. Las estudiantes de Mate 1 salen a dar un paseo en globo. En tierra, sus compañeros se dividen en dos grupos para observar cuan

alto se elevan. El grupo, en el punto A, es comandado por Juan y el grupo en B comandado por Jorge. La distancia entre los puntos A y B es de 20 km. Los ángulos de elevación del globo son 60° y 70° (ver figura). Se supone que uno de los grupos en tierra es capaz de hallar a qué altura del suelo se encuentran las damas. Resp. 19.4 km aprox.



FIN DEL TEST

Prueba Global - Matemática I

Bioquímica - primer semestre 2017

1. Trazar un bosquejo de la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{2} \sin(2x - \frac{\pi}{4})$. Indicando; amplitud, periodo, frecuencia, desfase, desplazamiento vertical, inicio y fin de ciclo. Muestre claramente los puntos considerados en su gráfica.
2. Hallar la factorización total del polinomio $p(x) = x^5 + x^4 - 3x^3 - x^2 + x + 1$
3. Hallar el o los valores de x que satisfacen la ecuación $\ln(12 - 4x) + \ln x = \ln(9 - x)$. Indicar el dominio de la variable x , solución de la ecuación.
4. Identificar el lugar geométrico $-4x^2 + y^2 - 24x - 2y - 51 = 0$, indicando vértices, focos, centro, radio, directriz y asíntotas (cuando corresponda).

FIN DEL TEST

Prueba Global - Matemática I

Química y Farmacia - primer semestre 2017

1. En Medicina las funciones periódicas, se utilizan, por ejemplo, para medir presión arterial. Trazar un bosquejo de la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{2} \sin(2x - \frac{\pi}{4})$. Indicando; amplitud, periodo, frecuencia, desfase, desplazamiento vertical, inicio y fin de ciclo. Muestre claramente los puntos considerados en su gráfica.
2. (Reacción química) Considerar una reacción química que ocurre en una solución bien mezclada. Tal reacción es irreversible y ningún otro proceso se lleva a cabo que afecte la cantidad de cada reactivo. Una molécula de una sustancia A se combina con una molécula de la sustancia B para formar una molécula de la sustancia C , lo que se escribe $A + B \rightarrow C$. La ley de acción de masas enuncia que, la rapidez a la que se forma C es proporcional al producto de las cantidades de A y B que aún no han reaccionado. Considere las siguientes variables:

v = rapidez a la que se forma C

x = cantidad de sustancia C

k = constante de reacción.

- a) Si la cantidad de A , antes de iniciar la reacción es 3 y la de B es 2, obtener la ecuación que representa este fenómeno.
 - b) Si la constante de proporcionalidad es $k = 1$ grafique el fenómeno.
3. Hallar la factorización total del polinomio $p(x) = x^5 + x^4 - 3x^3 - x^2 + x + 1$
 4. Hallar el o los valores de x que satisfacen la ecuación $\ln(12 - 4x) + \ln x = \ln(9 - x)$. Indicar el dominio de la variable x , solución de la ecuación.
 5. Identificar el lugar geométrico $-4x^2 + y^2 - 24x - 2y - 51 = 0$, indicando vértices, focos, centro, radio, directriz y asíntotas (cuando corresponda).

FIN DEL TEST

Taller # 1: Funciones Reales

Carrera: Ingeniería Informática

Actividad 1 Considera la función

$$f(x) = \sqrt{12 - 3x}$$

1. Indica su dominio
2. Haz la gráfica de f
3. Determina el recorrido de la función
4. Determina la fórmula de la inversa.
5. Bosqueja la inversa.

Actividad 2 Considera la función $f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$

1. Indicar su dominio
2. Hacer la gráfica de f

3. Determinar el recorrido de la función
4. Determinar las asíntotas.
5. Determinar si es inyectiva y/o sobreyectiva.
6. Hallar la fórmula de la función inversa considerando $x > 1$.
7. Bosquejar la inversa.

Actividad 3 Dadas las funciones

$$f(x) = \sqrt{25 - x} \quad y \quad h(x) = \sqrt{y - 5}$$

1. Graficar ambas funciones
2. Hallar $(f \circ h)(x)$ y el dominio de esta función compuesta.

Puntaje: $(10) + (4+4+1) + (1+2+1+2+1+1+1) + (2+2+4) = 36$ puntos

FIN DEL TEST

Taller 2 - Matemática I

primer semestre 2016

Bioquímica

1. La concentración de cierto calmante suministrado mediante suero, varía en su efectividad en el tiempo según

$$C(t) = 6t - t^2$$

donde C es la concentración del calmante en el suero medida en miligramos por litro y t es el tiempo medido en horas.

- Hallar en qué instante la concentración es de 8 miligramos por litro.
- Hallar el tiempo en que se produce la máxima concentración.
- Graficar la función del problema.

2. Considere la función $f(x) = \frac{3x}{2x-4}$

- Indicar dominio, asíntotas
- Graficar la función.
- Para $x > 2$ determinar si existe función inversa, en caso de existir, determinar su dominio, y graficar.

3. Resolver las ecuaciones, indicando procedimiento:

$$a) \left(\frac{9}{4}\right)^{x-5} = \frac{8}{27}$$

$$b) 9^{x-1} - 3^{x-2} - 7 = 0$$

$$c) \log_3(3x-1) - \log_3(x+1) = 2$$

FIN DEL TEST

Taller 2 - Matemática I

primer semestre 2016

Química y Farmacia

Actividad 1 Los registros de temperatura tomados entre las 0 y las 24 horas en una zona rural se ajustan a la función

$$T(x) = -\frac{1}{12}(x-12)^2 + 10$$

donde T es la temperatura en grados Celsius y x es la hora del día que se registró.

- Bosquejar la función
- ¿Cuál fue la temperatura máxima? y ¿a qué hora se registró?
- ¿A qué hora la temperatura fue de 7° Celsius

Actividad 2 Considera la función $f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$

- Indicar su dominio
- Hacer la gráfica de f
- Determinar el recorrido de la función
- Determinar las asíntotas.

Actividad 3 Un mediocampista lanza una pelota hacia arriba, ésta describe una trayectoria formando una parábola. Después de t segundos, la altura de la misma es $y = 40t - 16t^2$.

- Graficar la función.
- Determinar el tiempo que tarda en alcanzar la altura máxima.
- ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el balón?
- ¿Cuánto tiempo tarda en alcanzar el piso?

FIN DEL TEST

Taller # 2: Matemáticas I

Carrera: Química y Farmacia

1. La concentración de cierto calmante suministrado mediante suero, varía en su efectividad en el tiempo según

$$C(t) = 6t - t^2$$

donde C es la concentración del calmante en el suero medida en miligramos por litro y t es el tiempo medido en horas.

- Hallar en qué instante la concentración es de 8 miligramos por litro.
 - Hallar el tiempo en que se produce la máxima concentración.
 - Graficar la función del problema.
2. Una Isapre calcula que el número de sus afiliados $A(t)$, después de t años, está dada

por:

$$A(t) = 100,000 (0,04)^{0,5t}$$

- ¿Cuántos afiliados tiene inicialmente la Isapre?
 - ¿Cuántos afiliados tendrá después de 3 años?
 - ¿Al cabo de cuántos años habrán 30.000 afiliados?
3. Considere la función $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}$
- Indicar dominio, asíntotas
 - Graficar la función.
 - Para $x > 3$ determinar si existe función inversa, en caso de existir, hallar su dominio, y graficarla.

FIN DEL TEST**Taller - Matemática**

primer semestre 2017

1. Reducir al máximo

$$a) \sqrt{72} - \sqrt{50} + \sqrt{18} - \sqrt{8} + \sqrt{200}$$

$$b) \frac{\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt{a^3}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot a^{-2/3}}$$

2. Racionalizar $\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x + \sqrt{x^2 - y}}}$

3. Factorizar $x^4 - 13x^2 + 36$

4. Simplificar $\frac{2}{x-1} \cdot \left(x + \frac{4x-1}{x-4}\right)$

5. Resolver y hallar supremo, ínfimo, máximo y mínimo (si existen): $\left| \frac{2-3x}{x+3} \right| \geq \frac{1}{4}$

6. Calcular

$$\left(\frac{a\sqrt{a+3}}{\sqrt{a-3}} - \frac{3\sqrt{a-3}}{\sqrt{a+3}} - \frac{18}{\sqrt{a^2-9}} \right) \div \sqrt[4]{(a^2-9)(a-3)}$$

7. Escribir el resto al dividir $2x^3 - 5x^2 - 2x + 3$ entre $3x^2 - 1$

8. Calcular el término independiente de x en

$$\left(\frac{x^2}{4} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}} \right)^{18}$$

9. Determinar las raíces enteras del polinomio

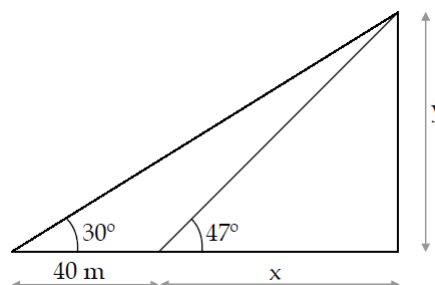
$$x^3 + x^2 - 9x - 9$$

FIN DEL TEST

Taller # 3: Matemáticas I

1. Graficar la función $y = 2 \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$
2. Resolver $2 \sin^2 x - \cos x - 1 = 0$.
3. Hallar centro, radio, vértices, focos, directriz y asíntotas, si es pertinente, de la ecuación $4x^2 - 20x - 24y + 97 = 0$.
4. Escribir la ecuación de la elipse cuyo eje mayor mide 20 unidades y los focos tienen coordenadas $(0, 5\sqrt{3})$ y $(0, -5\sqrt{3})$. Indicar, en forma clara, coordenadas del centro y los vértices.
5. Hallar las distancias x e y que muestra la

figura.



FIN DEL TEST

Taller 3 - Matemática

primer semestre 2016

1. Hallar, sin calculadora:

$$\frac{1 - \cos^2 210^\circ}{\sin 330^\circ + \sin 450^\circ} + \frac{\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) \cdot \operatorname{cotg} \frac{7\pi}{4}}{\csc^2(-300^\circ)}$$

2. Si $\sec \alpha = \frac{13}{5}$, hallar

$$\frac{2 \sin \alpha - 3 \cos \alpha}{4 \sin \alpha - 9 \cos \alpha} =$$

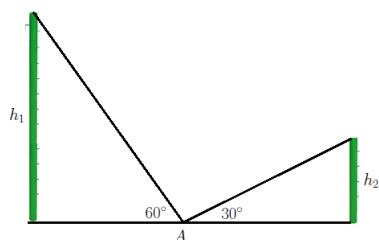
3. Graficar, indicando amplitud, periodo, fase, desplazamiento y frecuencia, las funciones:

$$a) y = 2 \sin\left[\frac{\pi}{2}(x - 1)\right] - 2$$

$$b) y = -3 \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$$

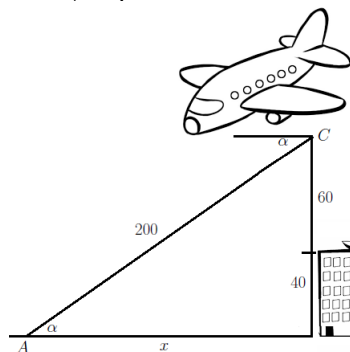
$$c) y = 2 \cos(3x + \pi) + 1$$

4. En la figura, h_1 y h_2 son dos torres.



En el punto medio de ambas torres, A, se instala Camila y observa sus extremos con un ángulo de elevación de 60° y 30° , respectivamente. Si la distancia horizontal entre las torres es de 100 metros, probar que la altura de una de las torres es el triple de la otra.

5. Un avión pasa a 60 metros sobre la azotea de un edificio de 40 metros de altura. Luego desciende 200 metros hasta tocar tierra en un punto A. Determinar con qué ángulo descendió y la distancia entre la base del edificio y el punto A.



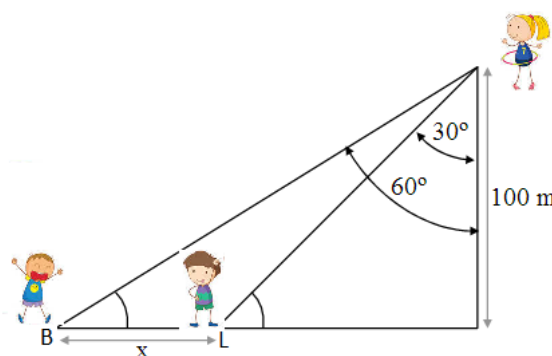
FIN DEL TEST

Taller # 3: Matemáticas I

Carrera: Química y Farmacia

1. Graficar la función $y = \frac{2}{3} \sin\left(-\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$
2. Resolver $\sec x - \tan x + 1 = 0$.
3. Identificar la ecuación $x^2 - 3y^2 + 2x + 6y - 1 = 0$. Hallar centro, radio, vértices, focos y asíntotas, si es pertinente.
4. Un punto P está tres veces más alejado de $(1, 1)$ que de $(-3, 4)$. Determinar la ecuación, identificar, hallar centro, radio, vértices, focos y asíntotas, si es pertinente.
5. Ana se sube a la azotea de una torre de 100 metros. Con sus lentes largavista descubre allá abajo, en la calle, la figura de Leonardo y más atrás la de Benjamín. Al primero lo

ve bajo un ángulo de 30° y al Benja bajo un ángulo de 60° . Hallar la distancia en línea recta entre Leo y Benja. (ver figura)

**FIN DEL TEST****Universidad de la Frontera**

Facultad de Ingeniería y Ciencias

Departamento de Matemática y Est.

Prueba # 1 - Matemática I - Química y Farmacia

primer semestre 2022

Escriba lo más claro posible sus respuestas y sin borrones. ¡Por favor!

- La prueba es **individual**.
- **NO HAY CONSULTAS**.
- Su **celular** debe estar apagado durante el desarrollo de la prueba.

Pregunta	1	2	3	4	5	6	7	puntos
Puntaje	10	10	10	10	10	10	10	70
Logro								

Esta Prueba de cátedra apunta a los siguientes resultados de aprendizaje:

- Reconocer la axiomática de los números reales y sus consecuencias en la resolución de problemas.
- Mantener una actitud activa y de curiosidad, buscando diferentes medios para encontrar respuestas a sus interrogantes

Actividad 1 Escribir en un solo logaritmo la expresión

$$\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) + \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \ln(x^2 - 1)$$

Actividad 2 Resolver la ecuación

$$\log_4(x+1) - \log_2(x-1) = 0$$

Actividad 3 Hallar n que satisface $\frac{(n+3)!(n+4)!}{(n+3)! + (n+4)!} = 120 \cdot \frac{n+4}{n+5}$

Actividad 4 Calcular el valor de m y n si el cuarto término en el desarrollo de $(x+2)^n$ es igual a $80x^m$

Actividad 5 A que potencia n se deberá elevar el binomio $(x^2 + \frac{1}{2x})^n$ si el término 11 debe ser de grado 20.

Actividad 6 Un término en el desarrollo de $(x^2 - 5y^7)^n$ contiene x^6y^{35} . Hallar el coeficiente del segundo término.

Actividad 7 Resolver la desigualdad, indicando existencia de supremo, ínfimo, máximo y mínimo en

$$\frac{x^3 + x^2 - 2x}{x^2 - x - 2} \geq x$$

FIN DEL TEST

Universidad de la Frontera

Facultad de Ingeniería y Ciencias

Departamento de Matemática y Est.

Prueba # 2 - Matemática I - Química y Farmacia

primer semestre 2022

Escriba lo más claro posible sus respuestas y sin borrones. ¡Por favor!

- La prueba es **individual**.
- **NO HAY CONSULTAS**.
- Su **celular** debe estar apagado durante el desarrollo de la prueba.

Pregunta	1	2	3	4	5	6	7	puntos
Puntaje	15	15	15	15				60
Logro								

Esta Prueba de cátedra apunta a los siguientes resultados de aprendizaje:

- Representar en el plano cartesiano situaciones propias de la geometría y el álgebra.

- Mantener una actitud activa y de curiosidad, buscando diferentes medios para encontrar respuestas a sus interrogantes.

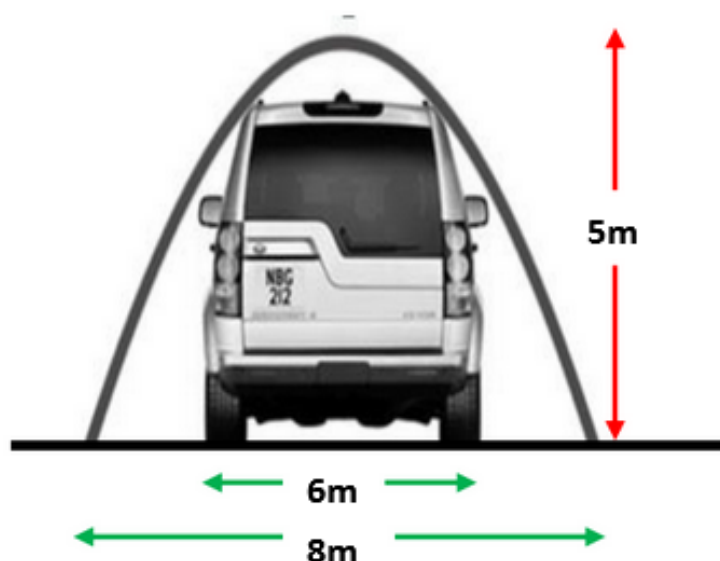
Actividad 1 Dada la cónica $4x^2 - 9y^2 - 8x - 72y - 176 = 0$

1. Identificarla (parábola, circunferencia, elipse, hipérbola, recta)
2. Indicar, si existen, los siguientes elementos: centro, radio, asíntotas, lado recto, vértice, focos, directriz, excentricidad
3. Hacer un esquema de la figura, indicando vértice, focos, centro, asíntotas, directriz

Actividad 2 Dada la cónica $2y^2 + 3x^2 - 8y + 18x + 29 = 0$

1. Identificarla (parábola, circunferencia, elipse, hipérbola, recta)
2. Indicar, si existen, los siguientes elementos: centro, radio, asíntotas, lado recto, vértice, focos, directriz, excentricidad
3. Hacer un esquema de la figura, indicando vértice, focos, centro, asíntotas, directriz

Actividad 3 Considerar la figura, ubicarla en un sistema de coordenadas cartesianas, a su “pinta”.



Se debe dar respuesta al siguiente problema, indicando todo su desarrollo:

“Un túnel de una carretera tiene la forma de un arco parabólico que tiene 8m de ancho y 5m de altura, ¿cuál es la altura máxima que puede tener un vehículo de transporte de 6m de ancho, para poder pasar por el túnel?”

Actividad 4 Sean $(-2, -1)$ y $(2, 3)$ dos vértices de un triángulo **equilátero**. Calcular el tercer vértice.

FIN DEL TEST

Universidad de la Frontera
Facultad de Ingeniería y Ciencias
 Departamento de Matemática y Est.

Prueba # 1 - Cálculo de una variable

primer semestre 2022

Escriba lo más claro posible sus respuestas y sin borrones. ¡Por favor!

- La prueba es **individual**.
- **NO HAY CONSULTAS.**
- Su **celular** debe estar apagado durante el desarrollo de la prueba.

Pregunta	1	2	3	4	5		7	puntos
Puntaje	20	7+7	7+7	6	6			60
Logro								

Esta Prueba de cátedra apunta a los siguientes resultados de aprendizaje:

- Representar en el plano cartesiano situaciones propias de la geometría y el álgebra.
- Mantener una actitud activa y de curiosidad, buscando diferentes medios para encontrar respuestas a sus interrogantes.

NO SE ACEPTAN PREGUNTAS, los enunciados de los problemas son lo suficientemente claros y precisos. Recuerde que la prueba es individual y está prohibido traficar información.

1. Considere la función $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 2$.
 Determinar:

- a) Dominio y rango de la función.
- b) Intersecciones con los ejes.
- c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- d) Puntos de máximo y de mínimo.
- e) Intervalos de concavidad y convexidad.
- f) Existencia de asíntotas (verticales, horizontales y oblicuas).
- g) La gráfica de la función.
- h) Un intervalo donde se cumple el Teorema de Rolle, indicando esto en un gráfico aparte.
- i) Un intervalo donde se cumple el Teorema de Valor Medio, indicando esto en un gráfico aparte.

2. Hallar los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 4x - 2} - x)$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x} [1 + \operatorname{tg}(2x)]^{\frac{4}{x}}$

3. Estudiar continuidad y diferenciabilidad de las funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & , x \geq 1 \\ 2 - x^2 & , x < 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^4 \operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{x}\right) & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$

4. Determinar si para algún número $a \in \mathbb{R}$ existe el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 + ax + a + 3}{x^2 + x - 2}$$

5. Un cordel de 100 metros se debe cortar en dos partes de modo que el producto de ambas partes más el cociente de ambas partes sea la mayor posible. Determinar como se debe cortar el cordel.

Universidad de la Frontera
Facultad de Ingeniería y Ciencias
 Departamento de Matemática y Est.

Prueba # 1 - Cálculo de una variable
primer semestre 2022

Escriba lo más claro posible sus respuestas y sin borrones. ¡Por favor!

- La prueba es **individual**.
- **NO HAY CONSULTAS.**
- Su **celular** debe estar apagado durante el desarrollo de la prueba.

Pregunta	1	2	3	4			7	puntos
Puntaje	20	20	10	10				60
Logro								

Esta Prueba de cátedra apunta a los siguientes resultados de aprendizaje:

- Representar en el plano cartesiano situaciones propias de la geometría y el álgebra.
- Mantener una actitud activa y de curiosidad, buscando diferentes medios para encontrar respuestas a sus interrogantes.

NO SE ACEPTAN PREGUNTAS, los enunciados de los problemas son lo suficientemente claros y precisos. Recuerde que la prueba es individual y está prohibido traficar información.

1. Considere la función $f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 3}{x + 2}$.

Determinar:

- a) Dominio y rango de la función.
- b) Intersecciones con los ejes.
- c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- d) Puntos de máximo y de mínimo.
- e) Intervalos de concavidad y convexidad.
- f) Existencia de asíntotas (verticales, horizontales y oblicuas).
- g) Usando los elementos anteriores hacer la gráfica de la función.

2. Sea f la función definida como

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2)}{x} & , -5 < x < 0 \\ \frac{x}{4(x+1)} & , x \geq 0 \end{cases}$$

- a) Estudiar la continuidad de f en $x = 0$

- b) Hallar las asíntotas oblicuas al gráfico de f

3. Determinar si existen constantes a y b de modo que la siguiente función sea continua.

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & , x < -4 \\ |x + 1| - x & , -4 \leq x < 6 \\ a + bx & , x > 6 \end{cases}$$

4. Sea f una función tal que $f(2) = -3$ y $f'(x) = \sqrt{x^2 + 5}$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Si $g(x) = x^2 f\left(\frac{x}{x-1}\right)$. Hallar $g'(2)$

Taller 2 - Matemática

Primer semestre 2022

Escriba lo más claro posible sus respuestas y sin borradores. Favor apagar celular y dejarlo lejos de su alcance.
¡Por favor, no insista!

NO HAY CONSULTAS

Pregunta	1	2	3	4	5		Total
Puntaje	10	15	15	12	10		62
Logro							

1. Escribir la ecuación de la parábola con vértice en $(2, 4)$ y directriz $x = 1$
2. Hallar la ecuación de la circunferencia con centro en $(-6, -4)$ y tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 - 2x + 10y + 13 = 0$
3. El centro de una circunferencia está sobre la recta $2x - 5y + 21 = 0$. La circunferencia es tangente a los ejes coordenados. Hallar su ecuación

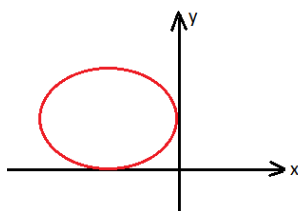


Figura 5.2: circunferencia

4. Reconocer e indicar los elementos notables (vértice, centro, radio, asíntotas, directriz, lado recto, excentricidad, siempre que corresponda), en la ecuación. Graficar esta curva.

$$3y + 4x^2 + 8x - 5 = 0$$

5. Calcula el valor de a y de b para que las rectas $L_1 : ax - 3y + 2 = 0$ y $L_2 : bx + 9y - 5 = 0$ sean paralelas. Se sabe, además, que el punto $P(1, 2)$ pertenece a la recta L_1 .

Prueba # 3 Introducción al Cálculo

140695

1. Calcular el límite de las sucesiones:

$$(a) \ a_n = \sqrt{n+3}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \quad (b) \ b_n = \frac{\sin \theta + 2^2 \sin \frac{\theta}{2} + 3^2 \sin \frac{\theta}{3} + \dots + n^2 \sin \frac{\theta}{n}}{n}$$

2. Hallar el límite de la sucesión (a_n) tal que

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{n}{2n+1} a_n$$

3. Demostrar que $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x - 6}{x + 5} = -1$

4. Calcular los siguientes dos límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{|x^2 - 4|}$

2) $\lim_{x \rightarrow 3} (7 - 2x)^{\cotg \frac{\pi}{6}(x-3)}$

5. Considerar la función $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\cos x - 1} + \frac{2}{\sin^2 x}, & x < 0 \\ A \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{3x}, & x > 0 \end{cases}$

Hallar A y $f(0)$ para que f sea continua en cero.

6. Sea $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ función continua. Demostrar que existe un punto x_0 en $[0, 1]$ tal que $f(x_0) = x_0$

Puntaje: (8+8)+(8)+(8)+(6+6)+(8)+(8) = 60 puntos

Prueba # 3 Introducción al Cálculo

100689

1. Sea $a_n = \frac{n}{3^n}$. Determinar: monotonía, acotamiento y convergencia.
2. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x+3)^5(3x+2)^6}{2+x^{11}}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-5}{x} \right)^3$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{9-x}}{\sqrt{x^3+15} - 2}$

d) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$

3. Dada la función $f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$, $x \neq 2$

a) Calcular $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$

b) Usar la definición δ, ε para probar que $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$

4. Dada la función $f(x) = \begin{cases} e^{x-1} - 1, & 0 < x < 1 \\ 3x^2 - 1, & 1 \leq x < 2 \\ \ln(3x+b), & x \geq 2 \end{cases}$

Analizar la continuidad de f en los puntos $x = 1$ y $x = 2$, estableciendo si ella, en caso de existir es o no reparable.

Puntaje: (3+3+3)+(5+5+5+5)+(4+6)+(4+5) = 48 puntos

Prueba # 3 Introducción al Cálculo

080686

1. Sea $a_n = \frac{(2n+3)(n+1)}{n^2+2}$
- Hallar el límite de a_n para $n \rightarrow \infty$
 - Probar que límite de a_n es el que encontró en (a)
 - Hallar el $N(\varepsilon)$ para que todos los términos a partir de ese $N(\varepsilon)$ se hallen en la vecindad $V(L, \frac{1}{50})$.
 - Determinar cuántos términos de (a_n) se quedan fuera de la $V(L, \frac{1}{50})$.
2. Sean $a_n = \frac{3n}{1-n}$, $b_n = \frac{n}{1+5n}$. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x^2 + 1$. Decidir cuáles de las siguientes sucesiones S

$$a_n, \quad b_n, \quad a_n \cdot b_n, \quad \frac{a_n}{b_n}, \quad \frac{b_n}{a_n}$$

satisface

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(S) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} S)$$

3. Hallar funciones f y g que satisfagan

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x)) = 3$$

4. Se llama **conjunto de puntos límites** de una sucesión (x_n) a todos aquellos puntos que son límite de alguna subsucesión de (x_n) . Hallar el conjunto de puntos límites de

$$x_n = \cos \frac{n\pi}{4} + (-1)^n$$

Determinar el límite superior e inferior de este conjunto de puntos límites.

5. Calcular los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} \quad b) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1} \right)^{x+1} \quad c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$$

6. Usar la definición δ, ε para probar que

$$\lim_{x \rightarrow 2} (4x^3 + 3x^2 - 24x + 22) = 18$$

7. Dibujar y analizar continuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ x+1, & 0 \leq x < 1 \\ x^2 - 4x + 2, & 1 \leq x < 3 \\ x-4, & x \geq 3 \end{cases}$$

Puntaje: (8)+(10)+(6)+(6)+(6+6+6)+(8) + (10) = 60 puntos

Prueba # 3 Introducción al Cálculo

030691

1. Estudiar monotonía, acotamiento y convergencia de las sucesiones:

$$a_n = \frac{n^2 + 5}{n}, \quad b_n = \frac{n}{2n - 1}$$

2. Demostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L \implies \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = L$

3. Sea $a_n \geq 0$. Calcular el límite de la sucesión (a_n) tal que

$$2a_n = a_{n-1} + \frac{9}{a_{n-1}}$$

4. Demostrar que $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x - 2}{x^2 - 3x + 2}$ **no existe**

5. Demostrar que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x^2 - 1}{2x^2 + x + 1} = -1$, usar δ, ε

6. Hallar los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + \frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right]^{a/x}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + 1^2)^{1/2} + (1 + 2^2)^{1/2} + \dots + (1 + n^2)^{1/2}}{3n^2 + 5n - 2}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 + e^{1/x}}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{f(\pi - x) \sin^2 x}, \quad f(x) = 2 \sin x - \sin 2x$

Puntaje: (9+9)+(5)+(5)+(6)+(6)+(5+5+5+5) = 60 puntos

■

Si hay un Dios, es un gran matemático.-Paul Dirac.

■

Soluciones a los Ejercicios**Ejercicio 1(a)**

$$x$$

**Ejercicio 1(b)**

$$(x - y)^2$$

**Ejercicio 1(c)**

$$10 \cdot x - 20$$

**Ejercicio 1(d)**

$$x^2 + y^2$$

**Ejercicio 1(e)**

$$(x + y)^2$$

**Ejercicio 1(f)**

$$\frac{1}{x}$$

**Ejercicio 1(g)**

$$\frac{1}{x + y}$$

**Ejercicio 1(h)**

$$2^x$$

**Ejercicio 1(i)**

$$\sqrt{x + y}$$

**Ejercicio 1(j)**

$$x \geq 20$$

**Ejercicio 1(k)**

$$(3 \cdot x)^2$$



Ejercicio 1(l)

$$3x^2$$

☐**Ejercicio 2(a)**

$$(p + 5n)^2 = p^2 + 10pn + 25n^2$$

☐**Ejercicio 2(b)**

$$(2a + 3b)^2 = 4a^2 + 12ab + 9b^2$$

☐**Ejercicio 2(c)**

$$(a - 7b)^2 = a^2 - 14ab + 49b^2$$

☐**Ejercicio 2(d)**

$$(2a + b)(2a - b) = 4a^2 - b^2$$

☐**Ejercicio 2(e)**

$$(x - y + 2)^2 = x^2 + y^2 + 4 - 2xy + 4x - 4y$$

☐**Ejercicio 2(f)**

$$(x + 5)(x + 3) = x^2 + 8x + 15$$

☐**Ejercicio 2(g)**

$$(x + 5)^3 = x^3 + 15x^2 + 75x + 125$$

☐**Ejercicio 2(h)**

$$x^2 - 16$$

☐**Ejercicio 3(a)**

$$8xz + 12xw = 4x(2z + 3w)$$

☐**Ejercicio 3(b)**

$$12ab + 18ac - 30ad =$$

☐**Ejercicio 3(c)**

$$(3x - 4y)(3x + 4y)$$

☐

Ejercicio 3(d)

$$(ab^2 - w)(ab^2 + w)$$

□

Ejercicio 3(e)

$$(x + y)(a - 1)$$

□

Ejercicio 3(f)

$$(x + 2y)^2 + (x + 2y) = (x + 2y)(x + 2y + 1)$$

□

Ejercicio 4(a)

$$\frac{ax - ay - x + y}{ax + ay - x - y} = \frac{(x - y)(a - 1)}{(x + y)(a - 1)} = \frac{x - y}{x + y}$$

□

Ejercicio 4(b)

$$\frac{(a - b)^2 - c^2}{a^2 - (b + c)^2} = \frac{[(a - b) - c][(a - b) + c]}{[a - (b + c)][a + (b + c)]} = \frac{a - b + c}{a + b + c}$$

□

Ejercicio 4(c)

$$\frac{1 - \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}}{\frac{x - y}{x + y} - \frac{x + y}{x - y}} = \frac{-2y^2}{x - y^2 - (x + y)^2} = \frac{-2y^2}{-4xy} = \frac{y}{2x}$$

□

Ejercicio 5(a)

$$81$$

pues

$$y^2 - 18y + 81 = (y - 9)^2$$

□

Ejercicio 5(b)

$$16ab$$

pues

$$a^2 + 16ab + 64b^2 = (a + 8b)^2$$

□

Ejercicio 5(c)

$$9y^2$$

pues

$$9y^2 - 30y + 25 = (3y - 5)^2$$

□

Ejercicio 6(a)

$$12ax$$

□

Ejercicio 6(b)

$$\sqrt{xy} \left(\sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}} \right) = x - y$$

□

Ejercicio 6(c)

$$\sqrt{\frac{2(a^2 + b^2)^2}{c^2} - \frac{2(a^2 - b^2)^2}{c^2}} = 2\sqrt{2}\frac{ab}{c}$$

□

Ejercicio 6(d)

$$\left(\sqrt{\frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{y}} \right) \left(\sqrt{\frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{y}} \right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$$

□

Ejercicio 7(a)

$$\frac{7}{2x} - \frac{8}{3x} + \frac{9}{4x} - \frac{1}{3} = \frac{31-7x}{6x} \implies \frac{37-4x}{12x} = \frac{31-7x}{6x}$$

Despues de multiplicar por $12x$ se tiene

$$x = \frac{5}{2}$$

□

Ejercicio 7(b) Despues de reducir queda

$$12x^2 - 118x + 276 = 0 \implies x = 6 \vee x = \frac{23}{6}$$

□

Ejercicio 7(c)

$$\sqrt{1+4\sqrt{x}} = 1 + \sqrt{x} \implies 1+4\sqrt{x} = (1+\sqrt{x})^2$$

Se simplifica para tener que

$$2\sqrt{x} = x$$

Se eleva al cuadrado

$$4x = x^2 \implies x(x-4) = 0 \implies x = 0 \vee x = 4$$

□

Ejercicio 8(a) considera éste como un desafío.

□